Lagrangeův interpolační polynom

- **Zadání:**

  Máme zadané diskrétní funkční hodnoty nějaké funkce f v několika bodech $x_0, \ldots, x_n$. Těmito hodnotami chceme proložit polynom $L(x)$, který bude samozřejmě stupně nejvýše n.

  Například pro 1 bod to bude konstantní funkce, pro 2 body přímka (nebo konstantní funkce, pokud budou funkční hodnoty v obou bodech stejné), pro 3 body parabola (případně přímka nebo konstantní funkce), atd.

- **Příklad:**

  Zkusme proložit jednoduchý Lagrangeův interpolační polynom body zadanými dle tabulky

i	0	1	2	3
x_i	-4	-1	0	2
$f(x_i)$	-28	-16	-36	-40

.

  Máme 4 body, hledáme tedy polynom stupně nejvýše 3. Postup je následující.

  – Zkonstruujeme čtyři pomocné polynomy třetího stupně, z nichž každý se bude v jednom z bodů x_i rovnat zadané funkční hodnotě $f(x_i)$ a v ostatních třech bodech bude roven nule.

  – Polynomy sečteme. Tím dostaneme polynom který je opět 3. stupně a má požadované vlastnosti, tedy prochází všemi čtyřmi body.

  Sestavíme první pomocný polynom $l_0(x)$ výše uvedených vlastností. Body x_1, x_2, x_3, ve kterých má být nulový, budou jeho kořeny, a tedy jeho tvar bude

$$l_0(x) = \boxed{?} \times (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

  kde $\boxed{?}$ určíme z požadavku, aby se polynom v bodu x_0 rovnal hodnotě $f(x_0)$, tedy

$$l_0(x_0) = \boxed{?} \times (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \overset{!}{=} f(x_0),$$

  a proto

$$\boxed{?} = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)},$$

  takže první pomocný polynom bude

$$l_0(x) = \frac{f(x_0)\,(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}.$$

  Podobně zkonstruujeme ostatní pomocné polynomy:

$$l_1(x) = \frac{f(x_1)\,(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)},$$
$$l_2(x) = \frac{f(x_2)\,(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)},$$
$$l_3(x) = \frac{f(x_3)\,(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Hledaný Lagrangeův interpolační polynom je pak jejich součtem

$$L(x) = l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) + l_3(x).$$

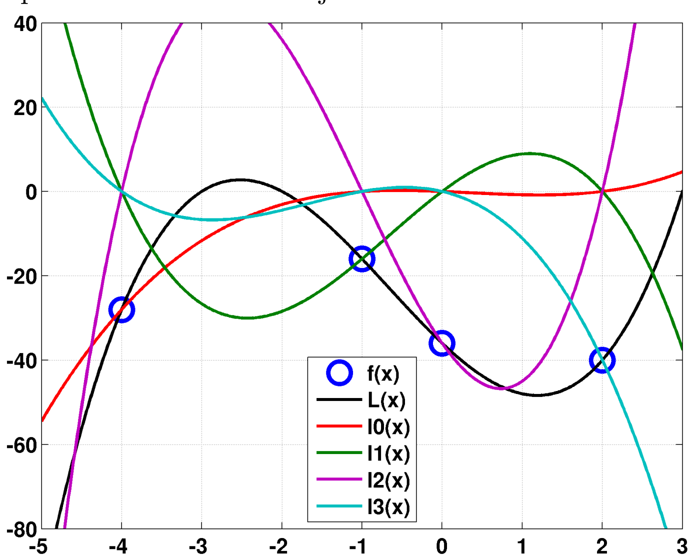
Pro konkrétní hodnoty dané v tabulce máme pomocné polynomy

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{-28(x-(-1))(x-0)(x-2)}{(-4-(-1))(-4-0)(-4-2)} &&= \frac{7}{18}\, x\,(x+1)\,(x-2)\\
l_1(x) &= \frac{-16(x-(-4))(x-0)(x-2)}{(-1-(-4))(-1-0)(-1-2)} &&= -\frac{16}{9}\, x\,(x+4)\,(x-2)\\
l_2(x) &= \frac{-36(x-(-4))(x-(-1))(x-2)}{(0-(-4))(0-(-1))(0-2)} &&= \frac{9}{2}\,(x+4)\,(x+1)\,(x-2)\\
l_3(x) &= \frac{-40(x-(-4))(x-(-1))(x-0)}{(2-(-4))(2-(-1))(2-0)} &&= -\frac{10}{9}\, x\,(x+4)\,(x+1)
\end{aligned}$$

a Lagrangeův polynom

$$L(x) \;=\; 2x^3 + 4x^2 - 18x - 36 \quad = \quad 2\,(x+3)\,(x-3)\,(x+2),$$

jejichž průběh si můžete prohlédnout na následujícím obrázku.



- **Obecný tvar:**

Jak jsme viděli výše, Lagrangeův interpolační polynom n-tého stupně lze obecně zapsat jako

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\Gamma_i(x),$$

kde

$$\Gamma_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Lagrangeův polynom lze také zapsat jako (viz přednášky)

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\,\omega_n'(x_i)},$$

kde jsme označili

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

Snadno lze ověřit, že derivace funkce $\omega_n(x)$ v bodu x_i, tedy $\omega_n'(x_i)$ je dána vztahem

$$\omega_n'(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n),$$

tedy v podstatě odpovídá funkční hodnotě $\omega_n(x_i)$ s vynecháním jednoho členu.