FYZIKA

Vysokoškolská učebnice obecné fyziky

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
VUTIUM
PROMETHEUS®

Edice Překlady vysokoškolských učebnic, svazek 1
Řídí: Doc. RNDr. Petr Dub, CSc.

Na překladu a redakci učebnice se podíleli:

RNDr. Milada Bartlová, PhD., Vysoké učení technické v Brně (kap. 22, 23)
RNDr. Zdeněk Bochníček, PhD., Masarykova univerzita Brno (kap. 1, 2, 3, 10)
Doc. Ing. Libor Dědek, CSc., Vysoké učení technické v Brně (kap. 32, 33)
Prof. RNDr. Ludmila Eckertová, CSc., Univerzita Karlova Praha (kap. 34)
Doc. RNDr. Antonín Havránek, CSc., Univerzita Karlova Praha (kap. 13, 15)
Prof. RNDr. Václav Holý, CSc., Masarykova univerzita Brno (kap. 9, 11, 12)
RNDr. Michal Horák, CSc., Vysoké učení technické v Brně (kap. 27, 28)
RNDr. Karel Houfek, Univerzita Karlova Praha (kap. 20)
Doc. RNDr. Petr Chvosta, CSc., Univerzita Karlova Praha (kap. 16, 17)
Prof. RNDr. Jiří Komrska, CSc., Vysoké učení technické v Brně (kap. 37); redakce kap. 34–38
Prof. RNDr. Michal Lenc, PhD., Masarykova univerzita Brno (kap. 43, 44, 45)
Doc. RNDr. Bohumila Lencová, CSc., Akademie věd ČR Brno (kap. 39); redakce kap. 39–45
Prof. RNDr. Miroslav Liška, DrSc., Vysoké učení technické v Brně (kap. 36)
RNDr. Vladimír Mitvalský, Vysoké učení technické v Brně (kap. 31)
Doc. RNDr. Jana Musilová, CSc., Masarykova univerzita Brno (kap. 4–8); redakce kap. 1–12
Doc. RNDr. Vladislav Navrátil, CSc., Masarykova univerzita Brno (kap. 29, 30)
Prof. RNDr. Jan Novotný, CSc., Masarykova univerzita Brno (kap. 38)
Doc. RNDr. Jan Obdržálek, CSc., Univerzita Karlova Praha (kap. 14, 18, 19, 21); redakce kap. 13–21
RNDr. Jiří Spousta, PhD., Vysoké učení technické v Brně (kap. 40, 41)
Doc. RNDr. Jiří Světlík, CSc., Vysoké učení technické v Brně (kap. 35)
Doc. RNDr. Tomáš Šikola, CSc., Vysoké učení technické v Brně (kap. 42)
Doc. RNDr. Marian Štrunc, CSc., Vysoké učení technické v Brně (kap. 26); redakce kap. 22–33
Prof. RNDr. Pavel Tománek, CSc., Vysoké učení technické v Brně (kap. 24)
RNDr. Vladimír Zdražil, PhD., Vysoké učení technické v Brně (kap. 25, 26)

Hlavní redaktor českého překladu Doc. RNDr. Jan Obdržálek, CSc.

DAVID HALLIDAY – ROBERT RESNICK – JEARL WALKER

FYZIKA

Vysokoškolská učebnice obecné fyziky

Redakce českého překladu
Petr Dub, Jiří Komrska, Bohumila Lencová,
Jana Musilová, Jan Obdržálek a Marian Štrunc

Vysoké učení technické v Brně – Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha

Projekt vydání českého překladu je věnován 100. výročí založení Vysokého učení technického v Brně.
Koordinace projektu Alena Mizerová



Jednota českých matematiků a fyziků doporučuje používat tuto učebnici pro základní kurz fyziky na vysokých školách

Diskuse ke knize http://www.vutbr.cz/nakl/fyzika

Přeloženo z anglického originálu *Fundamentals of Physics*,
Fifth Editon Extended, 1997, John Wiley & Sons, Inc.,
s přihlédnutím k 6. vydání z roku 2001

All rights reserved. Authorized translation from the English language edition published by John Wiley & Sons, Inc.

Všechna práva vyhrazena. Autorizovaný překlad anglického vydání publikovaného nakladatelstvím John Wiley & Sons, Inc. Žádná část díla nesmí být reprodukována nebo kopírována v podobě mechanické, elektronické, anebo šířena jakýmkoli jiným informačním systémem bez předchozího souhlasu majitelů autorských práv.

Copyright © 1997 by John Wiley & Sons, Inc.
© 2000, Vysoké učení technické v Brně, nakladatelství VUTIUM
Translation © 2000, J. Komrska, B. Lencová, J. Musilová, J. Obdržálek, M. Štrunc a kol.
Editors © 2000, P. Dub, J. Komrska, B. Lencová, J. Musilová, J. Obdržálek a M. Štrunc

Pevná vazba:
ISBN 80-214-1869-9 (VUTIUM)
ISBN 81-7196-214-7 (PROMETHEUS)

Brožovaný komplet:
ISBN 80-214-1868-0 (VUTIUM)
ISBN 81-7196-213-9 (PROMETHEUS)

Předmluva k českému vydání

Abychom něčemu porozuměli, musíme to roztrhat na kousky a ty znovu sestavit do podoby, která nás uspokojí. Bude se nejspíš lišit od původního tvaru už vzhledem k růzností našich myslí. Naše syntéza je však výsledkem vlastního úsilí, studia a mnoha diskusí a musíme za ni převzít osobní zodpovědnost.

J. G. Synge
(z předmluvy ke knize Relativity: The Special Theory)

Učebnice Davida Hallidaye a Roberta Resnicka *Physics for Students of Science and Engineering* vyšla poprvé v roce 1960. Od té doby je s úpravami, které odrážejí vývoj fyziky a její výuky, opakovaně vydávána a stala se jednou z nejužívanějších učebnic úvodních kurzů nejen v USA, ale i v jiných zemích. Je to nejspíše přiměřeností výkladu, tak důležitou na začátku studia, a množstvím vskutku dobrých příkladů, včetně kvalitativních. Názorný výklad, který vychází z konkrétních situací a problémů, není přetěžován matematikou, a je posilován řešenými příklady a kontrolními otázkami vhodně zařazovanými do textu. Poslední tři vydání, na nichž se podílí Jearl Walker, zdařile rozvíjejí kvalitativní uvažování, tolik potřebné pro pochopení fyziky. Student se připravuje k řešení příkladů i složitějších problémů na konci kapitol tak, aby vycházel z fyzikální představy, a nikoli z formálního užití vzorců.

Při tomto českém překladu jsme vycházeli z 5. vydání originálu. Naše učebnice však není doslovným překladem. Tam, kde jsme to považovali za vhodné, jsme přihlíželi ke 4. a zejména k nejnovějšímu 6. vydání, které vyšlo v době dokončování českého překladu. V některých místech jsme původní text výrazněji upravili nebo doplnili. O změnách jsme informovali nakladatelství John Wiley & Sons a jednoho z autorů prof. Jearla Walkera, který nám poskytl svůj souhlas a jemuž srdečně děkujeme za jeho zájem o české vydání.

Americké učebnice mají blízko k živé hovorové řeči a způsob vyjadřování autorů (zvláště v úvodních částech kapitol, kde má působit především motivačně) je volnější, než jak jsme zvyklí z tradiční české studijní literatury. Tyto rysy užitečné v úvodní učebnici jsme se snažili zachovat. Všichni, kdo jsme se na českém vydání podíleli, jsme si dali hodně práce, abychom udrželi věcnou správnost a přitom zachovali názornost a srozumitelnost výkladu. Úkol to byl mnohem těžší, než jsme si mysleli před zahájením práce. Byla to pro nás i lekce vzájemného tříbení názorů a tolerance. Při přípravě českého překladu jsme si mnohokrát připomněli myšlenku J. L. Syngeho, která ostatně platí pro každé poctivé studium, pro každé trpělivé poznávání.

Předkládaná učebnice pokrývá celý kurz obecné fyziky, klasické i moderní, na vysoké škole. Je zvláště vhodná pro inženýrské a přírodovědné obory, bude jí však rozumět i středoškolský student zajímající se o fyziku. Všem čtenářům doporučujeme začít článkem „Jak pracovat s touto knihou“.

Doufáme, že vám učebnice usnadní spletitou a dlouhou cestu hledání jednoduchého ve složitém, že vám pomůže vytvořit si výstižný obraz o fyzice, porozumět jí a naučit se ji užívat. Ať vám kniha přinese úspěch při studiu i radost z dobrodružství poznání.

Petr Dub *Jan Obdržálek*

Poděkování

Vydavatelé děkují všem, kteří se na vzniku českého vydání podíleli. Za vstřícný přístup panu Josephu Grossovi a paní Rose Gonzalez z nakladatelství John Wiley & Sons; prof. RNDr. Ivanu Šantavému, CSc., a RNDr. Vladimíru Mitvalskému za cenné konzultace, RNDr. Janě Vláškové za nevšední pečlivost a důslednost při sjednocování rukopisu a redakci textu, PhDr. Miloslavě Hruškové za jazykovou revizi, RNDr. Janě Pavlíkové za pomoc při čtení korektur 3. části, RNDr. Karlu Houfkovi za odbornou i technickou pomoc ve 2. části, Hynku Němcovi za provedení mnoha úprav a změn v textu i v obrázcích při všech korekturách, RNDr. Karlu Horákovi, CSc., za trpělivost a preciznost při grafickém a typografickém zpracování učebnice, Ing. Jaromíru Pěnčíkovi za pochopení finanční náročnosti realizace projektu a v neposlední řadě i pracovníkům Tiskáren v Havlíčkově Brodě za profesionální zaujetí při polygrafickém zpracování knihy.

Projekt českého vydání učebnice jako součást akcí věnovaných 100. výročí založení Vysokého učení technického v Brně podpořilo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR. K podpoře se přihlásili také partneři VUT v Brně:

ABB http://www.abb.cz

AutoCont COMPUTER SYSTEMS http://www.autocont.cz

AVAYA communication
The Former Enterprise Networks Group of
Lucent Technologies Bell Labs Innovations
http://www.avaya.cz

ČEZ http://www.cez.cz

IMOS Brno, a.s. http://www.imos.as

MITTAG POZEMNÍ A PRŮMYSLOVÉ STAVITELSTVÍ http://www.mittag.cz

SIEMENS http://www.siemens.cz

Poděkování autorů učebnice

Učebnice přináší mnohem více příspěvků k osvětlení tématu, než by mohl kterýkoliv z autorů vytvořit samostatně. J. Richard Christman (U. S. Coast Guard Academy) nám i tentokrát vytvořil množství dobrých dodatků. Jeho znalost naší knihy a doporučení jsou pro studenty i pro učitele nedocenitelné. James Tanner (Georgia Institute of Technology) a Gary Lewis (Kennesaw State College) nám poskytli moderní software, zcela vyhovující cvičením a příkladům v textu. J. Richard Christman (U. S. Coast Guard Academy) a Glen Terrell (University of Texas, Arlington) poskytli příklady v částech textu, týkajících se počítačových či na počítačích vytvořených výpočtů. Jerry Shi (Pasadena City College) se ujal herkulovského úkolu vypracovat řešení ke všem cvičením a úlohám uvedeným v textu. Děkujeme Johnu Merrillovi (Brigham Young University) a Edwardu Derringhovi (Wentworth Institute of Technology) za množství užitečných připomínek. Děkujeme také Georgi W. Huklovi (Oxnard, California) za kontrolu správných odpovědí na konci knihy.

Jsme velmi rádi, že nám vydavatelství John Wiley poskytlo značnou organizační pomoc a podporu prostřednictvím našeho předchozího redaktora Cliffa Millse, který řídil naše úsilí a byl nám soustavnou oporou. Když byl Cliff v nakladatelství pověřen jinými úkoly, nalezli jsme kompetentní náhradu pro dokončení díla v jeho nástupci Stuartu Johnsonovi. Rachel Nelson koordinovala redigování textu a předtiskovou přípravu. Vedoucí marketingu Catherine Faduska i její kolega Ethan Goodman věnovali publikaci své neúnavné úsilí. Jennifer Bruer připravila kvalitní svazek doplňkových materiálů. Monica Stipanov a Julia Salsbury se vynikajícím způsobem vyrovnaly s lektorskými posudky a administrativou.

Děkujeme Lucille Buonocore, naší velmi schopné produkční, a Cathy Ronda, naší výkonné redaktorce, že dokázaly shromáždit a poskládat všechny díly mozaiky a provést nás složitým procesem výroby. Náš dík zaslouží i další: Dawn Stanley za grafický návrh, Brenda Griffing za čtení rukopisu, Edward Starr za řízení programu pro tvorbu ilustrací, Lilian Brady za čtení korektur a všichni další členové produkčního týmu.

O fotografický materiál se postarala Stella Kupferburg a její spolupracovníci, zejména Hilary Newman a Pat Cadley. Jejich pátrání po neobvyklých a zajímavých fotografiích, které vypovídají o fyzikálních principech, bylo velice úspěšné. Boris Starosta a Irene Nunes pečlivě vyvíjeli program pro tvorbu barevných ilustrací, prověřili každý jeho prvek, a kde bylo třeba, navrhli úpravy — děkujeme jim za to. S velkou vděčností vzpomínáme na zesnulého Johna Balbalise, jehož pečlivá ruka a hluboké porozumění pro fyziku doposud vyzařují z každého grafu.

Zvláštní poděkování patří Edwardu Millmanovi za tvůrčí přístup k rukopisu publikace. Prošel ho s námi do posledního slova a kladl nám spousty otázek z pohledu studenta. Mnohé z jeho otázek a návrhů změn napomohly lepší srozumitelnosti knihy. Irene Nunes se v poslední fázi ujala konečného přehlédnutí a sjednocení rukopisu.

Zvlášť vděční jsme početným studentům, kteří pracovali se čtvrtým vydáním učebnice, věnovali nám svůj čas, vyplnili a zaslali nám zpět odpověďní lístky. Studenti jako koneční uživatelé tohoto textu jsou pro nás velice důležití. Tím, že se s námi podělí o své názory, pomáhají nám vytvořit co nejkvalitnější dílo, odpovídající finanční investici při nákupu učebnic. Uvítáme, pokud nám i další uživatelé této knihy sdělí své myšlenky a poznámky, abychom mohli text v budoucích letech nadále zlepšovat. Jsme obzvlášť vděční studentům, kteří pracovali v závěrečné zájmové skupině v Union College, Schenecdaty, New York: byli to Matthew Glogowski, Josh Kane, Lauren Papa, Phil Tavernier, Suzanne Weldon a Rebecca Willis. A konečně je třeba zmínit také naše externí lektory — všichni byli vynikající a my jsme jim za to zavázáni:

Maris A. Abolins (Michigan State University), Barbara Andereck (Ohio Wesleyan University), Albert Bartlett (University of Colorado), Michael E. Browne (University of Idaho), Timothy J. Burns (Leeward Community College), Joseph Buschi (Manhattan College), Philip A. Casabella (Rensselaer Polytechnic Institute), Randall Caton (Christopher Newport College), J. Richard Christman (U.S. Coast Guard Academy), Roger Clapp (University of South Florida), W. R. Conkie (Queen's University), Peter Crooker (University of Hawaii, Manoa), William P. Crummett (Montana College of Mineral Science and Technology), Eugene Dunnam (University of Florida), Robert Endorf (University of Cincinnati), F. Paul Esposito (University of Cincinnati), Jerry Finkelstein (San Jose State University), Alexander Firestone (Iowa State University), Alexander Gardner (Howard University), Andrew L. Gardner (Brigham Young University), John Gieniec (Central

Missouri State University), John B. Gruber (San Jose State University), Ann Hanks (American River College), Samuel Harris (Purdue University), Emily Haught (Georgia Institute of Technology), Laurent Hodges (Iowa State University), John Hubisz (North Carolina State University), Joey Huston (Michigan State University), Darrell Huwe (Ohio University), Claude Kacser (University of Maryland), Leonard Kleinman (University of Texas, Austin), Earl Koller (Stevens Institute of Technology), Arthur Z. Kovacs (Rochester Institute of Technology), Kenneth Krane (Oregon State University), Sol Krasner (University of Illinois, Chicago), Peter Loly (University of Manitoba), Robert R. Marchini (Memphis State University), David Markowitz (University of Connecticut), Howard C. Mcallister (University of Hawaii, Manoa), W. Scott Mccullough (Oklahoma State University), James H. Mcguire (Tulane University), David M. Mckinstry (Eastern Washington University), Joe P. Meyer (Georgia Institute of Technology), Roy Middleton (University of Pennsylvania), Irvin A. Miller (Drexel University), Eugene Mosca (United States Naval Academy), Michael O'Shea (Kansas State University), Patrick Papin (San Diego State University), George Parker (North Carolina State University), Robert Pelcovits (Brown University), Oren P. Quist (South Dakota State University), Jonathan Reichart (SUNY – Buffalo), Manuel Schwartz (University of Louisville), Darrell Seeley (Milwaukee School of Engineering), Bruce Arne Sherwood (Carnegie Mellon University), John Spangler (St. Norbert College), Ross L. Spencer (Brigham Young University), Harold Stokes (Brigham Young University), Jay D. Strieb (Villanova University), David Toot (Alfred University), J. S. Turner (University of Texas, Austin), T. S. Venkataraman (Drexel University), Gianfranco Vidali (Syracuse University), Fred Wang (Prairie View A&M), Robert C. Webb (Texas A&M University), George Williams (University of Utah), David Wolfe (University of New Mexico).

Doufáme, že naše slova alespoň do jisté míry vypovídají o úžasu, kterým nás naplňuje fyzika jako základní hodinový stroj celého vesmíru. Chceme také věřit, že tato slova vyjádří snad jen malou část úcty a respektu, které k tomuto stroji chováme.

David Halliday
6536 NE Windermere Road
Seattle, WA 98105
USA

Robert Resnick
Rensselaer Polytechnic Institute
Troy, NY 12181
USA

Jearl Walker
Cleveland State University
Cleveland, OH 44115
USA

Autoři fotografií

Kapitola 1

Strana 1: Martin Bond/Science Photo Source/Photo Researchers. Strana 5: CNRI/Science Photo Library/Photo Researchers. Strana 6: Steven Pitkin. Strana 7: Courtesy National Institute of Standards and Measures. Strana 8: Courtesy Bureau International des Poids et Mesures, France.

Kapitola 2

Strana 12: Kevin Levine/Allsport. Strany 20–21: Courtesy U. S. Air Force. Strana 24: James Sugar/Black Star. Strana 28: Courtesy Dr. Mike Isaacson and Dr. M. Ohtsyki, Cornell University. Strana 36: Bianca Lavies. Strana 38: Courtesy The Boston Globe.

Kapitola 3

Strana 39: Courtesy David des Marais, © 1976 The Cave Research Foundation.

Kapitola 4

Strana 58: J. Yulsman/The Image Bank. Strana 64: C. E. Miller. Strana 66 vlevo: Richard Megna/Fundamental Photographs. Strana 66: Jamie Budge/Gamma Liaison. Strana 82: Mike Powell/Allsport. Strana 85: Steve Brown/Leo de Wys, Inc.

Kapitola 5

Strana 87: AP/Wide World Photos. Strana 113: Courtesy National Archives. Strana 114: Hartwell/Sygma.

Kapitola 6

Strana 118: Gerard Lucz/© Natural History Photographic Agency. Strana 124: Mark Junak/Tony Stone World Wide. Strana 125: Richard-Artdia/Agence Vandystadt/Photo Researchers. Strana 128: Photograph reproduced with permission of Ringling Brothers Barnum & Bailey Circus, courtesy Circus World Museum. Strana 131: Allen Steele/Allsport. Strana 134: Jerry Schad/Photo Researchers. Strana 136: Susan Copen Oken/Dot Pictures.

Kapitola 7

Strana 141: Steven E. Sutton/Duomo Photography, Inc. Strana 142: Courtesy Library of Congress. Strana 148: AP/Wide World Photos. Strana 156: Photri, Inc. Strana 163: Photo by James Baker, courtesy Dennis Milon.

Kapitola 8

Strana 169: John Livzey/AllStock, Inc./Tony Stone World Wide. Strana 176: Jeff Schulty/Leo de Wys, Inc. Strana 186: David Stoecklein/The Stock Market. Strana 189: Photo by Justo Alfonso, courtesy of Rocky Raisen, Shenandoah Junior High School. Strana 205: Courtesy Library of Congress.

Kapitola 9

Strana 207: Lois Greenfield/Bruce Coleman, Inc. Strana 208: C. E. Miller. Strana 212: Anthony Marshal/Woodfin Camp & Associates. Strana 223: Courtesy NASA. Strana 231: Mauritius-W. Fisher/Photri. Inc.

Kapitola 10

Strana 237: C. E. Miller. Strana 238 (nahoře): Bruce Kent/Earth Scenes/Animals. Strana 238 (uprostřed): Science Photo Library/Photo Researchers. Strana 238 (dole): Russ Kinne/Comstock, Inc. Strana 246: Courtesy Mercedes-Benz of North America. Strana 255: George Lang/Sports Illustrated/© Time, Inc. Strana 256: Superman #48, October 1990. © D.C. Comics. All rights reserved. Reprinted with permission.

Kapitola 11

Strana 263: Guido Alberto Rossi/The Image Bank. Strana 264: Obr. 11.1a: Steven E. Sutton/Duomo Photography, Inc. Obr. 11.1b: Rick Rickman/Duomo Photography, Inc. Strana 272: Roger Ressmeyer/Starlight. Strana 290: Courtesy Lick Observatory. Strana 293: Courtesy Lawrence Livermore Laboratory, University of California.

Kapitola 12

Strana 296: Courtesy Ringling Brothers and Barnum & Bailey Circus. Strana 297: Richard Megna/Fundamental Photographs. Strana 298 (vlevo): Courtesy Alice Halliday. Strana 298 (vpravo): Elizabeth Weiland/Photo Researchers.

Kapitola 13

Strana 329: Jose Azel/Woodfin Camp & Associates. Strana 330: Fred Hirschmann/Allstock/Tony Stone Images/New York, Inc. Strana 331: Andy Levin/Photo Researchers. Strana 334: Richard Negri/Gamma Liaison. Strana 344: Courtesy MicroMeasurements Division, Measurements Group, Inc., Raleigh, North Carolina. Strana 349: Hideo Kurihara/Tony Stone Images/New York, Inc.

Kapitola 14

Strana 356: Courtesy Lund Observatory. Strana 357: Courtesy NASA. Strana 364: Kim Gordon/AstroStock. Strana 368: Courtesy NASA. Strana 373: Courtesy National Radio Astronomy Observatory. Strana 381: Courtesy NASA.

Kapitola 15

Strana 384: Steven Frink/The Waterhouse. Strana 392: T. Orban/Sygma. Strana 394 (nahoře): Will McIntyre/Photo Researchers. Strana 394 (dole): Courtesy Volvo North American Corporation. Strana 395: Courtesy D. H. Peregrine, University of Bristol.

Kapitola 16

Strana 409: Tom van Dyke/Sygma. Strana 410: Kent Knudson/FPG International. Strana 425: Bettmann Archive. Strana 431: Courtesy NASA.

Kapitola 17

Strana 438: John Visser/Bruce Coleman, Inc. Strana 455: Richard Megna/Fundamental Photographs. Strana 456: Courtesy T. D. Rossing, Northern Illinois University.

Kapitola 18

Strana 466: Stephen Dalton/Animals Animals. Strana 467: Howard Sochurak/The Stock Market. Strana 473: Ben Rose/The Image Bank. Strana 475: Bob Gruen/Star File. Strana 476: John Eastcott/Yva Momativk/DRK Photo. Strana 482: Philippe Plailly/Science Photo Library/Photo Researchers. Strana 484: Courtesy NASA.

Kapitola 19

Strana 495: Tom Owen Edmunds/The Image Bank. Strana 501: AP/Wide World Photos. Strana 513: Peter Arnold/Peter Arnold, Inc. Strana 514: Courtesy Daedalus Enterprises, Inc.

Kapitola 20

Strana 526: Bryan and Cherry Alexander Photography.

Kapitola 21

Strana 552: Steven Dalton/Photo Researchers. Strana 561: Richard Ustinich/The Image Bank. Strana 568 (vlevo): Cary Wolinski/Stock, Boston. Strana 568 (vpravo): Courtesy of Professor Bernard Hallet, Quaternary Research Center, University of Washington, Seattle.

Kapitola 22

Strana 577: Michael Watson. Strana 578: Fundamental Photographs. Strana 579: Courtesy Xerox. Strana 580: Johann Gabriel Doppelmayr, Neuentdeckte Phaenomena von Bewünderswurdigen Würckungen der Natur, Nuremberg, 1744. Strana 587: Courtesy Lawrence Berkeley Laboratory.

Kapitola 23

Strana 593: Quesada/Burke Studios. Strana 604: Russ Kinne/Comstock, Inc. Strana 606: Courtesy Environmental Elements Corporation.

Kapitola 24

Strana 618: E. R. Degginger/Bruce Coleman, Inc. Strana 628 (nahoře): C. Johnny Autery. Strana 628 (dole): Courtesy E. Philip Krider, Institute for Atmospheric Physics, University of Arizona, Tucson.

Kapitola 25

Strany 640 a 645: Courtesy NOAA. Strana 657: Courtesy Westinghouse Corporation.

Kapitola 26

Strana 668: Goivaux Communication/Phototake. Strana 669: Paul Silvermann/Fundamental Photographs. Strana 678: © The Harold E. Edgerton 1992 Trust/Courtesy Palm Press, Inc. Strana 679: Courtesy The Royal Institute, England.

Kapitola 27

Strana 693: UPI/Corbis-Bettmann. Strana 699: The Image Works. Strana 706: Laurie Rubie/Tony Stone Images/New York, Inc. Strana 708 (nahoře): Courtesy AT&T Bell Laboratories. Strana 708 (dole): Courtesy Shoji Tonaka/International Superconductivity Technology Center, Tokyo, Japan.

Kapitola 28

Strana 715: Norbert Wu. Strana 716: Courtesy Southern California Edison Company.

Kapitola 29

Strana 743: Johnny Johnson/Earth Scenes/Animals Animals. Strana 744: Schneps/The Image Bank. Strana 746: Courtesy Lawrence Berkeley Laboratory, University of California. Strana 747: Courtesy Dr. Richard Cannon, Southeast Missouri State University, Cape Girardeau. Strana 752: Courtesy John Le P. Webb, Sussex University, England. Strana 753: Courtesy Dr. L. A. Frank, University of Iowa. Strana 756: Courtesy Fermi National Accelerator Laboratory.

Kapitola 30

Strana 773: Michael Brown/Florida Today/Gamma Liaison. Strana 774: Courtesy Education Development Center.

Kapitola 31

Strana 798: Dan McCoy/Black Star. Strana 802: Courtesy Fender Musical Instruments Corporation. Strana 806: Courtesy Jenn-Air Co. Strana 811: Courtesy The Royal Institute, England.

Kapitola 32

Strana 833: Bob Zehring. Strana 834: Runk/Schoenberger/Grant Heilman Photography. Strana 841: Peter Lerman. Strana 844 (vpravo): Courtesy Ralph W. DeBlois. Strana 844 (vlevo): R. E. Rosenweig, Research and Science Laboratory, courtesy Exxon Co. USA.

Kapitola 33

Strana 859: Courtesy Haverfield Helicopter Co. Strana 862: Courtesy Hewlett Packard. Strana 875 (vlevo): Steve Kagan/Gamma Liaison. Strana 875 (vpravo): Ted Cowell/Black Star.

Kapitola 34

Strana 889: Courtesy Hansen Publications. Strana 898: © 1992 Ben and Miriam Rose, from the collection of the Center for Creative Photography, Tucson. Strana 901: Diane Schiumo/Fundamental Photographs. Strana 903: PSSC Physics, 2nd edition; © 1975 D.C. Heath and Co. with Education Development Center, Newton, MA. Strana 904: Courtesy Lockheed Advanced Development Company. Strana 906 (vlevo): Courtesy Bausch & Lomb. Strana 906 (vpravo): Tony Stone Images/New York, Inc. Strana 908: Will and Deni McIntyre/Photo Researchers. Strana 915: Cornell University.

Kapitola 35

Strana 920: Courtesy Courtauld Institute Galleries, London. Strana 922 (vlevo): Frans Lanting/Minden Pictures, Inc. Strana 922 (vpravo): Wayne Sorce. Strana 930: Dr. Paul A. Zahl/Photo Researchers. Strana 931: Courtesy Matthew J. Wheeler. Strana 942: Piergiorgio Scharandis/Black Star.

Kapitola 36

Strana 949: E. R. Degginger. Strana 953: Runk Schoenberger/Grant Heilman Photography. Strana 954: From *Atlas of Optical Phenomena* by M. Cagnet et al., Springer-Verlag, Prentice Hall, 1962. Strana 962: Richard Megna/Fundamental Photographs. Strana 964: Courtesy Dr. Helen Ghiradella, Department of Biological Sciences, SUNY, Albany. Strana 974: Courtesy Bausch & Lomb.

Kapitola 37

Strana 977: Georges Seurat, French, 1859–1891, *A Sunday on La Grande Jatte*, 1884. Oil on canvas; 1884–86, 207,5 × 308 cm; Helen Birch Bartlett Memorial Collection, 1926. Photograph © 1996, The Art Institute of Chicago. All Rights Reserved. Strana 978: Ken Kay/Fundamental Photographs. Strana 979, 985 a 989: From *Atlas of Optical Phenomena* by Cagnet, Francon, Thierr, Springer-Verlag, Berlin, 1962. Strana 986: AP/Wide World Photos, Inc. Strana 987 (nahoře): Cath Ellis/Science Photo Library/Photo Researchers. Strana 993: Department of Physics, Imperial College/Science Photo Library/Photo Researchers. Strana 994: Peter L. Chapman/Stock, Boston. Strana 1002 (vlevo): Kjell B. Sandved/Bruce Coleman, Inc. Strana 1002 (vpravo): Courtesy Professor Robert Greenler, Physics Department, University of Wisconsin.

Kapitola 38

Strana 1006: T. Tracy/FPG International. Strana 1007: Courtesy Hebrew University of Jerusalem, Israel.

Kapitola 39

Strana 1033: Lawrence Berkeley Laboratory/Science Photo Library/Photo Researchers. Strana 1042: Courtesy A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, and T. Kawasaki/Advanced Research Laboratory, Hitachi, Ltd., Kokubinju, Tokyo; H. Ezawa, Department of Physics, Gakushuin University, Mejiro, Tokyo. Strana 1043 (nahoře): Courtesy Riber Division of Instruments, Inc. Strana 1043 (dole): From PSSC film "Matter Waves," courtesy Education Development Center, Newton, Massachusetts. Strana 1047: Philippe Plailly/Science Photo Library/Photo Researchers.

Kapitola 40

Strana 1055: (Courtesy International Business Machines Corporation. Almaden Research Center, CA. Strana 1063: From "Scientific American", January 1993, Page 122. Reproduced with permission of Michael Steigerwald, Bell Labs-Lucent Technology. Strana 1064: From "Scientific American", September 1995, page 67. Image reproduced with permission of H. Temkin, Texas Tech University. Strana 1068: From W. Finkelnburg, Structure of Matter, Springer-Verlag, 1964. Reproduced with permission.

Kapitola 41

Strana 1079: Kurt Coste/Fertilim Institute of New Orleans/Tony Stone Image/New York, Inc. Strana 1080: Courtesy Warren Nagourney. Strana 1088: SBHA/Tony Stone Images/New York, Inc. Strana 1097: Will & Deni Mclntyre/Photo Researchers.

Kapitola 42

Strana 1107: Steven Northrup/New York Times Pictures. Strana 1121: Courtesy AT&T Bell Laboratories. Strana 1123: Scot Hill Photography.

Kapitola 43

Strana 1129: Elscint/Science Photo Library/Photo Researchers. Strana 1142: George Rockwin/Bruce Coleman, Inc. Strana 1142: (detail): R. Perry/Sygma.

Kapitola 44

Strana 1054: Courtesy U.S. Department of Energy. Strana 1160: Ivleva/Magnum Photos, Inc. Strana 1161: Courtesy U.S. Department of Energy. Strana 1162: Courtesy Chicago Historical Society. Strana 1166: Courtesy Anglo-Australian Telescope Board. Strana 1168 (vpravo): Courtesy Los Alamos National Laboratory, New Mexico. Strana 1168 (vlevo): Courtesy Princeton Plasma Physics Laboratory. Strana 1171: Courtesy Martrin Marietta Energy Systems and U.S. Department of Energy.

Kapitola 45

Strana 1174: Courtesy NASA. Strana 1175: David Parker/Science Photo Library/Photo Researchers. Strana 1177: Courtesy Michael Mathews. Strana 1178: Courtesy Lawrence Berkeley Laboratory. Strana 1187: Courtesy Fermilab Visual Media Services.

Edice Překlady vysokoškolských učebnic, svazek 1

David Halliday – Robert Resnick – Jearl Walker

FYZIKA

Vysokoškolská učebnice obecné fyziky

Z anglického originálu *Fundamentals of Physics. Extended* (5. vydání)
vydaného nakladatelstvím John Wiley & Sons v roce 1997 s přihlédnutím k 6. vydání
přeložili Prof. RNDr. Jiří Komrska, CSc., Doc. RNDr. Bohumila Lencová, CSc., Doc. RNDr. Jana Musilová, CSc.,
Doc. RNDr. Jan Obdržálek, CSc., Doc. RNDr. Marian Štrunc, CSc., a kol.
Redakce českého překladu Doc. RNDr. Petr Dub, CSc., Prof. RNDr. Jiří Komrska, CSc., Doc. RNDr. Bohumila Lencová, CSc.,
Doc. RNDr. Jana Musilová, Doc. RNDr. Jan Obdržálek, CSc., a Doc. RNDr. Marian Štrunc, CSc.
Koordinace vydání PhDr. Alena Mizerová (VUTIUM)
Odborná redakce RNDr. Jana Vlášková (PROMETHEUS)
Jazyková úprava rukopisu PhDr. Miloslava Hrušková
Návrh obálky a vstupních stran Eva Lufferová
Fotografie na obálce K. Bhatia, Zefa
Typografie a sazba programem TEX RNDr. Karel Horák, CSc.
Vydalo Vysoké učení technické v Brně – nakladatelství VUTIUM, Antonínská 1, 601 90 Brno,
ve spolupráci s nakladatelstvím PROMETHEUS, spol. s r. o., Žitná 25, 117 00 Praha 1, roku 2000
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a. s., Husova 1881, 580 01 Havlíčkův Brod

Vydání první

ISBN 80-214-1869-9 (VUTIUM)
ISBN 81-7196-214-7 (PROMETHEUS)

Stručný obsah

Jak pracovat s touto knihou x
Podrobný obsah xiv

Kapitoly 1–12
Mechanika

1 Měření *1*
2 Přímočarý pohyb *12*
3 Vektory *39*
4 Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb *58*
5 Síla a pohyb I *88*
6 Síla a pohyb II *118*
7 Práce a kinetická energie *141*
8 Potenciální energie a zákon zachování energie *169*
9 Soustavy částic *207*
10 Srážky *237*
11 Rotace *263*
12 Valení, moment síly a moment hybnosti *296*

Kapitoly 13–21
Mechanika – Termodynamika

13 Rovnováha a pružnost *329*
14 Gravitace *356*
15 Tekutiny *384*
16 Kmity *409*
17 Vlny I *438*
18 Vlny II *466*
19 Teplota a teplo *495*
20 Kinetická teorie plynů *526*
21 Entropie *552*

Kapitoly 22–33
Elektřina a magnetismus

22 Elektrický náboj *577*
23 Elektrické pole *593*
24 Gaussův zákon elektrostatiky *618*
25 Elektrický potenciál *640*
26 Kapacita *668*
27 Proud a odpor *693*
28 Obvody *715*
29 Magnetické pole *743*
30 Magnetické pole elektrického proudu *773*
31 Elektromagnetická indukce *798*
32 Magnetické pole v látce, Maxwellovy rovnice *833*
33 Elektromagnetické kmity a střídavé proudy *859*

Kapitoly 34–38
Elektromagnetické vlny – Optika – Relativita

34 Elektromagnetické vlny *889*
35 Obrazy *920*
36 Interference *949*
37 Difrakce *977*
38 Relativita *1006*

Kapitoly 39–45
Moderní fyzika

39 Fotony a de Broglieho vlny *1033*
40 Více o de Broglieho vlnách *1055*
41 Vše o atomech *1079*
42 Vedení elektřiny v pevných látkách *1107*
43 Jaderná fyzika *1129*
44 Energie z jádra *1154*
45 Kvarky, leptony a Velký třesk *1174*

Dodatky
Výsledky
Rejstřík

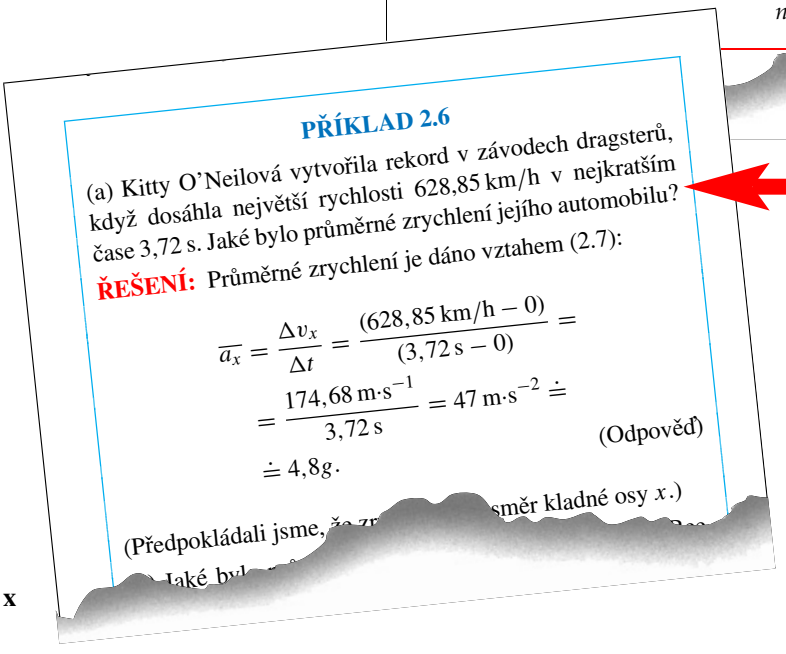
JAK PRACOVAT S TOUTO KNIHOU

Právě se pouštíte do něčeho, co se může stát nejzajímavějším a snad i dobrodružným předmětem prvního ročníku studia. Nabízí se vám možnost pochopit, jakými zákony se řídí svět kolem nás. Poznáte, jakou úlohu hraje fyzika v každodenním životě. Žádné poznání není ovšem zadarmo, něco pro to udělat musíte a tato kniha vám při tom pomůže. Byla pečlivě připravena s přihlédnutím k problémům, se kterými se studenti často potýkají. Podívejme se nyní, jak je členěna.



Vstupní problém
Atraktivní aplikace probírané látky vás jistě zaujme a přiláká ke studiu.

V roce 1977 vytvořila Kitty O'Neilová rekord v závodech dragsterů. Dosáhla tehdy rychlosti 628,85 km/h za pouhých 3,72 s. Jiný rekord tohoto typu zaznamenal v roce 1958 Eli Beeding ml. při jízdě na saních s raketovým pohonem. Po klidovém startu dosáhly saně rychlosti 116 km/h za dobu 0,04 s, která představuje v pravém slova smyslu „okamžik". Je totiž kratší než mrknutí oka. Můžeme nějak porovnat tyto dva výkony, abychom měli představu, který z nich mohl přinést jezdci větší vzrušení nebo dokonce strach? Máme srovnávat dosaženou rychlost, dobu jízdy nebo nějakou jinou veličinu?


PŘÍKLAD 2.6

(a) Kitty O'Neilová vytvořila rekord v závodech dragsterů, když dosáhla největší rychlosti 628,85 km/h v nejkratším čase 3,72 s. Jaké bylo průměrné zrychlení jejího automobilu?

ŘEŠENÍ: Průměrné zrychlení je dáno vztahem (2.7):

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{(628{,}85\ \mathrm{km/h} - 0)}{(3{,}72\ \mathrm{s} - 0)} =$$

$$= \frac{174{,}68\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{3{,}72\ \mathrm{s}} = 47\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq$$

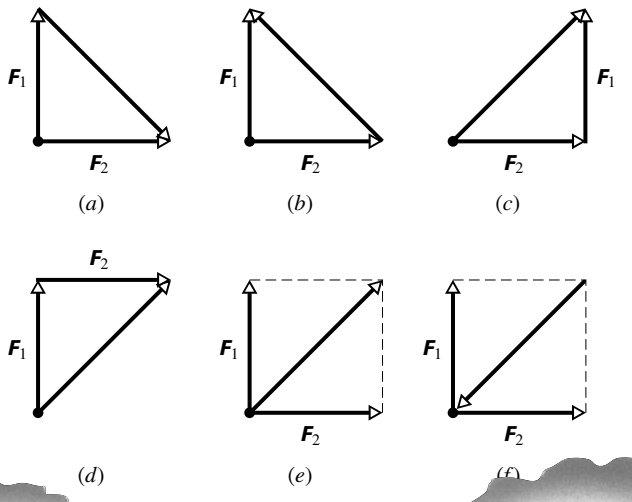
$$\doteq 4{,}8g.$$ (Odpověď)

(Předpokládali jsme, že zr… směr kladné osy x.)

Jaké byl…

Odpověď na vstupní problém
Na vhodném místě kapitoly, ať už ve výkladu nebo formou řešeného příkladu, je vstupní problém rozebrán a vyložen.

KONTROLA 1: Dvě kolmé síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ na obrázku jsou kombinovány šesti různými způsoby. Které z nich správně určují výslednici $\sum \boldsymbol{F}$?



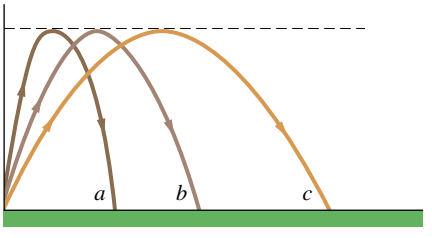
Kontrola

V textu narazíte na číslované kontrolní otázky, které průběžně ověřují, že jste látku zvládli a že můžete pokračovat dál. Pomohou vám vyhnout se častým nedorozuměním a chybným představám. Správný výsledek si můžete zkontrolovat na konci knihy.

Otázky

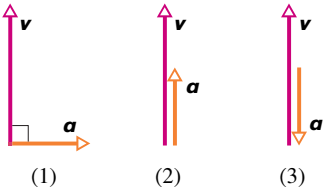
Otázky na konci každé kapitoly po vás vyžadují spíše fyzikální uvažování nežli pouhé užívání vzorců. Na konci knihy najdete odpovědi na všechny liché otázky.

9. Fotbalový míč letí po některé z trajektorií znázorněných na obr. 4.25. Seřaďte je podle (a) doby letu míče, (b) svislé složky jeho počáteční rychlosti, (c) vodorovné složky počáteční rychlosti, (d) velikosti počáteční rychlosti. Volte vždy sestupné řazení. Odpor prostředí zanedbejte.



Obr. 4.25 Otázka 9

10. Obr. 4.26 znázorňuje tři možné okamžité situace při pohybu částice. Rozhodněte, ve které z nich (a) velikost rychlosti částice roste, (b) klesá, (c) nemění se. Ve kterém z případů je skalární součin (d) $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}$ kladný, (e) záporný, (f) nulový?



Obr. 4.26 Otázka 10

Příklady

V řešených příkladech uvidíte názorně, jak používat právě vyložené fyzikální představy. Příklady vycházejí často z každodenních problémů a připravují vás přitom na řešení otázek, cvičení i úkolů na konci každé kapitoly.

PŘÍKLAD 4.1

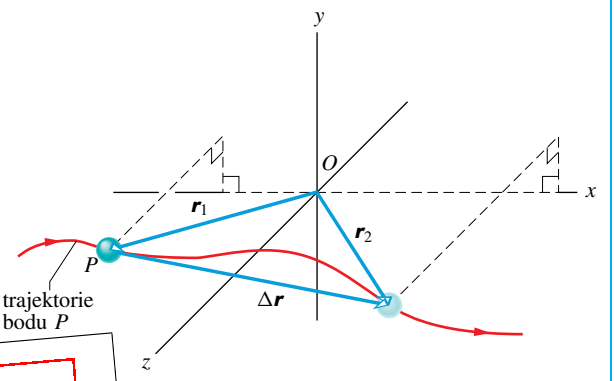
Počáteční poloha částice je dána polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}_1 = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k},$$

koncová poloha je určena vektorem

$$\boldsymbol{r}_2 = 9\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$$

(obr. 4.2). Určete posunutí částice.



klad 4.1. Posunutí $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ spojuje koncové body

Rady a náměty

Rady a náměty vám pomohou při řešení domácích úkolů i v přípravě na zkoušku. Představují jakousi esenci a zásobárnu praktických zkušeností badatelů a inženýrů.

RADY A NÁMĚTY

Bod 5.1: *Rozbor úlohy z hlediska působících sil*

Přečteme si zadání úlohy několikrát, až získáme dobrou představu o tom, jaká je situace, jaké údaje jsou zadány a jaké jsou úkoly. Tak třeba u př. 5.1 jsme si říkali: „Někdo tlačí sáně. Jejich rychlost se mění, takže zrychlení je nenulové. Víme, že pohyb je přímočarý. V prvé části úlohy je síla zadána, v druhé části ji máme určit. Vypadá to tedy tak, že je třeba použít druhý Newtonův zákon a aplikovat jej na případ jednorozměrného pohybu."

Je-li jasné, o jaký problém jde, ale nevíme-li, jak dále postupovat, problém prozatím odložíme a znovu si přečteme zadání. Nejsme-li si jisti správným pochopením druhého Newtonova zákona, přečteme si znovu celý článek. Prostudujeme příklady. Skutečnost, že problém formulovaný v př. 5.1 je jednorozměrný a zrychlení pohybu je konstantní, nás vrací ke kap. 2 a speciálně k tab. 2.1, obsahující všechny rovnice, které budeme potřebovat.

Bod 5.2: *Dvojí obrázky*

Při řešení každé úlohy je užitečné mít dva obrázky. Jedním z nich je hrubý náčrt skutečné situace. Zakreslíme do něj síly, přičemž počáteční bod každého vektoru síly umístíme na povrch či do objemu tělesa, na něž síla působí. Druhým obrázkem je silový diagram, v němž jsou zakresleny síly působící na *jediné* těleso, které je v nákresu znázorněno bodem. Počáteční bod každé ze sil umístíme právě do tohoto bodu.

Bod 5.3: *Jakou soustavu studujeme?*

...hý Ne... zákon ...

Tento symbol označuje články či odstavce, které můžete při prvním čtení přeskočit. Nejsou nezbytné pro porozumění dalšímu výkladu.



8.8 HMOTNOST A ENERGIE

Klasická chemie byla založena na [illegible]du, že při ch[illegible] mických reakcích se zacho[illegible]

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Konzervativní síly

Síla působící na částici je **konzervativní**, je-li celková práce, kterou vykoná při pohybu částice po libovolné uzavřené trajektorii, nulová. Ekvivalentní vyjádření: Síla působící na částici je konzervativní, jestliže práce, kterou vykoná při přemístění částice mezi dvěma zadanými body, nezávisí na trajektorii, po které se částice pohybovala. Tíhová síla a pružná síla jsou konzervativní. Dynamická třecí síla je *nekonzervativní*.

Potenciální energie

Potenciální energie souvisí s konfigurací soustavy, v níž působí konzervativní interakční síly. Změna potenciální energie soustavy je definována jako záporně vzatá práce, kterou konzervativní interakční síly vykonají při odpovídající změně konfigurace soustavy

$$\Delta E_p = -W_g. \tag{8.1}$$

Je-li konfigurace soustavy (poloha částice vzhledem ke zvolenému bodu zbytku soustavy) určena jedinou skalární proměnnou x a závisí-li konzervativní síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ popisující intera[illegible] soustavy po[illegible] na této proměnné [illegible]

možné vyjádřit změnu potenciální energie vztahem

$$\Delta E_p = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx, \tag{8.6}$$

kde x_i je počáteční a x_f koncová poloha částice.

Tíhová potenciální energie

Potenciální energie soustavy s tíhovou interakcí se nazývá **tíhová potenciální energie**. Jedná-li se o soustavu zahrnující Zemi a částici, která se pohybuje v blízkosti jejího povrchu, hovoříme o **tíhové potenciální energii**. Při přechodu částice mezi body ležícími ve výškách y_i a y_f nedaleko od povrchu Země je změna tíhové potenciální energie soustavy částice + Země rovna

$$\Delta E_p = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y. \tag{8.7}$$

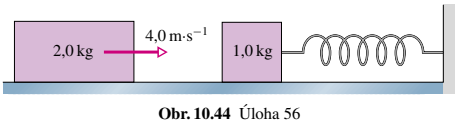
Je-li **referenční konfigurace** soustavy zvolena tak, že $y_i = 0$, a je-li jí přisouzena nulová hodnota tíhové potenciální energie $E_{p,i} = 0$, můžeme tíhovou potenciální energii soustavy v obecné konfiguraci (resp. tíhovou potenciální energii částice v obecné [illegible]m k Zemi) vyjádřit vztahem

Přehled & shrnutí
Tento článek shrnuje nejdůležitější poznatky a vztahy z celé kapitoly.

Cvičení a úlohy

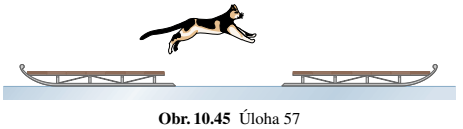
Setkáte se s nimi na konci každé kapitoly. Jsou uspořádány podle obtížnosti, nejprve cvičení (C), poté úlohy (Ú). Obtížnější jsou označeny hvězdičkou (★). Odpovědi na všechny liché úlohy a cvičení najdete opět na konci knihy. Na závěr bývá ještě několik úloh pro řešení s pomocí počítače, případně i problémové úlohy, v nichž i sám postup řešení přináší nové poznatky.

56Ú. Kostka o hmotnosti 1,0 kg leží na dokonale hladké podložce a je nenapjatou pružinou ($k = 200$ N/m) spojena se stěnou (obr. 10.44). Hranol o hmotnosti 2,0 kg do ní narazí rychlostí 4,0 m·s^{-1} rovnoběžně s pružinou a pevně se s ní spojí. Určete stlačení pružiny v okamžiku, kdy je společná rychlost těles nulová.



Obr. 10.44 Úloha 56

57Ú. Dvoje stejné sáně o hmotnostech 22,7 kg stojí těsně za sebou podle obr. 10.45. Kočka o hmotnosti 3,63 kg, která na jedněch saních seděla, přeskočí najednou na druhé sáně a hned zase zpět. Při obou skocích má rychlost kočky vzhledem k zemi velikost 3,05 m·s^{-1}. Určete výsledné rychlosti sání.

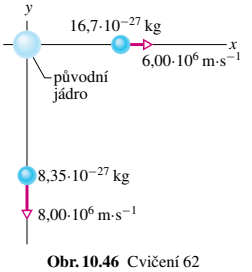


Obr. 10.45 Úloha 57

58Ú. Automobil o hmotnosti 1 200 kg má nárazník konstruován tak, aby čelní náraz do zdi rychlostí 5,00 km/h byl ještě bezpečný. Vůz jede rychlostí 70 km/h a zezadu narazí do druhého automobilu, který jede rychlostí 60 km/h stejným směrem a má hmotnost 900 kg. Rychlost druhého vozu po srážce je 70 km/h. (a) Jaká je rychlost prvního automobilu bezprostředně po nárazu? (b) Určete poměr ztráty kinetické energie soustavy dvou automobilů při popsané srážce a kinetické energie, při níž je [illegible]omobilu do zdi ještě bezpečný.

[illegible] tun j[illegible]

62C. Atomové jádro, které je v klidu, se náhle rozpadne na tři části. Dvě z nich jsou zachyceny detekčním zařízením, které je schopno určit jejich rychlosti a hmotnosti (obr. 10.46). (a) Určete hybnost třetí částice, jejíž hmotnost je 11,7·10^{-27} kg, a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic. (b) Jaká je celková kinetická energie částic po rozpadu?



Obr. 10.46 Cvičení 62

63C. Bílá kuleční[illegible]ková koule narazí do červené, která je zpočátku v klidu. Rychlost bílé koule má po srážce velikost 3,50 m·s^{-1} a svírá s původním směrem pohybu úhel 22,0°. Červená koule odletí rychlostí o velikosti 2,00 m·s^{-1}. Určete (a) směr rychlosti červené koule po srážce a (b) počáteční rychlost bílé koule. (c) Je srážka pružná?

64C. Dva automobily A a B se blíží ke stejnému místu v navzájem kolmých směrech. Při srážce se do sebe zaklíní. Vůz A (hmotnost 1 200 kg) se před srážkou pohyboval rychlostí 64 km/h a vůz B (hmotnost 1 600 kg) rychlostí 96 km/h. Určete velikost a směr společné rychlosti obou vraků po srážce.

65C. Kuleční[illegible]ková koule narazí rychlostí ***v*** do těsně uspořádané skupiny patnácti stojících koulí. Dojde k sérii srážek koulí mezi sebou i s[illegible] Shodou okolností má velikost rychlos[illegible] [illegible]žiku stejnou hod-

Podrobný obsah

KAPITOLA 1

MĚŘENÍ *1*

Jak můžeme ze západu Slunce změřit poloměr zemský?

1.1 Měření *2*
1.2 Mezinárodní soustava jednotek *2*
1.3 Převody jednotek *3*
1.4 Délka *4*
1.5 Čas *5*
1.6 Hmotnost *8*
1.7 Množství *8*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *9*
CVIČENÍ & ÚLOHY *9*

KAPITOLA 2

PŘÍMOČARÝ POHYB *12*

Čím měří fyzika pocity závodníka při startu?

2.1 Pohyb *13*
2.2 Poloha a posunutí *13*
2.3 Průměrná rychlost *14*
2.4 Okamžitá rychlost *16*
2.5 Zrychlení *19*
2.6 Rovnoměrně zrychlený pohyb: speciální případ *21*
2.7 Rovnoměrně zrychlený pohyb: jiný přístup *23*
2.8 Svislý vrh *24*
2.9 Částicová fyzika *27*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *29*
OTÁZKY *30*
CVIČENÍ & ÚLOHY *31*

KAPITOLA 3

VEKTORY *39*

Pomohou vektory zmapovat jeskyni?

3.1 Vektory a skaláry *40*
3.2 Sčítání vektorů: grafická metoda *41*
3.3 Složky vektorů *43*
3.4 Jednotkové vektory *45*
3.5 Sčítání vektorů: algebraická metoda *46*
3.6 Vektory a fyzikální zákony *48*
3.7 Násobení vektorů *48*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *52*
OTÁZKY *53*
CVIČENÍ & ÚLOHY *54*

KAPITOLA 4

DVOJROZMĚRNÝ A TROJROZMĚRNÝ POHYB *58*

Kam umístit síť pro živý náboj?



4.1 Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb *59*
4.2 Poloha a posunutí *59*
4.3 Průměrná a okamžitá rychlost *60*
4.4 Průměrné a okamžité zrychlení *61*
4.5 Šikmý vrh *64*
4.6 Šikmý vrh: matematický popis *66*
4.7 Rovnoměrný pohyb po kružnici *70*
4.8 Vzájemný pohyb po přímce *72*
4.9 Vzájemný pohyb v rovině *74*
4.10 Vzájemný pohyb při vysokých rychlostech *76*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *77*
OTÁZKY *78*
CVIČENÍ & ÚLOHY *80*

KAPITOLA 5

SÍLA A POHYB I *88*
Utáhnete také dva vagony v zubech?

5.1 Čím je způsobeno zrychlení? *89*
5.2 První Newtonův zákon *89*
5.3 Síla *90*
5.4 Hmotnost *91*
5.5 Druhý Newtonův zákon *92*
5.6 Některé typy sil *95*
5.7 Třetí Newtonův zákon *98*
5.8 Užití Newtonových zákonů *100*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *107*
OTÁZKY *108*
CVIČENÍ & ÚLOHY *110*

KAPITOLA 6

SÍLA A POHYB II *118*
Kočičí život: padat raději z desátého, nebo z prvního patra?

6.1 Tření *119*
6.2 Vlastnosti sil tření *120*
6.3 Odporová síla a mezní rychlost *124*
6.4 Rovnoměrný pohyb po kružnici *126*
6.5 Přírodní síly *131*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *132*
OTÁZKY *133*
CVIČENÍ & ÚLOHY *134*

KAPITOLA 7

PRÁCE A KINETICKÁ ENERGIE *141*
Kdo udělal více práce: vzpěrač, nebo silák?

7.1 Kinetická energie *142*
7.2 Práce *143*
7.3 Práce a kinetická energie *143*
7.4 Práce tíhové síly *147*
7.5 Práce proměnné síly *150*
7.6 Práce pružné síly *152*
7.7 Výkon *156*
7.8 Kinetická energie při vysokých rychlostech *158*
7.9 Vztažné soustavy *159*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *160*
OTÁZKY *161*
CVIČENÍ & ÚLOHY *163*

KAPITOLA 8

POTENCIÁLNÍ ENERGIE A ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE *169*
Jak hluboko můžeme klesnout při bungee-jumpingu?

8.1 Potenciální energie *170*
8.2 Nezávislost práce konzervativních sil na trajektorii *171*
8.3 Určení hodnot potenciální energie *173*
8.4 Zákon zachování mechanické energie *175*
8.5 Interpretace křivky potenciální energie *179*
8.6 Práce vnějších a nekonzervativních sil *183*
8.7 Zákon zachování energie *185*
8.8 Hmotnost a energie *188*
8.9 Kvantování energie *190*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *191*
OTÁZKY *193*
CVIČENÍ & ÚLOHY *195*

KAPITOLA 9

SOUSTAVY ČÁSTIC *207*
Obelstí primabalerína gravitaci?



9.1 Význačný bod *208*
9.2 Těžiště *208*
9.3 Věta o hybnosti *213*
9.4 Hybnost *216*
9.5 Hybnost soustavy částic *217*
9.6 Zákon zachování hybnosti *218*
9.7 Soustavy s proměnnou hmotností: raketa *222*
9.8 Vnější síly a změny vnitřní energie *224*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *227*
OTÁZKY *228*
CVIČENÍ & ÚLOHY *230*

KAPITOLA 10

SRÁŽKY *237*
Holou rukou raději proti dlaždici, nebo prknu?

10.1 Co je to srážka? *238*
10.2 Impulz síly a hybnost *239*
10.3 Pružné přímé srážky *241*
10.4 Nepružné přímé srážky *245*
10.5 Šikmé srážky *248*
10.6 Jaderné reakce a radioaktivní rozpad *250*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *252*
OTÁZKY *253*
CVIČENÍ & ÚLOHY *255*

KAPITOLA 11

ROTACE *263*
Judo — a fyzika?



11.1 Posuvný a otáčivý pohyb *264*
11.2 Veličiny charakterizující otáčivý pohyb *264*
11.3 Jsou úhlové veličiny vektorové? *267*
11.4 Rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb *269*
11.5 Korespondence obvodových a úhlových veličin *271*
11.6 Kinetická energie tělesa při otáčivém pohybu *273*
11.7 Výpočet momentu setrvačnosti *275*
11.8 Moment síly *278*
11.9 Věta o momentu hybnosti *279*
11.10 Práce a kinetická energie při otáčivém pohybu *281*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *284*
OTÁZKY *286*
CVIČENÍ & ÚLOHY *287*

KAPITOLA 12

VALENÍ, MOMENT SÍLY A MOMENT HYBNOSTI *296*
Proč jsou vícenásobná salta tak obtížná?

12.1 Valení *297*
12.2 Jojo *302*
12.3 Ještě jednou moment síly *304*
12.4 Moment hybnosti *306*
12.5 Věta o momentu hybnosti *307*
12.6 Moment hybnosti soustavy částic *309*
12.7 Moment hybnosti tuhého tělesa vzhledem k pevné ose *310*
12.8 Zákon zachování momentu hybnosti *312*
12.9 Kvantovaný moment hybnosti *317*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *318*
OTÁZKY *319*
CVIČENÍ & ÚLOHY *320*

KAPITOLA 13

ROVNOVÁHA A PRUŽNOST *329*
Jak si můžeme odpočinout, když lezeme komínem?

13.1 Rovnováha *330*
13.2 Podmínky rovnováhy *331*
13.3 Těžiště; střed hmotnosti *332*
13.4 Příklady statické rovnováhy *334*
13.5 Neúplně určené soustavy *341*
13.6 Pružnost *342*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *346*
OTÁZKY *347*
CVIČENÍ & ÚLOHY *348*

KAPITOLA 14

GRAVITACE *356*

Jak vystopovat černou díru?

14.1 Svět a gravitační síla *357*
14.2 Newtonův gravitační zákon *357*
14.3 Gravitace a princip superpozice *358*
14.4 Gravitace v blízkosti povrchu Země *360*
14.5 Gravitační pole uvnitř Země *362*
14.6 Gravitační potenciální energie *363*
14.7 Planety a družice: Keplerovy zákony *366*
14.8 Družice: Oběžné dráhy a energie *370*
14.9 Einstein a gravitace *372*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *374*
OTÁZKY *375*
CVIČENÍ & ÚLOHY *377*

KAPITOLA 15

TEKUTINY *384*

Co hrozí nezkušenému potápěči?

15.1 Tekutiny a svět kolem nás *385*
15.2 Co je tekutina? *385*
15.3 Hustota a tlak *385*
15.4 Tekutiny v klidu — statika *387*
15.5 Měření tlaku *389*
15.6 Pascalův zákon *390*
15.7 Archimedův zákon *392*
15.8 Tekutiny v pohybu — dynamika *393*
15.9 Proudnice a rovnice kontinuity *394*
15.10 Bernoulliova rovnice *396*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *399*
OTÁZKY *400*
CVIČENÍ & ÚLOHY *401*

KAPITOLA 16

KMITY *409*

Katastrofa…, ale proč byla nejhorší právě tady?

16.1 Kmitání *410*
16.2 Harmonický pohyb *410*
16.3 Pohybová rovnice pro harmonický pohyb *412*
16.4 Energie harmonického oscilátoru *416*
16.5 Torzní kmity *417*
16.6 Kyvadla *418*
16.7 Kmitání a rovnoměrný kruhový pohyb *422*
16.8 Tlumený oscilátor *423*
16.9 Nucené kmity a rezonance *425*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *427*
OTÁZKY *428*
CVIČENÍ & ÚLOHY *429*

KAPITOLA 17

VLNY I *438*

Jak najde škorpion svou kořist?

17.1 Vlny a částice *439*
17.2 Druhy vln *439*
17.3 Vlny příčné a podélné *439*
17.4 Postupné vlny *441*
17.5 Rychlost postupné vlny *442*
17.6 Rychlost vlny na struně *445*
17.7 Energie a výkon vlny *447*
17.8 Princip superpozice *448*
17.9 Interference vln *450*
17.10 Fázory *452*
17.11 Stojaté vlny *453*
17.12 Vlastní kmity *455*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *457*
OTÁZKY *459*
CVIČENÍ & ÚLOHY *460*

KAPITOLA 18

VLNY II *466*

Loví i v naprosté tmě?



18.1 Zvukové vlnění *467*
18.2 Rychlost zvuku *467*
18.3 Šíření zvukových vln *469*
18.4 Interference *471*

18.5 Intenzita zvuku a její hladina *472*
18.6 Zdroje hudebního zvuku *475*
18.7 Zázněje *478*
18.8 Dopplerův jev *479*
18.9 Dopplerův jev u světla *483*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *485*
OTÁZKY *486*
CVIČENÍ & ÚLOHY *488*

KAPITOLA 19

TEPLOTA A TEPLO *495*
Na Sinajskou poušť? Jedině v černém!



19.1 Termodynamika *496*
19.2 Nultý zákon termodynamiky *496*
19.3 Měření teploty *497*
19.4 Celsiova a Fahrenheitova stupnice *499*
19.5 Teplotní roztažnost *501*
19.6 Teplota a teplo *503*
19.7 Zahřívání pevných látek a kapalin *504*
19.8 Podrobnější pohled na teplo a práci *507*
19.9 První zákon termodynamiky *509*
19.10 Zvláštní případy prvního zákona termodynamiky *510*
19.11 Mechanismy přenosu tepla *512*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *516*
OTÁZKY *518*
CVIČENÍ & ÚLOHY *519*

KAPITOLA 20

KINETICKÁ TEORIE PLYNŮ *526*
Proč vlastně v zimě topit v kamnech?

20.1 Nový pohled na plyny *527*
20.2 Avogadrova konstanta *527*
20.3 Ideální plyny *527*
20.4 Tlak, teplota a střední kvadratická rychlost *530*
20.5 Kinetická energie posuvného pohybu *531*
20.6 Střední volná dráha *532*
20.7 Rozdělení rychlostí molekul *534*
20.8 Molární tepelné kapacity ideálního plynu *536*
20.9 Stupně volnosti a molární tepelné kapacity *539*
20.10 Trocha kvantové teorie *541*
20.11 Adiabatické rozpínání ideálního plynu *541*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *544*
OTÁZKY *545*
CVIČENÍ & ÚLOHY *546*

KAPITOLA 21

ENTROPIE *552*
Co určuje směr toku času?

21.1 Vratné a nevratné děje *553*
21.2 Entropie *553*
21.3 Druhý zákon termodynamiky *557*
21.4 Entropie kolem nás: motory *558*
21.5 Entropie kolem nás: chladničky *563*
21.6 Účinnost reálných motorů *564*
21.7 Termodynamická teplota *565*
21.8 Statistický pohled na entropii *566*
21.9 Třetí zákon termodynamiky *570*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *571*
OTÁZKY *572*
CVIČENÍ & ÚLOHY *573*

KAPITOLA 22

ELEKTRICKÝ NÁBOJ *577*
Proč cukr při drcení jiskří?

22.1 Elektromagnetismus *578*
22.2 Elektrický náboj *578*
22.3 Vodiče a nevodiče *579*
22.4 Coulombův zákon *581*
22.5 Kvantování náboje *584*
22.6 Zachování náboje *586*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *587*
OTÁZKY *588*
CVIČENÍ & ÚLOHY *590*

KAPITOLA 23

ELEKTRICKÉ POLE *593*
Jak mikrovlny ohřívají jídlo?



23.1 Náboje a síly: bližší pohled *594*
23.2 Elektrické pole *594*
23.3 Elektrické siločáry *595*
23.4 Elektrické pole bodového náboje *597*
23.5 Elektrické pole dipólu *599*
23.6 Elektrické pole nabitého vlákna *600*
23.7 Elektrické pole nabitého disku *603*
23.8 Bodový náboj v elektrickém poli *605*
23.9 Dipól v elektrickém poli *608*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *610*
OTÁZKY *611*
CVIČENÍ & ÚLOHY *613*

KAPITOLA 24

GAUSSŮV ZÁKON ELEKTROSTATIKY *618*
Jak tlustý je blesk?

24.1 Nový pohled na Coulombův zákon *619*
24.2 Tok *619*
24.3 Tok elektrické intenzity *620*
24.4 Gaussův zákon elektrostatiky *622*
24.5 Gaussův zákon a Coulombův zákon *624*
24.6 Nabitý izolovaný vodič *625*
24.7 Použití Gaussova zákona: válcová symetrie *627*
24.8 Použití Gaussova zákona: rovinná symetrie *628*
24.9 Použití Gaussova zákona: kulová symetrie *630*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *632*
OTÁZKY *633*
CVIČENÍ & ÚLOHY *634*

KAPITOLA 25

ELEKTRICKÝ POTENCIÁL *640*
Co vám hrozí, když vám na horách vstanou vlasy na hlavě?

25.1 Elektrická potenciální energie *641*
25.2 Elektrický potenciál, napětí *642*
25.3 Ekvipotenciální plochy *643*
25.4 Výpočet potenciálu ze zadané intenzity elektrického pole *645*
25.5 Potenciál bodového náboje *647*
25.6 Potenciál soustavy bodových nábojů *648*
25.7 Potenciál elektrického pole dipólu *650*
25.8 Potenciál spojitě rozloženého náboje *651*
25.9 Výpočet intenzity ze zadaného potenciálu *652*
25.10 Elektrická potenciální energie soustavy bodových nábojů *654*
25.11 Potenciál nabitého vodiče *656*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *657*
OTÁZKY *659*
CVIČENÍ & ÚLOHY *661*

KAPITOLA 26

KAPACITA *668*
Může kondenzátor zachránit život?

26.1 Užití kondenzátorů *669*
26.2 Kapacita *669*
26.3 Výpočet kapacity *671*
26.4 Kondenzátory spojené paralelně a sériově *674*
26.5 Energie elektrického pole *677*
26.6 Kondenzátor s dielektrikem *679*
26.7 Dielektrika *681*
26.8 Dielektrika a Gaussův zákon elektrostatiky *682*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *685*
OTÁZKY *686*
CVIČENÍ & ÚLOHY *687*

KAPITOLA 27

PROUD A ODPOR *693*
Co způsobilo ohnivý pád zepelínu Hindenburg?

27.1 Pohybující se náboje a elektrické proudy *694*
27.2 Elektrický proud *694*

27.3 Hustota proudu *696*
27.4 Odpor a rezistivita *699*
27.5 Ohmův zákon *702*
27.6 Mikroskopický pohled na Ohmův zákon *703*
27.7 Výkon v elektrických obvodech *705*
27.8 Polovodiče *706*
27.9 Supravodiče *708*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *709*
OTÁZKY *710*
CVIČENÍ & ÚLOHY *711*

KAPITOLA 28

OBVODY *715*
Proč nehladit paúhoře?

28.1 „Pumpování“ nábojů *716*
28.2 Práce, energie a elektromotorické napětí *716*
28.3 Výpočet proudu v jednoduchém obvodu *717*
28.4 Jiné jednoduché obvody *719*
28.5 Napětí v obvodech *720*
28.6 Obvody s více smyčkami *722*
28.7 Ampérmetr a voltmetr *728*
28.8 Obvody *RC* *728*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *732*
OTÁZKY *733*
CVIČENÍ & ÚLOHY *735*

KAPITOLA 29

MAGNETICKÉ POLE *743*
Jak vzniká půvabná polární záře?



29.1 Magnetické pole *744*
29.2 Definice magnetické indukce *744*
29.3 Objev elektronu *748*
29.4 Hallův jev *749*
29.5 Pohyb nabité částice po kružnici *751*
29.6 Cyklotrony a synchrotrony *754*
29.7 Ampérova síla *756*
29.8 Moment síly působící na proudovou smyčku *759*
29.9 Magnetický dipól *761*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *763*
OTÁZKY *764*
CVIČENÍ & ÚLOHY *766*

KAPITOLA 30

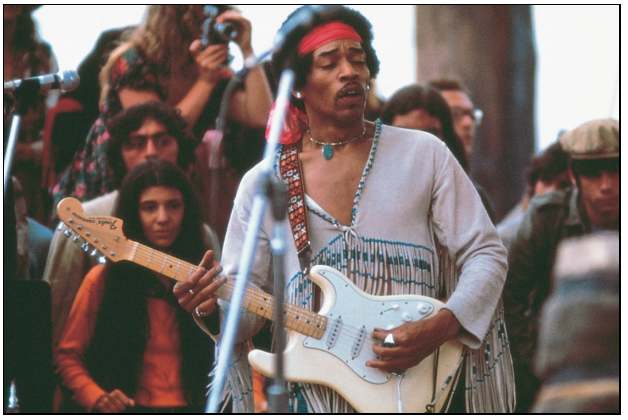
MAGNETICKÉ POLE ELEKTRICKÉHO PROUDU *773*
Vystřelíme náklad do vesmíru elektromagnetickým dělem?



30.1 Magnetické pole elektrického proudu *774*
30.2 Dva rovnoběžné vodiče *778*
30.3 Ampérův zákon *780*
30.4 Solenoid a toroid *783*
30.5 Cívka jako magnetický dipól *785*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *787*
OTÁZKY *788*
CVIČENÍ & ÚLOHY *790*

KAPITOLA 31

ELEKTROMAGNETICKÁ INDUKCE *798*
Elektromagnetická indukce — a rock?



31.1 Dvě symetrické situace *799*
31.2 Dva pokusy *799*
31.3 Faradayův zákon elektromagnetické indukce *799*
31.4 Lenzův zákon *801*
31.5 Indukce a přenosy energie *804*
31.6 Indukované elektrické pole *807*
31.7 Cívka a indukčnost *810*
31.8 Vlastní indukce *812*
31.9 Obvody *RL* *813*
31.10 Energie magnetického pole *815*
31.11 Hustota energie magnetického pole *817*
31.12 Vzájemná indukčnost *818*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *820*
OTÁZKY *821*
CVIČENÍ & ÚLOHY *823*

KAPITOLA 32

MAGNETICKÉ POLE V LÁTCE, MAXWELLOVY ROVNICE *833*
Jak může dávná pec odhalit zemské magnetické pole v minulosti?

32.1 Magnety *834*
32.2 Gaussův zákon pro magnetické pole *834*
32.3 Zemský magnetismus *835*
32.4 Magnetismus a elektrony *836*
32.5 Magnetické látky *840*
32.6 Diamagnetismus *840*
32.7 Paramagnetismus *841*
32.8 Feromagnetismus *842*
32.9 Indukované magnetické pole *846*
32.10 Maxwellův proud *848*
32.11 Maxwellovy rovnice *850*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *851*
OTÁZKY *852*
CVIČENÍ & ÚLOHY *854*

KAPITOLA 33

ELEKTROMAGNETICKÉ KMITY A STŘÍDAVÉ PROUDY *859*
Proč máme elektrická vedení vysokého napětí a nikoli vysokého proudu?

33.1 Nová fyzika — stará matematika *860*
33.2 Kvalitativní rozbor kmitů *LC* *860*
33.3 Elektro-mechanická analogie *862*
33.4 Kmity *LC* kvantitativně *863*
33.5 Tlumené kmity v obvodu *RLC* *865*
33.6 Střídavé proudy *866*
33.7 Nucené kmity *867*
33.8 Tři jednoduché obvody *867*
33.9 Sériový obvod *RLC* *871*
33.10 Výkon v obvodech se střídavým proudem *874*
33.11 Transformátory *876*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *879*
OTÁZKY *880*
CVIČENÍ & ÚLOHY *882*

KAPITOLA 34

ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY *889*
Co češe prachový ohon kometám?

34.1 Maxwellova duha *890*
34.2 Postupná elektromagnetická vlna (kvalitativně) *891*
34.3 Postupná elektromagnetická vlna (kvantitativně) *893*
34.4 Přenos energie a Poyntingův vektor *895*
34.5 Tlak záření *897*
34.6 Polarizace *899*
34.7 Odraz a lom *903*
34.8 Úplný odraz *908*
34.9 Polarizace odrazem *909*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *910*
OTÁZKY *911*
CVIČENÍ & ÚLOHY *913*

KAPITOLA 35

OBRAZY *920*
Co jen je na tom obraze divného?



35.1 Dva typy obrazů *921*
35.2 Rovinné zrcadlo *921*
35.3 Kulové zrcadlo *924*
35.4 Zobrazení kulovým zrcadlem *926*
35.5 Kulový lámavý povrch *928*
35.6 Tenká čočka *930*
35.7 Optické přístroje *935*
35.8 Tři odvození *937*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *940*
OTÁZKY *941*
CVIČENÍ & ÚLOHY *943*

KAPITOLA 36

INTERFERENCE *949*
V čem je tajemství proměnlivého modrozeleného zbarvení motýlích křídel?

36.1 Interference *950*
36.2 Světlo jako vlna *950*
36.3 Difrakce *953*
36.4 Youngův interferenční pokus *953*
36.5 Koherence *956*
36.6 Intenzita při interferenci světla ze dvou štěrbin *957*
36.7 Interference na tenké vrstvě *959*
36.8 Michelsonův interferometr *965*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *966*
OTÁZKY *967*
CVIČENÍ & ÚLOHY *969*

KAPITOLA 37

DIFRAKCE *977*
Proč má pointilistický obraz jinou barvu z blízka než z dálky?

37.1 Difrakce a vlnová teorie světla *978*
37.2 Difrakce na štěrbině. Polohy minim *979*
37.3 Intenzita při difrakci na štěrbině (kvalitativně) *982*
37.4 Intenzita při difrakci na štěrbině (kvantitativně) *983*
37.5 Difrakce na kruhovém otvoru *985*
37.6 Difrakce na dvojštěrbině *988*
37.7 Difrakční mřížky *990*
37.8 Mřížky: disperze a rozlišovací schopnost *994*
37.9 Rentgenová difrakce *996*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *998*
OTÁZKY *999*
CVIČENÍ & ÚLOHY *1000*

KAPITOLA 38

RELATIVITA *1006*
Proč je znalost teorie relativity tak důležitá pro moderní navigaci?

38.1 Co všechno patří k relativitě *1007*
38.2 Postuláty *1007*
38.3 Měření událostí *1009*
38.4 Relativita současnosti *1010*
38.5 Relativita času *1011*
38.6 Relativita délky *1014*
38.7 Lorentzova transformace *1016*
38.8 Některé důsledky Lorentzových rovnic *1017*
38.9 Relativistické skládání rychlostí *1020*
38.10 Dopplerův jev pro světlo *1020*
38.11 Nový pohled na hybnost *1022*
38.12 Nový pohled na energii *1023*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *1025*
OTÁZKY *1026*
CVIČENÍ & ÚLOHY *1028*

KAPITOLA 39

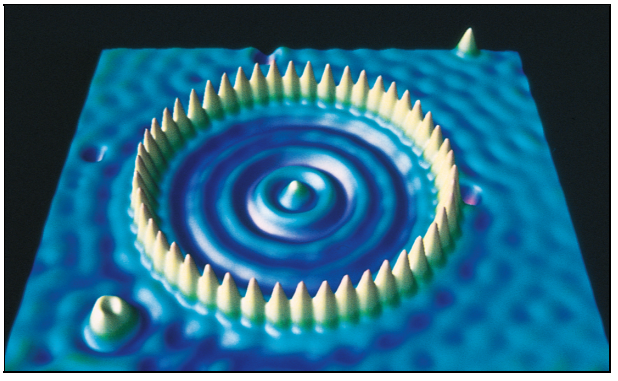
FOTONY A DE BROGLIEHO VLNY *1033*
Může být částice jako elektron vlnou?

39.1 Nový směr *1034*
39.2 Světelné vlny a fotony *1034*
39.3 Fotoelektrický jev *1035*

39.4 Fotony mají hybnost *1037*
39.5 Světlo jako vlna pravděpodobnosti *1039*
39.6 Elektrony a de Broglieho vlny *1041*
39.7 Schrödingerova rovnice *1044*
39.8 Heisenbergův princip neurčitosti *1045*
39.9 Tunelování *1046*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *1048*
OTÁZKY *1049*
CVIČENÍ & ÚLOHY *1050*

KAPITOLA 40

VÍCE O DE BROGLIEHO VLNÁCH *1055*
Jak můžeme uvěznit elektron?



40.1 Stavba atomu *1056*
40.2 Vlny na strunách a de Broglieho vlny *1056*
40.3 Zachycení elektronu *1056*
40.4 Elektron v jámě konečné hloubky *1061*
40.5 Další elektronové pasti *1063*
40.6 Elektronové pasti ve dvou a třech rozměrech *1064*
40.7 Atom vodíku *1066*
40.8 Příklad podivnosti kvantové fyziky *1072*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *1073*
OTÁZKY *1074*
CVIČENÍ & ÚLOHY *1075*

KAPITOLA 41

VŠE O ATOMECH *1079*
Co je tak zvláštního na laserovém světle?

41.1 Atomy a svět kolem nás *1080*
41.2 Některé vlastnosti atomů *1080*
41.3 Spin elektronu *1082*
41.4 Momenty hybnosti a magnetické dipólové momenty *1083*
41.5 Sternův-Gerlachův pokus *1085*
41.6 Jaderná magnetická rezonance *1087*
41.7 Pauliho vylučovací princip *1088*
41.8 Pravoúhlé pasti s více elektrony *1088*
41.9 Struktura periodické soustavy prvků *1091*
41.10 Rentgenové záření a zařazení prvků *1092*
41.11 Lasery a jejich světlo *1096*
41.12 Jak pracují lasery *1097*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *1100*
OTÁZKY *1101*
CVIČENÍ & ÚLOHY *1102*

KAPITOLA 42

VEDENÍ ELEKTŘINY V PEVNÝCH LÁTKÁCH *1107*
Proč se pracovníci v polovodičovém provozu oblékají jako kosmonauti?

42.1 Pevné látky *1108*
42.2 Elektrické vlastnosti pevných látek *1108*
42.3 Energiové hladiny krystalických pevných látek *1109*
42.4 Izolátory *1110*
42.5 Kovy *1110*
42.6 Polovodiče *1114*
42.7 Dotované polovodiče *1115*
42.8 Přechod *p-n* *1117*
42.9 Diodový usměrňovač *1119*
42.10 LED dioda *1120*
42.11 Tranzistor *1122*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *1124*
OTÁZKY *1125*
CVIČENÍ & ÚLOHY *1126*

KAPITOLA 43

JADERNÁ FYZIKA *1129*
Proč a jak se (některá) jádra rozpadají?

43.1 Objevení jádra *1130*
43.2 Některé vlastnosti atomových jader *1131*
43.3 Radioaktivní rozpad *1135*
43.4 Rozpad α *1137*
43.5 Rozpad β *1139*
43.6 Radioaktivní datování *1141*
43.7 Měření radiační dávky *1142*
43.8 Jaderné modely *1143*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *1145*
OTÁZKY *1146*
CVIČENÍ & ÚLOHY *1147*

KAPITOLA 44

ENERGIE Z JÁDRA *1154*
Jaká fyzika se skrývá za obrazem atomového výbuchu?

44.1 Atom a jeho jádro *1155*
44.2 Jaderné štěpení: základní proces *1155*
44.3 Model jaderného štěpení *1157*
44.4 Jaderný reaktor *1158*
44.5 Přírodní jaderný reaktor *1162*
44.6 Termojaderná fúze: základní reakce *1163*
44.7 Termojaderná fúze ve Slunci a dalších hvězdách *1165*
44.8 Řízená termojaderná fúze *1167*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *1169*
OTÁZKY *1169*
CVIČENÍ & ÚLOHY *1170*

KAPITOLA 45

KVARKY, LEPTONY A VELKÝ TŘESK *1174*
Jak se dá udělat snímek raného vesmíru?

45.1 Život na hraně *1175*
45.2 Částice, částice, částice *1175*
45.3 Mezihra *1177*
45.4 Leptony *1181*
45.5 Hadrony *1182*
45.6 A ještě jeden zákon zachování *1183*
45.7 Osminásobná cesta *1184*
45.8 Kvarkový model *1185*
45.9 Základní síly a zprostředkující částice *1187*
45.10 Přestávka k zamyšlení *1189*
45.11 Vesmír se rozpíná *1189*
45.12 Kosmické reliktní záření *1190*
45.13 Temná hmota *1190*
45.14 Velký třesk *1191*
45.15 Shrnutí *1192*
PŘEHLED & SHRNUTÍ *1192*
OTÁZKY *1193*
CVIČENÍ & ÚLOHY *1193*

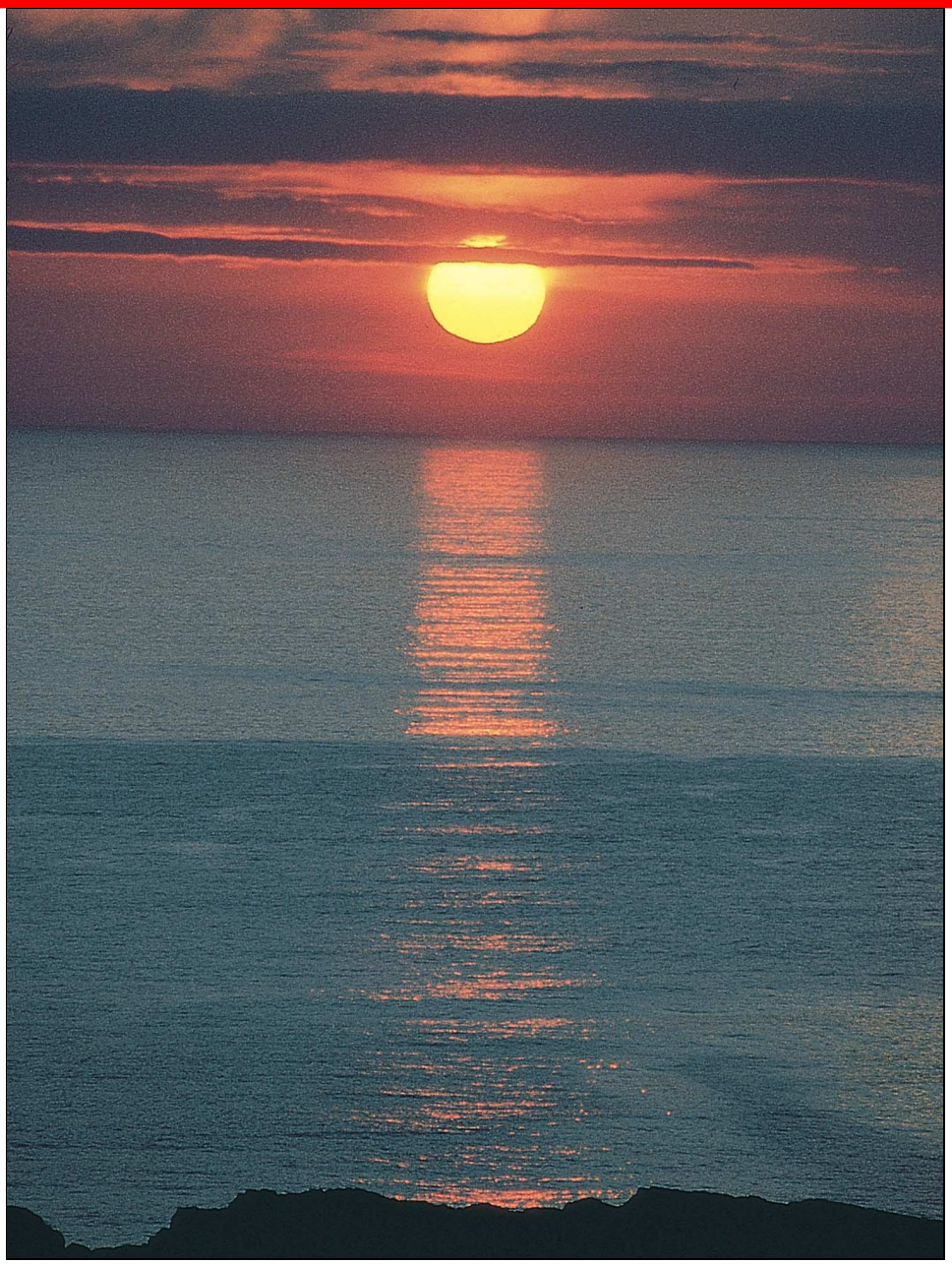
DODATKY

A. Mezinárodní soustava jednotek (SI) *D1*
B. Některé základní fyzikální konstanty *D3*
C. Některá astronomická data *D4*
D. Převodní koeficienty mezi jednotkami *D6*
E. Matematické vzorce *D10*
F. Vlastnosti prvků *D13*
G. Periodická soustava prvků *D16*
H. Nositelé Nobelových cen za fyziku *D17*

VÝSLEDKY *V1*

REJSTŘÍK *R1*

1
Měření



Ležíte na pláži u moře. Hladina je úplně klidná a vy pozorujete západ Slunce. Můžete ho dokonce pozorovat dvakrát: poprvé vleže a podruhé, když vstanete. Možná vás překvapí, že z doby, která uplyne mezi těmito dvěma západy, lze odhadnout poloměr Země. Opravdu je možné změřit Zemi tak prostým pozorováním?

1.1 MĚŘENÍ

Základem fyziky je měření. Objevovat fyziku znamená také poznávat možnosti měření veličin, které jsou s ní spjaty. Nazýváme je **fyzikálními veličinami**. Patří k nim například délka, čas, hmotnost, teplota, tlak nebo elektrický odpor.

Abychom mohli fyzikální veličinu popsat, zavedeme nejprve její **jednotku**, tj. takovou míru této veličiny, které přisoudíme číselnou hodnotu přesně 1,0. Poté vytvoříme **standard**, s nímž budeme všechny ostatní hodnoty dané fyzikální veličiny porovnávat. Tak například jednotkou délky je metr. Jeho standard je definován jako vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za přesně definovaný zlomek sekundy. (K definici metru se ještě vrátíme.) Jednotku fyzikální veličiny i její standard můžeme definovat naprosto libovolným způsobem. Důležité je jen to, aby naše definice byla natolik rozumná a praktická, aby mohla být v odborných kruzích všeobecně přijata.

Jakmile jsme definovali standard, řekněme pro délku, musíme ještě vypracovat metody, jak jej používat pro určování různých délek, ať již jde o poloměr atomu vodíku, vzdálenost koleček skateboardu nebo mezihvězdnou vzdálenost. Můžeme například používat pravítka, která přibližně nahrazují standard délky. Často však nelze přímo porovnat měřenou veličinu se standardem. Pravítkem nezměříme ani poloměr atomu, ani mezihvězdnou vzdálenost.

Fyzikálních veličin je takové množství, že není jednoduché je nějakým způsobem uspořádat. Naštěstí však nejsou všechny navzájem nezávislé. Příkladem může být rychlost, kterou lze vyjádřit jako podíl délky a času. Lze tedy vybrat, po mezinárodní dohodě, celkem malý počet fyzikálních veličin, pro něž definujeme jejich vlastní standardy. Délka i čas k nim patří. Všechny ostatní veličiny lze pak vyjádřit pomocí těchto základních veličin a jejich standardů. Tak například rychlost je definována pomocí dvou základních veličin — délky a času — a jim odpovídajících jednotek a standardů.

Standardy základních veličin musí být dostupné a při opakovaném měření neproměnné. Kdybychom třeba definovali jako standard délky starý český sáh, tedy vzdálenost mezi prsty rozpažených rukou (cca 190 cm), získali bychom bezpochyby standard snadno dostupný, avšak pro každého člověka jiný. Věda a technika však vyžadují přesnost, a proto je neproměnnost standardu mnohem důležitější než jeho snadná dosažitelnost. Je tedy třeba mít k dispozici dostatečný počet jeho přesných kopií i za cenu náročnosti jejich zhotovení.

V klasické fyzice (včetně teorie relativity) mlčky předpokládáme, že měření můžeme provádět tak, abychom při něm měřenou hodnotu neovlivnili. (Nebo — realističtěji — tak, že vliv měření je zanedbatelně malý.) Tak např. při měření průměru šroubu mikrometrem stiskneme šroub čelistmi měřidla přesně definovanou silou. Tím jej nepatrně stlačíme a naměříme údaj menší. Tento rozdíl je pro šroub jistě zanedbatelný. Kdybychom však měřili gumový špalík, už by byl vliv patrný. Lze však jistě najít jiný, vhodnější způsob měření, který průměr špalku znatelně neovlivní.

V kvantové fyzice je problém měření mnohem složitější.

1.2 MEZINÁRODNÍ SOUSTAVA JEDNOTEK

V roce 1971 bylo na 14. generální konferenci pro váhy a míry vybráno sedm **základních veličin** a odpovídajících základních jednotek, které se staly základem **Mezinárodní soustavy jednotek** označované zkratkou SI (z francouzského Système International des Unités), nazývané též metrická soustava. V tab. 1.1 jsou uvedeny jednotky tří základních veličin — délky, hmotnosti a času, které používáme už v úvodních kapitolách této knihy. Byly vybrány tak, aby byly blízké „lidským měřítkům“.

Tabulka 1.1 **Některé základní jednotky SI**

VELIČINA	NÁZEV JEDNOTKY	SYMBOL
délka	metr	m
čas	sekunda	s
hmotnost	kilogram	kg

Všechny tzv. **odvozené jednotky** soustavy SI jsou definovány pomocí jednotek základních. Například jednotku výkonu **watt** (značka W) lze vyjádřit základními jednotkami hmotnosti, délky a času. V kap. 7 ukážeme, že

$$1\ \text{watt} = 1\ \text{W} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}. \tag{1.1}$$

Abychom jednoduše a stručně zapsali velmi velké nebo velmi malé hodnoty veličin, používáme tzv. exponenciální tvar zápisu čísel pomocí mocnin čísla 10. Takto vyjádříme například:

$$3\,560\,000\,000\ \text{m} = 3{,}56\cdot10^9\ \text{m} \tag{1.2}$$

nebo

$$0{,}000\,000\,492\ \text{s} = 4{,}92\cdot10^{-7}\ \text{s}. \tag{1.3}$$

S rozvojem počítačů se čísla v exponenciálním tvaru začala zapisovat ještě jednodušším způsobem, například 3,56 E9 m nebo 4,92 E−7 s. Písmeno E označuje, že následující číslo má význam mocnitele (exponentu) základu 10. Některé kalkulačky zápis ještě více zjednodušují a písmeno E nahrazují mezerou.

Jinou možností vyjádření velmi velkých a velmi malých hodnot je použití vhodných předpon v názvech jednotek. Jejich seznam uvádí tab. 1.2. Každá předpona zastupuje příslušnou mocninu čísla 10. Předpona u kterékoli z jednotek SI signalizuje, že hodnotu veličiny je třeba vynásobit odpovídajícím koeficientem. Zadanou hodnotu elektrického výkonu nebo délku časového intervalu můžeme zapsat například takto:

$$1{,}27{\cdot}10^{9}\ \text{wattů} = 1{,}27\ \text{gigawattů} = 1{,}27\,\text{GW}, \quad (1.4)$$

$$2{,}35{\cdot}10^{-9}\ \text{s} = 2{,}35\ \text{nanosekundy} = 2{,}35\,\text{ns}. \quad (1.5)$$

Některé jednotky s předponami (např. decilitr, centimetr, kilogram nebo megabajt) se používají zcela běžně.

1.3 PŘEVODY JEDNOTEK

Při výpočtech číselných hodnot fyzikálních veličin často potřebujeme měnit jednotky, v nichž veličinu vyjadřujeme. Tento přepočet nazýváme **převod jednotek**. Převod můžeme snadno provést například tak, že vynásobíme původní zadanou či změřenou hodnotu **převodním koeficientem**. Tento koeficient je ve skutečnosti roven jedné, je však vyjádřen ve tvaru zlomku, jehož čitatel i jmenovatel udávají tutéž hodnotu v různých jednotkách. Uveďme příklad: Údaje 1 min a 60 s představují stejné časové intervaly. Můžeme proto psát

$$\frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{60\,\text{s}}{1\,\text{min}} = 1.$$

Tento zápis *neznamená*, že by snad platilo $\frac{1}{60} = 1$ nebo $60 = 1$. *Číselný údaj* a odpovídající *jednotka* tvoří ve výrazu pro převodní koeficient neoddělitelnou dvojici.

Vzhledem k tomu, že vynásobení libovolné veličiny jedničkou nezmění její hodnotu, můžeme takové převody provádět, kdykoli to považujeme za užitečné. Zbavíme se tak jednotek, které nechceme používat: jednoduše se vykrátí. Chceme-li například převést 2 min na sekundy, píšeme

$$2\,\text{min} = (2\,\text{min})(1) = (2\,\cancel{\text{min}})\left(\frac{60\,\text{s}}{1\,\cancel{\text{min}}}\right) = 120\,\text{s}. \quad (1.6)$$

Častou chybou při převodu jednotek je záměna čitatele a jmenovatele v převodním koeficientu. V tom případě se nežádoucí jednotky nevykrátí, a tak chybu snadno objevíme. Pro počítání s jednotkami platí stejná algebraická pravidla jako pro proměnné a čísla.

V dod. D a na vnitřní straně zadní obálky této knihy jsou uvedeny koeficienty pro převody mezi soustavou SI a jinými soustavami jednotek. Jednou z mála zemí, které nestanovily zákonem povinnost používat Mezinárodní soustavu jednotek, jsou i Spojené státy americké.

PŘÍKLAD 1.1

Průzkumná ponorka ALVIN se potápí rychlostí 36,5 sáhů za minutu.

(a) Vyjádřete tuto rychlost v metrech za sekundu. Jeden sáh je roven přesně 6 stopám (ft).

ŘEŠENÍ: Jednotky převádíme následujícím způsobem:

$$36{,}5\,\frac{\text{sáhů}}{\text{min}} = \left(36{,}5\,\frac{\cancel{\text{sáhů}}}{\cancel{\text{min}}}\right)\left(\frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\,\text{s}}\right)\cdot \left(\frac{6\,\cancel{\text{ft}}}{1\,\cancel{\text{sáh}}}\right)\left(\frac{1\,\text{m}}{3{,}28\,\cancel{\text{ft}}}\right) = 1{,}11\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je tato rychlost v mílích (mi) za hodinu?

Tabulka 1.2 **Předpony jednotek SI**

NÁSOBEK	PŘEDPONA	ZNAČKA	NÁSOBEK	PŘEDPONA	ZNAČKA
10^{24}	yotta-	Y	10^{-24}	yokto-	y
10^{21}	zetta-	Z	10^{-21}	zepto-	z
10^{18}	exa-	E	10^{-18}	atto-	a
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{12}	tera-	T	$\mathbf{10^{-12}}$	**piko-**	**p**
$\mathbf{10^{9}}$	**giga-**	**G**	$\mathbf{10^{-9}}$	**nano-**	**n**
$\mathbf{10^{6}}$	**mega-**	**M**	$\mathbf{10^{-6}}$	**mikro-**	μ
$\mathbf{10^{3}}$	**kilo-**	**k**	$\mathbf{10^{-3}}$	**mili-**	**m**
10^{2}	hekto-	h	$\mathbf{10^{-2}}$	**centi-**	**c**
10^{1}	deka-	da	10^{-1}	deci-	d

Nejužívanější předpony jsou vytištěny tučně.

ŘEŠENÍ: Stejně jako v předchozím případě dostaneme

$$36{,}5\,\frac{\text{sáhů}}{\text{min}} = \left(36{,}5\,\frac{\text{sáhů}}{\text{min}}\right)\left(\frac{60\,\text{min}}{1\,\text{h}}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{6\,\text{ft}}{1\,\text{sáh}}\right)\left(\frac{1\,\text{mi}}{5\,280\,\text{ft}}\right) =$$
$$= 2{,}49\,\text{mi/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Vyjádřete tuto rychlost ve světelných rocích za rok.

ŘEŠENÍ: Jeden světelný rok (ly z angl. light year) je vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za jeden rok. Je roven $9{,}46{\cdot}10^{12}$ km.

Užitím výsledku (a) dostaneme

$$1{,}11\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1} = \left(1{,}11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1\,\text{ly}}{9{,}46{\cdot}10^{12}\,\text{km}}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1\,\text{km}}{1\,000\,\text{m}}\right)\left(\frac{3{,}16{\cdot}10^{7}\,\text{s}}{1\,\text{y}}\right) =$$
$$= 3{,}71{\cdot}10^{-9}\,\text{ly/y}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 1.2

Kolik čtverečných metrů má plocha o obsahu $6{,}0\,\text{km}^2$?

ŘEŠENÍ: Obsahuje-li údaj mocninu některé jednotky, je vhodné ji nejprve rozepsat jako součin a pak převést každý činitel zvlášť:

$$6{,}0\,\text{km}^2 = 6{,}0\,(\text{km})(\text{km}) =$$
$$= 6{,}0\,(\text{km})(\text{km})\left(\frac{1\,000\,\text{m}}{1\,\text{km}}\right)\left(\frac{1\,000\,\text{m}}{1\,\text{km}}\right) =$$
$$= 6{,}0{\cdot}10^{6}\,\text{m}^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 1.1: *Platná místa a desetinná místa*

Při řešení př. 1.1a na kalkulačce se na jejím displeji pravděpodobně zobrazilo číslo 1,112 804 878. Přesnost, se kterou je toto číslo vyjádřeno, však nemá rozumný význam. Proto jsme je rovnou zaokrouhlili na hodnotu 1,11, která odpovídá přesnosti výchozích údajů. Zadaná rychlost 36,5 sáhů za minutu je určena třemi číslicemi. Říkáme, že je dána na tři **platná místa**. Čtvrtou číslici řádu setin již neznáme, a proto při převodu jednotek nemá smysl uvádět více číslic než tři.*

Žádný konečný výsledek by obecně neměl být zapsán číslem s větším počtem platných míst, než měly výchozí údaje.

V průběhu výpočtu vedeného v několika postupných krocích pracujeme s větším počtem platných míst, než měly výchozí údaje. Jakmile však dospějeme ke konečnému výsledku, zaokrouhlíme jej podle výchozích údajů. (Ve výsledcích řešených příkladů v této knize používáme zpravidla rovnítko „=“ i tehdy, byl-li mezivýsledek zaokrouhlen, a symbol „≐“ až u konečného zaokrouhlení.)

Počet platných míst v údajích 3,15 nebo $3{,}15{\cdot}10^3$ je zřejmý. Jak je tomu však u čísla 3 000? Je zadáno pouze na jedno nebo na čtyři platná místa (tedy jako $3{\cdot}10^3$ nebo $3{,}000\cdot10^3$)? V této knize budeme považovat všechny nuly v číslech typu 3 000 za platná místa. Při studiu literatury je však třeba dát pozor, zda autoři neužívají jinou dohodu.

Nezaměňujme *platná místa* s místy *desetinnými*. Uvažujme například údaje 35,6 mm, 3,56 m a 0,003 56 km. Všechny jsou zadány na tři platná místa, i když první z nich má jedno, druhý dvě a třetí dokonce pět desetinných míst.

* Tento způsob počítání s čísly zadanými s omezenou přesností je jen velmi přibližný. Tak například každé z čísel 11 a 99 je zadáno na dvě platná místa. Nejistota obou údajů je řádu desetin. Jedna desetina (0,1) však představuje zhruba 1 % hodnoty 11 a pouze 0,1 % hodnoty 99. Veličina s hodnotou 99 je zadána přesněji než veličina, jejíž hodnota je 11. V odborné a vědecké práci zásadně opatřujeme hodnotu každé naměřené nebo vypočtené veličiny její *standardní odchylkou* neboli *chybou*, která vyjadřuje kvantitativně přesnost této veličiny.

1.4 DÉLKA

V roce 1792 byl v mladé Francouzské republice zaveden nový systém měr a vah. Jednotkou délky byl stanoven metr, definovaný jako jedna desetimiliontina vzdálenosti od severního pólu k rovníku. Z praktických důvodů se později od vazby na tento „zemský“ standard upustilo a metr byl definován jako vzdálenost mezi dvěma tenkými vrypy na tyči vyrobené ze slitiny platiny a iridia, tzv. **standardním metru**. Tento standard je dodnes uložen v Mezinárodním úřadu pro váhy a míry v Sèvres u Paříže. Jeho přesné kopie, nazývané **druhotnými standardy**, byly rozeslány do metrologických laboratoří po celém světě a jsou používány při výrobě dalších, mnohem snadněji dostupných, standardů. Každé zařízení pro měření délky poskytuje údaje odvozené od standardního metru.

V roce 1959 byl úředně definován yard jako

$$1\,\text{yard} = 0{,}914\,4\,\text{m (přesně)}. \qquad (1.7)$$

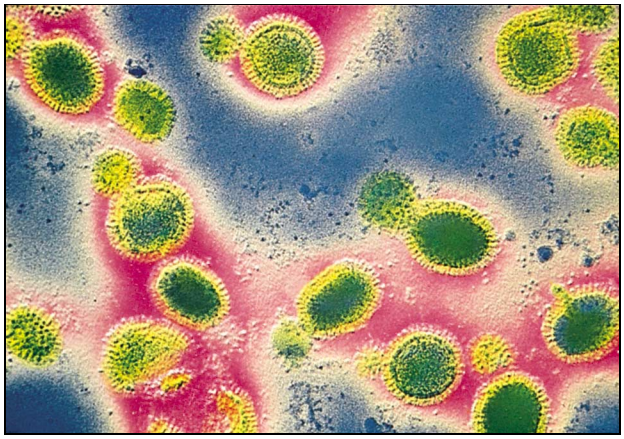
Tato definice je ekvivalentní se vztahem pro palec (inch):

$$1\,\text{in} = 2{,}54\,\text{cm (přesně)}. \qquad (1.8)$$

V tab. 1.3 jsou uvedeny zajímavé údaje o délkových rozměrech některých objektů, včetně velikosti viru, jehož mnohonásobně zvětšený obraz získaný v elektronovém mikroskopu vidíme na obr. 1.1.

Tabulka 1.3 **Řádové velikosti a rozměry**

DÉLKA	V METRECH
k nejvzdálenějšímu kvazaru (1996)	$2{\cdot}10^{26}$
k mlhovině v Andromedě	$2{\cdot}10^{22}$
k nejbližší hvězdě (Proxima Centauri)	$4{\cdot}10^{16}$
k nejvzdálenější planetě (Pluto)	$6{\cdot}10^{12}$
poloměr Země	$6{\cdot}10^{6}$
výška Mount Everestu	$9{\cdot}10^{3}$
výška člověka	$2{\cdot}10^{0}$
tloušťka této stránky	$1{\cdot}10^{-4}$
vlnová délka světla	$5{\cdot}10^{-7}$
typická velikost viru	$1{\cdot}10^{-8}$
poloměr atomu vodíku	$5{\cdot}10^{-11}$
poloměr protonu	$1{\cdot}10^{-15}$



Obr. 1.1 Obarvený elektronový obraz chřipkového viru. Lipoproteiny hostitele (obarveny žlutě) obklopují jádro viru (zelené). Celkový průměr útvaru je menší než 50 nm.

Později vyžadovala moderní věda a technika ještě přesnější standard, než je vzdálenost mezi dvěma jemnými vrypy na kovové tyči. Proto byl v roce 1960 přijat nový standard metru, který vycházel z vlnové délky světla. Metr byl definován jako 1 650 763,73 násobek vlnové délky oranžově červeného světla, které při výboji emitují atomy kryptonu 86.* Tento zvláštní počet vlnových délek byl vybrán proto, aby nový standard byl co nejbližší dosavadnímu metru.

Atomy kryptonu 86, použité pro definici standardu délky, jsou dostupné kdekoli, jsou identické a všechny vyzařují světlo přesně stejné vlnové délky. V každém z nich je tak standard uschován lépe a bezpečněji než v Mezinárodním úřadu pro váhy a míry (P. Morrison, MIT). Požadavky na přesnost však stále rostly, až dosáhly takového stupně, že jim už ani kryptonové atomy nedokázaly vyhovět. V roce 1983 byl v historii vývoje standardu délky zaznamenán výrazný pokrok. Metr byl nově definován jako vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu v přesně stanoveném časovém intervalu. Sedmnáctá generální konference pro váhy a míry přijala tuto definici metru:

Jeden metr je vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za dobu 1/299 792 458 sekundy.

Tato konkrétní volba délky časového intervalu v definici metru určuje přesně hodnotu rychlosti světla ve vakuu

$$c = 299\,792\,458\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Rychlost světla už dokážeme měřit velmi přesně a také měření časových intervalů patří v současnosti k nejpřesnějším měřením vůbec. Jejich využití pro novou definici metru je proto velmi dobře odůvodněné.

PŘÍKLAD 1.3

Sprinterská trať mívala vedle délky 100 m, běžné v současném atletickém sportu, také délku 110 yardů.

(a) Která trať je delší?

ŘEŠENÍ: Z (1.7) snadno zjistíme, že vzdálenost 110 yardů je 100,58 m. Sprint na 110 yardů je tedy delší.

(b) O kolik stop (ft)?

ŘEŠENÍ: Označme ΔL rozdíl délek běžeckých tratí. (Symbol Δ — velké řecké „delta“ — značí rozdíl veličin.) Pak

$$\begin{aligned}\Delta L &= 110\ \text{yardů} - 100\ \text{m} = \\ &= 100{,}584\ \text{m} - 100\ \text{m} = 0{,}584\ \text{m} = \\ &= (0{,}584\ \text{m})\left(\frac{3{,}28\ \text{ft}}{1\ \text{m}}\right) = \\ &= 1{,}916\ \text{ft} \doteq 1{,}9\ \text{ft}.\end{aligned}$$

(Odpověď)

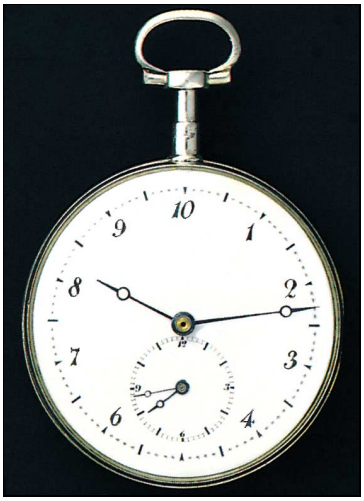
1.5 ČAS

Pojem čas můžeme chápat dvěma různými způsoby. V běžném životě a často i ve vědě potřebujeme znát denní čas (obr. 1.2), abychom mohli popsat sled událostí. Ve vědecké práci je zase většinou důležité, jak dlouho daná událost trvala. Každý standard času tedy musí umožňovat odpověď na dvě otázky: „*Kdy* se to stalo?“ a „*Jak dlouho* to trvalo?“ tab. 1.4 uvádí přehled některých časových intervalů.

Standardem času může být jakýkoli jev, který se pravidelně opakuje. Po staletí sloužilo tomuto účelu otáčení Země, které určovalo délku dne. I křemenné hodiny, ve kterých osciluje křemenný krystal v elektronickém obvodu, lze

* Číslo 86 v označení atomu (často užívaným označením je i ^{86}Kr nebo $^{86}_{36}$Kr) identifikuje jeden z pěti stabilních izotopů (stabilních nuklidů) kryptonu a nazývá se *hmotnostním* nebo *nukleonovým* číslem.

pomocí astronomických pozorování cejchovat vzhledem k rotaci Země a používat pak v laboratořích pro měření časových intervalů. Tato kalibrace však nemůže být provedena s přesností odpovídající požadavkům současné vědy a techniky.



Obr. 1.2 V návrhu metrické soustavy z roku 1792 byla hodina definována tak, aby den měl 10 hodin. Tato myšlenka se neujala. Tvůrce těchto desetihodinových hodinek byl prozíravý a opatřil je ještě malým ciferníkem ukazujícím tradiční dvanáctihodinový čas. Ukazují obojí hodinky stejný čas?

Tabulka 1.4 **Řádové doby vybraných dějů**

ČASOVÝ INTERVAL	SEKUNDY
doba života protonu (předpověď)	$1{\cdot}10^{39}$
stáří Vesmíru	$5{\cdot}10^{17}$
stáří Cheopsovy pyramidy	$1{\cdot}10^{11}$
průměrný věk člověka	$2{\cdot}10^{9}$
délka roku	$3{\cdot}10^{7}$
délka dne	$9{\cdot}10^{4}$
tep lidského srdce	$8{\cdot}10^{-1}$
doba života mionu	$2{\cdot}10^{-6}$
nejkratší světelný pulz (r. 1989)	$6{\cdot}10^{-15}$
doba života nejnestabilnějších částic	$1{\cdot}10^{-23}$
Planckův čas*	$1{\cdot}10^{-43}$

* nejkratší doba po Velkém třesku, po které již platí zákony fyziky v takové podobě, v jaké je známe nyní.

Snaha o získání lepšího standardu času vedla ke konstrukci atomových hodin. Na obr. 1.3 vidíme jeden typ takových hodin, umístěný v Národním ústavu pro standardy a technologii (NIST) v USA. Využívá charakteristické frekvence izotopu cesia 133 a určuje jednotný čas UTC. Jeho časové signály je možné získat z krátkovlnného rozhlasového vysílání (stanice WWV a WWVH) nebo telefonicky (v ČR na lince 14 122). (Pokud bychom chtěli seřídit nějaké místní hodiny s mimořádnou přesností, museli bychom uvážit dobu šíření signálu z vysílací stanice k nám.)

Na obr. 1.4 je záznam kolísání délky dne v průběhu čtyřletého období získaný srovnáním s cesiovými hodinami. Zjištěné rozdíly, zřejmě související s ročními obdobími, přisuzujeme nepravidelnosti rotace Země a věříme, že chod cesiových hodin je pravidelnější. Kolísání je pravděpodobně způsobeno slapovými jevy (vliv Měsíce) a rozsáhlým prouděním vzduchu v atmosféře.

Třináctá generální konference pro váhy a míry (1967) přijala standard **sekundy**, odvozený od frekvence kmitů atomů cesiových hodin:

> Jedna sekunda je doba trvání 9 192 631 770 period světelného záření, emitovaného při přechodu atomu cesia 133 mezi dvěma konkrétními hladinami jeho velmi jemné struktury.

Přesnost cesiových hodin je taková, že by trvalo 6 000 let, než by se dvoje hodiny rozešly o více než 1 s. I tato přesnost je však malá ve srovnání s hodinami, které se vyvíjejí v současnosti. Mají dosáhnout přesnosti $1 : 10^{18}$, která odpovídá odchylce pouhé 1 s za 10^{18} s (asi $3{\cdot}10^{10}$ let).

PŘÍKLAD 1.4*

Představme si, že pozorujeme západ Slunce vleže na břehu klidného moře. Spustíme stopky právě v okamžiku, kdy Slunce zcela zmizí. Poté vstaneme a zvýšíme tak polohu svých očí o 1,70 m. Stopky zastavíme v okamžiku, kdy nám Slunce zmizí podruhé. Jaký je poloměr Země, ukazují-li stopky 11,1 s?

ŘEŠENÍ: Z obr. 1.5 vidíme, že při pozorování vleže se zorný paprsek směřující k hornímu okraji slunečního kotouče dotýká povrchu Země v místě, ve kterém se právě nacházíme, tj. v bodě A. Při druhém pozorování západu Slunce je zorný paprsek tečnou v bodě B. Označme symbolem d vzdálenost mezi bodem B a polohou očí stojícího pozorovatele. Vzdálenosti bodů A a B od středu Země jsou rovny poloměru Země r. Z Pythagorovy věty dostaneme

$$d^2 + r^2 = (r + h)^2 = r^2 + 2rh + h^2,$$

tj.

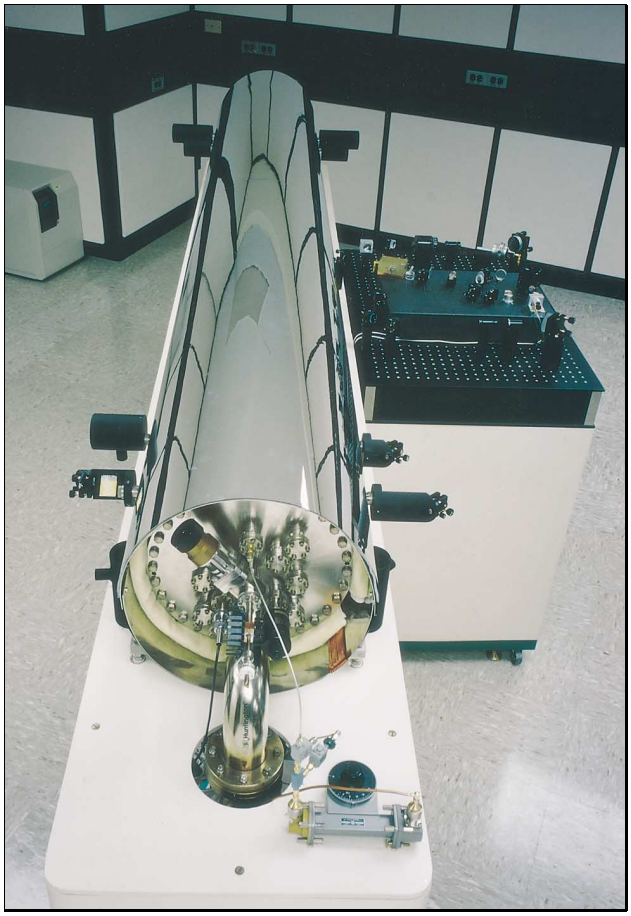
$$d^2 = 2rh + h^2. \qquad (1.9)$$

Výška h je ovšem zanedbatelná vzhledem k poloměru Země r. Proto je člen h^2 mnohem menší než člen $2rh$ a rov. (1.9) lze přepsat ve tvaru

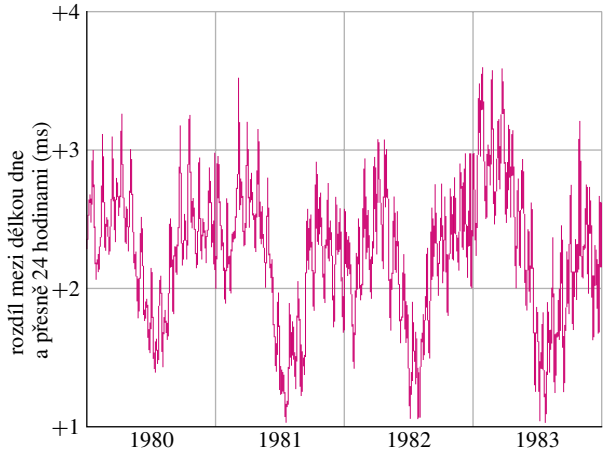
$$d^2 = 2rh. \qquad (1.10)$$

Symbolem θ jsme označili úhel mezi tečnami v bodech A a B (obr. 1.5). O stejný úhel se za změřenou dobu 11,1 s

* Převzato z článku Dennise Rawlinse „Doubling Your Sunsets, or How Anyone Can Measure the Earth's size with a Wristwatch and Meter Stick", *American Journal of Physics*, Feb. 1979, Vol. 47, pp. 126–128. Metoda dává nejlepší výsledky na rovníku.



Obr. 1.3 Cesiový frekvenční normál v Národním ústavu pro standardy a technologii v Boulderu (Colorado). Je standardem jednotky času pro Spojené státy americké. Časové signály Námořní observatoře lze získat na adrese http://tycho.usno.navy.mil /time.html; telefonicky v USA na lince (001)-303-499 7111, v ČR na lince 14 122.



Obr. 1.4 Kolísání délky dne v průběhu čtyřletého období. Všimněte si, že rozsah svislé stupnice je pouhé 3 ms (= 0,003 s).

otočí Slunce na své zdánlivé dráze kolem Země. Za celý den, tj. přibližně za 24 hodin, se Slunce kolem Země otočí o 360°. Pak můžeme psát

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{t}{24\ \mathrm{h}}.$$

Dosadíme-li $t = 11{,}1\ \mathrm{s}$, dostaneme

$$\theta = \frac{(360^\circ)(11{,}1\ \mathrm{s})}{(24\ \mathrm{h})(60\ \mathrm{min{\cdot}h^{-1}})(60\ \mathrm{s{\cdot}min^{-1}})} = 0{,}046\,25^\circ.$$

Z obr. 1.5 vidíme, že $d = r\,\mathrm{tg}\,\theta$. Dosazením do rov. (1.10) dostaneme

$$r^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta = 2rh,$$

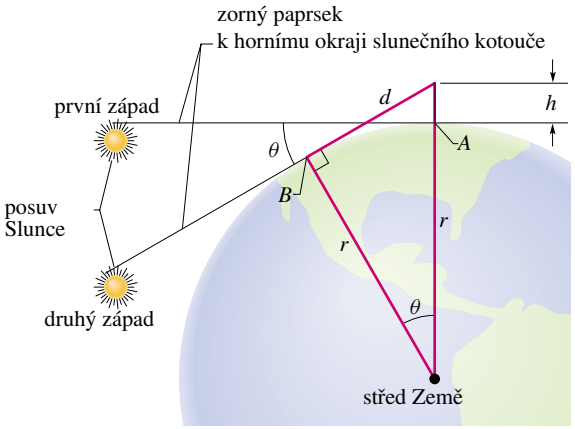
tj.

$$r = \frac{2h}{\mathrm{tg}^2\,\theta}.$$

Pro číselné hodnoty $\theta = 0{,}046\,25^\circ$ a $h = 1{,}70\,\mathrm{m}$ máme konečně

$$r = \frac{2(1{,}70\,\mathrm{m})}{\mathrm{tg}^2\,0{,}046\,25^\circ} = 5{,}22{\cdot}10^6\,\mathrm{m}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek se liší od známé hodnoty poloměru Země ($6{,}378{\cdot}10^6$ m) o 20 %.

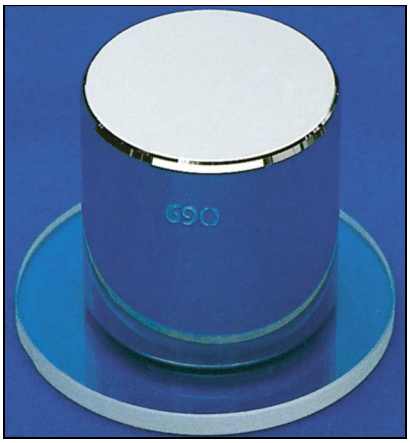


Obr. 1.5 Příklad 1.4. Zvedne-li se pozorovatel z polohy vleže (bod A) a zvýší tak polohu svých očí do výšky h, otočí se zorný paprsek vycházející z horního okraje slunečního kotouče o úhel θ. (Velikosti výšky h i úhlu θ jsou v obrázku mnohem větší, než odpovídá skutečnosti.)

1.6 HMOTNOST

Standardní kilogram

Standardní jednotkou hmotnosti v soustavě SI je **kilogram**. Původně byl definován jako hmotnost jednoho litru (tj. 1 dm^3) vody. Nyní je podle mezinárodní úmluvy určen hmotností válce vyrobeného ze slitiny platiny a iridia (obr. 1.6), který je uložen v Mezinárodním ústavu pro váhy a míry v Sèvres u Paříže. Přesné kopie tohoto etalonu byly rozeslány do laboratoří pro standardy v ostatních zemích. Hmotnost jiných těles pak můžeme měřit porovnáním s hmotností kterékoli z těchto kopií. V tab. 1.5 jsou uvedeny hmotnosti některých objektů.



Obr. 1.6 Mezinárodní hmotnostní standard 1 kg má tvar válce, jehož výška i průměr jsou 39 mm.

Bývalé Československo vlastnilo dva standardy hmotnosti ze slitiny platiny a iridia, které byly porovnávány s etalony v Mezinárodním ústavu pro váhy a míry každých 15 až 20 let. Po rozdělení státu zůstaly oba národní etalony na Slovensku. Česká republika získala vlastní kopii standardního kilogramu na jaře roku 1999. Při posledním vážení v únoru 1999 byla naměřena hmotnost českého národního kilogramu 1 kg + 0,165 mg. Procedury srovnávání národních kilogramů budou jistě jednou nahrazeny spolehlivějším a přesnějším postupem, vycházejícím z hmotnosti atomu jakožto základního standardu.

Jiný standard hmotnosti

Porovnávat hmotnosti atomů mezi sebou dokážeme mnohem přesněji, než je srovnávat přímo se standardním kilogramem. Proto užíváme ještě dalšího standardu hmotnosti.

Tabulka 1.5 **Řádové hmotnosti vybraných objektů**

OBJEKT	KILOGRAMY
známý vesmír	$1{\cdot}10^{53}$
naše Galaxie	$2{\cdot}10^{41}$
Slunce	$2{\cdot}10^{30}$
Měsíc	$7{\cdot}10^{22}$
asteroid Eros	$5{\cdot}10^{15}$
hora	$1{\cdot}10^{12}$
zaoceánský parník	$7{\cdot}10^{7}$
slon	$5{\cdot}10^{3}$
člověk	$1{\cdot}10^{2}$
zrnko hroznu	$3{\cdot}10^{-3}$
prachová částečka	$7{\cdot}10^{-10}$
molekula penicilinu	$5{\cdot}10^{-17}$
atom uranu	$4{\cdot}10^{-25}$
proton	$2{\cdot}10^{-27}$
elektron	$9{\cdot}10^{-31}$

Je jím atom uhlíku $^{12}_{6}C$, jemuž byla mezinárodní úmluvou přisouzena hmotnost dvanácti tzv. **atomových hmotnostních jednotek** (u). Hmotnost atomové jednotky souvisí s hmotností standardního kilogramu vztahem

$$1\,\mathrm{u} = 1{,}660\,540\,2{\cdot}10^{-27}\,\mathrm{kg}. \qquad (1.11)$$

Poslední dvě desetinná místa jsou zatížena chybou ± 10. Tak lze s přiměřenou přesností porovnávat hmotnosti různých atomů s hmotností atomu uhlíku $^{12}_{6}C$. Zatím nám však chybí spolehlivý způsob, jak dosáhnout stejné přesnosti i při měření běžných hmotností, srovnatelných s hmotností kilogramu.

1.7 MNOŽSTVÍ

Zatímco standardní kilogram je typicky makroskopickou jednotkou, patří atomová hmotnostní jednotka do oblasti mikrosvěta. Při vyjádření makroskopických veličin pomocí mikroskopických jednotek lze použít jednotku **mol**, udávající přesně definovaný počet kusů (například atomů, molekul, apod.). Jeden mol má hodnotu $6{,}022{\cdot}10^{23}$. Původně byl zaveden jako počet atomů v 1 g nejjednoduššího prvku, vodíku. Nyní je definován pomocí izotopu uhlíku $^{12}_{6}C$. I když se ho většinou užívá pro vyjádření látkového množství, může být použitelný i jinak (např. pro počet dvojných vazeb či valenčních elektronů).

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Fyzikální měření

Základem fyziky je měření fyzikálních veličin. Některé fyzikální veličiny byly vybrány za **základní** (například délka, čas a hmotnost). Každá z nich byla definována prostřednictvím **standardu** a dané **základní jednotky** (například metr, sekunda, kilogram). Jednotky ostatních fyzikálních veličin nazýváme **odvozené** a definujeme je pomocí jednotek základních.

Soustava SI

V této knize (až na výjimky v některých úlohách) používáme mezinárodní soustavu jednotek (SI). V úvodních kapitolách vystačíme jen se třemi základními veličinami, které jsou uvedeny v tab. 1.1. Mezinárodní dohodou byly pro tyto veličiny stanoveny standardy, které musí být dostupné a neměnné. Pomocí nich se vyjadřují výsledky všech fyzikálních měření základních i odvozených veličin. Zápis velmi velkých nebo velmi malých hodnot lze zjednodušit použitím předpon (viz tab. 1.2) nebo užitím exponenciálního tvaru.

Převod jednotek

Při převodu jednotek postupně násobíme původní hodnotu jednotkovými převodními koeficienty. Výrazy můžeme upravovat pomocí běžných algebraických pravidel.

Délka

Jednotkou délky je metr. Je definován jako vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za přesně stanovený časový interval. Jiné délkové jednotky, které se v některých zemích stále používají (například míle, yard, palec), jsou nyní definovány pomocí metru (1 míle = 1 609,344 m).

Čas

Jednotkou času je sekunda. Původně byla odvozena z rotace Země. Současná definice využívá frekvence světla vyzářeného atomy cesia $^{133}_{55}$Cs. Přesný časový signál se z laboratoří pro standardy vysílá rádiem do celého světa.

Hmotnost

Jednotkou hmotnosti je kilogram. Je definován pomocí prototypu, vyrobeného ze slitiny platiny a iridia a uloženého v Mezinárodním ústavu pro váhy a míry. Pro měření hmotností elementárních částic, atomů a molekul se obvykle používá atomová hmotnostní jednotka u. Základem její definice je hmotnost atomu uhlíku $^{12}_{6}$C.

Množství

Jeden **mol** je roven počtu $6{,}02\cdot10^{23}$ (atomů, molekul, …). Užívá se zejména pro látkové množství.

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 1.2 Mezinárodní soustava jednotek

1C. Přečtěte s použitím předpon z tab. 1.2: (a) 10^{-6}klima, (b) 10^{9}nt, (c) 10^{6}fon, (d) 10^{-12}la, (e) 10^{-3}on, (f) 10^{1}dent, (g) 10^{12}sa, (h) 10^{-6}fon, (i) 10^{15}rda, (j) 10^{2}r, (k) 10^{18}minátor.

2C. (a) Některé předpony soustavy SI se staly součástí hovorového jazyka, i když nejsou vždy používány správně. „Půjč mi tři kila“ (myšlen jistý obnos peněz). Kolik je to korun? V jiných případech používáme pro označení množství jen předponu bez uvedení jednotky. O jakou hodnotu které veličiny se jedná v následujících větách? (b) Kup asi kilo. (c) Dvě deci, prosím. (d) Deset deka bude stačit. (e) Pevný disk počítače má kapacitu 650 mega. Je-li pro uložení jednoho slova potřeba průměrně 8 bajtů, kolik slov může být na tomto pevném disku uloženo? (Zpravidla však *mega* v případě megabajtu znamená 1 048 576 ($= 2^{20}$), nikoli 1 000 000 a *kilobajt* je 1 024 (2^{10}) bajtů.)

ODST. 1.4 Délka

3C. Raketoplán obíhá kolem Země ve výšce 300 km. Vypočtěte jeho výšku v (a) mílích, (b) milimetrech.

4C. Jaká je vaše výška ve stopách?

5C. (a) Kolik mikrometrů má jeden kilometr? (b) Jakou část centimetru představuje 1 μm? (c) Kolik mikrometrů je jeden yard?

6C. Země má přibližně tvar koule s poloměrem 6 378 km. (a) Vypočtěte její obvod v m. (b) Jaký má povrch v m^2? (c) Jaký je její objem v m^3?

7C. Převeďte 20 mil na km jen s použitím následujících převodních vztahů: 1 míle = 5 280 stop, 1 stopa = 12 palců, 1 palec = 2,54 cm, 1 m = 100 cm a 1 km = 1 000 m.

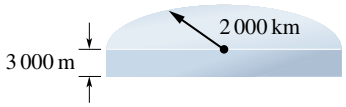
8C. Najděte převodní vztahy mezi (a) čtverečným yardem a čtverečnou stopou, (b) čtverečným palcem a čtverečným centimetrem, (c) čtverečnou mílí a čtverečným kilometrem, (d) krychlovým metrem a krychlovým centimetrem.

9C. Pro určení velikosti pozemků se často používá jednotka plochy zvaná **ar** (zkratka a), který je roven 10^2 m^2, a jednotka **hektar** (zkratka ha), představující 10^2 a. Povrchový uhelný důl odebírá každý rok 75 ha půdy do hloubky 26 m. Jaký objem půdy je každoročně odstraněn? Vyjádřete jej v km^3.

10C. Staročeské látro představovalo podle některých pramenů objem řezaného dřeva srovnaného do tvaru kvádru o délce 8 stop, šířce 4 stopy a výšce rovněž 4 stopy. Kolik láter dřeva je v 1 m^3? Kolik je tisíc láter v SI?

11C. Pokoj je dlouhý 20 stop 2 palce, široký 12 stop 5 palců a vysoký 12 stop 2,5 palce. Jaká je plocha podlahy v (a) čtverečných stopách a (b) čtverečných metrech? Jaký je objem pokoje v (c) krychlových stopách a (d) krychlových metrech?

12C. Antarktida má přibližně půlkruhový tvar o poloměru 2 000 km (obr. 1.7). Je přikryta ledem, jehož průměrná tloušťka je 3 000 m. Kolik krychlových centimetrů ledu je v Antarktidě? (Zakřivení zemského povrchu neuvažujte.)



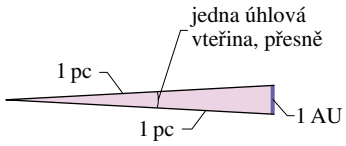
Obr. 1.7 Cvičení 12

13C. Malá kostka cukru má tvar krychle s hranou délky 1 cm. Jaká by musela být délka hrany krychlové krabice, do které bychom chtěli uložit jeden mol kostek cukru?

14C. Meteorologové často vyjadřují množství srážek v milimetrech vodního sloupce. Na město o rozloze 26 km^2 spadlo při silné bouři 50 mm srážek. Vyjádřete objem spadlé vody v litrech.

15C. Výrobce barev udává vydatnost vnějšího laku 11,3 m^2/l. Vyjádřete tuto hodnotu (a) ve čtverečných stopách na galon, (b) v jednotkách SI. (c) Jaký je fyzikální význam převrácené hodnoty tohoto čísla?

16C. Astronomické vzdálenosti jsou v porovnání s pozemskými tak obrovské, že je výhodné pro ně používat jiných délkových jednotek. **Astronomická jednotka** (AU z angl. *Astronomical unit*) je rovna střední vzdálenosti Země od Slunce, tj. $1{,}49\cdot10^8$ km. Jeden **parsek** (pc, z angl. *parsec*) je vzdálenost, ze které bychom viděli astronomickou jednotku pod zorným úhlem jedné úhlové vteřiny (obr. 1.8). **Světelný rok** (ly, z angl. *light year*) je vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za jeden rok. (a) Vyjádřete vzdálenost Země–Slunce v parsecích a světelných rocích. (b) Vyjádřete 1 pc a 1 ly v kilometrech. I když astronomové dávají přednost jednotce pc, v populární literatuře se častěji používají světelné roky.



Obr. 1.8 Cvičení 16

17C. Při úplném zatmění Slunce je sluneční kotouč téměř přesně zakryt Měsícem. (a) Určete poměr průměrů Slunce a Měsíce, víte-li, že Slunce je od Země asi 400krát vzdálenější než Měsíc. (b) V jakém poměru jsou jejich objemy? (c) Přidržujte před očima korunovou minci tak, aby právě zakryla měsíční kotouč, a změřte zorný úhel, pod kterým ji vidíte. Z výsledku měření a ze znalosti vzdálenosti Země–Měsíc ($3{,}8\cdot10^5$ km) odhadněte průměr Měsíce.

18Ú★. Standardní kilogram má tvar válce, jehož výška (39 mm) je rovna jeho průměru (obr. 1.6). Ukažte, že válec tohoto tvaru má při daném objemu nejmenší povrch. Tím lze omezit změnu hmotnosti tělesa při jeho otěru nebo znečištění povrchu.

ODST. 1.5 Čas

19C. Vyjádřete rychlost světla $3\cdot10^8\ m\cdot s^{-1}$ (a) ve stopách za nanosekundu, (b) v milimetrech za pikosekundu.

20C. Enrico Fermi kdysi poznamenal, že standardní doba vyučovací hodiny (45 min) je přibližně rovna jednomu mikrostoletí. Vyjádřete jedno mikrostoletí v minutách a vypočtěte procentní odchylku výsledku od Fermiho odhadu.

21C. Pro přibližné výpočty se často hodí odhad, že rok (365,25 dne) má asi $\pi\cdot10^7$ sekund. Jak je tento odhad přesný?

22C. Jisté kyvadlové hodiny (s dvanáctihodinovým ciferníkem) se zrychlují o 1 minutu za den. Nastavíme-li hodiny v určitém okamžiku správně, za jak dlouho ukážou správný čas znovu?

23C. Vyjádřete stáří vesmíru ve dnech (viz tab. 1.4).

24C. (a) Čeho je víc: sekund v týdnu nebo minut v roce? b) Člověk na Zemi existuje přibližně 10^6 let a stáří vesmíru je odhadováno na 10^{10} roků. Kolik „sekund“ by byla Země osídlena člověkem, kdybychom za stáří Vesmíru považovali jeden pomyslný „den“?

25C. Maximální rychlost, které jsou schopna dosáhnout různá zvířata, můžeme vyjádřit v mílích za hodinu takto: (a) hlemýžď: $3{,}0\cdot10^{-2}$; (b) pavouk: 1,2; (c) člověk: 23; (d) gepard: 70. Převeďte tyto hodnoty na metry za sekundu. (Pro všechny čtyři výpočty vystačíme s jediným převodním koeficientem. Je výhodné spočítat si jej předem a pro další výpočty uložit do paměti kalkulačky.)

26C. Vyjádřete rychlost světla ($3{,}0\cdot10^8\ m\cdot s^{-1}$) v astronomických jednotkách za minutu (viz cvič. 16).

27C. Až do roku 1883 se každé město ve Spojených státech řídilo svým vlastním časem. Cestujeme-li dnes, posouváme si hodinky jen tehdy, je-li časový posuv roven* celé hodině. Kolik stupňů zeměpisné délky a jakou vzdálenost na 45. rovnoběžce je třeba v průměru překonat, abychom museli posunout své hodinky právě o jednu hodinu?

28C. Délka pozemského dne se rovnoměrně zvyšuje o 0,001 s za každé století. O kolik sekund se prodloužil den za dvacet století uplynulých od začátku našeho letopočtu? (Zpomalování rotace Země bylo zjištěno sledováním zatmění Slunce během posledních dvou tisíciletí.)

29C. Na dvou *různých* stadionech byly pořádány závody v běhu na jednu míli. Vítězové dosáhli časů 3 min 58,05 s a 3 min 58,20 s. Délka běžecké trati však byla změřena jen s omezenou přesností. Jaký může být maximální rozdíl skutečných délek obou tratí, abychom mohli s jistotou tvrdit, že běžec, který dosáhl kratšího času, byl doopravdy rychlejší?

30C. V laboratoři byly testovány patery různé hodiny. V jednom týdnu byly každý den přesně v poledne zaznamenány údaje

* Časová pásma nejsou přesně určena zemskými poledníky, ale z praktických důvodů respektují státní útvary.

všech hodin do následující tabulky. Seřaďte hodiny podle přesnosti jejich chodu, od nejlepších po nejhorší.

HODINY	NE	PO	ÚT	ST	ČT	PÁ	SO
A	12:36:40	12:36:56	12:37:12	12:37:27	12:37:44	12:37:59	12:38:14
B	11:59:59	12:00:02	11:59:57	12:00:07	12:00:02	11:59:56	12:00:03
C	15:50:45	15:51:43	15:52:41	15:53:39	15:54:37	15:55:35	15:56:33
D	12:03:59	12:02:52	12:01:45	12:00:38	11:59:31	11:58:24	11:57:17
E	12:03:59	12:02:49	12:01:54	12:01:52	12:01:32	12:01:22	12:01:12

31C. **Siderický měsíc** je doba, za kterou Měsíc zaujme při pozorování ze Země tutéž polohu vzhledem k hvězdnému pozadí. **Lunární měsíc** je doba mezi stejnými měsíčními fázemi. Lunární měsíc je delší než siderický. Proč a o kolik?

ODST. 1.6 Hmotnost

32C. S použitím údajů uvedených v textu této kapitoly určete, kolik je atomů v jednom kilogramu vodíku. Hmotnost jednoho atomu vodíku je 1,0 u.

33C. Molekula vody H_2O je tvořena dvěma atomy vodíku a jedním atomem kyslíku. Hmotnost atomu vodíku je 1,0 u a hmotnost atomu kyslíku je přibližně 16 u. (a) Jaká je celková hmotnost molekuly vody? (b) Kolik molekul vody je ve všech světových oceánech, obsahují-li přibližně $1{,}4\cdot10^{21}$ kg vody?

34C. Země má hmotnost $5{,}98\cdot10^{24}$ kg. Průměrná hmotnost atomů, z nichž se skládá, je 40 u. Z kolika atomů je Země složena?

35C. Jaká je hmotnost vody, která napršší na město během silné bouře (viz cvič. 14)?

36C. Při redukční dietě můžeme ztratit za týden až 2,3 kg tělesné hmotnosti. Kolik miligramů v průměru ztrácíme každou sekundu?

37C. (a) Vyjádřete hustotu vody v $\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, víte-li, že je rovna $1{,}0\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. (b) Nádrž o objemu $5\,700\ \mathrm{m^3}$ se naplní za 10 h. Přítok vody je stálý. Jaký je hmotnostní průtok vody v přívodním potrubí (v kilogramech za sekundu)?

38C. Jemná křemenná zrnka písku (SiO_2) z kalifornských pláží mají přibližně tvar kuliček o poloměru 50 μm. Hustota křemene je $2\,600\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Kolik kg písku má stejný povrch jako krychle o hraně 1 m?

39C. Železo má hustotu $7{,}87\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. Hmotnost jednoho atomu železa je $9{,}27\cdot10^{-26}$ kg. (a) Jaký je objem jednoho atomu železa? (b) Jaká je vzdálenost mezi středy sousedních atomů za předpokladu, že atomy jsou krychlové a těsně uspořádané?

2
Přímočarý pohyb



V roce 1977 vytvořila Kitty O'Neilová rekord v závodech dragsterů. Dosáhla tehdy rychlosti 628,85 km/h za pouhých 3,72 s. Jiný rekord tohoto typu zaznamenal v roce 1958 Eli Beeding ml. při jízdě na saních s raketovým pohonem. Po klidovém startu dosáhly saně rychlosti 116 km/h za dobu 0,04 s, která představuje v pravém slova smyslu „okamžik". Je totiž kratší než mrknutí oka. Můžeme nějak porovnat tyto dva výkony, abychom měli představu, který z nich mohl přinést jezdci větší vzrušení nebo dokonce strach? Máme srovnávat dosaženou rychlost, dobu jízdy nebo nějakou jinou veličinu?

2.1 POHYB

Celý svět a všechno v něm se pohybuje. Dokonce i věci, které se zdají být v klidu, jako například silnice, se pohybují spolu s otáčením Země, jejím obíháním kolem Slunce, s pohybem Slunce kolem středu naší Galaxie i pohybem celé Galaxie vzhledem ke galaxiím ostatním. Část fyziky, která se zabývá popisem pohybu těles i tříděním a porovnáváním pohybů, se nazývá **kinematika**. Které charakteristiky pohybu vlastně máme měřit a jak je budeme srovnávat?

Než se pokusíme na tyto otázky odpovědět, všimněme si některých obecných vlastností pohybů. Naše úvahy budou prozatím omezeny třemi požadavky:

1. Pohyb se děje vůči Zemi (kterou pokládáme za nehybnou) výhradně po přímce. Ta může být svislá (pád kamene), vodorovná (jízda automobilu po dálnici), nebo libovolně skloněná. Vždy to ale musí být přímka. Takový pohyb nazýváme **přímočarý**. (Zatímco svět kolem nás je trojrozměrný, představuje pohyb po přímce pouze jednorozměrnou úlohu.)

2. Až do kap. 5 se nebudeme zabývat příčinami pohybu, pouze se budeme snažit pohyb *popsat*. Budeme zjišťovat, zda těleso zvyšuje či snižuje svou rychlost, zda se zcela zastavilo, nebo se začalo pohybovat opačným směrem. Půjde prostě o sledování změn pohybu v průběhu času.

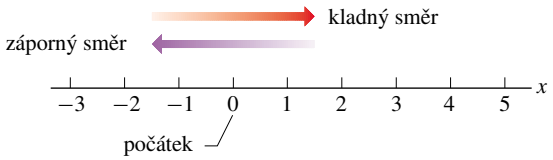
3. Pohybující se těleso nahradíme hmotným bodem. **Hmotný bod** je nejjednodušší myslitelný objekt, který zastupuje skutečné pohybující se těleso v případech, kdy pro popis jeho pohybu nejsou rozhodující jeho vlastní rozměry. Tento případ nastává zejména tehdy, pohybují-li se všechny části tělesa stejně rychle a ve stejném směru. Jako hmotný bod si můžeme představit i dítě, které sjíždí po přímé skluzavce na dětském hřišti. Představa hmotného bodu však již není vhodná pro otáčející se kolotoč, neboť jeho různé části se v daném okamžiku pohybují různě rychle a v různých směrech.

Hmotný bod je často užívaným a velmi funkčním fyzikálním modelem nejen při pouhém popisu pohybu těles, ale i v úvahách o příčinách jeho změn (kap. 5 a 6). Z tohoto obecnějšího pohledu nahrazuje hmotný bod skutečné těleso v případech, kdy je podstatná jeho celková hmotnost a nikoli jeho vlastní rozměry, tvar apod. Výstižnými výrazy zastupujícími pojem *hmotný bod* jsou **částice** nebo **bodový objekt**. Zadání příkladů a úloh v jednotlivých kapitolách jsou většinou formulována nikoli pro abstraktní hmotné body, částice, bodové objekty, ale pro konkrétní tělesa, s nimiž se setkáváme při fyzikálních experimentech i při každodenním dění (kostky, krabice, bedny, zvířata, lidé). V kapitolách 1 až 8, v nichž se jedná výhradně o posuvné pohyby těles, je všechna považujeme za hmotné body. S vědomím, že jsme právě přistoupili na tuto dohodu, se nebudeme úzkostlivě držet terminologické přesnosti a budeme používat jak názvy konkrétních objektů, tak termíny těleso či objekt.

2.2 POLOHA A POSUNUTÍ

Polohu objektu určujeme vždy vzhledem k nějakému vztažnému bodu, nejčastěji **počátku** souřadnicové osy (například osa x na obr. 2.1). Za **kladný směr** osy považujeme směr rostoucí souřadnice. Na obr. 2.1 je kladný směr orientován vpravo. Opačný směr nazýváme **záporný**.

Má-li například hmotný bod souřadnici $x = 5\,\text{m}$, znamená to, že je ve vzdálenosti 5 m od počátku, měřené v kladném směru. Pokud by měl souřadnici $x = -5\,\text{m}$, byl by od počátku stejně daleko, ale na opačné straně. Souřadnice $-5\,\text{m}$ je menší než souřadnice $-1\,\text{m}$ a ta je menší než souřadnice $+5\,\text{m}$.



Obr. 2.1 Polohu bodu na ose zadáváme ve vyznačených délkových jednotkách. Stupnici lze libovolně rozšířit v obou směrech.

Změnu polohy objektu z bodu o souřadnici x_1 do bodu o souřadnici x_2 nazýváme posunutím a značíme Δx. Platí

$$\Delta x = x_2 - x_1. \qquad (2.1)$$

(Podobně jako v př. 1.3 z kap. 1 označujeme symbolem Δ změnu veličiny, definovanou jako rozdíl její koncové a počáteční hodnoty.) Dosadíme-li za x_1 a x_2 konkrétní čísla, pak posunutí v kladném směru (na obr. 2.1 doprava) bude vždy kladné a posunutí v opačném směru (na obr. 2.1 doleva) vždy záporné. Přemístí-li se částice třeba z polohy $x_1 = 5\,\text{m}$ do polohy $x_2 = 12\,\text{m}$, je $\Delta x = (12\,\text{m}) - (5\,\text{m}) = (+7\,\text{m})$. Kladná hodnota posunutí nám říká, že se těleso pohnulo v kladném směru. Vrátí-li se těleso zpět do polohy $x = 5\,\text{m}$, bude celkové posunutí nulové. Při výpočtu posunutí není důležité, kolik metrů těleso skutečně urazilo. Podstatná je pouze výchozí a koncová poloha.

Není-li v dané úloze důležité znaménko (tj. směr) posunutí, hovoříme o **velikosti** posunutí $|\Delta x|$. Ta je vždy nezáporná (tj. kladná anebo nula).

Posunutí je příkladem **vektorové veličiny**, i když zatím jen jednorozměrné. Jako každý vektor je charakterizováno jak velikostí, tak směrem. Vektorům je věnována celá kap. 3. V tuto chvíli postačí, uvědomíme-li si, že posunutí

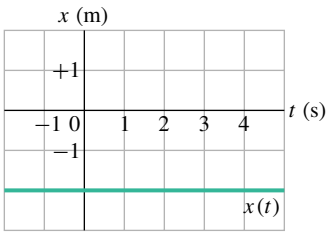
po přímce má dvě charakteristiky: (1) velikost, tj. vzdálenost mezi počátečním a koncovým bodem (například počet metrů) a (2) směr určený souřadnicovou osou orientovaný od počáteční ke koncové poloze a vyjádřený znaménkem plus či minus.

Následuje první z kontrol, jichž v této knize najdete celou řadu. Každá obsahuje jednu nebo více otázek, vyžadujících jednoduchou úvahu či výpočet (často jen „z hlavy“). Můžete si pomocí nich jednoduše ověřit, zda jste probranou látku pochopili. Správné odpovědi jsou uvedeny na konci knihy.

KONTROLA 1: Tři různá posunutí jsou dána následujícími počátečními a koncovými polohami na ose x. (a) -3 m, $+5$ m; (b) -3 m, -7 m; (c) 7 m, -3 m. Která z nich jsou záporná?

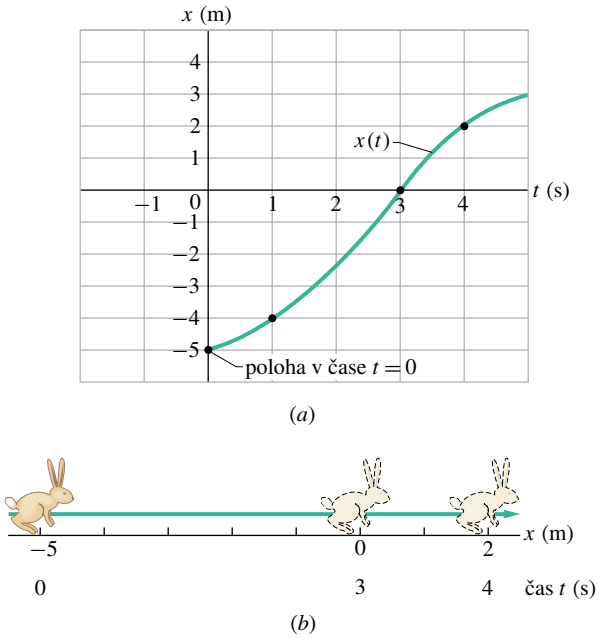
2.3 PRŮMĚRNÁ RYCHLOST

Přehlednou informaci o poloze tělesa získáme, zakreslíme-li do grafu závislost jeho polohy $x(t)$ na čase t. Zvláště jednoduchým příkladem je graf na obr. 2.2, představující závislost $x(t)$ pro králíka,* který sedí v poloze $x = -2$ m. Mnohem zajímavější situaci znázorňuje graf na obr. 2.3a. V tomto případě se totiž králík pohyboval. Poprvé jsme si jej všimli v poloze $x = -5$ m v čase $t = 0$. Pohyboval se směrem k počátku soustavy souřadnic $x = 0$, kterým proběhl v okamžiku $t = 3$ s a pokračoval v běhu v kladném směru osy x.



Obr. 2.2 Graf časové závislosti $x(t)$ polohy králíka sedícího v bodě o souřadnici $x = -2$ m. Jeho poloha se s časem nemění.

* Králíka považujeme za hmotný bod.



Obr. 2.3 (a) Graf časové závislosti polohy $x(t)$ běžícího králíka. (b) Obrázek skutečné dráhy králíka. Na stupnici pod osou x je vždy uveden okamžik, kdy králík dorazil do vyznačené polohy x.

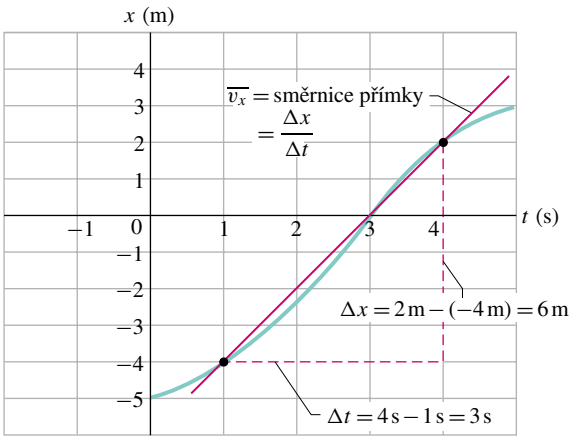
Na obr. 2.3b je zakreslen přímočarý pohyb králíka, jak bychom ho mohli vidět ve skutečnosti. Graf na obr. 2.3a je samozřejmě abstraktní: nic takového nemůžeme přímo pozorovat. Obsahuje však bohatší informaci o pohybu králíka. Umožňuje například zjistit, jak rychle se pohyboval. Ve skutečnosti je s otázkou „jak rychle“ spojeno několik různých fyzikálních veličin. Jednou z nich je tzv. **průměrná** neboli **střední rychlost** $\overline{v_x}$, kterou definujeme jako podíl posunutí Δx v určitém časovém intervalu Δt a délky tohoto intervalu:

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \qquad (2.2)$$

Označujeme* ji $\overline{v_x}$. V grafu $x(t)$ je průměrná rychlost $\overline{v_x}$ dána směrnicí přímky, která spojuje dva vybrané body křivky: polohu x_1 v čase t_1 (v grafu bod $[t_1, x_1]$) a polohu x_2 v čase t_2 (bod $[t_2, x_2]$). Podobně jako posunutí má i průměrná rychlost velikost i směr. (Je tedy dalším příkladem vektorové veličiny.) Je-li hodnota $\overline{v_x}$ kladná, pak křivka zleva doprava stoupá (funkce $x(t)$ je rostoucí). Je-li záporná, pak křivka zleva doprava klesá (funkce $x(t)$ je klesající). Průměrná rychlost $\overline{v_x}$ má vždy stejné znaménko jako posunutí, neboť hodnota Δt ve vztahu (2.2) je vždy kladná.

* Pruh nad *libovolnou* veličinou bude všude v této knize znamenat její střední hodnotu.

Obr. 2.4 dává návod, jak určit průměrnou rychlost $\overline{v_x}$ běžícího králíka z obr. 2.3 v časovém intervalu od $t = 1\,\mathrm{s}$ do $t = 4\,\mathrm{s}$. Její hodnotu $\overline{v_x} = 6\,\mathrm{m}/3\,\mathrm{s} = +2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ jsme vypočetli jako směrnici spojnice dvou bodů na křivce grafu: první odpovídá začátku a druhý konci časového intervalu, během kterého jsme králíka sledovali.*



Obr. 2.4 Výpočet průměrné rychlosti v časovém intervalu od $t = 1\,\mathrm{s}$ do $t = 4\,\mathrm{s}$. Průměrná rychlost je určena jako směrnice přímky spojující dva body grafu, které odpovídají počátečnímu a koncovému okamžiku daného intervalu.

PŘÍKLAD 2.1

Nákladní dodávka jede po přímé silnici stálou rychlostí 86 km/h. Po ujetí 10,4 km náhle dojde palivo. Řidič pokračuje pěšky v původním směru. Po 27 minutách (0,450 h) dojde k čerpací stanici, vzdálené od odstavené dodávky 2,4 km. Jaká je průměrná rychlost řidiče od chvíle, kdy vyjel s dodávkou z výchozího místa, až do okamžiku příchodu k čerpací stanici? Řešte výpočtem i graficky.

ŘEŠENÍ: Pro výpočet průměrné rychlosti $\overline{v_x}$ musíme znát celkové posunutí Δx a dobu Δt. Je výhodné položit počátek souřadnicové osy x do místa, odkud automobil vyrazil (tedy $x_1 = 0$) a orientovat osu tak, aby směr jízdy byl kladný.

Poloha čerpací stanice na takto zvolené ose je $x_2 = 10{,}4\,\mathrm{km} + 2{,}4\,\mathrm{km} = +12{,}8\,\mathrm{km}$, a tedy $\Delta x = x_2 - x_1 = +12{,}8\,\mathrm{km}$. Dobu jízdy $\Delta t'$ určíme z rovnice (2.2), po jejíž úpravě a dosazení dostaneme:

$$\Delta t' = \frac{\Delta x'}{\overline{v_{x'}}} = \frac{(10{,}4\,\mathrm{km})}{(86\,\mathrm{km/h})} = 0{,}121\,\mathrm{h},$$

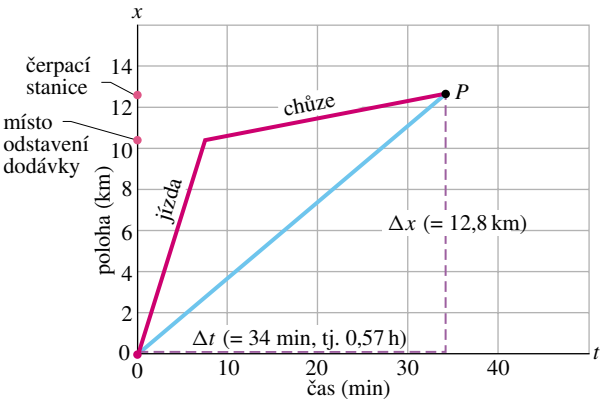
tj. asi 7,3 min. Jako $\Delta x' = 10{,}4\,\mathrm{km}$ jsme označili vzdálenost, kterou dodávka ujela do okamžiku, kdy došlo palivo. Celková doba cesty řidiče (jízda i chůze) je tedy

$$\Delta t = 0{,}121\,\mathrm{h} + 0{,}450\,\mathrm{h} = 0{,}571\,\mathrm{h}.$$

Nakonec dosadíme za Δx a Δt do rovnice (2.2):

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(12{,}8\,\mathrm{km})}{(0{,}571\,\mathrm{h})} = \\ = 22{,}4\,\mathrm{km/h} \doteq 22\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Průměrnou rychlost $\overline{v_x}$ zjistíme ještě graficky. Nejprve narýsujeme graf funkce $x(t)$ (obr. 2.5). Výchozí bod grafu splývá s počátkem a koncový bod je označen písmenem P. Průměrná rychlost je směrnicí přímky spojující tyto dva body. Z délek přerušovaných čar je zřejmé, že směrnice má hodnotu $\overline{v_x} = 12{,}8\,\mathrm{km}/0{,}57\,\mathrm{h} = +22\,\mathrm{km/h}$.



Obr. 2.5 Příklad 2.1. Přímkové úseky s označením „jízda“ a „chůze“ představují grafické znázornění časové závislosti polohy řidiče dodávky během jízdy, resp. během chůze k čerpací stanici. Směrnice přímky spojující počátek soustavy souřadnic s bodem P určuje jeho průměrnou rychlost.

PŘÍKLAD 2.2

Předpokládejme, že návrat k dodávce trvá řidiči 35 min. Musí totiž nést nádobu s palivem, a proto jde pomaleji. Jaká je průměrná rychlost řidiče na celé trati od okamžiku výjezdu z výchozího místa až po návrat od čerpací stanice?

ŘEŠENÍ: Stejně jako v předchozím případě musíme určit celkové posunutí Δx a vydělit je celkovou dobou Δt. Řidičova cesta nyní končí návratem k automobilu. Její počáteční bod má opět souřadnici $x_1 = 0$, koncový bod je dán polohou odstaveného automobilu $x_2 = 10{,}4\,\mathrm{km}$. Dostáváme

* V geometrii je směrnice přímky definována jako tangenta úhlu, který tato přímka svírá s nějakou vztažnou přímkou. Představuje-li však přímka například graf závislosti $x(t)$ polohy tělesa x na čase t, rozumíme směrnicí podíl přírůstku souřadnice Δx a odpovídajícího přírůstku času Δt, včetně uvážení příslušných jednotek. Je-li poloha měřena v metrech a čas v sekundách, vyjde směrnice v jednotkách $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Tangentě úhlu α mezi přímkou grafu a časovou osou (která v tomto případě hraje roli vztažné přímky) bude rovna tehdy, zvolíme-li na osách t a x stejně dlouhé jednotky. Pokud by jedna sekunda na časové ose byla reprezentována třeba úsečkou o délce 1 cm, museli bychom na ose poloh zvolit jako 1 m rovněž úsečku o délce 1 cm.

$\Delta x = 10{,}4\,\text{km} - 0 = 10{,}4\,\text{km}$. Celková doba jízdy a chůze k čerpací stanici a zpět je

$$\Delta t = \frac{(10{,}4\,\text{km})}{(86\,\text{km/h})} + (27\,\text{min}) + (35\,\text{min}) = \\ = 0{,}121\,\text{h} + 0{,}450\,\text{h} + 0{,}583\,\text{h} = 1{,}15\,\text{h}.$$

Je tedy

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(10{,}4\,\text{km})}{(1{,}15\,\text{h})} = \\ = 9{,}04\,\text{km/h} \doteq 9{,}0\,\text{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Průměrná rychlost je v tomto případě menší než v příkladu 2.1. Je to pochopitelné, celkové posunutí je totiž menší a celková doba delší.

KONTROLA 2: Po doplnění paliva se dodávka vrací zpět do bodu x_1 rychlostí 80 km/h. Jaká je průměrná rychlost na celé cestě?

Jinou představu o tom, „jak rychle“ se hmotný bod pohybuje, lze získat pomocí tzv. **průměrné velikosti rychlosti** $\overline{v}$. Zatímco pro výpočet průměrné rychlosti $\overline{v_x}$, která je vektorovou veličinou, je rozhodující vektor posunutí Δx, je průměrná velikost rychlosti veličinou skalární a je určena celkovou dráhou, kterou hmotný bod urazí nezávisle na směru pohybu.* Je tedy

$$\overline{v} = \frac{\text{celková dráha}}{\text{celková doba pohybu}}. \qquad (2.3)$$

Průměrná velikost rychlosti $\overline{v}$ neobsahuje, na rozdíl od průměrné rychlosti $\overline{v_x}$, informaci o směru pohybu. Je vždy nezáporná. V některých případech může být $\overline{v} = |\overline{v_x}|$, obecně to však neplatí. Výsledek následujícího příkladu to jasně dokumentuje.

PŘÍKLAD 2.3

Určete průměrnou velikost rychlosti pohybu v příkladu 2.2.

ŘEŠENÍ: Od počátku jízdy až po návrat zpět k vozu od čerpací stanice urazil řidič celkovou vzdálenost

$$10{,}4\,\text{km} + 2{,}4\,\text{km} + 2{,}4\,\text{km} = 15{,}2\,\text{km}$$

za dobu 1,15 h. Průměrná velikost jeho rychlosti má tedy hodnotu

$$\overline{v} = \frac{(15{,}2\,\text{km})}{(1{,}15\,\text{h})} = 13{,}2\,\text{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.1: *Rozumíme dobře zadanému problému?*

Společným problémem všech, kteří se teprve začínají zabývat řešením fyzikálních úloh, je správně pochopit zadání. Zda jsme zadání skutečně pochopili, si nejlépe ověříme tak, že se je pokusíme vyložit někomu jinému. Vyzkoušejte si to.

Když čteme zadání, zapíšeme si hodnoty známých veličin i s jednotkami a označíme je obvyklými symboly. Rozmyslíme si, kterou veličinu máme spočítat a rovněž ji označíme obvyklým symbolem. V příkladech 2.1 a 2.2 je neznámou veličinou průměrná rychlost, kterou značíme $\overline{v_x}$. Pokusíme se najít fyzikální vztahy mezi neznámou veličinou a veličinami zadanými. V příkladech 2.1 a 2.2 je to definice průměrné rychlosti, zapsaná vztahem (2.2).

Bod 2.2: *Používáme správně jednotky?*

Věnujme vždy pozornost tomu, abychom do vzorců dosadili všechny veličiny v odpovídajících jednotkách. V příkladech 2.1 a 2.2 je přirozené počítat vzdálenost v kilometrech, čas v hodinách a rychlost v kilometrech za hodinu. Někdy musíme před dosazením jednotky převést.

Bod 2.3: *Je získaný výsledek rozumný?*

Nad výsledkem se nakonec zamyslete a zvažujme, dává-li smysl. Není získaná hodnota příliš velká nebo naopak příliš malá? Má správné znaménko a jednotky? Správná odpověď v př. 2.1 je 22 km/h. Kdyby nám vyšlo třeba 0,000 22 km/h, −22 km/h, 22 km/s nebo 22 000 km/h, měli bychom hned poznat, že jsme ve výpočtu udělali chybu.

Bod 2.4: *Umíme dobře číst z grafů?*

Měli bychom být schopni dobře rozumět takovým grafům, jaké jsou například na obr. 2.2, 2.3a, 2.4 a 2.5. U všech vynášíme na vodorovnou osu čas (jeho hodnoty rostou směrem vpravo). Na svislé ose je poloha hmotného bodu x vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Poloha x roste směrem vzhůru.

Pozorně si všímejme jednotek, v nichž jsou veličiny na osách vyjádřeny (sekundy či minuty, metry nebo kilometry), nezapomínejme na znaménka proměnných.

2.4 OKAMŽITÁ RYCHLOST

Poznali jsme již dvě různé veličiny, které popisují, jak rychle se určité těleso nebo částice pohybuje: průměrnou rychlost $\overline{v_x}$ a průměrnou velikost rychlosti $\overline{v}$. Obě určíme z měření prováděných v časovém intervalu Δt. Otázkou

* Je třeba rozlišovat *velikost vektoru průměrné rychlosti* $|\overline{v_x}|$ a *průměrnou velikost rychlosti* $\overline{v}$. První veličinu určíme prostě jako velikost vektoru definovaného vztahem (2.2) (viz také kap. 3), druhá je výsledkem středování velikosti rychlosti nezávisle na jejím směru, například z údaje rychloměru automobilu.

„jak rychle?“ však máme obvykle na mysli rychlost částice v daném okamžiku. Je popsána veličinou v_x, zvanou **okamžitá rychlost**, nebo jednoduše rychlost.

Okamžitou rychlost získáme z průměrné rychlosti tak, že budeme časový interval (neboli dobu) Δt, měřený od okamžiku t, zmenšovat bez omezení k nule. S poklesem hodnoty Δt se průměrná rychlost měřená v intervalu od t do $t + \Delta t$ blíží jisté limitní hodnotě, která pak definuje rychlost v okamžiku t:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.4)$$

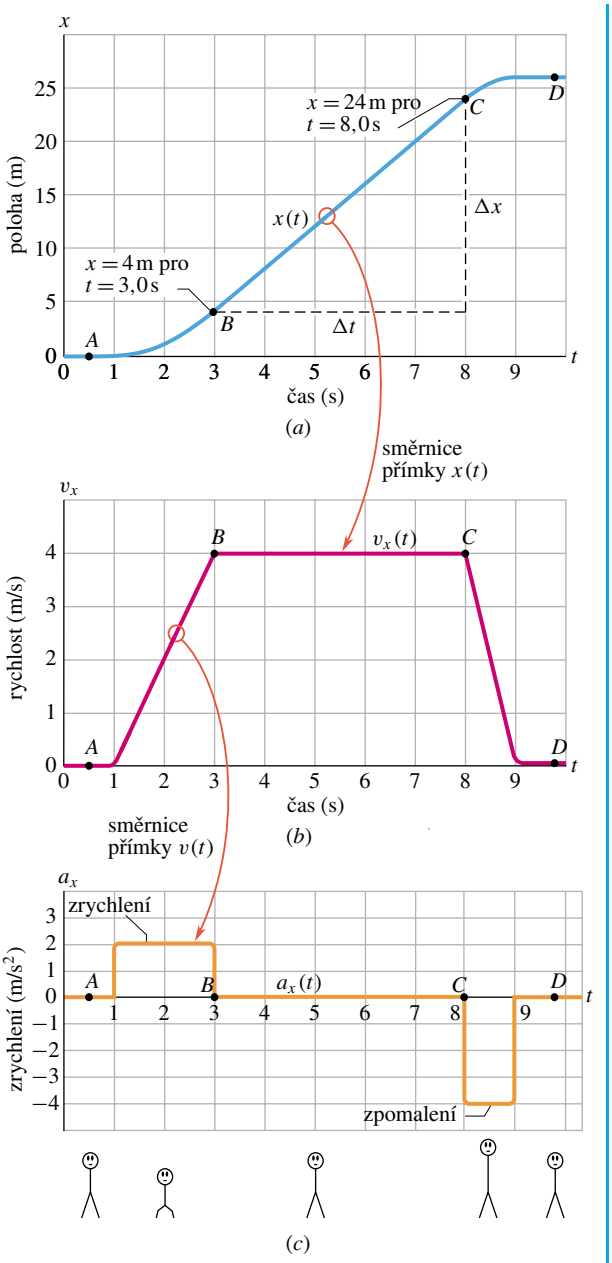
Okamžitá rychlost je další vektorovou veličinou, se kterou se setkáváme. Obsahuje totiž informaci i o směru pohybu částice. Určuje, jak rychle se v daném okamžiku mění poloha částice s časem. Názornou geometrickou představu o limitním přechodu od průměrné k okamžité rychlosti můžeme získat z obr. 2.4. Budeme-li bez omezení přibližovat bod určený koncovým okamžikem uvažovaného časového intervalu Δt k bodu počátečnímu, přejde červená přímka v tečnu ke křivce grafu, vedenou počátečním bodem. Matematicky je okamžitá rychlost rovna směrnici tečny ke grafu funkce $x(t)$.

Velikost okamžité rychlosti neboli **velikost rychlosti** již postrádá informaci o směru pohybu a má vždy nezápornou hodnotu. Rychlosti $+5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $-5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ mají stejnou velikost $5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Rychloměr v automobilu měří jen velikost rychlosti, protože není schopen určit směr pohybu.

Angličtí studenti jsou na tom lépe. Obecná čeština užívá slova *rychlost* ve třech různých smyslech, pro které má angličtina tři různá slova, totiž *velocity* (vektor rychlosti), *speed* (velikost vektoru rychlosti) a *rate* (obecná změna v čase, např. rychlost hoření). Všechna tato slova jsou v angličtině zcela běžná. Ve fyzice užíváme slova *rychlost* pro *vektorovou veličinu*. Tam, kde by mohlo dojít k nedorozumění, raději užijeme sousloví, jako je „rychlost o velikosti… “. Slova „rychlost“ namísto „velikost rychlosti“ lze užít pouze tam, kde je *opravdu* zaručeno, že na směru nezáleží (výroky typu „Rychlost světla ve vzduchu je větší než ve vodě.“) anebo kde je směr jasně dán a nemůže se měnit (rychlost vlaku).

PŘÍKLAD 2.4

Na obr. 2.6a je zakreslena časová závislost $x(t)$ polohy kabiny výtahu. Kabina nejprve stojí v dolním patře, pak se začíná pohybovat vzhůru (kladný směr souřadnicové osy) a opět se zastaví. Nakreslete závislost rychlosti kabiny na čase.



Obr. 2.6 Příklad 2.4. (a) Časová závislost $x(t)$ polohy kabiny výtahu pohybující se svisle vzhůru po ose x. (b) Časová závislost její rychlosti $v_x(t)$. Všimněte si, že $v_x(t)$ je derivací funkce $x(t)$, tj. $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. (c) Časová závislost zrychlení kabiny $a_x(t)$ je derivací funkce $v_x(t)$, tj. $a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$. Schematické nákresy postaviček v dolní části obrázku naznačují pocity pasažéra při urychlování kabiny.

ŘEŠENÍ: Úseky grafu obsahující body A a D odpovídají situaci, kdy je kabina v klidu. Grafem funkce $x(t)$ v těchto úsecích jsou přímky rovnoběžné s časovou osou. Směrnice tečen, a tedy i rychlost kabiny, je nulová. V úseku mezi body B a C se sklon křivky nemění a souřadnice kabiny stále roste. Kabina se pohybuje konstantní rychlostí. Směrnici tečny

(tedy rychlost) určíme jako podíl

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x = \frac{(24\,\mathrm{m} - 4{,}0\,\mathrm{m})}{(8{,}0\,\mathrm{s} - 3{,}0\,\mathrm{s})} = +4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Kladné znaménko ukazuje, že se výtah pohybuje v kladném směru. Hodnoty rychlosti $v_x = 0$ a $v_x = 4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ jsou pro příslušné časové intervaly vyznačeny v grafu na obr. 2.6b. Při rozjezdu a opětovném zastavení, tj. v časových intervalech od 1 s do 3 s a od 8 s do 9 s se rychlost kabiny mění, například podle obr. 2.6b. (K diskusi o obr. 2.6c přistoupíme až v čl. 2.5.)

Můžeme řešit i „obrácenou úlohu“, kdy potřebujeme ze znalosti funkce $v_x(t)$ (graf na obr. 2.6b) určit $x(t)$ (obr. 2.6a). Její řešení však není jednoznačné. Graf funkce $v_x(t)$ dává totiž informaci pouze o *změnách* polohy, nikoli o poloze samotné. Abychom určili změnu polohy v libovolném časovém intervalu, vypočteme „obsah plochy pod křivkou“ grafu $v_x(t)$ omezenou počátečním a koncovým bodem časového intervalu.* Mezi třetí a osmou sekundou se kabina pohybuje dejme tomu konstantní rychlostí $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Změnu její polohy určíme jako „obsah plochy pod křivkou $v_x(t)$“ odpovídající tomuto časovému intervalu:

$$\text{„Obsah plochy pod křivkou“} = (4{,}0)(8{,}0 - 3{,}0) = +20.$$

(Tato hodnota je kladná, protože příslušná část křivky $v_x(t)$ leží nad časovou osou.) Získaný *číselný údaj* opatříme správnou jednotkou**, v tomto případě $(\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \cdot \mathrm{s} = \mathrm{m}$. Obr. 2.6a potvrzuje, že hodnota souřadnice určující polohu kabiny se v uvažovaném časovém intervalu skutečně zvětšila o 20 m. Z obr. 2.6b však nemůžeme poznat, jaká byla její poloha na začátku a konci tohoto intervalu. K tomu bychom potřebovali další údaj.

PŘÍKLAD 2.5

Hmotný bod se pohybuje po ose x a jeho poloha je v závislosti na čase určena vztahem

$$x = 7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3. \qquad (2.5)$$

Jaká je jeho rychlost v okamžiku $t = 3{,}5\,\mathrm{s}$? Je jeho rychlost stálá, nebo se spojitě mění?

ŘEŠENÍ: Zadání pro jednoduchost neobsahuje jednotky. Můžeme si je však k číselným koeficientům doplnit takto: 7,8 m, 9,2 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $-2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-3}}$. Rychlost určíme pomocí rovnice (2.4), kde za x na pravé straně dosadíme závislost (2.5):

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3).$$

Dostaneme tak

$$v_x = 0 + 9{,}2 - (3)(2{,}1)t^2 = 9{,}2 - 6{,}3t^2. \qquad (2.6)$$

Pro $t = 3{,}5$ je

$$v_x = 9{,}2 - (6{,}3)(3{,}5)^2 = -68,$$
$$v_x = -68\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V okamžiku $t = 3{,}5\,\mathrm{s}$ se hmotný bod pohybuje v záporném směru osy x a má tedy rychlost $-68\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (o směru pohybu vypovídá záporné znaménko). Na pravé straně vztahu (2.6) vystupuje čas a rychlost v_x se tedy s časem mění.

KONTROLA 3: Následující čtyři vztahy představují možné případy závislosti polohy částice na čase. V každém z nich je poloha x zadávána v metrech, čas t v sekundách a vždy platí $t > 0$. (1) $x = 3t - 2$, (2) $x = -4t^2 - 2$, (3) $x = 2/t^2$, (4) $x = -2$. (a) Ve kterých z uvedených případů je rychlost v_x částice konstantní? (b) Kdy je záporná? (c) Kdy se pohyb částice zpomaluje?

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.5: *Derivace a sklon křivky*

Derivace funkce je určena sklonem křivky (grafu funkce) v daném bodě. Přesněji vyjádřeno je derivace rovna směrnici tečny ke křivce v tomto bodě. Ukázkou může být příklad 2.4: Okamžitá rychlost výtahu v libovolném okamžiku (vypočtená jako derivace funkce $x(t)$ podle (2.4)) je rovna směrnici tečny ke křivce na obr. 2.6a sestrojené v odpovídajícím bodě. Ukážeme si, jak je možné určit derivaci funkce graficky.

Na obr. 2.7 je graf funkce $x(t)$ pro pohybující se hmotný bod. Při grafickém určení jeho rychlosti v okamžiku $t = 1\,\mathrm{s}$ budeme postupovat takto: Nejprve na křivce označíme bod, který tomuto času odpovídá. V tomto bodě narýsujeme tečnu ke křivce grafu. Pracujeme co nejpečlivěji. Dále sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Jeho konkrétní volba je libovolná, neboť přepony všech takových trojúhelníků mají stejný sklon. Zvolíme tedy trojúhelník co největší, abychom směrnici změřili co nejpřesněji. Pomocí měřítek na souřadnicových osách určíme Δx a Δt. Směrnice tečny ke křivce je dána podílem $\Delta x/\Delta t$. Z obr. 2.7 dostaneme

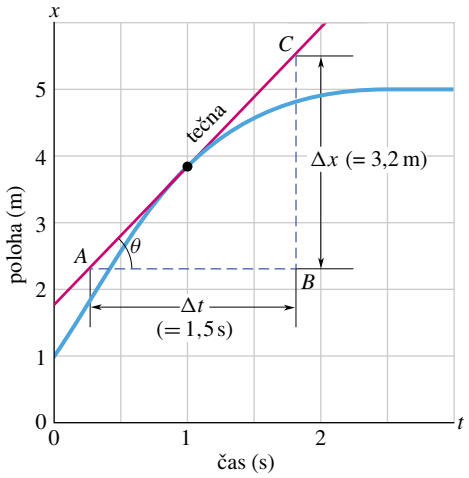
$$\text{směrnice tečny} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(5{,}5\,\mathrm{m} - 2{,}3\,\mathrm{m})}{(1{,}8\,\mathrm{s} - 0{,}3\,\mathrm{s})} =$$
$$= \frac{3{,}2\,\mathrm{m}}{1{,}5\,\mathrm{s}} = +2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Podle rovnice (2.4) je tato směrnice rovna rychlosti částice v okamžiku $t = 1\,\mathrm{s}$. Kdybychom změnili měřítko na některé souřadnicové ose, změnil by se sice jak tvar křivky, tak velikost úhlu θ, ale rychlost určená popsaným způsobem

* Tento postup zdůvodníme v článku 2.7.

** Její rozměr je určen součinem veličin na osách grafu.

by byla stejná. Známe-li matematické vyjádření funkce $x(t)$ (příklad 2.5), je vhodnější stanovit rychlost částice přímo, výpočtem její derivace. Grafická metoda je pouze přibližná.



Obr. 2.7 Derivace křivky v libovolném bodě je směrnicí tečny v tomto bodě. Směrnice tečny (a tedy i okamžitá rychlost $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$) v čase $t = 1{,}0\,\mathrm{s}$ je $\Delta x/\Delta t = +2{,}1\,\mathrm{m/s}$.

2.5 ZRYCHLENÍ

Jestliže se vektor rychlosti částice mění, říkáme, že se částice pohybuje se zrychlením. **Průměrné zrychlení** $\overline{a_x}$ v časovém intervalu Δt je definováno podílem

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}. \qquad (2.7)$$

Okamžité zrychlení (nebo prostě jen **zrychlení**) je určeno derivací rychlosti:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.8)$$

Podle vztahu (2.8) je zrychlení v daném okamžiku rovno směrnici tečny ke křivce $v_x(t)$ v bodě určeném tímto okamžikem. Spojením rovnic (2.8) a (2.4) dostaneme

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}. \qquad (2.9)$$

Zrychlení hmotného bodu je tedy v každém okamžiku dáno druhou derivací polohy $x(t)$ podle času. Nejužívanější jednotkou zrychlení je $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. V příkladech a cvičeních se můžeme setkat i s jinými jednotkami, všechny však budou mít tvar délka·čas^{-2}. Zrychlení má velikost i směr, je tedy další vektorovou veličinou. Při pohybu podél osy x stačí k určení směru zrychlení zadat pouze příslušné znaménko, podobně jako u posunutí a rychlosti.

Na obr. 2.6c je graf časové závislosti zrychlení výtahové kabiny z příkladu 2.4. Porovnejme grafy $a_x(t)$ a $v_x(t)$: každý bod grafu $a_x(t)$ je určen derivací (tj. směrnicí tečny) grafu $v_x(t)$ v odpovídajícím bodě. Je-li rychlost v_x konstantní (buď $0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ nebo $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$), je její derivace nulová. Zrychlení kabiny je rovněž nulové. Při rozjezdu kabiny je derivace rychlosti kladná, kladné je tedy i zrychlení $a_x(t)$. Při zpomalování má rychlost zápornou derivaci a zrychlení je záporné. Porovnejme nyní sklon dvou přímých úseků grafu $v_x(t)$, které odpovídají rozjezdu a brzdění výtahu. Sklon křivky odpovídající brzdění je strmější než sklon při rozjezdu. Brzdění totiž trvalo jen polovinu doby potřebné k rozjezdu. Velikost zrychlení výtahu při brzdění byla větší než při rozjezdu, což je zřejmé i z obr. 2.6c.

Jízda výtahem je doprovázena nepříjemnými pocity, jak výmluvně napovídají schematické kresby postaviček v dolní části obr. 2.6. Při rozjezdu kabiny jsme jakoby tlačeni směrem dolů, při zastavování naopak nadlehčováni. V mezidobí nic zvláštního nepociťujeme. Svými smysly můžeme vnímat zrychlení, nikoli rychlost. Jedeme-li autem rychlostí 90 km/h nebo letíme letadlem rychlostí 900 km/h, naše tělo si pohyb vůbec neuvědomuje. Pokud by však náhle auto či letadlo začalo měnit svou rychlost, pociťujeme tuto změnu velmi intenzivně až nepříjemně. Silné vzrušení, které zažíváme při jízdě na horské dráze v lunaparku, je částečně způsobeno právě prudkými změnami rychlosti pohybu našeho těla. Ukázka reakce lidského těla na velké zrychlení je na fotografiích obr. 2.8, které byly pořízeny při prudkém urychlení a následném brzdění raketových saní.

Velká zrychlení někdy vyjadřujeme v tzv. jednotkách „g“, kde

$$1g = 9{,}806\,65\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq \\ \doteq 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\ (\text{jednotka } g). \qquad (2.10)$$

Tato hodnota byla přijata jako **normální tíhové zrychlení** na 2. generální konferenci pro váhy a míry v r. 1901. Odpovídá severní zeměpisné šířce 45° na úrovni mořské hladiny. (V čl. 2.8 se dovíme, že g je velikost zrychlení tělesa volně padajícího v blízkosti zemského povrchu.) Při jízdě na horské dráze dosahuje velikost zrychlení krátkodobě hodnoty až $3g$, tj. $3 \cdot 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq 30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



Obr. 2.8 Plukovník J. P. Stapp v raketových saních při urychlování na vysokou rychlost (zrychlení směřuje ke čtenáři) a při brzdění (zrychlení směřuje od čtenáře).

PŘÍKLAD 2.6

(a) Kitty O'Neilová vytvořila rekord v závodech dragsterů, když dosáhla největší rychlosti 628,85 km/h v nejkratším čase 3,72 s. Jaké bylo průměrné zrychlení jejího automobilu?

ŘEŠENÍ: Průměrné zrychlení je dáno vztahem (2.7):

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{(628{,}85\,\mathrm{km/h} - 0)}{(3{,}72\,\mathrm{s} - 0)} = \\ = \frac{174{,}68\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{3{,}72\,\mathrm{s}} = 47\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq \\ \doteq 4{,}8g. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Předpokládali jsme, že zrychlení má směr kladné osy x.)

(b) Jaké bylo průměrné zrychlení saní při jízdě Eliho Beedinga ml., který dosáhl rychlosti 116 km/h za 0,04 s?

ŘEŠENÍ: Opět použijeme vztahu (2.7):

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{(116\,\mathrm{km/h} - 0)}{(0{,}04\,\mathrm{s} - 0)} = \\ = \frac{32{,}22\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{0{,}04\,\mathrm{s}} = 806\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq 80g. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Nyní se můžeme vrátit k otázce, kterou jsme si položili v úvodu kapitoly, kde jsme se o obou rekordních výkonech poprvé zmínili: „Jak rozhodneme, která jízda mohla přinést jezdci větší vzrušení? Máme porovnávat výslednou rychlost, dobu jízdy nebo nějakou jinou veličinu?" Odpověď již známe: protože lidské tělo vnímá zrychlení a ne rychlost, měli bychom porovnávat právě zrychlení. V tomto srovnání „vítězí" sáňkař Beeding, i když jeho výsledná rychlost byla mnohem menší než rychlost automobilistky O'Neilové. Zrychlení, kterému byl Beeding vystaven, by bylo smrtelné, kdyby trvalo delší dobu.

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.6: *Znaménko zrychlení*

Vraťme se k příkladu 2.6 a všimněme si znaménka vypočteného zrychlení. Ve většině běžných situací mívá znaménko zrychlení následující význam: těleso má kladné zrychlení, jestliže se jeho rychlost zvyšuje, záporné zrychlení odpovídá klesající rychlosti (těleso brzdí). Tento výklad však nemůžeme přijmout bezmyšlenkovitě v každé situaci. Má-li například automobil rychlost $v_x = -27\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ ($= -97\,\mathrm{km/h}$) a zcela zastaví za 5 s, je jeho průměrné zrychlení při brzdění $\overline{a_x} = +5{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Toto zrychlení je kladné, i když se pohyb vozu zpomaloval. Rozhodující je, že zrychlení má opačné znaménko než počáteční rychlost.

Správná interpretace znaménka zrychlení je následující:

> Má-li zrychlení částice stejné znaménko jako okamžitá rychlost, roste velikost její rychlosti a její pohyb se zrychluje. Má-li zrychlení opačné znaménko než okamžitá rychlost, klesá velikost rychlosti částice a její pohyb se zpomaluje.

Tato interpretace získá náležitý význam v kap. 4, kde se budeme podrobněji věnovat vektorové povaze rychlosti a zrychlení.

KONTROLA 4: Pes běží podél osy x. Jaké znaménko má jeho zrychlení, pohybuje-li se pes (a) v kladném směru osy x a velikost jeho rychlosti roste, (b) v kladném směru osy x a velikost jeho rychlosti klesá, (c) v záporném směru osy x s rostoucí velikostí rychlosti a (d) v záporném směru osy x s klesající velikostí rychlosti?





PŘÍKLAD 2.7

Poloha částice pohybující se podél osy x (obr. 2.1) závisí na čase takto:

$$x = 4 - 27t + t^3.$$

Číselné koeficienty jsou vyjádřeny v metrech, metrech za sekundu a v metrech za sekundu na třetí.

(a) Určete $v_x(t)$ a $a_x(t)$.

ŘEŠENÍ: Rychlost $v_x(t)$ určíme jako derivaci polohy $x(t)$ podle času:

$$v_x = -27 + 3t^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Zrychlení $a_x(t)$ je časovou derivací rychlosti $v_x(t)$:

$$a_x = 6t. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Je v některém okamžiku rychlost částice nulová?

ŘEŠENÍ: Položíme-li $v_x(t) = 0$, dostaneme rovnici

$$0 = -27 + 3t^2,$$

jejíž řešení je $t = \pm 3\,\text{s}$. (Odpověď)

(c) Popište pohyb částice pro $t \geqq 0$.

ŘEŠENÍ: Provedeme rozbor závislostí $x(t)$, $v_x(t)$ a $a_x(t)$.

V čase $t = 0$ je částice v bodě o souřadnici $x = +4\,\text{m}$ a pohybuje se doleva rychlostí $-27\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Její zrychlení je nulové.

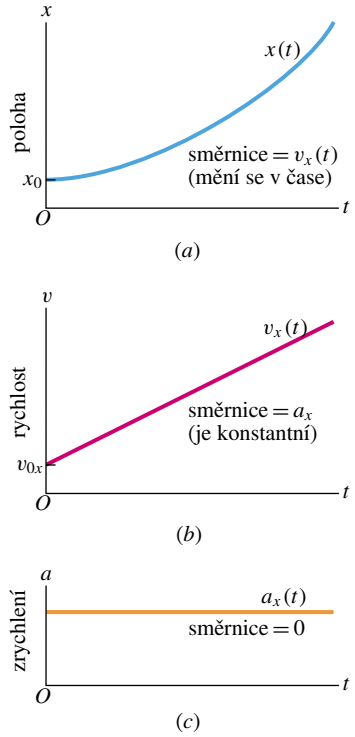
V časovém intervalu $0\,\text{s} < t < 3\,\text{s}$ se částice stále pohybuje doleva, její pohyb se však zpomaluje. Její zrychlení je totiž kladné a směřuje tedy doprava. Toto tvrzení ověříme tak, že do vztahů pro $v_x(t)$ a $a_x(t)$ zkusmo dosadíme některý okamžik ležící v uvedeném časovém intervalu (proveďte např. pro $t = 2\,\text{s}$). Zrychlení částice s časem roste, její pohyb směrem vlevo je čím dál pomalejší.

V okamžiku $t = 3\,\text{s}$ má částice nulovou rychlost ($v_x = 0$). Právě dosáhla nejvzdálenějšího bodu ležícího vlevo od počátku ($x = -50\,\text{m}$). Zrychlení zůstává kladné a jeho velikost neustále roste.

Pro $t > 3\,\text{s}$ narůstá kladné zrychlení. Rychlost, která nyní směřuje doprava, velmi prudce roste. (Všimněme si, že nyní má zrychlení stejné znaménko jako rychlost.) Částice neustále pokračuje v pohybu směrem doprava.

2.6 ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ POHYB: SPECIÁLNÍ PŘÍPAD

Velmi často se setkáváme s pohyby, jejichž rychlost se (alespoň přibližně) mění tak, že zrychlení je konstantní. Nazýváme je rovnoměrně zrychlené. Příkladem může být automobil, který se na křižovatce rozjíždí na zelenou. (Grafy časové závislosti polohy, rychlosti a zrychlení, odpovídající takové situaci, jsou schematicky zakresleny na obr. 2.9.) Stejně tak může být zrychlení automobilu konstantní i při brzdění.



Obr. 2.9 (a) Časová závislost polohy $x(t)$ částice pohybující se rovnoměrně zrychleně. (b) Časová závislost její rychlosti $v_x(t)$ je v každém bodě určena směrnicí křivky $x(t)$ na obrázku (a). (c) Zrychlení částice $a_x(t)$ je stálé a je dáno (konstantní) směrnicí grafu $v_x(t)$.

Podobné případy jsou tak časté, že je vhodné mít pro jejich popis zvláštní rovnice. Se dvěma možnými způsoby jejich odvození se postupně seznámíme v tomto a následujícím článku.

Při studiu obou článků i při řešení úloh a cvičení je třeba mít neustále na paměti, že *tyto rovnice platí jen pro případ konstantního zrychlení* (nebo zrychlení, které lze v dobrém přiblížení za konstantní považovat).

Při rovnoměrně zrychleném pohybu je okamžité zrychlení shodné se zrychlením průměrným. S malou změnou označení tak můžeme rovnici (2.7) přepsat do tvaru

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0}.$$

Symbolem v_{0x} je označena rychlost v okamžiku $t = 0$ (počáteční rychlost), a v_x je rychlost v libovolném pozdějším čase t. Rovnici můžeme ještě upravit takto:

$$v_x = v_{0x} + a_x t. \tag{2.11}$$

Všimněme si, že pro $t = 0$ vede tento vztah k očekávané rovnosti $v_x = v_{0x}$. Derivováním rovnice (2.11) podle času dostaneme $\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = a_x$, v souhlasu s definičním vztahem pro zrychlení a_x. Těmito jednoduchými kontrolními výpočty jsme ověřili správnost odvozené rovnice. Na obr. 2.9b je graf funkce $v_x(t)$ dané rovnicí (2.11).

Obdobně lze přepsat rovnici (2.2):

$$\overline{v_x} = \frac{x - x_0}{t - 0}$$

a odtud

$$x = x_0 + \overline{v_x} t. \tag{2.12}$$

x_0 je poloha částice v okamžiku $t = 0$ (počáteční poloha), $\overline{v_x}$ je průměrná rychlost v časovém intervalu od $t = 0$ až do obecného okamžiku t.

Snadno zjistíme, že grafem funkce $v_x(t)$ dané vztahem (2.11) je přímka. Průměrná rychlost v libovolném časovém intervalu (a tedy i v intervalu od $t = 0$ po obecný okamžik t) je v tomto případě určena aritmetickým průměrem počáteční a koncové rychlosti (v_{0x} a v_x). Můžeme ji tedy zapsat ve tvaru

$$\overline{v_x} = \tfrac{1}{2}(v_{0x} + v_x). \tag{2.13}$$

Dosadíme-li za v_x pravou stranu rovnice (2.11), získáme po malých úpravách vztah

$$\overline{v_x} = v_{0x} + \tfrac{1}{2} a_x t. \tag{2.14}$$

Po dosazení z (2.14) do (2.12) nakonec dostaneme

$$x - x_0 = v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2. \tag{2.15}$$

Pro kontrolu můžeme dosadit $t = 0$ a dostáváme očekávaný výsledek $x = x_0$. Derivací vztahu (2.15) podle času získáme, opět podle očekávání, vztah (2.11). Graf funkce $x(t)$ dané vztahem (2.15) je na obr. 2.9a. Uvědomme si, že funkční předpis (2.15) pro $x(t)$ obsahuje veškeré dostupné informace o rovnoměrně zrychleném přímočarém pohybu. Je-li zadáno zrychlení a_x (stálé v průběhu celého děje) a hodnoty x_0 a v_{0x}, určující počáteční stav částice, je možné určit v libovolném okamžiku t

(1) její polohu x z rovnice (2.15),
(2) její rychlost v_x z rovnice (2.11).

Vztah (2.15) lze z (2.11) jednoduše získat integrací, a obráceně vztah (2.11) vznikne z (2.15) derivováním.

Při řešení některých úloh sloužících k procvičení problematiky rovnoměrně zrychleného pohybu je však výhodnější jiný pohled na vztahy (2.11) a (2.15). Často se objevují zadání, která nesměřují k jejich využití jako předpisů pro *funkce*, ale týkají se jednotlivého okamžiku. V takových případech pak bývá vhodné hledět na tyto vztahy jako na soustavu dvou rovnic, obsahujících šest veličin t, x, x_0, v_x, v_{0x} a a_x. Čtyři z nich musí být zadány, abychom dvě zbývající mohli určit řešením soustavy. Tab. 2.1 shrnuje kromě rovnic (2.11) a (2.15) další tři rovnice, které lze získat jejich úpravou. Společným rysem všech pěti rovnic je nepřítomnost některé z veličin t, $x - x_0$, v_x, v_{0x} a a_x. Soupis může být snad užitečný těm, kteří neradi provádějí algebraické úpravy a dají přednost přímému dosazení zadaných číselných hodnot do rovnice, kterou vhodně vyberou podle typu zadání.

Tabulka 2.1 **Rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb**

ČÍSLO ROVNICE	ROVNICE	CHYBĚJÍCÍ VELIČINA
(2.11)	$v_x = v_{0x} + a_x t$	$x - x_0$
(2.15)	$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	v_x
(2.16)	$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	t
(2.17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	a_x
(2.18)	$x - x_0 = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2$	v_{0x}

Před použitím tabulky se ujistíme, že se úloha opravdu týká rovnoměrně zrychleného pohybu. Vzpomeňme si, že funkce (2.11) je derivací funkce (2.15). Zbývající tři rovnice vznikly algebraickou úpravou spočívající ve vyloučení některé z vyjmenovaných veličin z rovnic (2.11) a (2.15).

KONTROLA 5: Následující čtyři funkce popisují časovou závislost polohy hmotného bodu $x(t)$: (1) $x = 3t - 4$; (2) $x = -5t^3 + 4t^2 + 6$; (3) $x = 2/t^2 - 4/t$; (4) $x = 5t^2 - 3$. Ve kterém z těchto případů můžeme použít rovnice z tab. 2.1?

PŘÍKLAD 2.8

Řidič spatří policejní vůz a začne brzdit. Na dráze 88 m zpomalí z rychlosti 75 km/h na 45 km/h.

(a) Určete zrychlení automobilu za předpokladu, že bylo během brzdění konstantní.

ŘEŠENÍ: Veličiny v_{0x}, v_x a $x - x_0$ jsou zadány, potřebujeme určit a_x. Čas se v zadání úlohy neobjevuje. Z tab. 2.1 proto vybereme rovnici (2.16) a vypočteme z ní neznámé zrychlení a_x.

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2(x - x_0)} = \frac{(45\,\mathrm{km/h})^2 - (75\,\mathrm{km/h})^2}{2(0{,}088\,\mathrm{km})} = \\ = -2{,}05{\cdot}10^4\,\mathrm{km/h^2} \doteq -1{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(V posledním kroku výpočtu je třeba věnovat pozornost převodu jednotky $\mathrm{h^{-2}}$ na $\mathrm{s^{-2}}$.) Všimněme si, že rychlosti jsou kladné a zrychlení záporné. Pohyb automobilu se opravdu zpomaluje.

(b) Jak dlouho řidič v této fázi pohybu brzdil?

ŘEŠENÍ: Nyní je neznámou veličinou čas a zrychlení se naopak v zadání nevyskytuje. Z tab. 2.1 volíme rovnici (2.17) a řešíme ji vzhledem k neznámé t:

$$t = \frac{2(x - x_0)}{v_{0x} + v_x} = \frac{2(0{,}088\,\mathrm{km})}{(75 + 45)\,\mathrm{km/h}} = \\ = 1{,}5{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{h} = 5{,}4\,\mathrm{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(c) Řidič dále brzdí se zrychlením určeným v části (a). Za jak dlouho od začátku brzdění se automobil zcela zastaví?

ŘEŠENÍ: Při řešení této části úlohy nepotřebujeme uvažovat o posunutí $x - x_0$. Použijeme tedy rovnici (2.11) a vyjádříme t:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{0 - (75\,\mathrm{km/h})}{(-2{,}05{\cdot}10^4\,\mathrm{km/h^2})} = \\ = 3{,}7{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{h} = 13\,\mathrm{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jakou dráhu urazí vůz od počátku brzdění do úplného zastavení?

ŘEŠENÍ: Hledaná dráha je přímo rovna posunutí. Užijeme rovnici (2.15):

$$x - x_0 = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \\ = (75\,\mathrm{km/h})(3{,}7{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{h}) + \\ + \tfrac{1}{2}(-2{,}05{\cdot}10^4\,\mathrm{km{\cdot}h^{-2}})(3{,}7{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{h})^2 = \\ = 0{,}137\,\mathrm{km} \doteq 140\,\mathrm{m}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(Je třeba dbát na to, abychom zrychlení a_x dosazovali se správným znaménkem!)

(e) Při další jízdě řidič opět potřebuje zastavit. Zpomaluje se stejným zrychlením jako v části (a), počáteční rychlost je však nyní taková, že automobil zcela zastaví na dráze 200 m. Jak dlouho trvá brzdění?

ŘEŠENÍ: V úloze nevystupuje počáteční rychlost. Použijeme proto rovnici (2.18). Dosadíme $v_x = 0$ (v okamžiku t automobil zastavil) a rovnici řešíme vzhledem k neznámé t:

$$t = \left(-\frac{2(x - x_0)}{a_x}\right)^{1/2} = \left(-\frac{2(200\,\mathrm{m})}{-1{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}\right)^{1/2} = \\ = 16\,\mathrm{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.7: *Rozměrová zkouška*

Jednotkou rychlosti je $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, jednotkou zrychlení $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ apod. Sčítat či odčítat můžeme jen ty členy, které mají stejnou jednotku (stejný fyzikální rozměr). Pokud se chceme ujistit, že jsme při odvozování rovnice neudělali chybu, provedeme tzv. rozměrovou zkoušku, tj. zkontrolujeme fyzikální rozměry všech členů v rovnici.

Například na pravé straně rovnice (2.15) ($x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$) musí mít každý člen rozměr délky, ve shodě s rozměrem posunutí na levé straně. Člen $v_{0x}t$ má jednotku $(\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\mathrm{s}) = \mathrm{m}$ a člen $\frac{1}{2}a_x t^2$ jednotku $(\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(\mathrm{s^2}) = \mathrm{m}$. Oba členy tedy mají správný rozměr a rovnice je podle rozměrové zkoušky v pořádku. Číselné konstanty, jako například $\frac{1}{2}$ nebo π, jsou bezrozměrové (mají rozměr 1).

2.7 ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ POHYB: JINÝ PŘÍSTUP

Článek je určen čtenářům obeznámeným se základy integrálního počtu.

V předchozím článku jsme odvodili vztahy (2.11) a (2.15) na základě skutečnosti, že při rovnoměrně zrychleném pohybu splývá průměrné zrychlení částice v libovolném časovém intervalu s jejím okamžitým zrychlením v libovolném okamžiku. Přesvědčili jsme se, že vztah (2.15) obsahuje úplnou informaci o průběhu rovnoměrně zrychleného pohybu, jsou-li zadány hodnoty x_0, v_{0x} a a_x. Vztah (2.11) je jeho derivací. Závislosti (2.11) a (2.15) lze odvodit i jiným způsobem, jehož předností je možnost zobecnění i na případy pohybu s libovolným zrychlením, závislým na čase. Postup spočívá v integraci zrychlení a_x, které je při rovnoměrně zrychleném pohybu konstantní. Podle definičního vztahu (2.8) platí

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t},$$

tj.

$$\mathrm{d}v_x = a_x\,\mathrm{d}t.$$

Integrací obou stran rovnice dostáváme

$$\int \mathrm{d}v_x = \int a_x \,\mathrm{d}t.$$

Zrychlení je konstantní, takže je můžeme vytknout před integrál a píšeme

$$\int \mathrm{d}v_x = a_x \int \mathrm{d}t,$$

tj.

$$v_x = a_x t + C. \tag{2.19}$$

Integrační konstantu C určíme z počáteční podmínky pro rychlost částice: v okamžiku $t = 0$ je rychlost $v_x = v_{0x}$. Dosadíme tyto hodnoty do vztahu (2.19), který platí pro libovolný okamžik, a tedy i pro $t = 0$. Dostaneme

$$v_{0x} = a_x \cdot 0 + C = C.$$

Zjištěnou hodnotu konstanty C dosadíme do (2.19) a získáváme časovou závislost rychlosti (2.11). Stejným postupem odvodíme závislost (2.15). Z definice rychlosti (2.4) přímo plyne

$$\mathrm{d}x = v_x \,\mathrm{d}t.$$

Integrací levé i pravé strany dostaneme

$$\int \mathrm{d}x = \int v_x \,\mathrm{d}t.$$

Z předchozích výsledků víme, že rychlost v_x závisí na čase podle (2.11). Nemůžeme ji tedy vytknout před integrál a přesně zopakovat postup použitý při integraci zrychlení. Místo v_x však dosadíme do integrálu funkci (2.11):

$$\int \mathrm{d}x = \int (v_{0x} + a_x t)\,\mathrm{d}t.$$

Počáteční rychlost v_{0x} je konstantní, takže integrál na pravé straně můžeme rozepsat do tvaru

$$\int \mathrm{d}x = v_{0x} \int \mathrm{d}t + a_x \int t \,\mathrm{d}t.$$

Integrace obou stran rovnice vede k výsledku

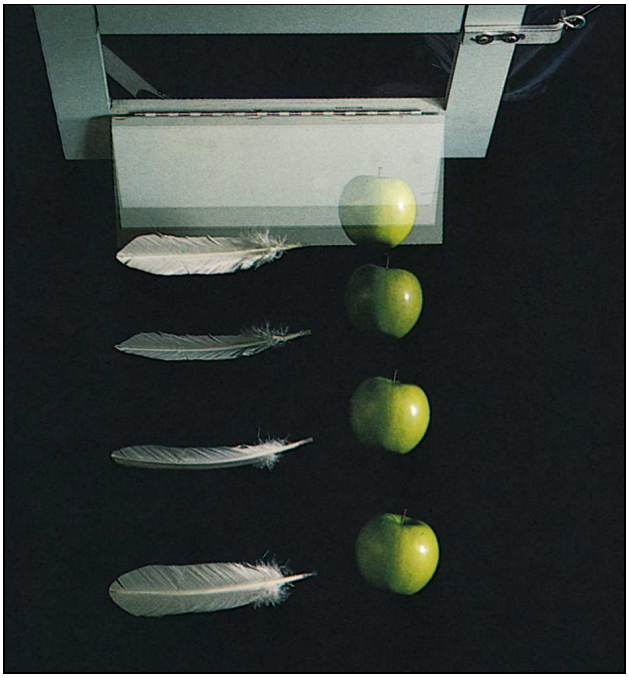
$$x = v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2 + C', \tag{2.20}$$

kde C' je další integrační konstanta. Určíme ji opět z počáteční podmínky, tentokrát pro polohu částice: v čase $t = 0$ je $x = x_0$. Dosazením do (2.20) zjistíme, že hodnota konstanty C' je $C' = x_0$. Vztah (2.20) tak přejde na tvar (2.15).

2.8 SVISLÝ VRH

Představme si následující pokus: V blízkosti povrchu Země vrháme nějaké těleso svisle vzhůru nebo dolů (svislý směr udává např. volně visící olovnice) a nějak při tom zajistíme, aby se neuplatnil vliv odporu prostředí. Zjistíme, že se těleso s velkou přesností pohybuje se stálým zrychlením, směřujícím svisle dolů. Nazýváme je **tíhové zrychlení** a značíme písmenem g. Z experimentu víme, že tíhové zrychlení nezávisí na vlastnostech tělesa (hmotnosti, hustotě, tvaru, …) a je pro všechna tělesa stejné.

Zvláštním případem svislého vrhu je **volný pád**, při kterém těleso prostě upustíme. Vypouštíme ho tedy s nulovou počáteční rychlostí. Na obr. 2.10 vidíme fotografický záznam souběžného volného pádu dvou různých těles, pírka a jablka, ve vakuu. (Fotografie byly pořízeny v různých okamžicích s využitím stroboskopického efektu.) Při pádu obou těles se jejich rychlost zvyšuje se stejným zrychlením g.



Obr. 2.10 Pírko a jablko se při volném pádu ve vakuu pohybují se stejným zrychlením g. Nasvědčuje tomu rostoucí vzdálenost po sobě následujících fotografických obrazů objektů, které byly zaznamenány v rovnoměrně rozložených okamžicích.

Tíhové zrychlení se mírně mění se zeměpisnou šířkou a nadmořskou výškou. Při hladině moře ve středních zeměpisných šířkách má hodnotu zhruba $9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, viz vztah (2.10) a text za ním. Budeme jej používat v příkladech a cvičeních.

Rovnice popisující rovnoměrně zrychlený pohyb uvedené v tab. 2.1 platí i pro svislý vrh v blízkosti* zemského povrchu. Můžeme je tedy při řešení úloh o svislém vrhu těles používat, pokud je odpor vzduchu zanedbatelný. Tab. 2.1 přizpůsobíme nové situaci provedením dvou drobných změn: (1) Se svislým směrem, v němž se nyní odehrává pohyb tělesa, spojíme souřadnicovou osu y tak, aby směřovala vzhůru. (Osa x bývá častěji vyhrazena pro popis pohybu ve vodorovném směru.) Pro rychlost budeme používat označení v_y a pro zrychlení a_y. Tato změna usnadní i pozdější popis složitějších pohybů v rovině nebo v prostoru. (2) Tíhové zrychlení je při zvolené orientaci osy y záporné, a tak můžeme ve všech rovnicích zaměnit a_y za $-g$.

Po provedení popsaných úprav získáme obměnu tabulky 2.1 pro svislý vrh. Mějme na paměti:

Při zvolené orientaci osy y je tíhové zrychlení svislého vrhu $a_y = -g = -9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jeho *velikost* je však $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Do rovnic (2.21) až (2.25) dosazujeme kladnou hodnotu g.

Dejme tomu, že vyhodíme jablko svisle vzhůru počáteční rychlostí v_{0y} a před dopadem je opět chytíme. Volný let jablka (od vyhození po zachycení) se řídí rovnicemi v tab. 2.2. Zrychlení je konstantní a směřuje dolů, tj. $a_y = -g = -9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Rychlost se během letu mění podle vztahů (2.21) a (2.23). Při stoupání jablka velikost (kladné) rychlosti klesá až k nule. V okamžiku zastavení je jablko ve své nejvyšší poloze. Při pádu velikost (záporné) rychlosti roste.

Tabulka 2.2 **Rovnice pro svislý vrh**

ČÍSLO ROVNICE	ROVNICE	CHYBĚJÍCÍ VELIČINA
(2.21)	$v_y = v_{0y} - gt$	$y - y_0$
(2.22)	$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$	v_y
(2.23)	$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$	t
(2.24)	$y - y_0 = \frac{1}{2}(v_{0y} + v_y)t$	g
(2.25)	$y - y_0 = v_y t + \frac{1}{2}gt^2$	v_{0y}

* Pro ty nejpečlivější čtenáře: do výšek h zanedbatelně malých proti zemskému poloměru, tedy $h \ll 6{\cdot}10^3$ km.

PŘÍKLAD 2.9

Opravář upustil klíč do výtahové šachty vysokého domu.

(a) Jaká bude poloha klíče za 1,5 s?

ŘEŠENÍ: Ze zadání je známa doba t, velikost zrychlení g a počáteční rychlost v_{0y}, o které můžeme předpokládat, že byla nulová. Chceme určit posunutí, chybějící veličinou je tedy rychlost v_y, která není zadána a její zjištění se v zadání nepožaduje. Této situaci odpovídá rovnice (2.22) z tab. 2.2. Počátek souřadnicové osy y zvolme v místě, kde opravář klíč upustil. Do rovnice (2.22) přímo dosadíme $y_0 = 0$, $v_{0y} = 0$ a $t = 1{,}5$ s. Dostaneme

$$y = 0(1{,}5\,\mathrm{s}) - \tfrac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(1{,}5\,\mathrm{s})^2 \doteq$$
$$\doteq -11\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

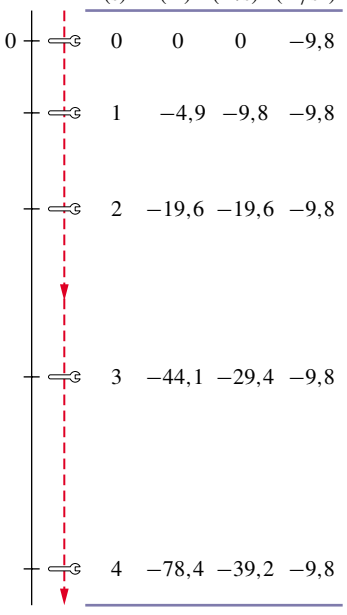
Záporné znaménko výsledku odpovídá očekávané skutečnosti, že se klíč po 1,5 s pádu nachází pod úrovní místa, kde opravář vypadl.

(b) Jaká je rychlost klíče v okamžiku 1,5 s?

ŘEŠENÍ: Rychlost je dána rovnicí (2.21)

$$v_y = v_{0y} - gt = 0 - (9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(1{,}5\,\mathrm{s}) \doteq$$
$$\doteq -15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Záporné znaménko ukazuje, že rychlost klíče směřuje dolů. Tento výsledek opět není překvapivý. V obr. 2.11 jsou shrnuty základní údaje o letu klíče až do okamžiku $t = 4$ s.



t (s)	y (m)	v_y (m/s)	a_y (m/s^2)
0	0	0	−9,8
1	−4,9	−9,8	−9,8
2	−19,6	−19,6	−9,8
3	−44,1	−29,4	−9,8
4	−78,4	−39,2	−9,8

Obr. 2.11 Příklad 2.9. Poloha, rychlost a zrychlení volně padajícího tělesa.

PŘÍKLAD 2.10

V roce 1939 se Joe Sprinz z baseballového klubu v San Francisku pokusil překonat rekord v chytání baseballového míče padajícího z co největší výšky. Rok předtím dosáhli hráči klubu Cleveland Indians rekordního výkonu, když chytili baseballový míč po jeho pádu z výšky 210 m. Sprinz se pokusil zachytit míček padající z letadélka letícího přibližně ve výšce 240 m. Budeme předpokládat, že míček padal přesně z výšky 240 m a zanedbáme vliv odporu prostředí.

(a) Určete dobu letu míčku.

ŘEŠENÍ: Zvolme počátek svislé osy y v místě, kde byl míček vypuštěn a orientujme ji směrem vzhůru. Počáteční poloha je $y_0 = 0$, počáteční rychlost $v_{0y} = 0$. V zadání úlohy nevystupuje veličina v_y, použijeme proto rovnici (2.22):

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2, \\ -240\,\mathrm{m} &= 0t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})t^2, \\ 4{,}9t^2 &= 240, \\ t &= 7\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

Při výpočtu druhé odmocniny musíme výsledku přiřadit kladné nebo záporné znaménko. Vybrali jsme kladné znaménko, protože míč dopadl *poté*, co byl vypuštěn.

(b) Jaká byla rychlost míče těsně nad zemí?

ŘEŠENÍ: Pro výpočet rychlosti přímo ze zadaných údajů (nikoliv z výsledku příkladu (a)) použijeme rovnici (2.23):

$$\begin{aligned} v_y^2 &= v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) = \\ &= 0 - 2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(-240\,\mathrm{m}) = \\ &= 4{,}7{\cdot}10^3\,\mathrm{m^2{\cdot}s^{-2}}, \\ v_y &= -69\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\ (\doteq -250\,\mathrm{km/h}). \end{aligned}$$ (Odpověď)

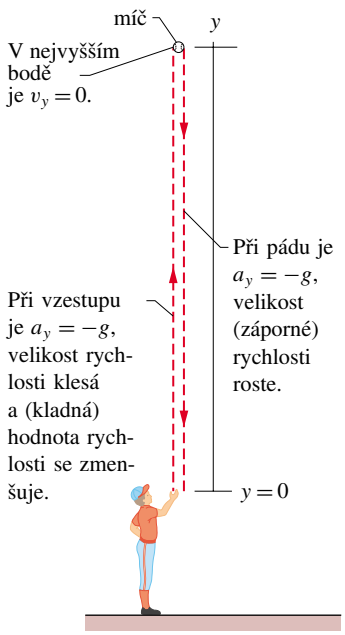
Znaménko výsledku je nyní záporné, neboť míček letí směrem dolů, v záporném směru osy y.

V popisovaném skutečném případě nebyl samozřejmě vliv odporu prostředí zanedbatelný. Kdybychom jej započítali, zjistili bychom, že let míčku trval déle a výsledná rychlost byla menší, než jsme vypočetli pro ideální situaci. I tak však byla rychlost míčku při dopadu značná. Když jej totiž Sprinz při pátém pokusu konečně zachytil do rukavice, byl náraz tak obrovský, že ho ruka s rukavicí udeřila do tváře, zlomila mu horní čelist na dvanácti místech a vyrazila pět zubů. Sprinz upadl do bezvědomí.

PŘÍKLAD 2.11

Nadhazovač vyhodí baseballový míč svisle vzhůru rychlostí $12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (obr. 2.12).

(a) Za jak dlouho dosáhne míč maximální výšky?



Obr. 2.12 Příklad 2.11. Hráč vrhá míč svisle vzhůru. Rovnice pro svislý vrh platí jak pro vzestup míče, tak pro jeho pád za předpokladu, že vliv odporu vzduchu lze zanedbat.

ŘEŠENÍ: V nejvyšším bodě letu je rychlost míče nulová. Z rovnice (2.21) dostaneme

$$\begin{aligned} t &= \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{(12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) - 0}{(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = \\ &= 1{,}2\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

(b) Jaká je maximální výška letu?

ŘEŠENÍ: Počátek osy y položme do místa vyhození míče. Do rovnice (2.23) dosadíme $y_0 = 0$ a vyjádříme z ní y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{v_{0y}^2 - v_y^2}{2g} = \frac{(12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 - (0)^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = \\ &= 7{,}3\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

V této části úlohy jsme také mohli s výhodou použít výsledku (a) a maximální výšku určit z rovnice (2.25). Ověřte si to!

(c) Za jak dlouho po vyhození dosáhne míč výšky 5 m?

ŘEŠENÍ: Použijeme rovnici (2.22), která obsahuje pouze zadané veličiny a neznámý čas. Dosazením $y_0 = 0$ dostaneme

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

a tedy

$$5{,}0\,\mathrm{m} = (12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})t^2.$$

Rovnici přepíšeme do tvaru (pro jednoduchost již nebudeme vypisovat jednotky):

$$4{,}9t^2 - 12t + 5{,}0 = 0.$$

Řešením kvadratické rovnice dostaneme*

$$t = 0{,}53\,\text{s} \quad \text{a} \quad t = 1{,}9\,\text{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Existují dvě možná řešení! To nás však nesmí překvapit: Míč skutečně prochází polohou $y = 5{,}0$ dvakrát. Jednou při výstupu a podruhé při pádu.

Provedeme ještě jednoduchou kontrolu získaných výsledků. Okamžik, kdy míč dosáhl maximální výšky, by měl na časové ose ležet právě uprostřed mezi oběma okamžiky, v nichž byla poloha míče určena souřadnicí 5 m. Je tomu skutečně tak. Aritmetický průměr těchto časových údajů

$$t = \tfrac{1}{2}(0{,}53\,\text{s} + 1{,}9\,\text{s}) = 1{,}2\,\text{s}$$

se shoduje s výsledkem příkladu (a).

KONTROLA 6: Jaké je znaménko posunutí míče v příkladu 2.11 (a) při vzestupu míče a (b) při jeho pádu? (c) Jaké je zrychlení v nejvyšším bodě letu?

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.8: *Význam záporného znaménka*

Vzpomeňme si, že některé z hodnot polohy, rychlosti či zrychlení získané při řešení př. 2.9, 2.10 a 2.11 měly záporné znaménko. Je důležité, abychom význam záporného znaménka u těchto veličin uměli správně interpretovat. Při řešení úloh o svislém vrhu jsme svislou souřadnicovou osu y volili vždy tak, aby její kladný směr byl orientován vzhůru. Volba opačné orientace osy by byla stejně dobře možná. Počátek osy y jsme vybírali tak, aby to bylo při řešení konkrétní úlohy výhodné: v př. 2.9 byl počátek umístěn v poloze ruky opraváře, v př. 2.10 v letadélku a v př. 2.11 v ruce nadhazovače. Záporná hodnota souřadnice určující polohu tělesa znamená, že se těleso nachází *pod úrovní* počátku osy y.

Záporná rychlost znamená, že se těleso pohybuje tak, že hodnota jeho y-ové souřadnice klesá, v našich příkladech tedy dolů. Tato interpretace záporného znaménka rychlosti je správná nezávisle na okamžité poloze tělesa.

Ve všech řešených příkladech bylo zrychlení svislého vrhu záporné ($= -9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$), bylo tedy orientováno proti kladnému směru osy y. Význam záporného znaménka zrychlení je v tomto případě následující: pohybuje-li se těleso vzhůru (jeho rychlost je kladná) je vlivem záporného zrychlení brzděno (velikost jeho rychlosti klesá). Naopak, těleso pohybující se dolů (rychlost je záporná) je vlivem záporného zrychlení urychlováno, velikost jeho rychlosti roste. Tato interpretace nezávisí na poloze a rychlosti tělesa.

* Řešení obecné kvadratické rovnice je uvedeno v dod. E.

Bod 2.9: *Neočekávané výsledky*

Stává se, že při výpočtu dostaneme i výsledky, které se na první pohled zdají nesmyslné, jako třeba v př. 2.11c. Získáme-li více výsledků, než jsme očekávali, nezavrhujme hned ty, které jsou zdánlivě nesprávné. Zvažujme je pečlivě a pokusme se nalézt jejich fyzikální význam. Často nějaký mají.

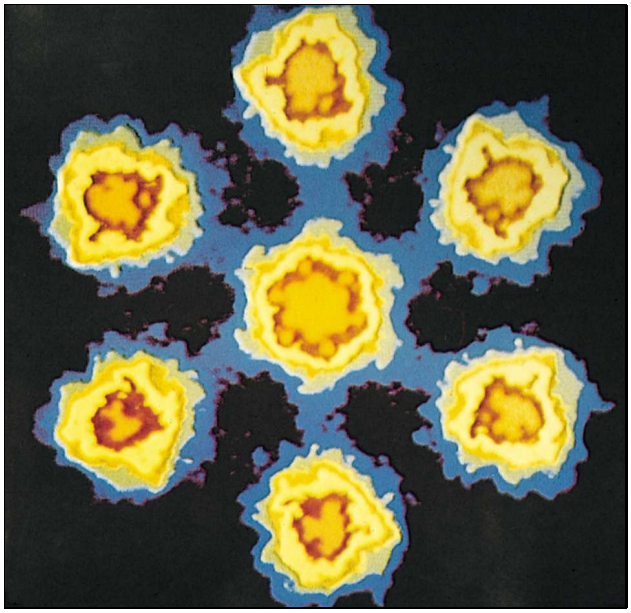
I záporný časový údaj má svůj dobrý smysl. Odpovídá události, která nastala dříve než v okamžiku $t = 0$, kdy jsme se (zcela libovolně) rozhodli spustit stopky.

2.9 ČÁSTICOVÁ FYZIKA

Na různých místech v knize občas odbočíme od popisu velkých objektů našeho světa, se kterými máme každodenní a bezprostřední zkušenosti, a všimneme si objektů mnohem menších. Doposud jsme pracovali s objektem zvaným hmotný bod, který má i přes své zanedbatelné rozměry konečnou hmotnost. Nahrazovali jsme jím reálná tělesa jako například dítě, míč, automobil. Zůstává však otázka, jak malé ve skutečnosti mohou reálné objekty být. Jaké jsou „nejposlednější“ částečky přírody? Tímto problémem se zabývá **fyzika elementárních částic**, moderní oblast fyziky, která poutá pozornost celé řady špičkových fyziků.

Poznání, že hmota není spojitá, ale je tvořena velmi malými objekty — atomy, bylo klíčové pro pochopení mnoha zákonitostí nejen ve fyzice, ale i v chemii. Pomocí moderních mikroskopů je možné jednotlivé atomy dokonce i zobrazit. Jedna z ukázek takového zobrazení je na obr. 2.13. Hmota tedy není spojitá, ale „zrnitá“. Také veličiny, které její chování popisují, nabývají **diskrétních** — **kvantovaných** hodnot (lat. *quantus* = jak mnoho). Mění se jen po určitých dávkách, zvaných **kvanta**. Kvantování je základní vlastností přírody. V dalším textu knihy poznáme mnohé fyzikální veličiny, které jsou kvantovány, pokud je zkoumáme v dostatečně jemném měřítku. Tato „všudypřítomnost“ kvantování dala jméno i fyzikální disciplíně zabývající se zákony mikrosvěta, **kvantové fyzice**.

Mezi světem velkých těles (makrosvětem) a světem kvantovým (mikrosvětem) není ostrá hranice. Zákony mikrosvěta jsou platné všeobecně. Jakmile však přejdeme od atomů k míčům a automobilům, stává se kvantování méně nápadným a nakonec je zcela neměřitelné. Diskrétnost (v matematice a fyzice protiklad spojitosti, nespojitost) se ztrácí a obecné zákony kvantové fyziky směřují ke speciálním limitním tvarům, tzv. zákonům **klasické fyziky**, které dobře popisují pohyb velkých těles.



Obr. 2.13 Šesterečné uspořádání atomů uranu je „zviditelněno“ pomocí zobrazení v rastrovacím prozařovacím elektronovém mikroskopu. Barvy jsou jednotlivým částem objektu uměle přiřazeny počítačovým zpracováním obrazu (tzv. „nepravé barvy“).

Stavba atomu

Atom je složen z velmi malého, nepředstavitelně hutného **jádra**. V jádru, které je obklopeno jedním nebo více lehkými **elektrony**, je soustředěna prakticky celá hmota atomu. Obvykle předpokládáme, že jádro i celý atom mají kulový tvar. Poloměr atomu je řádově 10^{-10} m, jádro je asi 100 000krát menší, přibližně 10^{-15} m. Soudržnost atomu je zajištěna vzájemným elektrickým přitahováním záporných elektronů v atomovém obalu s jádrem, obsahujícím kladné protony. Zákony popisující tuto přitažlivou interakci budeme studovat později. V této chvíli si pouze uvědomme, že bez ní by nemohly existovat atomy, a tedy ani my sami.

Stavba jádra

Nejmenší jádro, jádro běžného atomu vodíku, je tvořeno jediným protonem. Existují i dvě složitější varianty, zvané **izotopy** neboli **nuklidy** vodíku, jejichž jádro navíc obsahuje jeden nebo dva elektricky neutrální **neutrony**. Tyto izotopy nazýváme **deuterium** a **tritium**.

Vodík, ve všech variantách, je příkladem jednoho **prvku**. Různé prvky se navzájem liší počtem protonů v jádře. Atom s jedním protonem v jádře je vodík, atom se šesti protony v jádře je uhlík. Různé izotopy téhož prvku se liší počtem neutronů v jádře. Protony a neutrony nazýváme společně **nukleony**.

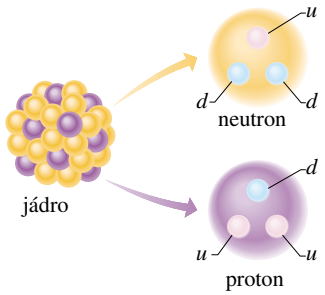
Roli neutronů v jádře lze velmi zhruba charakterizovat tak, že zabezpečují jeho „soudržnost“. Protony totiž mají kladný náboj, a elektrickými silami se proto velmi silně odpuzují. Mezi nukleony však při velmi malých vzdálenostech působí i přitažlivá síla, zvaná **silná interakce**. Jediný atom, který nepotřebuje neutrony k zajištění stability svého jádra, je běžný atom vodíku. Jeho jádro je totiž tvořeno jediným protonem. Všechna ostatní jádra by se bez neutronů rozpadla.

Mnoho izotopů běžných prvků je nestabilních. Naštěstí ty, na kterých bytostně závisí naše existence, mají též izotopy stabilní. Například 19 z 21 izotopů mědi je nestabilních, samovolně se rozpadají a mění v jiné prvky.

Měď, kterou známe jako celkem běžný kov a používáme ji v elektronice i jiných technologiích, je složena ze zbývajících dvou stabilních izotopů.

Struktura subatomárních částic

Elektron si sice někdy počíná velmi neobvykle, ale přesto je to jednoduchá částice. Při detekci se chová tak, jako by neměl žádné rozměry ani vnitřní strukturu. Elektron (značka e, někdy pro upřesnění e^-) patří do skupiny částic zvaných **leptony**. Je jich celkem šest. Vedle elektronu existují ještě dvěstěkrát těžší **mion** (značka μ, dříve nazývaný **mezon** μ) a více než třítisíckrát těžší **tauon** (značka τ). Každý z nich má své **neutrino** ν_e, ν_μ, ν_τ s hmotností téměř nulovou (možná i přesně nulovou). Ke každému leptonu existuje **antičástice**. Antičástici k elektronu nazýváme **pozitron** (značka e^+).



Obr. 2.14 Představa atomového jádra a protonů a neutronů, z nichž je složeno. Protony a neutrony jsou tvořeny kvarky „up“ (u) a „down“ (d).

Podle současných znalostí se protony a neutrony liší od elektronů a dalších leptonů tím, že se skládají ze tří jednodušších částic zvaných **kvarky**.* Proton se skládá ze dvou u-kvarků (angl. *up* = nahoru) a jednoho d-kvarku (angl. *down* = dolů). Neutron je tvořen jedním u-kvarkem

* Slovo „kvark“ pochází ze slovních hříček užitých v básni *Finnegans Wake* od Jamese Joyce.

a dvěma d-kvarky (obr. 2.14). I jiné částice, které jsme dříve považovali za elementární, se skládají z kvarků.

Je podivuhodné, že kvarků je známo šest druhů*, tedy stejný počet jako leptonů. Fyziky zajímá, zda má tato shoda hlubší smysl, nebo zda je zcela náhodná. Odpověď prozatím neznáme.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Poloha

Polohu hmotného bodu určujeme souřadnicí x vzhledem k **počátku** souřadnicové osy. Souřadnice může být jak kladná, tak i záporná, podle toho, na které straně od počátku osy se bod nachází. Je-li hmotný bod přímo v počátku, je jeho souřadnice nulová. Kladným směrem osy rozumíme směr, ve kterém souřadnice roste, opačný směr je záporný.

Posunutí

Posunutí Δx hmotného bodu je definováno jako změna jeho polohy:

$$\Delta x = x_2 - x_1. \tag{2.1}$$

Posunutí je vektorová veličina. Při jednorozměrném pohybu je kladné, pokud se hmotný bod posunul v kladném směru osy x, v opačném případě je záporné.

Průměrná rychlost

Při přesunutí hmotného bodu z polohy x_1 do polohy x_2 za dobu $\Delta t = t_2 - t_1$ je jeho *průměrná rychlost*

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.2}$$

Znaménko průměrné rychlosti $\overline{v_x}$ určuje směr pohybu ($\overline{v_x}$ je vektorová veličina). Průměrná rychlost nezávisí na trajektorii, kterou hmotný bod při svém pohybu skutečně prošel, ale pouze na výchozí a koncové poloze.

V grafu závislosti polohy na čase $x(t)$ je průměrná rychlost v časovém intervalu Δt rovna směrnici přímky spojující krajní body části křivky vymezené tímto časovým intervalem.

Průměrná velikost rychlosti

Průměrná velikost rychlosti hmotného bodu závisí na skutečně uražené dráze v daném časovém intervalu:

$$\overline{v} = \frac{\text{skutečně uražená dráha}}{\text{celá doba pohybu}}. \tag{2.3}$$

Průměrná velikost rychlosti *není totéž jako* velikost průměrné rychlosti.

Okamžitá rychlost

Budeme-li zmenšovat Δt v rovnici (2.2) bez omezení k nule, bude se průměrná rychlost $\overline{v_x}$ limitně blížit k jisté hodnotě v_x, kterou nazýváme *okamžitá rychlost* (zjednodušeně jen **rychlost**) hmotného bodu v daném okamžiku. Je tedy

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{2.4}$$

Okamžitá rychlost je rovna směrnici tečny vedené ke grafu funkce $x(t)$ v bodě, který odpovídá danému okamžiku t.

Průměrné zrychlení

Průměrné zrychlení je definováno jako poměr změny rychlosti Δv_x a délky časového intervalu Δt, během něhož k uvedené změně došlo:

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}. \tag{2.7}$$

Znaménko zrychlení $\overline{a_x}$ určuje jeho směr.

Okamžité zrychlení

Okamžité zrychlení (zjednodušeně jen **zrychlení**) získáme ze zrychlení průměrného analogickým limitním přechodem, jako v případě definice okamžité rychlosti:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}. \tag{2.8}$$

Zrychlení je také druhou derivací polohy $x(t)$ podle času:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}. \tag{2.9}$$

V grafu závislosti $v_x(t)$ je zrychlení a_x v okamžiku t dáno směrnicí tečny ke grafu sestrojené v bodě, který tomuto okamžiku odpovídá.

Rovnoměrně zrychlený pohyb

Na obr. 2.9 jsou zakresleny závislosti $x(t)$, $v_x(t)$ a $a_x(t)$ pro velmi důležitý případ (přímočarého) pohybu, totiž pohybu s konstantním zrychlením a_x. Tento pohyb nazýváme **rovnoměrně zrychlený**. Je popsán pěti rovnicemi shrnutými v tab. 2.1:

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \tag{2.11}$$

$$x - x_0 = v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2, \tag{2.15}$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0), \tag{2.16}$$

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t, \tag{2.17}$$

$$x - x_0 = v_x t - \tfrac{1}{2} a_x t^2. \tag{2.18}$$

Není-li zrychlení konstantní, pak tyto rovnice *neplatí*.

* Další typy jsou c (angl. *charm* = půvabný), s (angl. *strange* = podivný), t (angl. *top* = vršek) a b (angl. *bottom* = spodek).

Tíhové zrychlení

Důležitými a častými případy rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu jsou volný pád a svislý vrh tělesa v blízkosti zemského povrchu. Rovnice popisující obecný rovnoměrně zrychlený pohyb platí i pro tyto případy, je však výhodné je mírně upravit: (1) Polohu tělesa určujeme na svislé souřadnicové ose y orientované kladným směrem vzhůru. (2) Zrychlení a_y nahradíme hodnotou $-g$, kde g je velikost tíhového zrychlení. V blízkosti povrchu Země je $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Svislý vrh je popsán rovnicemi (2.21) až (2.25).

Stavba atomů

Všechny látky se skládají z atomů, které jsou tvořeny velmi hutným **jádrem** obklopeným lehkými **elektrony**. Jádro je složeno z neutronů a protonů. Různé prvky se navzájem liší počtem protonů v jádře. Atomy se stejným počtem protonů, ale odlišným počtem neutronů, se nazývají **izotopy** daného prvku.

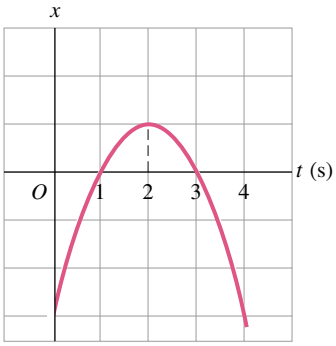
Kvarky a leptony

Elektrony se chovají jako částice bez vnitřní struktury. Protony a neutrony jsou složeny z ještě elementárnějších částic, které nazýváme **kvarky**. V současnosti je známo šest druhů kvarků a ke každému z nich existuje antičástice. Elektrony patří do skupiny **leptonů**, zahrnující rovněž šest druhů. Ke každému leptonu existuje antičástice.

OTÁZKY

1. (a) Může mít těleso současně nulovou rychlost a nenulové zrychlení? (b) Může se těleso pohybovat proměnnou rychlostí, jejíž velikost je konstantní? (c) Je možné, aby se směr pohybu tělesa změnil v opačný, má-li těleso konstantní zrychlení? (d) Může se velikost rychlosti tělesa zvyšovat za současného poklesu velikosti jeho zrychlení?

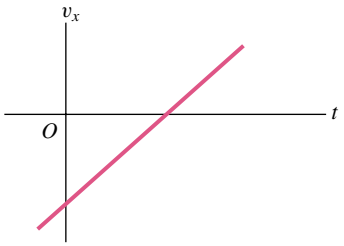
2. Na obr. 2.15 je zakreslen graf časové závislosti polohy tělesa $x(t)$. (a) Jaké je znaménko x-ové souřadnice tělesa v okamžiku $t = 0$? Rozhodněte, zda je v okamžicích (b) $t = 1\,\mathrm{s}$, (c) $t = 2\,\mathrm{s}$ a (d) $t = 3\,\mathrm{s}$ rychlost tělesa kladná, záporná, nebo nulová. (e) Kolikrát (během zobrazeného časového intervalu) prošlo těleso počátkem soustavy souřadnic $x = 0$?



Obr. 2.15 Otázka 2

3. Hmotný bod se pohybuje podél osy x s konstantním zrychlením. V okamžiku $t_0 = 0$ je jeho poloha určena souřadnicí $x_0 = -20\,\mathrm{m}$. Sledujme znaménko jeho počáteční rychlosti v_0 (v čase t_0) a znaménko jeho zrychlení. Mohou nastat čtyři případy: (1) +, +, (2) +, −, (3) −, +, (4) −, −. (a) Ve kterém z nich se rychlost hmotného bodu v jistém okamžiku $t > 0$ anuluje? (b) Ve kterém z případů bod s jistotou projde počátkem soustavy souřadnic? (c) Ve kterém z nich počátkem nikdy neprojde? Ve všech částech úlohy uvažujte pouze o kladných hodnotách časové proměnné t.

4. Na obr. 2.16 je zakreslena časová závislost rychlosti částice pohybující se podél osy x. (a) Jaký je počáteční směr jejího pohybu? (b) Kterým směrem se bude částice pohybovat po velmi dlouhé době? (c) Je v některém okamžiku její rychlost nulová? (d) Určete znaménko jejího zrychlení. (e) Je její zrychlení konstantní nebo proměnné?



Obr. 2.16 Otázka 4

5. V následujících čtyřech situacích je zadána počáteční a výsledná rychlost hmotného bodu: (a) $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (b) $-2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (c) $-2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $-3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (d) $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $-3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Velikost zrychlení je ve všech případech stejná. Uspořádejte situace sestupně podle velikosti posunutí hmotného bodu, ke kterému došlo během sledované změny jeho rychlosti.

6. Následující vztahy popisují čtyři případy časové závislosti rychlosti tělesa: (a) $v_x = 3$; (b) $v_x = 4t^2 + 2t - 6$; (c) $v_x = 3t - 4$; (d) $v_x = 5t^2 - 3$. Ve kterých z nich lze pro popis pohybu tělesa použít vztahů z tab. 2.1?

7. Z horkovzdušného balonu stoupajícího se zrychlením $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ vypadlo jablko. (a) Určete zrychlení jablka vůči Zemi. (b) Jaká je rychlost jablka (velikost a směr) bezprostředně po jeho upuštění, je-li v tom okamžiku rychlost balonu rovna $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

8. (a) Nakreslete závislosti $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$ popisující pohyb jablka, které vyhodíme svisle vzhůru z hrany útesu. Při pádu jablko útes těsně míjí a padá podél něj dolů. (b) Do grafů získaných v části (a) zakreslete tytéž veličiny, tj. $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$, pro případ, že jsme jablko z hrany útesu pouze volně vypustili.

9. Míč, který jsme vyhodili z hrany skalního útesu svisle vzhůru rychlostí o velikosti v_0, dopadl na zem pod úrovní útesu. Rozhodněte, zda by rychlost při dopadu míče byla větší, menší či

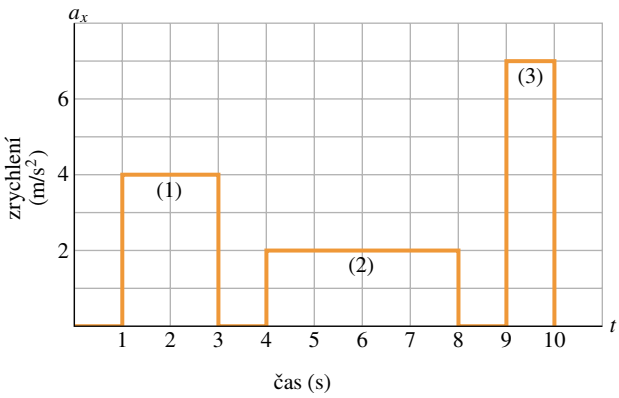
stejná jako v prvém případě, kdybychom jej hodili svisle dolů stejně velkou rychlostí v_0? (*Tip*: Použijte rovnici (2.23).)

10. Řidička jede v autě rychlostí 100 km/h. Náhle si uvědomí, že už už dohání autobus, který jede stejným směrem rychlostí 60 km/h. Musí začít brzdit. Jaká může být nejvyšší rychlost jejího auta v okamžiku, kdy autobus dostihne, nemá-li dojít ke srážce? (Příprava na úlohu 57.)

11. Motocyklista stojící v místě o souřadnici $x = 0$ se začne rozjíždět v okamžiku $t = 0$. Jeho zrychlení má konstantní velikost 2,0 m·s^{-2} a míří podél kladné osy x. O dvě sekundy později projíždí bodem $x = 0$ automobil, který jede stejným směrem. Jeho rychlost má v tomto okamžiku velikost 8 m·s^{-1}. Auto zvyšuje svou rychlost s konstantním zrychlením 3,0 m·s^{-2}. Zapište dvojici rovnic, jejichž řešením lze určit polohu místa, v němž řidič auta předjede motocyklistu. (Příprava na úlohu 56.)

12. Na obr. 2.17 je znázorněna časová závislost zrychlení částice $a_x(t)$. Částice je postupně urychlována ve třech fázích svého pohybu. Seřaďte jednotlivé fáze sestupně podle přírůstku rychlosti.

13. Dítě upustilo z balkonu dva stejné míče v časovém odstupu 1 s. Rozhodněte, zda se během pádu míčů bude vzdálenost mezi nimi zvětšovat, zmenšovat, nebo zůstane stejná.



Obr. 2.17 Otázka 12

CVIČENÍ & ÚLOHY

Úkolem některých cvičení je nakreslit graf časové závislosti polohy, rychlosti nebo zrychlení. Postačí jen schematický náčrtek, vždy je však třeba pečlivě popsat osy a zřetelně odlišit přímé a zakřivené části grafu. Při kreslení grafu je možné použít počítač nebo programovatelnou kalkulačku.

ODST. 2.3 Průměrná rychlost

1C. Carl Lewis uběhne sprinterskou trať 100 m přibližně za 10 s. Bill Rodgers dokáže absolvovat maraton (42 km 194 m) asi za 2 h 10 min. (a) Jaké jsou průměrné velikosti rychlostí obou běžců? (b) Za jak dlouho by Lewis uběhl maraton, kdyby vydržel po celou dobu sprintovat?

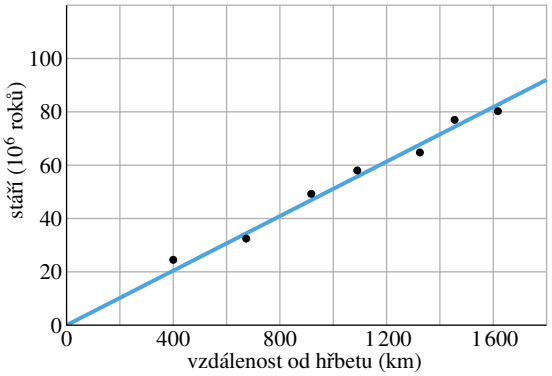
2C. Při silném kýchnutí zavře člověk oči asi na 0,50 s. Jakou vzdálenost urazí za tuto dobu automobil, jede-li rychlostí 90 km/h?

3C. Průměrné mrknutí trvá asi 100 ms. Jakou dráhu urazí stíhačka Mig 25 při mrknutí pilota, letí-li rychlostí 3 380 km/h?

4C. Nadhazovač v baseballu dokáže vyhodit míček vodorovnou rychlostí 160 km/h. Za jak dlouho míček doletí k pálkaři vzdálenému 18,4 m?

5C. Hornina uvolněná z oceánského hřbetu se pomalu vzdaluje od jeho paty přibližně konstantní rychlostí. Graf na obr. 2.18 znázorňuje tuto vzdálenost jako funkci času. Vypočtěte rychlost posuvu horniny v cm za rok.

6C. O kolik minut se zkrátila doba jízdy po dálnici z Prahy do Brna po zvýšení rychlostního limitu ze 110 km/h na 130 km/h? Předpokládejte, že řidič projede celou trasu nejvyšší povolenou rychlostí.



Obr. 2.18 Cvičení 5

7C. S použitím tabulek v dodatku D určete rychlost světla ($3{\cdot}10^8$ m·s^{-1}) v mílích za hodinu, stopách za sekundu, světelných rocích za rok.

8C. Automobil jede po rovné silnici rychlostí 30 km/h. Poté, co urazil dráhu 40 km, zvýší rychlost na 60 km/h a pokračuje v jízdě dalších 40 km. (a) Jaká je průměrná rychlost automobilu na celé osmdesátikilometrové trati? (Zvolte soustavu souřadnic tak, aby osa x byla souhlasně rovnoběžná se směrem jízdy automobilu a určete průměrnou rychlost včetně znaménka.) (b) Jaká je průměrná velikost rychlosti automobilu? (c) Určete průměrnou rychlost graficky (pomocí grafu $x(t)$).

9Ú. Vypočtěte průměrnou rychlost pohybu člověka ve dvou případech: (a) Chůze 72 m rychlostí 1,2 m·s^{-1} a běh 72 m rychlostí 3 m·s^{-1}. (b) Chůze 1 min rychlostí 1,2 m·s^{-1} a běh 1 min rychlostí 3 m·s^{-1}. (c) V obou případech určete průměrnou rychlost graficky (z grafu $x(t)$).

10Ú. Automobil jede do kopce rychlostí 40 km/h. Nahoře ne-

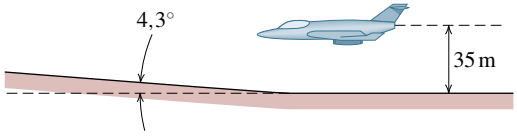
čeká a vrací se stejnou cestou zpět, tentokrát rychlostí 60 km/h. Určete průměrnou velikost rychlosti pro celou trasu.

11Ú. Nákladní automobil jede z Brna do Olomouce (77 km). V první polovině jízdní *doby* udržuje konstantní rychlost o velikosti 56 km/h, ve druhé polovině pak 89 km/h. Na zpáteční cestě projede první polovinu *vzdálenosti* rychlostí o velikosti 56 km/h a druhou rychlostí o velikosti 89 km/h. Jaká je průměrná velikost rychlosti jízdy (a) z Brna do Olomouce, (b) z Olomouce do Brna a (c) na celé cestě? (d) Jaká je průměrná rychlost (vektor) na celé cestě? Zvolte soustavu souřadnic tak, aby trasa z Brna do Olomouce vedla podél kladné osy x. Nakreslete graf $x(t)$ pro tuto část cesty a určete z něj průměrnou rychlost.

12Ú. Poloha tělesa pohybujícího se po ose x je dána vztahem $x = 3t - 4t^2 + t^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. (a) Jaká je poloha tělesa v okamžicích $t = 1\,\text{s}$, $2\,\text{s}$, $3\,\text{s}$ a $4\,\text{s}$? (b) Jaké je posunutí tělesa v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 4\,\text{s}$? (c) Jaká je průměrná rychlost v časovém intervalu od $t = 2\,\text{s}$ do $t = 4\,\text{s}$? (d) Nakreslete graf funkce $x(t)$ pro $0 \leqq t \leqq 4\,\text{s}$ a použijte jej pro grafické řešení úkolu (c).

13Ú. Poloha hmotného bodu je dána vztahem $x = 9{,}75 + 1{,}50t^3$, kde x je v centimetrech a t v sekundách. Určete (a) průměrnou rychlost hmotného bodu v časovém intervalu od $t = 2{,}00\,\text{s}$ do $t = 3{,}00\,\text{s}$, okamžitou rychlost v okamžicích (b) $t = 2{,}00\,\text{s}$, (c) $t = 3{,}00\,\text{s}$ a (d) $t = 2{,}50\,\text{s}$, (e) okamžitou rychlost v bodě ležícím uprostřed mezi polohami, v nichž se hmotný bod nachází v okamžicích $t = 2{,}00\,\text{s}$ a $t = 3{,}00\,\text{s}$. (f) Předchozí úkoly vyřešte i graficky. Použijte grafu časové závislosti polohy hmotného bodu $x(t)$.

14Ú. Při testování radarové navigace letí tryskové letadlo ve výšce 35 m nad zemí. Náhle dorazí k místu, kde se terén počíná zvedat s mírným, snadno přehlédnutelným, sklonem 4,3° (obr. 2.19). V jakém nejzazším okamžiku musí být dokončena korekce letu, aby letadlo nenarazilo na zem? Rychlost letounu je 1 300 km/h.



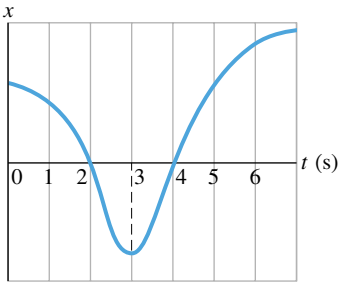
Obr. 2.19 Úloha 14

15Ú. Dva vlaky jedou po přímé trati proti sobě, každý rychlostí 30 km/h. V okamžiku, kdy jsou od sebe vzdáleny 60 km, vyletí od jednoho z nich pták rychlostí 60 km/h a zamíří k druhému. Jakmile k němu doletí, obrátí se a vrací se zpět k prvnímu vlaku. Zde se opět obrátí a takto létá, dokud se vlaky nesetkají. Nezabývejte se pohnutkami, které vedou ptáka právě k tomuto pohybu a určete, (a) kolikrát pták přelétne vzdálenost mezi oběma vlaky a (b) jakou celkovou dráhu při tom urazí?

ODST. 2.4 Okamžitá rychlost

16C. (a) Poloha částice je dána rovnicí $x = 4 - 12t + 3t^2$ (kde t je v sekundách a x v metrech). Pro okamžik $t = 1\,\text{s}$ určete (a) rychlost částice, (b) směr jejího pohybu a (c) velikost její rychlosti. (d) Rozhodněte, zda je velikost rychlosti částice pro $t > 1\,\text{s}$ větší či menší než pro $t = 1\,\text{s}$. Následující dvě otázky se pokuste zodpovědět bez výpočtu. (e) Existuje okamžik, ve kterém má částice nulovou rychlost? (f) Nastane pro $t > 3\,\text{s}$ okamžik, kdy se směr pohybu částice obrátí?

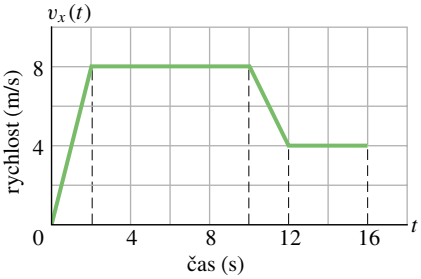
17C. Obr. 2.20 popisuje pohyb pásovce, který běhá podél osy x střídavě doleva (záporný směr) a doprava. (a) Je pásovec v některém okamžiku (kterém) nalevo od počátku osy x? Je v některém okamžiku (kterém) jeho rychlost (b) záporná, (c) kladná, nebo (d) nulová?



Obr. 2.20 Cvič. 17

18C. Myš je uvězněna v úzkém průchodu (osa x) a hledá cestu ven. Při tom zmateně pobíhá sem a tam: (1) běží vlevo (v záporném směru osy) konstantní rychlostí o velikosti $1{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, (2) postupně zpomaluje až na rychlost $0{,}6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, (3) opět zrychluje na $2{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ a stále běží doleva. (4) Zpomaluje do zastavení, rozběhne se doprava a dosáhne rychlosti o velikosti $1{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Nakreslete graf $x(t)$. Určete časové intervaly, v nichž je sklon křivky grafu největší a nejmenší.

19Ú. Jakou vzdálenost urazí za 16 s běžec, jehož rychlost $v_x(t)$ je v závislosti na čase popsána grafem na obr. 2.21?

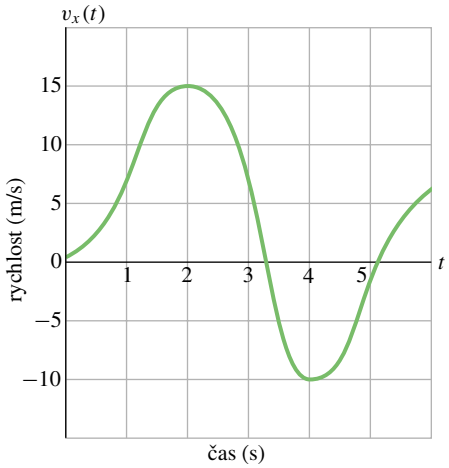


Obr. 2.21 Úloha 19

ODST. 2.5 Zrychlení

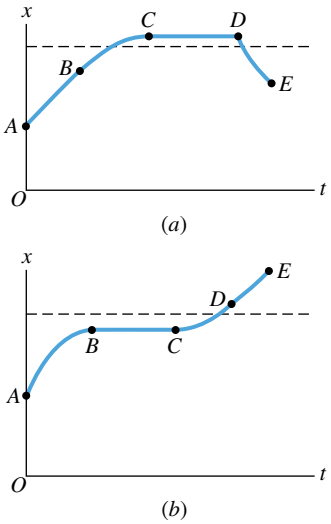
20C. Částice má počáteční rychlost $18\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. V průběhu následujících 2,4 s se její rychlost změní tak, že dosáhne velikosti $30\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, míří však v opačném směru. (a) Jaká je velikost průměrného zrychlení částice v tomto časovém intervalu? (b) Průměrné zrychlení určete také pomocí grafu $v_x(t)$.

21C. Těleso se pohybuje po přímce a jeho rychlost je popsána grafem na obr. 2.22. Načrtněte graf závislosti zrychlení tělesa na čase.



Obr. 2.22 Cvičení 21

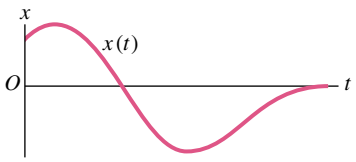
22C. Časová závislost polohy částice pohybující se podél osy x je zadána grafem na obr. 2.23a. (a) Ve kterém z úseků AB, BC, CD a DE je rychlost v_x kladná, záporná, nebo nulová? Ve kterém z nich je zrychlení a_x kladné, záporné, nebo nulové? (Neuvažujte krajní body intervalů). (b) Je v některém ze zmíněných úseků zrychlení tělesa zjevně proměnné? (c) Změní se nějak odpovědi na předchozí otázky, posunou-li se souřadnicové osy tak, že osa t splyne s přerušovanou čarou?



Obr. 2.23
Cvičení 22 a 23

23C. Zodpovězte otázky ze cvičení 22 pro případ pohybu znázorněného na obr. 2.23b.

24C. Částice se pohybuje podél osy x. Časový průběh její polohy $x(t)$ je zadán grafem na obr. 2.24. Nakreslete grafy $v_x(t)$ a $a_x(t)$.



Obr. 2.24
Cvičení 24

25C. Nakreslete schematicky možný tvar grafu časové závislosti polohy hmotného bodu $x(t)$, pohybujícího se podél osy x tak, že v okamžiku $t = 1$ s je (a) jeho rychlost nulová a zrychlení kladné, (b) rychlost nulová a zrychlení záporné, (c) rychlost záporná a zrychlení kladné, (d) rychlost záporná a zrychlení záporné. (e) Ve kterém z těchto případů velikost rychlosti v okamžiku $t = 1$ s roste?

26C. Uvažujme veličiny definované výrazy $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2$ a $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$. (a) Představují tyto výrazy tutéž veličinu? (b) Jaké jsou jejich jednotky v soustavě SI?

27C. Částice se pohybuje podél osy x. Její poloha je popsána rovnicí $x = 50t + 10t^2$, kde x je zadáno v metrech a t v sekundách. Vypočtěte (a) průměrnou rychlost částice během prvních tří sekund jejího pohybu, (b) rychlost částice v okamžiku $t = 3$ s, (c) zrychlení částice v okamžiku $t = 3$ s. (d) Zodpovězte otázku (a) pouze užitím grafu $x(t)$. (e) Pomocí téhož grafu řešte i úkol (b). (f) Nakreslete graf $v_x(t)$ a použijte jej k řešení úkolu (c).

28C. Poloha hmotného bodu je dána rovnicí $x = 20t - 5t^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. (a) Je v některém okamžiku rychlost hmotného bodu nulová? V kladném případě tento okamžik určete. (b) Kdy je zrychlení a_x hmotného bodu nulové? (c) Kdy je a_x záporné, kladné? (d) Nakreslete grafy $x(t)$, $v_x(t)$ a $a_x(t)$.

29Ú. Muž čeká na jednom místě od okamžiku $t = 0$ do $t = 5{,}00$ min a potom jde svižným krokem stále jedním směrem. Jeho rychlost je konstantní a má velikost 2,20 m·s^{-1}. Chůze trvá 5 minut, tj. od okamžiku $t = 5{,}00$ min do $t = 10{,}0$ min. Určete průměrnou rychlost a průměrné zrychlení pohybu člověka v následujících časových intervalech: (a) od 2,0 min do 8,0 min, (b) od 3,0 min do 9,0 min. (c) Nakreslete grafy $x(t)$ a $v_x(t)$ a vyřešte úkoly (a) a (b) také graficky.

30Ú. Poloha tělesa závisí na čase vztahem $x = 2{,}0t^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. Určete (a) průměrnou rychlost a (b) průměrné zrychlení tělesa v časovém intervalu od $t = 1{,}0$ s do $t = 2{,}0$ s. Vypočtěte jeho (c) okamžitou rychlost a (d) okamžité zrychlení v okamžicích $t = 1{,}0$ s a $t = 2{,}0$ s. (e) Porovnejte průměrné a okamžité hodnoty odpovídajících si veličin a rozdíly vysvětlete. (f) Řešte úkoly (a) až (d) pomocí grafů $x(t)$ a $v_x(t)$.

31Ú. Při jedné videohře se světelná stopa na monitoru pohybuje podle rovnice $x = 9{,}00t - 0{,}750t^3$, kde x je vzdálenost od levého okraje monitoru měřená v centimetrech a t je čas v sekundách. Jakmile stopa dorazí k levému ($x = 0$) nebo pravému ($x = 15{,}0$ cm) okraji obrazovky, čas t se vynuluje a pohyb stopy se opakuje v souhlasu se zadanou časovou závislostí $x(t)$. (a) Určete, ve kterém okamžiku od počátku pohybu se rychlost stopy anuluje. (b) Ve kterém místě obrazovky k tomu dojde? (c) Jaké je v tom okamžiku zrychlení stopy? (d) Kterým směrem se stopa pohybovala bezprostředně před tím, než dosáhla nulové rychlosti? (e) Kterým směrem potom její pohyb pokračoval? (f) Za jakou dobu od počátku pohybu dorazila stopa poprvé k okraji obrazovky?

32Ú. Poloha částice, pohybující se podél osy x, závisí na čase vztahem $x = at^2 - bt^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. (a) Jaký je fyzikální rozměr konstant a a b? Předpokládejme, že tyto konstanty mají v jednotkách SI hodnoty $a = 3{,}0$ a $b = 1{,}0$. (b) Určete okamžik, v němž má souřadnice x částice největší hodnotu. (c) Jakou vzdálenost urazí částice během prvních 4,0 sekund pohybu? (d) Vypočtěte její posunutí v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 4{,}0$ s. (e) Určete její rychlost v okamžicích $t = 1{,}0$ s; 2,0 s; 3,0 s a 4,0 s. (f) Jaké je v těchto okamžicích její zrychlení?

ODST. 2.6 Rovnoměrně zrychlený pohyb: speciální případ

33C. Pohyb hlavy útočícího chřestýše je tak prudký, že její zrychlení může dosáhnout až hodnoty $50\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Představme si, že by takového zrychlení mohl dosáhnout rozjíždějící se automobil. Za jakou dobu by dosáhl rychlosti 100 km/h, pokud by byl zpočátku v klidu?

34C. Těleso se pohybuje s konstantním zrychlením $+3{,}2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. V jistém okamžiku má rychlost $+9{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Zjistěte jeho rychlost o (a) 2,5 s dříve, (b) 2,5 s později.

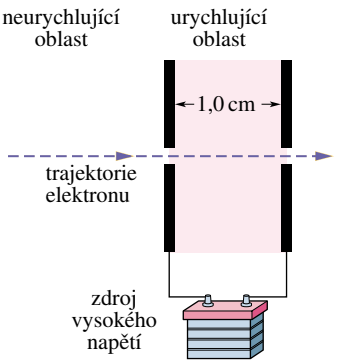
35C. Automobil plynule zvýší svou rychlost z 25 km/h na 55 km/h během 0,50 min. Cyklista se rovnoměrně rozjíždí z klidu a dosáhne rychlosti 30 km/h také za 0,50 min. V obou případech určete zrychlení.

36C. Kosmická loď se pohybuje s konstantním zrychlením $9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, aby se podmínky pro pobyt posádky co nejvíce blížily pozemským. (a) Za jak dlouho dosáhne loď jedné desetiny rychlosti světla ve vakuu, startuje-li z klidu? Jakou dráhu přitom urazí?

37C. Startující tryskové letadlo musí mít před vzlétnutím rychlost nejméně 360 km/h. S jakým nejmenším konstantním zrychlením může startovat na rozjezdové dráze dlouhé 1,8 km?

38C. Elementární částice mion μ^- vlétne do elektrického pole rychlostí $5{,}00{\cdot}10^6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. V něm se rovnoměrně zpomaluje se zrychlením o velikosti $1{,}24{\cdot}10^{14}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (a) Jakou dráhu urazí do okamžiku zastavení? (b) Nakreslete grafy $x(t)$ a $v_x(t)$ charakterizující její pohyb.

39C. Elektron s počáteční rychlostí $1{,}50{\cdot}10^5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je v úseku své trajektorie dlouhém 1,0 cm urychlován elektrickým polem (obr. 2.25). V okamžiku, kdy pole opouští, má rychlost $5{,}70{\cdot}10^6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete jeho průměrné zrychlení v poli. (Zadání úlohy odpovídá reálné situaci v elektronových tryskách používaných v televizních obrazovkách a osciloskopech.)



Obr. 2.25
Cvičení 39

40C. Automobil jedoucí rychlostí 100 km/h začne rovnoměrně brzdit a zastaví na dráze 43 m. (a) Určete velikost jeho zrychlení v jednotkách SI a jednotkách g. (b) Jak dlouho trvá brzdění? Kolikrát je doba brzdění delší než reakční doba řidiče, která činí 400 ms?

41C. 19. března 1954 dosáhl plukovník John P. Stapp pozemního rychlostního rekordu při jízdě na raketových saních. Rekordní rychlost měla velikost 1 020 km/h. Poté byly sáně zabrzděny za dobu 1,4 s (obr. 2.8). Jakému zrychlení byl jezdec vystaven? Výsledek vyjádřete v jednotkách g.

42C. Na kvalitní suché silnici může automobil s neopotřebenými pneumatikami brzdit se zrychlením o velikosti $4{,}92\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (a) Za jak dlouho automobil zastaví, je-li jeho počáteční rychlost $24{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? (b) Jak dlouhá bude brzdná dráha? (c) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ během brzdění.

43C. Při zkoumání fyziologických účinků velkého zrychlení na lidský organismus se používá raketových saní. Saně se pohybují přímočaře a při klidovém startu mohou dosáhnout rychlosti 1 600 km/h za pouhých 1,8 s. Za předpokladu, že se saně pohybují rovnoměrně zrychleně, určete (a) jejich zrychlení v jednotkách g a (b) dráhu potřebnou k dosažení maximální rychlosti.

44C. Automobil může brzdit se zrychlením $5{,}2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (a) Za jak dlouho lze vůz zabrzdit z rychlosti 130 km/h na předepsaný rychlostní limit 90 km/h poté, co řidič zahlédne dopravního policistu? (Výsledek ukáže, že je zcela beznadějné před policejním radarem brzdit.) (b) Nakreslete grafy $x(t)$ a $v_x(t)$, charakterizující pohyb automobilu.

45C. Motocykl se pohybuje rychlostí $30\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ v okamžiku, kdy řidič začne rovnoměrně brzdit. Za 3,0 s se jeho rychlost sníží na $15\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jakou dráhu urazí motocykl od počátku brzdění až do úplného zastavení?

46Ú. Sportovní automobil typu „hot rod“* startující z klidu může dosáhnout rychlosti 60 km/h za 5,4 s. (a) Určete odpovídající průměrné zrychlení v $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (b) Jakou dráhu automobil urazí za 5,4 s, je-li jeho zrychlení konstantní? (c) Za jak dlouho by urazil vzdálenost 0,25 km, kdyby jeho zrychlení bylo po celou dobu jízdy konstantní a mělo velikost vypočtenou v části (a)?

47Ú. Rychlík stojí ve stanici. V okamžiku $t = 0$ se začne rozjíždět s konstantním zrychlením a v okamžiku t_1 má rychlost $30\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Poté, co za dobu τ urazí dalších 160 m, zvýší se jeho rychlost na $50\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Vypočtěte (a) zrychlení vlaku, (b) dobu τ, (c) dobu t_1, potřebnou k dosažení rychlosti $30\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, a (d) vzdálenost, kterou za tuto dobu urazí. (e) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ od počátku pohybu vlaku.

* Výkonný automobil většinou amatérské konstrukce za použití levných dílů z vrakovišť. Cílem konstruktéra je docílit vedle dobrého výkonu motoru i co nejneobvyklejšího vzhledu. Vozy jsou oblíbené téměř výhradně ve Spojených státech, kde se účastní závodů ve zrychlení s pevným startem na vzdálenosti 1/4 míle nebo 1 míle.

48Ú. Automobil jede rychlostí 56,0 km/h. Řidič zpozoruje na silnici překážku a ve vzdálenosti 24,0 m před ní začne rovnoměrně brzdit. Auto narazí do překážky za 2,00 s od tohoto okamžiku. (a) Určete zrychlení automobilu. (b) Jakou rychlostí narazí automobil do překážky?

49Ú. Automobil se pohybuje s konstantním zrychlením a urazí vzdálenost 60,0 m za 6,00 s. Na konci tohoto úseku jede rychlostí 15 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jakou rychlost měl na začátku šedesátimetrového úseku? (b) Jaké je jeho zrychlení? (c) V jaké vzdálenosti před měřeným úsekem se auto začalo rozjíždět? (d) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ od počátku pohybu automobilu.

50Ú. Dvě zastávky metra jsou vzdálené 1 100 m. Souprava se první polovinu cesty rozjíždí s konstantním zrychlením $+1,2\ m \cdot s^{-2}$ a ve druhé polovině brzdí se zrychlením $-1,2\ m \cdot s^{-2}$. (a) Jaký je celkový čas jízdy mezi stanicemi a (b) největší rychlost soupravy? (c) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ pro celou jízdu.

51Ú. Vyžaduje-li dopravní situace, aby řidič náhle zastavil, nezačne vůz brzdit hned. Od okamžiku, kdy si řidič uvědomí nutnost zabrzdit, uplyne nejprve jistá reakční doba řidiče a brzdového systému a teprve poté automobil rovnoměrně brzdí. Určete (a) celkovou reakční dobu a (b) velikost zrychlení automobilu při rovnoměrném brzdění z těchto údajů: Od okamžiku, kdy si řidič automobilu jedoucího rychlostí 80 km/h uvědomil nutnost zastavit, urazil ještě dráhu 57 m. Při rychlosti 48 km/h mu stačila dráha 24 m.

52Ú. Vůz se blíží ke světelné křižovatce, když se náhle rozsvítí oranžové světlo. Vůz jede největší povolenou rychlostí 50 km/h a může brzdit se zpomalením $5,2\ m \cdot s^{-2}$. Celková reakční doba řidiče a brzdového systému je $T = 0,75$ s. Řidič nechce vjet do křižovatky na červenou. Má začít brzdit nebo pokračovat v jízdě nezměněnou rychlostí? Vzdálenost vozu od křižovatky v okamžiku změny světelné signalizace je (a) 40 m, doba, po kterou svítí oranžové světlo, je 2,8 s, (b) 32 m a 1,8 s.

53Ú. Vzdálenost potřebná pro náhlé zastavení vozidla je dána součtem „reakční vzdálenosti“ (součin počáteční rychlosti a reakční doby) a „brzdné vzdálenosti“, kterou vozidlo urazí během brzdění. Typické hodnoty těchto veličin jsou uvedeny v následující tabulce:

Počáteční rychlost ($m \cdot s^{-1}$)	Reakční vzdálenost (m)	Brzdná vzdálenost (m)	Celková vzdálenost (m)
10	7,5	5,0	12,5
20	15	20	35
30	22,5	45	67,5

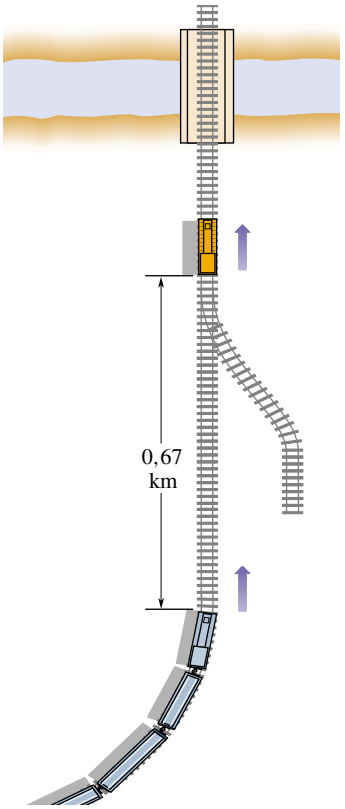
(a) Jaká reakční doba byla použita při výpočtu této tabulky? (b) Jakou celkovou vzdálenost automobil urazí, má-li náhle zastavit při počáteční rychlosti 25 $m \cdot s^{-1}$?

54Ú. Největší povolené zrychlení soupravy podzemní dráhy je $1,34\ m \cdot s^{-2}$. (a) Jaká je nejvyšší rychlost, které smí souprava dosáhnout při jízdě mezi stanicemi vzdálenými 806 m? (b) Jaká je odpovídající doba jízdy? (c) Předpokládejte, že souprava stojí ve stanici 20 s. Určete její maximální průměrnou rychlost v časovém intervalu mezi výjezdy ze dvou sousedních stanic. (d) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$.

55Ú. Délka dráhy kabiny výtahu v newyorském mrakodrapu Marquis Marriott je 190 m. Kabina se pohybuje nejvýše rychlostí 305 $m \cdot min^{-1}$. Její zrychlení při rozjezdu i brzdění má velikost $1,22\ m \cdot s^{-2}$. (a) Jakou vzdálenost urazí kabina od chvíle, kdy se začne rozjíždět, do okamžiku, kdy dosáhne nejvyšší rychlosti? (b) Za jak dlouho vyjede z dolního podlaží až nahoru, započteme-li rozjezd i brzdění?

56Ú. Osobní automobil se začne rozjíždět se zrychlením $a = 2,2\ m \cdot s^{-2}$ přesně v okamžiku, kdy se na semaforech rozsvítí zelená. Ve stejném okamžiku ho ve vedlejším pruhu předjíždí kamion jedoucí konstantní rychlostí 9,5 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jak daleko za semafory automobil opět předjede kamion? (b) Jaké rychlosti v tomto okamžiku dosáhne?

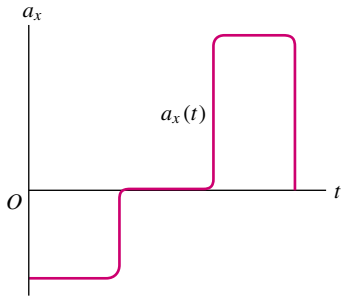
57Ú. Rychlík vyjíždí ze zatáčky rychlostí 160 km/h. Strojvůdce náhle spatří ve vzdálenosti 0,67 km lokomotivu, která jede po téže koleji stejným směrem rychlostí 29 km/h (obr. 2.26). Strojvůdce rychlíku začne okamžitě brzdit. (a) Určete nejmenší možné zpomalení rychlíku, při němž ještě nedojde ke srážce. (b) Okamžiku, kdy strojvůdce rychlíku zahlédl lokomotivu, přisoudíme hodnotu $t = 0$ a počátek osy x (tj. $x = 0$) zvolíme v místě, ve kterém se rychlík v tomto okamžiku nacházel. Nakreslete grafy časových závislostí $x(t)$ obou vlaků pro případ, že se tak tak podařilo srážku odvrátit.



Obr. 2.26 Úloha 57

58Ú. Dva vlaky jedou proti sobě po přímém úseku jednokolejné trati rychlostmi 72 km/h a 144 km/h. V okamžiku, kdy jsou od sebe vzdáleny 950 m, spatří oba strojvůdci protijedoucí vlak a začnou okamžitě brzdit se zrychlením o velikosti $1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Dojde ke srážce?

59Ú. Nakreslete graf $v_x(t)$ odpovídající grafu $a_x(t)$ z obr. 2.27.



Obr. 2.27 Úloha 59

ODST. 2.8 Svislý vrh

60C. Dělníkovi na stavbě spadl nešťastnou náhodou hasák a narazil na zem rychlostí $24\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Z jaké výšky padal? (b) Jak dlouho trval jeho pád? (c) Nakreslete grafy závislostí $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$.

61C. (a) Jakou rychlostí musíme svisle vyhodit míč, aby dosáhl výšky 50 m? (b) Za jak dlouho dopadne zpět na zem? (c) Nakreslete grafy závislostí $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$ popisující let míče. V prvních dvou z nich vyznačte okamžik, kdy je míč právě ve výšce 50 m.

62C. Kapka deště dopadne na zem z mraku ve výšce 1 700 m. Jakou rychlostí by dopadla, kdyby její let nebyl brzděn odporem vzduchu? Bylo by v tomto případě bezpečné setrvávat během bouře venku?

63C. Nákladní stavební výtah je upevněn na jediném laně. Lano se náhle přetrhne, když výtah stojí v nejvyšším patře budovy, ve výšce 120 m. (a) Jakou rychlostí dopadne kabina na zem? (b) Jak dlouho poletí? (c) Jakou rychlost bude mít právě v polovině vzdálenosti měřené od výchozího bodu k zemi? (d) Za jak dlouho urazí první polovinu této vzdálenosti?

64C. Zlý výrostek Hugo hází kamením svisle dolů ze střechy budovy vysoké 30 m. Počáteční rychlost kamene má velikost $12{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Za jak dlouho dopadne kámen na zem? (b) Jak velká bude jeho rychlost při dopadu?

65C. Ve výzkumném ústavu pro beztížný stav agentury NASA Lewis Research Center je i 145 m vysoká experimentální věž, z níž je vyčerpán vzduch. Jedním z experimentů, k nimž věž slouží, je volný pád koule o průměru 1 m, ve které jsou umístěny měřicí přístroje. (a) Jak dlouho trvá pád koule? (b) Jaká je její rychlost těsně před dopadem na záchytné zařízení ve spodní části věže? (c) Při záchytu je koule brzděna s průměrným zrychlením o velikosti $25g$ až do úplného zastavení. Jaká dráha je potřebná k zastavení koule?

66C. Model rakety poháněný hořícím palivem startuje svisle vzhůru. Nakreslete schematické grafy časových závislostí její polohy y, rychlosti v_y a zrychlení a_y. V grafech vyznačte, ve kterém místě došlo palivo, kdy model dosáhl největší výšky a kdy dopadl zpátky na zem.

67C. Kámen volně vypustíme z útesu vysokého 100 m. Za jakou dobu urazí (a) prvních 50 m dráhy, (b) druhých 50 m?

68Ú. Vyplašený pásovec vyskočí do výšky 0,544 m za 0,200 s (obr. 2.28). (a) Jaká je jeho počáteční rychlost? (b) Jaká je jeho rychlost v zadané výšce? (c) Jak vysoko ještě vyletí?



Obr. 2.28 Úloha 68

69Ú. Těleso padá z mostu, který je ve výšce 45 m nad hladinou řeky. Spadne přímo do loďky, která pluje pod mostem konstantní rychlostí. V okamžiku uvolnění tělesa na mostě byla loďka vzdálena právě 12 m od místa dopadu. Jaká je její rychlost?

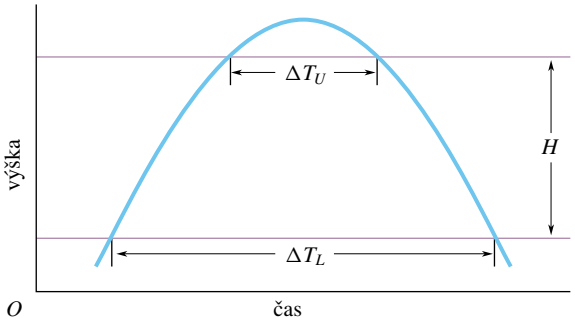
70Ú. Model rakety je odpálen svisle vzhůru a stoupá s konstantním zrychlením $4{,}00\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ po dobu 6,00 s. Pak dojde palivo a raketa letí bez pohonu. (a) Jaké maximální výšky dosáhne? (b) Jaká je celková doba jejího letu od startu až po pád na zem?

71Ú. Basketbalista, který doskakuje pod košem, vyskočí svisle do výšky 76 cm. Jak dlouho setrvává (a) blíže než 15 cm od nejvyššího bodu své dráhy, (b) blíže než 15 cm od podlahy? Výsledek tohoto výpočtu nám pomůže pochopit, proč se zdá, že basketbalista při výskoku chvíli visí ve vzduchu.

72Ú. V Národní fyzikální laboratoři v Anglii měřili tíhové

zrychlení g pomocí svislého vrhu tělesa ve vyčerpané trubici. Při letu byly registrovány průchody tělesa dvěma body v různých výškách dráhy letu (obr. 2.29). Označme ΔT_L dobu, která uplynula mezi dvěma průchody dolním bodem, ΔT_U dobu mezi průchody horním bodem a H svislou vzdálenost těchto dvou bodů. Ukažte, že

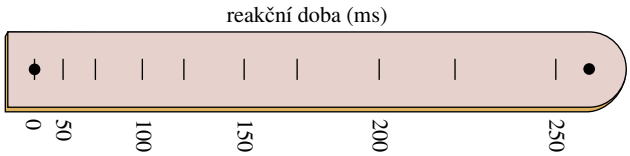
$$g = \frac{8H}{\Delta T_L^2 - \Delta T_H^2}.$$



Obr. 2.29 Úloha 72

73Ú. Koule z vlhké hlíny padá z výšky 15,0 m. Po dopadu na zem se po dobu 20 ms plasticky deformuje, než se její pohyb zcela zastaví. Jaké je průměrné zrychlení koule při této deformaci? (Při řešení nahraďte kouli hmotným bodem.)

74Ú. Z výšky h hodíme svisle *dolů* míč s počáteční rychlostí v_{0y}. (a) Jaká bude rychlost míče těsně před dopadem? (b) Za jak dlouho míč dopadne? (c) Jak se změní odpověď na otázky (a) a (b), vyhodíme-li míč svisle vzhůru z téže výšky stejnou rychlostí? Než začnete řešit příslušné rovnice, rozvažte předem, zda hodnoty získané v části úkolu (c) budou větší, menší či stejné jako výsledky úloh (a) a (b).



Obr. 2.30 Úloha 75

75Ú. Na obr. 2.30 je jednoduché zařízení pro měření reakční doby člověka. Je vyrobeno z pásku lepenky s nakresleným měřítkem a dvěma velkými tečkami. Reakční dobu si můžeme sami změřit takto: Náš pomocník uchopí pásek mezi palec a ukazováček v místě tečky umístěné na obr. 2.30 vpravo a drží jej měřítkem svisle dolů. Přiblížíme ruku k pásku tak, aby procházel mezi palcem a ukazováčkem právě v místě druhé tečky. Je třeba, aby palec a ukazováček byly co nejblíže u sebe, nesmíme se však pásku dotýkat. Náhle náš přítel pásek pustí a my se jej snažíme co nejrychleji chytit. Reakční dobu zjistíme podle značky v místě, kde se nám podaří pásek zachytit. (a) V jaké vzdálenosti od dolní tečky musí být nakreslena značka s údajem 50 ms? (b) V kolikrát větší vzdálenosti od dolní tečky musí být zakresleny značky s údaji 100 ms, 150 ms, 200 ms a 250 ms? (Myslíte, že například značka 100 ms je v dvojnásobné vzdálenosti od dolní tečky než značka 50 ms? Lze v odpovědích na otázku (b) najít nějakou zákonitost?)

76Ú. Žonglér vyhazuje míč do jisté výšky. Kolikrát výše musí míč vyhodit, aby jeho let trval dvojnásobnou dobu?

77Ú. Kámen je vržen svisle vzhůru. Při vzestupu míjí jistý bod A rychlostí v a další bod B rychlostí $\frac{1}{2}v$. Bod B je o 3,00 m výše než bod A. Určete (a) rychlost v a (b) největší výšku, do které kámen vyletí nad úroveň bodu B.

78Ú. Kvalitu tenisového míčku můžeme ověřit například tak, že zjišťujeme, jak skáče. Volně jej upustíme z výšky 4,00 m. Míč se odrazí a vyskočí do výšky 3,00 m. Jaké bylo průměrné zrychlení při odrazu, trval-li 10 ms? Odpor prostředí zanedbejte.

79Ú. Voda kape na podlahu ze sprchové růžice upevněné ve výšce 200 cm. Kapky padají v pravidelných intervalech. Právě v okamžiku dopadu první kapky začíná pád čtvrté. Jaká je poloha druhé a třetí kapky v tomto okamžiku?

80Ú. Olověná koule je vržena do jezera z plošiny umístěné 5,20 m nad hladinou. Koule dopadne na hladinu určitou rychlostí a začne se potápět. Klesá při tom ke dnu stejnou rychlostí, se kterou dopadla na hladinu. Na dno dosedne za 4,8 s od okamžiku, kdy byla z plošiny vypuštěna. (a) Jak je jezero hluboké? (b) Jaká je průměrná rychlost koule? Představme si, že vodu z jezera vypustili. Kouli vyhodíme ze stejné plošiny a požadujeme, aby na dno jezera dopadla opět za 4,8 s. Jaká musí být její počáteční rychlost?

81Ú. Těleso volně padá z výšky h. Za poslední sekundu pádu urazí dráhu $0,50h$. Určete (a) dobu pádu a (b) výšku h. Objasněte fyzikální význam obou kořenů kvadratické rovnice, jejíž řešení je součástí výpočtu.

82Ú. Dívka spadla ze střechy budovy vysoké 44 m a dopadla na plechovou konstrukci vzduchotechniky. Stropní stěna konstrukce se při tom promáčkla o 46 cm. Dívka pád přežila bez vážnějšího poranění. Předpokládejte, že její zrychlení v průběhu brzdění pádu bylo konstantní a určete je. Výsledek vyjádřete v jednotkách SI i v násobcích g.

83Ú. Kámen byl volně upuštěn do vody z mostu vysokého 44 m. Za jednu sekundu poté byl svisle dolů hozen druhý kámen. Oba kameny dopadly do vody současně. (a) Jaká byla počáteční rychlost druhého kamene? (b) Nakreslete grafy časové závislosti rychlosti obou kamenů. (Počátek časové osy přisoudíme okamžiku, kdy začal padat první kámen.)

84Ú. Parašutistka padá po výskoku z letadla nejprve volným pádem a urazí 50 m. Poté otevře padák, který zpomaluje její pohyb se zrychlením o velikosti 2,0 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Na zem dopadne rychlostí 3,0 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Jak dlouho trval její let? (b) V jaké výšce nad zemí vyskočila z letadla?

85Ú. Dvě tělesa jsou volně vypuštěna ze stejné výšky v časovém odstupu 1 s a letí volným pádem. Za jak dlouho od okamžiku, kdy začalo padat první z nich, je jejich vzdálenost 10 m?

86Ú. Klára a Jan seskočili těsně po sobě z mostu (obr. 2.31). Za jak dlouho po Kláře seskočil Jan? Předpokládejte, že Jan je

vysoký 170 cm a místo, odkud oba skočili, je právě na horním okraji obrázku. Číselné hodnoty nutné pro výpočet je třeba získat přímo měřením na fotografii.



Obr. 2.31 Úloha 86

87Ú. Horkovzdušný balon stoupá rychlostí 12 m·s^{-1}. Ve výšce 80 m vyhodí posádka balíček. Určete (a) dobu jeho pádu a (b) jeho rychlost při dopadu.

88Ú. Otevřená výtahová klec stoupá vzhůru konstantní rychlostí 10 m·s^{-1}. Chlapec jedoucí ve výtahu si hraje s míčem a vyhazuje jej svisle vzhůru. Ve výšce 2 m nad podlahou výtahu má míč vzhledem k výtahu rychlost 20 m·s^{-1}. V tom okamžiku je podlaha výtahu právě 28 m nad zemí. (a) Do jaké největší výšky nad zemí míč vyletí? (b) Za jak dlouho dopadne zpět na podlahu výtahu?

89Ú. Koule z tvrzené gumy je volně puštěna ze střechy budovy. Při svém pádu míjí okno vysoké 1,20 m a její let podél okna trvá 0,125 s. Dopadne na chodník, kde se pružně odrazí, takže při výstupu prolétne kolem téhož okna opět za dobu 0,125 s. Doba mezi oběma průchody kolem dolního okraje okna je 2,00 s. Jak je budova vysoká?

90Ú. Podřimující kočka zahlédne otevřeným oknem letící květináč, který nejprve stoupá vzhůru a pak opět padá. Celková doba, po kterou je květináč vidět v okně, je 0,50 s. Okno je vysoké 2,00 m. Jak vysoko nad horní okraj okna květináč vyletěl?

PRO POČÍTAČ

Úlohy v této části řešíme pomocí počítače.

91Ú. Zkušební jezdec testuje brzdy automobilu vybaveného systémem ABS, který zajišťuje maximální brzdný účinek bez prokluzu pneumatik. Testovací jízdy probíhají na přímém a suchém úseku zkušební dráhy. Úkolem jezdce je zastavit vůz na nejkratší možné dráze od okamžiku, kdy zahlédne světelný signál. Dráha potřebná k zastavení je pro šest různých počátečních rychlostí uvedena v následující tabulce. (a) Najděte závislost brzdné dráhy d na velikosti počáteční rychlosti $v_{\mathrm{i},x}$, reakční době řidiče T_{R} a velikosti a_x konstantního zrychlení automobilu. Metodou nejmenších čtverců určete (b) a_x a (c) T_{R}.

$v_{\mathrm{i},x}$ (m·s^{-1})	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00
d (m)	4,6	12,1	22,3	35,2	51,0	69,5

92Ú. Motocyklista se rozjíždí (z klidu) po vodorovné přímé silnici, na které jsou v pravidelných desetimetrových rozestupech umístěny fotobuňky. První z nich je právě u startu. (Pomocí fotobuňky je možné měřit okamžik průjezdu motocyklu daným místem.) V následující tabulce jsou shrnuty výsledky měření. (a) Najděte závislost uražené dráhy d na zrychlení a_x. Předpokládejte, že zrychlení je konstantní. (b) Hodnoty z tabulky zakreslete do grafu znázorňujícího závislost dráhy d na druhé mocnině času t^2. (c) Metodou lineární regrese určete ze zadaných údajů zrychlení motocyklu a_x.

Pořadové číslo fotobuňky	1	2	3	4	5	6
Vzdálenost (m)	0	10	20	30	40	50
Čas (s)	0	1,63	2,33	2,83	3,31	3,79

93Ú. Motocyklista z předchozí úlohy se opět rozjíždí s konstantním zrychlením na přímé testovací dráze, na které jsou umístěny měřicí body s rozestupy $d_0 = 10$ m. První bod je v neznámé vzdálenosti d od startu jezdce. V následující tabulce jsou výsledky měření rychlosti motocyklu v těchto bodech. (a) Najděte závislost čtverce rychlosti $v_{j,x}^2$ v j-tém bodě na rychlosti $v_{1,x}$ v prvním bodě, na vzdálenosti d_0, na konstantním zrychlení a_x a na pořadovém čísle měřicího bodu j. (b) Nakreslete graf závislosti $v_{j,x}^2$ na $(j-1)$. Metodou lineární regrese určete (c) zrychlení a_x a (d) vzdálenost d.

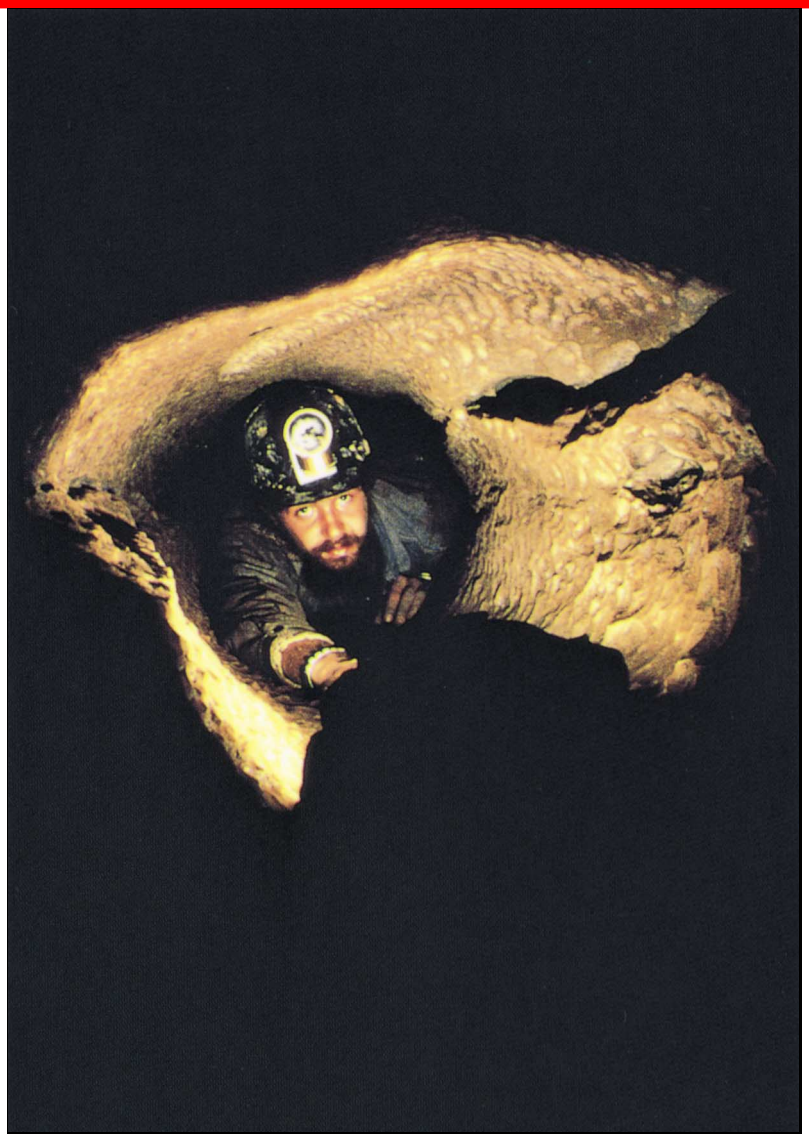
Vztažný bod číslo	1	2	3	4	5	6
Rychlost (m·s^{-1})	14,0	18,3	21,7	24,6	27,5	30,0

94Ú. Předpokládejme, že časová závislost polohy částice při jejím pohybu podél osy x je dána vztahem

$$x(t) = -32{,}0 + 24{,}0t^2\mathrm{e}^{-0{,}0300t},$$

kde x je měřeno v metrech a t v sekundách. (a) Najděte vztahy pro rychlost v_x a zrychlení a_x částice jako funkce času. (b) Nakreslete grafy časových závislostí její polohy, rychlosti a zrychlení pro časový interval od 0 do 100 s. (c) Určete, ve kterém okamžiku je částice v počátku soustavy souřadnic ($x = 0$). Určete její rychlost a zrychlení v tomto okamžiku. (d) Určete, ve kterém okamžiku je její rychlost nulová, a vypočtěte odpovídající polohu a zrychlení.

3
Vektory



Po dvě desetiletí prozkoumávali speleologové 200 km dlouhý systém Mamutí jeskyně a jeskyně Flint Ridge. Věřili, že jsou propojeny, a doufali, že se jim podaří spojovací chodby odhalit. Na fotografii je zachycen jeden z členů úspěšného týmu Richard Zopf, jak spouští batoh průlezem Tight Tube, ležícím hluboko v nitru jeskynního labyrintu Flint Ridge. Po dvanácti hodinách postupu se Zopf a jeho šest druhů protáhli proudem ledové vody a octli se v Mamutí jeskyni. Komplex Mamutí–Flintovy jeskyně se tak stal nejdelší jeskyní na světě. Lze nějak jednoduše charakterizovat vzájemnou polohu východiska a cíle cesty průzkumného družstva, aniž bychom podrobně popisovali celou spletitou trasu?

3.1 VEKTORY A SKALÁRY

Pohyb částice po přímce se může dít pouze ve dvou směrech. Jeden z nich můžeme označit za kladný, druhý bude záporný. V trojrozměrném prostoru však již pouhé dvě možnosti, odlišené znaménky plus a minus, pro určení směru pohybu nestačí. Je třeba použít vektorů.

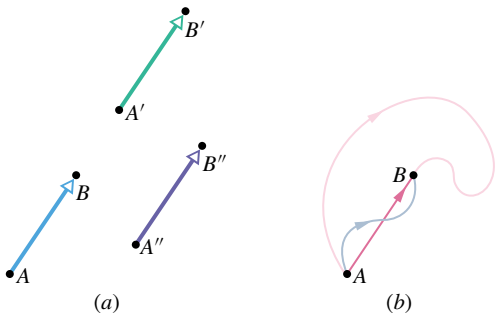
Vektor je zadán směrem a velikostí. S vektory lze počítat podle určitých pravidel, jimiž se za chvíli budeme podrobněji zabývat. **Vektorová veličina** má také směr a velikost. K fyzikálním veličinám, které mohou být popsány vektory (mají tzv. vektorový charakter), patří například posunutí, rychlost a zrychlení.

Některým fyzikálním veličinám nelze přisoudit směr. Například teplota, tlak, energie, hmotnost a čas žádný směr nemají. Takovým veličinám říkáme skaláry a při počítání s nimi používáme pravidla běžné algebry. **Skalár** je určen jediným číslem (například 12,3 kg, 25 J, apod.).* Nejjednodušší vektorovou veličinou je posunutí (změna polohy). Nazýváme ji **vektor posunutí**. (Podobně mluvíme i o vektoru rychlosti a vektoru zrychlení.) Přejde-li pohybující se částice z bodu A do bodu B (obr. 3.1a), lze její posunutí znázornit šipkou směřující z A do B. Šipka je grafickým vyjádřením vektoru. Abychom na dalších obrázcích odlišili vektory od šipek s jiným významem, budeme v koncovém bodě každého vektoru kreslit malý trojúhelník.

Šipky z A do B, z A' do B' a z A'' do B'' na obr. 3.1a představují stejnou změnu polohy hmotného bodu a nebudeme je rozlišovat. Všechny mají stejnou velikost a směr a určují tedy stejný vektor posunutí.

Známe-li pouze vektor posunutí částice, nedokážeme určit její skutečnou trajektorii mezi počátečním a koncovým bodem tohoto posunutí. Na obr. 3.1b jsou zakresleny tři různé trajektorie spojující body A a B. Odpovídá jim stejné výsledné posunutí jako na obr. 3.1a. Posunutí nepopisuje detaily pohybu, určuje pouze jeho celkový výsledek.

* Nezaměňujme skaláry se **souřadnicemi vektorů** na přímce (v jednorozměrném prostoru). Vektor na orientované přímce je číselně reprezentován jedinou souřadnicí. Proto při pevné volbě souřadnicové osy často hovoříme o této souřadnici jako o samotném vektoru, jako tomu bylo v celé kap. 2. Kladné či záporné znaménko souřadnice vektoru rozhoduje o tom, zda je jeho směr souhlasný či nesouhlasný s kladným směrem orientované přímky. Změníme-li orientaci přímky, změní se znaménko souřadnice zadaného vektoru. V případě skaláru patří znaménko k hodnotě. Hodnoty skalárních veličin jsou zcela nezávislé na jakékoli volbě soustavy souřadnic. Při popisu volného pádu tělesa o hmotnosti m v blízkosti povrchu Země máme dvojí možnost volby kladné orientace souřadnicové osy y: nahoru nebo dolů. V případě první volby budou rychlost i zrychlení tělesa (přesněji jejich y-ové souřadnice) v každém okamžiku záporné, v případě druhého způsobu volby budou kladné. Hmotnost tělesa však bude v obou případech stejná.



Obr. 3.1 (a) Všechny vyznačené šipky představují stejné posunutí. (b) Všechny tři trajektorie spojující dva body odpovídají témuž posunutí.

Místo grafického vyjádření lze vektor posunutí zadat velikostí a úhly, které tento vektor svírá se dvěma zvolenými vztažnými směry. Přesvědčíme se o tom při řešení příkladu 3.1.

PŘÍKLAD 3.1

Skupina speleologů, která v roce 1972 objevila spojení mezi Mamutí jeskyní a jeskynním systémem Flint Ridge, absolvovala cestu od Austinova vchodu k řece Echo v Mamutí jeskyni (obr. 3.2a). Ušla při tom 2,6 km západním směrem, 3,9 km na jih a vystoupila o 25 m svisle vzhůru. Jaký vektor posunutí odpovídá této cestě?

ŘEŠENÍ: Nejprve zjistíme velikost posunutí ve vodorovném směru, kterou označíme d_h. Na obr. 3.2b je znázorněn průmět vektoru posunutí do vodorovné roviny (pohled shora). Pomocí Pythagorovy věty dostaneme

$$d_h = \sqrt{(2{,}6\,\mathrm{km})^2 + (3{,}9\,\mathrm{km})^2} = 4{,}69\,\mathrm{km}.$$

Průmět vektoru posunutí do vodorovné roviny svírá se směrem východ-západ úhel θ, určený výrazem

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(3{,}9\,\mathrm{km})}{(2{,}6\,\mathrm{km})} = 1{,}5,$$

tj.

$$\theta = 56^\circ.$$

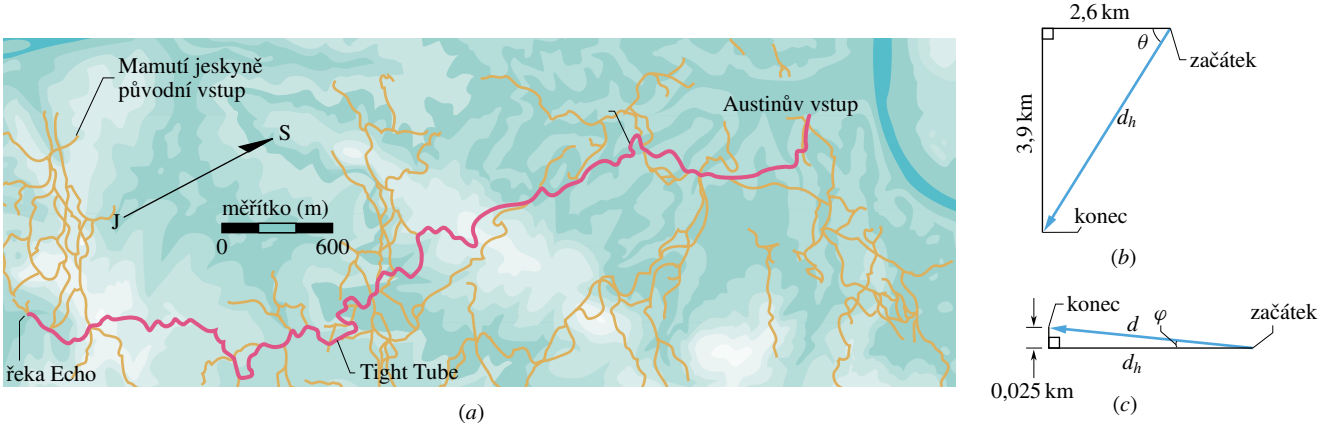
Celkové posunutí $\boldsymbol{d}$ již snadno určíme z obr. 3.2c (boční pohled). Má velikost

$$d = \sqrt{(4{,}69\,\mathrm{km})^2 + (0{,}025\,\mathrm{km})^2} = 4{,}69\,\mathrm{km} \doteq 4{,}7\,\mathrm{km}$$

a svírá s vodorovnou rovinou úhel φ,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(0{,}025\,\mathrm{km})}{(4{,}69\,\mathrm{km})} = 0{,}005\,3,$$
$$\varphi = 0{,}3^\circ.$$

Vektor posunutí, určující změnu polohy speleologické skupiny, má velikost 4,7 km, svírá se směrem východ-západ

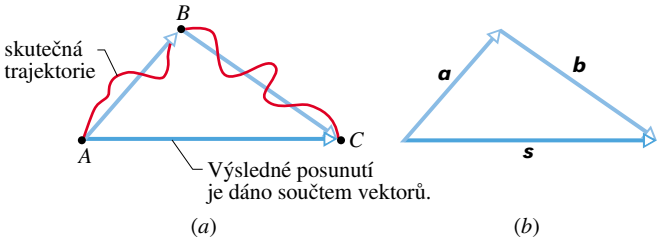


Obr. 3.2 Příklad 3.1. (a) Mapka části systému Mamutí–Flintova jeskyně s vyznačením trasy speleologické skupiny od Austinova vchodu k řece Echo. (b) Průmět posunutí skupiny do vodorovné roviny (nadhled). (c) Boční pohled. (Upraveno podle oficiální mapy.)

úhel 56° a od vodorovné roviny je odkloněn směrem vzhůru o úhel 0,3°. Celkové posunutí ve svislém směru je zanedbatelné v porovnání s pohybem ve vodorovné rovině. Ve skutečnosti však museli průzkumníci nesčetněkrát šplhat nahoru a dolů. Cesta, kterou prošli, se nijak nepodobala vektoru posunutí, který představuje pouze spojnici výchozího a koncového bodu.

3.2 SČÍTÁNÍ VEKTORŮ: GRAFICKÁ METODA

Uvažujme částici, která se pohybuje nejprve z bodu A do bodu B a poté z bodu B do C (obr. 3.3a). Její celkové posunutí je určeno dvěma dílčími posunutími AB a BC bez ohledu na to, jaká byla její skutečná trajektorie. Výsledkem těchto dvou po sobě následujících posunutí je posunutí jediné: z bodu A do bodu C. Posunutí AC nazýváme vektorovým součtem posunutí AB a BC.



Obr. 3.3 (a) AC je vektorovým součtem vektorů AB a BC. (b) Jiné označení vektorů z obrázku (a).

Obr. 3.3b znázorňuje vektory překreslené z obr. 3.3a a označené tučnými písmeny $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{s}$. Tento způsob značení vektorů budeme používat v celém dalším textu. V zápisech psaných ručně značíme vektory šipkou nad příslušným symbolem, např. $\vec{a}$. Pro označení velikosti vektoru používáme obyčejnou kurzívu, např. a, b a s. Tučný symbol zahrnuje tedy úplnou informaci o vektoru, tj. o jeho velikosti i směru. Pro zápis velikosti vektoru, zejména u složitějších výrazů, lze použít i následujícího značení: $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

Vztah mezi vektory na obr. 3.3b můžeme zapsat jedinou vektorovou rovnicí

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad \text{(sčítání)}, \tag{3.1}$$

která vyjadřuje skutečnost, že vektor $\boldsymbol{s}$ je součtem vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Uvědomme si, že symbol + a slova „součet“ a „sčítat“ mají nyní jiný význam, než je běžné v algebře čísel.

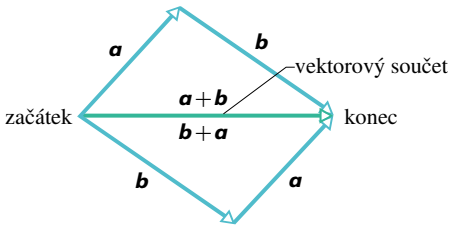
Obr. 3.3 je návodem, jak sečíst dva vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ graficky. (1) Nejprve narýsujeme vektor $\boldsymbol{a}$ ve vhodném měřítku a odpovídajícím směru. (2) Počáteční bod vektoru $\boldsymbol{b}$ umístíme do koncového bodu vektoru $\boldsymbol{a}$. Dbáme na to, aby oba vektory byly zakresleny ve stejném měřítku a svíraly správný úhel. (3) Vektorový součet $\boldsymbol{s}$ získáme jako spojnici počátečního bodu vektoru $\boldsymbol{a}$ s koncovým bodem vektoru $\boldsymbol{b}$. Všimněte si, že popsaný postup pracuje jak s velikostí, tak se směrem obou vektorů. Jistě jej dokážete snadno zobecnit pro případ součtu většího počtu vektorů.

Právě definovaný vektorový součet má dvě důležité vlastnosti.

(1) Výsledek nezávisí na pořadí sčítanců, tj.

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \quad \text{(komutativní zákon)}. \tag{3.2}$$

O platnosti komutativního zákona nás přesvědčí obr. 3.4. Z něj je také zřejmé, proč se někdy mluví o pravidlu rovnoběžníka: součet $\boldsymbol{s}$ tvoří úhlopříčku v rovnoběžníku určeném vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

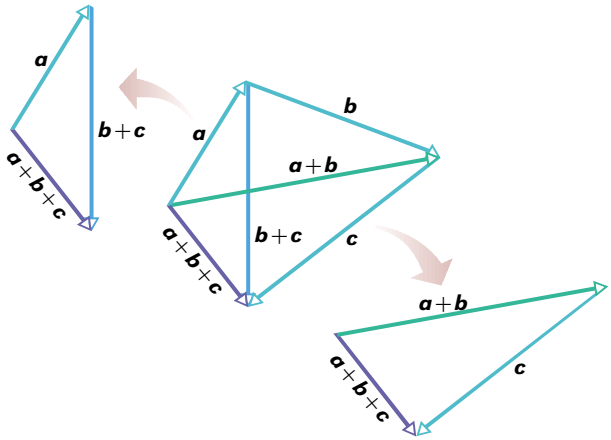


Obr. 3.4 Dva vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ lze sčítat v libovolném pořadí (vztah (3.2)).

(2) Sčítáme-li několik vektorů, je lhostejné, jak je při tom seskupíme. Máme-li například určit součet vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$, můžeme nejprve sečíst třeba vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a k výsledku pak přičíst vektor $\boldsymbol{c}$. Stejně dobře však můžeme sečíst napřed vektory $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ a k jejich součtu nakonec přičíst vektor $\boldsymbol{a}$. Výsledek bude v obou případech stejný. Matematický zápis tohoto pravidla je následující:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \quad \text{(asociativní zákon).} \quad (3.3)$$

Platnost asociativního zákona ilustruje grafická konstrukce na obr. 3.5.



Obr. 3.5 Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ lze při sčítání libovolně seskupit (viz vztah (3.3)).

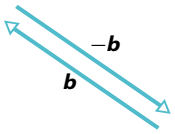
Vektor $\boldsymbol{0}$ nulové velikosti nazýváme **nulový**. Jeho směr není definován. Nulový vektor má mezi vektory stejné postavení jako nula mezi čísly: pro každý vektor $\boldsymbol{b}$ platí $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{b}$. Symbolem $-\boldsymbol{b}$ rozumíme vektor, který má stejnou velikost jako vektor $\boldsymbol{b}$, avšak **opačný** směr (obr. 3.6). Nazýváme jej **vektorem opačným** k $\boldsymbol{b}$. Vektor opačný k opačnému je opět původní vektor, tj. $-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$. Snadno se přesvědčíme, že součtem navzájem opačných vektorů je nulový vektor:

$$\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}.$$

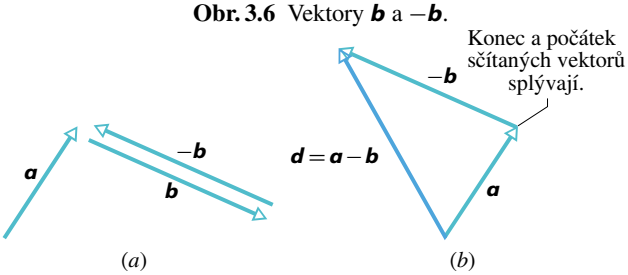
Této vlastnosti využijeme k definici rozdílu dvou vektorů. Rozdílem vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ rozumíme vektor

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}) \quad \text{(odčítání),} \quad (3.4)$$

který označujeme $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. Získáme jej tak, že k vektoru $\boldsymbol{a}$ *přičteme* vektor $-\boldsymbol{b}$. Příklad grafické konstrukce je na obr. 3.7.



Obr. 3.6 Vektory $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{b}$.



Obr. 3.7 (a) Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{b}$. (b) Odečtení vektoru $\boldsymbol{b}$ od vektoru $\boldsymbol{a}$ je ekvivalentní sečtení vektorů $\boldsymbol{a}$ a $-\boldsymbol{b}$.

I když jsme pravidla pro sčítání a odečítání vektorů zaváděli pro vektory posunutí, je samozřejmě možné jich použít pro jakékoli vektory, bez ohledu na to, zda představují nějakou fyzikální veličinu (sílu, rychlost apod.), či nikoliv. Tak jako při počítání se skaláry má však smysl sčítat pouze vektory stejného druhu (ve fyzice vektory odpovídající téže fyzikální veličině).

Můžeme sečíst například dvě posunutí nebo dvě rychlosti, nelze však sčítat posunutí a rychlost. Byl by to stejný nesmysl jako chtít sečíst 21 sekund a 12 metrů.

KONTROLA 1: Dvě posunutí $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ mají velikosti 3 m a 4 m. Označme $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Jak je třeba volit úhel obou posunutí, aby velikost vektoru $\boldsymbol{c}$ byla (a) co největší, (b) co nejmenší? V obou případech velikost vektoru $\boldsymbol{c}$ určete.

PŘÍKLAD 3.2

Při branném závodě je úkolem soutěžícího vzdálit se co možná nejvíce od startu třemi postupnými přímočarými přesuny: (a) $\boldsymbol{a}$: 2,0 km na východ, (b) $\boldsymbol{b}$: 2,0 km severovýchodním směrem, svírajícím s místní rovnoběžkou úhel 30°, (c) $\boldsymbol{c}$: 1,0 km na západ. Pořadí přesunů může závodník volit a kterýkoliv z vektorů $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ může zaměnit vektorem opačným. Do jaké největší vzdálenosti od startu (měřeno vzdušnou čarou) se dokáže dostat?

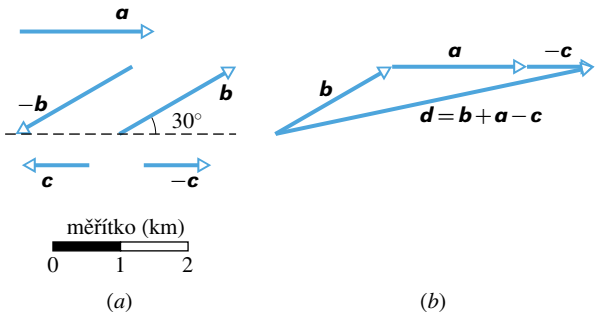
ŘEŠENÍ: Ve vhodném měřítku zakreslíme vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $-\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{c}$ (obr. 3.8a). Vybereme některou z povolených trojic posunutí a v souladu s pravidlem pro sčítání vektorů je nakreslíme tak, aby počáteční bod každého následujícího vektoru splynul s koncovým bodem předcházejícího. (Volba pořadí vektorů při sčítání je samozřejmě libovolná, neboť neovlivní výsledek.) Počáteční bod prvního vektoru z vybrané trojice pak označuje místo startu, koncový bod třetího určuje cílovou polohu přesunu. Vektorový součet $\boldsymbol{d}$, spojující tyto dva body, je vektorem výsledného posunutí. Jeho velikost d představuje dosaženou vzdálenost závodníka od startu.

Snadno zjistíme, že největší vzdálenosti lze docílit volbou trojice přesunů určených vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{c}$ (obr. 3.8b):

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}.$$

Změříme-li velikost vektoru $\boldsymbol{d}$ přímo v obrázku a použijeme-li vyznačeného měřítka, dostaneme vzdálenost d v kilometrech:

$$d = 4{,}8\,\text{km}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 3.8 Příklad 3.2. (a) Soubor vektorů pro výběr povolené trojice posunutí. (b) Závodník dosáhne největší vzdálenosti od startu, zvolí-li pro přesun trojici vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{c}$. Obrázek zachycuje jedno z možných pořadí přesunů. Výsledný vektor posunutí je $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$.

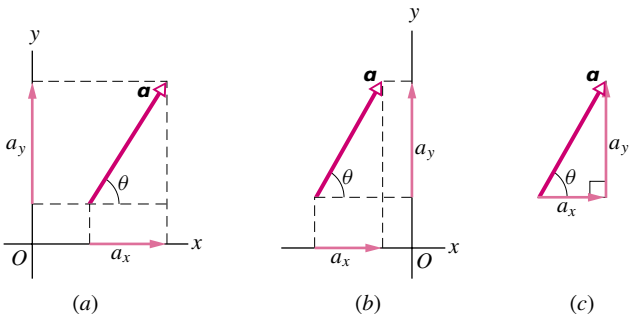
3.3 SLOŽKY VEKTORŮ

Grafické sčítání vektorů je zdlouhavé a málo přesné. Daleko elegantnější a snazší je metoda algebraická, při níž je však třeba vyjádřit vektory v souřadnicích. Pravoúhlou soustavu souřadnic volíme obvykle tak, že osy x a y umístíme do roviny nákresu (obr. 3.9a). Osu z pak vedeme počátkem soustavy souřadnic kolmo k nákresně. Prozatím budeme pracovat pouze s vektory v rovině a osu z nebudeme potřebovat.

Vektor $\boldsymbol{a}$ na obr. 3.9 leží v rovině xy. Vedeme-li jeho počátečním i koncovým bodem kolmice k souřadnicovým osám, vzniknou na osách úseky a_x a a_y. Nazýváme je **složky vektoru $\boldsymbol{a}$** ve směrech x a y. Tento postup představuje rozklad vektoru do složek. Obecně pracujeme s vektory v trojrozměrném prostoru, kde mají tři složky. Vektor $\boldsymbol{a}$ na obr. 3.9a má v tomto obecném pojetí třetí složku nulovou. Posuneme-li vektor tak, aby jeho směr zůstal zachován, jeho složky se nezmění (obr. 3.9b). Pomocí pravoúhlého trojúhelníka na obr. 3.9a snadno najdeme výrazy pro složky vektoru $\boldsymbol{a}$:

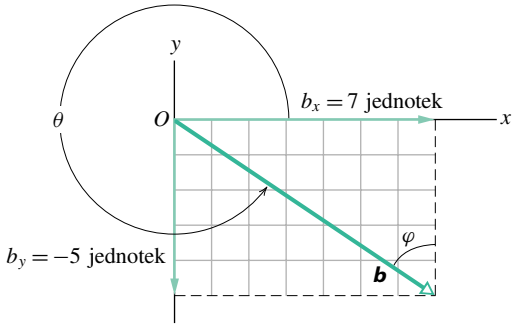
$$a_x = a\cos\theta \quad \text{a} \quad a_y = a\sin\theta, \qquad (3.5)$$

kde θ je úhel, který vektor $\boldsymbol{a}$ svírá s kladným směrem osy x a a je velikost vektoru. Z obr. 3.9c vidíme, že vektor a jeho x-ová a y-ová složka tvoří pravoúhlý trojúhelník. Je také zřejmé, jak sestrojíme vektor pomocí jeho složek: použijeme stejnou geometrickou konstrukci jako při sčítání vektorů.



Obr. 3.9 (a) Složky vektoru $\boldsymbol{a}$. (b) Při posunutí vektoru (při zachování jeho velikosti i směru) se jeho složky nezmění. (c) Složky vektoru $\boldsymbol{a}$ tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, jehož přeponou je vektor $\boldsymbol{a}$.

V závislosti na hodnotě úhlu θ mohou být složky vektorů kladné, záporné nebo nulové. Pro vyznačení znaménka složek používáme v obrázcích malých plných šipek. Podle běžné dohody je šipka orientována v kladném směru osy, je-li příslušná složka vektoru kladná a naopak. Vektor $\boldsymbol{b}$ na obr. 3.10 má složku b_x kladnou a složku b_y zápornou.



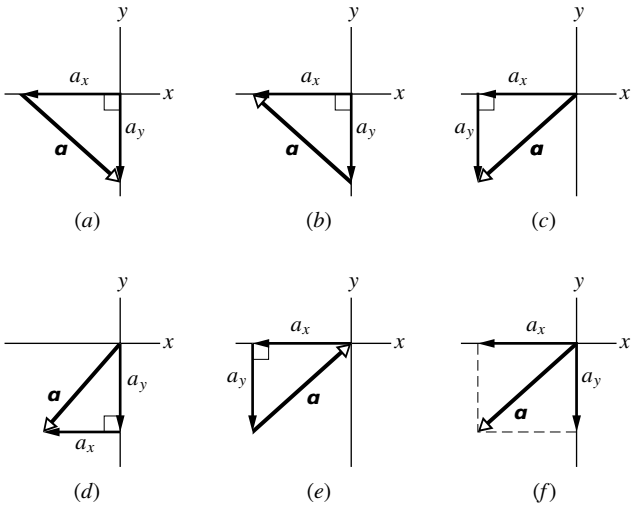
Obr. 3.10 Složka vektoru $\boldsymbol{b}$ ve směru osy x je kladná, složka ve směru osy y je záporná.

Vektor je svými složkami jednoznačně zadán stejně dobře jako svou velikostí a směrem. Všimněme si znovu obr. 3.9a. Vektor $\boldsymbol{a}$, ležící v rovině tvořené osami x a y, je v každém případě plně určen dvojicí čísel: velikostí a a úhlem θ, nebo složkami a_x a a_y. Každá z těchto dvojic obsahuje tutéž výslednou informaci. Podle potřeby můžeme přecházet od jednoho způsobu vyjádření vektoru k druhému. Známe-li např. složky a_x a a_y, vypočteme velikost a a úhel θ takto (obr. 3.9c):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}. \tag{3.6}$$

Při řešení úloh můžeme vektor vyjadřovat *jak* pomocí jeho složek a_x a a_y, *tak* i pomocí dvojice a a θ.

KONTROLA 2: Který z následujících obrázků představuje správný rozklad vektoru $\boldsymbol{a}$ do složek?



PŘÍKLAD 3.3

Malé letadlo odstartovalo za nevlídného počasí. Později bylo spatřeno ve vzdálenosti 215 km od výchozího letiště v severovýchodním směru, svírajícím s místním poledníkem úhel 22°. Jaká byla jeho vzdálenost od letiště v severním a východním směru?

ŘEŠENÍ: Na obr. 3.11 je situace zakreslena v pravoúhlé soustavě souřadnic xy, jejíž počátek jsme pro jednoduchost umístili do polohy letiště. Osa x směřuje na východ, osa y na sever. Vektor $\boldsymbol{d}$ spojuje počátek soustavy souřadnic s místem, kde byl letoun opět spatřen.

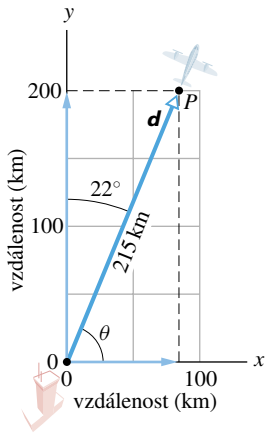
Na otázku položenou v zadání úlohy snadno odpovíme, určíme-li složky vektoru $\boldsymbol{d}$. Použijeme rov. (3.5), kam dosadíme $\theta = 68°$ ($= 90° - 22°$). Dostaneme

$$d_x = d\cos\theta = (215\,\text{km})(\cos 68°) = \\ = 81\,\text{km} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$d_y = d\sin\theta = (215\,\text{km})(\sin 68°) = \\ = 199\,\text{km}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Letadlo bylo spatřeno 199 km severně a 81 km východně od letiště.



Obr. 3.11 Příklad 3.3. Letadlo odstartovalo z počátku soustavy souřadnic O a později bylo spatřeno v bodě P.

RADY A NÁMĚTY

Bod 3.1: *Úhly — stupně a radiány*

Měříme-li úhel od kladného směru osy x, považujeme jeho hodnotu měřenou proti směru otáčení hodinových ručiček za kladnou, hodnotu měřenou po směru hodinových ručiček za zápornou.* Tak například hodnoty 210° a −150° udávají stejný směr. Proto velmi často nerozlišujeme mezi úhly, které se liší o 360°, tj. o plný úhel — např. právě úhel 210° a −150°.

Většina kalkulaček připouští při výpočtu goniometrických funkcí úhlů obě možnosti. (Vyzkoušejte si tu svou.) Nejběžnějšími jednotkami pro měření úhlů jsou stupně (°) a radiány (rad). Jejich vzájemné přepočty jsou velmi snadné. Stačí si zapamatovat, že plný úhel je roven 360° a 2π rad. Potřebujeme-li například převést 40° na radiány, píšeme

$$40° \frac{2\pi\,\text{rad}}{360°} = 0{,}70\,\text{rad}.$$

Zkusme rychle ověřit, je-li získaný výsledek v pořádku. 40° je jedna devítina plného úhlu 2π rad ($\doteq 6{,}3$ rad). Výsledkem přepočtu by tedy měla být hodnota $\frac{1}{9} \cdot 6{,}3$. Vidíme, že jsme přepočet provedli správně. Správnost převodu můžeme velmi snadno posoudit také tehdy, zapamatujeme-li si přibližný vztah 1 rad $\doteq 57°$.

Kalkulačky jsou po zapnutí většinou automaticky nastaveny tak, že počítají úhly ve stupních. Chceme-li zadávat úhly

* Jen tak budou rov. (3.5) v souladu s přijatou konvencí pro znaménka složek vektorů. Viz také bod 3.4.

v radiánech, je třeba kalkulačku přepnout do příslušného pracovního režimu. Vyzkoušejte si to, než začnete řešit konkrétní úlohy.

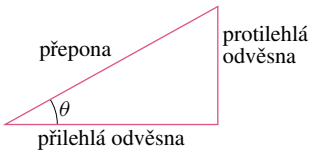
Bod 3.2: *Goniometrické funkce*

Nejužívanější goniometrické funkce sinus, kosinus a tangens je nutno dobře ovládat. Vědecké a technické výpočty se bez nich totiž neobejdou. Definice těchto funkcí jsou shrnuty v obr. 3.12. Označení jednotlivých stran pravoúhlého trojúhelníka není rozhodující a hodnoty $\sin\theta$, $\cos\theta$ a $\mathrm{tg}\,\theta$ nezávisí ani na jeho „velikosti“. Pro všechny tzv. podobné trojúhelníky jsou stejné.

$$\sin\theta = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}}$$



Obr. 3.12 Definice goniometrických funkcí. Viz též dod. E.

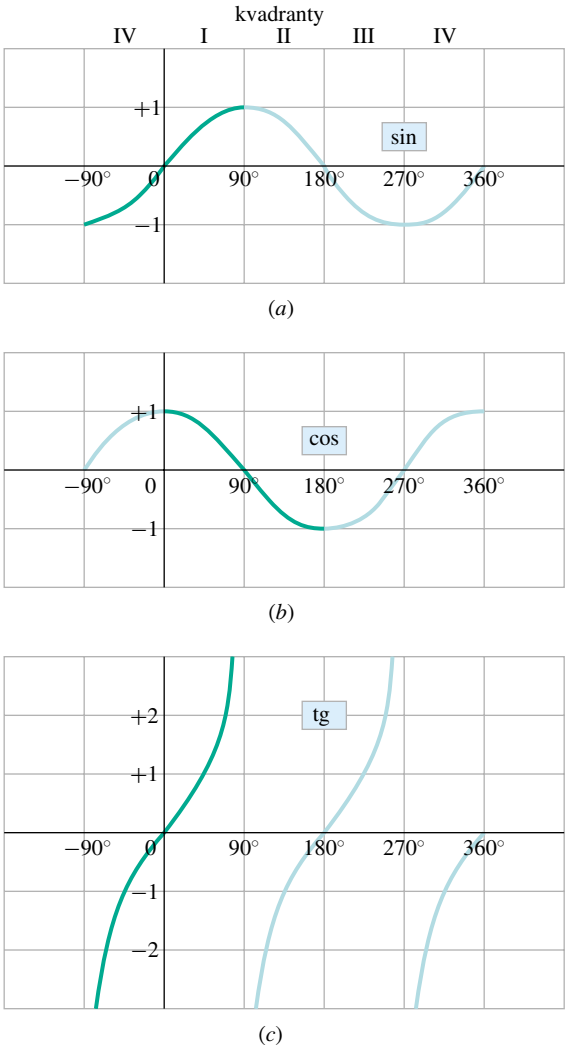
V případě potřeby bychom také měli umět hbitě si vybavit grafy goniometrických funkcí (obr. 3.13). Je výhodné si pamatovat, jaká jsou znaménka hodnot goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech.

Bod 3.3: *Cyklometrické funkce*

Cyklometrickými funkcemi rozumíme funkce inverzní ke goniometrickým. Nejdůležitější z nich jsou arcsin, arccos a arctg. Používáme-li pro jejich výpočet opět kalkulačku, musíme vždy dobře uvážit, je-li získaný výsledek v pořádku. Kalkulačka totiž zobrazí pro zadanou hodnotu y vybrané goniometrické funkce $f(x)$ (například sin) jen jedno z možných řešení x rovnice $y = f(x)$ ($y = \sin x$). Intervaly, v nichž leží řešení získaná na kalkulačce, jsou pro funkce $\sin x$, $\cos x$ a $\mathrm{tg}\,x$ vymezeny v obr. 3.13 zesílením odpovídající části grafu. Rovnici $0{,}5 = \sin x$ vyhovují hodnoty 30° a 150° a všechny další, které se od nich liší o celočíselný násobek plného úhlu. (O existenci různých řešení se můžeme snadno přesvědčit, najdeme-li průsečíky přímky $y = 0{,}5$ s grafem funkce sinus.) Při výpočtu na kalkulačce se však na displeji objeví právě výsledek 30°, který leží ve vyznačeném intervalu. Jak poznáme, které z možných řešení odpovídá zadané úloze? Vraťme se k příkladu 3.1, kde jsme mj. zjišťovali úhel θ na základě znalosti jeho tangenty, $\mathrm{tg}\,\theta = 1{,}5$. Na kalkulačce dostaneme hodnotu $\theta = 56°$. Snadno však zjistíme, že také tangenta úhlu $\theta = 236°$ ($= 180° + 56°$) má požadovanou hodnotu 1,5. Který z obou úhlů je správný? Z fyzikální úvahy je zřejmé, že zadání úlohy vyhovuje hodnota 56° (obr. 3.2b).

Bod 3.4: *Měření úhlů mezi vektory*

Vztahy (3.5) a (3.6) platí v případě, že je symbolem θ označen úhel, který svírá vektor $\boldsymbol{a}$ s kladným směrem osy x. Je-li v úloze zadán úhel vektoru s jiným vztažným směrem, nemůžeme jej do vztahů (3.5) a (3.6) bezmyšlenkovitě dosadit. Pokud by byl například písmenem θ označen úhel vektoru $\boldsymbol{a}$ s kladným směrem osy y, museli bychom goniometrické funkce sin a cos ve vztazích (3.5) mezi sebou vyměnit a zlomek ve vztahu (3.6) převrátit. Možné chybě se snadno vyhneme tím, že pomocí zadaného úhlu určujícího směr vektoru vypočteme úhel θ sevřený vektorem a kladným směrem osy x. Přesně tak jsme to provedli při řešení příkladu 3.3.

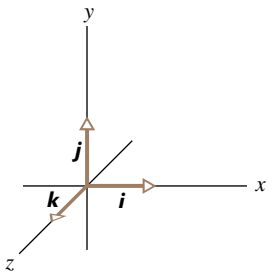


Obr. 3.13 Grafy tří nejužívanějších goniometrických funkcí. Část křivky určující obor hodnot odpovídající *cyklometrické* funkce je v každém grafu zvýrazněna. Vyznačené obory splývají s rozmezím hodnot cyklometrických funkcí běžných kalkulaček.

3.4 JEDNOTKOVÉ VEKTORY

Jako **jednotkový** je definován každý vektor, který má přesně jednotkovou velikost, bez ohledu na směr. Nepřisuzujeme mu fyzikální rozměr, a tedy ani jednotku. (Říkáme

také, že jeho fyzikální rozměr je 1.) Má jediný význam: určuje směr. Jednotkové vektory určující kladné směry souřadnicových os x, y a z označujeme často $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ (obr. 3.14).* Orientace souřadnicových os na obr. 3.14 je volena tak, aby tvořily **pravotočivou soustavu** (odpovídá po řadě palci, ukazováku a prostředníku na pravé ruce, když prsteník a malík jsou v dlani). Při jejím libovolném otočení zůstane tato vlastnost zachována. Pravotočivou soustavu souřadnic určenou navzájem kolmými jednotkovými vektory nazýváme zkráceně **kartézskou**. V dalším textu budeme používat výhradně kartézských souřadnicových soustav.



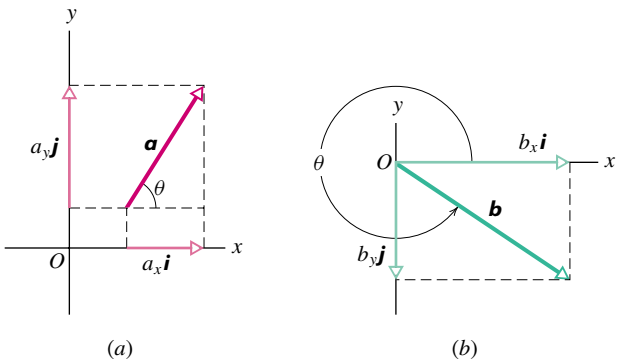
Obr. 3.14 Jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ definují kartézskou soustavu souřadnic.

Pomocí kolmých jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ můžeme velmi snadno vyjádřit každý další vektor. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ z obr. 3.9 a 3.10 zapíšeme například takto:

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}, \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j}. \tag{3.8}$$

Geometrický význam těchto rovnic ilustruje obr. 3.15. Vektory $a_x\boldsymbol{i}$ a $a_y\boldsymbol{j}$ jsou tzv. **pravoúhlé průměty** vektoru $\boldsymbol{a}$ do směru vektorů $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$. Rozlišujme mezi *složkami* (a_x, a_y) a *průměty* $a_x\boldsymbol{i}$, $a_y\boldsymbol{j}$.



Obr. 3.15 (a), (b) Pravoúhlé průměty vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

* Dalšími užívanými symboly pro jednotkový vektor příslušný vektoru $\vec{a}$ jsou $\hat{a}$, $\vec{a}_0$, a^0 apod.

Vraťme se ještě na chvíli k popisu cesty speleologické skupiny v příkladu 3.1. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby její počátek splýval s polohou Austinova vchodu, vektory $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$ směřovaly východním a severním směrem a vektor $\boldsymbol{k}$ svisle vzhůru. Vyjádření vektoru posunutí $\boldsymbol{d}$ od Austinova vchodu k řece Echo je při této volbě soustavy souřadnic velmi přehledné:

$$\boldsymbol{d} = -(2{,}6\,\text{km})\,\boldsymbol{i} - (3{,}9\,\text{km})\,\boldsymbol{j} + (0{,}025\,\text{km})\,\boldsymbol{k}.$$

3.5 SČÍTÁNÍ VEKTORŮ: ALGEBRAICKÁ METODA

Při grafické konstrukci součtu vektorů jsme si mohli všimnout, že je poměrně pracná a nepříliš přesná. V trojrozměrném prostoru je navíc takřka neschůdná. Přímá *algebraická metoda* sčítání vektorů, s níž se seznámíme v tomto článku, je při praktických výpočtech velmi účelná. Využívá vyjádření vektorů pomocí jejich složek ve vhodně zvolené soustavě souřadnic.

Uvažujme o vektorovém součtu tvaru

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}. \tag{3.9}$$

Podle tohoto vztahu je vektor $\boldsymbol{r}$ shodný s vektorem $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. Jeho složky r_x, r_y a r_z musí být tedy shodné s odpovídajícími složkami součtu $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$:

$$r_x = a_x + b_x, \tag{3.10}$$

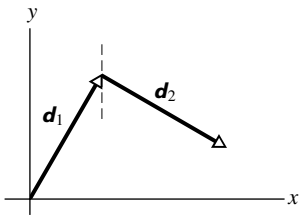
$$r_y = a_y + b_y, \tag{3.11}$$

$$r_z = a_z + b_z. \tag{3.12}$$

Stručněji, dva vektory jsou si rovny právě tehdy, jsou-li jejich stejnojmenné složky shodné. Rov. (3.10) až (3.12) přímo obsahují návod pro výpočet složek součtu vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$: (1) Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ rozložíme do složek. (2) Sečtením stejnojmenných složek získáme odpovídající složky vektorového součtu $\boldsymbol{r}$ a (3) vektor $\boldsymbol{r}$ pomocí nich v případě potřeby zapíšeme. Můžeme zvolit dvojí způsob zápisu vektoru $\boldsymbol{r}$: pomocí jednotkových vektorů nebo zadáním velikosti a směru. Směr vektoru v dvojrozměrném prostoru je určen jedním úhlem (například obr. 3.9), v trojrozměrném prostoru je třeba zadat dvojici úhlů.* Často se spokojíme jen se zápisem složek vektoru, nejlépe ve tvaru (a_x, a_y, a_z).

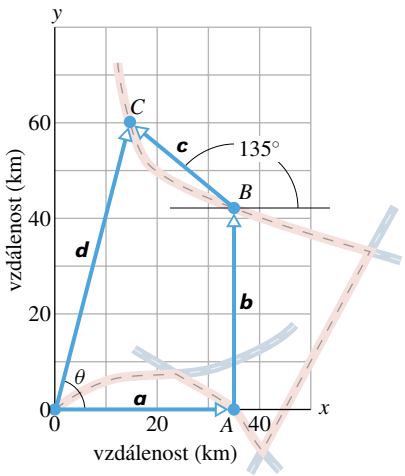
* Nejčastěji volíme zadání směru vektoru $\boldsymbol{r}$ pomocí úhlu θ, který vektor $\boldsymbol{r}$ svírá s kladným směrem osy z (tzv. **sférický úhel**) a úhlu φ mezi průmětem vektoru $\boldsymbol{r}$ do souřadnicové roviny (xy) a osou x (**azimutální úhel**).

KONTROLA 3: (a) Jaká znaménka mají x-ové a (b) y-ové složky vektorů $\boldsymbol{d}_1$ a $\boldsymbol{d}_2$ v následujícím obrázku? (c) Jaká jsou znaménka x-ové a y-ové složky vektoru $(\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2)$?



PŘÍKLAD 3.4

Trasa mototuristické soutěže je vymezena následujícími pokyny: Od místa startu jeďte po nejbližší silnici ke kontrolnímu stanovišti A, které je od startu vzdáleno 36 km východním směrem. Další kontrola B leží 42 km severně od A. Cíl C je od stanoviště B vzdálen 25 km na severozápad. (Silnice s kontrolními stanovišti jsou zakresleny na obr. 3.16.)



Obr. 3.16 Příklad 3.4. Plánek trasy mototuristické soutěže s vyznačením kontrolních stanovišť A, B a C a vhodnou volbou soustavy souřadnic.

(a) Určete velikost a směr vektoru posunutí $\boldsymbol{d}$ od startu do cíle C.

ŘEŠENÍ: Zvolme soustavu souřadnic v rovině trasy (souřadnicová rovina (xy)) co nejvhodnějším způsobem. Příklad vhodné volby je zachycen na obr. 3.16. V obrázku jsou vyznačeny i vektory posunutí příslušné třem přesunům popsaným v pokynech soutěže. Vektor $\boldsymbol{d}$ má složky

$$d_x = a_x + b_x + c_x = 36\,\text{km} + 0 + (25\,\text{km})(\cos 135^\circ) = \\ = (36 + 0 - 17{,}7)\,\text{km} = 18{,}3\,\text{km}$$

a

$$d_y = a_y + b_y + c_y = 0 + 42\,\text{km} + (25\,\text{km})(\sin 135^\circ) = \\ = (0 + 42 + 17{,}7)\,\text{km} = 59{,}7\,\text{km}.$$

Velikost a směr vektoru $\boldsymbol{d}$ určíme pomocí vztahu (3.6).

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(18{,}3\,\text{km})^2 + (59{,}7\,\text{km})^2} = \\ = 62\,\text{km}, \qquad \text{(Odpověď)}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{d_y}{d_x} = \frac{(59{,}7\,\text{km})}{(18{,}3\,\text{km})} = 3{,}26,$$
$$\theta = 73^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Význam úhlu θ je zřejmý z obr. 3.16.

(b) Vyjádřete vektor $\boldsymbol{d}$ pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$.

ŘEŠENÍ: Vektor $\boldsymbol{d}$ zapíšeme jednoduše ve tvaru

$$\boldsymbol{d} = (x\text{-ová složka})\boldsymbol{i} + (y\text{-ová složka})\boldsymbol{j} = \\ = (18{,}3\,\text{km})\boldsymbol{i} + (59{,}7\,\text{km})\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 3.5

Vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ ležící v souřadnicové rovině (xy) jsou zadány takto:

$$\boldsymbol{a} = 4{,}2\boldsymbol{i} - 1{,}6\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{b} = -1{,}6\boldsymbol{i} + 2{,}9\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{c} = -3{,}7\boldsymbol{j}.$$

Určete jejich vektorový součet $\boldsymbol{r}$. Pro jednoduchost nepracujeme s jednotkami, pro pořádek je však možné si představit, že složky vektorů jsou zadány v metrech.

ŘEŠENÍ: Uvědomme si nejprve, že z-ové složky vektorů ležících v souřadnicové rovině (xy) jsou nulové, proto vektor $\boldsymbol{k}$ v jejich zápisech chybí. Podle rov. (3.10) až (3.12) platí

$$r_x = a_x + b_x + c_x = 4{,}2 - 1{,}6 + 0 = 2{,}6,$$
$$r_y = a_y + b_y + c_y = -1{,}6 + 2{,}9 - 3{,}7 = -2{,}4$$

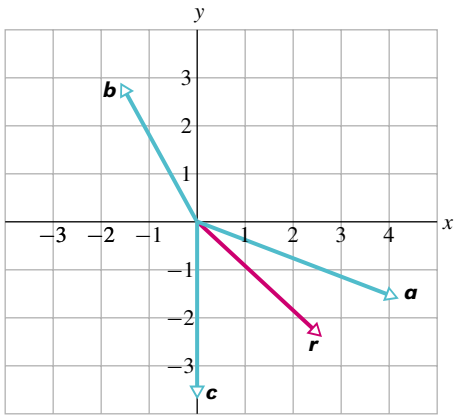
a

$$r_z = a_z + b_z + c_z = 0 + 0 + 0 = 0,$$

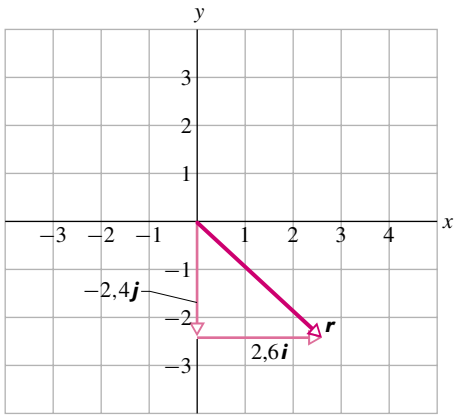
tj.

$$\boldsymbol{r} = 2{,}6\boldsymbol{i} - 2{,}4\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = \\ = 2{,}6\boldsymbol{i} - 2{,}4\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Zadání příkladu i jeho výsledek vidíme na obr. 3.17a. Rozklad vektoru $\boldsymbol{r}$ do složek je na obr. 3.17b.



(a)



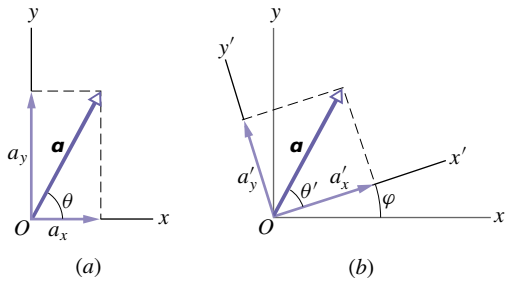
(b)

Obr. 3.17 Příklad 3.5. Vektor ***r*** je součtem tří vektorů

3.6 VEKTORY A FYZIKÁLNÍ ZÁKONY

Ve všech obrázcích jsme doposud kreslili osy soustavy souřadnic rovnoběžně s okraji stránky. Složky a_x a a_y vektoru ***a*** byly tedy rovněž měřeny podél těchto okrajů (například obr. 3.18a). Tato volba však nemá žádné hlubší matematické či fyzikální opodstatnění, jedinou její předností je pěkný vzhled obrázků. Klidně bychom mohli soustavu souřadnic otočit o úhel φ podle obr. 3.18b (vektor ***a*** neotáčet!). V nové soustavě souřadnic budou mít složky vektoru pochopitelně jiné hodnoty. Označme je a'_x a a'_y. Různých otočení soustavy souřadnic φ je ovšem nekonečně mnoho, a tak může být jeden a týž vektor ***a*** zadán nekonečným počtem různých dvojic svých složek.

Která z nich je ta pravá? Odpověď je jednoduchá: Všechna zadání jsou rovnocenná, neboť reprezentují týž vektor v různých soustavách souřadnic. Každou dvojici údajů (a_x, a_y) je však třeba spojit s informací, k *jaké soustavě souřadnic* jsou údaje vztaženy. Výpočet velikosti a směru vektoru pomocí kterékoli z rovnocenných dvojic složek vede ke stejnému výsledku (obr. 3.18):



Obr. 3.18 (a) Vektor ***a*** a jeho složky ve zvolené soustavě souřadnic. (b) Složky téhož vektoru v soustavě souřadnic otočené o úhel φ.

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2}, \tag{3.13}$$

$$\theta = \theta' + \varphi. \tag{3.14}$$

Předchozí úvahy jsou dokladem značné libovůle při výběru soustavy souřadnic. Vztahy pro vektory i vektorové součty (rov. (3.1)), jsou totiž nezávislé jak na poloze jejího počátku, tak na orientaci souřadnicových os. Totéž platí i pro fyzikální vztahy a zákony: jsou nezávislé na volbě soustavy souřadnic. Připojme k tomu jednoduchost a bohatost vektorové algebry a pochopíme, proč je řada fyzikálních zákonů vyjádřena vektorovými rovnicemi: jediná vektorová rovnice (3.9) zastupuje hned tři rovnice skalární, (3.10), (3.11) a (3.12).

3.7 NÁSOBENÍ VEKTORŮ*

Existuje více různých způsobů násobení vektorů.

Násobení vektoru skalárem

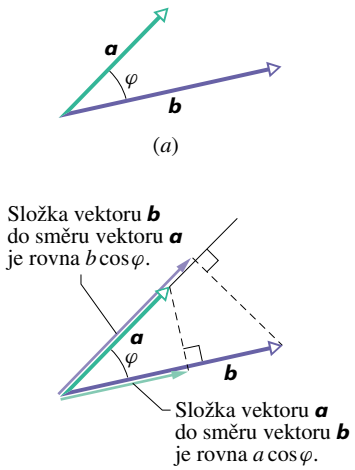
Výsledkem násobení vektoru ***a*** skalárem s je opět vektor. Jeho velikost je součinem velikosti vektoru ***a*** a absolutní hodnoty skaláru s. Je-li hodnota s kladná, je směr výsledného vektoru shodný se směrem vektoru ***a***, pro zápornou hodnotu s je opačný. Dělením vektoru ***a*** nenulovým skalárem s rozumíme násobení jeho převrácenou hodnotou $1/s$.

Skalárem s může být jak číslo (fyzikálně bezrozměrová konstanta), tak fyzikální veličina. V druhém případě je výsledkem násobení vektorová fyzikální veličina jiné povahy než ***a***.

* Pojmy vyložené v tomto článku budeme potřebovat až v pozdějších kapitolách (skalární součin v kapitole 7 a vektorový součin v kapitole 12). Studium článku lze v tuto chvíli ještě odložit.

Skalární součin vektorů

V matematice jsou definovány dvě různé operace, které mohou být nazývány násobením dvou vektorů. Výsledkem prvé z nich je skalár, výsledkem druhé je další vektor. Studenti tyto operace často zaměňují, a tak je budeme od prvopočátku pečlivě rozlišovat.



Obr. 3.19 (a) Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ svírají úhel φ. (b) Složka vektoru $\boldsymbol{a}$ ve směru vektoru $\boldsymbol{b}$ je $a\cos\varphi$, složka vektoru $\boldsymbol{b}$ ve směru vektoru $\boldsymbol{a}$ je $b\cos\varphi$.

Skalární součin vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (zapisujeme $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$) je definován vztahem (obr. 3.19a)

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi, \qquad (3.15)$$

kde a a b jsou velikosti vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, φ je úhel mezi nimi.* Všimněme si, že na pravé straně rovnice (3.15) vystupují pouze skaláry (a, b a $\cos\varphi$). Výraz $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ na levé straně je tedy rovněž *skalární* veličinou. Přepíšeme-li definiční rovnici (3.15) do tvaru

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a\cos\varphi)(b) = (a)(b\cos\varphi), \qquad (3.16)$$

vidíme, že skalární součin je možné interpretovat i jako součin (1) velikosti prvého z obou vektorů a (2) složky druhého z nich ve směru prvého. Výsledek je samozřejmě na pořadí vektorů nezávislý. Na obr. 3.19b jsou znázorněny obě možnosti: Složka vektoru $\boldsymbol{a}$ ve směru $\boldsymbol{b}$ má hodnotu $a\cos\varphi$. Určíme ji tak, že koncovým bodem vektoru $\boldsymbol{a}$ vedeme kolmici k přímce určující směr vektoru $\boldsymbol{b}$. Podobně lze zjistit, že složka vektoru $\boldsymbol{b}$ do směru $\boldsymbol{a}$ má hodnotu $b\cos\varphi$. Pro $\varphi = 0°$ (resp. $\varphi = 180°$) má průmět kteréhokoli z obou vektorů do směru druhého největší možnou velikost a skalární součin nabývá své největší (resp. nejmenší) hodnoty.

Pro $\varphi = 90°$ jsou oba průměty nulové a odpovídající hodnota skalárního součinu je tedy rovněž nulová. Pro skalární součin platí komutativní zákon

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

Při zápisu vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ pomocí jednotkových vektorů můžeme skalární součin vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \qquad (3.17)$$

a při další úpravě použít distributivního zákona: každý sčítanec v prvé závorce skalárně vynásobíme postupně všemi sčítanci ve druhé závorce a výsledky sečteme.* Dostaneme poměrně složitý výraz s devíti sčítanci, který však vzápětí dokážeme opět zjednodušit:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = {} & (a_x\boldsymbol{i})\cdot(b_x\boldsymbol{i}) + (a_x\boldsymbol{i})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) + (a_x\boldsymbol{i})\cdot(b_z\boldsymbol{k}) + \\ & + (a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_x\boldsymbol{i}) + (a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) + (a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_z\boldsymbol{k}) + \\ & + (a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}) + (a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) + (a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_z\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

Uvažujme například první z těchto devíti skalárních součinů. Vektory $(a_x\boldsymbol{i})$ a $(b_x\boldsymbol{i})$ mají stejný směr. V souhlasu s obr. 3.19 má jejich skalární součin hodnotu a_xb_x. Obdobně je $(a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) = a_yb_y$ a $(a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_z\boldsymbol{k}) = a_zb_z$. V ostatních případech jde o skalární součin kolmých vektorů, který je nulový. Skalární součin vektorů lze tedy pomocí jejich složek v *kartézské* soustavě souřadnic vyjádřit vztahem

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

KONTROLA 4: Vektor $\boldsymbol{C}$ má velikost 3 jednotky, vektor $\boldsymbol{D}$ 4 jednotky. Jaký úhel tyto vektory svírají, má-li jejich skalární součin $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}$ hodnotu (a) nulovou, (b) 12 jednotek, (c) -12 jednotek?

* Úhlem mezi dvěma vektory rozumíme úhel mezi jejich *orientovanými* směry. V případě vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ na obr. 3.18 je jím úhel φ, nikoli $360° - \varphi$.

* Zatímco komutativnost skalárního součinu je okamžitě zřejmá hned z definičního vztahu (3.15), u distributivního zákona tomu tak není. Pomocí přímých, i když poměrně pracných výpočtů využívajících elementárních vztahů z trigonometrie by však bylo schůdné jeho platnost dokázat (dobří počtáři se o to mohou pokusit).

PŘÍKLAD 3.6

Jaký úhel svírají vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} - 4{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = -2{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{k}$?

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (3.15) má skalární součin zadaných vektorů hodnotu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= ab\cos\varphi = \\ &= \sqrt{3{,}0^2 + (-4{,}0)^2}\sqrt{(-2{,}0)^2 + 3{,}0^2}\cos\varphi = \\ &= 18{,}0\cos\varphi. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Podle rov. (3.17) je současně

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (3{,}0\boldsymbol{i} - 4{,}0\boldsymbol{j})\cdot(-2{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{k}).$$

Užitím distributivního zákona dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = {} & (3{,}0\boldsymbol{i})\cdot(-2{,}0\boldsymbol{i}) + (3{,}0\boldsymbol{i})\cdot(3{,}0\boldsymbol{k}) + \\ & + (-4{,}0\boldsymbol{j})\cdot(-2{,}0\boldsymbol{i}) + (-4{,}0\boldsymbol{j})\cdot(3{,}0\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

Každý ze skalárních součinů na pravé straně předchozí rovnosti vyčíslíme pomocí rov. (3.15). Vektory $3{,}0\boldsymbol{i}$ a $-2{,}0\boldsymbol{i}$ v prvém z nich svírají úhel $0°$, ve všech ostatních případech jde o skalární součin kolmých vektorů. Dostáváme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= -(6{,}0)(1) + (9{,}0)(0) + (8{,}0)(0) - (12)(0) = \\ &= -6{,}0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Výsledek můžeme ověřit vyjádřením skalárního součinu vektorů pomocí jejich složek:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (3{,}0)(-2{,}0) + (-4{,}0)(0) + (0)(3{,}0) = -6{,}0.$$

Získaná hodnota se ovšem musí shodovat s pravou stranou rovnice (3.18), tj.

$$18{,}0\cos\varphi = -6{,}0$$

a odtud

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{-6{,}0}{18{,}0} = -0{,}333, \\ \varphi &= 109° \doteq 110°. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vektorový součin

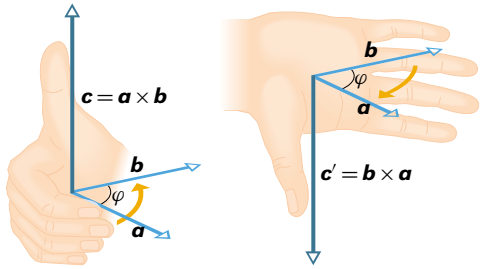
Vektorový součin vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ značíme $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Výsledkem je vektor $\boldsymbol{c}$, který je kolmý k $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Jeho velikost je definována vztahem

$$c = ab\sin\varphi, \tag{3.20}$$

kde a a b jsou opět velikosti vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a φ je úhel mezi nimi. Jsou-li vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ rovnoběžné, ať již souhlasně či nesouhlasně, je $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Velikost vektoru $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ (píšeme $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$) nabývá největší možné hodnoty, jsou-li vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ kolmé.

Výsledný vektor $\boldsymbol{c}$ je definován jako vektor kolmý k rovině určené vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Jeho orientace je určena tzv. pravidlem pravé ruky, které je znázorněno na obr. 3.20a:

Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ umístíme do společného počátečního bodu. Zachováme přitom jejich směry. Společným počátkem vedeme kolmici k rovině určené oběma vektory. Kolmici „uchopíme“ *pravou* rukou tak, aby prsty ukazovaly od vektoru $\boldsymbol{a}$ k $\boldsymbol{b}$ „cestou“ menšího z obou úhlů (úhel φ v obr. 3.20). Vztyčený palec ukazuje správně orientovaný směr vektoru $\boldsymbol{c}$.



(a) (b)

Obr. 3.20 Pravidlo pravé ruky pro vektorový součin. (a) Natočte pravou ruku tak, aby vektor $\boldsymbol{a}$ byl ve směru ukazováčku a $\boldsymbol{b}$ ve směru prostředníku. Pak palec ukazuje směr $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. (b) Vidíme, že $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.

Na rozdíl od skalárního součinu je pořadí činitelů při vektorovém násobení důležité. Obr. 3.20b ukazuje použití pravidla pravé ruky při určení směru vektoru $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. Prsty nyní směřují od $\boldsymbol{b}$ k $\boldsymbol{a}$ a palec ukazuje opačným směrem, než na obr. 3.20a. Vektor $\boldsymbol{c}'$ je tedy opačný k vektoru $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}' = -\boldsymbol{c}$. Platí tedy

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{3.21}$$

Pro vektorový součin neplatí komutativní zákon.

Pomocí jednotkových vektorů můžeme psát

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = {} & (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\times \\ & \times(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Při úpravě opět použijeme distributivní zákon: každý člen první závorky vektorově vynásobíme každým sčítancem ve druhé závorce a výsledky sečteme.* Roznásobte závorky na pravé straně rov. (3.22) a porovnejte výsledek se vztahy v dod. E.

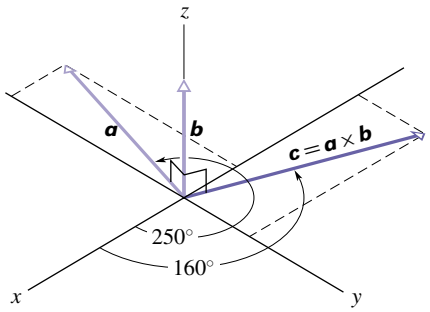
Pomocí vektorového součinu lze snadno rozhodnout, zda je zvolená soustava souřadnic pravotočivá. V kladném případě musí být splněna rovnost $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$. Ověřte její platnost pro souřadnicovou soustavu na obr. 3.14.

* Platnost distributivního zákona pro vektorový součin lze opět dokázat užitím pravidel elementární geometrie a užitím skalárního součinu.

KONTROLA 5: Vektor $\boldsymbol{C}$ má velikost 3 jednotky a vektor $\boldsymbol{D}$ 4 jednotky. Jaký úhel tyto vektory svírají, (a) je-li vektor $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$ nulový, (b) má-li vektor $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$ velikost 12 jednotek?

PŘÍKLAD 3.7

Vektor $\boldsymbol{a}$ leží v rovině xy (obr. 3.21). Má velikost 18 jednotek a s kladným směrem osy x svírá úhel 250°. Vektor $\boldsymbol{b}$ má velikost 12 jednotek a je souhlasně rovnoběžný s kladným směrem osy z.



Obr. 3.21 Příklad 3.7. Vektorové násobení

(a) Vypočtěte skalární součin zadaných vektorů.

ŘEŠENÍ: Vektory svírají úhel $\varphi = 90°$. Podle rov. (3.15) tedy platí

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos\varphi = (18)(12)(\cos 90°) = 0. \quad \text{(Odpověď)}$$

Skalární součin kolmých vektorů má vždy nulovou hodnotu. Odpovídá to skutečnosti, že průmět kteréhokoli z nich do směru druhého je nulový.

(b) Vypočtěte vektorový součin $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

ŘEŠENÍ: Velikost vektorového součinu určíme z definičního vztahu (3.20).

$$ab \sin\varphi = (18)(12)(\sin 90°) = 216. \quad \text{(Odpověď)}$$

Vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý na rovinu vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Je tedy kolmý k ose z, neboť vektor $\boldsymbol{b}$ v ní leží. Vektor $\boldsymbol{c}$ tedy leží v souřadnicové rovině (xy). Pomocí obr. 3.21 určíme ještě jeho směr: Vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý i k vektoru $\boldsymbol{a}$. S kladným směrem osy x tedy svírá úhel buď $250° - 90° = 160°$, nebo $250° + 90° = 340°$. Užitím pravidla pravé ruky se snadno přesvědčíme, že správná je první možnost (obr. 3.21).

PŘÍKLAD 3.8

Určete $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, je-li $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$.

ŘEŠENÍ: Dosazením do rov. (3.22) dostaneme výraz

$$\boldsymbol{c} = (3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}) \times (-2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}),$$

který rozepíšeme pomocí distributivního zákona:

$$\boldsymbol{c} = -(3\boldsymbol{i} \times 2\boldsymbol{i}) + (3\boldsymbol{i} \times 3\boldsymbol{k}) + (4\boldsymbol{j} \times 2\boldsymbol{i}) - (4\boldsymbol{j} \times 3\boldsymbol{k}).$$

Pro každý z těchto čtyř vektorových součinů vypočteme podle rov. (3.20) jeho velikost a užitím pravidla pravé ruky určíme jeho směr. U prvého z nich je $\varphi = 0°$, u ostatních $\varphi = 90°$. Nakonec dostaneme

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} - 9\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k} - 12\boldsymbol{i} =$$
$$= -12\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}. \quad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 3.5: *Časté chyby při výpočtu vektorového součinu*

Při výpočtu vektorového součinu se můžeme snadno dopustit některé z následujících chyb. (1) Je-li grafické zadání úlohy nevhodné pro výpočet vektorového součinu (vektory jsou zakresleny například tak, že počáteční bod jednoho z nich splývá s koncovým bodem druhého) potřebujeme umístit vektory do společného počátečního bodu. Někdy přitom zapomeneme, že nesmíme změnit směr vektorů. (2) Stane se, že chybně použijeme pravidlo pravé ruky, třeba když v ní současně držíme kalkulačku nebo pero. (3) K omylu může snadno dojít i tehdy, je-li potřeba při použití pravidla pravé ruky ruku nepřirozeně zkroutit, nebo když se snažíme směr výsledného vektoru jen odhadnout. (4) Výsledek bude chybný, nepracujeme-li v pravotočivé soustavě souřadnic (obr. 3.14).

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Skaláry a vektory

Skaláry (skalární veličiny) jsou jednoznačně určeny jediným číslem a příslušnou jednotkou (například teplota 82 °C). Při počítání se skaláry používáme běžných pravidel aritmetiky a algebry čísel. *Vektory* mají velikost a směr (například posunutí 5 m severně). Při výpočtech platí zvláštní pravidla vektorové algebry.

Grafická metoda sčítání vektorů

Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ narýsujeme ve vhodném měřítku tak, že počáteční bod kteréhokoli z nich umístíme do koncového bodu druhého. Jejich součtem je vektor $\boldsymbol{s}$ spojující počáteční bod prvého vektoru s koncovým bodem druhého (obr. 3.3). Tvoří úhlopříčku v rovnoběžníku určeném vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ podle obr. 3.4. Při odečítání vektoru $\boldsymbol{b}$ od vektoru $\boldsymbol{a}$ změníme směr vektoru $\boldsymbol{b}$ a získáme tak vektor opačný $-\boldsymbol{b}$, který přičteme k $\boldsymbol{a}$ (obr. 3.7). Pro vektorové sčítání platí komutativní a asociativní zákon.

Složky vektoru

Složky vektoru v rovině jsou určeny jeho kolmými průměty do směrů souřadnicových os x a y. Složky a_x a a_y vektoru $\boldsymbol{a}$ jsou dány vztahy

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{a} \quad a_y = a\sin\theta, \tag{3.5}$$

kde θ je úhel vektoru $\boldsymbol{a}$ s kladným směrem osy x. Znaménko složky určuje orientaci odpovídajícího průmětu vektoru vzhledem ke kladnému směru souřadnicové osy. Pomocí složek vektoru můžeme určit jeho velikost i směr

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}. \tag{3.6}$$

Jednotkové vektory

Vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ jsou definovány jako navzájem kolmé vektory jednotkové velikosti, jejichž směry jsou souhlasně rovnoběžné s osami x, y a z pravotočivé soustavy souřadnic. Libovolný vektor $\boldsymbol{a}$ můžeme pomocí nich zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{3.7}$$

kde $a_x\boldsymbol{i}$, $a_y\boldsymbol{j}$ a $a_z\boldsymbol{k}$ jsou kolmé průměty vektoru $\boldsymbol{a}$ do souřadnicových os a a_x, a_y a a_z jsou jeho složky.

Algebraická metoda sčítání vektorů

Algebraická metoda výpočtu součtu $\boldsymbol{r}$ vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ je založena na použití pravidla „sčítání po složkách“:

$$r_x = a_x + b_x, \tag{3.10}$$
$$r_y = a_y + b_y, \tag{3.11}$$
$$r_z = a_z + b_z. \tag{3.12}$$

Vektory a fyzikální zákony

Při řešení fyzikálních problémů vyžadujících vektorový popis lze použít kteroukoli z mnoha přípustných souřadnicových soustav. Její výběr většinou podřizujeme požadavku co největšího zjednodušení formulace a řešení dané úlohy. Vztahy mezi vektorovými veličinami i fyzikální zákony samy jsou na volbě soustavy souřadnic nezávislé.

Násobení vektoru skalárem

Výsledkem násobení vektoru $\boldsymbol{v}$ skalárem s je vektor o velikosti $|s|\,|\boldsymbol{v}|$. Pro $s > 0$ je jeho směr souhlasný se směrem vektoru $\boldsymbol{v}$, pro $s < 0$ je opačný. Vektor $\boldsymbol{v}$ dělíme skalárem $s \neq 0$, násobíme-li jej jeho převrácenou hodnotou $1/s$.

Skalární součin

Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (značíme $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$) je *skalární* veličina, definovaná vztahem

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi, \tag{3.15}$$

kde φ je úhel sevřený vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. V závislosti na hodnotě φ může být skalární součin kladný, záporný nebo nulový. Z obr. 3.19b je zřejmé, že skalární součin vektorů lze získat vynásobením velikosti kteréhokoli z nich složkou druhého vektoru ve směru vektoru prvého. Při zápisu pomocí jednotkových vektorů píšeme

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \tag{3.17}$$

a při úpravě použijeme distributivního zákona. Skalární součin je komutativní, tj. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

Vektorový součin

Vektorový součin dvou vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ značíme $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Je to vektor $\boldsymbol{c}$ o velikosti

$$c = ab\sin\varphi, \tag{3.20}$$

kde φ je úhel vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (menší z obou úhlů sevřených přímkami, v nichž vektory leží). Vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý na rovinu určenou vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a jeho směr je dán pravidlem pravé ruky (obr. 3.20). Platí $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$. Při zápisu pomocí jednotkových vektorů je vektorový součin dán výrazem

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}), \tag{3.22}$$

který lze ještě upravit užitím distributivního zákona, viz úlohu 49.

OTÁZKY

1. Vektor posunutí $\boldsymbol{N}$ ležící v rovině xy spojuje body o souřadnicích (5 m, 3 m) (počáteční bod) a (7 m, 6 m) (koncový bod). Z následujících posunutí vyberte ta, která jsou ekvivalentní vektoru $\boldsymbol{N}$: vektor $\boldsymbol{A}$ směřující z bodu (−6 m, −5 m) do bodu (−4 m, −2 m); vektor $\boldsymbol{B}$ z bodu (−6 m, 1 m) do bodu (−4 m, 4 m); vektor $\boldsymbol{C}$ z bodu (−8 m, −6 m) do bodu (−10 m, −9 m).

2. Vektor $\boldsymbol{d}$ je definován vztahem $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{c})$. Rozhodněte, zda platí i následující vztahy (a) $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c} + (-\boldsymbol{b})$, (b) $\boldsymbol{a} = (-\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}$, (c) $\boldsymbol{c} + (-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

3. Rovnost (3.2) je vyjádřením komutativního zákona pro sčítání vektorů. Rozhodněte, zda je komutativní i odečítání vektorů, tj. platí-li $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

4. Ve hře s trojrozměrným bludištěm je třeba přesunout hrací kámen z výchozího bodu o souřadnicích $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ do cílového bodu (−2 cm, 4 cm, −4 cm). Pro pohyb kamene povolují pravidla hry pouze posunutí $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{s}$,

$$\boldsymbol{p} = -7\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{s} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}.$$

Souřadnice jsou uváděny v centimetrech. Ocitne-li se kámen při hře v polohách (−5 cm, −1 cm, −1 cm) nebo (5 cm, 2 cm, −1 cm), je hra prohraná. Jaký výběr přípustných vektorů posunutí a jejich pořadí vede k výhře?

5. Co dokážeme říci o vektorech $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, pro něž platí
(a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ a $a + b = c$,
(b) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$,
(c) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ a $a^2 + b^2 = c^2$?

6. (a) Může mít vektor současně nulovou velikost a nenulovou některou ze svých složek? (b) Můžeme sečtením dvou vektorů různé velikosti dostat nulový vektor? Může být součet tří vektorů nulový, jestliže tyto vektory (c) leží, (d) neleží v jedné rovině?

7. Může být velikost rozdílu dvou vektorů větší než (a) velikost některého z nich, (b) velikost každého z nich, (c) velikost jejich součtu?

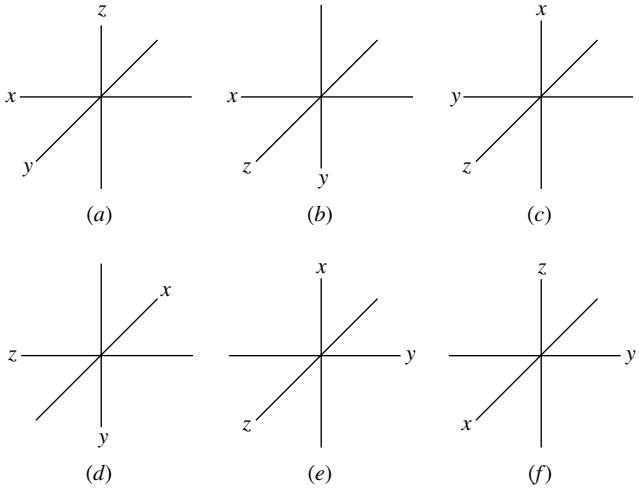
8. Může být součet velikostí dvou vektorů roven velikosti jejich součtu? Pokud ne, proč? Pokud ano, kdy?

9. Která ze souřadnicových soustav na obr. 3.22 je pravotočivá? Kladný směr každé souřadnicové osy je označen jejím popisem.

10. Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$ jsou zadány svými složkami:

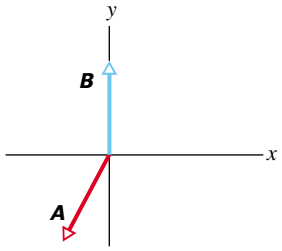
$$a_x = 3; \quad a_y = 3; \quad c_x = -3; \quad c_y = -3;$$
$$b_x = -3; \quad b_y = 3; \quad d_x = 3; \quad d_y = -3.$$

K výpočtu úhlu θ mezi každým z nich a osou x používáme vztah (3.6). Výpočty provádíme na kalkulačce. Pro které ze zadaných vektorů se na displeji kalkulačky přímo objeví správný výsledek? K odpovědi použijte nejprve obr. 3.13 a teprve pak ověřte její správnost výpočtem na kalkulačce.



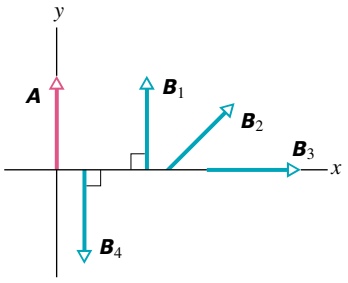
Obr. 3.22 Otázka 9

11. Vektory $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou zadány na obr. 3.23. Jaká jsou znaménka x-ových a y-ových složek vektorů (a) $\boldsymbol{A}$ a (b) $\boldsymbol{D}$, kde $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$?



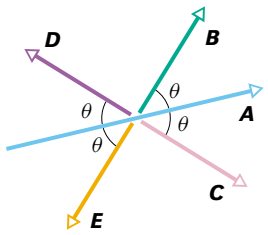
Obr. 3.23 Otázka 11

12. Na obr. 3.24 je nakreslen vektor $\boldsymbol{A}$ a čtyři různé možnosti volby vektoru $\boldsymbol{B}$, lišící se pouze směrem. Seřaďte vektory $\boldsymbol{B}$ podle velikosti absolutní hodnoty součinu $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. (Zvolte sestupné řazení.)



Obr. 3.24 Otázka 12

13. Na obr. 3.25 je zadán vektor $\boldsymbol{A}$ a čtyři další vektory $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{E}$ shodných velikostí. (a) Pro které z vektorů $\boldsymbol{B}$ až $\boldsymbol{E}$ je jejich skalární součin s vektorem $\boldsymbol{A}$ stejný? (b) Pro které z vektorů $\boldsymbol{B}$ až $\boldsymbol{E}$ je jejich skalární součin s vektorem $\boldsymbol{A}$ záporný?

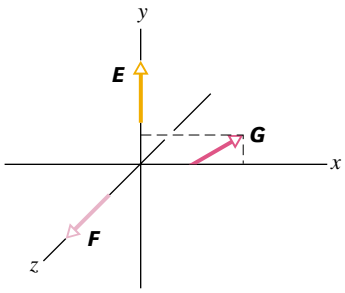


Obr. 3.25 Otázka 13

14. Jsou dány vektory $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{B} = 7\boldsymbol{k}$. Určete $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

15. Předpokládejme, že platí $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$. Znamená to, že jsou vektory $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ stejné?

16. Vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$ jsou zadány na obr. 3.26. Vektor $\boldsymbol{G}$ leží v rovině xy. Určete směry vektorů (a) $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$, (b) $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{E}$ a (c) $\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{E}$. Změní se odpověď na otázku (c), posuneme-li vektor $\boldsymbol{G}$ rovnoběžně s osou z beze změny jeho směru?



Obr. 3.26 Otázka 16

17. Je dán vektor $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$. Určete $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, je-li (a) $\boldsymbol{B} = 8\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j}$ a (b) $\boldsymbol{B} = -8\boldsymbol{i} - 16\boldsymbol{j}$. (Odpovědi lze vyslovit i bez výpočtu.)

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 3.2 Sčítání vektorů: grafická metoda

1C. Dva vektory posunutí mají velikosti 3 m a 4 m. Jak je třeba volit jejich směry, má-li mít výsledné posunutí velikost (a) 7 m, (b) 1 m a (c) 5 m?

2C. Žena ušla 250 m severovýchodním směrem svírajícím s místním poledníkem úhel 30°. Poté zamířila přímo na východ a ušla dalších 175 m. (a) Grafickou metodou určete její celkové posunutí. (b) Porovnejte velikost tohoto posunutí se skutečnou délkou chůze.

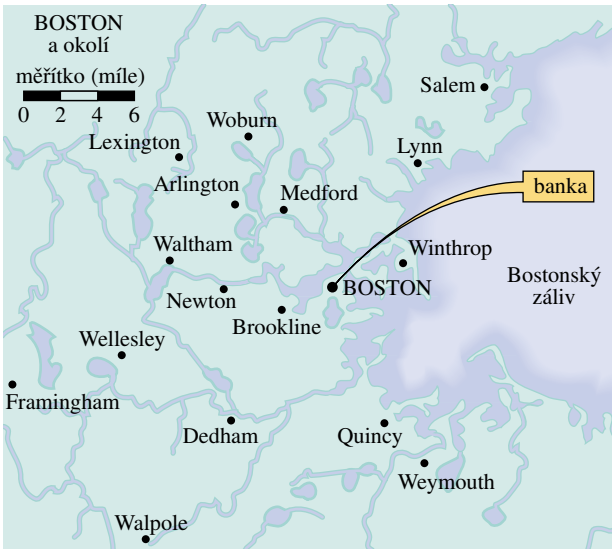
3C. Turista ušel 3,1 km na sever, pak 2,4 km na západ a nakonec 5,2 km na jih. (a) Sestrojte vektorový diagram popisující jeho pohyb. (b) Jak daleko a v jakém směru by musel letět pták, aby ze stejného výchozího místa doletěl do stejného cíle? Let ptáka je přímočarý.

4C. Automobil jede 50 km východním směrem, poté 30 km severně a dále 25 km na severovýchod pod úhlem 30° vzhledem k místnímu poledníku. Sestrojte vektorový diagram pohybu a určete celkové posunutí automobilu.

5Ú. Vektor $\boldsymbol{a}$ má velikost 5,0 jednotek a směřuje přímo na východ. Vektor $\boldsymbol{b}$ je odkloněn od severního směru na západ o 35° a jeho velikost činí 4,0 jednotky. Určete graficky $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Z nákresu odhadněte velikosti a směry výsledných vektorů.

6Ú. V jedné z bostonských bank došlo k loupeži (mapka na obr. 3.27). Při útěku použili lupiči vrtulník a letěli po trase tvořené třemi po sobě následujícími přímými úseky: 20 mil přesně na jihovýchod, 33 mil na severozápad, 26° od místní rovnoběžky, 16 mil na jihovýchod, 18° od místního poledníku. Při posledním přistání byli dopadeni. Ve kterém městě to bylo? (Vektory posunutí sčítejte grafickou metodou přímo v mapě.)

7Ú. Tři vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ mají stejnou velikost 50 jednotek a leží v rovině xy. S kladnou částí osy x svírají postupně úhly 30°, 195° a 315°. Určete graficky velikosti a směry vektorů (a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, (b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ a (c) vektor $\boldsymbol{d}$ tak, aby $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{0}$.



Obr. 3.27 Úloha 6

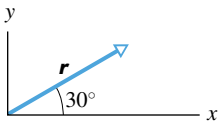
ODST. 3.3 Složky vektorů

8C. (a) Převeďte úhly 20,0°, 50,0° a 100° na radiány. (b) Převeďte úhly 0,330 rad, 2,10 rad a 7,70 rad na stupně.

9C. Určete x-ovou a y-ovou složku vektoru $\boldsymbol{a}$, který leží v rovině xy a svírá s kladnou částí osy x úhel 250° měřený proti směru otáčení hodinových ručiček. Velikost vektoru je 7,3 jednotek.

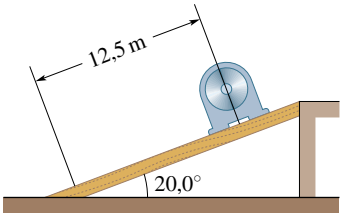
10C. Vektor v rovině xy má složky $a_x = -25{,}0$ jednotek a $a_y = +40{,}0$ jednotek. (a) Jakou má velikost? (b) Jaký úhel svírá s kladným směrem osy x?

11C. Vektor posunutí $\boldsymbol{r}$ leží v rovině xy a má velikost 15 m (obr. 3.28). Určete jeho složky.



Obr. 3.28 Cvičení 11

12C. Těžkou strojní součástku zvedali v dílně tak, že ji vlekli vzhůru po desce odkloněné od vodorovné roviny o úhel 20,0° (obr. 3.29). Součástku se podařilo posunout po desce o 12,5 m. (a) Jak vysoko se při tom zvedla? (b) Jaké bylo její posunutí ve vodorovném směru?



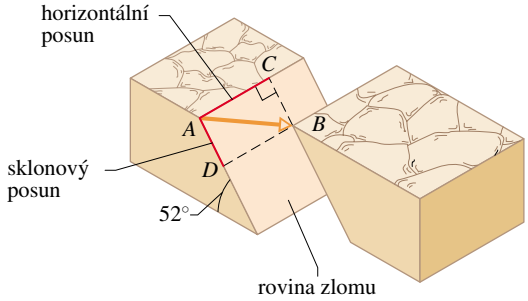
Obr. 3.29 Cvičení 12

13C. Minutová ručička nástěnných hodin měří od osy otáčení po špičku 10 cm. Jaký je vektor posunutí špičky (a) od čtvrt na čtyři do půl čtvrté, (b) za další půlhodinu a (c) za další hodinu?

14C. Loď se chystá na cestu dlouhou 120 km severním směrem. Náhlá bouře ji zanese 100 km východně od výchozího bodu. Jak musí kapitán změnit pokyny k plavbě (vzdálenost a směr), aby loď dosáhla původně plánovaného cíle?

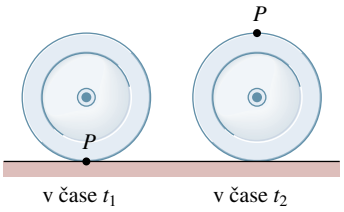
15Ú. Dvě kontrolní stanoviště A a B orientačního běhu jsou od sebe vzdálena 3,40 km. Stanoviště B leží severovýchodně od A ve směru svírajícím s místní rovnoběžkou úhel 35,0°. Pravidla závodu dovolují postupovat pouze severojižním nebo východozápadním směrem. Jakou nejmenší vzdálenost musí závodník uběhnout ze stanoviště A do B?

16Ú. Tektonickým zlomem se nazývá vzájemné posunutí dvou sousedních skalních bloků (obr. 3.30). Před skluzem body A a B splývaly. Celkové posunutí AB leží v rovině zlomu. Vodorovný průmět AC celkového posunutí se nazývá *horizontální posun*, průmět směřující dolů podél roviny zlomu AD je tzv. *sklonový posun*. (a) Jaká je celková délka posunutí AB, je-li horizontální posun 22,0 m a sklonový posun 17,0 m? (b) Jak velká je svislá složka posunutí AB, je-li rovina zlomu skloněna o 52° vzhledem k vodorovné rovině?



Obr. 3.30 Úloha 16

17Ú. Kolo o poloměru 45,0 cm se valí bez prokluzu po vodorovné podlaze (obr. 3.31). Na obvodu kola označíme bod P, který se v okamžiku t_1 právě dotkne podlahy. V pozdějším okamžiku t_2 je kolo otočeno o polovinu otáčky. Jaké je posunutí bodu P za dobu od t_1 do t_2?



Obr. 3.31 Úloha 17

18Ú. Místnost má půdorysné rozměry 3,7 m × 4,3 m a výšku 3,3 m. Moucha vyletí z jednoho rohu místnosti, chvíli poletuje a skončí v protilehlém rohu. (a) Jaká je velikost s jejího posunutí? (b) Může být dráha jejího letu kratší než s? Může být delší? Může být stejná? (c) Zaveďte vhodnou soustavu souřadnic a vyjádřete v ní složky vektoru posunutí. (d) Jakou nejkratší dráhu by moucha musela urazit, kdyby jen lezla po zdi? (Na tuto otázku lze odpovědět i bez výpočtu).

ODST. 3.5 Sčítání vektorů: algebraická metoda

19C. Určete složky vektoru $\boldsymbol{r}$, který je součtem dvou posunutí $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$ se složkami $c_x = 7{,}4$ m, $c_y = -3{,}8$ m, $c_z = -6{,}1$ m, $d_x = 4{,}4$ m, $d_y = -2{,}0$ m, $d_z = 3{,}3$ m.

20C. (a) Pomocí jednotkových vektorů zapište součet vektorů $\boldsymbol{a} = 4{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = -13\boldsymbol{i} + 7{,}0\boldsymbol{j}$. (b) Určete jeho velikost a směr.

21C. Určete složky, velikost a směr vektorů (a) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ a (b) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, je-li $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = 5{,}0\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j}$.

22C. Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$. Určete (a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. (c) Najděte vektor $\boldsymbol{c}$, pro který je $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

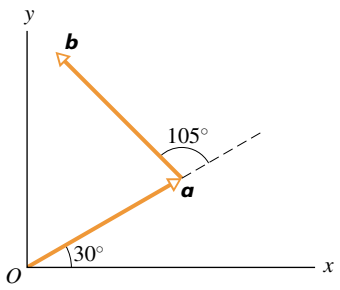
23C. Jsou dány dva vektory $\boldsymbol{a} = 4{,}0\boldsymbol{i} - 3{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = 6{,}0\boldsymbol{i} + 8{,}0\boldsymbol{j}$. Určete velikosti a směry vektorů (a) $\boldsymbol{a}$, (b) $\boldsymbol{b}$, (c) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (d) $\boldsymbol{b} - -\boldsymbol{a}$ (e) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. Jaký je vztah mezi vektory vypočtenými v části (d) a (e)?

24Ú. Určete vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, je-li $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$.

25Ú. Přičteme-li vektor $\boldsymbol{B}$ k vektoru $\boldsymbol{A}$, dostaneme vektor $6{,}0\boldsymbol{i} + + 1{,}0\boldsymbol{j}$. Pokud vektor $\boldsymbol{B}$ od vektoru $\boldsymbol{A}$ odečteme, je výsledkem vektor $-4{,}0\boldsymbol{i} + 7{,}0\boldsymbol{j}$. Jaká je velikost vektoru $\boldsymbol{A}$?

26Ú. Součet vektorů $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ je $3{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$ má směr souhlasný s osou y a velikost shodnou s vektorem $\boldsymbol{C}$. Jaká je velikost vektoru $\boldsymbol{B}$?

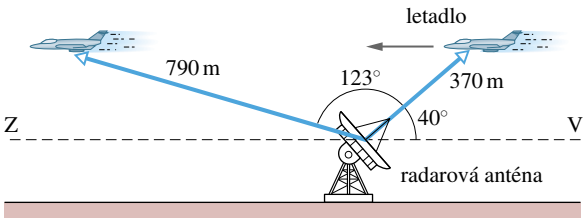
27Ú. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ mají stejnou velikost 10,0 jednotek. Jejich směry jsou zakresleny v obr. 3.32. Označme jejich součet symbolem $\boldsymbol{r}$. Určete (a) x-ovou a y-ovou složku vektoru $\boldsymbol{r}$, (b) jeho velikost a (c) úhel, který svírá s kladným směrem osy x.



Obr. 3.32 Úloha 27

28Ú. Golfista umístil míček do jamky třemi údery. První směřoval na sever a měřil 3,7 m, druhý byl dlouhý 1,8 m a byl veden jihovýchodním směrem, třetí mířil na jihozápad a měl délku 0,9 m. Kterým směrem a do jaké vzdálenosti by hráč musel vyslat míček, aby trefil jamku napoprvé?

29Ú. Radarová stanice zaznamenala letoun, který se k ní blížil přesně z východu. V té chvíli byl letoun ve vzdálenosti 370 m od stanice a byl vidět pod elevačním úhlem 40° (nad vodorovnou rovinou). Radar sledoval letoun až do okamžiku, kdy byl od stanice vzdálen 790 m na západ a velikost pozorovacího úhlu činila 123° (obr. 3.33). Určete posunutí letounu během doby sledování.



Obr. 3.33 Úloha 29

30Ú. (a) Turista šel ze stanového tábora nejprve 1000 m na východ a pak 2 000 m na sever. Při krátkém odpočinku na skalním útesu vysokém 500 m vyndal z kapsy minci a pohrával si s ní. Ve chvíli nepozornosti mu mince upadla a letěla s útesu svisle dolů. Zvolte vhodnou kartézskou soustavu souřadnic a pomocí jejích jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ vyjádřete vektor výsledného posunutí mince od výchozího stanoviště turisty až k místu jejího dopadu pod útesem. (b) Turista se vrátil do tábora jinou cestou. Určete jeho celkové posunutí během výletu.

31Ú. Částice vykoná tři následující přesuny: 4,00 m jihozápadně, 5,00 m východně a 6,00 m severovýchodním směrem svírajícím úhel 60° s místní rovnoběžkou. Souřadnicovou soustavu zvolíme tak, aby osa y směřovala na sever a osa x na východ. Určete (a) složky každého ze tří uvedených posunutí, (b) složky celkového posunutí částice, (c) velikost a směr celkového posunutí a (d) velikost a směr vektoru posunutí, při kterém by se částice vrátila do výchozího bodu.

32Ú. Ověřte následující tvrzení: Je-li součet dvou vektorů kolmý na jejich rozdíl, mají oba vektory stejnou velikost.

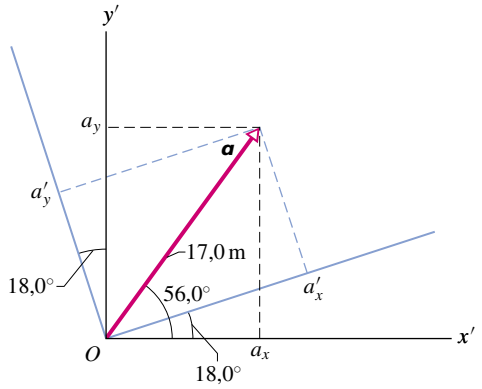
33Ú. Dva vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ s velikostmi a a b jsou umístěny tak, že jejich počáteční body splývají. Vektory svírají úhel θ. Rozkladem vektorů do složek ukažte, že jejich součet $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ má velikost

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}.$$

34Ú. (a) Pomocí jednotkových vektorů vyjádřete tělesovou úhlopříčku krychle v závislosti na velikosti její strany a. (b) Určete úhly, které svírá tělesová úhlopříčka s hranami krychle, které ji protínají. (c) Určete délku tělesové úhlopříčky.

ODST. 3.6 Vektory a fyzikální zákony

35C. Vektor $\boldsymbol{a}$ leží v rovině xy, má velikost 17,0 m a od osy x je odkloněn proti směru otáčení hodinových ručiček o 56,0° (obr. 3.34). (a) Určete jeho složky a_x a a_y. Druhá (čárkovaná) soustava souřadnic je vzhledem k první (nečárkované) otočena o úhel 18,0°. Určete složky a'_x a a'_y vektoru $\boldsymbol{a}$ v čárkované soustavě souřadnic.



Obr. 3.34 Cvičení 35

ODST. 3.7 Násobení vektorů

36C. Vektor $\boldsymbol{d}$ má velikost 2,5 m a směřuje na sever. Určete velikost a směr vektorů (a) $4{,}0\boldsymbol{d}$ a (b) $-3{,}0\boldsymbol{d}$.

37C. Vektor $\boldsymbol{a}$ je souhlasně rovnoběžný s osou x soustavy souřadnic, vektor $\boldsymbol{b}$ s osou y. Dále je zadán skalár d. Jaký směr má vektor $\boldsymbol{b}/d$ je-li hodnota d (a) kladná, (b) záporná? Vypočtěte (c) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ a (d) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}/d$. Určete směr vektoru (e) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ a (f) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. (g) Určete velikosti vektorových součinů z části (e) a (f)? (h) Určete velikost a směr vektoru $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}/d$.

38C. Ukažte, že v pravotočivé soustavě souřadnic platí

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1 \quad \text{a} \quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0.$$

Změnily by se předchozí vztahy, kdyby soustava souřadnic nebyla pravotočivá?

39C. Ukažte, že v pravotočivé soustavě souřadnic platí

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}.$$

Změnily by se předchozí vztahy, kdyby soustava souřadnic nebyla pravotočivá?

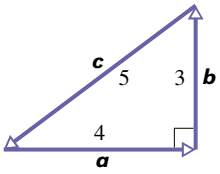
40C. Ukažte, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{a}$ platí $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2$ a $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

41C. Určete následující součiny jednotkových vektorů: (a) „sever × západ“, (b) „dolů · jih“, (c) „východ × nahoru“, (d) „západ · západ“ a (e) „jih × jih“.

42C. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ mají velikosti $a = 10$ jednotek, $b = 6{,}0$ jednotek a svírají úhel 60°. Určete (a) jejich skalární součin a (b) velikost jejich vektorového součinu $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

43C. Vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{s}$ leží v rovině xy. Vektor $\boldsymbol{r}$ má velikost 4,50 jednotek a svírá s kladným směrem osy x úhel 320° (měřeno proti směru otáčení hodinových ručiček). Vektor $\boldsymbol{s}$ má velikost 7,30 jednotek a je od kladného směru osy x odkloněn o úhel 85,0°. Určete (a) $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}$ a (b) $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}$.

44C. Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ jsou zadány podle obr. 3.35. Vypočtěte (a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ a (c) $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.



Obr. 3.35 Cvičení 44 a 45

45C. Pro vektory z obr. 3.35 určete součiny (a) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ a (c) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

46Ú. *Výpočet skalárního součinu vektorů pomocí složek.* Ukažte, že pro skalární součin vektorů

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

platí

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

47Ú. (a) Určete složky a velikost vektoru $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, je-li $\boldsymbol{a} = 5{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j} - 6{,}0\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -2{,}0\boldsymbol{i} + 2{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{c} = 4{,}0\boldsymbol{i} + +3{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$. (b) Vypočtěte úhel, který svírá vektor $\boldsymbol{r}$ s kladným směrem osy z.

48Ú. Užitím definice skalárního součinu $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\theta$ a vztahu $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ (úloha 46) vypočtěte úhel mezi vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{b} = 2{,}0\boldsymbol{i} + 1{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$.

49Ú. *Výpočet vektorového součinu vektorů pomocí složek.* Ukažte, že pro vektorový součin vektorů

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

platí

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\boldsymbol{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\boldsymbol{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\boldsymbol{k}.$$

50Ú. Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 5{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = 2{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$. Určete (a) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ a (c) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$.

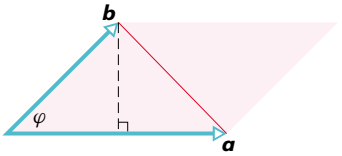
51Ú. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou zadány svými složkami (v libovolných jednotkách): $a_x = 3{,}2$, $a_y = 1{,}6$, $b_x = 0{,}50$, $b_y = 4{,}5$. (a) Určete úhel těchto vektorů. (b) Vypočtěte složky vektoru $\boldsymbol{c}$, který je kolmý k $\boldsymbol{a}$, leží v rovině xy a má velikost 5,0 jednotek.

52Ú. Vektor $\boldsymbol{a}$ leží v rovině yz, svírá s kladným směrem osy y úhel 63°, má kladnou z-ovou složku a jeho velikost je 3,20 jednotek. Vektor $\boldsymbol{b}$ leží v rovině xz, svírá s kladným směrem osy x úhel 48°, má kladnou z-ovou složku a velikost 1,40 jednotek. Určete (a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ a (c) úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

53Ú. Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{j} - 2{,}0\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -1{,}0\boldsymbol{i} - -4{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{c} = 2{,}0\boldsymbol{i} + 2{,}0\boldsymbol{j} + 1{,}0\boldsymbol{k}$. Určete (a) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$, (b) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ a (c) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

54Ú. Vypočtěte úhly mezi tělesovými úhlopříčkami krychle s délkou hrany a (úloha 34).

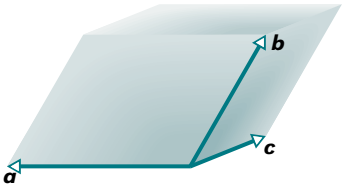
55Ú. Ukažte, že trojúhelník určený vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (obr. 3.36) má obsah $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.



Obr. 3.36 Úloha 55

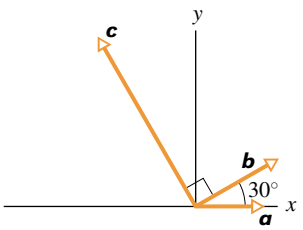
56Ú. (a) Ukažte, že výraz $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$ je nulový pro libovolné vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. (b) Označte φ úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a určete $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.

57Ú. Ukažte, že výraz $|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$ určuje objem rovnoběžnostěnu tvořeného vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ podle obr. 3.37.



Obr. 3.37 Úloha 57

58Ú. Vektory na obr. 3.38 mají velikosti $a = 3{,}00$, $b = 4{,}00$ a $c = 10{,}0$. (a) Vypočtěte jejich x-ové a y-ové složky. (b) Určete čísla p a q tak, aby platilo $\boldsymbol{c} = p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b}$.



Obr. 3.38 Úloha 58

4
Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb



Cirkusové umění odjakživa přitahovalo pozornost diváků. Proto také bylo ve své době velmi rozšířené po celém světě a ve známých artistických rodinách se dědilo z generace na generaci. V roce 1922 užaslo obecenstvo nad číslem rodiny Zacchiniových, při kterém se jeden z nich nechal vystřelit z děla. Přeletěl celou cirkusovou arénu a dopadl do záchranné sítě. Divácky úspěšný kousek se v průběhu dalších let postupně zdokonaloval. Až nakonec, někdy kolem roku 1939 nebo 1940, se podařilo Emanuelu Zacchiniovi překonat vzdálenost 68,6 m a přeletět tři ruská kola v zábavním parku. Jak ale mohl vědět, kam je třeba umístit záchrannou síť? Kde získal jistotu, že dosáhne takové výšky, aby obrovská kola bez úhony přeletěl?

4.1 DVOJROZMĚRNÝ A TROJROZMĚRNÝ POHYB

V této kapitole rozšíříme dosavadní úvahy na případ pohybu, který již nebude omezen pouze na přímku. Budeme sledovat pohyb částice v rovině i v prostoru. Nejdůležitější pojmy týkající se popisu pohybu (poloha, rychlost, zrychlení) převezmeme z kap. 2. Vícerozměrné definice a vztahy budou sice poněkud složitější než u přímočarého pohybu, avšak pomocí vektorové algebry z kap. 3 bude možné je vyjádřit velmi přehledně. Při studiu této kapitoly se občas vraťte ke kapitolám předchozím a osvěžte si potřebné znalosti.

4.2 POLOHA A POSUNUTÍ

Polohu částice nejčastěji popisujeme jejím **polohovým vektorem** $\boldsymbol{r}$, který spojuje předem zvolený vztažný bod (obvykle počátek soustavy souřadnic) s touto částicí. V kartézské soustavě souřadnic zapisujeme vektor $\boldsymbol{r}$ ve tvaru

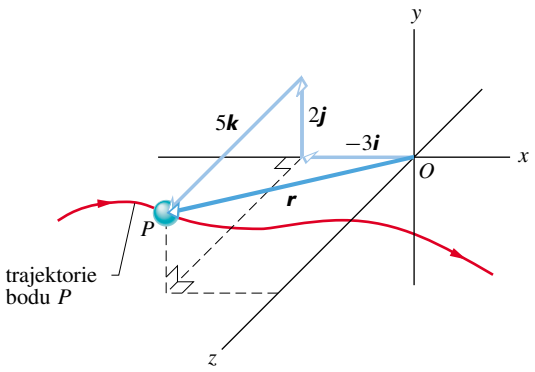
$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \tag{4.1}$$

kde $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$ a $z\boldsymbol{k}$ jsou jeho průměty do souřadnicových os a x, y a z jsou jeho složky. (Nové značení se poněkud liší od zápisů v kap. 3. Snadno se však můžete přesvědčit, že oba způsoby jsou ekvivalentní.)

Koeficienty x, y a z udávají polohu částice vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic, zadané osami a počátkem. Říkáme, že částice má **kartézské souřadnice** (x, y, z). Poloha malého tělíska P na obr. 4.1 je zadána polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}.$$

Jeho kartézské souřadnice jsou $(-3, 2, 5)$. Znamená to, že tělísko P najdeme ve vzdálenosti tří jednotek od počátku proti směru osy x, tj. ve směru vektoru $-\boldsymbol{i}$, dvou jednotek ve směru osy y (ve směru vektoru $+\boldsymbol{j}$) a pěti jednotek ve směru osy z (ve směru vektoru $+\boldsymbol{k}$).



Obr. 4.1 Polohový vektor částice P je vektorovým součtem svých průmětů do souřadnicových os.

Při pohybu částice se mění i její polohový vektor. Jeho koncový bod se pohybuje spolu s částicí a počáteční bod trvale splývá s počátkem soustavy souřadnic. Složky polohového vektoru $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ jsou tedy funkcemi času, polohový vektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ je *vektorovou funkcí času*. Je-li poloha částice v okamžiku t_1 určena vektorem $\boldsymbol{r}_1$ a v následujícím okamžiku $t_1 + \Delta t$ vektorem $\boldsymbol{r}_2$, je *posunutí* $\Delta\boldsymbol{r}$ částice v časovém intervalu Δt dáno rozdílem

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \tag{4.2}$$

Pomocí vztahu (4.1) lze posunutí zapsat také ve tvaru

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}),$$

tj.

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}. \tag{4.3}$$

Souřadnice (x_1, y_1, z_1) určují polohový vektor $\boldsymbol{r}_1$ a souřadnice (x_2, y_2, z_2) polohový vektor $\boldsymbol{r}_2$. Ve vztahu pro posunutí často označujeme $\Delta x = (x_2 - x_1)$, $\Delta y = (y_2 - y_1)$ a $\Delta z = (z_2 - z_1)$.

PŘÍKLAD 4.1

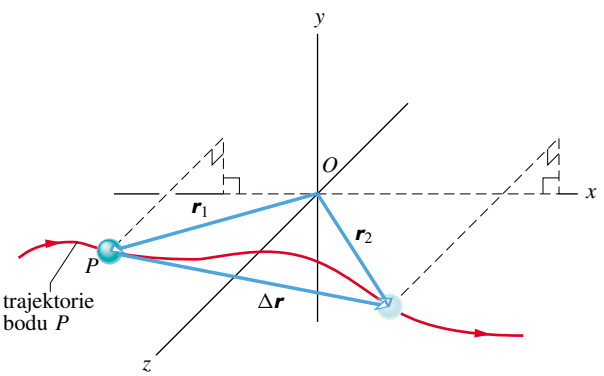
Počáteční poloha částice je dána polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}_1 = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k},$$

koncová poloha je určena vektorem

$$\boldsymbol{r}_2 = 9\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$$

(obr. 4.2). Určete posunutí částice.



Obr. 4.2 Příklad 4.1. Posunutí $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ spojuje koncové body vektorů $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$.

ŘEŠENÍ: Vektory sčítáme (nebo odečítáme) po složkách, přesně podle pravidel uvedených v kap. 3. Užitím vztahu (4.2) dostaneme

$$\Delta\boldsymbol{r} = (9\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}) - (-3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}) = \\ = 12\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vektor posunutí je rovnoběžný se souřadnicovou rovinou xz, neboť jeho y-ová složka je nulová. Uvědomme si, že z číselného zápisu vektoru posunutí je tato skutečnost patrná mnohem lépe než z grafického znázornění situace na obr. 4.2.

KONTROLA 1: (a) Netopýr vyletěl z místa o souřadnicích (−2 m, 4 m, −3 m) a po chvíli opět usedl, tentokrát v místě (6 m, −2 m, −3 m). Určete jeho vektor posunutí $\Delta\boldsymbol{r}$ a vyjádřete jej pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$. (Údaje jsou vztaženy ke kartézské soustavě souřadnic.) (b) Zjistěte, zda je vektor $\Delta\boldsymbol{r}$ rovnoběžný s některou souřadnicovou rovinou či osou.

4.3 PRŮMĚRNÁ A OKAMŽITÁ RYCHLOST

Průměrná rychlost částice v časovém intervalu Δt měřeném od okamžiku t do okamžiku $t + \Delta t$ je definována jako podíl odpovídajícího vektoru posunutí $\Delta\boldsymbol{r}$ a délky časového intervalu Δt:

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}. \qquad (4.4)$$

Po rozepsání pomocí složek dostaneme

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}}{\Delta t} = \\ = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k}. \qquad (4.5)$$

Okamžitá rychlost (zkráceně rychlost) $\boldsymbol{v}$ je limitou průměrné rychlosti $\overline{\boldsymbol{v}}$ pro $\Delta t \to 0$, tj. derivací polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ podle času

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \qquad (4.6)$$

Dosazením polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ z rovnice (4.1) dostaneme

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

a přepíšeme ve tvaru

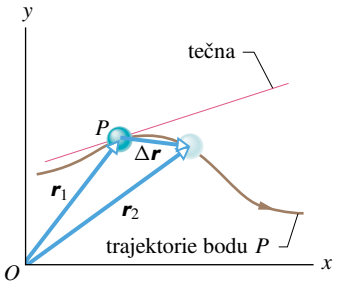
$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \qquad (4.7)$$

kde

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad \text{a} \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad (4.8)$$

jsou složky rychlosti $\boldsymbol{v}$.

Na obr. 4.3 je zakreslena trajektorie částice P, jejíž pohyb je omezen na souřadnicovou rovinu xy. Při pohybu částice po křivce směrem vpravo se v tomtéž směru odklání i její polohový vektor. V okamžiku t_1 je její poloha určena polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_1$ a v okamžiku $t_1 + \Delta t$ polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_2$. Vektor $\Delta\boldsymbol{r}$ představuje *posunutí částice* v časovém intervalu Δt. Průměrná rychlost $\overline{\boldsymbol{v}}$ v intervalu od t_1 do $t_1 + \Delta t$ je dána rovnicí (4.4) a má stejný směr jako posunutí $\Delta\boldsymbol{r}$.



Obr. 4.3 Trajektorie částice P s vyznačením její polohy v okamžicích t_1 a $t_1 + \Delta t$. Vektor $\Delta\boldsymbol{r}$ představuje posunutí částice v tomto časovém intervalu. Červeně je znázorněna tečna k trajektorii v okamžiku t_1.

Při poklesu délky časového intervalu Δt k nule si můžeme všimnout následujícího chování vektorů charakterizujících pohyb částice: (1) vektor $\boldsymbol{r}_2$ se přibližuje vektoru $\boldsymbol{r}_1$ a $\Delta\boldsymbol{r}$ vektoru nulovému, (2) směr vektoru $\Delta\boldsymbol{r}$ a s ním i směr průměrné rychlosti $\overline{\boldsymbol{v}}$ se sklánějí ke směru tečny k trajektorii v bodě $\boldsymbol{r}_1$ a konečně (3) průměrná rychlost $\overline{\boldsymbol{v}}$ se blíží k okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$.

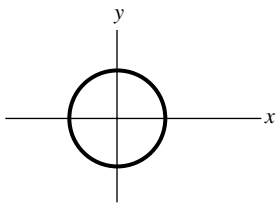
Pro $\Delta t \to 0$ je $\overline{\boldsymbol{v}} \to \boldsymbol{v}$. Vektor okamžité rychlosti je tedy tečný k trajektorii v bodě $\boldsymbol{r}_1$.

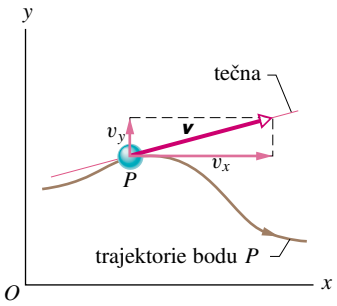
Okamžitá rychlost částice $\boldsymbol{v}$ má vždy směr tečny k trajektorii.

V obr. 4.4 je zakreslen vektor okamžité rychlosti částice P a jeho rozklad do složek. Úvahy o rychlosti lze zobecnit i na případ pohybu částice v trojrozměrném prostoru, bez jakýchkoli omezení: Vektor okamžité rychlosti částice $\boldsymbol{v}$ je vždy tečný k její trajektorii.

KONTROLA 2: Částice se pohybuje po kružnici (viz obrázek) a v jistém okamžiku má rychlost $\boldsymbol{v} = (2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Určete, ve kterém kvadrantu částici v tomto okamžiku najdeme, pohybuje-li

se (a) ve směru otáčení hodinových ručiček, (b) proti směru otáčení hodinových ručiček.





Obr. 4.4 Rychlost částice P a její rozklad do složek. Rychlost má směr tečny k trajektorii.

4.4 PRŮMĚRNÉ A OKAMŽITÉ ZRYCHLENÍ

Předpokládejme, že v průběhu časového intervalu od t_1 do $t_1 + \Delta t$ dojde ke změně rychlosti částice z $\boldsymbol{v}_1$ na $\boldsymbol{v}_2$. Podíl

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{4.9}$$

nazýváme **průměrným zrychlením** v tomto časovém intervalu. Při přechodu $\Delta t \to 0$ se průměrné zrychlení blíží svému limitnímu případu, takzvanému **okamžitému zrychlení** $\boldsymbol{a}$ (zkráceně *zrychlení*):

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{4.10}$$

Nenulové zrychlení signalizuje, že se mění velikost nebo směr rychlosti částice. (Obě změny mohou samozřejmě probíhat současně.) Dosazením rychlosti $\boldsymbol{v}$ ze vztahu (4.7) do (4.10) dostaneme

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k},$$

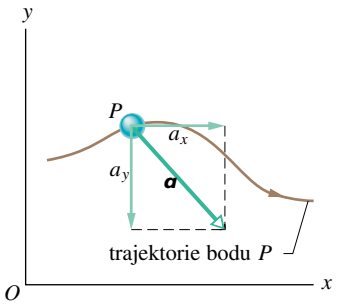
tj.

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{4.11}$$

kde

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \quad \text{a} \quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \tag{4.12}$$

jsou složky zrychlení $\boldsymbol{a}$. Pohyb částice P na obr. 4.5 je omezen na rovinu xy. V obrázku je zakreslen vektor zrychlení částice a jeho rozklad do složek.



Obr. 4.5 Rozklad zrychlení částice do složek

PŘÍKLAD 4.2

Králík vběhl na parkoviště, kde si předtím hrály děti a nakreslily tam křídou dvě kolmé přímky. Můžeme je považovat za osy x a y soustavy souřadnic. Okamžitá poloha králíka vzhledem k této soustavě je popsána funkcemi

$$x = -0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28,$$
$$y = 0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30.$$

Čas t je měřen v sekundách a souřadnice x a y v metrech. Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ je tedy tvaru

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}.$$

(a) Určete velikost a směr polohového vektoru v okamžiku $t = 15\,\mathrm{s}$.

ŘEŠENÍ: V okamžiku $t = 15\,\mathrm{s}$ má polohový vektor $\boldsymbol{r}$ složky

$$x = (-0{,}31)(15)^2 + (7{,}2)(15) + 28 = 66$$

a

$$y = (0{,}22)(15)^2 - (9{,}1)(15) + 30 = -57.$$

Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ a jeho rozklad do složek znázorňuje obr. 4.6a. Vektor $\boldsymbol{r}$ má velikost

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66\,\mathrm{m})^2 + (-57\,\mathrm{m})^2} = 87\,\mathrm{m}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Pro úhel vektoru $\boldsymbol{r}$ s kladným směrem osy x platí

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \left(\frac{-57\,\mathrm{m}}{66\,\mathrm{m}}\right) = -0{,}864,$$
$$\theta = -41^\circ. \quad \text{(Odpověď)}$$

(Stejnou hodnotu tangenty má i úhel $\theta = 139°$, který však neodpovídá znaménkům složek vektoru $\boldsymbol{r}$.)

(b) Určete polohu králíka v okamžicích $t = 0\,\text{s}$, $5\,\text{s}$, $10\,\text{s}$, $20\,\text{s}$ a $25\,\text{s}$ a schematicky nakreslete jeho trajektorii.

ŘEŠENÍ: Pro každý ze zadaných okamžiků zopakujeme výpočet podle (a) a získáme následující hodnoty x, y, r a θ:

t/ s	x/ m	y/ m	r/ m	θ
0	28	30	41	+47°
5	56	−10	57	−10°
10	69	−39	79	−29°
15	66	−57	87	−41°
20	48	−64	80	−53°
25	14	−60	62	−77°

Trajektorie králíka je znázorněna na obr. 4.6b.

PŘÍKLAD 4.3

Určete velikost a směr rychlosti králíka z příkladu 4.2 v okamžiku $t = 15\,\text{s}$.

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (4.8) je x-ová složka vektoru rychlosti

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28) = -0{,}62t + 7{,}2.$$

Pro $t = 15\,\text{s}$ dostaneme

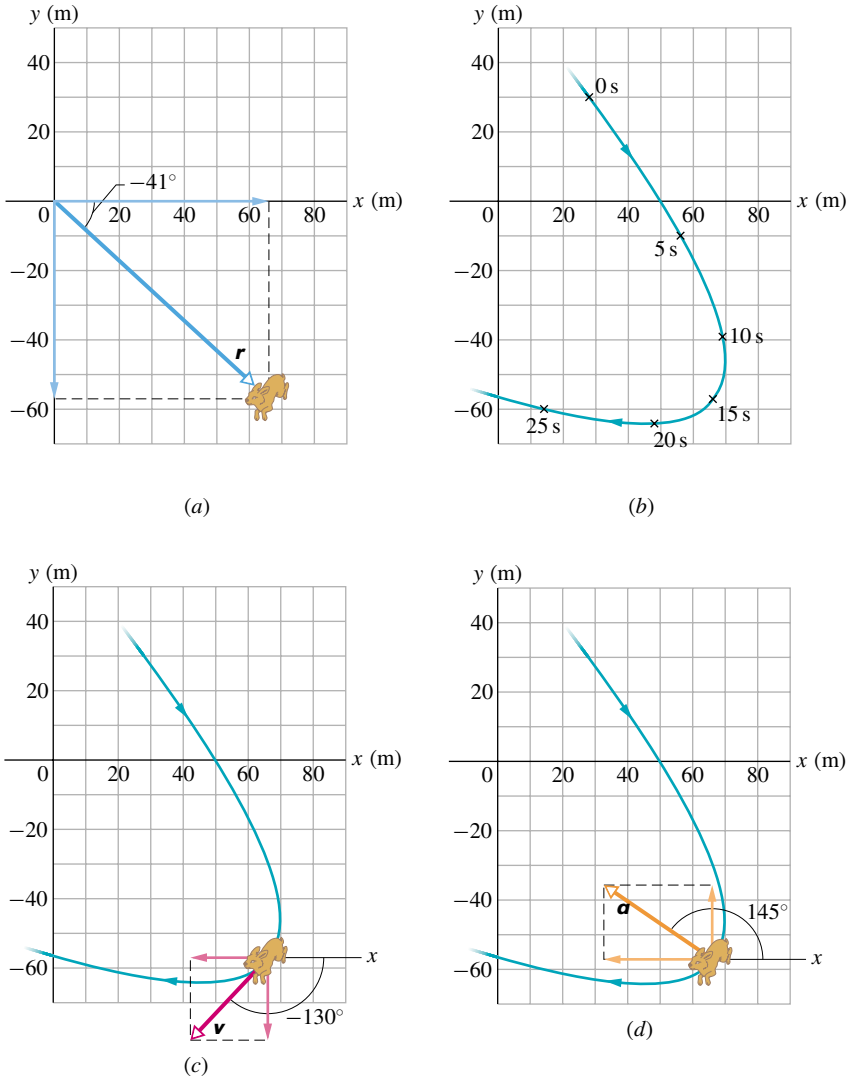
$$v_x = (-0{,}62)(15) + 7{,}2 = -2{,}1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Obdobně je

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30) = 0{,}44t - 9{,}1$$

a pro $t = 15\,\text{s}$

$$v_y = (0{,}44)(15) - 9{,}1 = -2{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$



Obr. 4.6 Příklady 4.2, 4.3 a 4.4. (a) Vektor $\boldsymbol{r}$ a jeho složky v okamžiku $t = 15\,\text{s}$. Velikost vektoru $\boldsymbol{r}$ je 87 m. (b) Trajektorie pohybu králíka po parkovišti s vyznačením poloh v okamžicích uvedených v zadání úlohy. (c) Rychlost $\boldsymbol{v}$ králíka v okamžiku $t = 15\,\text{s}$ má směr tečny k trajektorii v bodě určujícím polohu králíka v okamžiku $t = 15\,\text{s}$. (d) Zrychlení $\boldsymbol{a}$ v okamžiku $t = 15\,\text{s}$. Zrychlení je konstantní, tj. stejné ve všech bodech trajektorie.

Vektor rychlosti a jeho složky jsou zakresleny v obr. 4.6c.

Pro velikost vektoru $\boldsymbol{v}$ a úhel θ určující jeho směr platí

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 + (-2{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2} = \\ = 3{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x} = \left(\frac{-2{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{-2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}\right) = 1{,}19,$$

tj.

$$\theta = -130^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Stejná hodnota tangenty odpovídá i úhlu 50°. V souhlasu se znaménky složek rychlosti však správný úhel θ leží ve třetím kvadrantu, tj. $\theta = 50^\circ - 180^\circ = -130^\circ$.) Rychlost je tečným vektorem k trajektorii a určuje směr, kterým králík běží v okamžiku $t = 15\,\mathrm{s}$ (obr. 4.6c).

PŘÍKLAD 4.4

Určete velikost a směr zrychlení $\boldsymbol{a}$ králíka z příkladu 4.2 v okamžiku $t = 15\,\mathrm{s}$.

ŘEŠENÍ: Složky zrychlení jsou dány vztahem (4.12):

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-0{,}62t + 7{,}2) = -0{,}62$$

a

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0{,}44t + 30) = 0{,}44.$$

Vidíme, že zrychlení nezávisí na čase, je konstantní. Dvojím derivováním časová proměnná zmizela. Zrychlení a jeho složky jsou vyznačeny v obr. 4.6d pro okamžik $t = 15\,\mathrm{s}$. Jeho velikost a směr jsou určeny vztahy

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0{,}62\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})^2 + (0{,}44\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})^2} = \\ = 0{,}76\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x} = \left(\frac{0{,}44\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}{-0{,}62\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}\right) = -0{,}710,$$

tj.

$$\theta = 145^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Velikost ani směr vektoru zrychlení se podél trajektorie králíka nemění. Těžko říci, co bylo příčinou toho, že králík neustále „urychloval“ svůj běh severozápadním směrem. Můžeme si myslet, že třeba vál silný jihovýchodní vítr.

KONTROLA 3: Následující vztahy popisují čtyři možnosti pohybu hokejového kotouče po ledové ploše, ležící v souřadnicové rovině xy (poloha je zadána v metrech):

(1) $x = -3t^2 + 4t - 2$ a $y = 6t^2 - 4t$,
(2) $x = -3t^3 - 4t$ a $y = -5t^2 + 6$,
(3) $\boldsymbol{r} = 2t^2\boldsymbol{i} - (4t + 3)\boldsymbol{j}$,
(4) $\boldsymbol{r} = (4t^3 - 2t)\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$.

V jednotlivých případech rozhodněte, zda je některá ze složek vektoru zrychlení konstantní. Je v některém z nich konstantní vektor zrychlení $\boldsymbol{a}$?

PŘÍKLAD 4.5

Částice se pohybuje v souřadnicové rovině xy s konstantním zrychlením $\boldsymbol{a}$. Vektor zrychlení má velikost $a = 3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a s kladným směrem osy x svírá úhel $\theta = 130^\circ$. V okamžiku $t = 0$ se částice pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_0 = -2{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$ (v metrech za sekundu). Určete její rychlost v okamžiku $t = 2\,\mathrm{s}$ a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$. Určete i její velikost a směr.

ŘEŠENÍ: Při řešení této úlohy si připomeneme výsledky odvozené v kap. 2 pro přímočarý pohyb s konstantním zrychlením. Opravdu jich budeme moci využít? V našem případě je sice zrychlení stálé, pohyb částice však není přímočarý (počáteční rychlost má jiný směr než zrychlení). Díky pravidlům vektorové algebry můžeme úlohu řešit „po složkách“ a vztah (2.11) ($v_x = v_{0x} + a_x t$), platný pro rychlost přímočarého pohybu se stálým zrychlením, použít pro každou ze složek v_x a v_y vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$. Lze tedy psát

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad \text{a} \quad v_y = v_{0y} + a_y t,$$

kde v_{0x} ($= -2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$) a v_{0y} ($= 4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$) jsou složky počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_0$. Složky vektoru zrychlení $\boldsymbol{a}$, a_x a a_y, určíme užitím vztahů (3.5):

$$a_x = a\cos\theta = (3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\cos 130^\circ = -1{,}93\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}},$$
$$a_y = a\sin\theta = (3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\sin 130^\circ = +2{,}30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Dosazením těchto hodnot do rovnic pro složky rychlosti v_x a v_y dostaneme

$$v_x = -2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} + (-1{,}93\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(2{,}0\,\mathrm{s}) = -5{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}},$$
$$v_y = 4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} + (+2{,}30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(2{,}0\,\mathrm{s}) = 8{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Zapíšeme-li výsledky pomocí rozkladu (4.7), dostáváme rychlost částice v okamžiku $t = 2\,\mathrm{s}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{v} = (-5{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} + (8{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pro velikost a směr rychlosti platí

$$v = \sqrt{(-5{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 + (8{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2} = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \left(\frac{8{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{-5{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}\right) = -1{,}458,$$

tj.

$$\theta = 124^\circ \doteq 120^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Poslední výsledek přepočtěte na kalkulačce. Co myslíte? Zobrazí se na displeji hodnota 124° nebo $-55{,}5^\circ$? Nakreslete vektor $\boldsymbol{v}$ a jeho složky a rozhodněte, která z obou hodnot představuje správné řešení úlohy. Proč někdy získáme na kalkulačce matematicky správný, ale fyzikálně nepřijatelný výsledek? Vysvětlení viz bod 3.3.

RADY A NÁMĚTY

Bod 4.1: *Goniometrické funkce a úhly*

V příkladu 4.3 bylo třeba určit úhel θ z rovnice $\mathrm{tg}\,\theta = 1{,}19$. Zopakujme si použitý postup: Při výpočtu pomocí kalkulačky se na jejím displeji téměř jistě zobrazí hodnota $\theta = 50^\circ$. V grafu na obr. 3.13c si můžeme všimnout, že stejnou hodnotu tangenty má i úhel $\theta = 230^\circ$ $(= 50^\circ + 180^\circ)$. Pomocí znamének složek vektoru rychlosti v_x a v_y (obr. 4.6c) dokážeme rozhodnout, že správným řešením úlohy je druhá z obou hodnot úhlu θ. (Některé dokonalejší kalkulačky umožňují rovnou získat správný výsledek.)

Nakonec je třeba zvolit pro zápis výsledku jednu ze dvou možností, 230° nebo -130°. Obě hodnoty představují týž směr (bod 3.1). Výběr zápisu záleží na tom, pracujeme-li raději s úhly v intervalu od 0° do 360° nebo v intervalu od -180° do $+180^\circ$. V příkladu 4.3 jsme si vybrali druhou možnost, tj. $\theta = -130^\circ$.

Bod 4.2: *Grafický záznam vektorů*

Při kreslení vektorů můžeme užít následujícího postupu (např. obr. 4.6): (1) Určíme počáteční bod vektoru. (2) Vedeme jím přímku souhlasně rovnoběžnou s osou x. (3) Od jejího kladného směru odměříme úhloměrem zadaný úhel θ. Je-li úhel θ kladný, měříme jej proti směru otáčení hodinových ručiček a naopak.

Vektor $\boldsymbol{r}$ v obr. 4.6a je zakreslen přesně v měřítku použitém pro popis souřadnicových os. Délka šipky znázorňující tento vektor tak skutečně odpovídá jeho velikosti. Pro grafické znázornění rychlosti (obr. 4.6c) ani zrychlení (obr. 4.6d) jsme žádnou stupnici nezvolili, a tak je můžeme kreslit libovolně dlouhé.

Nemá smysl přemýšlet o tom, zda má být například vektor rychlosti delší či kratší než vektor posunutí. Jde o různé fyzikální veličiny s odlišnými jednotkami. Volba společného měřítka pro jejich grafický záznam by neměla žádné fyzikální opodstatnění.

KONTROLA 4: Poloha kuličky je dána vektorem $\boldsymbol{r} = (4t^3 - 2t)\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ (poloha je zadána v metrech a čas v sekundách). V jakých jednotkách jsou zadány koeficienty 4, -2 a 3?

4.5 ŠIKMÝ VRH

V čl. 2.8 jsme se poměrně podrobně zabývali zvláštním případem pohybu částice s konstantním zrychlením, tzv. *svislým vrhem*. Pozornost věnovaná této speciální situaci nebyla přehnaná. Odpovídající experimenty totiž můžeme velmi pohodlně realizovat v „pozemských podmínkách" s minimálním přístrojovým vybavením. Připomeňme si jen stručně hlavní výsledky, k nimž jsme v článku 2.8 dospěli: těleso volně vypuštěné v blízkosti povrchu Země padá se stálým zrychlením, podaří-li se v dostatečné míře omezit vliv odporu prostředí. Toto *tíhové* zrychlení $\boldsymbol{g}$ je pro všechna tělesa stejné. Trajektorií padajícího tělesa je přímka definující *svislý směr*. Udělíme-li tělesu na počátku experimentu nenulovou rychlost ve svislém směru (vzhůru či dolů), pohybuje se opět se zrychlením $\boldsymbol{g}$ a jeho pohyb je také opět přímočarý.

Experimenty ukazují víc. Ať je totiž při vrhu udělena tělesu počáteční rychlost *v jakémkoliv směru* — nejen svislém — letí těleso vždy se stejným zrychlením $\boldsymbol{g}$. Jeho trajek-



Obr. 4.7 Stroboskopický záznam pohybu golfového míčku při odrazech na tvrdém podkladu. Mezi jednotlivými odrazy se pohyb blíží šikmému vrhu. Odchylky jsou způsobeny vlivem odporu prostředí, který v reálných situacích pochopitelně nelze odstranit.

torie nyní leží ve svislé rovině určené vektorem tíhového zrychlení a směrem počáteční rychlosti tělesa. Tento pohyb nazýváme **šikmý vrh**. Jeho příkladem je let golfového míčku (obr. 4.7), tenisového či fotbalového míče, dělové střely apod. V dalších úvahách se budeme zabývat podrobným rozborem tohoto pohybu. Pro úplnost dodejme, že zanedbáváme odpor vzduchu, vlastní rotaci Země a předpokládáme, že změny výšky tělesa nad povrchem Země jsou zanedbatelné vůči jejím rozměrům.

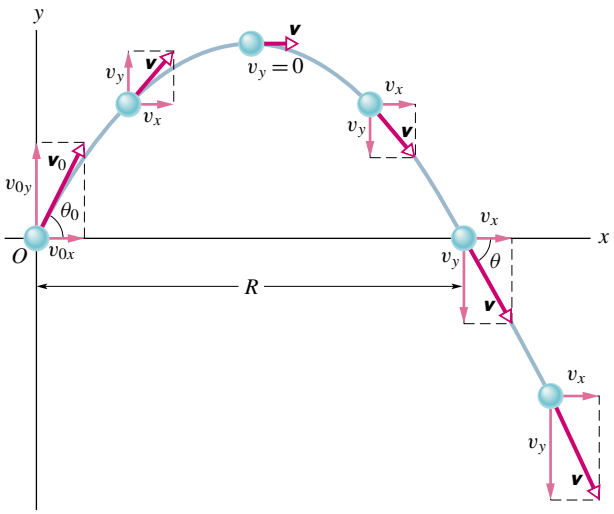
Řekněme, že sledovaným tělesem je podle obr. 4.8 kulka vystřelená počáteční rychlostí

$$\boldsymbol{v}_0 = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0y}\boldsymbol{j}. \qquad (4.13)$$

Složky v_{0x} a v_{0y} této rychlosti lze zapsat pomocí její velikosti v_0 a úhlu θ_0 (tzv. elevační úhel), který svírá vektor $\boldsymbol{v}_0$ s kladným směrem osy x:

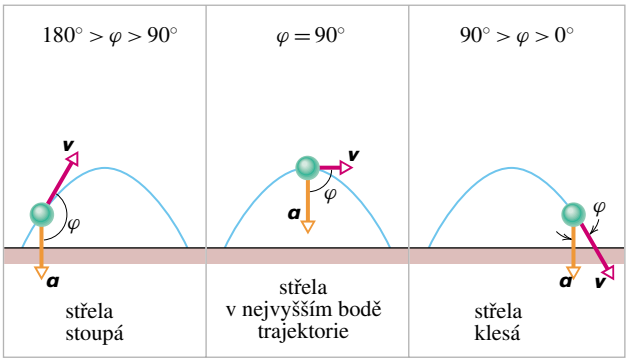
$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \quad \text{a} \quad v_{0y} = v_0 \sin\theta_0. \qquad (4.14)$$

Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ i rychlost střely $\boldsymbol{v}$ se při jejím pohybu ve svislé rovině neustále mění. Její zrychlení $\boldsymbol{a}$ je však stálé a *vždy* míří svisle dolů. (Vodorovná složka zrychlení je nulová.) Na obr. 4.9 je vidět, jak se mění i úhel mezi zrychlením a rychlostí.



Obr. 4.8 Střela vyletí z počátku soustavy souřadnic v okamžiku $t = 0$ rychlostí $\boldsymbol{v}_0$. V jednotlivých bodech trajektorie jsou zakresleny vektory rychlosti a jejich rozklad do složek. Všimněte si, že vodorovná složka rychlosti se v průběhu pohybu nemění, na rozdíl od složky svislé. *Doletem* R rozumíme vodorovnou vzdálenost střely od místa výstřelu měřenou v okamžiku, kdy střela projde bodem ležícím *v téže výšce nad povrchem Země* jako ústí hlavně.

I když pohyb těles na obr. 4.7 až 4.9 může někomu připadat docela složitý, bude jeho matematický popis velmi prostý. Zjednodušení je dáno jednak vektorovým charakterem veličin popisujících pohyb (poloha, rychlost a zrychlení), s nimiž tak lze nakládat podle pravidel vektorové algebry, jednak neměnností zrychlení při pohybu těles. Obojí souhlasí s výsledky experimentů.



Obr. 4.9 Rychlost a zrychlení střely v různých fázích jejího pohybu. Úhel mezi rychlostí a zrychlením může být v daném okamžiku libovolný.

Vodorovné a svislé složky veličin popisujících vrh jsou na sobě nezávislé. Neovlivňují se navzájem.

Pohyb částice v rovině můžeme tedy získat složením dvou pohybů přímočarých, vodorovného a svislého.

Nezávislost vodorovných a svislých složek veličin popisujících šikmý vrh nyní doložíme ukázkou dvou jednoduchých experimentů.

Dva golfové míčky

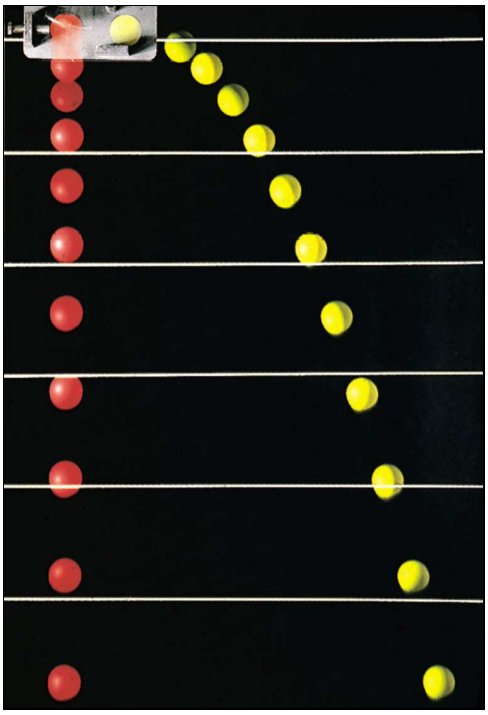
Sledujme stroboskopický záznam pohybu dvou golfových míčků na obr. 4.10. Jeden z nich vypustili experimentátoři volně, druhý vystřelili ve vodorovném směru pomocí pružiny. Všímáme-li si pohybu míčků pouze ve svislém směru, vidíme, že se oba záznamy shodují. Ve stejných časových intervalech urazily míčky stejnou svislou vzdálenost.

Skutečnost, že se jeden z míčků současně pohybuje i ve vodorovném směru, nijak neovlivňuje průmět jeho pohybu do svislého směru. Experiment můžeme domýšlet až k extrémním situacím: střela z pušky, vystřelená vodorovně vysokou rychlostí, dopadne (při zanedbatelném odporu vzduchu) na zem *současně* s kuličkou, kterou jsme ve stejném okamžiku volně vypustili z dlaně ve stejné výšce.

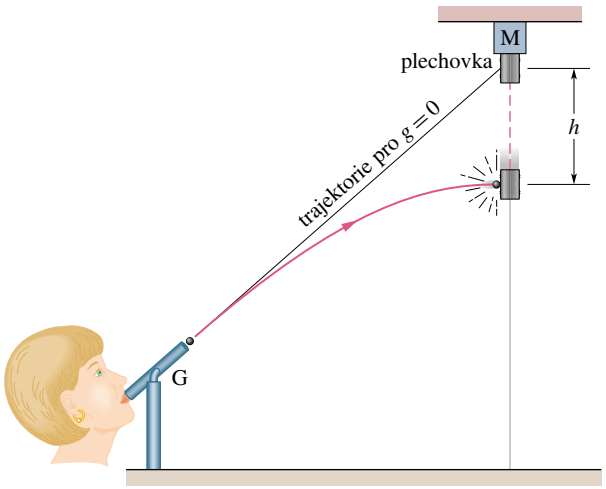
Přesný zásah

Pokus na obr. 4.11 už jistě napomohl oživit řadu fyzikálních přednášek. Vyzkoušejme si jej také. Potřebujeme foukačku G s malými kuličkami jako střelivem. Terčem může být plechovka zavěšená na magnetu M. Trubici foukačky

namíříme přesně na plechovku. Ještě je třeba zařídit, aby magnet uvolnil plechovku přesně v okamžiku, kdy střela vyletí z trubičky a můžeme střílet.



Obr. 4.10 Jeden z míčků je volně vypuštěn, druhý je vystřelen vodorovným směrem. Průměty jejich pohybu do svislého směru jsou totožné.



Obr. 4.11 Kulička vždy zasáhne padající plechovku. V časovém intervalu mezi výstřelem a zásahem obě klesnou o stejnou svislou vzdálenost h měřenou od místa, ve kterém by došlo k jejich srážce v tzv. beztížném stavu ($\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$).

Při nulovém tíhovém zrychlení (tzv. stav beztíže) by střela letěla po přímce (obr. 4.11). Plechovka by se vznášela stále na místě i po uvolnění od magnetu a kulička by ji zcela jistě neminula.

Při skutečném experimentu je ovšem tíhové zrychlení *nenulové*. *A přesto* kulička cíl zasáhne! V obr. 4.11 je vyznačena svislá vzdálenost h, o kterou kulička i plechovka při pokusu poklesnou vzhledem k místu pomyslné srážky při $g = 0$. K zásahu dojde při libovolně silném fouknutí: při silnějším dostane kulička větší počáteční rychlost, zkrátí se doba letu a zmenší se vzdálenost h.

4.6 ŠIKMÝ VRH: MATEMATICKÝ POPIS

Výsledky předchozích úvah nyní uplatníme při důsledném matematickém rozboru šikmého vrhu. Víme již, že při něm můžeme využít zjednodušení spočívající v možnosti rozkladu skutečného pohybu na dva nezávislé pohyby, ve vodorovném a svislém směru.



Obr. 4.12 Svislý průmět rychlosti skatebordisty se mění. Její vodorovný průmět je však trvale shodný s vodorovnou rychlostí skateboardu. Při výskoku je sportovec neustále nad skateboardem a bez problémů na něj opět doskočí.

Pohyb ve vodorovném směru

Vodorovná složka tíhového zrychlení je *nulová*. Vodorovná složka rychlosti šikmého vrhu se tedy s časem nemění. Neustále si udržuje svou počáteční hodnotu v_{0x} (obr. 4.12). Posunutí částice ve vodorovném směru $x - x_0$ je dáno

vztahem (2.15) pro $a_x = 0$:

$$x - x_0 = v_{0x} t.$$

Po dosazení $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$, dostaneme

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0) t. \tag{4.15}$$

Pohyb ve svislém směru

Průmětem pohybu částice do svislého směru je svislý vrh. Pro jeho popis použijeme rovnic (2.21) až (2.25), které jsme odvodili již v článku 2.8. Z rovnice (2.22) například rovnou dostaneme vztah pro svislou složku vektoru posunutí

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y} t - \tfrac{1}{2} g t^2 = \\ &= (v_0 \sin\theta_0) t - \tfrac{1}{2} g t^2. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Svislou složku počáteční rychlosti v_{0y} jsme nahradili ekvivalentním výrazem $v_0 \sin\theta_0$. Využít můžeme i rovnic (2.21) a (2.23), když je nejprve vhodně upravíme:

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt \tag{4.17}$$

a

$$v_y^2 = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4.18}$$

Z rovnice (4.17) je zřejmé (a obr. 4.12 to intuitivně potvrzuje), že časová závislost svislé složky rychlosti je naprosto stejná jako závislost rychlosti míče vyhozeného svisle vzhůru. Na počátku letu je kladná a její velikost postupně klesá k nule. V okamžiku, kdy je $v_y = 0$, je těleso *ve vrcholu své trajektorie*. Znaménko svislé složky rychlosti se obrací a její velikost s časem opět roste.

Rovnice trajektorie

Vztahy (4.15) a (4.16) představují tzv. parametrické rovnice trajektorie částice při šikmém vrhu. (Parametrem je zde čas t.) Její kartézskou rovnici získáme tak, že z rovnic (4.15) a (4.16) tento parametr vyloučíme. Nejjednodušší je vyjádřit čas z rovnice (4.15) a dosadit jej do (4.16). Po malých úpravách dostaneme

$$y = (\operatorname{tg}\theta_0) x - \frac{g x^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2} \quad \text{(trajektorie)}. \tag{4.19}$$

Získali jsme rovnici trajektorie znázorněné na obr. 4.8. Při výpočtu jsme ve vztazích (4.15) a (4.16) pro jednoduchost zvolili $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$. Veličiny g, θ_0 a v_0 jsou konstanty, a tak lze rovnici (4.19) zapsat ve tvaru $y = ax + bx^2$, kde a a b jsou rovněž jisté konstanty. Poznáváme v něm rovnici paraboly s koeficienty a a b. Částice se tedy pohybuje po *parabole*, má parabolickou dráhu.

Dolet

Dolet R definujeme jako vodorovnou vzdálenost, kterou střela urazí od okamžiku výstřelu do okamžiku návratu do počáteční výšky nad povrchem Země. V tomto okamžiku je poloha střely dána souřadnicemi $x = R$ a $y = y_0$. Jejich dosazením do rovnic (4.15) a (4.16) můžeme dolet snadno určit:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0) t = R$$

a

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0) t - \tfrac{1}{2} g t^2 = 0.$$

Vyloučíme čas a dostaneme

$$R = \frac{2 {v_0}^2}{g} \sin\theta_0 \cos\theta_0.$$

(Totéž bychom získali dosazením $x = R$ a $y = 0$ do (4.19).) Užitím identity $\sin 2\theta_0 = 2 \sin\theta_0 \cos\theta_0$ z dod. E nakonec upravíme výsledek do tvaru

$$R = \frac{{v_0}^2}{g} \sin 2\theta_0. \tag{4.20}$$

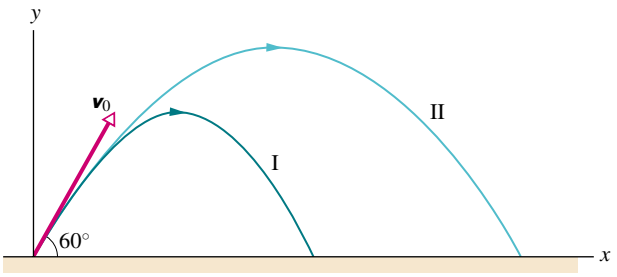
Můžeme si všimnout, že při pevně zvolené velikosti počáteční rychlosti docílíme největšího doletu při elevačním úhlu θ, který splňuje podmínku $\sin 2\theta_0 = 1$, tj. $2\theta_0 = 90^\circ$ a $\theta_0 = 45^\circ$.

Dolet R nabývá největší hodnoty, je-li elevační úhel roven 45°.

Vliv odporu prostředí

Do této chvíle jsme předpokládali, že vliv okolního vzduchu na pohyb tělesa je zanedbatelný. Tento předpoklad může být celkem dobře splněn při nízkých rychlostech. Ve skutečnosti však okolní prostředí klade pohybu tělesa jistý odpor, který může vést ke značným odchylkám idealizovaných výpočtů od skutečnosti, zejména při vyšších rychlostech. Jako příklad porovnání pohybu ve vakuu a skutečného letu tělesa vzduchem poslouží obr. 4.13. Jsou v něm schematicky znázorněny trajektorie dvou tenisových míčků odpálených úderem rakety. Velikost počáteční rychlosti je v obou případech 160 km/h a elevační úhel 60°. Trajektorie I odpovídá skutečnému pohybu míčku, trajektorie II je vypočtena pro případ jeho pohybu ve vakuu. Číselné hodnoty uvedené v tab. 4.1 jsme převzali z článku „The Trajectory of a Fly Ball" publikovaného v časopisu *The Physics Teacher* v lednu 1985. Pohybu v odporujícím prostředí se budeme podrobněji věnovat v kap. 6.

KONTROLA 5: Jak se mění (a) vodorovná a (b) svislá složka rychlosti šikmo vrženého míče? Určete (c) vodorovnou a (d) svislou složku jeho zrychlení ve vzestupné i sestupné části trajektorie i v jejím vrcholu. Odpor vzduchu zanedbejte.



Obr. 4.13 (I) Dráha tenisového míčku vypočtená (na počítači) s uvážením odporu vzduchu. (II) Dráha míčku ve vakuu, vypočtená pro stejnou počáteční rychlost pomocí vztahů odvozených v této kapitole. Důležité číselné údaje o obou trajektoriích jsou shrnuty v tab. 4.1.

Tabulka 4.1 **Dva míčky v letu**

	DRÁHA I (VZDUCH)	DRÁHA II (VAKUUM)
dolet	98,5 m	177 m
největší výška	53,0 m	76,8 m
doba letu	6,6 s	7,9 s

Elevační úhel je 60° a počáteční rychlost má velikost 160 km/h (obr. 4.13).

PŘÍKLAD 4.6

Záchranný letoun letí na pomoc tonoucímu. Pilot udržuje stálou výšku 1 200 m nad hladinou a směřuje přímo nad hlavu člověka (obr. 4.14). Rychlost letadla má velikost 430 km/h. Při jakém zorném úhlu φ musí pilot uvolnit záchranný vak, aby dopadl co nejblíže k tonoucímu?

ŘEŠENÍ: Počáteční rychlost vaku $\boldsymbol{v}_0$ je shodná s rychlostí letadla. Má tedy velikost 430 km/h a vodorovný směr. Poněvadž víme, v jak velké výšce je vak vypuštěn, můžeme snadno určit dobu jeho pádu na hladinu. Do rovnice (4.16), zapsané ve tvaru

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

dosadíme $y - y_0 = -1\,200$ m (záporné znaménko je dáno orientací osy y) a $\theta_0 = 0$:

$$-1\,200\text{ m} = 0 - \tfrac{1}{2}(9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})t^2.$$

Řešením této rovnice vzhledem k neznámé t dostaneme

$$t = \sqrt{\frac{2(1\,200\text{ m})}{(9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}} = 15{,}65\text{ s}.$$

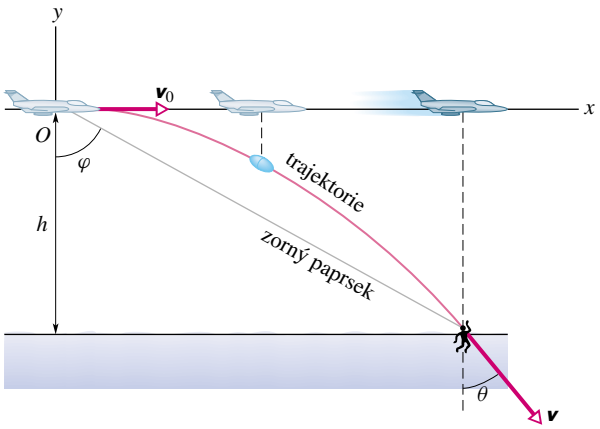
Za tuto dobu urazí vak i letadlo ve vodorovném směru vzdálenost určenou vztahem (4.15):

$$x - x_0 = (v_0\cos\theta_0)t = \\ = (430\text{ km}\cdot\text{h}^{-1})(\cos 0^\circ)(15{,}65\text{ s})\left(\frac{1\text{ h}}{3\,600\text{ s}}\right) = \\ = 1{,}869\text{ km} = 1\,869\text{ m}.$$

Pro $x_0 = 0$ je tedy $x = 1\,869$ m. Výpočet zorného úhlu φ je již zřejmý z obr. 4.14.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{h} = \left(\frac{1\,869\text{ m}}{1\,200\text{ m}}\right) = 1{,}558,$$
$$\varphi = 57^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vodorovný průmět rychlosti vaku je v každém okamžiku shodný s rychlostí letadla, takže pilot vidí letící vak neustále pod sebou.



Obr. 4.14 Příklad 4.6. Letadlo letí ve vodorovném směru stálou rychlostí. Během letu vyhodí pilot záchranný vak. Vodorovný průmět rychlosti padajícího vaku je v každém okamžiku shodný s rychlostí letadla. Vak dopadne na hladinu rychlostí $\boldsymbol{v}$, která svírá se svislým směrem úhel θ.

PŘÍKLAD 4.7

Při filmování honičky na ploché střeše má kaskadér přeskočit na střechu sousední budovy (obr. 4.15). Ještě předtím ho prozíravě napadne, zda vůbec může tento úkol zvládnout, běží-li po střeše nanejvýš rychlostí 4,5 m·s^{-1}. Poradíme mu?

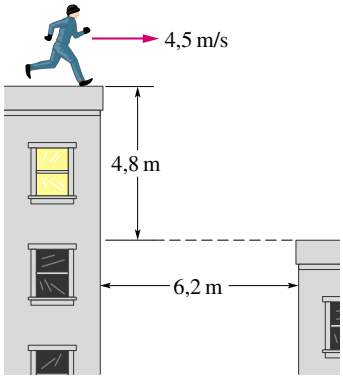
ŘEŠENÍ: Skok z výšky 4,8 m trvá po dobu t, kterou určíme z rovnice (4.16). Dosadíme $y - y_0 = -4{,}8$ m (pozor na znaménko) a $\theta_0 = 0$ a po drobné úpravě dostaneme

$$t = \sqrt{-\frac{2(y - y_0)}{g}} = \sqrt{-\frac{2(-4{,}8\text{ m})}{(9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}} = 0{,}990\text{ s}.$$

Nyní je třeba určit, jak daleko doletí kaskadér za tuto dobu ve vodorovném směru. Odpověď získáme z rovnice (4.15):

$$x - x_0 = (v_0\cos\theta_0)t = \\ = (4{,}5\text{ m}\cdot\text{s}^{-1})(\cos 0^\circ)(0{,}990\text{ s}) = 4{,}5\text{ m}.$$

Sousední budova je však ve vzdálenosti 6,2 m. Rada je jasná: neskákat.



Obr. 4.15 Příklad 4.7. Má kaskadér skočit?

PŘÍKLAD 4.8

Pirátská loď je zakotvena 560 m od pobřežní pevnosti, která chrání vjezd do ostrovního přístavu (obr. 4.16). Obránci mají k dispozici dělo umístěné v úrovni mořské hladiny, které může vystřelit náboj rychlostí 82 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

(a) Pod jakým elevačním úhlem musí být nastavena hlaveň, aby náboj pirátskou loď zasáhl?

ŘEŠENÍ: Hledaný úhel θ_0 zjistíme přímo z rovnice (4.20):

$$\sin 2\theta_0 = \frac{gR}{v_0^2} = \frac{(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(560\ \mathrm{m})}{(82\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2} = \\ = 0{,}816.$$

Této hodnoty nabývá funkce sin pro dva různé úhly z intervalu od 0° do 360°: 54,7° a 125,3°. Získáváme tedy dvě hodnoty elevačního úhlu,

$$\theta_0 = \tfrac{1}{2}(54{,}7°) \doteq 27° \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$\theta_0 = \tfrac{1}{2}(125{,}3°) \doteq 63°. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Zvolí-li velitel pevnosti kteroukoli z nich, bude pirátská loď zničena (za předpokladu, že pohyb střely není ovlivněn odporem vzduchu).

(b) Pro oba elevační úhly vypočtené v části (a) určete dobu letu střely.

ŘEŠENÍ: Dobu t vyjádříme z rovnice (4.15) a postupně dosadíme oba úhly. Pro $\theta_0 = 27°$ dostaneme

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0} = \frac{(560\ \mathrm{m})}{(82\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\cos 27°} = \\ = 7{,}7\ \mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

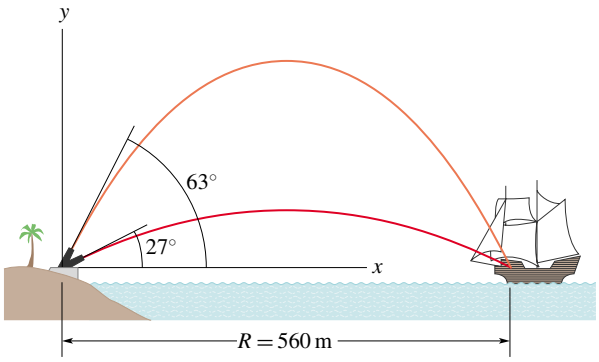
Pro $\theta_0 = 63°$ vychází $t = 15$ s. Podle očekávání trvá let střely při větším elevačním úhlu déle.

(c) V jaké vzdálenosti od pevnosti již bude pirátská loď mimo dostřel?

ŘEŠENÍ: Víme, že dolet střely je největší při elevačním úhlu $\theta_0 = 45°$. Dosazením této hodnoty do rovnice (4.20) dostaneme

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0 = \frac{(82\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2}{(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}\sin(2\cdot 45°) = \\ = 690\ \mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

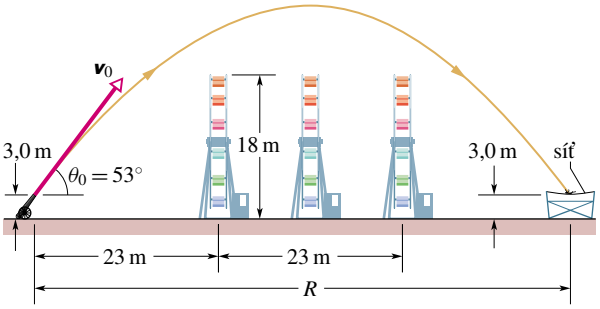
Vydá-li se pirátská loď na ústup, začnou se hodnoty obou elevačních úhlů postupně sbližovat a splynou v okamžiku, kdy bude loď od pevnosti vzdálena 690 m. Jejich společná hodnota je $\theta_0 = 45°$. Ve vzdálenosti větší než 690 m jsou již piráti v bezpečí.



Obr. 4.16 Příklad 4.8. Náboj vystřelený z děla v přístavní pevnosti zasáhne pirátskou loď, míří-li hlaveň ve směru určeném kterýmkoli ze dvou možných elevačních úhlů.

PŘÍKLAD 4.9

Obr. 4.17 znázorňuje historický přelet Emanuela Zacchiniho nad třemi ruskými koly vysokými 18 m. Jejich rozmístění je z obrázku zřejmé. Zacchini byl vystřelen ze speciálního děla rychlostí o velikosti 26,5 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem $\theta_0 = 53°$. Ústí hlavně i záchranná síť byly ve výšce 3,0 m nad zemí.



Obr. 4.17 Příklad 4.9. Let „lidské střely“ nad ruskými koly v zábavním parku. Umístění záchranné sítě.

(a) Ověřte si, že artista skutečně přeletěl nad prvním kolem.

ŘEŠENÍ: Počátek soustavy souřadnic zvolme v ústí hlavně. Při této volbě je $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$. Abychom zodpověděli položenou otázku, musíme určit y-ovou souřadnici artisty pro $x = 23\,\mathrm{m}$. Použijeme k tomu rovnici (4.19):

$$y = (\operatorname{tg}\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2} =$$
$$= (\operatorname{tg}53^\circ)(23\,\mathrm{m}) - \frac{(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(23\,\mathrm{m})^2}{2(26{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2(\cos 53^\circ)^2} =$$
$$= 20{,}3\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výška artisty nad zemí je však v tomto okamžiku 23,3 m, neboť počátek soustavy souřadnic je umístěn ve výšce 3,0 m. Artista proletí $23{,}3 - 18 = 5{,}3\,\mathrm{m}$ nad prvním kolem.

(b) Předpokládejme, že vrchol trajektorie leží právě nad prostředním kolem. Jak vysoko nad ním artista proletí?

ŘEŠENÍ: Ve vrcholu trajektorie je $v_y = 0$ a rovnice (4.18) nabude tvaru

$$v_y^2 = (v_0\sin\theta_0)^2 - 2gy = 0.$$

Jejím řešením vzhledem k neznámé y dostaneme

$$y = \frac{(v_0\sin\theta_0)^2}{2g} = \frac{(26{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2(\sin 53^\circ)^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})} = 22{,}9\,\mathrm{m}.$$

Výšková „rezerva“ při průletu artisty nad prostředním kolem činí 7,9 m.

(c) Určete dobu celého letu.

ŘEŠENÍ: Dobu letu můžeme určit několika způsoby. Jednu z možností nabízí rovnice (4.16) s uvážením skutečnosti, že při dopadu je $y = 0$. Dostáváme

$$y = (v_0\sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

tj.

$$t = \frac{2v_0\sin\theta_0}{g} = \frac{2(26{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\sin 53^\circ}{(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})} =$$
$$= 4{,}3\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jak daleko od děla je třeba umístit záchrannou síť?

ŘEŠENÍ: Dolet R získáme například z rov. (4.15) pro $x_0 = 0$, do níž dosadíme dobu letu.

$$R = (v_0\cos\theta_0)t =$$
$$= (26{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(\cos 53^\circ)(4{,}3\,\mathrm{s}) =$$
$$= 69\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Nyní již umíme zodpovědět úvodní otázku celé kapitoly: Jak Zacchini zjistil, kam je třeba umístit záchrannou síť? Kde získal jistotu, že ruská kola skutečně přeletí? Ať již to byl on sám nebo kdokoli jiný, musel provést stejné výpočty jako my před chvílí. Složitými úvahami, které by umožnily respektovat vliv prostředí, se Zacchini pochopitelně nezabýval. Věděl však, že odpor vzduchu jeho let zbrzdí a zmenší tak skutečný dolet ve srovnání s hodnotou vypočtenou z jednoduchých vztahů. Proto použil rozměrnou síť a posunul ji o něco blíže k dělu. Zabezpečil si tak poměrně dobrou bezpečnost letu v různých konkrétních situacích, lišících se především podmínkami určujícími vliv okolního prostředí. Tak jako tak musela být nepředvídatelnost vlivu prostředí zdrojem určitého pocitu nejistoty a napětí před každou reprízou tohoto odvážného kousku.

Při podobných pokusech jsou artisté vystaveni ještě jinému nebezpečí. I při kratších letech je totiž zrychlení v hlavní děla tak velké, že způsobí krátkou ztrátu vědomí. Kdyby artista dopadl do sítě ještě v bezvědomí, mohl by si zlomit vaz. Artisté proto absolvují speciální trénink, aby se dokázali včas probrat. Lety předváděné v cirkusové manéži jsou podstatně kratší než let Emanuela Zacchiniho. Navíc jsou dnes daleko lépe technicky zabezpečeny. Problém bezvědomí tak prakticky představuje jejich jediné riziko.

RADY A NÁMĚTY

Bod 4.3: *Číselný a algebraický výpočet*

Zaokrouhlovacím chybám při číselném výpočtu se můžeme vyhnout tak, že problém řešíme nejprve obecně (algebraicky) a číselné hodnoty dosadíme až do výsledného vztahu. Při řešení př. 4.6 až 4.9 by takový postup byl celkem snadný a zkušenější řešitelé úloh by jej jistě použili. V úvodních kapitolách však raději volíme postupné numerické řešení, abychom získali jasnější představu o hodnotách mezivýsledků. Později dáme přednost řešení algebraickému.

4.7 ROVNOMĚRNÝ POHYB PO KRUŽNICI

Pohyb částice po kružnici nebo jejím oblouku nazýváme **rovnoměrným pohybem po kružnici**, je-li velikost rychlosti částice konstantní. Možná nás překvapí, že i když se velikost rychlosti nemění, je *zrychlení částice nenulové*. Zrychlení totiž často spojujeme se změnou velikosti rychlosti a zapomínáme, že rychlost $\boldsymbol{v}$ je vektorovou veličinou, a má tedy i směr. Při jakékoli změně rychlosti, i kdyby šlo pouze o změnu směru, je zrychlení částice nenulové. Právě takovým případem je rovnoměrný pohyb po kružnici.

Velikost a směr jeho zrychlení určíme pomocí obr. 4.18. Částice na obrázku se pohybuje po kružnici o poloměru r a její rychlost má konstantní velikost v. Ve dvou bodech P

a Q umístěných symetricky vzhledem k ose y jsou zakresleny vektory rychlostí $\boldsymbol{v}_P$ a $\boldsymbol{v}_Q$. Tyto vektory mají sice stejnou velikost, ale liší se směrem. Jsou proto různé. Jejich x-ové a y-ové složky jsou

$$v_{Px} = +v\cos\theta, \quad v_{Py} = +v\sin\theta$$

a

$$v_{Qx} = +v\cos\theta, \quad v_{Qy} = -v\sin\theta.$$

Částice, jejíž rychlost má stálou velikost, přejde z bodu P do bodu Q za dobu

$$\Delta t = \frac{\text{arc}(PQ)}{v} = \frac{r(2\theta)}{v}, \qquad (4.21)$$

kde arc(PQ) označuje délku kruhového oblouku spojujícího body P a Q.

Nyní již dokážeme určit složky průměrného zrychlení částice $\overline{\boldsymbol{a}}$ v časovém intervalu Δt. Pro x-ovou složku dostáváme

$$\overline{a}_x = \frac{v_{Qx} - v_{Px}}{\Delta t} = \frac{v\cos\theta - v\cos\theta}{\Delta t} = 0.$$

Tento výsledek není nikterak překvapivý a je zřejmý ze symetrie obr. 4.18. V bodě P je x-ová složka rychlosti stejná jako v bodě Q.

Složku $\overline{a}_y$ určíme z rovnice (4.21):

$$\overline{a}_y = \frac{v_{Qy} - v_{Py}}{\Delta t} = \frac{-v\sin\theta - v\sin\theta}{\Delta t} = \\ = -\frac{2v\sin\theta}{2r\theta/v} = -\left(\frac{v^2}{r}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right).$$

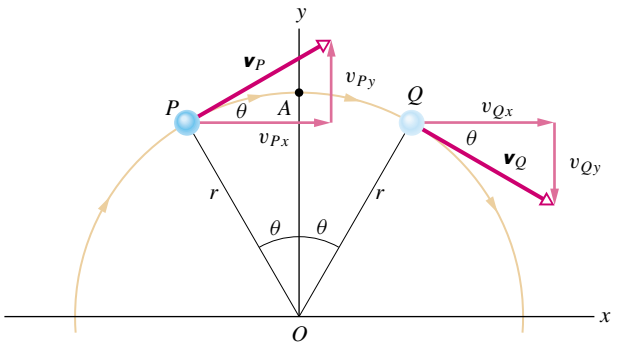
Záporné znaménko znamená, že průmět zrychlení $\overline{\boldsymbol{a}}$ do osy y v obr. 4.18 směřuje svisle dolů.

Při limitním přechodu úhlu θ v obr. 4.18 k nulové hodnotě se budou body P i Q blížit k bodu A ležícímu v nejvyšším bodě kružnice. Limitním případem průměrného zrychlení $\overline{\boldsymbol{a}}$, jehož složky jsme právě určili, bude okamžité zrychlení $\boldsymbol{a}$ v bodě A.

Okamžité zrychlení v bodě A na obr 4.18 míří v obrázku svisle dolů, *do středu kružnice*. Při zmenšování úhlu θ se totiž směr průměrného zrychlení nemění a zůstane tedy zachován i při limitním přechodu. Abychom určili *velikost* a vektoru okamžitého zrychlení, potřebujeme znát limitní hodnotu podílu $\sin\theta/\theta$ při velmi malých úhlech θ. Z matematiky je známo, že tato hodnota je rovna jedné. Ze vztahu pro y-ovou složku průměrného zrychlení již snadno dostaneme velikost okamžitého zrychlení:

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{(dostředivé zrychlení).} \qquad (4.22)$$

Při rovnoměrném pohybu částice rychlostí o velikosti v po kružnici o poloměru r (nebo jejím oblouku) směřuje zrychlení částice trvale do středu kružnice a má konstantní velikost v^2/r.



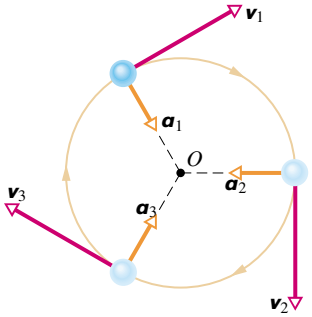
Obr. 4.18 Částice se pohybuje rovnoměrně po kružnici o poloměru r. Velikost její rychlosti je v, $\boldsymbol{v}_P$ a $\boldsymbol{v}_Q$ jsou rychlosti částice v bodech P a Q, symetricky položených vzhledem k ose y. Rychlosti $\boldsymbol{v}_P$ a $\boldsymbol{v}_Q$ jsou rozloženy do složek. Okamžité zrychlení částice v libovolném bodě trajektorie míří do středu kružnice a má velikost v^2/r.

Částice oběhne celý obvod kružnice (vzdálenost $2\pi r$) za dobu T

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{(perioda),} \qquad (4.23)$$

zvanou **doba oběhu**, neboli **perioda**. V obecnějším pojetí rozumíme periodou dobu, za kterou vykoná částice právě jeden oběh po uzavřené trajektorii.

Na obr. 4.19 jsou zakresleny vektory okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení v různých fázích rovnoměrného pohybu po kružnici. Oba mají stále stejnou velikost, jejich směr se však během pohybu spojitě mění. Rychlost je vždy tečnou ke kružnici, orientovanou ve směru pohybu. Zrychlení trvale směřuje do středu kružnice, a proto je nazýváme **zrychlením dostředivým**.



Obr. 4.19 Rychlost a zrychlení částice při rovnoměrném pohybu po kružnici. Vektory mají stálou velikost, ale proměnný směr.

Zrychlení určující změnu směru rychlosti je stejně skutečné jako zrychlení, které souvisí se změnou její velikosti. Fotografie na obr. 2.8 zachycují tvář plukovníka Johna P. Stappa při prudkém brzdění raketových saní. Je jasné, že zřetelné fyziologické obtíže jsou způsobeny prudkou změnou *velikosti* rychlosti, neboť směr pohybu saní byl při tomto experimentu stálý. Kosmonaut při tréninku na centrifuze je naopak vystaven výrazným změnám *směru* rychlosti, zatímco její velikost je stálá. Fyziologické pocity vznikající v důsledku zrychlení jsou v obou případech stejné.

KONTROLA 6: Těleso se pohybuje v souřadnicové rovině xy po kruhové dráze se středem v počátku soustavy souřadnic. Bodem o x-ové souřadnici $x = -2\,\mathrm{m}$ prochází rychlostí $-(4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Určete (a) rychlost a (b) dostředivé zrychlení tělesa v bodě o y-ové souřadnici $y = 2\,\mathrm{m}$.

PŘÍKLAD 4.10

Stíhací piloti se oprávněně obávají příliš prudkých zatáček. Je-li totiž tělo pilota vystaveno velkému dostředivému zrychlení v situaci, kdy hlava směřuje do středu křivosti zatáčky, dochází k odkrvení mozku a poruše mozkových funkcí.

Úplné ztrátě vědomí předchází několik varovných příznaků: Je-li velikost dostředivého zrychlení mezi hodnotami $2g$ a $3g$, cítí se pilot být jakoby „těžký“. Při hodnotě $4g$ začíná vidět pouze černobíle a jeho zorný úhel se zmenšuje (tzv. tunelové vidění). Je-li takovému zrychlení vystaven delší dobu anebo se velikost zrychlení dokonce ještě zvětší, přestává pilot vidět úplně a vzápětí ztrácí vědomí. Tento stav se nazývá g-LOC z anglického „g-induced loss of consciousness“.

Jaké je dostředivé zrychlení pilota (v jednotkách g) stíhačky F-22 při průletu kruhové zatáčky o poloměru 5,80 km rychlostí o velikosti $v = 2\,580\,\mathrm{km/h}$ $(716\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})$?

ŘEŠENÍ: Dosazením číselných údajů do vztahu (4.22) dostaneme

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(716\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{5\,800\,\mathrm{m}} = \\ = 88{,}39\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 9{,}0g. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pilot, který by byl natolik neopatrný, že by skutečně navedl stroj do takové zatáčky, by téměř okamžitě upadl do bezvědomí bez jakýchkoliv varovných příznaků.

PŘÍKLAD 4.11

Umělá družice Země je na oběžné dráze ve výšce $h = 200\,\mathrm{km}$ nad zemským povrchem. V této výšce má gravitační zrychlení $\boldsymbol{g}$ (viz kap. 6) velikost $9{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jaká je oběžná rychlost v družice?

ŘEŠENÍ: Družice se pohybuje kolem Země rovnoměrně po kružnici. Dostředivým zrychlením je zrychlení gravitační. Oběžnou rychlost v určíme z rovnice (4.22), do které dosadíme $a = g$ a $r = R_Z + h$, kde R_Z je poloměr Země (viz vnitřní strana obálky nebo dod. C):

$$g = \frac{v^2}{R_Z + h}.$$

Odtud

$$v = \sqrt{g(R_Z + h)} = \\ = \sqrt{(9{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(6{,}37{\cdot}10^6\,\mathrm{m} + 200{\cdot}10^3\,\mathrm{m})} = \\ = 7\,770\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 7{,}77\,\mathrm{km/s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Snadno se přesvědčíme, že doba oběhu družice kolem Země, tedy perioda jejího pohybu, je rovna 1,47 h.

4.8 VZÁJEMNÝ POHYB PO PŘÍMCE

Představme si, že pozorujeme kachnu, jak letí řekněme na sever rychlostí o velikosti 30 km/h. Vzhledem k jiné kachně, která letí spolu s ní, se však naše kachna nepohybuje. Je zřejmé, že rychlost pohybu tělesa závisí na vztažné soustavě pozorovatele, který provádí měření. Obecně budeme **vztažnou soustavou** rozumět vhodně zvolený objekt, s nímž spojíme soustavu souřadnic.

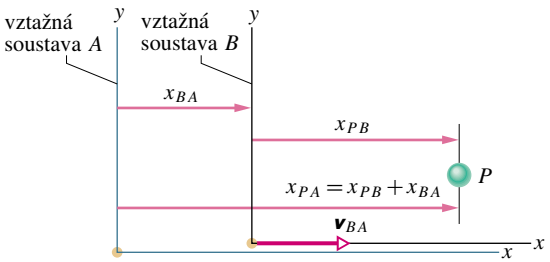
Nejpřirozenější vztažnou soustavou je pochopitelně ta, kterou neustále používáme, aniž si to snad uvědomujeme — zem pod našima nohama. Sdělí-li dopravní policista řidiči, že jel rychlostí 100 km/h, má samozřejmě na mysli rychlost vzhledem k souřadnicové soustavě spojené s povrchem Země. A řidič tomu také tak rozumí.

Pro pozorovatele v letadle nebo třeba v kosmické lodi nemusí být vztažná soustava spojená se Zemí právě nejvhodnější (například pro popis pohybu okolních předmětů). Můžeme si ovšem vybrat kteroukoli jinou, neboť výběr vztažných soustav není nijak omezen. Když už se však pro některou z nich rozhodneme, je důležité se této volby držet a všechna měření vztahovat k vybrané vztažné soustavě.

Problém popisu pohybu částice v různých vztažných soustavách vyložíme pomocí jednoduchého příkladu: Aleš (vztažná soustava A) sedí v autě zaparkovaném na dálnici v odstavném pruhu a sleduje rychlé auto P (částice), které právě projelo kolem v levém pruhu. Barbora (vztažná soustava B) jede v pravém pruhu stálou rychlostí. Také ona pozoruje automobil P. Dejme tomu, že oba pozorovatelé ve stejném okamžiku změří polohu sledovaného vozidla. Z obr. 4.20, který znázorňuje celou situaci, je zřejmé, že

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}. \qquad (4.24)$$

Všechny členy v této rovnici jsou složky vektorů a mohou být jak kladné, tak záporné. Slovy můžeme rovnici (4.24) vyjádřit takto: „Souřadnici částice P měřenou pozorovatelem ve vztažné soustavě A určíme tak, že k souřadnici částice P měřené pozorovatelem v soustavě B *přičteme* souřadnici pozorovatele B měřenou pozorovatelem A.“ Všimněte si významu veličin obsažených v rovnici (4.24) v souvislosti s jejich označením pomocí indexů.



Obr. 4.20 Aleš (vztažná soustava A) a Barbora (vztažná soustava B) pozorují vozidlo P. Všechna vozidla se pohybují podél společné osy x obou vztažných soustav. Vektor $\boldsymbol{v}_{BA}$ představuje vzájemnou rychlost vztažných soustav (rychlost soustavy B vzhledem k soustavě A). Trojice měření vyznačených poloh je provedena v jediném okamžiku.

Derivací rovnice (4.24) podle času dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_{PA}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_{PB}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_{BA}),$$

tj. (vzhledem k tomu, že $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$)

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}. \qquad (4.25)$$

Tato rovnice vyjadřuje vztah mezi rychlostmi téhož objektu (automobil P), měřenými v různých vztažných soustavách. Tyto rychlosti jsou obecně různé. Vztah (4.25) lze velmi jednoduše vyjádřit slovy: „Rychlost částice P měřená ve vztažné soustavě A je součtem její rychlosti měřené v soustavě B a rychlosti soustavy B měřené v soustavě A.“ Symbolem v_{BA} značíme rychlost vztažné soustavy B vzhledem k soustavě A (obr. 4.20), neboli relativní rychlost B vůči A; rychlost v_{PA} se též nazývá relativní rychlost (automobilu) vůči vztažné soustavě A.

Zatím uvažujeme pouze o takových vztažných soustavách, které se navzájem pohybují konstantní rychlostí. Barbora (soustava B) tedy musí jet vzhledem k Alešovi (soustava A) stálou rychlostí. Pohyb automobilu P není omezen ničím, může být zrychlený či zpožděný, automobil může i zastavit nebo couvat.

Derivací rovnice (4.25) dostaneme vztah pro zrychlení

$$a_{PA} = a_{PB}. \qquad (4.26)$$

(Uvědomte si, že rychlost v_{BA} je konstantní. Její časová derivace je tedy nulová.) Informace obsažená ve vztahu (4.26) je velmi důležitá:

Částice má stejné zrychlení ve všech vztažných soustavách pohybujících se navzájem konstantními rychlostmi.

Jinými slovy:

Pozorovatelé v různých vztažných soustavách, pohybujících se navzájem konstantními rychlostmi, naměří u zkoumané částice totéž zrychlení.

KONTROLA 7: V následující tabulce jsou uvedeny rychlosti (v km/h) Barbořiny vztažné soustavy B a vozidla P pro tři různé situace. Doplňte chybějící údaje a určete, jak se mění vzdálenost vozidel P a B.

SITUACE	v_{BA}	v_{PA}	v_{PB}
1	+50	+50	
2	+30		+40
3		+60	−20

PŘÍKLAD 4.12

Aleš parkuje na okraji silnice, která vede od východu na západ. Sleduje automobil P jedoucí západním směrem. Barbora jede na východ rychlostí $v_{BA} = 52\,\mathrm{km/h}$, a také pozoruje vůz P. Směr od západu k východu považujeme za kladný.

(a) V určitém okamžiku Aleš zjistil, že se vozidlo P pohybuje rychlostí 78 km/h. Jakou rychlost vozidla P naměří v tomto okamžiku Barbora?

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (4.25) dostaneme

$$v_{PB} = v_{PA} - v_{BA}.$$

Víme, že $v_{PA} = -78\,\mathrm{km/h}$. Záporné znaménko vyjadřuje skutečnost, že se vůz P pohybuje západním (tedy záporným) směrem. Rychlost vztažné soustavy B vzhledem k A je rovněž zadána, $v_{BA} = 52\,\mathrm{km/h}$. Je tedy

$$v_{PB} = (-78\,\mathrm{km/h}) - (52\,\mathrm{km/h}) = \\ = -130\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kdyby byl vůz P spojen s vozem Barbory lanem navinutým na cívce, odvíjelo by se lano z cívky právě touto rychlostí.

(b) Aleš zpozoruje, že vůz P se po 10 s brzdění zastavil. Jaké zrychlení vozu P Aleš naměřil za předpokladu, že automobil brzdil rovnoměrně?

ŘEŠENÍ: Z rovnice (2.11) ($v_x = v_{0x} + a_x t$) dostaneme

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{0 - (-78\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})}{(10\,\mathrm{s})} = \\ = \left(\frac{78\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}}{10\,\mathrm{s}}\right)\left(\frac{1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{3{,}6\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}}\right) = \\ = 2{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaké zrychlení vozu P naměří Barbora?

ŘEŠENÍ: V části (a) této úlohy jsme zjistili, že počáteční rychlost vozu P vzhledem k Barboře je $-130\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Vůz P na dálnici zastavil, je tedy v klidu vzhledem k Alešově vztažné soustavě. V soustavě Barbořině se však pohybuje rychlostí o velikosti $52\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ směrem na západ. Rychlost automobilu P vzhledem k Barboře je tedy $-52\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Užitím vztahu $v_x = v_{0x} + a_x t$ dostaneme

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(-52\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}) - (-130\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})}{(10\,\mathrm{s})} = \\ = 2{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Barbořin výsledek je, podle očekávání, stejný jako Alešův. Ve výpočtech jsme tedy neudělali žádnou chybu.

4.9 VZÁJEMNÝ POHYB V ROVINĚ

Vzájemný pohyb těles v rovině (případně i v prostoru) lze nejlépe popsat pomocí vektorů.

Na obr. 4.21 jsou znázorněny vztažné soustavy A a B našich dvou pozorovatelů, kteří opět sledují pohyb částice P, tentokrát v rovině. Soustavy se stejně jako v předchozím případě pohybují konstantní vzájemnou (neboli relativní) rychlostí $\boldsymbol{v}_{BA}$. Pro zjednodušení výpočtů navíc předpokládejme, že odpovídající si osy obou soustav (x-ové a y-ové) jsou trvale rovnoběžné.

Pozorovatelé v soustavách A a B v určitém okamžiku změří polohu částice P. Z vektorového trojúhelníka na obr. 4.21 je na první pohled zřejmý vztah mezi jejími polohovými vektory v obou soustavách:

$$\boldsymbol{r}_{PA} = \boldsymbol{r}_{PB} + \boldsymbol{r}_{BA}. \qquad (4.27)$$

Tato vektorová transformační rovnice odpovídá skalární rovnici (4.24), platné pro pohyb po přímce.

Derivujeme-li ji podle času, získáme vztah mezi rychlostmi částice naměřenými pozorovateli v soustavách A a B:

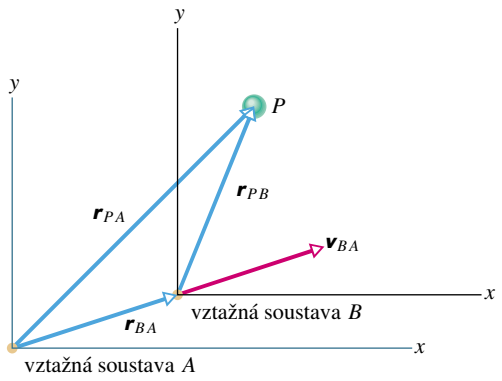
$$\boldsymbol{v}_{PA} = \boldsymbol{v}_{PB} + \boldsymbol{v}_{BA}. \qquad (4.28)$$

Tento vztah je dvojrozměrným ekvivalentem skalární rovnice (4.25). Význam indexů je stejný jako v rovnici (4.25) a $\boldsymbol{v}_{BA}$ opět představuje (konstantní) rychlost soustavy B vzhledem k soustavě A.

Dalším derivováním rovnice (4.28) dostaneme vztah pro zrychlení

$$\boldsymbol{a}_{PA} = \boldsymbol{a}_{PB}. \qquad (4.29)$$

Důležitý výsledek, který jsme získali pro případ pohybu po přímce, zůstává v platnosti i při pohybu v rovině či prostoru: při konstantních vzájemných rychlostech vztažných soustav naměří všichni pozorovatelé stejné zrychlení pohybující se částice.



Obr. 4.21 Vztažné soustavy v rovině. Vektory $\boldsymbol{r}_{PA}$ a $\boldsymbol{r}_{PB}$ určují polohu částice v soustavách A a B, $\boldsymbol{r}_{BA}$ je polohový vektor počátku soustavy B v soustavě A. Vektor $\boldsymbol{v}_{BA}$ představuje vzájemnou rychlost vztažných soustav (rychlost soustavy B vzhledem k A). Předpokládáme, že tato rychlost je konstantní.

PŘÍKLAD 4.13

Netopýr letící rychlostí $\boldsymbol{v}_{NZ}$ zaregistruje mouchu, která se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_{MZ}$. Rychlosti jsou zadány na obr. 4.22a a jsou vztaženy k zemi. Určete rychlost $\boldsymbol{v}_{MN}$ mouchy vzhledem k netopýrovi a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů.

ŘEŠENÍ: Podle obr. 4.22a jsou rychlosti mouchy a netopýra vzhledem k zemi dány vztahy

$$\boldsymbol{v}_{MZ} = (5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\cos 50^\circ)\boldsymbol{i} + (5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\sin 50^\circ)\boldsymbol{j}$$

a

$$\boldsymbol{v}_{NZ} = (4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\cos 150^\circ)\boldsymbol{i} + (4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\sin 150^\circ)\boldsymbol{j}.$$

Úhly odměřujeme od kladného směru osy x. Při výpočtu vyjdeme ze skutečnosti, že rychlost $\boldsymbol{v}_{MN}$ *mouchy vzhledem k netopýrovi* je vektorovým součtem rychlosti $\boldsymbol{v}_{MZ}$ *mouchy*

vzhledem k zemi a rychlosti $\boldsymbol{v}_{ZN}$ země vzhledem k netopýrovi. Pak

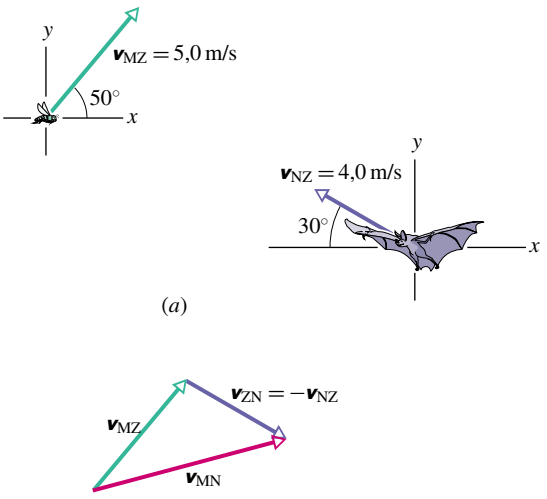
$$\boldsymbol{v}_{MN} = \boldsymbol{v}_{MZ} + \boldsymbol{v}_{ZN}$$

(obr. 4.22b). (Všimněte si, že „vnitřní“ indexy (bližší znaménku „plus“) na pravé straně této rovnice jsou stejné. Vnější indexy pravé strany se shodují s indexy na levé straně a na obou stranách rovnice vystupují ve stejném pořadí.) Vektor $\boldsymbol{v}_{ZN}$ je ovšem definován jako opačný k vektoru $\boldsymbol{v}_{NZ}$, tj. $\boldsymbol{v}_{ZN} = -\boldsymbol{v}_{NZ}$, dostáváme proto

$$\boldsymbol{v}_{MN} = \boldsymbol{v}_{MZ} + (-\boldsymbol{v}_{NZ}).$$

Dosazením rychlostí $\boldsymbol{v}_{MZ}$ a $\boldsymbol{v}_{NZ}$ (obr. 4.22) do předchozího vztahu dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{MN} &= (5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(\cos 50^\circ)\boldsymbol{i} + (5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(\sin 50^\circ)\boldsymbol{j} - \\ &\quad - (4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(\cos 150^\circ)\boldsymbol{i} - \\ &\quad - (4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(\sin 150^\circ)\boldsymbol{j} = \\ &= 3{,}21\boldsymbol{i} + 3{,}83\boldsymbol{j} + 3{,}46\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j} \doteq \\ &\doteq (6{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} + (1{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$



Obr. 4.22 Příklad 4.13. (a) Netopýr zaregistroval mouchu. (b) Vektory rychlosti mouchy a netopýra.

PŘÍKLAD 4.14

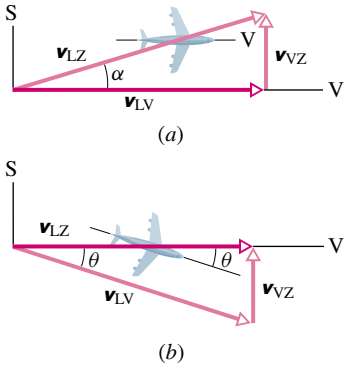
Kompas na palubě letadla ukazuje, že letadlo směřuje k východu. Palubní rychloměr udává hodnotu 215 km/h vzhledem k okolnímu vzduchu. Vane stálý jižní vítr rychlostí 65,0 km/h.

(a) Jaká je rychlost letadla vzhledem k zemi?

ŘEŠENÍ: Pohybujícím se tělesem je nyní letadlo (L). Letadlo (L) zde považujeme za hmotný bod. Jedna ze vztažných soustav je spojena se zemí (Z) a druhá se vzduchem (V). Podle rovnice (4.28) platí

$$\boldsymbol{v}_{LZ} = \boldsymbol{v}_{LV} + \boldsymbol{v}_{VZ}, \qquad (4.30)$$

kde $\boldsymbol{v}_{LZ}$ je rychlost letadla vzhledem k zemi, $\boldsymbol{v}_{LV}$ rychlost letadla vzhledem k okolnímu vzduchu a $\boldsymbol{v}_{VZ}$ rychlost vzduchu vzhledem k zemi (rychlost větru). Vektory rychlosti vystupující v rovnici (4.30) lze zakreslit tak, aby tvořily strany trojúhelníka podle obr. 4.23a. V obrázku si všimněte, že letadlo je orientováno přídí k východu, přesně tak, jak ukazuje palubní kompas. To však ještě neznamená, že se tímto směrem také skutečně pohybuje.



Obr . 4.23 Příklad 4.14. (a) Letadlo, jehož pilot udržuje východní kurs, je unášeno severním směrem. (b) Má-li letadlo letět východně, musí mířit částečně proti větru.

Velikost rychlosti letadla vzhledem k zemi určíme z vektorového trojúhelníka na obr. 4.23a:

$$\begin{aligned}v_{LZ} &= \sqrt{v_{LV}^2 + v_{VZ}^2} = \\ &= \sqrt{(215\,\mathrm{km/h})^2 + (65{,}0\,\mathrm{km/h})^2} = \\ &= 225\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

Úhel α na obr. 4.23a je dán vztahem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{VZ}}{v_{LV}} = \frac{(65{,}0\,\mathrm{km/h})}{(215\,\mathrm{km/h})} = 0{,}302,$$

tj.

$$\alpha = 16{,}8^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Letadlo letí vzhledem k zemi rychlostí o velikosti 225 km/h ve směru, který je od východního kursu odkloněn o 16,8° na sever. Vzhledem k zemi se tedy letadlo pohybuje rychleji než vůči okolnímu vzduchu.

(b) Jaký kurs musí pilot udržovat, chce-li skutečně letět na východ? (Kurs je určen údajem na palubním kompasu.)

ŘEŠENÍ: Aby letadlo letělo vzhledem k zemi přesně východním směrem, musí směřovat částečně proti větru a kompenzovat tak jeho unášivý vliv. Rychlost větru je stejná jako

v části (a). Diagram rychlostí odpovídající této situaci je na obr. 4.23b. Vektory $\boldsymbol{v}_{LV}$, $\boldsymbol{v}_{VZ}$, $\boldsymbol{v}_{LZ}$ tvoří opět pravoúhlý trojúhelník, podobně jako na obr. 4.23a a stále platí rovnice (4.30).

Velikost rychlosti letadla vzhledem k zemi určíme podle obr. 4.23b:

$$v_{LZ} = \sqrt{v_{LV}^2 - v_{VZ}^2} = \\ = \sqrt{(215\,\text{km/h})^2 - (65{,}0\,\text{km/h})^2} = \\ = 205\,\text{km/h}.$$

Z obrázku je rovněž zřejmé, že pilot musí udržovat kurs určený úhlem

$$\sin\theta = \frac{v_{VZ}}{v_{LV}} = \frac{(65{,}0\,\text{km/h})}{(215\,\text{km/h})} = 0{,}302,$$

tj.

$$\theta = 17{,}6^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Rychlost letadla vzhledem k zemi je nyní menší než vzhledem k okolnímu vzduchu.



4.10 VZÁJEMNÝ POHYB PŘI VYSOKÝCH RYCHLOSTECH

I když kosmické lety již před časem opustily oblast pouhé fantazie a staly se skutečností, stále na nás působí dojmem něčeho mimořádného. Vyvolávají především představu objektů pohybujících se velkými rychlostmi. Tak třeba typická velikost rychlosti družice na oběžné dráze kolem Země je 27 400 km/h. Máme-li ji však zařadit do kategorie „velkých rychlostí“, musíme se dohodnout, s jakými rychlostmi ji budeme porovnávat. Příroda sama nabízí jako standard rychlost světla ve vakuu

$$c = 299\,792\,458\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \text{ (rychlost světla ve vakuu).} \quad (4.31)$$

Později se přesvědčíme, že se žádný hmotný objekt nemůže pohybovat rychleji než světlo ve vakuu, a to bez ohledu na volbu vztažné soustavy, ve které jej pozorujeme. Všechny objekty běžných rozměrů se ve srovnání s tímto „světelným standardem“ pohybují velice pomalu. Přitom se nám jejich rychlost může zdát obrovská, posuzujeme-li ji našimi lidskými měřítky. Velikost rychlosti družice činí pouhých 0,002 5 % rychlosti světla. Na druhé straně se však rychlosti elementárních částic, například protonů nebo elektronů, mohou této hodnotě velmi přiblížit. Nemohou jí však v žádném případě dosáhnout či dokonce překročit.

Experimenty potvrzují, že elektron získá při urychlení napětím 10 milionů voltů rychlost o velikosti 0,998 8c. Použijeme-li pro jeho urychlení napětí 20 milionů voltů, velikost jeho rychlosti se sice ještě zvýší, avšak už jen na hodnotu 0,999 7c. Rychlost světla představuje hranici, ke které se rychlosti hmotných těles mohou přiblížit, ale nikdy jí nedosáhnou. Lety nadsvětelnými rychlostmi jsou možné jen ve fantastických literárních příbězích. A tak „warpový pohon“, známý z populárního seriálu *Star Trek* a umožňující kosmonautům letět rychlostí $c \cdot 2^n$ (n je číslo „warpu“), zůstane navždy jen ve světě fantazie.

Platí vůbec kinematika, kterou jsme právě vybudovali pro popis pohybu běžných (a tedy velmi pomalých) objektů, také pro velmi rychlé částice, například elektrony či protony? Odpověď, kterou může dát jedině experiment, je záporná. Zákonitosti běžné kinematiky *neplatí* pro tělesa s rychlostmi blízkými rychlosti světla. Pro popis pohybu takových těles musíme použít Einsteinovu **speciální teorii relativity**, která souhlasí s experimentem pro *libovolnou* rychlost.

Kinematické vztahy pro běžná tělesa získáme z rovnic odvozených v rámci Einsteinovy relativistické teorie přechodem k „malým“ rychlostem. Rovnice nerelativistické kinematiky, kterou bychom mohli nazývat „kinematikou pomalých těles“, souhlasí s experimentem o to hůře, čím je rychlost sledovaných těles větší. Uveďme příklad: vztah (4.25)

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} \qquad \text{(malé rychlosti)}$$

vyjadřuje souvislost mezi rychlostmi tělesa P měřenými dvěma pozorovateli v různých vztažných soustavách A a B. Odpovídající rovnice Einsteinovy teorie má tvar

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} \quad \text{(libovolné rychlosti).} \quad (4.32)$$

Pro $v_{PB} \ll c$ a $v_{BA} \ll c$ (splněno pro běžná tělesa) je hodnota jmenovatele zlomku velmi blízká jedničce a rovnice (4.32) přechází v rovnici (4.25).

Rychlost světla c je ústřední konstantou Einsteinovy teorie a vystupuje ve všech relativistických rovnicích. Každá z nich v případě „malých“ rychlostí přejde na odpovídající nerelativistický tvar. Ověření této skutečnosti je snadné. Při neomezeném zvyšování rychlosti světla se *všechny* rychlosti budou jevit jako malé a bude platit „kinematika pomalých těles“. Dosadíme-li například $c \to \infty$ do rovnice (4.32), dostaneme její nerelativistický tvar (4.25).

PŘÍKLAD 4.15

(Malé rychlosti) Pro $v_{PB} = v_{BA} = 0{,}000\,1c$ určete v_{PA} z rovnic (4.25) a (4.32).

ŘEŠENÍ: Z rovnice (4.25) dostaneme

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} = 0{,}000\,1c + 0{,}000\,1c = \\ = 0{,}000\,2c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z rovnice (4.32)

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} = \frac{0{,}000\,1c + 0{,}000\,1c}{1 + (0{,}000\,1c)^2/c^2} = \\ = \frac{0{,}000\,2c}{1{,}000\,000\,01} \doteq 0{,}000\,2c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Závěr: Pro rychlosti běžných hmotných těles vedou vztahy (4.25) a (4.32) ke stejným výsledkům. V takových případech můžeme celkem automaticky používat rovnici (4.25).

PŘÍKLAD 4.16

(Vysoké rychlosti) Určete v_{PA} ze vztahů (4.25) a (4.32), je-li $v_{PB} = v_{BA} = 0{,}65c$.

ŘEŠENÍ: Z rovnice (4.25) dostaneme

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} = 0{,}65c + 0{,}65c = \\ = 1{,}30c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z rovnice (4.32) plyne

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} = \frac{0{,}65c + 0{,}65c}{1 + (0{,}65c)(0{,}65c)/c^2} = \\ = \frac{1{,}30c}{1{,}423} = 0{,}91c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Závěr: Pro vysoké rychlosti jsou výsledky kinematiky pomalých těles a výsledky speciální teorie relativity velmi rozdílné. Klasická kinematika neklade na velikost rychlosti objektů žádná omezení. V jejím rámci jsou tedy přípustné i hodnoty větší než rychlost světla ve vakuu (jako v př. 4.16). Ve speciální teorii relativity naopak nikdy nemůže mít hmotný objekt vůči pozorovateli větší rychlost než světelnou, bez ohledu na to, jak vysoké rychlosti skládáme. Experiment závěry speciální teorie relativity plně potvrzuje.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Polohový vektor

Poloha částice vzhledem k počátku soustavy souřadnic je popsána *polohovým vektorem* $\boldsymbol{r}$, zapsaným pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic ve tvaru

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \qquad (4.1)$$

Vektory $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$ a $z\boldsymbol{k}$ jsou *průměty* polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ do směrů souřadnicových os, x, y a z jsou odpovídající *složky*. Polohový vektor je určen buď velikostí a jedním či dvěma úhly, nebo svými složkami.

Posunutí

Přemístění částice z polohy určené polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_1$ do polohy dané vektorem $\boldsymbol{r}_2$ je popsáno *vektorem posunutí* $\Delta\boldsymbol{r}$:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \qquad (4.2)$$

Jiný zápis posunutí využívá opět jednotkových vektorů:

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}, \qquad (4.3)$$

kde (x_1, y_1, z_1) jsou složky vektoru $\boldsymbol{r}_1$ a (x_2, y_2, z_2) složky vektoru $\boldsymbol{r}_2$.

Průměrná rychlost

Průměrná rychlost částice $\overline{\boldsymbol{v}}$ v časovém intervalu od t do $t + \Delta t$ je definována jako podíl

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}, \qquad (4.4)$$

kde $\Delta\boldsymbol{r}$ je posunutí částice v tomto intervalu.

Rychlost

Okamžitou rychlostí částice $\boldsymbol{v}$ rozumíme limitu její průměrné rychlosti, blíží-li se doba Δt k nule,

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \qquad (4.6)$$

tj.

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \qquad (4.7)$$

kde $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ a $v_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$. Směr vektoru okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$ je v každém okamžiku tečný k trajektorii částice.

Průměrné zrychlení

Změní-li se rychlost hmotného bodu za časový interval Δt z hodnoty $\boldsymbol{v}_1$ na hodnotu $\boldsymbol{v}_2$, je *průměrné zrychlení* $\overline{\boldsymbol{a}}$ v tomto intervalu definováno jako podíl

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}. \qquad (4.9)$$

Zrychlení

Při poklesu délky časového intervalu Δt k nulové hodnotě nabude průměrné zrychlení $\overline{\boldsymbol{a}}$ limitní hodnoty $\boldsymbol{a}$, kterou nazýváme (okamžitým) *zrychlením*,

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}, \qquad (4.10)$$

tj.

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{4.11}$$

kde $a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$, $a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t$ a $a_z = \mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t$.

S jednotlivými složkami vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{r}$ můžeme pracovat odděleně a používat vztahů pro jednorozměrný pohyb, odvozených v kap. 2.

Šikmý vrh

Při šikmém vrhu se částice s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ pohybuje ve svislé rovině s tíhovým zrychlením $\boldsymbol{g}$. Je-li její počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$ zadána velikostí v_0 a úhlem, který vektor $\boldsymbol{v}_0$ svírá s vodorovnou rovinou, má její trajektorie následující parametrické rovnice:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t, \tag{4.15}$$

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{4.16}$$

Pro složky rychlosti platí

$$v_x = v_0\cos\theta_0, \qquad v_y = v_0\sin\theta_0 - gt, \tag{4.17}$$

$$v_y^2 = (v_0\sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4.18}$$

Trajektorií částice je parabola o rovnici

$$y = (\mathrm{tg}\,\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2}, \tag{4.19}$$

při takové volbě počátku soustavy souřadnic, při níž jsou počáteční souřadnice x_0 a y_0 nulové. Doletem částice rozumíme její vodorovnou vzdálenost od místa výstřelu v okamžiku, kdy je její výška nad povrchem Země stejná jako v okamžiku výstřelu. Platí

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0. \tag{4.20}$$

Rovnoměrný pohyb po kružnici

Obíhá-li částice po kružnici o poloměru r rychlostí o stálé velikosti v, nazýváme její pohyb *rovnoměrným pohybem po kružnici*. Velikost zrychlení částice má hodnotu

$$a = \frac{v^2}{r}. \tag{4.22}$$

Zrychlení $\boldsymbol{a}$ trvale směřuje do středu kružnice nebo kruhového oblouku. Nazýváme je dostředivým zrychlením. Doba oběhu částice

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{4.23}$$

se též nazývá *perioda* pohybu.

Vzájemný pohyb

Rychlosti částice měřené ve vztažných soustavách A a B jsou obecně různé. Je-li vzájemný (relativní) pohyb vztažných soustav pouze translační, jsou okamžité rychlosti částice měřené v těchto soustavách vázány transformačním vztahem

$$\boldsymbol{v}_{PA} = \boldsymbol{v}_{PB} + \boldsymbol{v}_{BA}, \tag{4.28}$$

kde $\boldsymbol{v}_{BA}$ je rychlost vztažné soustavy B vzhledem k A. Je-li rychlost vzájemného pohybu vztažných soustav $\boldsymbol{v}_{BA}$ konstantní, naměří pozorovatelé v obou vztažných soustavách stejné zrychlení částice, tj.

$$\boldsymbol{a}_{PA} = \boldsymbol{a}_{PB}. \tag{4.29}$$

Při rychlostech blízkých rychlosti světla je třeba použít místo vztahu (4.25) ($v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$) vztah vyplývající ze **speciální teorie relativity**. Pro přímočarý pohyb má tento vztah tvar

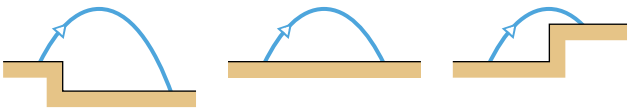
$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + \dfrac{v_{PB}v_{BA}}{c^2}} \tag{4.32}$$

a pro velmi malé rychlosti (zanedbatelné ve srovnání s rychlostí světla) přejde v rovnici (4.25).

OTÁZKY

1. Rychlost hokejového kotouče pohybujícího se v rovině xy je dána následujícími výrazy (v metrech za sekundu)
(1) $v_x = 3t^2 + 4t - 2$ a $v_y = 6t - 4$,
(2) $v_x = -3$ a $v_y = -5t^2 + 6$,
(3) $\boldsymbol{v} = 2t^2\boldsymbol{i} - (4t + 3)\boldsymbol{j}$,
(4) $\boldsymbol{v} = -2t\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$.
Ve kterém z uvedených případů je některá ze složek a_x a a_y vektoru zrychlení konstantní? Kdy je konstantní vektor zrychlení? Jaké musí být v případě (4) jednotky koeficientů -2 a 3, je-li rychlost $\boldsymbol{v}$ zadána v metrech za sekundu a čas t v sekundách?

2. Náboje na obr. 4.24 jsou ve všech případech vystřeleny stejnou rychlostí pod stejným elevačním úhlem, dopadnou však do různých míst. Seřaďte uvedené situace sestupně podle velikosti rychlosti dopadu střel.



(*a*) (*b*) (*c*)

Obr. 4.24 Otázka 2

3. Ve kterém bodě trajektorie střely z otázky 2 je její rychlost (a) největší, (b) nejmenší?

4. V jistém okamžiku je rychlost letícího míče rovna $\boldsymbol{v} = 25\boldsymbol{i} - -4{,}9\boldsymbol{j}$. (Osa x je vodorovná, osa y svislá a orientovaná směrem

vzhůru, rychlost $\boldsymbol{v}$ je dána v metrech za sekundu). Prošel již míč nejvyšším bodem dráhy?

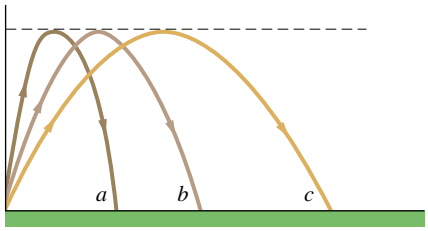
5. Raketa má být vystřelena z povrchu Země počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$, pro kterou připadají v úvahu následující možnosti:
(1) $\boldsymbol{v}_0 = 20\boldsymbol{i} + 70\boldsymbol{j}$,
(2) $\boldsymbol{v}_0 = -20\boldsymbol{i} + 70\boldsymbol{j}$,
(3) $\boldsymbol{v}_0 = 20\boldsymbol{i} - 70\boldsymbol{j}$,
(4) $\boldsymbol{v}_0 = -20\boldsymbol{i} - 70\boldsymbol{j}$.
Osa x kartézské soustavy souřadnic je vodorovná, osa y je svislá a orientovaná vzhůru. (a) Uspořádejte vektory počáteční rychlosti sestupně podle velikosti. (b) Uspořádejte uvedené možnosti sestupně podle doby letu střely.

6. Chlapec stojící v jámě vyhodí sněhovou kouli z úrovně vodorovného chodníku počáteční rychlostí o velikosti v_0 pod elevačním úhlem 45°. Koule dopadne znovu na chodník. Jak se změní (a) délka letu, (b) doba letu, zvolí-li chlapec při příštím hodu větší elevační úhel?

7. Ve výšce 2 m nad vodorovným povrchem vyhodíme hroudu hlíny počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0 = (2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jaká je rychlost hroudy při dopadu?

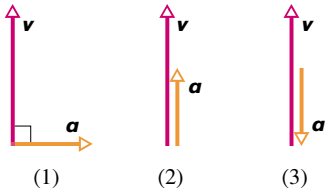
8. Letadlo letí rychlostí o velikosti 350 km/h ve stálé výšce nad povrchem Země. Pilot vypustí balík se zásobou potravin. Jaká je (a) vodorovná, (b) svislá složka počáteční rychlosti balíku? (c) Jaká je vodorovná složka jeho rychlosti těsně před dopadem na zem? (d) Jak by se změnila doba pádu balíku, kdyby letadlo letělo rychlostí 450 km/h? Vliv odporu prostředí neuvažujte.

9. Fotbalový míč letí po některé z trajektorií znázorněných na obr. 4.25. Seřaďte je podle (a) doby letu míče, (b) svislé složky jeho počáteční rychlosti, (c) vodorovné složky počáteční rychlosti, (d) velikosti počáteční rychlosti. Volte vždy sestupné řazení. Odpor prostředí zanedbejte.



Obr. 4.25 Otázka 9

10. Obr. 4.26 znázorňuje tři možné okamžité situace při pohybu částice. Rozhodněte, ve které z nich (a) velikost rychlosti částice roste, (b) klesá, (c) nemění se. Ve kterém z případů je skalární součin (d) $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}$ kladný, (e) záporný, (f) nulový?



Obr. 4.26 Otázka 10

11. Osobní vůz jede stálou rychlostí těsně za nákladní dodávkou. Z dodávky vypadne přepravka. (a) Řidič osobního auta nebrzdí a nesnaží se přepravce vyhnout. Narazí auto do přepravky ještě před jejím dopadem na silnici? (b) Rozhodněte, zda je vodorovná složka rychlosti přepravky během jejího pádu větší, menší, nebo stejná jako rychlost dodávky.

12. (a) Je možné, aby těleso mělo nenulové zrychlení a přitom se neměnila velikost jeho rychlosti? Je možné projíždět zatáčkou (b) s nulovým zrychlením, (c) se zrychlením stálé velikosti?

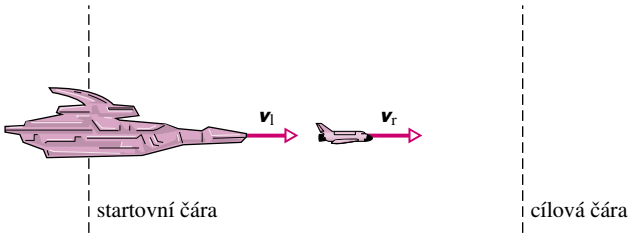
13. Dítě si během jízdy v autě pohrává s míčkem a najednou jej vyhodí svisle vzhůru. V následujících případech rozhodněte, zda míček spadne před dítě nebo za ně, anebo se mu vrátí zpět přímo do ruky: (a) auto jede konstantní rychlostí, (b) zrychluje, (c) brzdí.

14. Člověku jedoucímu ve výtahu vypadne z ruky mince ve chvíli, kdy výtah klesá konstantní rychlostí. Rozhodněte, zda je zrychlení mince větší, menší, nebo shodné s tíhovým zrychlením vzhledem k (a) člověku ve výtahu, (b) pozorovateli na schodišti.

15. Kapsářka stojí na otevřené zadní plošině tramvaje jedoucí konstantní rychlostí. Ve vhodném okamžiku se vykloní přes zábradlí plošiny a upustí ukradenou peněženku, na kterou již čeká její společnice. Popište trajektorii peněženky z hlediska (a) kapsářky, (b) její společnice a (c) policisty, který stojí v tramvaji jedoucí po vedlejší koleji opačným směrem, rovněž konstantní rychlostí.

16. Při ostřelování Paříže ze vzdálenosti 110 km používali Němci dělostřelecký kanón VWI přezdívaný „Tlustá Berta“. Náboje byly vystřelovány pod úhlem větším než 45°. Němci totiž zjistili, že tak dosáhnou téměř dvojnásobného doletu ve srovnání s doletem při elevačním úhlu 45°. Lze z této informace usoudit, jak se mění hustota vzduchu s nadmořskou výškou?

17. Obr. 4.27 představuje jednu ze čtyř kosmických lodí při speciálním závodu. V okamžiku průletu startovní čarou vypustí každá z nich raketu, která směřuje k cílové čáře. Rychlosti kosmických lodí vzhledem ke startovní čáře v_l a rychlosti raket vzhledem k mateřským lodím v_r jsou postupně (1) $v_\mathrm{l} = 0{,}70c$, $v_\mathrm{r} = 0{,}40c$, (2) $v_\mathrm{l} = 0{,}40c$, $v_\mathrm{r} = 0{,}70c$, (3) $v_\mathrm{l} = 0{,}20c$, $v_\mathrm{r} = 0{,}90c$ a (4) $v_\mathrm{l} = 0{,}50c$, $v_\mathrm{r} = 0{,}60c$. Bez počítání rozhodněte, (a) kdo zvítězí a (b) kdo bude poslední.



Obr. 4.27 Otázka 17

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 4.2 Poloha a posunutí

1C. Meloun leží v místě o souřadnicích $x = -5{,}0\,\text{m}$, $y = 8{,}0\,\text{m}$ a $z = 0\,\text{m}$. Vyjádřete jeho polohový vektor (a) pomocí jednotkových vektorů, (b) pomocí velikosti a směru. (c) Načrtněte polohový vektor v kartézské soustavě souřadnic. Meloun se posune do místa o souřadnicích $(x, y, z) = (3{,}00\,\text{m}, 0\,\text{m}, 0\,\text{m})$. Určete vektor posunutí a vyjádřete jej (d) pomocí jednotkových vektorů, (e) pomocí velikosti a směru.

2C. Poloha elektronu je zadána vektorem $\boldsymbol{r} = 5{,}0\boldsymbol{i} - 3{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ (v metrech). (a) Určete jeho velikost a (b) zakreslete jej v kartézské soustavě souřadnic.

3C. Proton se přemístí z počáteční polohy $\boldsymbol{r}_1 = 5{,}0\boldsymbol{i} - 6{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ do polohy $\boldsymbol{r}_2 = -2{,}0\boldsymbol{i} + 6{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ (všechny složky v metrech). (a) Určete vektor posunutí. (b) S jakou souřadnicovou rovinou je tento vektor rovnoběžný?

4C. Vektor posunutí pozitronu v určitém časovém intervalu je $\Delta\boldsymbol{r} = 2{,}0\boldsymbol{i} - 3{,}0\boldsymbol{j} + 6{,}0\boldsymbol{k}$ a jeho výsledná poloha je určena polohovým vektorem $\boldsymbol{r} = 3{,}0\boldsymbol{j} - 4{,}0\boldsymbol{k}$ (v metrech). Jaký byl polohový vektor pozitronu na počátku časového intervalu?

ODST. 4.3 Průměrná a okamžitá rychlost

5C. Letadlo letí z města A do C s mezipřistáním ve městě B. Město B leží východně od A ve vzdálenosti 300 km, město C je od B vzdáleno 600 km na jih. Prvá část letu trvá 45,0 min, druhá 1,50 h. (a) Určete vektor posunutí z A do C, (b) průměrnou rychlost a (c) průměrnou velikost rychlosti během celého letu.

6C. Vlak jede na východ stálou rychlostí o velikosti 60,0 km/h. Po 40,0 min jízdy odbočí k severovýchodu a směr jeho dalšího pohybu svírá s místním poledníkem úhel 50,0°. Vlak pokračuje v jízdě dalších 20,0 min. Posledních 50,0 min jízdy míří vlak na západ. Určete jeho průměrnou rychlost.

7C. Balon se během 3,50 h letu dostal do výšky 2,88 km nad povrch Země a posunul se o 21,5 km severně a 9,70 km východně od místa startu. Určete (a) velikost vektoru jeho průměrné rychlosti a (b) úhel, který tento vektor svírá s vodorovnou rovinou.

8C. Poloha iontu se během 10 s změní z hodnoty $\boldsymbol{r}_1 = 5{,}0\boldsymbol{i} - 6{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ na $\boldsymbol{r}_2 = -2{,}0\boldsymbol{i} + 8{,}0\boldsymbol{j} - 2{,}0\boldsymbol{k}$ (všechny údaje jsou v metrech). Jaká je jeho průměrná rychlost v tomto časovém intervalu?

9C. Poloha elektronu je dána vztahem $\boldsymbol{r} = 3{,}0t\boldsymbol{i} - 4{,}0t^2\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$. (Čas t je měřen v sekundách a složky vektoru $\boldsymbol{r}$ v metrech.) (a) Určete časovou závislost rychlosti elektronu $\boldsymbol{v}(t)$. (b) Jakou rychlost má elektron v okamžiku $t = 2{,}0$ s? Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů. (c) Určete velikost a směr rychlosti elektronu v tomto okamžiku.

ODST. 4.4 Průměrné a okamžité zrychlení

10C. Rychlost protonu se během 4,0 s změní z hodnoty $\boldsymbol{v}_1 = 4{,}0\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$ na $\boldsymbol{v}_2 = -2{,}0\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j} + 5{,}0\boldsymbol{k}$ (všechny údaje v metrech za sekundu). (a) Určete průměrné zrychlení protonu $\overline{\boldsymbol{a}}$ v tomto časovém intervalu. Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů. (b) Určete, jaká je velikost a směr vektoru $\overline{\boldsymbol{a}}$.

11C. Polohový vektor částice závisí na čase vztahem $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + 4t^2\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$. Všechny veličiny jsou vyjádřeny v jednotkách SI. Určete časovou závislost (a) rychlosti, (b) zrychlení částice.

12C. Částice se pohybuje v rovině xy. Její poloha se mění s časem podle vztahu $\boldsymbol{r} = (2{,}00t^3 - 5{,}00t)\boldsymbol{i} + (6{,}00 - 7{,}00t^4)\boldsymbol{j}$, kde $\boldsymbol{r}$ je v metrech a t v sekundách. Určete její (a) polohu $\boldsymbol{r}$, (b) rychlost $\boldsymbol{v}$ a (c) zrychlení $\boldsymbol{a}$ v okamžiku $t = 2{,}00$ s. (d) Jaký je v tomto okamžiku směr tečny k trajektorii?

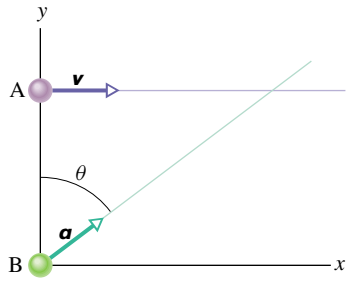
13C. Saně s plachtou jsou hnány větrem po zamrzlém jezeře. V jistém okamžiku t mají rychlost $(6{,}30\boldsymbol{i} - 8{,}42\boldsymbol{j})\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Během dalších tří sekund dojde k náhlé změně podmínek a saně se zastaví. Určete jejich průměrné zrychlení v časovém intervalu od t do $t + 3$ s.

14Ú. Částice se pohybuje v souřadnicové rovině xy s konstantním zrychlením $(4{,}0\boldsymbol{i} + 2{,}0\boldsymbol{j})\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. V okamžiku $t = 0$ prochází počátkem soustavy souřadnic rychlostí $8{,}0\boldsymbol{j}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Určete její y-ovou souřadnici v okamžiku, kdy má její x-ová souřadnice hodnotu 29 m. (b) V tomtéž okamžiku určete velikost její rychlosti.

15Ú. Částice vyletí z počátku soustavy souřadnic s počáteční rychlostí $3{,}00\boldsymbol{i}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ a pohybuje se s konstantním zrychlením $\boldsymbol{a} = (-1{,}00\boldsymbol{i} - 0{,}500\boldsymbol{j})\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. (a) Jaká je její rychlost v okamžiku, kdy její x-ová souřadnice nabývá největší hodnoty? (b) Jaká je v tomto okamžiku její poloha?

16Ú. Rychlost částice pohybující se v souřadnicové rovině xy je dána vztahem $\boldsymbol{v} = (6{,}0t - 4{,}0t^2)\boldsymbol{i} + 8{,}0\boldsymbol{j}$. Složky rychlosti jsou měřeny v metrech za sekundu a čas ($t > 0$) v sekundách. (a) Jaké je její zrychlení v okamžiku $t = 3{,}0$ s? (b) Ve kterém okamžiku je její zrychlení nulové? (c) Kdy je nulová její rychlost? (d) Ve kterém okamžiku má velikost její rychlosti hodnotu $10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$?

17Ú. Částice A se pohybuje po přímce $y = 30\,\text{m}$ rovnoběžně s kladným směrem osy x. Její rychlost $\boldsymbol{v}$ je konstantní a má velikost $v = 3{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Částice B vyletí z počátku soustavy souřadnic s nulovou počáteční rychlostí právě v okamžiku, kdy částice A prochází osou y (obr. 4.28). Částice B se pohybuje



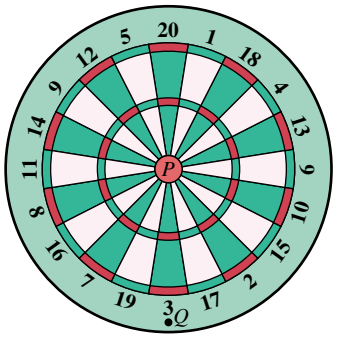
Obr. 4.28 Úloha 17

s konstantním zrychlením $\boldsymbol{a}$ o velikosti $a = 0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Jak je třeba volit úhel θ mezi zrychlením $\boldsymbol{a}$ částice B a kladným směrem osy y, aby se částice srazily? (Jestliže při řešení úlohy dospějete k rovnici čtvrtého stupně pro neznámou t, převeďte ji substitucí $u = t^2$ na kvadratickou rovnici s neznámou u.)

ODST. 4.6 Šikmý vrh: matematický popis

Při řešení následujících úloh zanedbáme odpor prostředí, i když to v některých případech nebude opodstatněné. Bez tohoto zjednodušení by totiž výpočty nebyly schůdné.

18C. Hráč hodil šipku vodorovnou rychlostí $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Mířil přitom přesně na střed terče P (obr. 4.29). Za 0,19 s zasáhla šipka bod Q na okraji terče. (a) Určete vzdálenost PQ a (b) vzdálenost hráče od terče.



Obr. 4.29 Cvičení 18

19C. Střelec míří na terč umístěný ve vzdálenosti 30,5 m od ústí hlavně. V okamžiku výstřelu je hlaveň vodorovná a směřuje přímo do středu terče. Kulka zasáhne terč 1,9 cm pod jeho středem. (a) Určete dobu letu kulky a (b) její rychlost bezprostředně po výstřelu.

20C. Pohyb všech hmotných objektů v blízkosti povrchu Země je ovlivněn tíhovým zrychlením. Týká se to i protonů, elektronů a ostatních hmotných částic. Uvažujme elektron, který opustí elektronovou trysku s vodorovnou rychlostí o velikosti $v = 3{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Určete jeho pokles ve svislém směru po průletu vodorovnou evakuovanou trubicí délky 1,0 m. (b) Jak se změní tento výsledek při vyšší počáteční rychlosti elektronu?

21C. Elektronový svazek v katodové trubici opouští elektronovou trysku rychlostí o velikosti $1{,}0 \cdot 10^9\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ a vstoupí do oblasti mezi dvěma vodorovnými vychylovacími deskami. Desky jsou čtvercové a jejich strany měří 2 cm. Elektrostatické pole mezi nimi uděluje elektronům zrychlení o velikosti $1{,}0 \cdot 10^{17}\,\mathrm{cm\cdot s^{-2}}$, které míří svisle dolů. Určete (a) dobu průletu elektronu vychylovací soustavou, (b) svislou složku jeho posunutí v tomto časovém intervalu (nenarazí elektron do některé z desek?) a (c) jeho rychlost v okamžiku, kdy opustí prostor mezi deskami (výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů).

22C. Míč se skutálel z vodorovné desky stolu vysokého 1,2 m a dopadl na podlahu ve vodorovné vzdálenosti 1,5 m od hrany stolu. (a) Jak dlouho míč letěl? (b) S jakou rychlostí opustil desku stolu?

23C. Při zkušební střelbě z pistole stojí střelec na ocelové konstrukci ve výšce 45,0 m nad vodorovným povrchem Země. Střela opustí hlaveň vodorovnou rychlostí o velikosti $250\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Za jak dlouho a (b) v jaké vzdálenosti od paty konstrukce dopadne střela na zem? (c) Jaká je v tom okamžiku svislá složka její rychlosti?

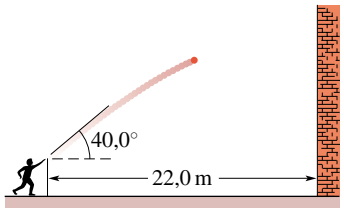
24C. Nadhazovač vyhodí baseballový míč vodorovnou rychlostí o velikosti 160 km/h. Pálkař stojí ve vzdálenosti 20 m. (a) Za jak dlouho urazí míč (a) první, resp. druhou polovinu této (vodorovné) vzdálenosti? (b) Určete svislou složku posunutí míče po průletu prvním, resp. (c) druhým z obou úseků. (d) Jak to, že nejsou výsledky částí (b) a (c) shodné? (Vliv odporu prostředí zanedbejte.)

25C. Střela je vystřelena počáteční rychlostí $30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 60°. Určete velikost a směr její rychlosti po uplynutí doby (a) 2,0 s a (b) 5,0 s.

26C. Kámen je vržen počáteční rychlostí $20{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 40,0°. Určete vodorovnou i svislou složku jeho posunutí po uplynutí doby (a) 1,10 s, (b) 1,80 s, (c) 5,00 s od počátku pohybu.

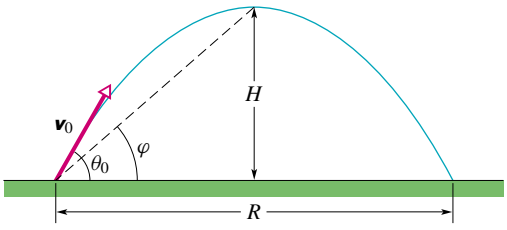
27C. Kdosi hodil míč ze skalního útesu počáteční rychlostí o velikosti $15{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem −20,0° (pozor na znaménko). Určete (a) vodorovnou i (b) svislou složku jeho posunutí po 2,30 sekundách letu.

28C. Chlapec chytá míč po odrazech od zdi vzdálené 22,0 m. Jeho spoluhráč vyhodí míč rychlostí $25{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 40,0° (obr. 4.30). (a) Za jak dlouho a (b) jak vysoko nad úrovní místa, z něhož byl vyhozen, narazí míč do zdi? (c) Určete vodorovnou a svislou složku rychlosti míče v okamžiku nárazu. (d) Zjistěte, zda míč projde ještě před nárazem vrcholem své trajektorie.



Obr. 4.30 Cvičení 28

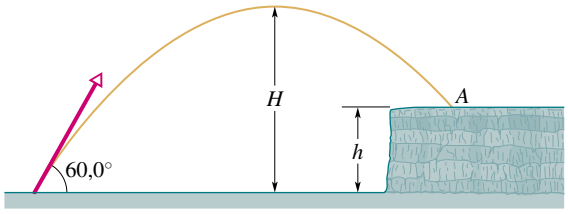
29C. (a) Dokažte, že poměr maximální výšky H a doletu R náboje vystřeleného pod elevačním úhlem θ_0 je dán vztahem $H/R = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}\,\theta_0$ (obr. 4.31). (b) Lze zvolit úhel θ_0 tak, aby platilo $H = R$?



Obr. 4.31 Cvičení 29 a 30

30C. Střela vyletí z místa na zemském povrchu pod elevačním úhlem θ_0. (a) Ukažte, že zorný úhel φ, pod kterým je z místa výstřelu vidět vrchol její trajektorie, je $\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta_0$ (obr. 4.31). (b) Vypočtěte hodnotu φ pro $\theta_0 = 45°$.

31C. Kluci házejí kameny na skalní vyvýšeninu o výšce h. Počáteční rychlost kamene má velikost 42,0 m·s^{-1} a elevační úhel je 60,0° (obr. 4.32). Kámen dopadne na vyvýšeninu po 5,50 s letu. Určete (a) výšku h, (b) velikost rychlosti dopadu, (c) výšku vrcholu trajektorie nad zemským povrchem.



Obr. 4.32 Cvičení 31

32Ú. Velikost počáteční rychlosti střely je rovna pětinásobku její hodnoty ve vrcholu trajektorie. Určete elevační úhel výstřelu.

33Ú. (a) Určete velikost rychlosti záchranného vaku z př. 4.6 při jeho dopadu na vodní hladinu. (b) Vypočtěte úhel θ zakreslený v obr. 4.14.

34Ú. Celých 23 let odolával světový rekord Boba Beamona ve skoku do dálky. Teprve na atletickém mistrovství světa v Tokiu v roce 1991 se podařilo Miku Powellovi překonat jej o plných 5 cm skokem 8,95 m (obr. 4.33). Předpokládejte, že odrazová rychlost při rekordním skoku byla 9,5 m·s^{-1} (přibližně rychlost běhu sprintera). Tíhové zrychlení v Tokiu má velikost 9,80 m·s^{-2}. Určete největší možný dolet skokana v idealizovaných podmínkách, tj. bez odporu prostředí.

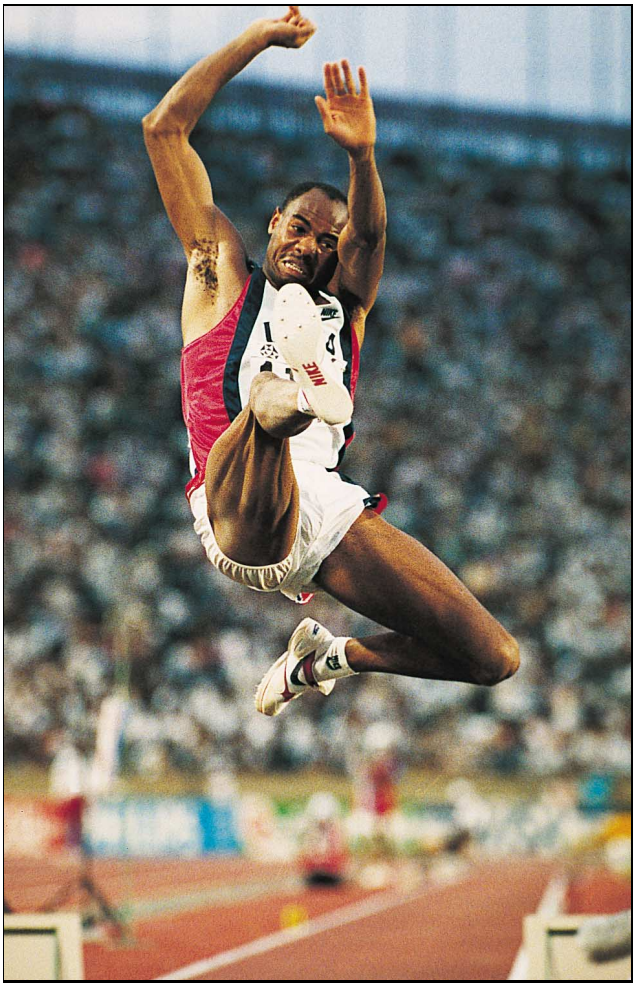
35Ú. Při sportovní střelbě na cíl vzdálený 46 m zvolil závodník zbraň, jejíž střely mají počáteční rychlost 460 m·s^{-1}. Jak vysoko nad cíl musí být hlaveň zbraně namířena v okamžiku výstřelu, aby se podařilo cíl zasáhnout?

36Ú. Ukažte, že největší možná výška vrcholu trajektorie střely nad vodorovným povrchem je $y_{\max} = \frac{1}{2}(v_0 \sin\theta_0)^2/g$.

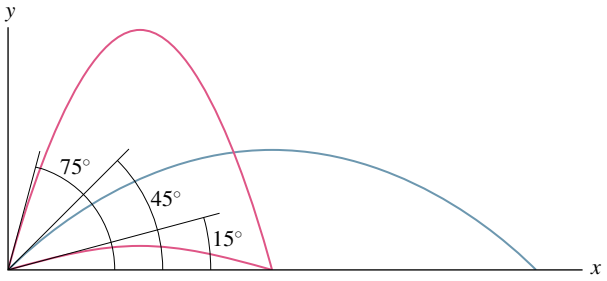
37Ú. V laboratoři prováděli speciální měření s cílem zjistit rychlost fotbalového míče při prudkém výkopu. Letící míč měl ve výšce 9,1 m rychlost $\boldsymbol{v} = 7{,}6\boldsymbol{i} + 6{,}1\boldsymbol{j}$. (Údaje jsou v metrech za sekundu, směr vektoru $\boldsymbol{i}$ je vodorovný a směr vektoru $\boldsymbol{j}$ svislý). (a) Do jaké největší výšky míč vystoupil? (b) Jaký byl jeho dolet? (c) Určete rychlost míče při výkopu a (d) těsně před dopadem na zem (velikost a směr).

38Ú. V detektivce objevila policie tělo pohřešovaného pod otevřeným oknem, ve vzdálenosti 4,6 m od domu. Okno je ve výšce 24 m nad zemí. Inspektor má podezření, že příčinou smrti nebyla nehoda. Odhadněte, zda může mít pravdu. Odhad zdůvodněte.

39Ú. V Galileiově díle „Rozpravy o dvou nových vědách“ se dočteme: „… pro dva různé elevační úhly, lišící se od úhlu 45° o stejnou hodnotu, je délka letu stejná…“ Dokažte pravdivost tohoto tvrzení (obr. 4.34).



Obr. 4.33 Úloha 34. Mike Powell při rekordním výkonu

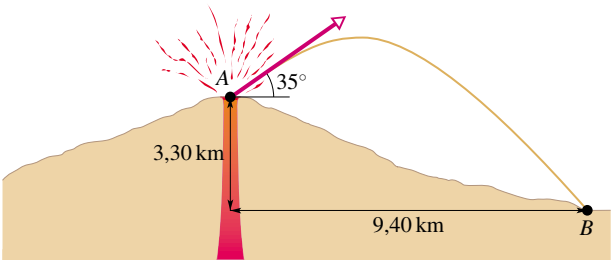


Obr. 4.34 Úloha 39

40Ú. Dolet při šikmém vrhu tělesa nezávisí jen na počáteční rychlosti, určené velikostí v_0 a elevačním úhlem θ_0, ale i na hodnotě tíhového zrychlení g. Ta je ovšem na různých místech zemského povrchu různá. Na olympijských hrách v Berlíně ($g = 9{,}812\,8$ m·s^{-2}) v roce 1936 překonal Jesse Owens dosavadní světový rekord ve skoku do dálky výkonem 8,09 m. Jakého výkonu by dosáhl v Melbourne v roce 1956 ($g = 9{,}799\,9$ m·s^{-2}) při stejných hodnotách v_0 a θ_0?

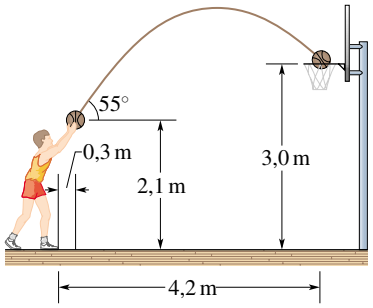
41Ú. Při baseballovém utkání chce hráč z třetí mety dohodit míč na první metu vzdálenou 38,7 m. Největší rychlost, kterou dokáže míč vyhodit, má velikost 137 km/h. (a) Jak daleko od první mety míč dopadne, vyhodí-li jej hráč vodorovným směrem ve výšce 0,9 m nad zemí? (b) Pod jakým elevačním úhlem musí hráč míč vyhodit, aby jej spoluhráč na první metě zachytil ve výšce 0,9 m nad zemí? (c) Jak dlouho v tomto případě míč poletí?

42Ú. Při sopečné erupci bývají z kráteru vymrštěny velké balvany. Na obr. 4.35 je znázorněn řez japonskou sopkou Fuji. (a) Jak velkou počáteční rychlost by musely balvany mít, aby při elevačním úhlu 35° dopadly do bodu *B* na úpatí sopky? (b) Jaká by byla doba jejich letu? V obou případech zanedbáváme vliv odporu prostředí. (c) Jak by se změnil výsledek části (a), kdybychom odpor prostředí vzali v úvahu?



Obr. 4.35 Úloha 42

43Ú. Jak velkou počáteční rychlostí musí basketbalista na obr. 4.36 vyhodit míč pod elevačním úhlem 55°, aby dopadl přímo do koše?

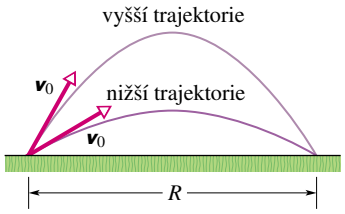


Obr. 4.36 Úloha 43

44Ú. Po 4,5 sekundách letu dopadl fotbalový míč do vodorovné vzdálenosti 46 m od místa výkopu. Jaká byla jeho počáteční rychlost (velikost a směr), jestliže mu ji hráč udělil při výskoku, ve výšce 1,5 m nad zemí?

45Ú. Golfista odpálil míček počáteční rychlostí o velikosti 43 $m \cdot s^{-1}$ pod elevačním úhlem 30°. Míček doletěl do vzdálenosti 180 m. Předpokládejte, že golfové hřiště je v tomto místě vodorovné. (a) Jak vysoko míček vyletěl? (b) Jak velká byla jeho rychlost těsně před dopadem?

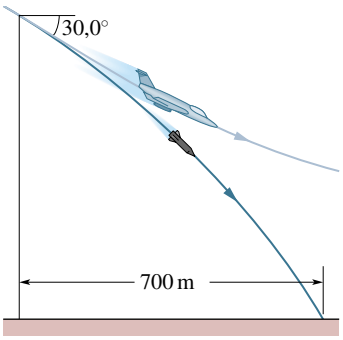
46Ú. Projektil byl vystřelen ze země počáteční rychlostí o velikosti $v_0 = 30{,}0\ m \cdot s^{-1}$ a zasáhl cíl ležící na zemi ve vzdálenosti 20,0 m (obr. 4.37). Určete obě možné hodnoty elevačního úhlu.



Obr. 4.37 Úloha 46

47Ú. Hráč baseballu dokáže dohodit míč do vzdálenosti 60 m. Určete největší možnou výšku takového hodu.

48Ú. Letadlo sestupuje pod úhlem 30° rychlostí o velikosti 290 km/h. Pilot uvolní „radarovou návnadu“ (obr. 4.38), která dopadne na zem ve vodorovné vzdálenosti 700 m od místa uvolnění. (a) V jaké výšce pilot návnadu uvolnil? (b) Jak dlouho trval její pád?



Obr. 4.38 Úloha 48

49Ú. Hráč vykopne míč rychlostí 20 $m \cdot s^{-1}$ pod elevačním úhlem 45°. V tomtéž okamžiku vyběhne jeho spoluhráč, vzdálený o 55 m, míči naproti. Jakou průměrnou rychlostí musí běžet, aby zachytil míč těsně před jeho dopadem na zem? Odpor prostředí zanedbejte.

50Ú. Míč se kutálí po plošině nad schodištěm rychlostí 1,5 m/s a směřuje přímo ke schodišti. Šířka i výška každého schodu mají stejnou hodnotu 20 cm. Na který schod shora míč poprvé doskočí?

51Ú. Při sestupu svírá rychlost letadla se svislým směrem úhel 53°. Ve výšce 730 m uvolní pilot bombu, která dopadne na zem po 5,00 s letu. (a) Jaká je velikost rychlosti letadla? (b) Do jaké vodorovné vzdálenosti od místa uvolnění bomba dopadne? (c) Určete vodorovnou a svislou složku její rychlosti těsně před dopadem.

52Ú. Míč je vržen vodorovným směrem z místa ve výšce 20 m nad zemí. Na zem dopadne trojnásobnou rychlostí. Jaká byla jeho počáteční rychlost?

53Ú. (a) Při podání odpálil tenista míček vodorovně rychlostí o velikosti 23,6 $m \cdot s^{-1}$. K úderu došlo ve výšce 2,37 m nad povrchem kurtu. V jaké výšce přeletí míček nad horním okrajem sítě, je-li síť ve vzdálenosti 12 m a je vysoká 0,90 m? (b) Při dalším podání má míček stejně velkou rychlost, úder však směřuje 5,00° pod vodorovnou rovinu. Zdaří se podání?

54Ú. V příkladu 4.8 jsme zjistili, že největší dolet střely vypálené z přístavní pevnosti je 690 m. O jakou vzdálenost by musela pirátská loď ještě ustoupit, kdyby bylo dělo umístěno ve výšce 30 m nad hladinou moře?

55Ú. Pálkař odehraje míček ve výšce 1,2 m nad zemí pod elevačním úhlem 45°. Dolet míčku je 107 m. Pravidla hry zaručují zisk bodu, přeletí-li míček plot vysoký 7,3 m a vzdálený 98 m. Zjistěte, zda hráč získal bod a v kladném případě určete, jak vysoko nad plotem míček přeletěl.

56Ú*. Fotbalista dokáže odehrát míč rychlostí 25 $m \cdot s^{-1}$. Určete interval, v němž musí ležet elevační úhel, aby hráč skóroval. Branka je ve vzdálenosti 50 m a její břevno je 3,44 m nad zemí. (Využijte vztahu $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, vyjádřete $1/\cos^2\theta$ pomocí $\mathrm{tg}^2\,\theta$ a řešte získanou kvadratickou rovnici pro $\mathrm{tg}\,\theta$.)

ODST. 4.7 Rovnoměrný pohyb po kružnici

57C. Jeden z modelů atomu vodíku je založen na představě elektronu obíhajícího kolem protonu po kruhové dráze o průměru $5{,}28 \cdot 10^{-11}$ m rychlostí o velikosti $2{,}18 \cdot 10^{6}$ $m \cdot s^{-1}$. Určete (a) zrychlení elektronu a (b) periodu jeho pohybu.

58C. Určete (a) velikost, (b) směr zrychlení sprintera při běhu zatáčkou o poloměru 25 m. Velikost rychlosti běžce je 10 $m \cdot s^{-1}$.

59C. Nabitá částice se za určitých podmínek pohybuje v magnetickém poli po kruhové dráze. Předpokládejme, že elektron, pro který jsme takové podmínky zajistili, se pohybuje po kružnici o poloměru 15 cm s dostředivým zrychlením o velikosti o $3{,}0 \cdot 10^{14}$ $m \cdot s^{-2}$. (a) Určete jeho rychlost a (b) periodu jeho pohybu.

60C. Sprinter běží rychlostí 9,2 $m \cdot s^{-1}$ po kruhové dráze. Dostředivé zrychlení má velikost 3,8 $m \cdot s^{-2}$. (a) Jaký je poloměr dráhy? (b) Jaká je perioda pohybu?

61C. Umělá družice Země obíhá po kruhové dráze ve výšce 640 km nad zemským povrchem. Perioda jejího pohybu je 98,0 min. (a) Jaká je její rychlost? (b) Jaké je gravitační zrychlení v uvedené výšce?

62C. Kosmická sonda odolá mechanickým pnutím při zrychlení nejvýše $20g$. (a) Jaký je nejmenší přípustný poloměr její trajektorie, je-li velikost její rychlosti rovna jedné desetině rychlosti světla? (b) Za jakou dobu opíše polohový vektor takové sondy oblouk příslušný úhlu 90°?

63C. Vrtule ventilátoru se otáčí 1 200krát za minutu. Sledujme bod na konci listu vrtule ve vzdálenosti 0,15 m od osy otáčení. (a) Jakou dráhu opíše tento bod při jedné otáčce vrtule? (b) Jaká je velikost jeho rychlosti? (c) S jakým zrychlením se pohybuje? (d) Jaká je perioda jeho pohybu?

64C. Francouzský expresní vlak TGV (Train à Grande Vitesse, česky „rychlovlak“) má stanovenou průměrnou rychlost 216 km/h. (a) Nejvyšší přípustná velikost zrychlení při průjezdu zatáčkou je pro pohodlí cestujících dána hodnotou $0{,}050g$. Jaký je nejmenší možný poloměr zatáčky, kterou může vlak projíždět uvedenou rychlostí? (b) Musí vlak v zatáčce o poloměru 1,00 km zpomalit? Na jakou rychlost?

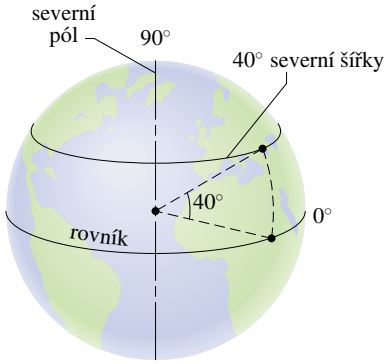
65C. Po výbuchu *supernovy* se může její jádro smrštit tak, že se stane *neutronovou hvězdou* s poloměrem přibližně 20 km. Předpokládejme, že neutronová hvězda vykoná jednu otáčku za jednu sekundu. (a) Jakou rychlostí se pohybuje bod na jejím rovníku? (b) Vyjádřete dostředivé zrychlení tohoto bodu (v $m \cdot s^{-2}$ a v násobcích g). (c) Jak se změní výsledky částí (a) a (b) při vyšší rychlosti rotace?

66C. Kosmonaut se otáčí na centrifuze s poloměrem 5,0 m ve vodorovné rovině. (a) Jakou rychlostí se pohybuje, má-li dostředivé zrychlení velikost $7{,}0g$? (b) Kolikrát za minutu se centrifuga otočí? (c) Jaká je perioda jejího pohybu?

67Ú. (a) Jaké je dostředivé zrychlení na zemském rovníku způsobené rotací Země? (b) Jaká by musela být perioda rotace Země, aby jeho velikost měla hodnotu 9,8 $m \cdot s^{-2}$?

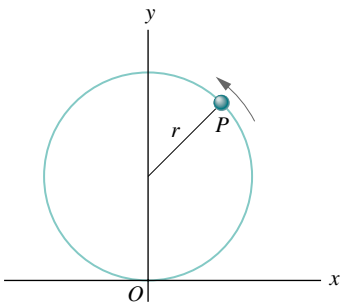
68Ú. Ruské kolo má poloměr 15 m a otočí se pětkrát za minutu. (a) Jaká je perioda pohybu kola? (b) Určete dostředivé zrychlení v nejvyšším a (c) v nejnižším bodě trajektorie.

69Ú. Vypočtěte zrychlení člověka na 40° severní šířky způsobené rotací Země (obr. 4.39).



Obr. 4.39 Úloha 69

70Ú. Částice se pohybuje konstantní rychlostí po kruhové dráze o poloměru $r = 3{,}00$ m (obr. 4.40) a vykoná jednu otáčku za



Obr. 4.40 Úloha 70

20,0 s. V čase $t = 0$ právě prochází počátkem O. Určete velikosti a směry následujících vektorů. (a) Polohové vektory částice vzhledem k počátku v okamžicích $t = 5{,}00$ s, $t = 7{,}50$ s a $t = 10{,}00$ s. (b) Vektor jejího posunutí v časovém intervalu od páté do desáté sekundy. (c) Vektor průměrné rychlosti v tomto

časovém intervalu. (d) Okamžitou rychlost a (e) zrychlení na počátku a konci tohoto intervalu.

71Ú. Chlapec točí kamenem uvázaným na provazu dlouhém 1,5 m. Kámen rovnoměrně obíhá ve vodorovné rovině, ve výšce 2,0 m nad zemí. Náhle se provaz přetrhne a kámen dopadne 10 m od chlapce. Jaké bylo dostředivé zrychlení kamene při rotaci?

ODST. 4.8 Vzájemný pohyb po přímce

72C. Loď pluje proti proudu řeky rychlostí 14 km/h vzhledem k vodnímu proudu. Voda v řece teče rychlostí 9 km/h. (a) Jakou rychlostí pluje loď vzhledem k břehům řeky? (b) Chlapec na lodi jde po palubě od přídě k zádi rychlostí 6 km/h. Jaká je jeho rychlost vzhledem k břehům?

73C. Muž vystoupí po nehybném eskalátoru dlouhém 15 m za čas 90 s. Jedoucí eskalátor překoná tutéž vzdálenost za 60 s. Za jakou dobu vystoupí člověk po pohybujícím se eskalátoru? Je výsledek závislý na délce eskalátoru?

74C. Trasa mezikontinentálního letu má délku 4 350 km a směřuje východozápadním směrem. Podle letového řádu trvá cesta z východu na západ o 50 minut déle než cesta zpáteční. Rychlost letadla je 960 km/h a vítr vane západním nebo východním směrem. S jakou rychlostí větru se počítalo při sestavování letového řádu?

75C. Kameraman stojí na otevřené plošině dodávky a filmuje běžícího geparda. Dodávka jede rychlostí 65 km/h západním směrem, gepard běží ve stejném směru a je o 48 km/h rychlejší. Náhle se gepard zastaví, otočí se a běží zpět na východ rychlostí 97 km/h vzhledem k zemi. Celý obrat trvá 2,0 s. Určete průměrné zrychlení zvířete vzhledem ke kameramanovi i vzhledem k zemi.

76C. Na letišti v Ženevě usnadňují pohyb cestujících dlouhými koridory „pojízdné chodníky“. Petr chodník nepoužil a prošel koridorem za 150 s. Pavel, stojící v klidu na jedoucím chodníku, urazil tutéž vzdálenost za 70 s. Marie šla po chodníku stejnou rychlostí jako Petr. Za jak dlouho prošla Marie koridorem?

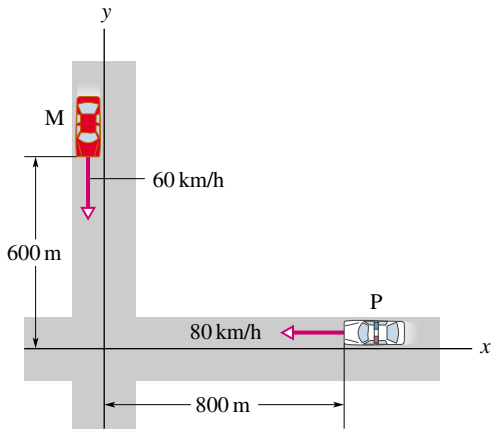
ODST. 4.9 Vzájemný pohyb v rovině

77C. Pravidla ragby (obr. 4.41) zakazují tzv. „dopředné“ přihrávky. (Průmět rychlosti míče do podélného směru hřiště nesmí směřovat k brance soupeře.) Předpokládejme, že hráč běží k brance protihráčů rychlostí o velikosti 4,0 $m \cdot s^{-1}$, rovnoběžně s podélným okrajem hřiště. V běhu přihrává svému spoluhráči a odhazuje míč (vzhledem k sobě) rychlostí o velikosti 6,0 $m \cdot s^{-1}$. Pod jakým nejmenším úhlem vzhledem k podélnému rozměru hřiště může míč odhodit, aby neporušil pravidla?

78C. Obr. 4.42 zachycuje dopravní situaci na křižovatce dvou silnic. Policejní automobil P, vzdálený 800 m od křižovatky, jede rychlostí o velikosti 80 km/h. Vozidlo M je od křižovatky vzdáleno 600 m a na jeho tachometru je údaj 60 km/h. (a) Určete rychlost vozidla M vzhledem k policejnímu autu. Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů. (b) Jaký úhel svírá rychlost vypočtená v části (a) se spojnicí vozidel? (c) Předpokládejte, že automobily pokračují v jízdě nezměněnou rychlostí. Mění se odpovědi částí (a) a (b), když se vozy přibližují ke křižovatce?



Obr. 4.41 Cvičení 77

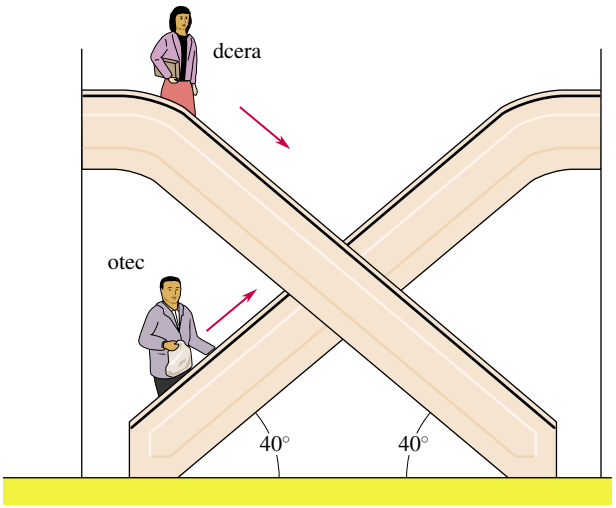


Obr. 4.42 Cvičení 78

79C. Sníh padá svisle rychlostí o velikosti 8,0 $m \cdot s^{-1}$. Pod jakým úhlem od svislého směru vidí padat sníh řidič automobilu, který jede po rovné silnici rychlostí o velikosti 50 km/h?

80C. Eskalátory v obchodním domě jsou konstruovány tak, že svírají s vodorovnou rovinou úhel 40° a pohybují se rychlostí o velikosti 0,75 $m \cdot s^{-1}$. Muž stojící na stoupajícím eskalátoru uvidí svou dceru, která již nakoupila a jede směrem dolů (obr. 4.43). Určete rychlost otce vzhledem k dceři. Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů.

81Ú. Vrtulník letí ve výšce 9,5 m nad plochým terénem stálou rychlostí o velikosti 6,2 $m \cdot s^{-1}$. Pilot vyhodí balík ve vodorovném směru proti směru letu. Jeho rychlost vzhledem k vrtulníku má velikost 12 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jaká je jeho počáteční rychlost vzhledem k zemi? (b) Určete vodorovnou vzdálenost balíku a letadla v okamžiku, kdy balík dopadne na zem. (c) Pod jakým úhlem dopadne balík na zem vzhledem k pozorovateli na zemi?



Obr. 4.43 Cvičení 80

82Ú. Vlak jede na jih rychlostí o velikosti 30 m·s^{-1} (vzhledem k zemi). Prší a vítr žene déšť jižním směrem. Trajektorie dešťových kapek vzhledem k zemi svírají se svislým směrem úhel 70°. Cestujícímu ve vlaku se však zdá, že kapky padají svisle. Určete velikost rychlosti kapek vzhledem k zemi.

83Ú. Malé letadlo může vzhledem k okolnímu vzduchu dosáhnout rychlosti o velikosti 500 km/h. Pilot má dopravit pasažéry do místa vzdáleného 800 km přesně na sever. Zjistí však, že má-li letět přímo k severu, musí odklonit kurs o 20,0° na východ. Let trvá 2,00 h. Určete rychlost větru (směr i velikost).

84Ú. Dvě lodi A a B vyplouvají z přístavu ve stejném okamžiku. Loď A pluje přesně na severozápad rychlostí 24 uzlů a loď B míří jihozápadně, pod úhlem 40° vzhledem k místnímu poledníku, rychlostí 28 uzlů (1 uzel = 1 námořní míle za hodinu, viz dod. D). (a) Určete velikost a směr rychlosti lodi A vzhledem k lodi B. (b) Za jak dlouho bude mezi plavidly vzdálenost 160 námořních mil? (c) Určete směr pohybu lodi A vzhledem k lodi B v tomto okamžiku.

85Ú. Státní policie v New Hampshire provádí měření rychlosti vozidel z letadla. Dálnice vede ve sledované oblasti severojižním směrem. Letadlo se pohybuje vzhledem k okolnímu vzduchu rychlostí o velikosti 217 km/h a letí neustále podél dálnice, přímo na sever. Pozemní služba hlásí, že vítr vane rychlostí 113 km/h, zapomene však udat jeho směr. Pilot zjistí zvláštní věc: bez ohledu na vítr urazil podél dálnice za dobu 1,00 h vzdálenost 217 km. Rychlost letadla vzhledem k zemi je tedy stejná jako za bezvětří. (a) Kterým směrem vítr vane? (b) Kam míří příď letadla (jaký úhel svírá podélná osa letadla s dálnicí)?

86Ú. Nákladní vagon s dřevěnými stěnami jede po přímém úseku železniční trati rychlostí o velikosti v_1. Ostřelovač pálí na vagon z velkorážné pušky. Střela, jejíž počáteční rychlost má velikost v_2, prorazí obě boční stěny vagonu. Spojnice otvorů je kolmá ke směru jízdy. Pod jakým úhlem vzhledem ke kolejím ostřelovač mířil? Předpokládejte, že směr letu střely se při průchodu stěnou nezmění, velikost její rychlosti se však sníží o 20 %. Pro číselný výpočet použijte hodnoty $v_1 = 85$ km/h, $v_2 = 650$ m/s. (Jak to, že nepotřebujeme znát šířku vagonu?)

87Ú. Skifařka dokáže v klidné vodě pádlovat rychlostí 6,0 km/h. (a) Kterým směrem musí namířit příď lodi, aby přejela kolmo k jejím břehům, je-li rychlost vodního proudu 3,0 km/h? (b) Za jak dlouho přejede řeku širokou 6,0 km? (c) Při další jízdě vesluje nejprve 3,0 km *po* proudu řeky (vzdálenost měřena vzhledem ke břehům) a poté se vrátí do výchozího místa. Jak dlouho trvá tato jízda? (d) Jak se změní výsledek části (c), pojede-li skifařka nejprve 3,0 km *proti* proudu a zpět se vrací po proudu? (e) V jakém směru by musela veslovat (vzhledem ke břehům), kdyby chtěla přejet na protější břeh v nejkratším možném čase bez ohledu na místo přistání? Jak dlouho by to trvalo?

ODST. 4.10 Vzájemný pohyb při vysokých rychlostech

88C. Kosmická loď A směřuje ke středu naší galaxie. Posádka zaregistruje záblesk světla, který se šíří rychlostí c ve směru pohybu lodi. Záblesk je zaznamenán i druhou kosmickou lodí B, která letí vzhledem k A rychlostí o velikosti 0,98c. Jakou rychlost světelného pulzu naměří pozorovatel na lodi B, letí-li jeho loď (a) ve stejném směru jako loď A, (b) v opačném směru než loď A?

89C. Elektron letí vzhledem k pozorovateli B rychlostí 0,42c. Pozorovatel B se pohybuje rychlostí 0,63c vzhledem k pozorovateli A, stejným směrem jako elektron. Jakou rychlost elektronu naměří pozorovatel A?

90Ú. Posádka kosmické lodi A, která letí k hvězdě Betelgeuze, zaznamená svazek protonů, který míjí loď ve stejném směru a rovněž míří k této hvězdě. Rychlost protonů vzhledem k lodi je 0,980 0c. Rychlost protonů ve svazku měří i posádka lodi B, cestující po téže přímce jako loď A, a získá výsledek −0,980 0c. Určete vzájemnou rychlost lodí.

91Ú. Galaxie Alfa se od Země vzdaluje rychlostí o velikosti 0,35c. Galaxie Beta, která je právě na opačné straně, se vzdaluje rychlostí stejně velkou. Pozorovatel v galaxii Alfa měří rychlost, jíž se od něj vzdaluje (a) Země, (b) Galaxie Beta. Dokážete předpovědět výsledky jeho měření?

PRO POČÍTAČ

92Ú. Jestliže při šikmém vrhu tělesa neleží místo dopadu na stejné vodorovné úrovni jako místo vrhu, není délka vrhu (vodorovná vzdálenost místa dopadu od místa vrhu) největší při elevačním úhlu 45°. Předpokládejme, že koulař hodil kouli z místa, které je ve výšce h nad úrovní hřiště. Velikost počáteční rychlosti koule je v_0, elevační úhel označme θ. Ukažte, že délka vrhu je dána vztahem

$$d = \frac{v_0 \cos\theta}{g}\left(v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}\right).$$

(b) Sestavte program pro výpočet vzdálenosti d v závislosti na úhlu θ pro zadané hodnoty v_0 a h. (c) S přesností na půl stupně určete elevační úhel, při němž bude délka vrhu největší pro hodnoty $v_0 = 9{,}0$ m·s^{-1} a $h = 2{,}1$ m. Vypočtěte i tuto největší délku. (d) Závisí výsledky předchozí úlohy na velikosti počáteční

rychlosti? Proveďte výpočet ještě pro hodnoty $v_0 = 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_0 = 15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (Větší z těchto hodnot vysoce přesahuje reálné možnosti i těch nejlepších sportovců.)

93Ú. V této úloze budeme uvažovat o tom, jak se s časem mění vzdálenost šikmo vrženého tělesa od místa vrhu. Nemáme nyní na mysli pouze vodorovnou složku polohového vektoru tělesa vzhledem k místu vrhu, jako tomu bylo v předchozích úlohách, nýbrž jeho *velikost*. Bezprostředně po vyhození tělesa tato veličina s časem vždy nejprve roste. V některých případech však může od jistého okamžiku začít klesat a teprve po uplynutí další doby se její průběh opět změní v rostoucí funkci času. Konkrétní situace je závislá na volbě elevačního úhlu. Sestavte program, který pro danou hodnotu velikosti počáteční rychlosti a různé elevační úhly provede opakovaný výpočet okamžité vzdálenosti tělesa od místa vrhu v časovém intervalu od $t = 0$ (okamžik vrhu) až do okamžiku několik sekund po průletu tělesa počáteční úrovní s časovým krokem Δt. Pro konkrétní výpočet zvolte $v_0 = 100\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $\Delta t = 0{,}5\,\mathrm{s}$, elevační úhly měňte od 5° do 90° s krokem 5°. Pro každý elevační úhel odhadněte časové intervaly, ve kterých se těleso přibližuje a vzdaluje od místa vrhu. (Podrobněji viz James S. Walker: „Projectiles, Are They Comming or Going?“, *The Physics Teacher*, May 1995.)

94Ú. Pálkař odehraje baseballový míč ve výšce 1,00 m nad zemí. Udělí mu při tom počáteční rychlost o velikosti v_0, která svírá s vodorovnou rovinou úhel θ. Ve vzdálenosti 110 m od postavení pálkaře je plot, vysoký 2,40 m. (a) Pro $v_0 = 35{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ určete interval, v němž musí ležet elevační úhel θ, má-li míč plot přeletět. Dolní a horní mez tohoto intervalu jsou určeny podmínkou těsného přeletu míče nad plotem. (*Tip*: Místo explicitního řešení parametrických rovnic trajektorie pro neznámou θ je možné určit hledané úhly grafickou metodou. V úloze je totiž zadána poloha bodu, kterým musí trajektorie míče projít, aby byly podmínky zadání ještě splněny. Z parametrických rovnic trajektorie lze získat dvě různé závislosti úhlu θ na okamžiku průletu míče tímto bodem. Zakreslete je do grafu a určete průsečík získaných křivek.) (b) Pro elevační úhel $\theta = 40^\circ$ určete nejmenší hodnotu v_0, při níž míč ještě přeletí plot. (c) Aby míč přeletěl plot při pevně zvoleném elevačním úhlu, je třeba, aby velikost jeho počáteční rychlosti převyšovala určitou minimální hodnotu $v_0(\theta)$, závislou na tomto úhlu (viz část (b)). Určete nejmenší ze všech těchto mezních hodnot a najděte odpovídající úhel θ. (d) Řešte část (c) pro případ, že pálkař stojí ve vzdálenosti 96 m od zdi vysoké 12,2 m.

95Ú. Golfista vypálí míček směrem ke svislé zdi vzdálené 20,0 m. Snaží se při tom zasáhnout červený kruh o průměru 30,0 cm, namalovaný na zdi. Střed kruhu je 1,20 m nad zemí. Počáteční rychlost míčku má velikost $15{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, elevační úhel je $35{,}0^\circ$. (a) Za jak dlouho po úderu narazí míček na stěnu? (b) Zasáhne červený kruh? (c) Jak velkou rychlostí narazí? (d) Prošel míček před nárazem vrcholem své trajektorie?

96Ú. Cyklista je v jistém okamžiku 40,0 m východně od vlajkového stožáru umístěného v parku a jede na jih rychlostí $10{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Po 30,0 s je vzdálen od stožáru 40,0 m na sever a jede východním směrem rychlostí o velikosti $10{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete (a) posunutí, (b) průměrnou rychlost a (c) průměrné zrychlení za tento časový interval. (d) Vypočtěte rozdíl $\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_\mathrm{f} - \boldsymbol{v}_\mathrm{i})$, kde $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ je rychlost cyklisty na počátku tohoto intervalu a $\boldsymbol{v}_\mathrm{f}$ je rychlost na jeho konci.

97Ú. V jistém okamžiku je polohový vektor motýla vzhledem k rohu zahradního jezírka roven $\boldsymbol{D}_\mathrm{i} = (2{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (3{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (1{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$. Po 40,0 s je $\boldsymbol{D}_\mathrm{f} = (3{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (1{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (2{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$. Určete (a) vektor posunutí (pomocí jednotkových vektorů), (b) velikost posunutí, (c) průměrnou rychlost a (d) průměrnou velikost rychlosti motýla v uvedeném časovém intervalu.

5
Síla a pohyb I



Všude na světě mají lidé v oblibě soutěže a rekordy. Snad proto, aby se přesvědčili, že hranice lidských možností lze neustále posouvat. A tak se tu a tam dovídáme o nejrůznějších neobvyklých výkonech, včetně neuvěřitelných siláckých kousků. Jeden z nich předvedl 4. dubna 1974 belgický silák John Massis, když se mu podařilo posunout dva osobní vagony newyorské železniční společnosti Long Island: zuby stiskl náústek připevněný k lanu, na němž byly vagony uvázány, zapřel se chodidly do pražců a zaklonil se. Vozy vážily kolem osmdesáti tun. Napadne nás, že Massis určitě musel vyvinout nadlidskou sílu, aby je uvedl do pohybu! Je tomu tak skutečně?

5.1 ČÍM JE ZPŮSOBENO ZRYCHLENÍ?

Pozorujeme-li, že rychlost nějakého malého tělíska mění svou velikost nebo směr, můžeme si být jisti, že něco muselo tuto změnu (toto zrychlení) *způsobit*. Z běžné zkušenosti totiž víme, že změna rychlosti tělesa je způsobena jeho interakcí s okolními objekty. Pozorujeme-li například hokejový kotouč, který klouže po ledové ploše a náhle se zastaví či náhle změní směr, usuzujeme, že určitě narazil do nějakého hrbolku na ledovém povrchu.

Zrychlení tělíska je způsobeno jeho **interakcí** (vzájemným působením) s okolními objekty. Kvantitativně ji popisujeme fyzikální veličinou, kterou nazýváme **síla**. Snadno si dokážeme představit, že některý z okolních objektů působí na tělísko například silou tlakovou nebo tahovou.* Úder povrchové nerovnosti do hokejového kotouče lze například popsat jako tlakové působení, které je příčinou zrychlení kotouče. Tato kapitola je věnována diskusi o vztahu mezi zrychlením a silami, které je způsobují. Jako první jej pochopil Isaac Newton (1642–1727). Teorii založenou na jeho způsobu prezentace tohoto vztahu nazýváme *newtonovskou mechanikou*.

Newtonovská mechanika není použitelná v každé situaci. O jednom omezení její platnosti už víme: v kap. 4 jsme se zmínili o případech, kdy rychlosti interagujících těles nejsou zanedbatelné ve srovnání s rychlostí světla. Tehdy musíme nahradit newtonovskou mechaniku Einsteinovou speciální teorií relativity, platnou pro všechny rychlosti, včetně rychlostí blízkých rychlosti světla. Druhé omezení souvisí přímo s povahou samotné fyzikální soustavy. Náleží-li interagující objekty do oblasti mikrosvěta (například elektrony v atomu), je třeba zaměnit newtonovskou mechaniku mechanikou kvantovou. Fyzikové dnes chápou newtonovskou mechaniku jako speciální případ těchto obecnějších teorií. Jedná se však o případ velmi významný, neboť je použitelný pro studium pohybu těles v obrovském rozsahu jejich velikostí, od objektů velmi malých, téměř na hranici atomové struktury, až k objektům astronomickým, jako jsou galaxie či jejich kupy.

Zamyslíme se nyní nad prvním pohybovým zákonem newtonovské mechaniky.

5.2 PRVNÍ NEWTONŮV ZÁKON

Před tím, než Newton formuloval svoji mechaniku, panoval názor, že jakési působení, tj. „síla“, je nezbytné pro udržení tělesa v pohybu se stálou rychlostí. Klid byl považován za „přirozený stav“ těles. Aby se těleso pohybovalo stálou rychlostí, mělo by být nějak poháněno, třeba tlakem či tahem. Jinak by se „přirozeně“ zastavilo. Takové úvahy se zdají být rozumné. Uvedeme-li například knihu do klouzavého pohybu po dřevěné podlaze, bude se skutečně zpomalovat a nakonec se zastaví. Hodláme-li docílit toho, aby po podlaze klouzala stálou rychlostí, měli bychom ji neustále tlačit či táhnout.

Po ledové ploše by ovšem kniha dorazila o něco dále. Lze si představovat stále delší a kluzčí plochy, po nichž by kniha klouzala do větší a větší vzdálenosti, než by se zastavila. V limitě můžeme uvažovat o dlouhé, extrémně kluzké ploše, kterou budeme nazývat **dokonale hladká podložka**. Při pohybu po ní se kniha takřka nezpomaluje. (Takovou situaci lze připravit v laboratoři, máme-li k dispozici vodorovnou vzduchovou lavici, podél níž se kniha pohybuje na vzduchovém polštáři.)

Dospěli jsme k závěru, že k udržení stálé rychlosti pohybu tělesa *nepotřebujeme* sílu. Dokážeme si jistě uvědomit, že ani k udržení rotačního pohybu tělesa, které bylo jednou roztočeno kolem nějaké vhodně zvolené osy, nepotřebujeme v ideálním případě žádné silové působení. Stačí si představit setrvačník. Prozatím však nebudeme další výklad tímto způsobem komplikovat, i když tím původní Newtonovu formulaci jeho mechaniky poněkud ochudíme. Abychom automaticky vyloučili úvahy o otáčivém pohybu, budeme pracovat výhradně s modelem *hmotného bodu* neboli *částice*, který jsme zavedli již v kap. 2, i když někdy, zejména v úlohách, budeme hovořit o tělese nebo konkrétním objektu. Částici, na kterou její okolí nepůsobí, nazveme volnou. **Volná částice** je samozřejmě opět jedním z idealizovaných modelů, který však vystihuje celou řadu reálných situací ve velmi dobrém přiblížení. Jako volná se částice chová například tehdy, nelze-li vliv jednotlivých okolních objektů na její pohyb zjistit v rámci přesnosti prováděných měření, anebo se vlivy okolních objektů nějakým způsobem kompenzují.

Dospíváme k formulaci prvního ze tří Newtonových pohybových zákonů.

První Newtonův zákon: Je-li volná částice v klidu vzhledem ke vhodně zvolené vztažné soustavě, pak v něm setrvá. Pohybuje-li se stálou rychlostí, bude v tomto pohybu neustále pokračovat.

Tento zákon dobře zapadá do úvah v čl. 4.8 o vztažných soustavách, jejichž vzájemná rychlost je konstantní. Bude-li volná částice v jedné z nich v klidu, bude se vůči druhé pohybovat stálou rychlostí. *Klid* částic nebo vztaž-

* Síla vyjadřuje vzájemné *působení objektů*. Při přesném vyjadřování bychom tedy měli hovořit o silách, kterými na sledované tělísko T *působí okolní objekty* A, B atd. Někdy však budeme stručně říkat, že na tělísko *působí síly*, aniž se staráme o jejich původ.

ných soustav se tedy nijak neliší od *rovnoměrného přímočarého pohybu*.

První Newtonův zákon lze interpretovat i tak, že *zaručuje existenci* preferovaných vztažných soustav, v nichž platí zákony newtonovské mechaniky. Tyto soustavy se vyznačují tím, že v nich jsou volné částice v klidu nebo se pohybují stálou rychlostí. Rychlost vzájemného pohybu takových soustav je tedy rovněž konstantní. Z uvedeného hlediska lze první Newtonův zákon vyjádřit takto:

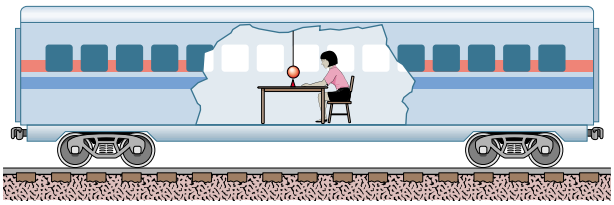
První Newtonův zákon: S každou volnou částicí lze spojit vztažnou soustavu, v níž jsou ostatní volné částice v klidu, nebo se vůči ní pohybují stálou rychlostí.

Newton sám se k formulacím svého prvého zákona vracel řadu let. V jeho díle jich dokážeme vystopovat celkem devět, lišících se zejména výstižností. Žádná z nich, stejně jako formulace dalších Newtonových zákonů, však neobsahuje výslovnou informaci o tom, k jaké vztažné soustavě se váže. Všechny totiž předpokládají **absolutní prostor** a **absolutní čas**, nezávislé na jakýchkoli objektech. Již z Galileiových pokusů však vyplynulo, že zákony mechaniky jsou stejné ve všech vztažných soustavách pohybujících se navzájem rovnoměrně přímočaře, a neumožňují tedy „absolutní prostor a čas“ zjistit. V dnešním pojetí newtonovské mechaniky proto interpretujeme první Newtonův zákon jako axiom zaručující existenci *preferovaných* vztažných soustav, soustav **inerciálních**.

Prvnímu Newtonovu zákonu se někdy říká *zákon setrvačnosti*. Vztažné soustavy, které definuje, se nazývají *inerciální vztažné soustavy* nebo jednoduše *inerciální soustavy** .

Obr. 5.1 ukazuje, jak lze zjistit, zda daná vztažná soustava je inerciální. V železničním vagonu, který je v klidu vůči nástupišti, nakreslíme na stůl značku pod rovnovážnou polohu kyvadla. Při pohybu vagonu zůstává tělísko kyvadla neustále nad značkou jedině tehdy, je-li pohyb vagonu rovnoměrný přímočarý.

Pak je vagon inerciální soustavou.



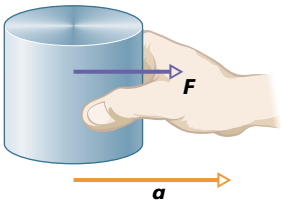
Obr. 5.1 Ověření inerciálnosti vztažné soustavy spojené s železničním vagonem.

Jestliže se vagon urychluje, zpomaluje či zatáčí, uhýbá tělísko od značky. Vůz je v takovém případě neinerciální vztažnou soustavou.

5.3 SÍLA

Síla způsobuje zrychlení tělesa. Jednotku síly nyní definujeme prostřednictvím zrychlení, které síla uděluje standardnímu referenčnímu tělesu. Jako referenční těleso použijeme (spíše v představě nežli ve skutečnosti) standardní kilogram z obr. 1.6. Toto těleso určuje definitoricky přesně hmotnost jednoho kilogramu.

Položíme standardní těleso na vodorovný, dokonale hladký stůl a táhneme je vpravo (obr. 5.2). Když dosáhneme měřeného zrychlení o velikosti 1 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, definujeme velikost síly, kterou na těleso působíme, jako 1 newton (zkráceně N).



Obr. 5.2 Síla ***F*** působí na standardní kilogram a udílí mu zrychlení ***a***.

Můžeme také na standardní těleso působit silou 2 N a měřené zrychlení bude mít velikost 2 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ atd. Obecně, má-li naše standardní těleso o hmotnosti 1 kg zrychlení o velikosti a, víme, že na ně musí působit síla, jejíž velikost F (v newtonech) je číselně rovna velikosti zrychlení (v metrech za sekundu na druhou).

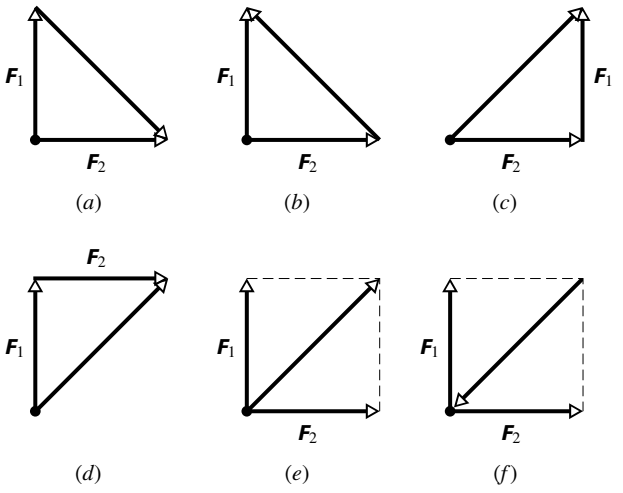
Velikost síly lze tedy měřit prostřednictvím velikosti zrychlení, které síla způsobuje. Zrychlení je však vektorovou veličinou, charakterizovanou jak velikostí, tak směrem. Je síla rovněž vektorovou veličinou? Síle můžeme přisoudit

* Inerciální vztažná soustava, stejně jako volná částice, jsou samozřejmě pouze idealizované modely. Vesmírná tělesa, například hvězdy, však lze za volné částice považovat s velmi dobrou přesností, neboť jejich vzájemné gravitační působení je zanedbatelné díky obrovským vzdálenostem mezi nimi. (Čtenář si může provést odhad velikosti gravitační síly, jíž na sebe působí například Slunce a nejbližší hvězda Proxima v souhvězdí Kentaura.) Vztažné soustavy spojené s takovými tělesy jsou pak v rámci této přesnosti inerciální. Často používáme inerciální soustavu spojenou se Sluncem, zvanou **Galileiova**. V ní umísťujeme počátek soustavy souřadnic do těžiště sluneční soustavy, souřadnicové osy jsou namířeny k vybraným hvězdám. Při studiu pohybů v „pozemských podmínkách“ je ovšem výhodné spojovat vztažnou soustavu přímo s „pozemskou laboratoří“, tj. povrchem Země v daném místě. Tato soustava však vlivem pohybu Země kolem Slunce a zejména vlivem její vlastní rotace není inerciální (odhadněte velikosti příslušných zrychlení). Pokud však neprovádíme velmi přesná měření, lze i s touto vztažnou soustavou, kterou nazýváme **laboratorní**, pracovat jako s inerciální.

směr velmi snadno, totiž shodně se směrem zrychlení. To však nestačí. Vektorový charakter sil musíme ověřit experimentem. Výsledek splňuje očekávání: síly jsou skutečně vektorové veličiny. Mají směr i velikost a skládají se podle pravidel pro sčítání vektorů, uvedených v kap. 3.

Pro označení sil budeme tedy používat tučných symbolů, nejčastěji $\boldsymbol{F}$. Symbol $\sum \boldsymbol{F}$ užijeme pro označení vektorového součtu několika sil, který nazveme **výslednou silou** neboli **výslednicí**. Jako každý vektor lze i jednotlivé síly či výslednici promítat do souřadnicových os a určovat jejich složky. Nakonec poznamenejme, že první Newtonův zákon platí nejen v případech, kdy na těleso nepůsobí žádné síly, ale i tehdy, když síly sice působí, ale jejich výslednice je nulová.

KONTROLA 1: Dvě kolmé síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ na obrázku jsou kombinovány šesti různými způsoby. Které z nich správně určují výslednici $\sum \boldsymbol{F}$?



5.4 HMOTNOST

Každodenní zkušenost nám ukazuje, že jedna a táž síla uděluje různým tělesům různá zrychlení. Představme si, že na podlahu položíme fotbalový míč a stejně velký medicinbal, vycpaný látkou, a do obou prudce kopneme. Aniž bychom museli takový pokus uskutečnit, víme, jak dopadne: lehký fotbalový míč získá výrazně větší zrychlení než těžký medicinbal. Zrychlení obou těles jsou různá proto, že se liší jejich hmotnosti. Avšak co je to přesně hmotnost?

Měření hmotnosti vyložíme pomocí série myšlenkových experimentů. V prvním z nich budeme působit silou na standardní těleso, jehož hmotnost m_0 byla definována jako 1,0 kg. Předpokládejme, že velikost zrychlení standardního tělesa je $1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Pak můžeme říci, že na těleso působí síla o velikosti 1,0 N.

Nyní budeme působit toutéž silou na jiné těleso, řekněme těleso X, jehož hmotnost není známa. (Je třeba se při tom nějakým způsobem ujistit, i když to může být obtížné, že působící síla je skutečně táž jako v prvním pokusu.)

Předpokládejme, že jsme u tělesa X naměřili zrychlení $0{,}25\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Víme, že *méně hmotný* fotbalový míč získá působením téže síly (při výkopu) *větší zrychlení* než hmotnější medicinbal. Můžeme tedy vyslovit následující hypotézu: hmotnosti dvou těles jsou v obráceném poměru velikostí jejich zrychlení, působí-li na obě tělesa stejná síla. Pro těleso X a standardní těleso to znamená, že platí

$$\frac{m_\mathrm{X}}{m_0} = \frac{a_0}{a_\mathrm{X}}.$$

Pak

$$m_\mathrm{X} = m_0 \frac{a_0}{a_\mathrm{X}} = (1{,}0\,\mathrm{kg})\frac{(1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}{(0{,}25\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})} = 4{,}0\,\mathrm{kg}.$$

Naše hypotéza bude ovšem užitečná jedině tehdy, bude-li platit pro libovolnou velikost působící síly. Budeme-li například působit na standardní těleso silou o velikosti 8,0 N, naměříme zrychlení $8{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Bude-li tato síla působit na těleso X, udělí mu zrychlení o velikosti $2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Naše hypotéza pak vede k výsledku

$$m_\mathrm{X} = m_0 \frac{a_0}{a_\mathrm{X}} = (1{,}0\,\mathrm{kg})\frac{(8{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}{(2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})} = 4{,}0\,\mathrm{kg},$$

který souhlasí s experimentem. Četné další experimenty potvrzují, že vyslovená hypotéza umožňuje jednoznačně a spolehlivě přisoudit každému tělesu jeho hmotnost.

Experimenty také ukazují, že hmotnost je *vlastní* charakteristikou tělesa, tj. takovou, která je automaticky dána samotnou existencí tělesa. Plyne z nich i to, že hmotnost je skalární veličina. Zůstává však stále neodbytná otázka: Co je to přesně hmotnost?

Slova *hmotnost, hmota* se v běžné řeči hojně užívají. O hmotnosti má proto jistě každý intuitivní představu, snad představu něčeho, co lze přímo smyslově vnímat, „hmatat“. Je to velikost tělesa, jeho váha, jeho hustota… ?

Odpověď zní „ne“, přestože jsou tyto charakteristiky někdy s hmotností směšovány. Můžeme pouze říci, že *hmotnost tělesa je charakteristika, která určuje poměr mezi silou působící na těleso a udíleným zrychlením.*

Hmotnost již nelze definovat přesněji. K „fyzikálnímu vnímání“ hmotnosti můžeme dospět jedině tak, že budeme zkoušet urychlovat různá tělesa, například kopat do fotbalového míče nebo medicinbalu.

5.5 DRUHÝ NEWTONŮV ZÁKON

Všechny dosavadní definice, pokusy a pozorování lze shrnout do jednoduché vektorové rovnice, zvané druhý Newtonův pohybový zákon:

$$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F} \quad \text{(druhý Newtonův zákon).} \qquad (5.1)$$

Při použití rov. (5.1) si musíme ujasnit, na jaké těleso ji aplikujeme. Pak $\sum \boldsymbol{F}$ je vektorový součet (výslednice) *všech* sil, které působí na *ono* těleso. Do výslednice jsou zahrnuty pouze síly, které působí *na vymezené těleso*, na rozdíl od sil působících na jiná tělesa, která v zadané úloze mohou rovněž figurovat. Součet $\sum \boldsymbol{F}$ zahrnuje pouze *vnější* síly, tj. ty, jimiž na těleso působí jiná tělesa. Neobsahuje síly vnitřní, jimiž působí jednotlivé části tělesa na sebe navzájem.

Jako každá vektorová rovnice je i rov. (5.1) ekvivalentní třem rovnicím skalárním:

$$ma_x = \sum F_x, \quad ma_y = \sum F_y, \quad ma_z = \sum F_z. \qquad (5.2)$$

Tyto rovnice představují vztahy mezi složkami zrychlení tělesa a odpovídajícími složkami výslednice sil, které na těleso působí.

Můžeme si všimnout, že druhý Newtonův zákon není v rozporu s prvním: těleso, na něž nepůsobí žádné síly, se podle rov. (5.1) pohybuje bez zrychlení.

V jednotkách SI podle rov. (5.2) platí

$$1\,\mathrm{N} = (1\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}, \qquad (5.3)$$

což souhlasí s úvahami v čl. 5.3. Přestože budeme téměř výhradně pracovat s jednotkami soustavy SI, poznamenejme, že se stále ještě používají i jiné jednotky, zejména jednotky Britské soustavy a soustavy CGS (centimetr – gram – sekunda). Tab. 5.1 obsahuje příslušné převody. (Viz rovněž dod. D.)

Tabulka 5.1 **Jednotky v druhém Newtonově zákoně (rov. (5.1) a (5.2))**

SOUSTAVA	SÍLA	HMOTNOST	ZRYCHLENÍ
SI	newton	kilogram	$\mathrm{m/s^2}$
CGS	dyn	gram	$\mathrm{cm/s^2}$
britská*	libra (lb)	slug	$\mathrm{ft/s^2}$

* $1\,\mathrm{dyn} = 1\,\mathrm{g{\cdot}cm/s^2}$, $1\,\mathrm{lb} = 1\,\mathrm{slug{\cdot}ft/s^2}$.

Při řešení úloh pomocí druhého Newtonova zákona často používáme **silový diagram**, v němž je studované těleso vyznačeno bodem a všechny vnější síly, které na těleso působí, případně i jejich výslednice $\sum \boldsymbol{F}$, jsou reprezentovány vektory umístěnými v tomto bodě. (Místo bodu můžeme schematicky kreslit studované těleso.) Diagram bude obsahovat soustavu souřadnicových os a někdy i vektor zrychlení tělesa.

Při řešení úlohy vycházíme z vektorové rovnice (5.1). Postupně si všímáme skalárních rovnic (5.2) a pracujeme tak se složkami vektorů ve směrech jednotlivých souřadnicových os. První ze sady rovnic (5.2) znamená, že součet x-ových složek všech sil určuje x-ovou složku zrychlení tělesa, aniž ovlivňuje jeho y-ovou či z-ovou složku. Podobně je y-ová složka zrychlení určena výhradně součtem y-ových složek všech sil a z-ová složka zrychlení součtem z-ových složek všech sil. Obecně pak platí:

> Složka zrychlení ve směru dané souřadnicové osy je určena výhradně součtem složek všech sil měřených podél téže osy a nezávisí na složkách sil ve směrech os ostatních.

V př. 5.1 půjde o sílu, která na těleso působí ve směru osy x. Pracujeme tedy jen s jedinou složkou síly (ostatní jsou nulové). V př. 5.2 působí na těleso tři síly, z nichž dvě svírají nenulový úhel s osami x a y. V této dvojrozměrné situaci musíme určit jak x-ové, tak y-ové složky sil a použít dvě z rovnic (5.2).

Př. 5.2 poslouží současně jako modelový případ zvláštního typu úloh: Těleso se neurychluje ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$), přestože na ně působí síly. V takové situaci je podle rov. (5.1) $\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Výslednice sil je tedy nulová, síly působící na těleso jsou vyváženy. Říkáme, že těleso je **v rovnováze**, případně že *síly* jsou v rovnováze.

Všimněme si ještě jedné vlastnosti rov. (5.2), užitečné pro řešení úloh. Z nulovosti zrychlení vyplývá, že $a_x = 0$, a tedy i $\sum F_x = 0$. Jsou tedy v rovnováze x-ové složky všech sil. Dosadíme-li do $\sum F_x$ konkrétní hodnoty složek působících sil, dostaneme algebraický vztah, využitelný pro řešení úlohy.* Podobně při $a_y = 0$ usoudíme, že $\sum F_y = 0$. Po dosazení y-ových složek sil máme další algebraický vztah.

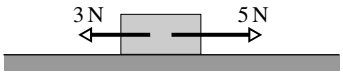
Může se stát, že se složky jednotlivých sil podél některé z os navzájem kompenzují, zatímco u složek měřených ve směru druhé osy tomu tak není. Znamená to, že zrychlení směřuje podél této druhé osy.

Abychom se naučili spolehlivě řešit konkrétní situace, potřebujeme získat určitou zkušenost. Proto zařazujeme do této kapitoly celou řadu příkladů.

KONTROLA 2: Na obrázku jsou zakresleny dvě vodorovné síly působící na kostku pohybující se po dokonale hladké podložce. Předpokládejme, že na kostku

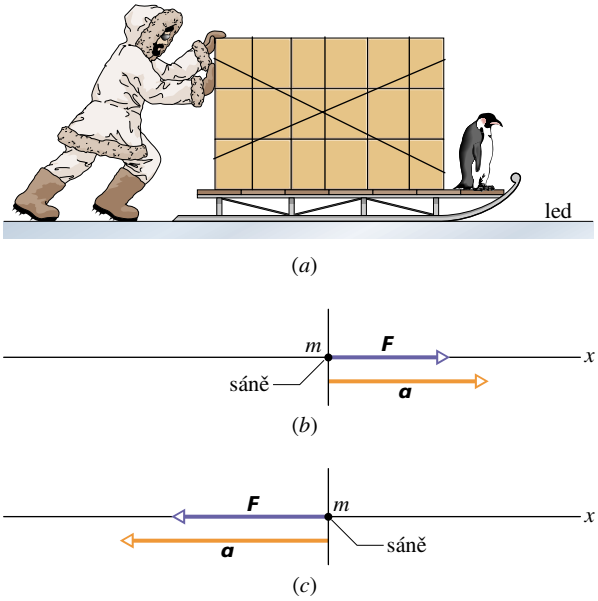
* Vztah umožňuje určit x-ovou složku některé ze sil, známe-li x-ové složky sil ostatních.

působí ještě třetí síla $\boldsymbol{F}_3$. Určete její velikost a směr, je-li kostka (a) v klidu, (b) pohybuje se doleva konstantní rychlostí o velikosti $5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.



PŘÍKLAD 5.1

Student experimentální fyziky zkouší testovat platnost pohybových zákonů. Obul si boty s neklouzající podrážkou a tlačí naložené sáně o hmotnosti 240 kg do vzdálenosti 2,3 m po dokonale hladké hladině zamrzlého jezera. Působí na ně při tom stálou vodorovnou silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti $F = 130\,\mathrm{N}$ (obr. 5.3a).



Obr. 5.3 Příklad 5.1. (a) Student tlačí sáně po dokonale hladkém povrchu. (b) Silový diagram příkladu (a), znázorňující výslednou sílu působící na sáně a zrychlení, které tato síla saním udílí. (c) Silový diagram příkladu (b). Člověk nyní sáně táhne, takže jejich zrychlení má opačný směr.

(a) Jaká je výsledná rychlost sání, rozjíždějí-li se z klidu?

ŘEŠENÍ: Obr. 5.3b představuje silový diagram popsané situace. Zvolme osu x vodorovně a orientujme ji doprava. Uvažujme o saních jako o hmotném bodu. Předpokládáme, že síla $\boldsymbol{F}$, kterou působí student, představuje jedinou sílu působící na sáně. Vzhledem k tomu, že F_x je její jediná nenulová složka, určíme velikost zrychlení sání a_x z druhého Newtonova zákona takto:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{(130\,\mathrm{N})}{(240\,\mathrm{kg})} = 0{,}542\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Poněvadž je zrychlení konstantní, můžeme pro zjištění výsledné rychlosti užít vztahu (2.16), $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$. Položíme-li $v_{0x} = 0$, $x - x_0 = d$ a uvědomíme-li si, že v našem případě je $v = v_x$, $a_x = a$, dostaneme pro v:

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2(0{,}542\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(2{,}3\,\mathrm{m})} = \\ = 1{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Síla, zrychlení, posunutí i výsledná rychlost sání mají směr osy x a jejich x-ové složky jsou kladné. Všechny tyto vektory tedy směřují v obr. 5.3b zleva doprava.

(b) Student chce změnit směr rychlosti v opačný během 4,5 s. Jak velkou stálou silou musí sáně táhnout?

ŘEŠENÍ: Užitím rov. (2.11), tj. $v_x = v_{0x} + a_x t$, nejprve určíme zrychlení potřebné ke změně směru rychlosti v opačný během 4,5 s. Dostáváme

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(-1{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) - (1{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})}{(4{,}5\,\mathrm{s})} = \\ = -0{,}711\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Velikost tohoto zrychlení je větší než v úloze (a), kde činilo $0{,}542\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, takže je zřejmé, že student musí nyní táhnout sáně větší silou. Tuto sílu určíme z prvé rovnice ze sady rov. (5.2), uvědomíme-li si, že $a_y = 0$ a $a_z = 0$.

$$F_x = ma_x = (240\,\mathrm{kg})(-0{,}711\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = -171\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Znaménko minus ukazuje, že student musí táhnout sáně ve směru klesající souřadnice x, tj. zprava doleva v silovém diagramu na obr. 5.3c.

PŘÍKLAD 5.2

Ve dvojrozměrné přetahované se Aleš, Božena a Cyril přetahují o pneumatiku ve směrech znázorněných na obr. 5.4a (obrázek ukazuje pohled shora). Pneumatika je v klidu, přestože na ni působí tři tahové síly. Aleš táhne silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{A}$ o velikosti 220 N a Cyril silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{C}$ o velikosti 170 N. Směr síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{C}$ neznáme. Jak velká je síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{B}$, jíž působí na pneumatiku Božena?

ŘEŠENÍ: Na obr. 5.4b je znázorněn silový diagram úlohy. Poněvadž je zrychlení pneumatiky nulové, je podle rov. (5.1) nulová i výslednice všech sil, které na ni působí:

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_\mathrm{A} + \boldsymbol{F}_\mathrm{B} + \boldsymbol{F}_\mathrm{C} = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.$$

Tato vektorová rovnost je ekvivalentní prvým dvěma skalárním rovnostem v sadě rov. (5.2). Pro složky ve směru osy x platí

$$\sum F_x = F_{\mathrm{A}x} + F_{\mathrm{B}x} + F_{\mathrm{C}x} = 0, \qquad (5.4)$$

ve směru osy y pak

$$\sum F_y = F_{\mathrm{A}y} + F_{\mathrm{B}y} + F_{\mathrm{C}y} = 0. \qquad (5.5)$$

Pomocí zadaných velikostí sil a úhlů vyznačených v obr. 5.4b vyjádříme nyní složky sil a dosadíme do rov. (5.4) a (5.5). Znaménka vyznačují orientaci průmětů. Ze vztahu (5.4) dostáváme

$$\sum F_x = -F_A \cos 47{,}0^\circ + 0 + F_C \cos\varphi = 0.$$

Dosazením známých hodnot pak získáme

$$-(220\,\mathrm{N})\cos 47{,}0^\circ + 0 + (170\,\mathrm{N})\cos\varphi = 0$$

a odtud

$$\cos\varphi = \frac{(220\,\mathrm{N})\cos 47{,}0^\circ}{(170\,\mathrm{N})} = 0{,}883,$$
$$\varphi = 28{,}0^\circ.$$

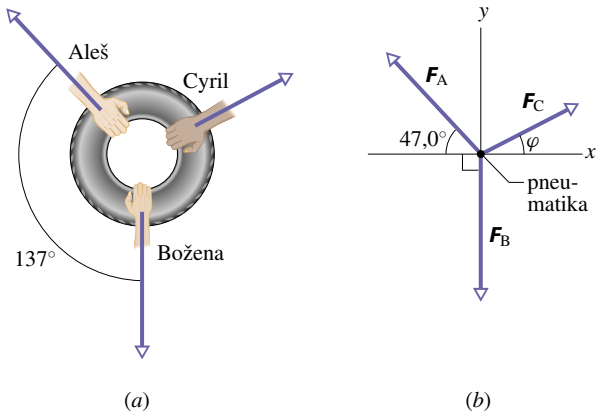
Obdobně plyne ze vztahu (5.5)

$$\sum F_y = F_A \sin 47{,}0^\circ - F_B + F_C \sin\varphi = 0,$$

kde jsme položili $F_{By} = -F_B$, neboť Božena táhne pneumatiku přímo v záporném směru osy y. Dosazení známých hodnot vede k výsledku

$$F_B = (220\,\mathrm{N})\sin 47{,}0^\circ + (170\,\mathrm{N})\sin 28{,}0^\circ = 241\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Nechme si znovu projít hlavou postup, který jsme použili při řešení soustavy dvou rovnic (5.4) a (5.5) o dvou neznámých F_B a φ. Nejprve jsme řešili rov. (5.4) (pro x-ové složky sil), která obsahovala jedinou neznámou φ. Získanou hodnotu $\varphi = 28{,}0^\circ$ jsme pak dosadili do rov. (5.5) pro y-ové složky sil. Kdybychom začínali s rov. (5.5), v níž vystupují obě neznámé, byl by výpočet podstatně komplikovanější. Museli bychom totiž vyjádřit $\sin\varphi$ pomocí F_B a dosadit do rov. (5.4), která ovšem obsahuje $\cos\varphi$. Získali bychom tak nepříliš jednoduchou goniometrickou rovnici pro úhel φ. Při řešení úloh je třeba dávat pozor i na takové zdánlivé drobnosti, jako je způsob zpracování rovnic.



Obr. 5.4 Příklad 5.2. (a) Děti přetahující se o pneumatiku (pohled shora). (b) Silový diagram.

PŘÍKLAD 5.3

Obr. 5.5a ukazuje pohled shora na dvoukilogramovou plechovku pohybující se po dokonale hladké podložce vlivem působení tří sil. Její zrychlení má velikost $8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Síla $\boldsymbol{F}_1$ má velikost 10 N a síla a $\boldsymbol{F}_2$ 12 N. Obr. 5.5b, v němž je vyznačeno i zrychlení $\boldsymbol{a}$, představuje neúplný silový diagram úlohy. Vypočtěte třetí sílu $\boldsymbol{F}_3$ a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ kartézské soustavy souřadnic.

ŘEŠENÍ: Zrychlení je způsobeno výslednicí všech tří vodorovných sil. Z rovnice (5.1) plyne

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = m\boldsymbol{a}.$$

Z rovnic (5.2) dostáváme pro směr x

$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = ma_x, \qquad (5.6)$$

pro směr y

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = ma_y. \qquad (5.7)$$

Přepíšeme-li rov. (5.6) pomocí velikostí sil a úhlů mezi nimi a vezmeme-li v úvahu správná znaménka jednotlivých složek, můžeme psát

$$-F_1 \cos 60^\circ + 0 + F_{3x} = ma \sin 30^\circ.$$

Dosazením číselných údajů pak dostaneme

$$-(10\,\mathrm{N})\cos 60^\circ + 0 + F_{3x} = (2\,\mathrm{kg})(8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})\sin 30^\circ,$$

takže

$$F_{3x} = (10\,\mathrm{N})\cos 60^\circ + (2\,\mathrm{kg})(8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})\sin 30^\circ = 13\,\mathrm{N}.$$

Obdobně z rov. (5.7) získáme postupně

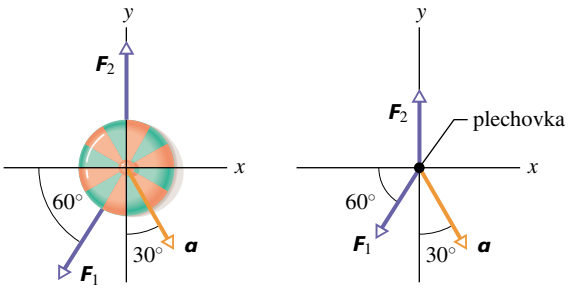
$$-F_1 \sin 60^\circ + F_2 + F_{3y} = -ma\cos 30^\circ,$$
$$-(10\,\mathrm{N})\sin 60^\circ + 12\,\mathrm{N} + F_{3y} = -(2\,\mathrm{kg})(8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})\cos 30^\circ,$$

odkud

$$F_{3y} = -17{,}2\,\mathrm{N} \doteq -17\,\mathrm{N}.$$

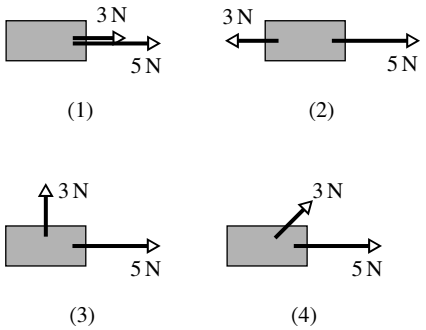
Třetí síla je tedy

$$\boldsymbol{F}_3 = (13\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} - (17\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 5.5 Příklad 5.3. (a) Pohled shora na plechovku urychlovanou třemi silami. Dvě z nich jsou vyznačeny. (b) Silový diagram úlohy.

KONTROLA 3: Obrázek ukazuje pohled shora na čtyři situace, kdy dvě síly urychlují tutéž kostku po dokonale hladké podlaze. Uspořádejte situace sestupně podle (a) velikosti výslednice sil působících na kostku a (b) podle velikosti zrychlení kostky.



RADY A NÁMĚTY

Bod 5.1: *Rozbor úlohy z hlediska působících sil*

Přečteme si zadání úlohy několikrát, až získáme dobrou představu o tom, jaká je situace, jaké údaje jsou zadány a jaké jsou úkoly. Tak třeba u př. 5.1 jsme si říkali: „Někdo tlačí sáně. Jejich rychlost se mění, takže zrychlení je nenulové. Víme, že pohyb je přímočarý. V prvé části úlohy je síla zadána, v druhé části ji máme určit. Vypadá to tedy tak, že je třeba použít druhý Newtonův zákon a aplikovat jej na případ jednorozměrného pohybu."

Je-li jasné, o jaký problém jde, ale nevíme-li, jak dále postupovat, problém prozatím odložíme a znovu si přečteme zadání. Nejsme-li si jisti správným pochopením druhého Newtonova zákona, přečteme si znovu celý článek. Prostudujeme příklady. Skutečnost, že problém formulovaný v př. 5.1 je jednorozměrný a zrychlení pohybu je konstantní, nás vrací ke kap. 2 a speciálně k tab. 2.1, obsahující všechny rovnice, které budeme potřebovat.

Bod 5.2: *Dvojí obrázky*

Při řešení každé úlohy je užitečné mít dva obrázky. Jedním z nich je hrubý náčrt skutečné situace. Zakreslíme do něj síly, přičemž počáteční bod každého vektoru síly umístíme na povrch či do objemu tělesa, na něž síla působí. Druhým obrázkem je silový diagram, v němž jsou zakresleny síly působící na *jediné* těleso, které je v nákresu znázorněno bodem. Počáteční bod každé ze sil umístíme právě do tohoto bodu.

Bod 5.3: *Jakou soustavu studujeme?*

Používáme-li druhý Newtonův zákon, musíme si uvědomit, na které těleso nebo soustavu jej aplikujeme. V př. 5.1 jsou to sáně (nikoli student nebo led). V př. 5.3 je to plechovka.

Bod 5.4: *Zvolíme vhodně soustavu souřadnic*

V př. 5.2 jsme si ušetřili práci tím, že jsme jednu ze souřadnicových os ztotožnili se směrem jedné z působících sil (osa y měla směr síly $\boldsymbol{F}_B$). Užitím druhého Newtonova zákona jsme dostali soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, která byla díky vhodné volbě souřadnicových os velmi jednoduchá: první rovnice obsahovala pouze jednu neznámou. Tuto rovnici jsme proto vyřešili napřed a výsledek dosadili do druhé. V podobných případech je takový postup rozumný, neboť velmi zjednodušuje celý výpočet.

5.6 NĚKTERÉ TYPY SIL

Tíhová síla (váha)

Tíhovou silou $\boldsymbol{G}$ (nepřesně též **váhou** tělesa, viz poznámku k př. 5.11) rozumíme sílu, kterou je těleso přitahováno k astronomickému objektu v jeho těsné blízkosti.

V běžných situacích je tímto astronomickým objektem Země. Tíhová síla je dána především přitažlivou **gravitační interakcí** dvou těles. Podrobně o ní budeme hovořit v kap. 14. Prozatím ji však budeme chápat jako sílu, která udílí tělesu *tíhové zrychlení* $\boldsymbol{g}$. Tíhová síla působící na těleso o hmotnosti m (váha tělesa o hmotnosti m) má velikost

$$G = mg. \tag{5.8}$$

Vektor tíhové síly pak lze zapsat jako

$$\boldsymbol{G} = -mg\boldsymbol{j} = -G\boldsymbol{j}, \tag{5.9}$$

(kde vektor $+\boldsymbol{j}$ míří svisle vzhůru, směrem od Země), nebo jako

$$\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}, \tag{5.10}$$

kde $\boldsymbol{g}$ je tíhové zrychlení. Je lhostejné, pro jaký způsob zápisu tíhové síly se rozhodneme. Jestliže však podle obvyklé konvence orientujeme osu y směrem vzhůru, musíme dát pozor, abychom nezaměnili (kladnou) velikost tíhového zrychlení, vystupující v rov. (5.8) s jeho (zápornou) y-ovou složkou v rov. (5.10).

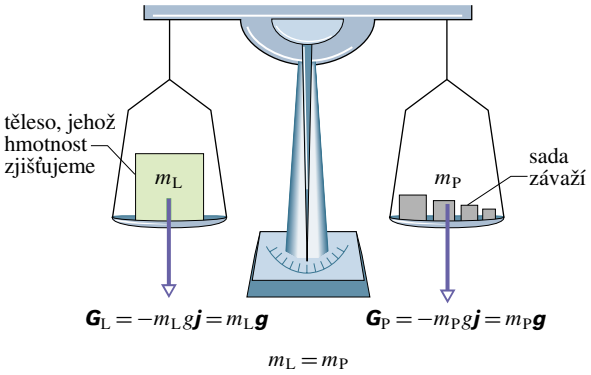
Jednotkou tíhové síly v soustavě SI je samozřejmě newton. Tíhová síla *není hmotnost*. Její velikost v daném bodě (v blízkosti Země či kteréhokoli jiného astronomického objektu) závisí na hodnotě g v tomto bodě. Bude-li například na medicinbal působit na Zemi tíhová síla o velikosti 71 N, na Měsíci to bude pouhých 12 N. Tíhové zrychlení na Měsíci je totiž asi šestkrát menší než na Zemi. Hmotnost medicinbalu 7,2 kg je stejná v kterémkoli místě, neboť hmotnost je charakteristikou předmětu samotného. (Chceme-li „vážit" méně, můžeme vylézt na vrchol hory. Naše hmotnost

se tím samozřejmě nezmění. Ve vyšší poloze však budeme ve větší vzdálenosti od středu Země a hodnota g bude nižší. Zmenší se tedy i tíhová síla.)

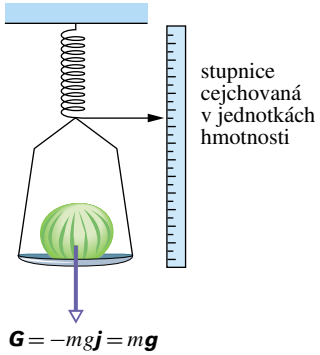
Běžně předpokládáme, že tíhovou sílu měříme v inerciální vztažné soustavě. V neinerciální soustavě však mohou být výsledky měření zkresleny a namísto skutečné tíhové síly naměříme tzv. **zdánlivou váhu**. K tomuto problému se podrobněji vrátíme v př. 5.11b, c.

Těleso můžeme *vážit* tak,* že je položíme na jednu misku rovnoramenné váhy (obr. 5.6) a na druhou misku klademe referenční tělesa známých hmotností. Jakmile dosáhneme rovnováhy, jsou hmotnosti misek vyrovnány a známe tedy i hmotnost tělesa m. Známe-li i hodnotu g v bodě, v němž měření provádíme, určíme velikost tíhové síly podle vztahu (5.8).

„Vážit“ můžeme i na pružinové váze (obr. 5.7). Těleso napíná pružinu a ukazatel se pohybuje podél stupnice cejchované a označené buď v jednotkách hmotnosti nebo v jednotkách síly. (Tímto způsobem funguje skoro každá osobní váha. Její stupnice bývá cejchována v kilogramech.) V případě cejchování stupnice v jednotkách hmotnosti je naměřený údaj správný pouze tehdy, je-li hodnota g v místě vážení táž jako hodnota, při níž byla stupnice cejchována.



Obr. 5.6 Rovnoramenná váha. V případě rovnováhy je celková hmotnost těles na levé misce (L) rovna celkové hmotnosti těles na pravé misce (P).



Obr. 5.7 Pružinová váha. Hodnota čtená na stupnici je úměrná velikosti tíhové síly působící na objekt umístěný na misce a udává přímo její velikost, je-li stupnice cejchována v newtonech. Je-li stupnice cejchována v kilogramech, čteme na stupnici hmotnost tělesa. Hmotnost je však správně určena jen tehdy, je-li velikost tíhového zrychlení při měření stejná jako při cejchování stupnice.

Kolmá tlaková síla

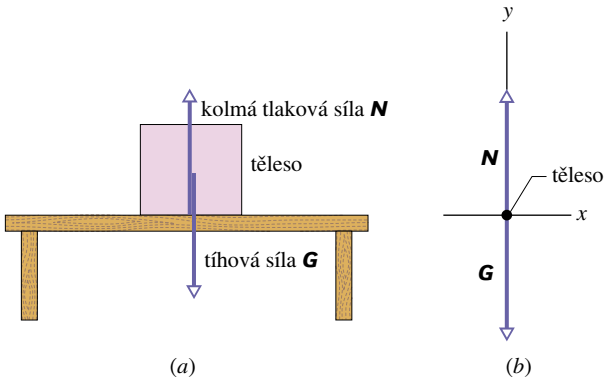
Na těleso samozřejmě působí i okolní objekty, které jsou s ním v přímém styku. Spočívá-li těleso na nějaké podložce, působí na ně podložka určitými silami. Jednou z nich je **tlaková síla** $\boldsymbol{N}$, kolmá k podložce. Často ji nazýváme **silou normálovou**. Název souvisí s matematickým pojmem *normálový*, neboli „kolmý“.

Je-li těleso v klidu na vodorovné podložce (obr. 5.8), míří síla $\boldsymbol{N}$ svisle vzhůru. Tíhová síla $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$ směřuje samozřejmě dolů. Pro toto *speciální* uspořádání můžeme určit velikost síly $\boldsymbol{N}$ z druhé rovnice sady rov. (5.2):

$$\sum F_y = N - mg = ma_y, \tag{5.11}$$

a tedy, protože $a_y = 0$,

$$N = mg. \tag{5.12}$$



Obr. 5.8 (a) Na těleso spočívající na stole působí stůl normálovou silou $\boldsymbol{N}$ kolmou ke svrchní desce. (b) Odpovídající silový diagram.

* V souhlasu s originálem knihy a také pro stručnost používáme někdy, spíše však výjimečně, formulací typu „těleso váží 500 N“, „těleso o váze 500 N“ apod. Suplujeme tím údaj o hmotnosti tělesa, která je právě taková, že Země působí na ono těleso, umístěné na jejím povrchu, tíhovou silou 500 N, tj. $m = \frac{G}{g} = \frac{500\,\mathrm{N}}{9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}} \doteq 51\,\mathrm{kg}$.

RADY A NÁMĚTY

Bod 5.5: *Normálová síla*

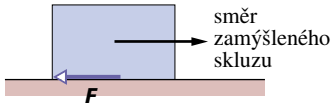
Vztah (5.12) pro normálovou sílu platí jedině tehdy, směřuje-li tato síla vzhůru, svislá složka zrychlení tělesa je nulová a na těleso nepůsobí kromě síly tíhové a normálové žádné další síly s nenulovými svislými složkami. Pro jiné situace jej *nemůžeme* použít a musíme se vrátit k zápisu všech složek druhého Newtonova zákona.

Sílu $\boldsymbol{N}$ můžeme v obrázku volně posouvat, pokud zachováváme její směr. V obr. 5.8a bychom ji například mohli přesunout tak, aby *koncový bod* vektoru $\boldsymbol{N}$ ležel v místě styku svrchní desky stolu s tělesem (jako bychom tím vyjadřovali skutečnost, že deska stolu „tlačí" na podstavu tělesa). Správné umístění vektoru $\boldsymbol{N}$ je ovšem takové, že jeho *počáteční bod* leží na rozhraní svrchní desky stolu a tělesa a označuje tak *působiště* normálové síly. Dokud však s tělesem pracujeme jako s hmotným bodem, můžeme při kreslení schematického obrázku umístit působiště síly $\boldsymbol{N}$ i kamkoli jinam do objemu tělesa. Možným interpretačním omylům se spolehlivě vyhneme, budeme-li pracovat se silovým diagramem (obr. 5.8b), v němž je síla $\boldsymbol{N}$ umístěna přímo v bodě symbolizujícím těleso.

KONTROLA 4: Stůl s tělesem z obr. 5.8 jsou umístěny ve výtahu. Zjistěte, zda je velikost síly $\boldsymbol{N}$ větší, menší či stejná jako velikost tíhové síly mg, stoupá-li výtah (a) stálou rychlostí, (b) se vzrůstající rychlostí.

Třecí síla

Klouže-li těleso po podložce, nebo snažíme-li se je do klouzavého pohybu uvést, brání tomuto pohybu vazby mezi tělesem a podložkou. (Podrobněji o nich budeme mluvit v následující kapitole.) Tento odpor bývá charakterizován jedinou silou $\boldsymbol{F}$, zvanou **třecí síla** nebo jednoduše **tření**. Třecí síla působící na těleso míří podél podložky a je orientována proti pohybu či zamýšlenému pohybu tělesa (obr. 5.9). Pro zjednodušení situace někdy tření zanedbáváme. V takovém případě nazýváme podložku *dokonale hladkou*.

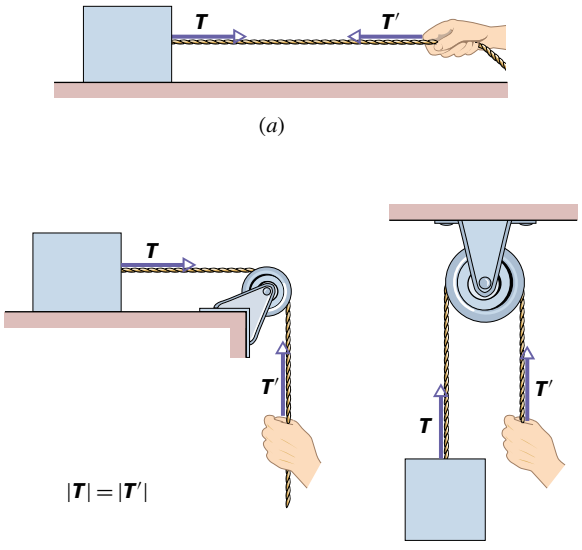


Obr. 5.9 Třecí síla $\boldsymbol{F}$ brání skluzu tělesa po podložce.

Tahová síla

Je-li těleso taženo na provaze, vlákně, lanku či něčem podobném, říkáme, že je lanko *napínáno*. Jeho jednotlivé části na sebe navzájem působí silami **pnutí**. Těleso je taženo silou $\boldsymbol{T}$, která směřuje podél lanka ven z objemu tělesa a je umístěna v bodě úchytu lanka (obr. 5.10a). Hovoříme o **tahové** nebo **tažné síle** lanka.

Zpravidla předpokládáme, že lanko je *nehmotné* a *nepružné*. Máme tím na mysli, že jeho hmotnost je zanedbatelná ve srovnání s hmotností tělesa a jeho délka je neměnná. Lanko tedy pouze realizuje spojení dvou těles. Táhne přitom obě tělesa silami o stejné velikosti T. Platí to i v případě, že se obě tělesa i s lankem pohybují se zrychlením nebo když je lanko vedeno přes *nehmotnou kladku*, která se může *otáčet bez tření* (obr. 5.10b, c). (Jedná se o idealizovanou kladku, jejíž hmotnost je velmi malá vzhledem k hmotnostem těles a třecí síla bránící jejímu otáčení kolem osy je rovněž zanedbatelná.)



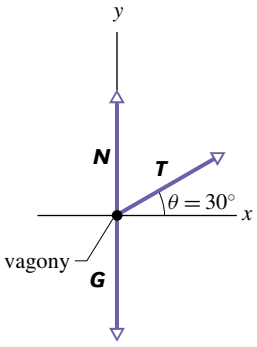
Obr. 5.10 (a) Tažné lanko je napnuté. Táhne těleso i ruku silou o velikosti T. Situace je stejná i na obrázcích (b) a (c), kde je lanko vedeno přes nehmotnou kladku, která se otáčí bez tření.

KONTROLA 5: Tíhová síla působící na těleso zavěšené na laně podle obr. 5.10c má velikost 75 N. Rozhodněte, zda velikost tažných sil lana, označených $\boldsymbol{T}'$, je stejná, větší, nebo menší než 75 N, jestliže těleso stoupá (a) s konstantní rychlostí, (b) s rostoucí rychlostí, (c) s klesající rychlostí.

PŘÍKLAD 5.4

Připomeňme si siláka Johna Massise a železniční vagony. Kladli jsme si otázku, zda velikost síly, kterou musel vyvinout, aby je posunul, nějak výrazně překračovala běžnou

hranici lidských možností. Předpokládejme, že Massis, svírající v zubech konec lana uvázaného k vagonům, vyvinul tažnou sílu dvaapůlkrát větší, než sám vážil. Jeho hmotnost byla 80 kg, lano svíralo s vodorovnou rovinou úhel $\theta = 30°$. Velikost tíhové síly vagonů G byla $7{,}0{\cdot}10^5$ N (odpovídá asi osmdesáti tunám) a John Massis je posunul po kolejích o 1,0 m. Předpokládejme, že kolejnice nepůsobily na kola žádnou brzdnou silou. Jaká byla výsledná rychlost vagonů?



Obr. 5.11 Příklad 5.4. Silový diagram Massisova pokusu s vagony. Délky šipek označujících vektory neodpovídají skutečným poměrům. Síla napínající vlákno je totiž *mnohem* menší než síla tíhová a normálová.

ŘEŠENÍ: Na obr. 5.11 je znázorněn silový diagram, v němž jsou vagony reprezentovány bodem. Osa x směřuje podél kolejnic. Z rovnic (5.2) dostáváme

$$\sum F_x = T\cos\theta = Ma_x, \qquad (5.13)$$

kde M je hmotnost vagonů. Ze zadaných hodnot určíme T a M.

Podle předpokladu vyvine J. Massis tahovou sílu o velikosti

$$T = 2{,}5mg = 2{,}5(80\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = 1\,960\,\mathrm{N},$$

což je hodnota běžná u dobrého vzpěrače střední váhy a zdaleka o ní nelze hovořit jako o nadlidské síle.

Tíhová síla působící na vagony má podle vztahu (5.8) velikost

$$G = Mg,$$

takže hmotnost vagonů M je

$$M = \frac{G}{g} = \frac{(7{,}0{\cdot}10^5\,\mathrm{N})}{(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = 7{,}143{\cdot}10^4\,\mathrm{kg}.$$

Ze vztahu (5.13) zjistíme zrychlení

$$a_x = \frac{T\cos\theta}{M} = \frac{(1\,960\,\mathrm{N})\cos 30°}{(7{,}143{\cdot}10^4\,\mathrm{kg})} = 2{,}376{\cdot}10^{-2}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Pro určení výsledné rychlosti vagonů použijeme vztahu (2.16), kam dosadíme $v_{0x} = 0$ a $x - x_0 = 1{,}0$ m:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0),$$

tj.

$$v_x = \sqrt{0 + 2(2{,}376{\cdot}10^{-2}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(1{,}0\,\mathrm{m})} = \\ = 0{,}22\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

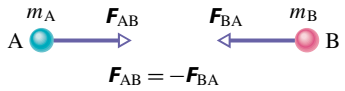
Massis by si svůj úkol usnadnil, kdyby připojil lano k vagonu o něco výše, aby bylo vodorovné. Víte proč?

5.7 TŘETÍ NEWTONŮV ZÁKON

Síly vždy působí ve dvojicích. Při úderu působí kladivo jistou silou na hlavičku hřebíku. Současně však působí i hřebík na kladivo, a to silou stejně velkou, avšak opačně orientovanou. Opře-li se člověk o stěnu, tlačí i stěna na člověka.

Nechť těleso A na obr. 5.12 působí na těleso B silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{BA}}$. Experimenty ukazují, že i těleso B působí na těleso A jistou silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}$. Tyto síly mají stejnou velikost a opačný směr. Platí tedy

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{BA}} \quad \text{(třetí Newtonův zákon).} \qquad (5.14)$$



Obr. 5.12 Třetí Newtonův zákon. Těleso A působí silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{BA}}$ na těleso B a těleso B působí silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}$ na těleso A. Platí $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{BA}}$.

Všimněte si pořadí indexů. Například $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}$ je síla, která vyjadřuje působení *tělesa* B *na těleso* A. Rov. (5.14) platí bez ohledu na to, zda se tělesa pohybují, nebo zda jsou v klidu.

Vztah (5.14) vyjadřuje třetí Newtonův pohybový zákon. Běžně je jedna z těchto sil (kterákoli) nazývána **akcí** a druhá **reakcí**. Kdykoli „narazíme" na sílu, má dobrý smysl se ptát: A kde je reakce?

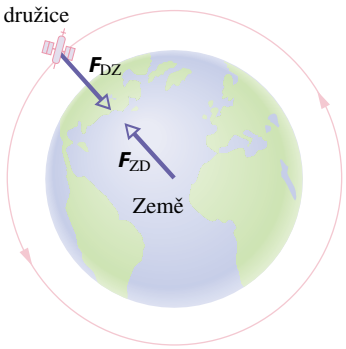
Věta „Ke každé akci existuje stejně velká a opačně orientovaná reakce" již takřka zlidověla a může mít různý význam podle toho, v jaké souvislosti je vyslovena. Ve fyzice však neznamená nic jiného než slovní vyjádření rov. (5.14). Zejména vůbec nic nevypovídá o příčině a následku. Kterákoli z interakčních sil může hrát roli akce či reakce.

Může nás napadnout: „Je-li každá síla spjata s jinou silou stejné velikosti a opačného směru, proč se tyto síly nevyruší? Jak se vůbec může něco dát do pohybu?" Odpověď je jednoduchá a názorně ji vidíme na obr. 5.12:

Síly akce a reakce působí *vždy* na různá tělesa. Nesčítají se proto ve výslednou sílu a nemohou se vyrušit.

Toto tvrzení se týká situace, kdy je sledovanou soustavou buď jedno, nebo druhé z obou interagujících těles. (V dalších kapitolách uvidíme, že v případě studia soustavy dvou nebo i více těles má smysl v rámci celé soustavy mluvit o výslednici interakčních sil. Ta ovšem bude, díky třetímu Newtonovu zákonu, skutečně nulová.)

Dvě síly, které působí na *totéž* těleso, *nejsou* akcí a reakcí, ani když mají stejnou velikost a opačný směr. V následujících příkladech určíme všechny dvojice typu akce – reakce.



Obr. 5.13 Družice na oběžné dráze kolem Země. Znázorněné síly představují dvojici akce – reakce. Všimněte si, že působí na různá tělesa.

Družice

Obr. 5.13 ukazuje družici na oběžné dráze kolem Země. Jedinou silou působící *na družici* je přitažlivá gravitační síla $\boldsymbol{F}_{DZ}$, jíž na ni působí Země. Kde je odpovídající reakce? Je to přitažlivá gravitační síla $\boldsymbol{F}_{ZD}$, jíž působí družice na Zemi. Její působiště můžeme umístit do středu Země.

Mohli bychom se domnívat, že malinká družice prakticky nemůže Zemi přitahovat. Přesto tomu tak je, přesně podle třetího Newtonova zákona. Pro velikosti sil platí $F_{DZ} = F_{ZD}$. Síla $\boldsymbol{F}_{ZD}$ udílí Zemi zrychlení, které je však vlivem obrovské hmotnosti Země tak malé, že není měřitelné.

Meloun na stole

Obr. 5.14a znázorňuje meloun ležící v klidu na stole.* Země působí na meloun svisle dolů tíhovou silou $\boldsymbol{F}_{MZ}$. Meloun se neurychluje, neboť tato síla je kompenzována stejně velkou, avšak opačnou, normálovou silou $\boldsymbol{F}_{MS}$, jíž na meloun působí stůl (obr. 5.14b). Síly $\boldsymbol{F}_{MZ}$ a $\boldsymbol{F}_{MS}$ však *netvoří* dvojici akce – reakce, neboť *působí na totéž těleso, meloun*.

Reakcí k síle $\boldsymbol{F}_{MZ}$ je gravitační síla $\boldsymbol{F}_{ZM}$, jíž působí meloun na Zemi. Tato dvojice akce – reakce je znázorněna na obr. 5.14c.

Reakcí k síle $\boldsymbol{F}_{MS}$ je síla $\boldsymbol{F}_{SM}$, jíž působí meloun na stůl. Tato dvojice akce – reakce je znázorněna na obr. 5.14d. Dvojice akce – reakce, vystupující v této úloze, spolu s příslušnými dvojicemi těles, jsou tedy

$$\text{první dvojice:} \quad \boldsymbol{F}_{MZ} = -\boldsymbol{F}_{ZM} \quad \text{(meloun a Země)}$$

a

$$\text{druhá dvojice:} \quad \boldsymbol{F}_{MS} = -\boldsymbol{F}_{SM} \quad \text{(meloun a stůl).}$$

KONTROLA 6: Dejme tomu, že meloun a stůl z obr. 5.14 jsou v kabině výtahu, která se rozjíždí směrem vzhůru. (a) Rozhodněte, zda velikosti sil $\boldsymbol{F}_{SM}$ a $\boldsymbol{F}_{MS}$ vzrostou, klesnou, či zůstanou beze změny. (b) Jsou tyto dvě síly stále stejně velké a opačně orientované? (c) Rozhodněte, zda velikosti sil $\boldsymbol{F}_{MZ}$ a $\boldsymbol{F}_{ZM}$ vzrostou, klesnou, či

* Nebereme v úvahu malé komplikace způsobené rotací Země.



Obr. 5.14 (a) Meloun leží na stole, který spočívá na zemském povrchu. (b) *Na meloun* působí síly $\boldsymbol{F}_{MS}$ a $\boldsymbol{F}_{MZ}$. Meloun je v klidu, neboť tyto síly jsou v rovnováze. (c) Dvojice akce – reakce při interakci melounu a Země. (d) Dvojice akce – reakce při interakci melounu a stolu.

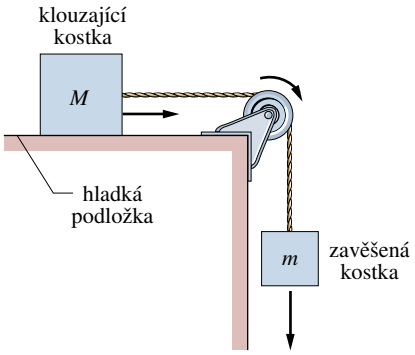
zůstanou beze změny. (d) Jsou tyto dvě síly stále stejně velké a opačně orientované?

5.8 UŽITÍ NEWTONOVÝCH ZÁKONŮ

Zbývající část této kapitoly tvoří příklady. Měli byste se nad nimi hlouběji zamyslet. Neučte se dílčí výpočty a odpovědi, ale soustřeďte se na problém jako celek. Snažte se pochopit postupy, které vedou k jeho vyřešení. Zvlášť důležité je vědět, jak přejít od schematického náčrtu situace k silovému diagramu a vhodně volit soustavu souřadnic, aby bylo možné aplikovat druhý Newtonův zákon. Začneme př. 5.5, který je propracován do nejmenších detailů formou otázka – odpověď.

PŘÍKLAD 5.5

Obr. 5.15 znázorňuje kostku (*klouzající kostka*) o hmotnosti 3,3 kg. Kostka se může volně pohybovat po vodorovné dokonale hladké podložce, např. na vzduchové lavici. Kostka je připojena nehmotným vláknem vedeným přes nehmotnou kladku otáčející se bez tření k jiné kostce (*zavěšená kostka*), jejíž hmotnost je 2,1 kg. Zavěšená kostka klesá a klouzající kostka se pohybuje s určitým zrychlením vpravo. (a) Určete toto zrychlení. (b) Určete zrychlení zavěšené kostky a (c) sílu napínající vlákno.

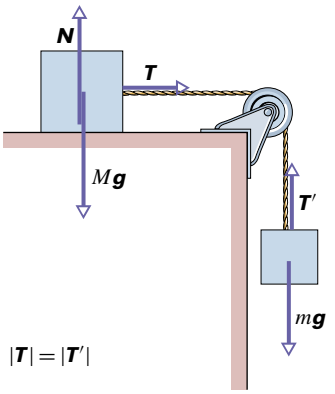


Obr. 5.15 Příklad 5.5. Kostka o hmotnosti M na vodorovné dokonale hladké podložce je spojena s kostkou o hmotnosti m vláknem vedeným přes kladku. Vlákno i kladka jsou nehmotné. Kladka se otáčí bez tření. Šipky vyznačují směr pohybu po uvolnění soustavy.

? *O co v úloze jde?*

Máme dva hmotné objekty, klouzající a zavěšenou kostku. Nesmíme zapomenout, že je zde také Země, která oba tyto objekty přitahuje. Bez přítomnosti Země by se nic nedělo. Na kostky působí celkem pět sil, znázorněných na obr. 5.16:

1. Vlákno táhne klouzající kostku vpravo silou $\boldsymbol{T}$ o velikosti T.
2. Vlákno táhne zavěšenou kostku silou $\boldsymbol{T}'$ o téže velikosti T. Tato síla směřuje vzhůru a brání volnému pádu zavěšené kostky, ke kterému by jinak samozřejmě došlo. Předpokládáme, že vlákno je napjato po celé délce stejně. Kladka slouží ke změně směru síly napínající vlákno beze změny její velikosti.
3. Země přitahuje klouzající kostku tíhovou silou $M\boldsymbol{g}$.
4. Země přitahuje zavěšenou kostku tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$.
5. Stůl tlačí na klouzající kostku normálovou silou $\boldsymbol{N}$.



Obr. 5.16 Síly působící na dvě kostky

Uvědomme si ještě další důležité věci. Předpokládáme, že vlákno je nepružné. Klesne-li tedy zavěšená kostka za jistou dobu o 1 mm, pohne se klouzající kostka v témže časovém intervalu o 1 mm vpravo. Kostky se pohybují společně a jejich zrychlení mají stejnou velikost a.

? *Jak máme tuto úlohu posuzovat? Nabízí se nám na základě její formulace použití určitého fyzikálního zákona?*

Ano, nabízí. Síly, hmotnosti a zrychlení jsou obsaženy v druhém Newtonově pohybovém zákonu $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$.

? *Chceme-li použít tento zákon při řešení úlohy, na jaké těleso jej máme aplikovat?*

Zaměřme se na dvě tělesa vystupující v úloze, klouzající a zavěšenou kostku. I když jde ve skutečnosti o rozměrné objekty, můžeme je považovat za hmotné body, protože každý z elementů, z nichž jsou složeny (řekněme každý atom), se pohybuje přesně stejným způsobem. Aplikujeme druhý Newtonův zákon na každou kostku zvlášť.

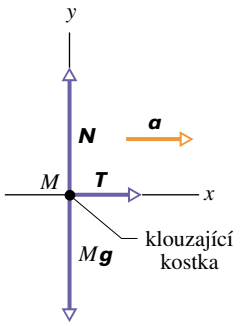
? *A co s kladkou?*

Kladku za hmotný bod považovat nemůžeme, neboť pohyb jejích jednotlivých elementů je různý. Až budeme uvažovat o otáčivém pohybu, všimneme si kladek podrobně. Prozatím se však tomuto problému vyhneme tím, že budeme hmotnost kladky považovat za zanedbatelnou v porovnání s hmotnostmi obou kostek.

? *Dobrá. Jak tedy nyní aplikujeme vztah $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$ na klouzající kostku?*

Představíme si kostku jako částici o hmotnosti M a nakreslíme *všechny* síly, které *na ni* působí, podle obr. 5.17. Tento obrázek představuje silový diagram klouzající kostky. Jsou

v něm tři síly. Nyní zvolíme souřadnicové osy. Je vhodné nakreslit osu x rovnoběžně s deskou stolu ve směru pohybu kostky.



Obr. 5.17 Silový diagram pro klouzající kostku na obr. 5.15

? *Ano, ale stále nebylo řečeno, jak aplikovat na klouzající kostku vztah* $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$. *Zatím jsme mluvili pouze o tom, jak nakreslit silový diagram.*

To je pravda. Vztah $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$ je vektorovou rovnicí a tu je třeba rozepsat do složek:

$$Ma_x = \sum F_x, \; Ma_y = \sum F_y, \; Ma_z = \sum F_z, \quad (5.15)$$

kde $\sum F_x, \sum F_y, \sum F_z$ jsou složky výsledné síly. Vzhledem k tomu, že se klouzající kostka nepohybuje ve svislém směru, je zřejmé, že y-ová složka výslednice je nulová. Normálová síla $\boldsymbol{N}$, směřující vzhůru, a tíhová síla $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$ jsou v rovnováze. z-ové složky všech sil jsou rovněž nulové (osa z je kolmá k rovině nákresu). Můžeme ovšem použít první z rov. (5.15).

Ve směru osy x je nenulová pouze jediná složka, x-ová složka síly $\boldsymbol{T}$. Ze vztahu $ma_x = \sum F_x$ tedy plyne

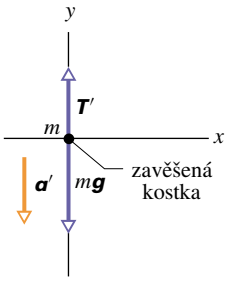
$$Ma = T. \quad (5.16)$$

Tato rovnice obsahuje dvě neznámé, T a a, takže ji nedokážeme jednoznačně vyřešit. Připomeňme však, že jsme zatím nic neřekli o zavěšené kostce.

? *Jistě. Budeme vztah* $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$ *aplikovat i na zavěšenou kostku? Jak?*

Nakreslíme silový diagram pro tuto kostku podle obr. 5.18. Tentokrát užijeme druhou z rovnic (5.15) a dostaneme

$$-ma = \sum F_y = T - mg. \quad (5.17)$$



Obr. 5.18 Silový diagram pro zavěšenou kostku na obr. 5.15. Vektory $\boldsymbol{T}'$, $\boldsymbol{a}'$ mají díky kladce jiné směry než vektory $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{a}$, platí však $|\boldsymbol{T}'| = |\boldsymbol{T}|$, $|\boldsymbol{a}'| = |\boldsymbol{a}|$.

Znaménko minus na levé straně rovnice signalizuje, že se kostka urychluje směrem dolů, v záporném směru osy y. Z rov. (5.17) plyne

$$mg - T = ma. \quad (5.18)$$

Tato rovnice obsahuje tytéž neznámé veličiny jako rov. (5.16). Sečtením obou rovnic vyloučíme T. Řešením vzhledem k neznámé a dostaneme

$$a = \frac{m}{M+m} g. \quad (5.19)$$

Dosazením tohoto výsledku do rov. (5.16) získáme

$$T = \frac{mM}{M+m} g. \quad (5.20)$$

Pro zadané číselné hodnoty dostáváme

$$a = \frac{m}{M+m} g = \frac{(2{,}1\,\mathrm{kg})}{(3{,}3\,\mathrm{kg} + 2{,}1\,\mathrm{kg})} (9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 3{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \quad \text{(Odpověď)}$$

a

$$T = \frac{mM}{M+m} g = \frac{(3{,}3\,\mathrm{kg})(2{,}1\,\mathrm{kg})}{(3{,}3\,\mathrm{kg} + 2{,}1\,\mathrm{kg})} (9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 13\,\mathrm{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

? *Nyní je problém vyřešen, že?*

To je správná otázka. Naším úkolem není jen řešit úlohy, ale také se učit fyziku. S úlohou nejsme ve skutečnosti hotovi, dokud jsme neověřili, zda jsou získané výsledky rozumné. Získáme tím často mnohem lepší zkušenost než samotným nalezením správné odpovědi.

Nejprve se vraťme k rov. (5.19). Všimněme si, že je rozměrově správný a že hodnota a bude vždy menší než g. Musí tomu tak být, neboť zavěšená kostka nepadá volně. Vlákno ji táhne směrem vzhůru.

Nyní se zaměřme na vztah (5.20), který můžeme přepsat ve tvaru

$$T = \frac{M}{M+m} mg. \quad (5.21)$$

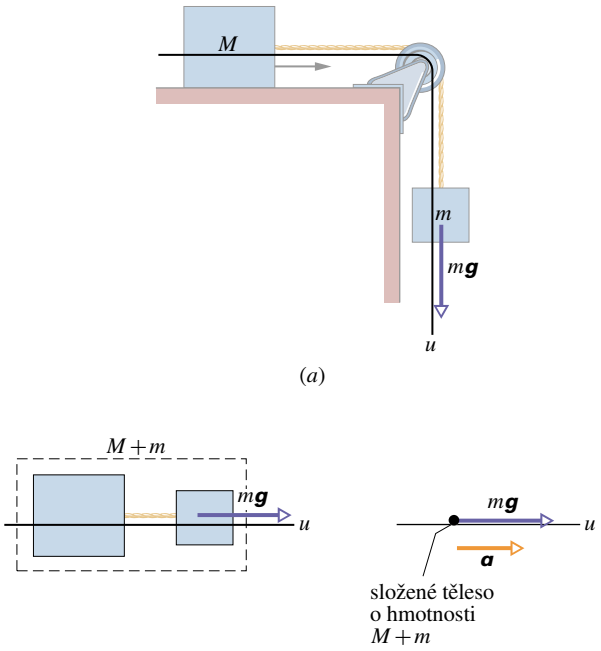
V tomto tvaru snáze ověříme rozměrovou správnost, neboť jak T, tak mg jsou velikosti sil. Z rov. (5.21) také hned vidíme, že velikost síly napínající vlákno je vždy menší než mg, tj. než velikost tíhové síly působící na zavěšenou kostku. To je potěšitelné zjištění, neboť kdyby vyšla hodnota T *větší* než mg, znamenalo by to, že se zavěšená kostka urychluje směrem vzhůru.

Výsledky můžeme také ověřovat rozborem speciálních případů, u nichž jsme si jisti správnou odpovědí. Jednoduchý případ, odpovídající experimentům v mezihvězdném prostoru, dostaneme volbou $g = 0$. Víme, že v takovém případě zůstanou kostky v klidu a vlákno nebude napjato. Dosadíme-li

$g = 0$ do rov. (5.19) a (5.20), vyjde opravdu $a = 0$ a $T = 0$. Další dvě speciální situace nastanou pro $M = 0$ a $m \to \infty$.

PŘÍKLAD 5.5 — jiný způsob řešení

Velikost zrychlení a kostek na obr. 5.15 dokonce dokážeme určit na pouhých dvou řádcích algebraických úprav, jestliže zvolíme poněkud zvláštní postup. (a) Užijeme neobvyklou volbu „osy“, řekněme u, která prochází *oběma* kostkami podél vlákna, jak znázorňuje obr. 5.19a. (b) V myšlenkách „narovnáme“ osu u podle obr. 5.19b a budeme kostky považovat za dvě součásti jednoho složeného tělesa o hmotnosti $M + m$. Silový diagram pro tuto soustavu je na obr. 5.19c.



Obr. 5.19 (a) „Osa“ u prochází soustavou tvořenou kostkami a vláknem z obr. 5.15. (b) Kostky jsou uspořádány podél „napřímené“ osy u a považovány za jediné těleso o hmotnosti $M + m$. (c) Příslušný silový diagram zahrnující pouze síly ve směru u. Taková síla je jediná.

ŘEŠENÍ: Uvědomme si, že na složené těleso působí ve směru osy u pouze jediná síla, a to tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, orientovaná kladně. Síly $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ napínající vlákno (obr. 5.16) jsou nyní vnitřními silami soustavy, tvořené složeným tělesem, a nevstupují do druhého Newtonova zákona. Síla, jíž působí kladka na vlákno, je kolmá k ose u a rovněž v druhém Newtonově zákonu nebude figurovat.

Řídíme-li se v této situaci vztahy (5.2), můžeme napsat rovnici pro složku zrychlení tělesa podél osy u:

$$(M + m)a_u = \sum F_u,$$

kde $(M + m)$ je hmotnost tělesa. Zrychlení složeného tělesa podél osy u (a tedy i zrychlení každé z kostek spojených vláknem) má velikost a. Jediná síla udělující složenému tělesu zrychlení podél osy u má velikost mg. Dostáváme tedy

$$(M + m)a = mg$$

a

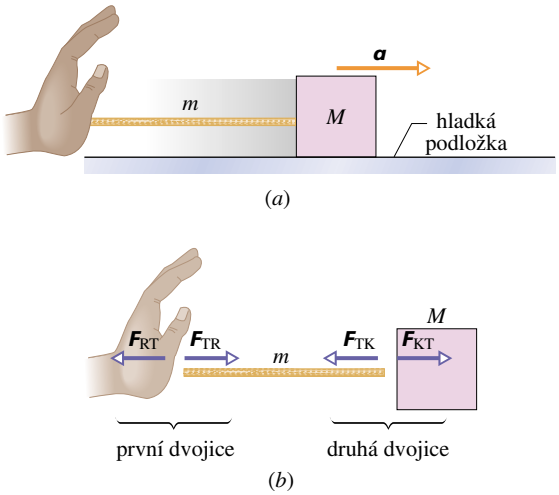
$$a = \frac{m}{M + m} g. \qquad (5.22)$$

Tento výsledek se shoduje s rov. (5.19).

Abychom určili velikost T, aplikujeme druhý Newtonův zákon na kteroukoli z obou kostek. Dostaneme tak rov. (5.16), nebo (5.18). Dosazením za a z rov. (5.22) a řešením vzhledem k neznámé T dostaneme rov. (5.20).

PŘÍKLAD 5.6

Kostka o hmotnosti $M = 33$ kg je tlačena po dokonale hladké podložce pomocí tyčky o hmotnosti $m = 3{,}2$ kg (obr. 5.20a). Kostka, která je zpočátku v klidu, se pohybuje s konstantním zrychlením a během 1,7 s se posune do vzdálenosti $d =$ $= 77$ cm.



Obr. 5.20 Příklad 5.6. (a) Tyčka o hmotnosti m tlačí kostku o hmotnosti M po dokonale hladké podložce. (b) Pohled na jednotlivé části soustavy ukazuje dvojice akce – reakce, tj. vzájemné působení ruky a tyčky (první dvojice) a tyčky a kostky (druhá dvojice).

(a) Určete všechny dvojice akce – reakce působící ve vodorovném směru.

ŘEŠENÍ: Jak je zřejmé z obr. 5.20b, jsou zde dvě dvojice sil typu akce – reakce:

první dvojice	$\boldsymbol{F}_{RT} = -\boldsymbol{F}_{TR}$	(ruka a tyčka),
druhá dvojice	$\boldsymbol{F}_{TK} = -\boldsymbol{F}_{KT}$	(tyčka a kostka).

Sílu $\boldsymbol{F}_{RT}$, jíž působí tyčka na ruku, bychom pocítili, kdybychom experiment prováděli „vlastnoručně“.

(b) Jakou silou musí působit ruka na tyčku?

ŘEŠENÍ: Hledaná síla udílí zrychlení tyčce i kostce. Abychom ji zjistili, musíme nejdříve určit užitím vztahu (2.15) velikost stálého zrychlení a:

$$x - x_0 = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2.$$

Dosazením $v_{0x} = 0$ a $x - x_0 = d$ a řešením vzhledem k neznámé $a_x = a$ dostaneme

$$a = \frac{2d}{t^2} = \frac{2(0{,}77\,\mathrm{m})}{(1{,}7\,\mathrm{s})^2} = 0{,}533\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Pro zjištění síly, již vyvine ruka, použijeme druhý Newtonův zákon pro soustavu složenou z tyčky a kostky. Pak

$$F_{\mathrm{TR}} = (M+m)a = (33\,\mathrm{kg} + 3{,}2\,\mathrm{kg})(0{,}533\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 19{,}3\,\mathrm{N} \doteq 19\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jakou silou tlačí tyčka na kostku?

ŘEŠENÍ: Aplikujeme druhý Newtonův zákon na samotnou kostku:

$$F_{\mathrm{KT}} = Ma = (33\,\mathrm{kg})(0{,}533\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 17{,}6\,\mathrm{N} \doteq 18\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jaká je výsledná síla působící na tyčku?

ŘEŠENÍ: Velikost této síly F můžeme najít dvěma způsoby. První z nich využívá výsledků (b) a (c):

$$F = F_{\mathrm{TR}} - F_{\mathrm{TK}} = 19{,}3\,\mathrm{N} - 17{,}6\,\mathrm{N} = \\ = 1{,}7\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při výpočtu jsme využili skutečnosti, že podle třetího Newtonova zákona má síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{TK}}$ stejnou velikost (tj. 17,6 N) jako síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{KT}}$.

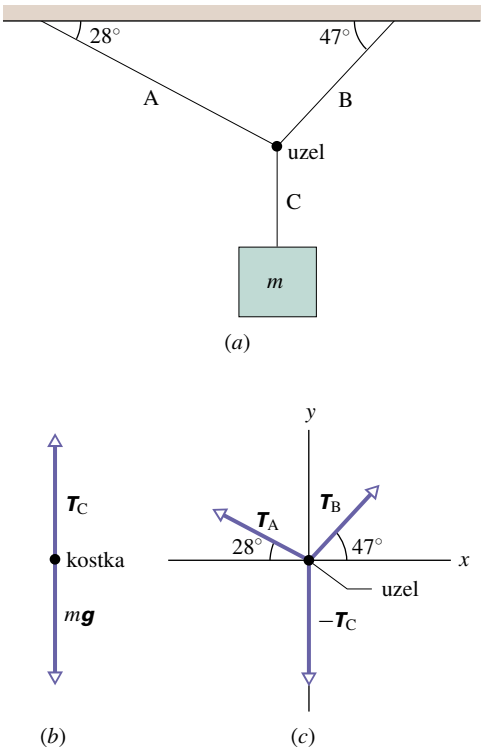
Druhý způsob spočívá přímo v použití druhého Newtonova zákona pro samotnou tyčku. Dostáváme

$$F = ma = (3{,}2\,\mathrm{kg})(0{,}533\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 1{,}7\,\mathrm{N}, \qquad \text{(Odpověď)}$$

což souhlasí s předchozím výsledkem. Musí tomu tak být, neboť oba postupy jsou ekvivalentní. Ověřte to obecným vyjádřením velikosti síly F pomocí zadaných veličin oběma způsoby.

PŘÍKLAD 5.7

Obr. 5.21 znázorňuje kostku o hmotnosti $m = 15\,\mathrm{kg}$ zavěšenou na třech vláknech. Jakými silami jsou vlákna napínána?



Obr. 5.21 Příklad 5.7. (a) Kostka o hmotnosti m je zavěšena na třech vláknech. (b) Silový diagram kostky. (c) Silový diagram uzlu, v němž jsou vlákna spojena.

ŘEŠENÍ: V silovém diagramu kostky (obr. 5.21b) směřuje tahová síla $\boldsymbol{T}_{\mathrm{C}}$, jíž působí na kostku vlákno C, svisle vzhůru, zatímco tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ míří dolů. Soustava je v klidu, takže podle druhého Newtonova zákona platí

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{C}} + m\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}.$$

Poněvadž jsou síly $\boldsymbol{T}_{\mathrm{C}}$ a $m\boldsymbol{g}$ svislé, dostáváme jedinou skalární rovnici

$$\sum F_y = T_{\mathrm{C}} - mg = 0.$$

Dosazením zadaných hodnot pak získáme

$$T_{\mathrm{C}} = mg = (15\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 147\,\mathrm{N} \doteq 150\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Další krok vychází ze skutečnosti, že všechny tři hledané tahové síly mají působiště v uzlu, v němž jsou vlákna spojena. Aplikujeme tedy druhý Newtonův zákon na uzel. Příslušný silový diagram je na obr. 5.21c. Protože se uzel neurychluje, musí být výsledná síla, která na něj působí, nulová. Pak

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{B}} + (-\boldsymbol{T}_{\mathrm{C}}) = \boldsymbol{0}.$$

Tato vektorová rovnice je ekvivalentní dvěma rovnicím skalárním

$$\sum F_y = T_{\mathrm{A}} \sin 28^\circ + T_{\mathrm{B}} \sin 47^\circ - T_{\mathrm{C}} = 0 \qquad (5.23)$$

a

$$\sum F_x = -T_A \cos 28^\circ + T_B \cos 47^\circ = 0. \quad (5.24)$$

Uvědomte si, že při zápisu x-ové složky síly $\boldsymbol{T}_A$ musíme výraz $T_A \cos 28^\circ$ opatřit znaménkem minus, abychom vyjádřili fakt, že průmět síly $\boldsymbol{T}_A$ do osy x je s touto osou nesouhlasně rovnoběžný.

Dosazením číselných hodnot do rov. (5.23) a (5.24) dostaneme

$$T_A(0{,}469) + T_B(0{,}731) = 147\,\text{N} \quad (5.25)$$

a

$$T_B(0{,}682) = T_A(0{,}883). \quad (5.26)$$

Z rov. (5.26) vyplývá

$$T_B = \frac{0{,}883}{0{,}682} T_A = 1{,}29 T_A.$$

Dosazením tohoto výsledku do rov. (5.25) a řešením vzhledem k neznámé T_A získáváme

$$T_A = \frac{147\,\text{N}}{0{,}469 + (1{,}29)(0{,}731)} = \\ = 104\,\text{N} \doteq 100\,\text{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Nakonec určíme T_B:

$$T_B = 1{,}29\, T_A = (1{,}29)(104\,\text{N}) = \\ = 134\,\text{N} \doteq 130\,\text{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

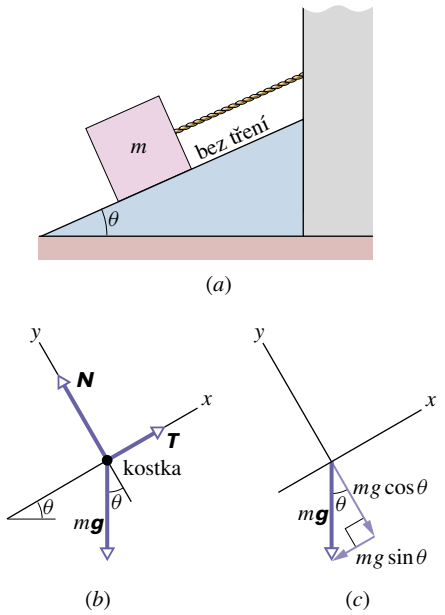
PŘÍKLAD 5.8

Na obr. 5.22a je kostka o hmotnosti $m = 15$ kg upevněná na vlákně a spočívající na dokonale hladké nakloněné rovině. Jakou silou je napínáno vlákno, je-li $\theta = 27^\circ$? Jakou silou působí nakloněná rovina na kostku?

ŘEŠENÍ: Na obr. 5.22b je silový diagram pro případ kostky. Na kostku působí tyto síly: (1) normálová síla $\boldsymbol{N}$, jíž na ni tlačí nakloněná rovina, (2) tahová síla vlákna $\boldsymbol{T}$ a (3) tíhová síla $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$. Poněvadž je zrychlení kostky nulové, je podle druhého Newtonova zákona nulová i výslednice všech těchto sil:

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N} + m\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}. \quad (5.27)$$

Zvolíme soustavu souřadnic tak, aby osa x byla rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Při této volbě budou mít dokonce dvě ze sil ($\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{T}$) směr souřadnicových os. To je výhoda. Všimněme si, že úhel mezi tíhovou silou a zápornou poloosou osy y je roven úhlu sklonu nakloněné roviny. Složky této síly určíme z trojúhelníka znázorněného na obr. 5.22c.



Obr. 5.22 Příklady 5.8 a 5.9. (a) Kostka o hmotnosti m upevněná na vlákně spočívá v klidu na dokonale hladké nakloněné rovině. (b) Silový diagram kostky. Všimněme si volby souřadnicových os. (c) Určení x-ové a y-ové složky tíhové síly $m\boldsymbol{g}$.

Rozepsáním vztahu (5.27) do složek dostaneme

$$\sum F_x = T - mg \sin\theta = 0$$

a

$$\sum F_y = N - mg \cos\theta = 0.$$

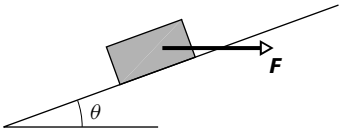
Pak tedy

$$T = mg \sin\theta = (15\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m·s}^{-2}) \sin 27^\circ = \\ = 67\,\text{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

a

$$N = mg \cos\theta = (15\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m·s}^{-2}) \cos 27^\circ = \\ = 131\,\text{N} \doteq 130\,\text{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 7: Na obrázku působí na kostku vodorovná síla $\boldsymbol{F}$. (a) Rozhodněte, zda průmět síly $\boldsymbol{F}$ do směru kolmého ke svahu má velikost $F\cos\theta$ nebo $F\sin\theta$. (b) Dojde vlivem působení síly $\boldsymbol{F}$ ke zvýšení či ke snížení velikosti normálové tlakové síly, jíž působí svah na kostku?



PŘÍKLAD 5.9

Představme si, že dojde k přetnutí vlákna udržujícího kostku na obr. 5.22 na nakloněné rovině v klidu. S jakým zrychlením se bude kostka pohybovat?

ŘEŠENÍ: Přetnutím vlákna zmizí síla $\boldsymbol{T}$, vyznačená na obr. 5.22b. Zbývající síly působící na kostku se samozřejmě nemohou vyrušit, neboť nepůsobí v téže přímce. Použitím druhého Newtonova zákona pro x-ové složky sil $\boldsymbol{N}$ a $m\boldsymbol{g}$ dostaneme

$$\sum F_x = 0 - mg\sin\theta = ma,$$

takže

$$a = -g\sin\theta. \tag{5.28}$$

Uvědomme si, že normálová síla $\boldsymbol{N}$ nemá vliv na zrychlení podél nakloněné roviny, neboť její x-ová složka je nulová.

Ze vztahu (5.28) vychází

$$a = -(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\sin 27^\circ = \\ = -4{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Znaménko minus signalizuje, že zrychlení má směr klesající souřadnice x, tedy dolů podél nakloněné roviny.

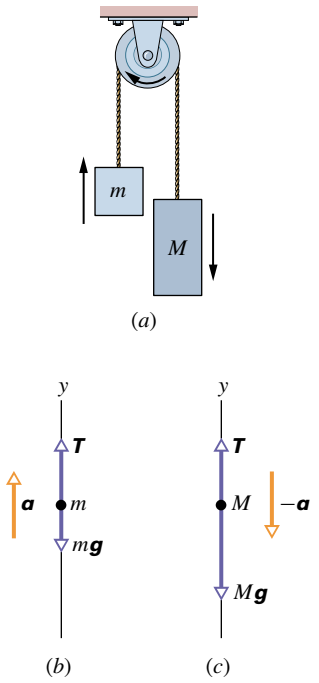
Z rov. (5.28) je vidět, že zrychlení kostky nezávisí na její hmotnosti, stejně jako je tomu v případě zrychlení volně padajícího tělesa. Rov. (5.28) představuje návod, jak lze užít nakloněné roviny ke „zmírnění gravitace", tj. ke „zpomalení" volného pádu. Pro $\theta = 90^\circ$ dostáváme $a = -g$, pro $\theta = 0^\circ$ je $a = 0$. Oba tyto výsledky jsme očekávali.

PŘÍKLAD 5.10

Na obr. 5.23a jsou dvě kostky spojené vláknem vedeným přes nehmotnou kladku, která se otáčí bez tření. (Takové uspořádání se nazývá *Atwoodův padostroj*.) Nechť $m = 1{,}3$ kg a $M = 2{,}8$ kg. Určíme velikost síly napínající vlákno a (společnou) velikost zrychlení kostek.

ŘEŠENÍ: Obr. 5.23b, c představují silové diagramy pro každou z kostek. Zadali jsme $M > m$, takže očekáváme, že kostka M bude klesat, zatímco m bude stoupat. Tato informace umožní přiřadit zrychlením kostek správná znaménka.

Než začneme s výpočtem, uvědomme si, že síla napínající vlákno musí být menší než tíhová síla působící na kostku M (jinak by kostka nezačala klesat) a větší než tíhová síla působící na kostku m (jinak by tato kostka nezačala stoupat). Znázornění vektorů v silových diagramech na obr. 5.23 tuto skutečnost respektuje.



Obr. 5.23 Příklad 5.10. (a) Kostka o hmotnosti M a kostka o menší hmotnosti m jsou spojeny vláknem vedeným přes kladku. Směry zrychlení kostek jsou vyznačeny šipkami. Silové diagramy pro kostku m (b) a kostku M (c).

Užitím druhého Newtonova zákona pro kostku o hmotnosti m, jejíž zrychlení má velikost a a je souhlasně rovnoběžné s osou y, dostaneme

$$ma = T - mg. \tag{5.29}$$

Pro kostku o hmotnosti M, jejíž zrychlení má stejnou velikost, je však nesouhlasně rovnoběžné s osou y, máme

$$-Ma = T - Mg, \tag{5.30}$$

nebo

$$Ma = -T + Mg. \tag{5.31}$$

Sečtením rovnic (5.29) a (5.31) (nebo vyloučením T) získáme

$$a = \frac{M-m}{M+m}g. \tag{5.32}$$

Dosazením tohoto výsledku do rov. (5.29) nebo do (5.31) a řešením vzhledem k neznámé T dostaneme

$$T = \frac{2mM}{M+m}g. \tag{5.33}$$

Dosazením zadaných údajů pak dostáváme

$$a = \frac{M-m}{M+m}g = \frac{(2{,}8\ \mathrm{kg} - 1{,}3\ \mathrm{kg})}{(2{,}8\ \mathrm{kg} + 1{,}3\ \mathrm{kg})}(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}) = \\ = 3{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

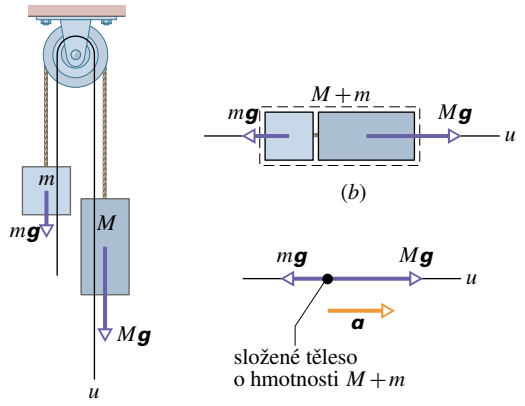
a

$$T = \frac{2Mm}{M+m}g = \frac{2(2{,}8\,\mathrm{kg})(1{,}3\,\mathrm{kg})}{(2{,}8\,\mathrm{kg}+1{,}3\,\mathrm{kg})}(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 17\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Velikosti tíhových sil působících na jednotlivé kostky jsou 13 N (= mg) a 27 N (= Mg). Velikost síly napínající vlákno (17 N) skutečně leží v intervalu těchto dvou hodnot.

PŘÍKLAD 5.10 — jiný způsob řešení

Obdobně jako při alternativním* řešení př. 5.5 použijeme nekonvenční volbu osy u.



Obr. 5.24 (a) „Osa“ u je vedena přes celou soustavu znázorněnou na obr. 5.23. (b) Kostky jsou uspořádány v „napřímené“ ose u a považovány za jediné těleso o hmotnosti $M+m$. (c) Příslušný silový diagram, v němž jsou vyznačeny pouze síly působící podél osy u. Takové síly jsou dvě.

ŘEŠENÍ: Vedeme osu u celou soustavou podle obr. 5.24a a napřímíme ji podle obr. 5.24b. Kostky budeme považovat za jediné těleso o hmotnosti $M+m$. Nakreslíme silový diagram podle obr. 5.24c. Uvědomme si, že podél osy u působí na složené těleso dvě síly: $m\boldsymbol{g}$ ve směru nesouhlasném s osou u a $M\boldsymbol{g}$ ve směru souhlasném. (Síly, jimiž působí na vlákno kladka, jsou kolmé k ose u a nevstupují do výpočtu.) Síly, které působí podél osy u, udělují složenému tělesu zrychlení $\boldsymbol{a}$. Zápis druhého Newtonova zákona pro složku u má tvar

$$\sum F_u = Mg - mg = (M+m)a, \qquad (5.34)$$

odkud

$$a = \frac{M-m}{M+m}\,g,$$

stejně jako při předchozím způsobu řešení. Pro získání T použijeme druhý Newtonův zákon pro kteroukoli z kostek a užijeme obvyklý způsob volby osy y. Pro kostku o hmotnosti m dostaneme rov. (5.29) a po dosazení za a získáme výsledek (5.33).

PŘÍKLAD 5.11

Pasažér o hmotnosti $m = 72{,}2$ kg stojí na nášlapné váze v kabině výtahu (obr. 5.25). Jaký údaj ukazuje váha pro hodnoty zrychlení uvedené v obrázku?

ŘEŠENÍ: Zabývejme se touto úlohou z hlediska pozorovatele v (inerciální) vztažné soustavě spojené se Zemí. Pozorovatel aplikuje druhý Newtonův zákon na urychlujícího se pasažéra. Obr. 5.25a-c ukazují silové diagramy, v nichž je pasažér považován za částici, pro různé hodnoty velikosti zrychlení kabiny.

Bez ohledu na zrychlení kabiny působí Země na pasažéra tíhovou silou o velikosti mg, kde $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je velikost tíhového zrychlení. Podlaha výtahu tlačí na váhu směrem vzhůru. Váha tlačí směrem vzhůru na pasažéra normálovou silou o velikosti N, která je shodná s údajem na stupnici váhy. Pasažér se domnívá, že váží tolik, kolik ukazuje váha. Tato veličina se často nazývá *zdánlivá váha*, přičemž název *tíhová síla* nebo jen *váha* je rezervován pro veličinu $m\boldsymbol{g}$.*

* Způsob řešení úloh, použitý jako alternativa v př. 5.5 a 5.10 a založený na myšlence „napřímení nekonvenční osy u jdoucí celou soustavou“, může mít svá úskalí, pokud jej důkladně nepromyslíme a nepochopíme. Jeho použitelnost spočívá výhradně v tom, že každý vektor, a tedy i všechny vektorové veličiny vstupující do našich výpočtů, lze zapsat pomocí složek v libovolně zvolené soustavě souřadnic. „Napřímení nekonvenční osy u“, o níž je řeč např. v př. 5.10, nepředstavuje nic jiného, než dvojí volbu soustavy souřadnic: s kostkou m je spojena soustava souřadnic, jejíž y-ová osa má směr zrychlení této kostky (směřuje tedy svisle vzhůru), y-ová osa soustavy souřadnic spojené s kostkou M směřuje naopak svisle dolů, tj. opět ve směru zrychlení příslušné kostky. Vazební podmínka úlohy $\boldsymbol{a}_m = -\boldsymbol{a}_M$ požaduje, aby zrychlení kostek byly opačné vektory. Toto a požadavek zanedbatelné hmotnosti kladky pak zajistí, že druhý Newtonův zákon zapsaný ve složkách má stejný tvar jako v případě s „napřímenou“ osou u.

* V originále je veličina mg nazývána *vahou*. V české fyzikální terminologii se tento výraz již téměř neužívá. Vektorové veličině $m\boldsymbol{g}$, kde $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, představující sílu, jíž působí Země na těleso o hmotnosti m v těsné blízkosti jejího povrchu, se říká *tíhová síla*, mg je *velikost tíhové síly*. Údaj čtený na stupnici nášlapné váhy samozřejmě ukazuje velikost síly, jíž působí člověk na podložku váhy, resp. podložka váhy na člověka. Pro tuto veličinu se někdy užívá názvu *tíha*. Pro $a = 0$ je tíha rovna mg a odpovídá *skutečné váze* zmiňované v originále, pro $a \neq 0$ se od hodnoty mg liší a odpovídá *zdánlivé váze*. Pro $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$ mluvíme o **beztížném stavu**. Bez pojmu *tíha* s přívlastky či bez nich se ovšem snadno obejdeme a vyhneme se tak možným dezinterpretacím. Vzhledem k tomu, že stupnice osobních vah jsou cejchovány výhradně v kilogramech, může mít smysl mluvit o *zdánlivé hmotnosti*. Prakticky ve všech úlohách, s nimiž se setkáme, působí na studovaná tělesa tíhová síla. Pro stručnost a s přihlédnutím k původnímu textu užíváme někdy namísto obsáhlejší správné formulace „na těleso působí tíhová síla 100 N“ použít zkráceného, avšak nepřesného, vyjádření „těleso váží 100 N“.

Druhý Newtonův zákon dává

$$ma = N - mg,$$

tj.

$$N = m(g + a). \qquad (5.35)$$

(a) Jaký je údaj na stupnici váhy, je-li kabina v klidu, nebo pohybuje-li se stálou rychlostí? (Obr. 5.25a.)

ŘEŠENÍ: Pro tento případ je $a = 0$, a tedy

$$N = m(g + a) = (72{,}2\,\text{kg})(9{,}80\,\text{m·s}^{-2} + 0) = \\ = 708\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento údaj považuje pasažér za svoji „váhu“.

(b) Jaký je údaj na stupnici, směřuje-li zrychlení kabiny vzhůru a jeho velikost je $3{,}20\,\text{m·s}^{-2}$? (Obr. 5.25b.)

ŘEŠENÍ: Směřuje-li zrychlení kabiny vzhůru, znamená to, že kabina buď stoupá se vzrůstající rychlostí, nebo klesá s klesající rychlostí. V obou případech je vztažná soustava spojená s kabinou neinerciální. Z rov. (5.35) dostaneme

$$N = m(g + a) = (72{,}2\,\text{kg})(9{,}80\,\text{m·s}^{-2} + 3{,}20\,\text{m·s}^{-2}) = \\ = 939\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

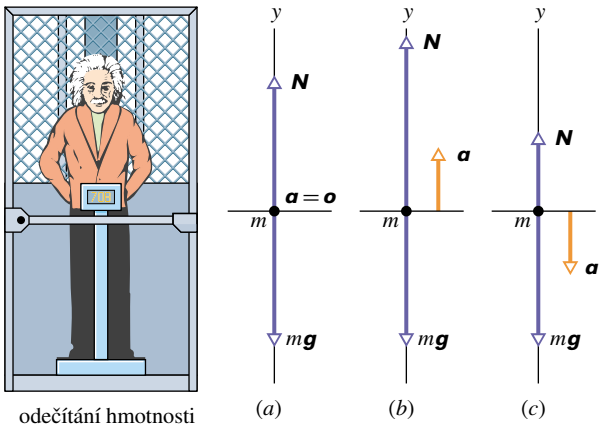
Pasažér tlačí na váhu větší silou než za klidu. Při pohledu na stupnici se pasažér může domnívat, že „přibral“ 23,6 kg (odpovídá 231 N)!

(c) Jaký je údaj na stupnici, směřuje-li zrychlení kabiny dolů a má-li velikost $3{,}2\,\text{m·s}^{-2}$? (Obr. 5.25c.)

ŘEŠENÍ: Směřuje-li zrychlení kabiny dolů, znamená to, že kabina buď stoupá s klesající rychlostí, nebo klesá se vzrůstající rychlostí. Vztažná soustava spojená s kabinou je opět neinerciální. Z rov. (5.35) dostaneme

$$N = m(g + a) = (72{,}2\,\text{kg})(9{,}80\,\text{m·s}^{-2} - 3{,}20\,\text{m·s}^{-2}) = \\ = 477\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pasažér tlačí na váhu menší silou než za klidu. Zdá se mu, že „zhubl“ o 23,6 kg (odpovídá 231 N)!



odečítání hmotnosti nebo zdánlivé hmotnosti

Obr. 5.25 Příklad 5.11. Pasažér o hmotnosti m stojí ve výtahu na pružinové váze, která ukazuje jeho hmotnost nebo „zdánlivou“ hmotnost. Silové diagramy pro případy, kdy (a) zrychlení kabiny výtahu je nulové, (b) $a = +3{,}2\,\text{m·s}^{-2}$, (c) $a = -3{,}2\,\text{m·s}^{-2}$.

KONTROLA 8: Jaký by byl údaj na stupnici, kdyby se lano kabiny přetrhlo a kabina by padala volným pádem? Jaká je tedy zdánlivá váha (či zdánlivá hmotnost) pasažéra při volném pádu?

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Newtonovská mechanika

Rychlost částice nebo tělesa nahrazeného hmotným bodem se může měnit (částice se může urychlovat), jestliže na ni okolní objekty působí **silami**. *Newtonovská mechanika* uvádí do souvislosti celkové silové působení na zkoumané těleso s jeho zrychlením.

Síla

Pozorujeme-li, že těleso má vzhledem k inerciální soustavě nenulové zrychlení (jeho pohyb je nerovnoměrný nebo křivočarý), jsme si díky prvnímu Newtonovu zákonu jisti, že je ovlivněno interakcí s okolními objekty. Kvantitativně je tato interakce popsána fyzikální veličinou zvanou **síla**. Vztahy pro síly charakterizující konkrétní interakce jsou dány **silovými zákony**, které je třeba zjistit experimentálně. Silový zákon lze odhalit tak, že sledujeme *testovací těleso* o známé hmotnosti m, které interaguje s *jediným* okolním objektem. Síla, kterou tento objekt působí na těleso, bude v každém okamžiku dána součinem hmotnosti testovacího tělesa m a jeho zrychlení $\boldsymbol{a}$. Experimentálně bylo zjištěno, že síly jsou vektorové veličiny a lze je skládat podle pravidel vektorové algebry. **Výslednice sil** působících na těleso je jejich vektorovým součtem. Velikost síly je číselně dána velikostí zrychlení, které tato síla udílí standardnímu kilogramu. Síla, která standardnímu kilogramovému tělesu udělí zrychlení o velikosti 1 m·s^{-2}, má podle definice velikost 1 N. Směr zrychlení a směr síly jsou shodné.

Hmotnost

Hmotnost tělesa je jeho charakteristika, která určuje vztah mezi jeho zrychlením a silou (nebo výslednicí sil), která mu toto zrychlení udílí. Hmotnost je skalární veličina.

První Newtonův zákon

Volné částice se navzájem pohybují rovnoměrně přímočaře nebo jsou vůči sobě v klidu. S volnými částicemi lze spojit preferované vztažné soustavy, nazývané inerciální. Volná částice je vzhledem k inerciální vztažné soustavě v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu (tj. v pohybu s konstantní rychlostí).

Druhý Newtonův zákon

Síly působící na těleso o hmotnosti m mu udílejí zrychlení, které je dáno jejich výslednicí $\sum \boldsymbol{F}$ podle vztahu

$$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}. \tag{5.1}$$

Tento vztah lze rozepsat do složek:

$$ma_x = \sum F_x, \quad ma_y = \sum F_y, \quad ma_z = \sum F_z. \tag{5.2}$$

Z druhého Newtonova zákona vyplývá, že v soustavě jednotek SI je jednotka síly

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}. \tag{5.3}$$

Silový diagram je užitečný pro řešení úloh pomocí druhého Newtonova zákona: je to zjednodušený diagram, konstruovaný pro *jediné* těleso, reprezentované bodem. Vnější síly působící na toto těleso jsou znázorněny jako vektory. V diagramu je rovněž zakreslena soustava souřadnic zvolená tak, aby řešení úlohy bylo co nejjednodušší.

Některé typy sil

Tíhová síla $\boldsymbol{G}$ je síla, kterou působí na těleso Země (nebo jiný astronomický objekt, v jehož těsné blízkosti se těleso nachází):

$$\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}, \tag{5.10}$$

kde $\boldsymbol{g}$ je tíhové zrychlení (zrychlení volného pádu).

Normálová síla $\boldsymbol{N}$ je tlaková síla, kterou působí na těleso podložka, na níž těleso spočívá. Je k podložce vždy kolmá.

Třecí silou $\boldsymbol{F}$ působí na těleso podložka, pokud je podél ní uváděno do skluzu, nebo již po ní klouže. Tato síla je rovnoběžná s podložkou a směřuje proti směru skutečného či zamýšleného pohybu tělesa. **Dokonale hladká podložka** působí na těleso zanedbatelně malou třecí silou.

Tahovou silou $\boldsymbol{T}$ působí na těleso připojené lano (vlákno). Její působiště je v místě spoje. Síla má směr vlákna a míří ven z tělesa. Pro **nehmotné** vlákno (tj. vlákno se zanedbatelnou hmotností) má tahová síla na obou jeho koncích stejnou velikost, i když je vedeno přes **nehmotnou kladku**, která se může otáčet **bez tření** (hmotnost kladky je zanedbatelná stejně jako třecí síla v ose kladky, která by bránila její rotaci).

Třetí Newtonův zákon

Působí-li těleso A silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{BA}}$ na těleso B, působí i těleso B na těleso A, a to silou stejně velkou, avšak opačně orientovanou:

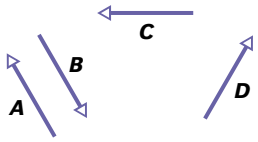
$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{BA}}. \tag{5.14}$$

Tyto síly působí na *různá* tělesa.

OTÁZKY

1. Na pohybující se těleso působí dvě síly. Je možné, aby se těleso pohybovalo (a) rovnoměrně, (b) stálou rychlostí? Mohla by být rychlost tělesa nulová (c) v některém okamžiku, (d) trvale?

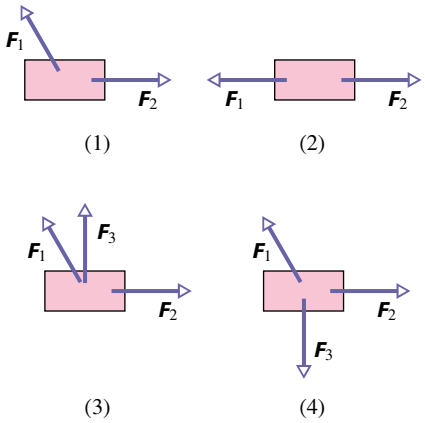
2. Obr. 5.26 znázorňuje čtyři síly stejné velikosti. Je možné vybrat z nich tři tak, aby se při jejich (současném) působení na těleso jeho rychlost neměnila? V kladném případě tyto síly označte.



Obr. 5.26 Otázka 2

3. Obr. 5.27 znázorňuje pohled shora na čtyři situace, v nichž síly působí na kostku spočívající na dokonale hladké podlaze. Ve kterých z nich lze vhodně zvolit velikost sil tak, aby kostka (a) byla v klidu, (b) pohybovala se konstantní rychlostí?

4. Svislá síla $\boldsymbol{F}$ působí na kostku o hmotnosti m ležící na podlaze. Co se děje s normálovou silou $\boldsymbol{N}$, jíž působí na kostku podlaha, narůstá-li velikost F síly $\boldsymbol{F}$ z nulové hodnoty a síla $\boldsymbol{F}$ směřuje (a) dolů, (b) vzhůru?

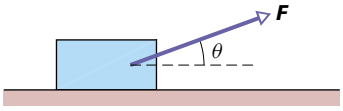


Obr. 5.27 Otázka 3

5. Na těleso na obr. 5.8 působí tíhová síla o velikosti 100 N. Na jeho povrchu leží další těleso, na něž působí tíhová síla 50 N. Jaká je normálová síla, jíž působí (a) dolní těleso na horní, (b) stůl na dolní těleso?

6. (a) Přispívá svislá složka síly $\boldsymbol{F}$ na obr. 5.28 k nadzvednutí krabice, nebo ji přitlačuje k podlaze? (b) Předpokládejte, že

hmotnost krabice je m. Je velikost normálové síly, jíž působí podlaha na krabici, stejná, větší či menší ve srovnání s mg? (c) Je svislá složka síly $\boldsymbol{F}$ rovna $F \sin\theta$, nebo $F \cos\theta$?

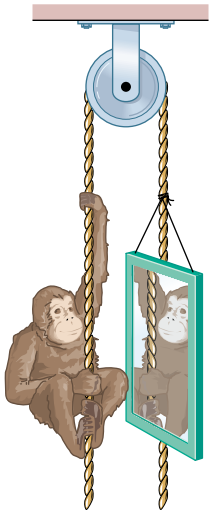


Obr. 5.28 Otázka 6

7. Zavěšené těleso na obr. 5.10c váží 75 N. Rozhodněte, zda je hodnota T, resp. T' stejná, větší či menší než 75 N, pohybuje-li se těleso směrem dolů (a) se vzrůstající rychlostí, (b) s klesající rychlostí.

8. Kabina výtahu je zavěšena na jediném laně a nemá protizávaží. V přízemí do kabiny nastoupí pasažéři, kteří jedou do nejvyššího patra a tam vystoupí. Nahoře nastoupí noví pasažéři a jedou do přízemí. Rozhodněte, v kterých fázích této okružní jízdy je velikost síly napínající závěsné lano (a) stejná jako velikost tíhové síly působící na pasažéry a kabinu, (b) větší, (c) menší.

9. Na obr. 5.29 je nehmotné lano vedeno přes kladku, která se může otáčet bez tření. Na laně visí opice a dívá se do zrcadla, které má stejnou hmotnost jako ona a je zavěšeno na druhém konci lana. Může opice „uniknout“ svému obrazu v zrcadle, jestliže (a) poleze po laně vzhůru, (b) poleze po laně dolů, (c) pustí lano? Zdůvodněte.

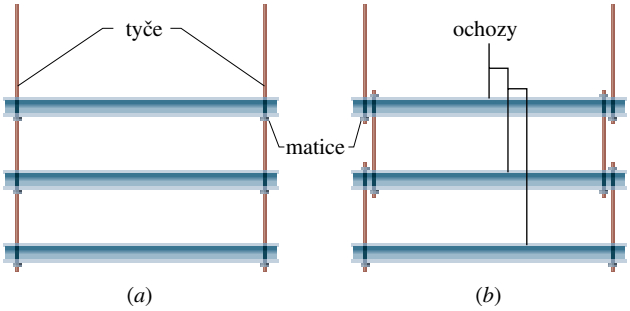


Obr. 5.29 Otázka 9

10. Je 17. července 1981, Kansas City: nově otevřená hala Hyatt Regency je plná lidí, kteří poslouchají oblíbené skladby 40. let a tančí při nich. Mnoho lidí se tísní na ochozech, které visí jako mosty nad širokým atriem. Najednou se dva ochozy utrhnou a spadnou na ty, kteří se baví dole…

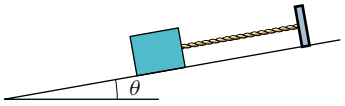
Ochozy byly zavěšeny nad sebou na svislých tyčích a připevněny k nim pomocí šroubů s maticemi. V původním návrhu konstrukce měly být použity pouze dvě svislé tyče a ke každé z nich měly být připevněny tři ochozy (obr. 5.30a). Tíhová síla působící na každý z ochozů i s lidmi měla průměrnou velikost G. Jaká by byla celková zátěž závitů a dvou šroubů s maticemi držících (a) nejnižší, (b) nejvyšší ochoz?

Předpokládejme, že šrouby nelze uchytit k tyčím jinak, než na jejich koncích. Je tedy třeba zvolit jiný typ konstrukce. Na rozdíl od původního provedení je nyní použito šesti tyčí a každá je spojena se dvěma ochozy (obr. 5.30b). Jaká je nyní celková zátěž závitů a dvou šroubů držících (c) nejnižší, (d) nejvyšší ochoz? Právě tato druhá konstrukce byla použita v popisovaném případě.



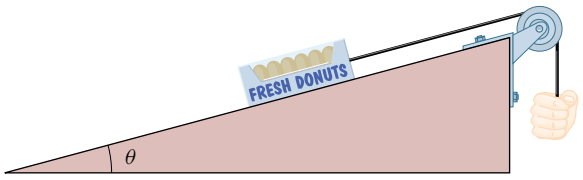
Obr. 5.30 Otázka 10

11. Kostka na obr. 5.31 je připevněna na provaze uchyceném ke sloupku, který je pevně spojen s nakloněnou rovinou. Rozhodněte, zda velikosti následujících sil rostou, klesají či zůstávají neměnné, narůstá-li úhel sklonu θ od nulové hodnoty: (a) složka tíhové síly působící na kostku měřená podél nakloněné roviny, (b) síla napínající provaz, (c) složka tíhové síly působící na kostku měřená ve směru kolmém k nakloněné rovině, (d) normálová síla, jíž působí nakloněná rovina na kostku.



Obr. 5.31 Otázka 11

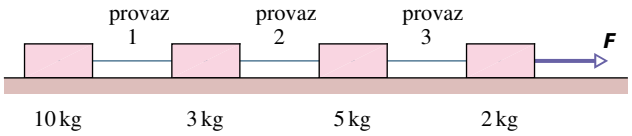
12. Krabice s koblihami leží na dokonale hladké nakloněné rovině (obr. 5.32). Složka tíhové síly působící na krabici měřená podél nakloněné roviny má velikost 5 N. Tahová síla provazu je T. Rozhodněte, je-li hodnota T stejná, větší či menší než 5 N, jestliže krabice (a) je v klidu, (b) stoupá po nakloněné rovině s konstantní rychlostí, (c) klesá s konstantní rychlostí, (d) stoupá s klesající rychlostí, (e) klesá s klesající rychlostí.



Obr. 5.32 Otázka 12

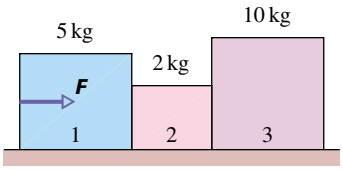
13. Na obr. 5.33 jsou čtyři kostky tažené po dokonale hladké vodorovné podložce silou $\boldsymbol{F}$. Jaká celková hmotnost je urychlo-

vána směrem vpravo (a) silou $\boldsymbol{F}$, (b) vláknem 3, (c) vláknem 1? (d) Sestavte sestupné pořadí kostek podle velikosti jejich zrychlení. (e) Sestavte sestupné pořadí vláken podle velikosti tažné síly. (Přípravná otázka pro řešení úloh 48 a 49.)



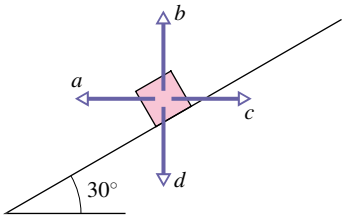
Obr. 5.33 Otázka 13

14. Na obr. 5.34 jsou tři kostky tlačené po dokonale hladké podložce vodorovnou silou $\boldsymbol{F}$. Jaká celková hmotnost je urychlována směrem vpravo (a) silou $\boldsymbol{F}$, (b) silou $\boldsymbol{F}_{21}$, jíž působí kostka 1 na kostku 2, (c) silou $\boldsymbol{F}_{32}$, jíž působí kostka 2 na kostku 3? (d) Seřaďte kostky sestupně podle velikosti jejich zrychlení. (e) Seřaďte sestupně síly $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_{21}$, $\boldsymbol{F}_{32}$ podle jejich velikosti. (Přípravná otázka pro úlohu 40.)



Obr. 5.34 Otázka 14

15. Obr. 5.35 ukazuje čtyři možné směry působení síly o velikosti F na kostku umístěnou na nakloněné rovině. Směry jsou buď vodorovné, nebo svislé. (Předpokládáme, že velikost síly není dostatečná k tomu, aby se v případě a nebo b kostka odpoutala od podložky.) Uspořádejte jednotlivé možnosti sestupně podle velikosti odpovídající normálové síly, jíž tlačí podložka na kostku.



Obr. 5.35 Otázka 15

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 5.3 Síla

1C. Standardní kilogramové těleso se pohybuje se zrychlením o velikosti $2{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, které svírá s kladným směrem osy x úhel 20°. Určete (a) x-ovou a y-ovou složku výslednice sil působících na těleso. (b) Vyjádřete výslednici pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic.

2C. Standardní kilogramové těleso je urychlováno silami $\boldsymbol{F}_1 = (3{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{F}_2 = (-2{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-6{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$. (a) Zapište výslednou sílu pomocí jednotkových vektorů. Určete velikost a směr (b) výsledné síly působící na těleso, (c) zrychlení tělesa.

3Ú. Standardní kilogramové těleso se pohybuje se zrychlením o velikosti $4{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, které svírá s kladným směrem osy x úhel 160°. Zrychlení udílejí tělesu dvě síly, z nichž jedna má tvar $\boldsymbol{F}_1 = (2{,}5\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4{,}6\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$. (a) Zapište druhou ze sil pomocí jednotkových vektorů. (b) Určete její velikost a směr.

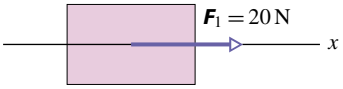
ODST. 5.5 Druhý Newtonův zákon

4C. Na kostku o hmotnosti 2,0 kg, která může klouzat po dokonale hladké kuchyňské lince v rovině xy, působí dvě vodorovné síly. Jedna z nich je $\boldsymbol{F}_1 = (3{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Zapište zrychlení kostky pomocí jednotkových vektorů, je-li druhá síla (a) $\boldsymbol{F}_2 = (-3{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-4{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$, (b) $\boldsymbol{F}_2 = (-3{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$, (c) $\boldsymbol{F}_2 = (3{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-4{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$.

5C. Částice, na niž působí dvě síly, se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v} = (3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Jedna ze sil je $\boldsymbol{F}_1 = (2\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-6\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Určete druhou sílu.

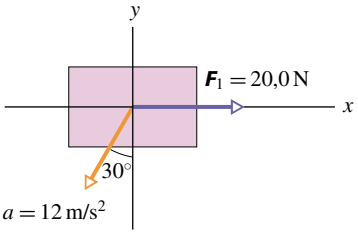
6C. Na částici pohybující se stálou rychlostí $\boldsymbol{v} = (2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$ působí tři síly. Dvě z nich jsou dány takto: $\boldsymbol{F}_1 = (2\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (3\,\mathrm{N})\boldsymbol{j} + (-2\,\mathrm{N})\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{F}_2 = (-5\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (8\,\mathrm{N})\boldsymbol{j} + (-2\,\mathrm{N})\boldsymbol{k}$. Určete třetí sílu.

7C. Na dvoukilogramovou bednu, znázorněnou na obr. 5.36 v pohledu shora, působí dvě síly, z nichž pouze jedna je v obrázku vyznačena. Bedna se pohybuje přesně podél osy x. Pro každou z následujících hodnot x-ové složky zrychlení a_x bedny určete druhou sílu: (a) $10{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, (b) $20{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, (c) 0, (d) $-10{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, (e) $-20{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



Obr. 5.36 Cvičení 7

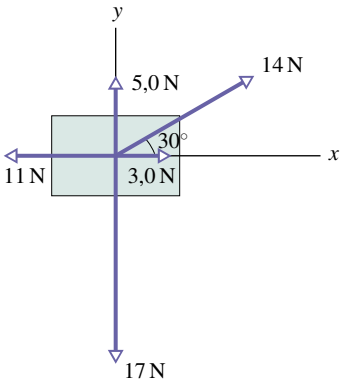
8C. Na dvoukilogramovou bednu, znázorněnou na obr. 5.37 v pohledu shora, působí dvě síly, z nichž pouze jedna je v obrázku vyznačena. Obrázek také ukazuje zrychlení bedny. (a) Vyjádřete druhou sílu pomocí jednotkových vektorů. (b) Určete její velikost a směr.



Obr. 5.37 Cvičení 8

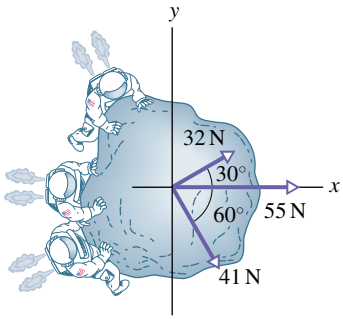
9C. Bedna na obr. 5.38 má hmotnost 4,0 kg. Působí na ni pět

sil. Vyjádřete zrychlení bedny (a) pomocí jednotkových vektorů a (b) určete jeho velikost a směr.



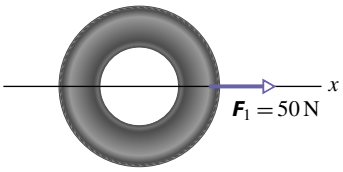
Obr. 5.38 Cvičení 9

10Ú. Tři astronauti pohánění tryskovými motorky na zádech tlačí asteroid o hmotnosti 120 kg k řídícímu stanovišti. Působí na něj při tom silami, vyznačenými v obr. 5.39. Jaké je zrychlení asteroidu vyjádřené (a) pomocí jednotkových vektorů, (b) pomocí velikosti a směru?



Obr. 5.39 Úloha 10

11Ú. Obr. 5.40 představuje pohled shora na pneumatiku o hmotnosti 12 kg, taženou třemi lany. Jedna ze sil ($\boldsymbol{F}_1$, velikost 50 N) je vyznačena. Stanovte orientaci dalších dvou sil $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ tak, aby velikost výsledného zrychlení byla co nejmenší a určete tuto velikost pro (a) $F_2 = 30\,\text{N}$, $F_3 = 20\,\text{N}$, (b) $F_2 = 30\,\text{N}$, $F_3 = 10\,\text{N}$, (c) $F_2 = F_3 = 30\,\text{N}$.



Obr. 5.40 Úloha 11

ODST. 5.6 Některé typy sil

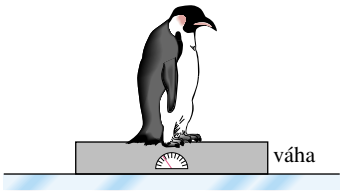
12C. Určete hmotnost a tíhovou sílu pro (a) 1 400librový sněžný skútr a (b) 421kilogramovou tepelnou pumpu.

13C. Jaká je tíhová síla v newtonech a hmotnost v kilogramech pro (a) 5,0librový balík cukru, (b) 240librového zápasníka, (c) 1,8tunový automobil?

14C. Vesmírný cestovatel, jehož hmotnost je 75 kg, opustil Zemi. Určete velikost tíhové síly, která na něj působí (a) na Zemi, (b) na Marsu, kde je $g = 3{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, (c) v meziplanetárním prostoru, kde je $g = 0$. (d) Jaká je jeho hmotnost ve všech těchto místech?

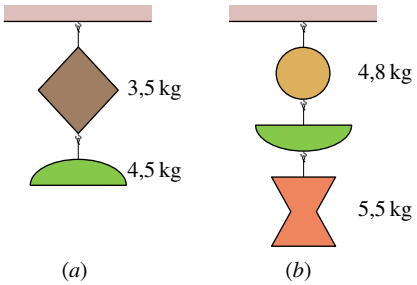
15C. Na částici působí tíhová síla 22 N v místě, kde je $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. (a) Určete tíhovou sílu působící na částici v místě, kde je $g = 4{,}9\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Jaká je v tomto místě její hmotnost? (b) Jaká bude hmotnost a tíhová síla působící na tuto částici, přemístíme-li ji do prostoru, kde je $g = 0$?

16C. Tučňák o hmotnosti 15,0 kg stojí na osobní váze (obrázek 5.41). Určete (a) tíhovou sílu $\boldsymbol{G}$ působící na tučňáka a (b) normálovou sílu $\boldsymbol{N}$. Jaký údaj ukazuje váha, je-li cejchována v newtonech?



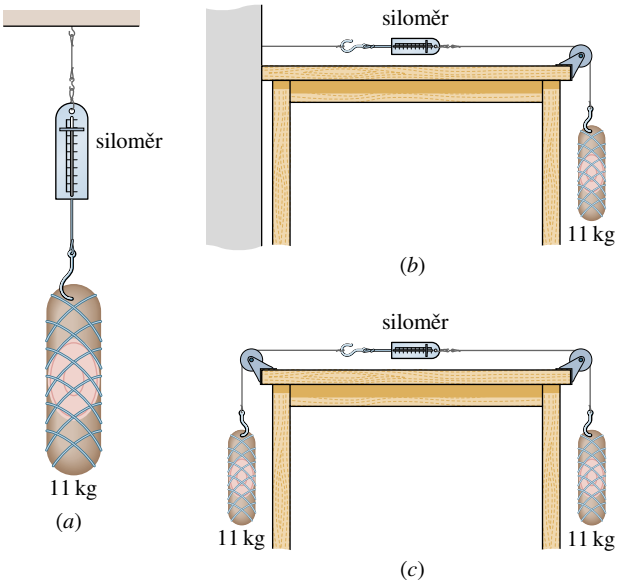
Obr. 5.41 Cvičení 16

17C. Na obr. 5.42a je znázorněna ozdoba se dvěma kovovými díly navléknutými na vlákně o zanedbatelné hmotnosti, zavěšená u stropu. Hmotnosti dílů jsou dány. Jaká síla napíná (a) dolní vlákno, (b) horní vlákno? Obr. 5.42b zachycuje podobnou ozdobu se třemi kovovými díly. Hmotnosti nejvyššího a nejnižšího dílu jsou dány. Síla napínající horní vlákno má velikost 199 N. Jak velká síla napíná (c) dolní a (d) prostřední vlákno?



Obr. 5.42 Cvičení 17

18C. (a) Salám o hmotnosti 11,0 kg je zavěšen na pružině siloměru, který je připevněn provazem ke stropu (obr. 5.43a). Jaký údaj je na stupnici siloměru? (b) Na obr. 5.43b je týž salám zavěšen na provaze vedeném přes kladku a upevněném k pružině siloměru. Siloměr je připevněn dalším provazem ke stěně. Jaký je nyní údaj na stupnici siloměru? (c) Na obr. 5.43c je stěna nahrazena jiným salámem o hmotnosti 11,0 kg a soustava je v rovnováze. Určete údaj na stupnici siloměru i v tomto případě.



Obr. 5.43 Cvičení 18

ODST. 5.8 Užití Newtonových zákonů

19C. Tíhová síla působící na letící letadlo je kompenzována svislou vztlakovou silou, kterou na letadlo působí okolní vzduch. Jak velká je vztlaková síla, je-li hmotnost letadla $1{,}20 \cdot 10^3$ kg?

20C. Jaká je velikost výslednice sil působících na automobil o hmotnosti 1 900 kg, který se rozjíždí se zrychlením o velikosti 3,1 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$?

21C. Pokusné raketové sáně mohou být během 1,8 s rovnoměrně urychleny z klidu až na rychlost 1 600 $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Jaká je velikost potřebné průměrné síly, je-li hmotnost sání 500 kg?

22C. Automobil jedoucí rychlostí 53 $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ narazil do mostního pilíře. Řidič se přitom pohnul o 65 cm dopředu (vzhledem k silnici), než byl jeho pohyb zastaven airbagem. Jak velká síla (předpokládáme stálou sílu) působila na řidičovu horní část těla, jejíž hmotnost je 41 kg?

23C. Při zachycení zbloudilého neutronu jádrem se neutron vlivem *silné interakce* musí zastavit na vzdálenosti rovné průměru jádra. Síla, která „drží“ jádro pohromadě, je vně jádra prakticky nulová. Předpokládejme, že zbloudilý neutron s počáteční rychlostí o velikosti $1{,}4{\cdot}10^7$ $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je právě tak tak zachycen jádrem o průměru $d = 1{,}0{\cdot}10^{-14}$ m. Jak velká je síla působící na neutron, považujeme-li ji za konstantní? Hmotnost neutronu je $1{,}67{\cdot}10^{-27}$ kg.

24C. V modifikované přetahované se přetahují dva lidé nikoli na provaze, ale o sáně s hmotností 25 kg, které leží na (dokonale hladké) ledové ploše. Jaké bude zrychlení saní, vyvine-li jeden z hráčů sílu o velikosti 90 N a druhý 92 N?

25C. Motocykl o hmotnosti 225 kg dosáhne z klidu rychlosti 90 $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ během 5,0 s. (a) Jak velké je zrychlení motocyklu, považujeme-li je za konstantní? (b) Jaká je velikost výsledné síly urychlující motocykl?

26C. Vraťme se k obr. 5.15 a předpokládejme, že hmotnosti znázorněných těles jsou $m = 2{,}0$ kg a $M = 4{,}0$ kg. (a) Bez výpočtu rozhodněte, které z obou těles je nutno zavěsit na konec lana, abychom docílili co největšího zrychlení. Jaká je v tomto případě (b) velikost zrychlení a (c) velikost tahové síly lana?

27C. Vraťme se k obr. 5.22. Zvolme hmotnost kostky $m = 8{,}5$ kg a úhel $\theta = 30°$. Určete (a) tahovou sílu provazu a (b) normálovou sílu působící na kostku. (c) Jaké bude zrychlení kostky, jestliže se provaz přetrhne?

28C. Tryskový letoun se rozjíždí po startovní dráze se zrychlením $2{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Má dva tryskové motory, z nichž každý vyvine tažnou sílu o velikosti $1{,}4{\cdot}10^5$ N. Kolik váží letadlo?

29C. *Sluneční plachtění.* „Sluneční jachta“ je kosmická loď s velkou „plachtou“, poháněná světelnými paprsky ze Slunce. I když je světelný tlak v běžných podmínkách velice malý, může být dostatečný k tomu, aby dopravil kosmickou loď na bezplatný, i když velmi pomalý výlet. Předpokládejme, že hmotnost lodi je 900 kg a působí na ni tlaková síla o velikosti 20 N. (a) Jak velké je zrychlení lodi? (b) Startuje-li loď z klidu, jak daleko se dostane za 1 den a (c) jak velké rychlosti za tu dobu dosáhne?

30C. Tahová síla, při které praskne rybářský vlasec, se všeobecně nazývá „pevností“ vlasce. Jakou nejmenší pevnost vlasce (v newtonech) musíme požadovat, aby se 19librový losos zastavil na vzdálenosti 4,4 palce, pohyboval-li se rychlostí o velikosti 9,2 stop na sekundu? Předpokládejte, že zrychlení lososa je konstantní. Převody zadaných údajů do soustavy SI vyhledejte v převodní tabulce.

31C. V laboratorním experimentu je původně klidový elektron ($m = 9{,}11{\cdot}10^{-31}$ kg) rovnoměrně urychlen na vzdálenosti 1,5 cm a dosáhne rychlosti $6{,}0{\cdot}10^6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jaká je velikost urychlující síly? (b) Jak velká je tíhová síla působící na elektron?

32C. Elektron vstupuje do elektrického pole s vodorovnou rychlostí o velikosti $1{,}2{\cdot}10^7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Pole na něj působí stálou svislou silou o velikosti $4{,}5{\cdot}10^{-16}$ N. Hmotnost elektronu je $9{,}11{\cdot}10^{-31}$ kg. Zjistěte, jaká bude svislá složka posunutí elektronu poté, co ve vodorovném směru urazil 30 mm.

33C. Automobil vážící $1{,}30{\cdot}10^4$ N začne brzdit při rychlosti 40 $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a zastaví se na dráze 15 m. Za předpokladu, že je brzdná síla konstantní, určete (a) její velikost a (b) dobu brzdění. Jaká bude (c) brzdná dráha a (d) doba brzdění automobilu při téže brzdné síle, byla-li velikost počáteční rychlosti dvojnásobná? (Tato úloha může posloužit k získání představy o nebezpečí rychlé jízdy.)

34C. Určete počáteční zrychlení rakety o hmotnosti $1{,}3{\cdot}10^4$ kg, je-li počáteční tažná síla jejího motoru $2{,}6{\cdot}10^5$ N. Nezanedbávejte tíhovou sílu působící na raketu.

35C. Celková hmotnost rakety s nákladem je $5{,}0{\cdot}10^4$ kg. (a) Jak velká je tažná síla motoru, jestliže se raketa po zážehu „vznáší“ nad startovací rampou, (b) raketa se urychluje se zrychlením o velikosti $20\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$?

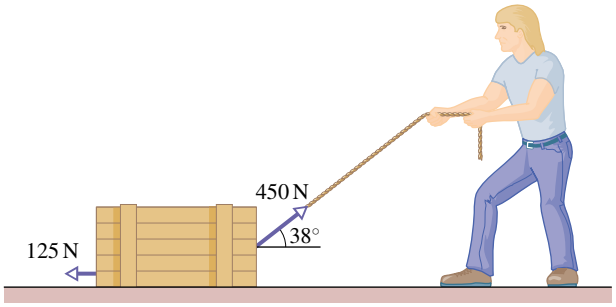
36Ú. Dívka o hmotnosti 40 kg si na hladině zamrzlého jezera hraje se sáněmi o hmotnosti 8,4 kg. Dívka a sáně jsou od sebe

vzdáleny o 15 m. Holčička táhne sáně na provaze směrem k sobě vodorovnou silou o velikosti 5,2 N. (a) S jakým zrychlením se pohybují sáně? (b) S jakým zrychlením se pohybuje dívka? (c) Jak daleko od původního stanoviště dívky se střetnou, neuvažujeme-li působení třecích sil?

37Ú. Požárník o hmotnosti 72 kg sjíždí dolů po svislé tyči se zrychlením o velikosti 3,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jaká je velikost a směr (a) svislé síly, jíž působí tyč na požárníka, (b) svislé síly, jíž působí požárník na tyč?

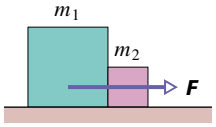
38Ú. Kulička o hmotnosti $3{,}0{\cdot}10^{-4}$ kg je zavěšena na niti. Stálý vítr, který vane ve vodorovném směru, na ni působí tak, že kulička je v klidu a nit svírá se svislým směrem úhel 37°. Určete (a) velikost síly větru a (b) velikost tažné síly niti.

39Ú. Dělník vleče bednu po podlaze pomocí lana (obr. 5.44). Lano je od vodorovného směru odkloněno o úhel 38° a dělník je táhne silou o velikosti 450 N. Podlaha působí na bednu mj. vodorovnou silou o velikosti 125 N, směřující proti jejímu pohybu. Vypočtěte zrychlení bedny, (a) je-li její hmotnost 310 kg, (b) váží-li bedna 310 N.



Obr. 5.44 Úloha 39

40Ú. Dvě kostky ležící na dokonale hladkém stole se dotýkají (obr. 5.45). (a) Určete síly, jimiž na sebe kostky navzájem působí, je-li $m_1 = 2{,}3$ kg, $m_2 = 1{,}2$ kg a $F = 3{,}2$ N. (b) Předpokládejme, že síla o stejné velikosti F bude působit na kostku m_2 v opačném směru. Ukažte, že velikost sil, jimiž na sebe nyní kostky působí, je 2,1 N, tj. je odlišná od výsledku úlohy (a). Zdůvodněte tento rozdíl.



Obr. 5.45 Úloha 40

41Ú. Představme si, že tlačíme malou ledničku stálou silou $\boldsymbol{F}$ po naleštěné (dokonale hladké) podlaze tak, že síla $\boldsymbol{F}$ je buď vodorovná (případ 1), nebo je od vodorovného směru odkloněna o úhel θ šikmo vzhůru (případ 2). (a) Jaký je poměr velikostí rychlostí, kterých dosáhne lednička v případech 2 a 1, tlačíme-li ji vždy po stejnou dobu t? (b) Jaký bude tento poměr, posune-li se lednička v obou případech do téže vzdálenosti d?

42Ú. Pro zábavu: Pásovec klouže po dokonale hladké zamrzlé hladině rybníka s počáteční rychlostí o velikosti 5,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, která je souhlasně rovnoběžná se souřadnicovou osou x. Jeho počáteční polohu zvolíme za počátek soustavy souřadnic. Závan větru působí na pásovce silou o velikosti 17 N ve směru kladně orientované osy y. Pomocí jednotkových vektorů dané kartézské soustavy souřadnic zapište (a) jeho rychlost a (b) jeho polohu po uplynutí 3,0 s.

43Ú. Celková hmotnost výtahu i s nákladem je 1 600 kg. Určete tažnou sílu nosného lana, jestliže se výtah, který původně klesal rychlostí 12 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, zastavil na dráze 42 m.

44Ú. Předmět je zavěšen na siloměru připevněném ke stropu kabiny výtahu. Výtah stojí a na stupnici siloměru je údaj 65 N. Jaký údaj bude ukazovat siloměr, bude-li výtah stoupat (a) konstantní rychlostí 7,6 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, (b) rychlostí klesající z počáteční hodnoty 7,6 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, je-li velikost zrychlení 2,4 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$?

45Ú. Tryskový motor o hmotnosti 1 400 kg je připevněn k trupu dopravního letadla třemi šrouby (obvyklá praxe). Předpokládejme, že každý šroub nese jednu třetinu zátěže. (a) Vypočtěte sílu působící na každý šroub, jestliže letadlo čeká na startovací dráze na pokyn k odletu. (b) Během letu se letadlo dostane do turbulence, vlivem níž získá náhle zrychlení o velikosti 2,6 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ směřující svisle vzhůru. Vypočtěte sílu působící na každý šroub za této situace.

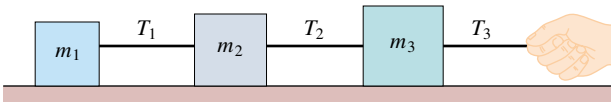
46Ú. Na obr. 5.46 je vrtulník o hmotnosti 15 000 kg, který zvedá nákladní automobil o hmotnosti 4 500 kg se zrychlením 1,4 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Vypočtěte (a) sílu, jíž působí vzduch na vrtuli, (b) tažnou sílu horního nosného lana.



Obr. 5.46 Úloha 46

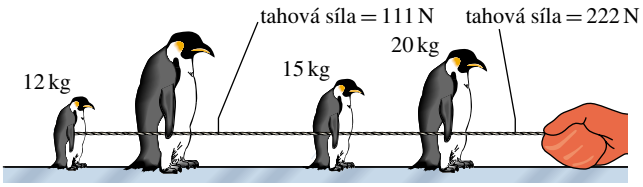
47Ú. Člověk o hmotnosti 80 kg skáče na betonový dvorek z okna umístěného ve výšce pouhých 0,5 m. Při dopadu zapomene pokrčit kolena, takže se jeho pohyb zastaví na vzdálenosti 2,0 cm. (a) Jaké je průměrné zrychlení člověka od okamžiku, kdy se dotkl chodidly dvorku, do chvíle, kdy byl již zcela v klidu? (b) Jakou silou byly při tomto skoku namáhány jeho kosti?

48Ú. Tři kostky spojené podle obr. 5.47 jsou taženy po dokonale hladké vodorovné podložce směrem vpravo. Tahová síla má velikost $T_3 = 65$ N. Hmotnosti kostek jsou $m_1 = 12{,}0$ kg, $m_2 = 24{,}0$ kg a $m_3 = 31{,}0$ kg. Vypočtěte (a) zrychlení soustavy, (b) velikosti tahových sil T_1 a T_2 vláken spojujících kostky.



Obr. 5.47 Úloha 48

49Ú. Na obr. 5.48 jsou čtyři hraví tučňáci, které jejich ošetřovatel táhne na laně po velmi kluzkém (dokonale hladkém) ledu. Hmotnosti tří tučňáků a velikosti tažných sil jednotlivých částí lana jsou dány. Určete hmotnost zbývajícího tučňáka.



Obr. 5.48 Úloha 49

50Ú. Kabina výtahu vážící 6 240 lb se rozjíždí směrem vzhůru se zrychlením o velikosti 4,00 ft·s^{-2}. (a) Vypočtěte tažnou sílu lana. (b) Jaká by byla tažná síla lana, kdyby stoupající výtah *brzdil* se zrychlením o stejné velikosti? Údaje převeďte do soustavy jednotek SI.

51Ú. Parašutista o hmotnosti 80 kg padá se zrychlením o velikosti 2,5 m·s^{-2}. Hmotnost padáku je 5,0 kg. (a) Jakou vztlakovou silou působí vzduch na otevřený padák? (b) Jakou tahovou silou působí na padák člověk?

52Ú. Člověk o hmotnosti 85 kg se spouští na zem z výšky 10,0 m tak, že se drží lana vedeného přes kladku, na jehož druhém konci je zavěšen pytel s pískem o hmotnosti 65 kg. Kladka se otáčí bez tření. (a) Jakou rychlostí dopadne člověk na zem, jestliže byl zpočátku v klidu? (b) Může člověk nějakým způsobem rychlost dopadu snížit?

53Ú. Letadlo o váze 5,2·10^4 lb (obr. 5.49) musí mít před vzlétnutím rychlost 280 ft/s. Motor vyvine sílu o velikosti nejvýše 24 000 lb, která však nepostačuje k tomu, aby letadlo dosáhlo požadované rychlosti na dráze 300 ft, odpovídající délce paluby. Jakou nejmenší silou (předpokládáme, že konstantní) musí na letadlo působit katapultovací zařízení, aby letadlo mohlo vzlétnout? Předpokládáme, že jak motor, tak katapultovací zařízení působí na letadlo při rozjezdu konstantní silou.

54Ú. Představme si kosmickou loď blížící se k povrchu Callista, jednoho z Jupiterových měsíců. Vyvine-li motor brzdnou sílu (směřující od povrchu svisle vzhůru) o velikosti 3 260 N, bude loď klesat s konstantní rychlostí. Pokud by byla velikost brzdné síly pouze 2 200 N, klesala by loď se zrychlením o velikosti 0,39 m·s^{-2}. (a) Jaká tíhová síla působí na loď v blízkosti povrchu Callista? (b) Jaká je hmotnost lodi? (c) Jaké je tíhové zrychlení v blízkosti povrchu Callista?

55Ú. Artista o hmotnosti 52 kg se spouští po laně, které může prasknout, překročí-li velikost tahové síly hodnotu 425 N. (a) Co se stane, visí-li artista na laně v klidu? (b) S jak velkým zrychlením se musí artista spouštět, aby právě zabránil přetržení lana?



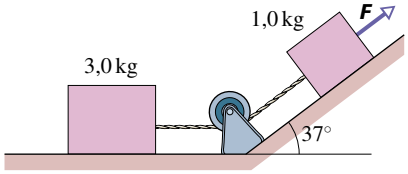
Obr. 5.49 Úloha 53

56Ú. Řetěz tvořený pěti články, z nichž každý má hmotnost 0,100 kg, je zvedán svisle vzhůru se stálým zrychlením 2,50 m·s^{-2} (obr. 5.50). Určete (a) síly vzájemného působení mezi všemi dvojicemi sousedních článků, (b) sílu $\boldsymbol{F}$, jíž působí na horní článek člověk zvedající řetěz, (c) *výslednou* sílu udělující zrychlení každému článku.



Obr. 5.50 Úloha 56

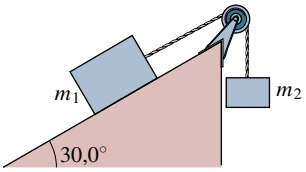
57Ú. Těleso o hmotnosti 1,0 kg leží na nakloněné rovině s úhlem sklonu 37° a je spojeno s tělesem o hmotnosti 3,0 kg podle obr. 5.51. Styčné plochy jsou dokonale hladké a kladka se otáčí bez tření. Jaká je tažná síla spojovacího vlákna, je-li $F = 12$ N?



Obr. 5.51 Úloha 57

58Ú. Kostka o hmotnosti $m_1 = 3{,}70$ kg spočívá na dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 30,0°. Vláknem vedeným přes nehmotnou kladku otáčející se bez tření je spojena

s další kostkou, jejíž hmotnost je $m_2 = 2{,}30\,\text{kg}$ (obr. 5.52). Určete (a) velikost zrychlení každé z kostek a (b) směr zrychlení kostky m_2. (c) Jakou silou je napínáno vlákno?



Obr. 5.52 Úloha 58

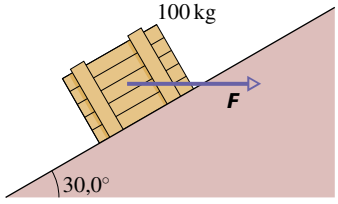
59Ú. Balík opotřebeného pokrývačského materiálu o hmotnosti 50 kg je třeba spustit na zem na laně, jehož pevnost je 390 N (při vyšší zátěži se lano přetrhne). (a) Jak lze zabránit přetržení lana během spouštění materiálu? (b) Předpokládejme, že spouštíme balík z výšky 9 m způsobem, jímž právě tak tak zabráníme přetržení lana. Jakou rychlostí dopadne balík na zem?

60Ú. Kostka je vržena vzhůru po dokonale hladké nakloněné rovině počáteční rychlostí o velikosti v_0. Úhel sklonu nakloněné roviny je θ. (a) Jakou vzdálenost urazí kostka podél nakloněné roviny, než se dostane do bodu obratu? (b) Jak dlouho to bude trvat? (c) S jakou rychlostí se kostka vrátí do místa, ze kterého byla vržena? Číselně spočtěte pro hodnoty $\theta = 32{,}0°$ a $v_0 = 3{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

61Ú. Kosmická loď startuje svisle vzhůru z povrchu Měsíce, kde je tíhové zrychlení $1{,}6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Loď startuje se zrychlením o velikosti $1{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ vzhledem k povrchu Měsíce. Jakou silou působí sedadlo lodi na astronauta, na kterého působí na Zemi tíhová síla o velikosti 735 N?

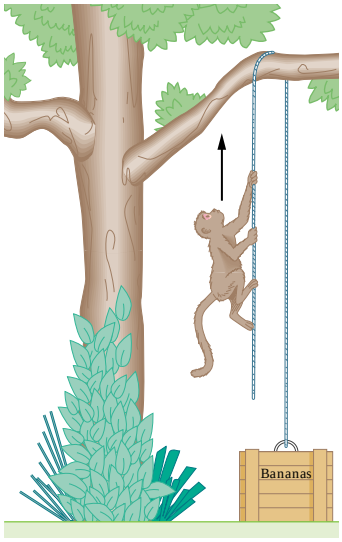
62Ú. Lampa je zavěšena na svislém provaze v kabině klesajícího výtahu, který brzdí se zrychlením o velikosti $2{,}4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. (a) Určete hmotnost lampy, víte-li, že tažná síla provazu má velikost 89 N. (b) Jak velká síla by napínala provaz, kdyby se výtah rozjížděl vzhůru se zrychlením o velikosti $2{,}4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$?

63Ú. Přepravka o hmotnosti 100 kg je tlačena stálou rychlostí vzhůru po dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 30,0° (obr. 5.53). (a) Jak velká vodorovná síla $\boldsymbol{F}$ je k tomu potřebná? (b) Jakou silou tlačí nakloněná rovina na přepravku?



Obr. 5.53 Úloha 63

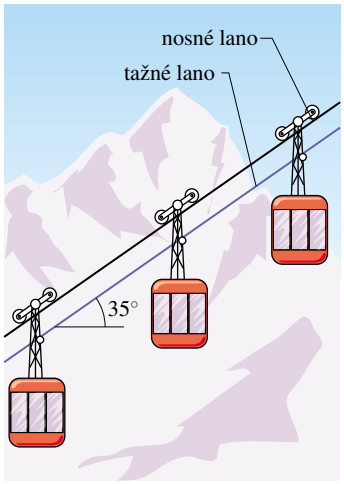
64Ú. Desetikilogramová opice leze po nehmotném provaze přehozeném přes větev stromu. Provaz je na druhém konci zatížen patnáctikilogramovým závažím ležícím na zemi (obr. 5.54). Provaz může klouzat po větvi bez tření. (a) S jakým nejmenším zrychlením musí opice lézt, má-li se zátěž odpoutat od země? Jakmile se závaží odpoutá od povrchu Země, přestane opice lézt, ale drží se provazu. (b) Jaké je nyní zrychlení opice a (c) jakou silou je napínán provaz?



Obr. 5.54 Úloha 64

65Ú. Obr. 5.55 ukazuje část alpské kabinové lanovky. Nejvyšší povolená hmotnost každé kabiny je 2 800 kg. Kabiny jezdí po nosném laně a jsou taženy dalším lanem, které je připojeno k závěsu každé z nich.

Jak se liší síly pnutí v sousedních úsecích tažného lana, mají-li kabiny maximální povolenou hmotnost a stoupají-li se zrychlením o velikosti $0{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$? Sklon lana je 35°.

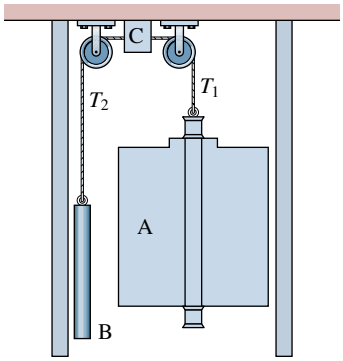


Obr. 5.55 Úloha 65

66Ú. Kosmická loď má hmotnost $1{,}20\cdot10^6$ kg a je zpočátku v klidu vzhledem k systému stálic. (a) S jakým stálým zrychlením by se musela loď pohybovat, aby za 3,0 dny dosáhla vzhledem k systému stálic rychlosti o velikosti $0{,}10c$ (kde c je rychlost světla)? (Neberte v úvahu korekce vyplývající z Einsteinovy

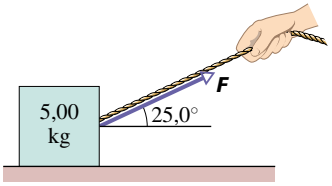
speciální teorie relativity.) (b) Vyjádřete velikost zrychlení v jednotkách g. (c) Jak velké síly je třeba k udělení tohoto zrychlení? (d) Předpokládejme, že motory se vypnou, jakmile loď dosáhne požadované rychlosti ($v = 0{,}10c$). Jak daleko dorazí loď od okamžiku startu za 5,0 světelných měsíců (vzdálenost, kterou světlo urazí za dobu 5,0 měsíců)?

67Ú. Výtah na obr. 5.56 je sestaven z kabiny (A) o hmotnosti 1 150 kg, protizávaží (B) o hmotnosti 1 400 kg, hnacího mechanismu (C), lana a dvou kladek. Hnací mechanismus lano buď urychluje, nebo zpomaluje. V důsledku toho se síla T_1 napínající lano na jedné straně hnacího mechanismu liší od síly T_2, která lano napíná na druhé straně. Předpokládejme, že kabina (A) stoupá se zrychlením o velikosti $a = 2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Se zrychlením o téže velikosti klesá protizávaží (B). Zanedbejte hmotnost kladek i lana. Určete (a) T_1, (b) T_2 a (c) velikost síly, kterou působí na lano hnací mechanismus.



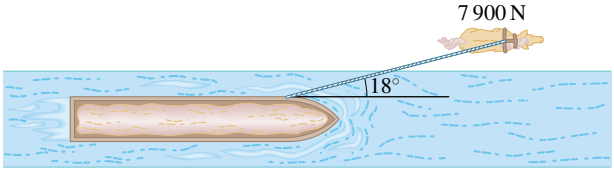
Obr. 5.56 Úloha 67

68Ú. Kostka o hmotnosti 5,00 kg je tažena po vodorovné dokonale hladké podložce provazem, na který působí síla o velikosti $F = 12{,}0\,\mathrm{N}$ pod úhlem 25,0° vzhledem k vodorovné rovině (obr. 5.57). (a) Jaké je zrychlení kostky? (b) Velikost síly F začne pomalu vzrůstat. Jaká je její velikost právě v okamžiku, kdy se kostka zcela zvedne nad podložku? (c) Jaké je v tomto okamžiku zrychlení kostky?



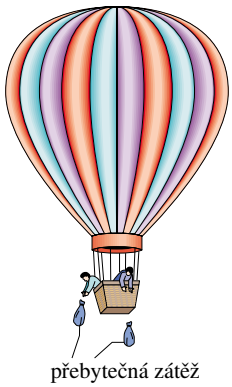
Obr. 5.57 Úloha 68

69Ú. V minulosti se přepravovaly pramice vodními kanály pomocí koní způsobem znázorněným na obr. 5.58. Předpokládejme, že kůň táhne silou 7 900 N lano, které svírá se směrem pohybu pramice úhel 18°. Pramice pluje přímo podél kanálu. Její hmotnost je 9 500 kg a zrychlení má velikost $0{,}12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Určete sílu, kterou působí na pramici voda.



Obr. 5.58 Úloha 69

70Ú. Horkovzdušný balon o hmotnosti M svisle klesá se zrychlením o velikosti a směřujícím dolů (obr. 5.59). Určete hmotnost zátěže, kterou je třeba z balonu vyhodit, aby získal zrychlení o téže velikosti a, avšak směřující vzhůru? Předpokládáme, že vztlaková síla, jíž působí na balon okolní vzduch, se odstraněním zátěže nezmění.

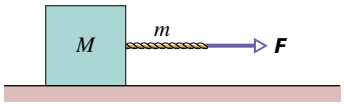


Obr. 5.59 Úloha 70

71Ú. Síla udílí tělesu o hmotnosti m_1 zrychlení o velikosti $12{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Tělesu o hmotnosti m_2 by táž síla udělila zrychlení o velikosti $3{,}30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jaké zrychlení udělí tato síla objektům o hmotnosti (a) $m_2 - m_1$ a (b) $m_2 + m_1$?

72Ú. Raketa o hmotnosti 3 000 kg startuje z povrchu Země pod elevačním úhlem 60°. Motor vyvine sílu o velikosti $6{,}0{\cdot}10^4$ N, která svírá s vodorovnou rovinou stálý úhel 60°. Zážeh motoru trvá 50 s. V hrubém přiblížení můžeme zanedbat vliv ztráty hmotnosti rakety při hoření paliva i vliv působení okolního vzduchu. Určete, (a) jaké výšky nad povrchem Země dosáhne raketa do okamžiku vypnutí motoru a (b) jak daleko od místa startu dopadne opět na povrch Země, považujeme-li jej za rovinný.*

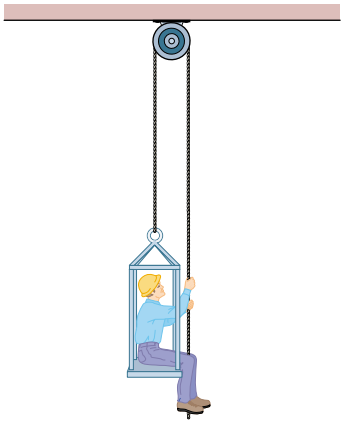
73Ú. Kostka o hmotnosti M je tažena po dokonale hladké vodorovné podložce na laně o hmotnosti m (obr. 5.60). Na konci lana působí vodorovná síla $\boldsymbol{F}$. (a) Ukažte, že lano *musí* být prohnuté, byť nepatrně. Předpokládejte, že průhyb je zanedbatelný, a určete (b) zrychlení lana a kostky, (c) sílu, kterou působí lano na kostku, a (d) sílu napínající lano uprostřed.



Obr. 5.60 Úloha 73

* Zjistěte, jak se liší hodnoty g v místě startu rakety a v nejvyšším bodě, kterého raketa dosáhne, a odhadněte, zda to může ovlivnit výsledky.

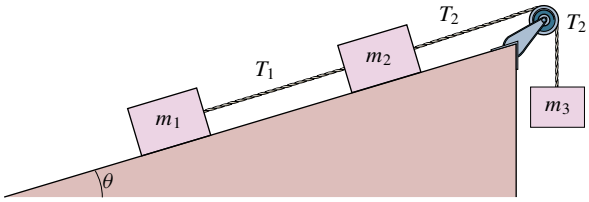
74Ú. Na obr. 5.61 je znázorněn člověk na sedačce zavěšené na nehmotném provaze. Provaz je veden přes nehmotnou kladku, která se může otáčet bez tření. Druhý konec provazu drží člověk v rukou. Celková hmotnost člověka a sedačky je 95,0 kg. (a) Jak velkou silou musí člověk táhnout provaz, aby sedačka stoupala s konstantní rychlostí? (b) Jaké tažné síly je třeba k dosažení zrychlení o velikosti $1{,}30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$? (c) Předpokládejme nyní, že druhý konec lana drží osoba stojící na zemi. Odpovězte znovu na otázky (a) a (b). (d) V každém ze čtyř výše uvedených případů určete sílu, jíž působí závěs kladky na strop.



Obr. 5.61 Úloha 74

PRO POČÍTAČ

75Ú. Na obr. 5.62 jsou znázorněny tři kostky spojené vlákny. Kostky o hmotnostech m_1 a m_2 spočívají na dokonale hladké nakloněné rovině s úhlem sklonu θ, jejich spojovací vlákno je napínáno silou o velikosti T_1. Třetí kostka o hmotnosti m_3 je s kostkou m_2 spojena vláknem vedeným přes nehmotnou kladku otáčející se bez tření, velikost síly napínající vlákno je v tomto případě T_2. Pro hodnoty $\theta = 20°$, $m_1 = 2{,}00\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 1{,}00\,\mathrm{kg}$ a $m_3 = 3{,}00\,\mathrm{kg}$ určete T_1, T_2 a zrychlení obou kostek.
(*Tip*: Užijte druhého Newtonova zákona pro každou z kostek, zapište příslušné tři rovnice a řešte je na počítači.)



Obr. 5.62 Úloha 75

76Ú. Na dvoukilogramový předmět působí tři síly, které mu udílejí zrychlení $\boldsymbol{a} = -(8{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\boldsymbol{i} + (6{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\boldsymbol{j}$. Dvě ze sil jsou známy: $\boldsymbol{F}_1 = (30{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (16{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{F}_2 = -(12{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (8{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Určete třetí sílu.

6
Síla a pohyb II



*Kočky se rády vyhřívají na sluníčku. Když ale odpočívají na římse výškové budovy, riskují nebezpečný pád. Kupodivu se však zjistilo, že kočka může docela dobře přežít, je-li výška pádu dostatečně **velká**, alespoň sedm či osm poschodí. V takovém případě rozsah jejího poranění, např. počet zlomenin nebo smrtelných zranění, s výškou pádu dokonce **klesá**! (Rekord drží kočka, která vypadla z dvaatřicátého patra a jen mírně si poranila hrudník a přišla o zub.) Je to vůbec možné?*

6.1 TŘENÍ

Třecím silám se v každodenním životě nevyhneme. Kdyby byly jedinými silami působícími na tělesa, zastavily by každý pohybující se předmět a každé otáčející se soukolí. Kolem dvaceti procent spotřeby benzinu v automobilu například připadá na kompenzaci vlivu tření v motoru a hnacím mechanismu. Na druhé straně, kdyby tření nebylo, nikam bychom se automobilem nedostali. Nemohli bychom chodit ani jezdit na kole. Nemohli bychom držet tužku a i kdyby přece, nepsala by. Hřebíky a šrouby by nebyly k ničemu, utkaná látka by se rozpadla a uzly by se rozvázaly.

V tomto článku se budeme zabývat třecími silami působícími mezi suchými pevnými povrchy těles, která se po sobě pohybují malými vzájemnými rychlostmi. Uvažujme dva jednoduché pokusy:

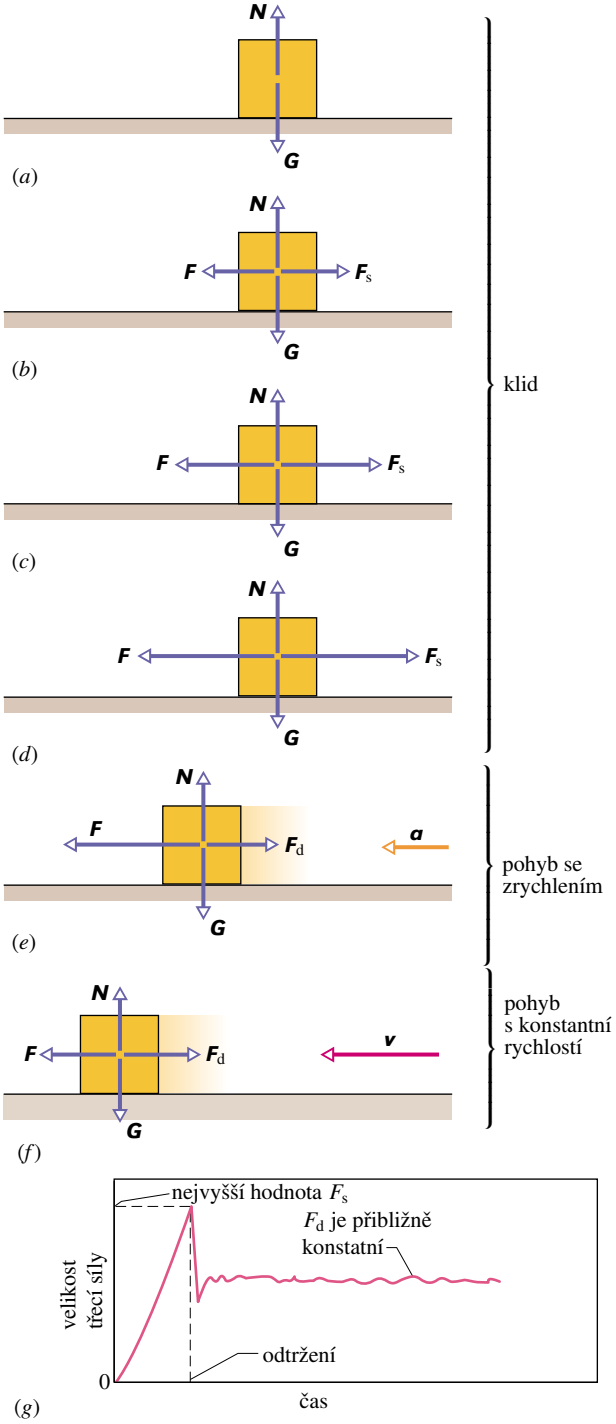
1. *První pokus.* Postrčíme knihu, aby sklouzla po desce stolu. Třecí síla, kterou působí horní deska stolu na spodek klouzající knihy, knihu zpomaluje a případně ji i zastaví. Kdybychom chtěli, aby kniha klouzala po stole konstantní rychlostí, museli bychom ji táhnout nebo tlačit silou stejné velikosti a opačného směru, než má třecí síla, která jejímu pohybu brání.

2. *Druhý pokus.* Těžká přepravka leží ve skladu na podlaze. Tlačíme ji vodorovně stálou silou, ale ona se nepohne. Je to způsobeno tím, že síla, kterou na ni působíme, je kompenzována vodorovnou třecí silou, jíž podlaha působí opačným směrem na dno přepravky. Je pozoruhodné, že tato třecí síla si sama řídí svou velikost i směr právě tak, aby zrušila účinek jakékoli síly, kterou bychom na přepravku působili. Samozřejmě, kdybychom vyvinuli sílu dostatečně velkou, dokázali bychom přepravkou přece jen pohnout (viz první pokus).

Na obr. 6.1 je rozebrána obdobná situace podrobněji. Na obr. 6.1a spočívá kostka na desce stolu. Tíhová síla $\boldsymbol{G}$ je vyrovnána opačně orientovanou normálovou silou $\boldsymbol{N}$. Na obr. 6.1b působíme na kostku silou $\boldsymbol{F}$ a snažíme se ji odtlačit směrem doleva. Jako odezva vzniká třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, která směřuje vpravo a přesně vyrovná sílu $\boldsymbol{F}$, kterou na kostku působíme. Sílu $\boldsymbol{F}_s$ nazýváme **statickou třecí silou**.

Obrázky 6.1c a d ukazují, že se vzrůstající silou $\boldsymbol{F}$ roste i síla $\boldsymbol{F}_s$ a kostka zůstává v klidu. Jakmile velikost síly $\boldsymbol{F}$ dosáhne určité hodnoty, kostka se „utrhne“, ztratí svůj těsný kontakt s deskou stolu a urychluje se směrem vlevo (obr. 6.1e). Třecí síla $\boldsymbol{F}_d$, která pak kostku brzdí, se nazývá **dynamická** (též **kinetická**) třecí síla.

Obvykle má dynamická třecí síla, působící pouze při pohybu, menší velikost, než je nejvyšší přípustná hodnota velikosti statické třecí síly, která působí jen za klidu.



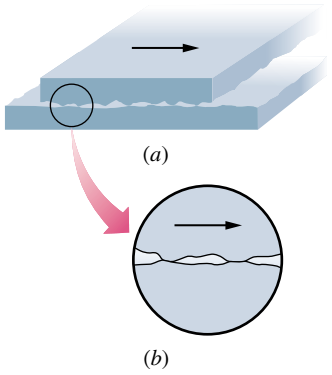
Obr. 6.1 (a) Síly působící na kostku v klidu. (b–d) Vnější síla $\boldsymbol{F}$ působící na kostku je vyvážena stejně velkou, opačně orientovanou silou statického tření $\boldsymbol{F}_s$. Při rostoucí velikosti síly $\boldsymbol{F}$ roste i velikost síly $\boldsymbol{F}_s$, až dosáhne jisté nejvyšší hodnoty. (e) Kostka se pak najednou „utrhne“ a začne se urychlovat směrem vlevo. (f) Má-li se kostka dále pohybovat rovnoměrně, je třeba velikost síly $\boldsymbol{F}$ snížit z této největší hodnoty tak, aby síla $\boldsymbol{F}$ právě kompenzovala dynamickou třecí sílu. (g) Výsledek měření třecí síly při ději (a) až (f).

Požadujeme-li, aby se kostka pohybovala po povrchu stolu rovnoměrně, musíme vystihnout okamžik, kdy se pohne, a velikost působící síly snížit (obr. 6.1f). Obr. 6.1g ukazuje výsledek pokusu, při němž síla $\boldsymbol{F}$ pozvolna rostla až do okamžiku, kdy se kostka pohnula. Všimněte si poklesu velikosti této síly, nutného k dosažení rovnoměrného pohybu kostky.

Podstatou vzniku třecích sil je vzájemné působení povrchových atomů obou dotýkajících se těles. Kdyby byla dvě tělesa s vyleštěnými a pečlivě očistěnými kovovými povrchy uvedena do styku ve velmi dobrém vakuu, nemohla by po sobě klouzat. Naopak, okamžitě by k sobě přilnula (byla by *svařena za studena*) tak těsně, že by vytvořila jediný kovový kus. Existují speciálně leštěné strojnické bloky, které k sobě i ve vzduchu mohou přilnout tak pevně, že je lze oddělit jen kroucením. Těsného kontaktu atom–atom obvykle nelze docílit tak snadno. I vysoce leštěný kovový povrch má daleko k tomu, aby byl rovinný v atomovém měřítku. Běžné povrchy jsou navíc znečistěny vrstvami oxidů a jiných nečistot, které možnost svaření za studena zhoršují.

Dva povrchy, které jsou k sobě přiloženy, se stýkají pouze nejvyššími výběžky. (Jako kdybychom švýcarské Alpy otočili jejich vrcholky proti rakouským Alpám.) Skutečná *mikro*skopická dotyková plocha je mnohem menší než zdánlivá *makro*skopická styčná plocha, dokonce až 10^4krát. Přesto se povrchy mohou k sobě svařit v mnoha stykových bodech. Snažíme-li se potom vnější silou docílit vzájemného skluzu těles podél jejich povrchů, způsobují tyto svary vznik statického tření.

Tlačíme-li těleso po nějaké podložce, dochází nejprve k narušení svarů (utržení) a poté k jejich opakovanému porušování a znovuobnovování při náhodném vzniku dalších a dalších stykových plošek (obr. 6.2). Dynamická třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ je vektorovým součtem sil působících při tomto procesu. Často je pohyb tělesa „trhaný“, neboť různé dvojice plošek k sobě vždy nakrátko přilnou a zase po sobě sklouznou.



Obr. 6.2 Mechanismus smykového tření. (a) Horní těleso klouže směrem vpravo po povrchu dolního tělesa. Zvětšeno. (b) Detail, ukazující dvě styková místa, kde vznikl svar za studena. K udržení pohybu je třeba působit silou, která svary naruší.

Nepřetržité opakování *kontaktů a smyků* může být provázeno různými zvuky, například při smyku kol na suché dlažbě, škrábání nehtem po tabuli, otevírání dveří s rezavými panty, tahání smyčce po houslové struně.

6.2 VLASTNOSTI SIL TŘENÍ

Předpokládejme, že na těleso se suchým povrchem, které spočívá na podložce stejné kvality, případně je k ní tlačeno, působíme silou $\boldsymbol{F}$ ve snaze je po podložce posunout. Experiment ukazuje, že třecí síla, jíž působí podložka proti pohybu tělesa, má tři vlastnosti:

1. Je-li těleso v klidu, má statická třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$ stejnou velikost jako průmět síly $\boldsymbol{F}$ do podložky a je vůči němu opačně orientována.

2. Velikost síly F_s dosahuje maximální hodnoty $F_{\mathrm{s,max}}$ dané vztahem

$$F_{\mathrm{s,max}} = f_\mathrm{s} N, \tag{6.1}$$

kde f_s je **koeficient statického tření** a N je velikost tlakové síly, jíž působí podložka na těleso. Převýší-li velikost průmětu síly $\boldsymbol{F}$ do podložky hodnotu $F_{\mathrm{s,max}}$, začne těleso po podložce klouzat.

3. V okamžiku, kdy se těleso dá do pohybu, klesne velikost třecí síly prakticky skokem na hodnotu F_d, určenou vztahem

$$F_\mathrm{d} = f_\mathrm{d} N, \tag{6.2}$$

kde f_d je **koeficient dynamického** (též **kinetického**) **tření**. Tuto velikost má dynamická třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ v průběhu celého pohybu.

Vlastnosti 1 a 2, které jsme formulovali pro případ jedné síly $\boldsymbol{F}$, zůstanou v nezměněné podobě i v případě, že $\boldsymbol{F}$ je výslednicí několika sil působících na těleso. Rovnice (6.1) a (6.2) *nemají* vektorový charakter. Síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$, resp. $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$ jsou totiž vždy rovnoběžné s podložkou a směřují proti pohybu, resp. zamýšlenému pohybu tělesa, zatímco síla $\boldsymbol{N}$ je k podložce kolmá.

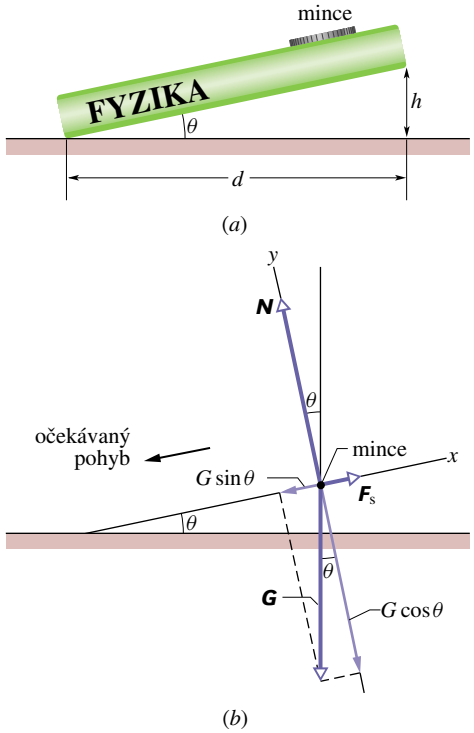
Koeficienty f_s a f_d jsou bezrozměrové a zjišťují se experimentálně. Jejich hodnoty závisejí na vlastnostech tělesa i podložky, takže hovoříme o koeficientech tření *mezi* podložkou a tělesem či *mezi* dvěma materiály (např. řekneme,

že „hodnota statického koeficientu tření f_s *mezi* sáněmi a asfaltem je 0,5“). Předpokládáme, že hodnota f_d není závislá na rychlosti pohybu tělesa po podložce.

KONTROLA 1: Kostka leží na podlaze. (a) Jaká je velikost třecí síly, kterou na kostku působí podlaha? (b) Na kostku začneme působit vodorovnou silou o velikosti 5 N, avšak kostka je stále v klidu. Jak velká je třecí síla působící na kostku? (c) Podaří se kostku uvést do pohybu vodorovnou silou o velikosti 8 N, je-li maximální hodnota statické třecí síly $F_{s,max}$ rovna 10 N? (d) Podaří se to při působení vodorovné síly o velikosti 12 N?

PŘÍKLAD 6.1

Na obr. 6.3a je nakreslena mince, ležící na knize, skloněné vzhledem k vodorovné rovině o úhel θ. Zkusmo jsme zjistili, že při zvýšení úhlu θ na hodnotu 13° začne mince klouzat. Jaký je koeficient statického tření f_s mezi mincí a knihou?



Obr. 6.3 Příklad 6.1. (a) Mince právě začíná klouzat po obalu knihy. (b) Silový diagram ukazuje tři síly působící na minci. Tíhová síla je znázorněna jako součet svých průmětů do souřadnicových os x a y, zvolených způsobem, který zjednodušuje řešení problému.

ŘEŠENÍ: Obr. 6.3b znázorňuje silový diagram mince právě v okamžiku, kdy začíná klouzat. Na minci působí tlaková síla $\boldsymbol{N}$ kolmá ke knize, tíhová síla $\boldsymbol{G}$ a třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, která směřuje podél nakloněné roviny vzhůru, neboť mince „se chystá“ sklouznout dolů. Mince je v rovnováze, takže výslednice sil na ni působících je nulová. Z druhého Newtonova zákona tak získáme vztah

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}. \tag{6.3}$$

Pro x-ové složky vede tato vektorová rovnice ke vztahu

$$\sum F_x = F_s - G\sin\theta = 0, \quad \text{tj.} \quad F_s = G\sin\theta. \tag{6.4}$$

Pro y-ové složky dostáváme

$$F_y = N - G\cos\theta, \quad \text{tj.} \quad N = G\cos\theta. \tag{6.5}$$

V okamžiku, kdy mince začíná klouzat (*a jedině v tomto okamžiku*), nabývá velikost statické třecí síly své maximální hodnoty $f_s N$. Dosazením $f_s N$ za F_s do rovnice (6.4) a vydělením rovnicí (6.5) dostáváme

$$\frac{F_s}{N} = \frac{f_s N}{N} = \frac{G\sin\theta}{G\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta,$$

tj.

$$f_s = \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} 13^\circ = 0{,}23. \quad \text{(Odpověď)} \tag{6.6}$$

Získali jsme jednoduchý návod jak změřit f_s. Úhloměr ani nepotřebujeme. Stačí změřit dvě délky h a d, vyznačené v obr. 6.2a, a určit jejich poměr $h/d = \operatorname{tg}\theta$.

PŘÍKLAD 6.2

Při nouzovém brzdění se zablokují kola automobilu (nemohou se otáčet) a automobil klouže po silnici. Utržené kousky pneumatik a krátké úseky roztaveného asfaltu vytvářejí „brzdné stopy“, svědčící o tom, že při skluzu automobilu po silnici dochází ke sváření za studena. Brzdné stopy „rekordní délky“ byly zaznamenány v roce 1960 na silnici M1 v Anglii u vozu Jaguar a měřily 290 m! Předpokládejme, že $f_s = 0{,}60$. Jak rychle jelo auto v okamžiku, kdy se kola zablokovala?

ŘEŠENÍ: V obr. 6.4a je vyznačena brzdná dráha automobilu. V diagramu sil působících na automobil během brzdění je vyznačena tíhová síla $\boldsymbol{G}$, normálová síla $\boldsymbol{N}$ a dynamická třecí síla $\boldsymbol{F}_d$. Ve vztahu (2.16)

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0),$$

položíme $v_x = 0$ a $x - x_0 = d$ a vyjádříme velikost počáteční rychlosti $v_0 = v_{0x}$:

$$v_0 = \sqrt{-2a_x d}. \tag{6.7}$$

Pro zjištění a_x použijeme x-ovou složku druhého Newtonova zákona. Při zanedbání vlivu odporu vzduchu na pohyb auta

je jedinou silou s nenulovou x-ovou složkou třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$, přičemž $F_{\mathrm{d},x} = -F_\mathrm{d}$. Dostáváme tak

$$-F_\mathrm{d} = ma_x, \quad \text{tj.} \quad a_x = -\frac{F_\mathrm{d}}{m} = \frac{-f_\mathrm{d}N}{m}, \tag{6.8}$$

kde jsme dosadili $F_\mathrm{d} = f_\mathrm{d}N$ ze vztahu (6.2) a m je hmotnost automobilu.

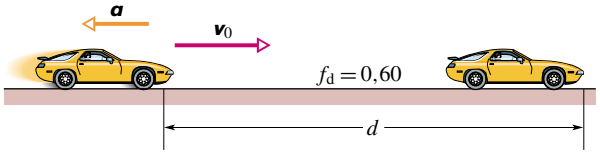
Normálová síla $\boldsymbol{N}$ má velikost $N = G = mg$. Jejím dosazením do vztahu (6.8) dostáváme

$$a_x = \frac{-f_\mathrm{d}mg}{m} = -f_\mathrm{d}g. \tag{6.9}$$

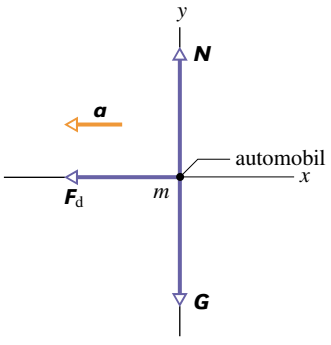
Nakonec dosadíme vztah (6.9) do (6.7):

$$v_0 = \sqrt{2f_\mathrm{d}gd} = \sqrt{2(0{,}60)(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(290\,\mathrm{m})} = \\ = 58\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 210\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při řešení jsme mlčky předpokládali, že konec brzdné stopy odpovídá hodnotě $v_x = 0$. V popisovaném skutečném případě byla brzdná stopa přerušena proto, že jaguar urazil se zablokovanými koly zmíněných 290 m a pak vyjel ze silnice. Získaný výsledek je proto třeba interpretovat tak, že hodnota v_0 činila nejméně 210 km/h, mohla však být i mnohem vyšší.



(a)



(b)

Obr. 6.4 Příklad 6.2. (a) Automobil klouže směrem doprava a zastaví se poté, co urazil vzdálenost d. (b) Silový diagram brzdícího automobilu. Vektor zrychlení směřuje vlevo, souhlasně s třecí silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$.

PŘÍKLAD 6.3

Žena táhne po zasněženém vodorovném chodníku naložené sáně o hmotnosti $m = 75\,\mathrm{kg}$. Rychlost sání je konstantní. Koeficient dynamického tření f_d mezi skluznicí a sněhem je 0,10 a úhel φ na obr. 6.5 je 42°.

(a) Jaká je velikost T tahové síly provazu?

ŘEŠENÍ: Na obr. 6.5b je diagram sil působících na sáně. Použitím druhého Newtonova zákona pro vodorovný směr dostáváme

$$T\cos\varphi - F_\mathrm{d} = ma_x = 0, \tag{6.10}$$

kde a_x má nulovou hodnotu, neboť rychlost sání je konstantní. Pro svislý směr platí

$$T\sin\varphi + N - mg = ma_y = 0, \tag{6.11}$$

kde $m\boldsymbol{g}$ je tíhová síla působící na sáně. Podle rov. (6.2) je

$$F_\mathrm{d} = f_\mathrm{d}N. \tag{6.12}$$

Poslední tři rovnice obsahují neznámé veličiny T, N a F_d. Vyloučením N a F_d získáme poslední z nich, T:

Začneme sečtením rovnic (6.10) a (6.12) a dostaneme

$$T\cos\varphi = f_\mathrm{d}N$$

a odtud

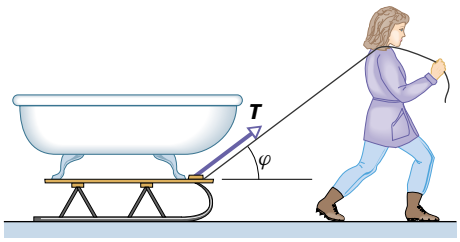
$$N = \frac{T\cos\varphi}{f_\mathrm{d}}. \tag{6.13}$$

Dosazením do (6.11) a řešením vzhledem k neznámé T pak dostáváme

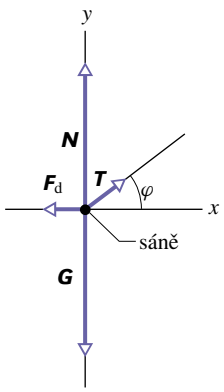
$$T = \frac{f_\mathrm{d}mg}{\cos\varphi + f_\mathrm{d}\sin\varphi} = \tag{6.14}$$

$$= \frac{(0{,}10)(75\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}{\cos 42^\circ + (0{,}10)\sin 42^\circ} = \\ = 91\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Získaná hodnota je tedy výrazně nižší než velikost tíhové síly.



(a)



(b)

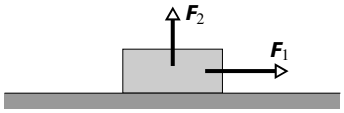
Obr. 6.5 Příklad 6.3. (a) Žena táhne sáně stálou rychlostí, přičemž na ně působí silou $\boldsymbol{T}$. (b) Silový diagram pro sáně s nákladem.

(b) Jak velká je normálová síla, jíž tlačí sněhový povrch na skluznice sání?

ŘEŠENÍ: Hodnotu N získáme dosazením $T = 91\,\mathrm{N}$ a zadaných údajů do vztahu (6.11) nebo (6.13). Pomocí (6.11) dostáváme

$$\begin{aligned} N &= mg - T\sin\varphi = \\ &= (75\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) - (91\,\mathrm{N})\sin 42^\circ = \\ &= 670\,\mathrm{N}. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 2: Na kostku (viz obr.) spočívající na podlaze působí vodorovná síla $\boldsymbol{F}_1$ o velikosti 10 N. Kostka je však v klidu. Na kostku začneme působit svislou silou $\boldsymbol{F}_2$, jejíž velikost postupně narůstá (od počáteční nulové hodnoty) až do okamžiku uvedení kostky do pohybu. Rozhodněte, zda v průběhu tohoto experimentu následující veličiny rostou, klesají, či zůstávají nezměněny: (a) velikost třecí síly, jíž působí podložka na kostku, (b) velikost normálové tlakové síly podložky na kostku, (c) maximální hodnota $F_{s,max}$ statické třecí síly, jíž může působit podložka na kostku.



PŘÍKLAD 6.4

Na obr. 6.6a se bedna nakládané zeleniny o hmotnosti $m_1 = 14\,\mathrm{kg}$ pohybuje po nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou podložkou úhel $\theta = 30^\circ$. Bedna je spojena pevným lanem o zanedbatelné hmotnosti, vedeným přes nehmotnou kladku, která se může otáčet bez tření, s jinou bednou, jejíž hmotnost je $m_2 = 14\,\mathrm{kg}$. Zavěšená bedna klesá stálou rychlostí.

(a) Určete velikost a směr třecí síly, jíž působí nakloněná rovina na bednu m_1.

ŘEŠENÍ: Ze skutečnosti, že těleso m_2 klesá, je zřejmé, že m_1 stoupá po nakloněné rovině. *Dynamická* třecí síla $\boldsymbol{F}_d$ tedy směřuje podél nakloněné roviny dolů.

Pro zjištění její velikosti ovšem nemůžeme použít vztahu (6.2), neboť neznáme koeficient dynamického tření f_d mezi tělesem m_1 a šikmou podložkou. Můžeme však užít postupu uvedeného v kapitole 5. Nejprve nakreslíme silové diagramy těles m_1 a m_2 podle obr. 6.6b a c. Symboly $\boldsymbol{G}_1$ a $\boldsymbol{G}_2$ v nich představují tíhové síly a $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ jsou tahové síly, jimiž působí lano na bedny m_1 a m_2. Velikosti tahových sil jsou stejné. Jejich společnou hodnotu označíme T.

Promítneme $\boldsymbol{G}_1$ do souřadnicových os a aplikujeme na těleso m_1 druhý Newtonův zákon. Pro jeho x-ovou složku dostáváme podle obr. 6.6b vztah

$$\sum F_x = T - F_d - m_1 g\sin\theta = m_1 a_x = 0, \qquad (6.15)$$

ve kterém jsme položili $a_x = 0$. Těleso m_1 se totiž pohybuje konstantní rychlostí. Druhý Newtonův zákon zapíšeme i pro těleso m_2 a opět využijeme skutečnosti, že se pohybuje stálou rychlostí. Všechny vektory mají tentokrát nenulové pouze y-ové složky, takže podle obr. 6.6c dostáváme

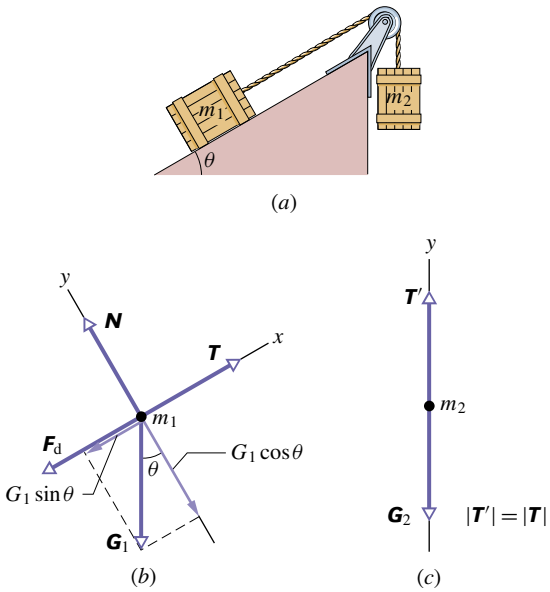
$$\sum F_y = T - m_2 g = m_2 a_y = 0,$$

tj.

$$T = m_2 g. \qquad (6.16)$$

Za T dosadíme do vztahu (6.15) výraz (6.16) a vyjádříme F_d:

$$\begin{aligned} F_d &= m_2 g - m_1 g\sin\theta = \\ &= (14\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) - (14\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})\sin 30^\circ = \\ &= 68{,}6\,\mathrm{N} \doteq 69\,\mathrm{N}. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 6.6 Příklad 6.4. (a) Těleso o hmotnosti m_1 stoupá po nakloněné rovině stálou rychlostí, těleso m_2 klesá, rovněž stálou rychlostí. (b) Silový diagram tělesa m_1. (c) Silový diagram tělesa m_2.

(b) Určete hodnotu f_d.

ŘEŠENÍ: Hodnotu f_d můžeme získat ze vztahu (6.2). Nejprve však musíme zjistit velikost normálové síly $\boldsymbol{N}$ působící na těleso m_1. Použijeme k tomu y-ovou složku vektorové rovnice vyjadřující druhý Newtonův zákon pro těleso m_1 (obr. 6.6b):

$$\sum F_y = N - m_1 g\cos\theta = m_1 a_y = 0,$$

tj.

$$N = m_1 g \cos\theta .$$

Ze vztahu (6.2) pak dostáváme

$$f_d = \frac{F_d}{N} = \frac{F_d}{m_1 g \cos\theta} = \\ = \frac{(68{,}6\,\mathrm{N})}{(14\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})\cos 30^\circ} = 0{,}58. \qquad \text{(Odpověď)}$$

6.3 ODPOROVÁ SÍLA A MEZNÍ RYCHLOST

Tekutinou rozumíme tekuté prostředí, obvykle plyn nebo kapalinu, výjimečně plazma. Při pohybu tělesa v tekutině, kdy se těleso pohybuje klidným prostředím, anebo prostředí proudí kolem klidného tělesa, působí prostředí na těleso **odporovou silou** ***F***, která pohybu brání. Tato síla směřuje proti rychlosti, jíž se těleso pohybuje vzhledem k prostředí.

V tomto článku se budeme zabývat pouze případy, kdy proudícím prostředím je vzduch, těleso je spíše zaoblené (fotbalový míč) než štíhlé (oštěp) a proudění je natolik rychlé, že již může být považováno za turbulentní (za tělesem se tvoří vzduchové víry). V takových případech souvisí odporová síla ***F*** s relativní rychlostí empirickým vztahem

$$F = \tfrac{1}{2} C \varrho S v^2, \qquad (6.17)$$

kde ϱ je hustota vzduchu (hmotnost vztažená na objemovou jednotku) a S je **účinný průřez** tělesa, definovaný jako obsah největšího řezu tělesa rovinou kolmou k relativní rychlosti ***v***. **Součinitel odporu** C se zjišťuje experimentálně, jeho typické hodnoty se pohybují v rozmezí od 0,4 do 1,0. Pro dané těleso není C konstantou v pravém slova smyslu, neboť se při výrazných změnách rychlosti ***v*** také mění. Tuto komplikaci však nebudeme brát v úvahu.

Závislost odporu prostředí na veličinách S a v^2 velmi dobře znají sjezdaři. Pro dosažení vysoké rychlosti musí sjezdař co možná nejvíce snížit velikost odporové síly, například tím, že zaujme sjezdový postoj zvaný „vajíčko“ (obr. 6.7) a minimalizuje tak účinný průřez S.

Ze vztahu (6.17) je vidět, že při pádu oblého objektu vzduchem velikost odporové síly F postupně narůstá (od počáteční nulové hodnoty při $v = 0$) s rostoucí rychlostí pádu. Obr. 6.8 ukazuje, že při dostatečně dlouhém pádu dojde k vyrovnání síly odporové ***F*** a tíhové ***G*** $= m\boldsymbol{g}$. Výsledná svislá síla působící na těleso se tak anuluje. Podle druhého Newtonova zákona musí této situaci odpovídat nulové zrychlení, takže rychlost tělesa již neporoste. Těleso pak padá stálou **mezní rychlostí** o velikosti v_m, kterou zjistíme z rovnosti $F = mg$ užitím vztahu (6.17). Platí

$$\tfrac{1}{2} C \varrho S v_m^2 = mg$$

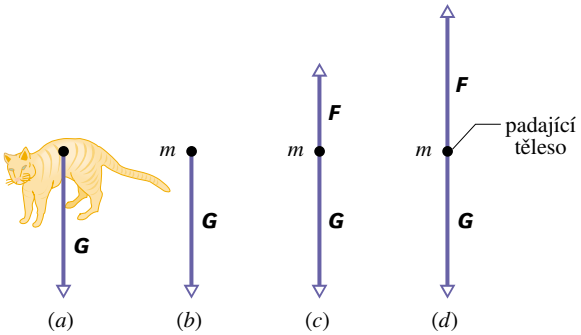
a odtud

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg}{C\varrho S}}. \qquad (6.18)$$

Tabulka 6.1 uvádí hodnoty v_m pro některé běžné předměty.



Obr. 6.7 Sjezdař je schoulen ve „vajíčku“, aby co nejvíce snížil svůj účinný průřez a tím i odporovou sílu.



Obr. 6.8 Síly působící na těleso během pádu ve vzduchu: (a) Těleso na samém počátku pádu, (b) silový diagram v tomto okamžiku, (c) silový diagram o chvíli později, kdy již působí odporová síla. (d) Velikost odporové síly roste až do okamžiku, kdy se vyrovná se silou tíhovou. Od té chvíle padá těleso konstantní (mezní) rychlostí.

V souhlasu s výpočty* založenými na vztahu (6.17) dosáhne kočka mezní rychlosti při pádu z výšky zhruba šesti poschodí. Než k tomu dojde, je $G > F$ a kočka je urychlována nenulovou výslednou silou, směřující svisle dolů.

* W. O. Whitney a C. J. Mehlhaff, High-rise syndrome in cats. *J. Am. Veterinary Medical assoc.* **191**, 1399–1403 (1987).

S odkazem na kapitolu 2 si připomeňme, že naše smysly reagují na zrychlení, nikoli na rychlost. Také padající kočka pocítí zrychlení. Lekne se, skrčí nohy pod tělo, zvedne hlavu a ohne páteř vzhůru. Tím se sníží její účinný průřez S a zvýší velikost dosažitelné mezní rychlosti v_m. Za této situace by ovšem při přistání muselo dojít k většímu poranění.

V okamžiku, kdy kočka dosáhne mezní rychlosti, její zrychlení klesne na nulu a kočka se uklidní. Napne nohy a krk vodorovně a napřímí páteř (podobá se při tom letící veverce při skoku ze stromu na strom). Tím se zvýší průřez S a s ním i síla odporu F. Kočka se začne zpomalovat, neboť nyní je $F > G$ a výsledná síla míří vzhůru, až do okamžiku, kdy dosáhne nové, nižší mezní rychlosti. Pokles v_m snižuje nebezpečí vážného poranění při dopadu. Těsně před koncem pádu, když kočka spatří blížící se povrch země, stáhne nohy zpět pod tělo a připraví se na přistání.

Tabulka 6.1 **Některé mezní rychlosti ve vzduchu**

PŘEDMĚT	MEZNÍ RYCHLOST ($m \cdot s^{-1}$)	95% VZDÁLENOST[a] (m)
Osmikilogramový náboj	145	2 500
Vzdušný akrobat[b] (typický případ)	60	430
Baseballový míč	42	210
Tenisový míček	31	115
Basketbalový míč	20	47
Pingpongový míček	9	10
Dešťová kapka (poloměr 1,5 mm)	7	6
Výsadkář[c] (typický případ)	5	3

[a] Vzdálenost, kterou musí těleso urazit, aby dosáhlo rychlosti o velikosti 95 % mezní hodnoty v_m.
[b] Parašutista předvádí akrobatické figury bez otevření padáku.
[c] Parašutista otevře padák bezprostředně po výskoku z letadla.
Zdroj: Upraveno podle Petera J. Brancazia, *Sport Science*, Simon & Schuster, New York, 1984.

PŘÍKLAD 6.5

Padající kočka dosáhla poprvé mezní rychlosti o velikosti 100 km/h poté, co se prohnula do svislé polohy. Pak se opět roztáhla a její účinný průřez se zvýšil na dvojnásobek. Jak rychle padala kočka v okamžiku, kdy dosáhla mezní rychlosti podruhé?

ŘEŠENÍ: Označme v_{m1}, resp. v_{m2} velikost prvé, resp. druhé mezní rychlosti a S_1 a S_2 odpovídající účinné průřezy. Užitím vzorce (6.18) vypočteme poměr mezních rychlostí:

$$\frac{v_{m2}}{v_{m1}} = \frac{\sqrt{2mg/C\varrho S_2}}{\sqrt{2mg/C\varrho S_1}} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \sqrt{\frac{S_1}{2S_1}} = \sqrt{0{,}5} \doteq 0{,}7,$$

tj. $v_{m2} \doteq 0{,}7 v_{m1}$, což činí přibližně 70 km/h.

Následující událost se odehrála v dubnu 1987. Při skupinovém seskoku z letadla si parašutista Gregory Robertson všiml, že jeho kolegyně Debbie Williamsová ztratila vědomí při srážce s dalším vzdušným akrobatem v okamžiku, kdy ještě neměla otevřený padák. Robertson byl v tu chvíli v dost velké výšce nad ní. Prozatím však také padák neotevřel, aby si vychutnal radost ze čtyřkilometrového pádu. Reagoval pohotově: otočil se hlavou dolů, aby tak minimalizoval svůj účinný průřez a zvýšil rychlost pádu. Dosáhl mezní rychlosti něco přes 120 km/h, dostihl Williamsovou a zaujal vodorovnou polohu „rozepjatého orla“ (obr. 6.9). Tím opět zvýšil velikost odporové síly natolik, že mohl dívku zachytit a otevřít její padák. Svůj vlastní pak otevřel pouhých 10 s před dopadem. Williamsová měla sice vlivem neřízeného přistání rozsáhlá vnitřní poranění, pád však naštěstí přežila.



Obr. 6.9 Parašutisté ve vodorovné poloze „rozepjatého orla“ dosahují maximálního odporu vzduchu.

PŘÍKLAD 6.6

Dešťová kapka o poloměru $R = 1{,}5\,\text{mm}$ padá z mraku, který je ve výšce $h = 1\,200\,\text{m}$ nad zemským povrchem. Odporový koeficient kapky je 0,60. Předpokládejme, že kapka má po celou dobu pádu kulový tvar. Hustota vody je $\varrho_v = 1\,000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a hustota vzduchu $\varrho_{vz} = 1{,}2\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

(a) Jaká je mezní rychlost kapky?

ŘEŠENÍ: Objem koule je $\frac{4}{3}\pi R^3$, její efektivní průřez je roven obsahu kruhu o poloměru R. Je tedy

$$m = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \varrho_v \quad \text{a} \quad S = \pi R^2.$$

Ze vztahu (6.18) pak dostáváme

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg}{C\varrho_{vz}S}} = \sqrt{\frac{8\pi R^3 \varrho_v g}{3C\varrho_{vz}\pi R^2}} = \sqrt{\frac{8R\varrho_v g}{3C\varrho_{vz}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8(1{,}5\cdot10^{-3}\,\text{m})(1\,000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})}{3(0{,}60)(1{,}2\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})}} =$$

$$= 7{,}4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Uvědomte si, že ve výpočtu nevystupuje výška mraku nad povrchem Země. Kapka (viz tab. 6.1) dosáhne mezní rychlosti po několika metrech.

(b) Jaká by byla rychlost kapky těsně před dopadem na povrch Země, kdyby nepůsobila odporová síla?

ŘEŠENÍ: Do vztahu (2.23) dosadíme $(y - y_0) = -h$ a $v_0 = 0$. Dostaneme

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(1\,200\,\mathrm{m})} = 150\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Za takových podmínek by asi Shakespeare sotva mohl napsat „… a laskavý déšť z nebes skrápěl zemi… “

KONTROLA 3: Rozhodněte, zda rychlost velkých dešťových kapek je v blízkosti povrchu Země větší, menší, či stejná jako rychlost kapek malých. Předpokládejte, že velké i malé kapky mají kulový tvar.

6.4 ROVNOMĚRNÝ POHYB PO KRUŽNICI

Připomeňme si, že o rovnoměrném pohybu po kružnici hovoříme tehdy, pohybuje-li se částice po kružnici nebo jejím oblouku rychlostí o stálé velikosti v. Uvědomme si také, že částice se pohybuje s dostředivým zrychlením (směřujícím stále do středu kružnice), jehož velikost je stálá a je dána vztahem (4.22):

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{(dostředivé zrychlení)}, \qquad (6.19)$$

kde r je poloměr kružnice.

Dostředivé zrychlení udílí částici **dostředivá síla**, která samozřejmě rovněž směřuje stále do středu kružnice. Její velikost je konstantní a pomocí druhého Newtonova zákona ji lze vyjádřit ve tvaru

$$F = ma = \frac{mv^2}{r} \quad \text{(dostředivá síla)}. \qquad (6.20)$$

Jestliže má tedy výslednice sil působících na částici charakter dostředivé síly, pohybuje se částice rovnoměrně po kružnici. Naopak, vidíme-li částici pohybující se rovnoměrně po kružnici, můžeme si být jisti, že výslednice sil na ni působících je dostředivá síla. Bez dostředivé síly není rovnoměrný pohyb po kružnici možný. Dostředivé zrychlení i dostředivá síla jsou vektorovými veličinami, jejichž velikost je konstantní a směr se neustále mění tak, aby směřovaly do středu kružnice.

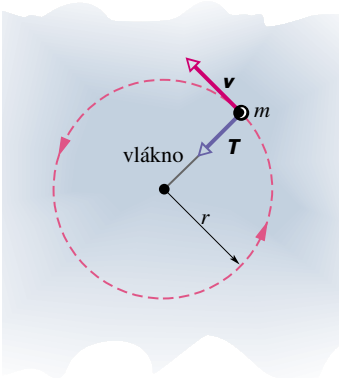
Představme si, že tělesem obíhajícím rovnoměrně po kružnici je třeba hokejový kotouč uvázaný na šňůře a kroužící kolem jejího pevného konce podle obr. 6.10. Úlohu dostředivé síly hraje v tomto případě tahová síla šňůry. Při pohybu Měsíce kolem Země, který je rovnoměrnému pohybu po kružnici blízký, je dostředivou silou přitažlivá gravitační síla, jíž na Měsíc působí Země. Dostředivá síla tedy není novým druhem síly. Může to být síla pnutí, gravitační síla nebo síla jakékoliv jiné povahy.

Srovnejme nyní dva obdobné případy rovnoměrného pohybu po kružnici:

1. *Projíždění zatáčky v autě.* Představme si dort v krabici uprostřed zadního sedadla automobilu, který jede velkou rychlostí po ploché silnici. Řidič náhle zatočí vlevo po kruhovém oblouku, krabice sklouzne po sedadle vpravo a je přitisknuta k vnitřní stěně vozu. Co se vlastně stalo?

Pohyb automobilu po oblouku považujeme za rovnoměrný pohyb po kružnici. Dostředivou silou, která jej způsobuje, je třecí síla, jíž působí povrch silnice na pneumatiky vozu. Tato síla směřuje radiálně dovnitř kružnice a má velikost danou vztahem (6.20). Je přitom rozložena na všechna čtyři kola.

Krabice s dortem by rovněž konala rovnoměrný pohyb po kružnici a setrvala při něm uprostřed sedadla, kdyby třecí síla, jíž na ni působí sedadlo, byla dostatečně velká. V popisovaném případě tomu tak zřejmě není, a proto krabice sklouzne po sedadle.



Obr. 6.10 Hokejový kotouč o hmotnosti m se pohybuje po kružnici po vodorovné dokonale hladké podložce. Jeho rychlost má stálou velikost v. Dostředivou silou je tahová síla $\boldsymbol{T}$, jíž na kotouč působí šňůra.

Z hlediska vztažné soustavy spojené s povrchem Země krabice s dortem ve skutečnosti pokračuje v přímočarém pohybu, zatímco sedadlo pod ní klouže, dokud krabice nenarazí na stěnu vozu. Tlaková síla stěny na krabici pak

realizuje dostředivou sílu a krabice se začne pohybovat rovnoměrně po kružnici spolu s automobilem.

2. *Obíhání kolem Země.* Nyní jsme v roli cestujícího vesmírné lodi *Atlantis*, která je na oběžné dráze kolem Země a zabýváme se studiem „stavu beztíže". Co se děje v tomto případě?

Dostředivou silou, která udržuje kosmickou loď i kosmonauta v rovnoměrném pohybu po kružnici, je přitažlivá gravitační síla, jíž Země působí jak na loď, tak na kosmonauta. Tato síla směřuje do středu kruhové trajektorie (střed Země) a její velikost vyhovuje vztahu (6.20).

Jak v automobilu, tak v kosmické lodi se pozorovaný předmět pohybuje rovnoměrným pohybem po kružnici vlivem dostředivé síly. Obě situace jsou však velmi odlišné. V autě je dort vržen ke stěně, která pak na něj působí tlakovou silou. V obíhající kosmické lodi naopak pasažér volně pluje a žádnou působící sílu nepociťuje. Proč je rozdíl tak veliký?

Je způsoben rozdílnou povahou dostředivé síly v jednotlivých případech. V autě je dostředivou silou tzv. *plošná síla*, zprostředkovaná přímým kontaktem stěny vozu s částí povrchu krabice. V kosmické lodi má dostředivá síla charakter *síly objemové*. Je to přitažlivá gravitační síla, složená z elementárních sil, jimiž působí Země na jednotlivé částice lodi a kosmonautova těla úměrně jejich hmotnostem. (Podrobněji o tom v čl. 14.2.) Žádná část těla se tedy plošně nestlačuje, a kosmonaut proto silové působení nepociťuje.

PŘÍKLAD 6.7

Igor je inženýr-kosmonaut v kosmické lodi *Vostok II*, která létá na oběžné dráze kolem Země ve výšce $h = 520\,\mathrm{km}$. Její rychlost má velikost $7{,}6\,\mathrm{km/s}$, Igor má hmotnost $m = 79\,\mathrm{kg}$.

(a) S jakým zrychlením se Igor pohybuje?

ŘEŠENÍ: Igor koná rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru $R_Z + h$, kde R_Z je poloměr Země. Jeho dostředivé zrychlení je dáno vztahem (6.19):

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_Z + h} = \frac{(7{,}6{\cdot}10^3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{(6{,}37{\cdot}10^6\,\mathrm{m}) + (0{,}52{\cdot}10^6\,\mathrm{m})} =$$
$$= 8{,}38\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq 8{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato hodnota představuje velikost tíhového zrychlení v nadmořské výšce, v níž se Igor nachází. Předmět, který by byl do této nadmořské výšky vynesen a pak jen volně puštěn, by padal k Zemi se zrychlením, jehož počáteční velikost by měla právě tu hodnotu, kterou jsme před chvílí vypočetli. Pohyby kosmické lodi a pohyb padajícího předmětu se liší tím, že kámen má počáteční rychlost nulovou, takže „jen padá", zatímco loď na oběžné dráze má počáteční rychlost kolmou na směr přitažlivé síly, takže koná kromě pádu ještě „boční pohyb". Výsledkem je pak pohyb po zakřivené trajektorii kolem Země.

(b) Jak velkou gravitační (dostředivou) silou působí Země na kosmonauta?

ŘEŠENÍ: Dostředivá síla má velikost

$$F = ma = (79\,\mathrm{kg})(8{,}38\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = 660\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kdyby se kosmonaut Igor postavil na váhu umístěnou na věži o výšce $h = 520\,\mathrm{km}$, ukazovala by váha údaj 660 N. V obíhající kosmické lodi by váha ukazovala nulu, pokud by na ní Igor vůbec mohl „stát". Váha totiž „padá" společně s kosmonautem a jeho nohy na ni ve skutečnosti netlačí.

RADY A NÁMĚTY

Bod 6.1: *Podívejme se na to*

V příkladu 6.7 jsme potřebovali znát poloměr Země, který nebyl v zadání uveden. Abychom si i v takové situaci věděli rady, měli bychom být obeznámeni se zdroji informací podobného druhu, počínaje touto knihou. Řada užitečných údajů je uvedena na vnitřní obálce knihy, v dodatcích a tabulkách. Neocenitelným zdrojem je každoročně aktualizovaná příručka *Handbook of Chemistry and Physics* (vydavatel CRC Press). Z cvičných důvodů zkuste zjistit například hustotu železa, rozvoj funkce e^x v mocninnou řadu, počet centimetrů v míli, střední vzdálenost Saturnu od Slunce, hmotnost protonu, rychlost světla, atomové čísla samaria. Vše je možné najít v citované příručce. (Český středoškolák najde všechny tyto údaje např. v běžných Matematických, fyzikálních a chemických tabulkách.)

KONTROLA 4: Vezete se na ruském kole, které se rovnoměrně otáčí. Určete směr svého zrychlení $\boldsymbol{a}$ a směr tlakové síly, kterou na vás působí sedačka, při průchodu (a) nejvyšším, resp. (b) nejnižším bodem trajektorie.

PŘÍKLAD 6.8

Během cirkusového představení v roce 1901 předvedl Allo „Dare Devil" Diavolo vrcholné číslo, jízdu na kole ve spirále smrti (obr. 6.11a). Předpokládejme, že smyčka je kruhová a má poloměr $R = 2{,}7\,\mathrm{m}$. Jakou nejmenší rychlostí $\boldsymbol{v}$ mohl Diavolo projíždět nejvyšším bodem smyčky, aby s ní neztratil kontakt?

ŘEŠENÍ: Obr. 6.11b znázorňuje silový diagram artisty na kole v nejvyšším bodě smyčky (spojená tělesa aproximujeme hmotným bodem). V diagramu je vyznačena tíhová síla $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$ a normálová síla $\boldsymbol{N}$, jíž působí smyčka na kolo s akrobatem. Zrychlení $\boldsymbol{a}$ směřuje dolů ke středu smyčky

a podle vztahu (6.19) má velikost $a = v^2/R$. Užitím druhého Newtonova zákona dostáváme

$$\sum F_y = -N - mg = ma_y = -ma = -m\frac{v^2}{R}.$$

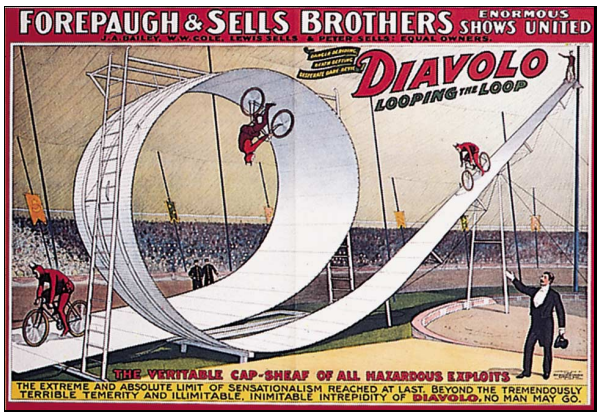
V okamžiku ztráty kontaktu kola se smyčkou je $N = 0$ a platí

$$mg = m\frac{v^2}{R},$$

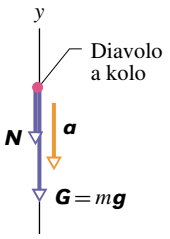
tj.

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}7\ \mathrm{m})} = \\ = 5{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Aby Diavolo neztratil kontakt se smyčkou, musel projet jejím nejvyšším bodem rychleji než $5{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Pak byla velikost tlakových sil mezi koly a smyčkou nenulová.



(a)



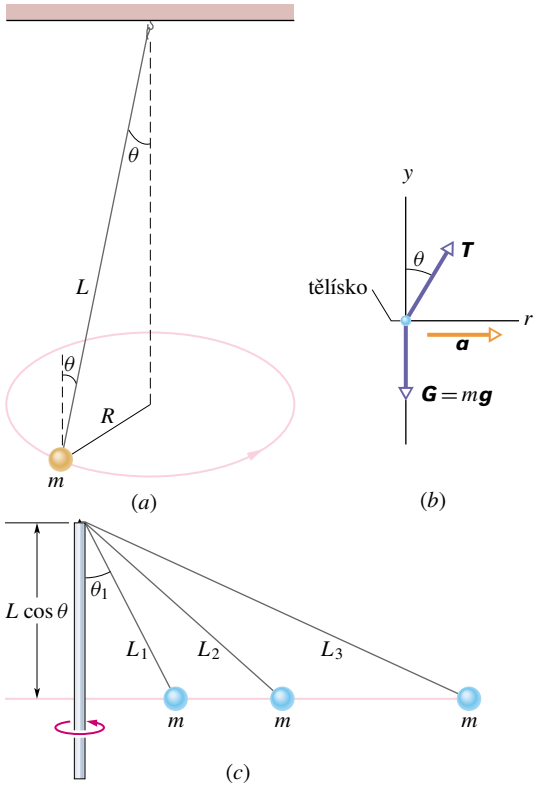
(b)

Obr. 6.11 Příklad 6.8. (a) Dobová reklama na Diavolovo vystoupení a (b) silový diagram v okamžiku průjezdu akrobata nejvyšším bodem smyčky.

PŘÍKLAD 6.9

Na obr. 6.12a je *konické kyvadlo*, jehož kulička má hmotnost $m = 1{,}5$ kg a je zavěšena na vlákně délky $L = 1{,}7$ m. Kulička obíhá ve vodorovné rovině po kružnici a vlákno svírá se svislým směrem úhel $\theta = 37°$. Při tomto pohybu opisuje vlákno kuželovou plochu. Určete periodu pohybu τ (dobu oběhu).

ŘEŠENÍ: Silový diagram na obr. 6.12b znázorňuje síly působící na kuličku kyvadla: tahovou sílu vlákna $\boldsymbol{T}$ a tíhovou sílu $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$. Podle obrázku umístíme počátek soustavy souřadnic do středu kuličky. Místo pevné osy x však použijeme „pohyblivou“ radiální osu r, která neustále míří do středu trajektorie kuličky.



Obr. 6.12 Příklad 6.9. (a) Konické kyvadlo, jehož závěsné vlákno svírá se svislým směrem úhel θ. (b) Silový diagram kuličky kyvadla. Souřadnicové osy y a r mají svislý a radiální směr. Výsledná síla, a tedy i zrychlení, směřují do středu kružnice. (c) Tři kyvadla různých délek jsou roztáčena na společné hřídeli. Jejich kuličky obíhají v téže vodorovné rovině, v souhlasu se vztahem (6.24).

Složky síly $\boldsymbol{T}$ ve směrech y a r jsou $T\cos\theta$ a $T\sin\theta$. Vzhledem k tomu, že $a_y = 0$, dostáváme ze druhého Newtonova zákona

$$T\cos\theta - mg = ma_y = 0, \quad \text{tj.} \quad T\cos\theta = mg. \qquad (6.21)$$

Výsledná síla ovšem musí mít charakter síly dostředivé, takže musí mít stálou velikost a radiální směr. Radiální složka výslednice sil je $T\sin\theta$. Podle (6.20) tedy platí

$$T\sin\theta = ma_r = \frac{mv^2}{R}, \qquad (6.22)$$

kde R je poloměr kruhové trajektorie kuličky. Vydělíme vztahy (6.22) a (6.21) a vyjádříme v:

$$v = \sqrt{\frac{gR\sin\theta}{\cos\theta}}.$$

Za velikost rychlosti v dosadíme $2\pi R/\tau$ (obvod kružnice vydělený periodou). Pro periodu τ pak dostaneme

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{R\cos\theta}{g\sin\theta}}. \qquad (6.23)$$

Z obr. 6.12 vidíme, že $R = L\sin\theta$. Dosazením do vztahu (6.13) vychází

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}} = \qquad (6.24)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{(1{,}7\,\mathrm{m})\cos 37^\circ}{(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}} = 2{,}3\,\mathrm{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Ze vztahu (6.24) je vidět, že perioda τ nezávisí na hmotnosti kuličky, ale pouze na vzdálenosti roviny jejího pohybu od bodu závěsu $L\cos\theta$. Pohybuje-li se tedy několik konických kyvadel se společným bodem závěsu, ale s různými délkami *se stejnou periodou*, obíhají jejich kuličky v téže vodorovné rovině (obr. 6.12c).

PŘÍKLAD 6.10

Na obr. 6.13 je nakreslen automobil o hmotnosti $m = 1\,600\,\mathrm{kg}$, který jede rychlostí o velikosti $v = 20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ po ploché kruhové silnici o poloměru $R = 190\,\mathrm{m}$. Jakou nejmenší hodnotu může mít koeficient statického tření f_s mezi pneumatikami a povrchem silnice, nemá-li dojít ke smyku?

ŘEŠENÍ: Dostředivou silou, díky níž se automobil pohybuje rovnoměrně po kružnici, je radiální třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, jíž působí povrch silnice na pneumatiky automobilu. (I když se auto pohybuje, nepodkluzuje v radiálním směru. Uplatní se proto statická třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, nikoli dynamická $\boldsymbol{F}_d$.)

V silovém diagramu na obr. 6.13b jsou zakresleny síly působící na automobil: $\boldsymbol{F}_s$, $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$. Automobil není urychlován ve svislém směru, tj. $a_y = 0$. Druhý Newtonův zákon pro tento směr dává známý výsledek $N = G = mg$.

Výslednice sil musí mít nenulový průmět do radiálního směru $\sum \boldsymbol{F}_r$, který určuje dostředivé zrychlení $\boldsymbol{a}_r$ automobilu. (V opačném případě by automobil vyjel ze silnice po přímce.) Podle vztahu (6.20) je $\sum F_r = mv^2/R$. Vzhledem k tomu, že jedinou silou s nenulovým radiálním průmětem je statická třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, platí

$$F_s = \frac{mv^2}{R}. \qquad (6.25)$$

Připomeňme, že automobil se dostane do smyku, dosáhne-li velikost statické třecí síly F_s největší možné hodnoty f_sN. V naší úloze řešíme právě tuto kritickou situaci, a tak ve vztahu (6.25) položíme $F_s = f_sN$. Dále dosadíme $N = mg$ a dostáváme

$$f_s mg = \frac{mv^2}{R},$$

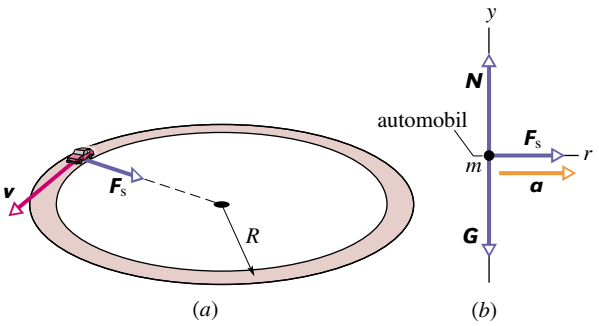
tj.

$$f_s = \frac{v^2}{gR} = \frac{(20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2}{(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(190\,\mathrm{m})} = \qquad (6.26)$$

$$= 0{,}21. \quad \text{(Odpověď)}$$

Je-li $f_s \geqq 0{,}21$, udrží síla $\boldsymbol{F}_s$ automobil na kruhové dráze. Je-li však $f_s < 0{,}21$, automobil bude klouzat a kruhovou dráhu opustí.

Všimněme si dalších vlastností vztahu (6.26). Za prvé, hodnota f_s závisí na kvadrátu rychlosti v^2. To znamená, že každé zvýšení rychlosti vyžaduje mnohem větší třecí sílu. Možná jste si tuto skutečnost již někdy uvědomili, když při projíždění prudké ploché zatáčky kola automobilu náhle podklouzla. Za druhé, ve vztahu (6.26) nevystupuje hmotnost. Tento vztah tedy platí pro vozidlo jakékoli hmotnosti, od dětského autíčka nebo bicyklu až po těžký tahač.



Obr. 6.13 Příklad 6.10. (a) Automobil se pohybuje rovnoměrně po ploché kruhové silnici. Třecí síla $\boldsymbol{F}_s$ realizuje potřebnou dostředivou sílu. (b) Silový diagram (není v měřítku) ve svislé rovině.

KONTROLA 5: Předpokládejme, že automobil na obrázku 6.13 se pohybuje po kružnici o poloměru R_1 a je právě v kritické situaci před smykem. (a) Jaký je nejmenší možný poloměr dráhy při dvojnásobně velké rychlosti, nemá-li dojít ke smyku? (b) Jak se změní nejmenší možný poloměr zatáčky, zdvojnásobíme-li i hmotnost automobilu (například při přepravě nákladu)?

PŘÍKLAD 6.11

Při projíždění zatáčky nemůže řidič automobilu na tření vždy spoléhat, především je-li silnice zledovatělá nebo mokrá. Proto bývají zatáčky klopené. Podobně jako v př. 6.10 předpokládejme, že automobil o hmotnosti m projíždí zatáčkou o poloměru $R = 190\,\mathrm{m}$, nyní však klopenou, rychlostí o stálé velikosti $v = 20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (obr. 6.14a). Při jakém úhlu θ klopení není třeba se třením počítat?

ŘEŠENÍ: Dostředivé zrychlení a odpovídající dostředivá síla $\sum \boldsymbol{F}_r$ jsou stejné jako v předchozím příkladu. Vlivem klopení zatáčky se však směr tlakové síly $\boldsymbol{N}$ odkloní ke středu křivosti zatáčky. Síla $\boldsymbol{N}$ má nyní nenulový radiální průmět $\boldsymbol{N}_r$, který představuje potřebnou dostředivou sílu.

Svislá složka zrychlení je nulová, takže platí

$$N_y = N\cos\theta = G = mg. \tag{6.27}$$

Nespoléháme-li na účinek třecí síly (počítáme tedy s mezní situací $F_s = 0$), představuje složka N_r jediný nenulový příspěvek k radiální složce výslednice. Podle vztahu (6.20) je pak

$$N_r = N\sin\theta = \frac{mv^2}{R}. \tag{6.28}$$

Vydělením vztahů (6.28) a (6.27) dostáváme

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{gR}$$

a nakonec

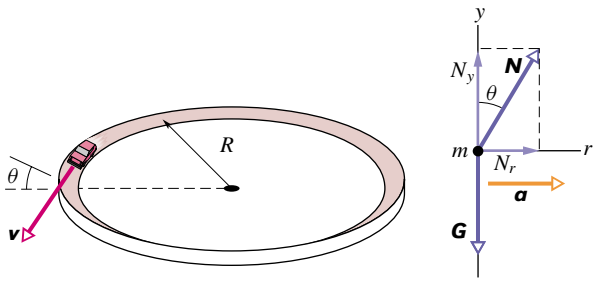
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{gR} = \tag{6.29}$$

$$= \frac{(20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2}{(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(190\ \mathrm{m})} = 0{,}215,$$

tj.

$$\theta = 12^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vztahy (6.26) a (6.29) ukazují, že kritická hodnota koeficientu tření pro neklopenou silnici je stejná jako tangenta úhlu náklonu klopené zatáčky. Silnice musí na automobil v každém případě působit silou, která hraje roli dostředivé síly, ať již má povahu síly třecí či tlakové.

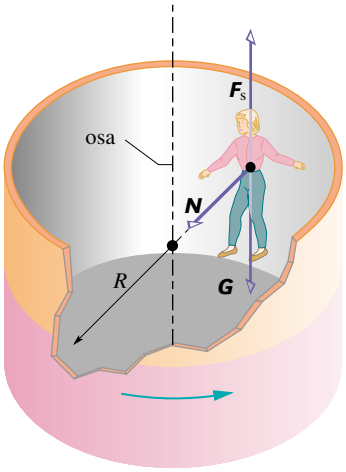


(a) (b)

Obr. 6.14 Příklad 6.11. (a) Automobil rovnoměrně projíždí klopenou zatáčku. Pro přehlednost je úhel klopení v obrázku zakreslen větší, než vychází ve skutečnosti. (b) Diagram sil působících na automobil za předpokladu, že tření mezi silnicí a pneumatikami je nulové. Radiální průmět normálové síly vytváří potřebnou dostředivou sílu. Výsledné zrychlení směřuje do středu kruhové zatáčky.

PŘÍKLAD 6.12

I někteří otrlí vyznavači jízdy na horské dráze blednou při myšlence na jízdu na Rotoru. Je to dutý válec, který se rychle otáčí kolem své osy (obr. 6.15). Člověk vstoupí před jízdou do válce bočními dvířky, postaví se na podlahu a opře se o stěnu pokrytou plachtou. Dvířka se zavřou a válec se začne otáčet. Jezdec, stěna i podlaha se pohybují společně. V okamžiku, kdy rychlost jezdce dosáhne určité předepsané velikosti, podlaha náhle odpadne. Člověk však nepadá spolu s podlahou. Naopak! Je tisknut ke stěně rotujícího válce kýmsi neviditelným a nepřátelským. Po chvíli se podlaha vrací k jeho nohám, válec se zpomalí, jezdec klesne o několik centimetrů a opět se dotkne nohama podlahy. (Někdo považuje takovou jízdu za docela zábavnou.)



Obr. 6.15 Příklad 6.12. Rotor v zábavním parku a síly působící na jezdce. Dostředivou silou je normálová síla, jíž tlačí stěna tělo člověka dovnitř válce. I když tato síla směřuje neustále k ose rotace, má jezdec překvapivý pocit, že jej ke stěně tlačí radiální síla, směřující ven. Jeho pocity jsou způsobeny tím, že je v klidu vůči *neinerciální* vztažné soustavě, takže se spolu s ní pohybuje se zrychlením. Síly, které ho k tomu nutí (pevnost otáčející se stěny, strhávající jezdce s sebou), jsou zdrojem pocitů a vzrušení při jízdě na Rotoru.

Předpokládejme, že koeficient statického tření f_s mezi jezdcovým oblečením a plátnem je 0,40 a že poloměr válce je $R = 2{,}1$ m.

(a) Jakou nejmenší obvodovou rychlost v musí mít válec i člověk, aby člověk při odpojení podlahy nespadl?

ŘEŠENÍ: Člověk nespadne, je-li tíhová síla $\boldsymbol{G}$ v rovnováze se statickou třecí silou $\boldsymbol{F}_s$, kterou na něj působí směrem vzhůru stěna válce. Při nejmenší přípustné rychlosti, při níž ještě nedochází ke skluzu člověka podél stěny, nabývá velikost síly F_s maximální možné hodnoty $f_s N$. Kritická podmínka má tedy tvar

$$f_s N = mg, \tag{6.30}$$

kde m je hmotnost člověka.

Tabulka 6.2 **Hledání supersíly — dosažené výsledky**

DATUM	VĚDEC	OBJEV
1687	Newton	Ukázal, že platí stejné zákony pro astronomická tělesa jako pro objekty na Zemi. Sjednotil nebeskou a pozemskou mechaniku.
1820	Oersted	Brilantními experimenty ukázali, že elektřina a magnetismus, do té doby považované za dvě oddělené disciplíny, jsou těsně spjaty.
1830	Faraday	
1873	Maxwell	Sjednotil elektřinu, magnetismus a optiku v jedinou disciplínu, elektrodynamiku.
1979	Glashow, Salam, Weinberg	Získali Nobelovu cenu za důkaz, že slabá a elektromagnetická interakce mohou být interpretovány jako dva různé aspekty jediné *elektroslabé interakce*. Došlo tak k redukci počtu fundamentálních interakcí na tři.
1984	Rubbia, van der Meer	Získali Nobelovu cenu za experimentální ověření teorie elektroslabé interakce.

Současné teorie:
Teorie velkého sjednocení (GUT): snaha o sjednocení elektroslabé a silné interakce.
Teorie supersymetrie: snaha o sjednocení všech interakcí, včetně gravitační, do jediného rámce.
Teorie superstrun: interpretace bodových částic, jako jsou např. elektrony, jako nepředstavitelně jemných uzavřených smyček. Překvapivě se ukázalo, že ke čtyřem dimenzím časoprostoru je třeba přidat dimenze další.

Normálová síla $\boldsymbol{N}$ je jako obvykle kolmá k povrchu, k němuž je těleso (v tomto případě člověk) tlačeno. Všimněte si, že tato síla je nyní vodorovná a směřuje k ose rotace. Hraje tedy úlohu dostředivé síly, uděluje člověku dostředivé zrychlení a_r a udržuje jej tak na kruhové dráze. Podle vztahu (6.20) je

$$N = \frac{mv^2}{R}. \qquad (6.31)$$

Dosadíme výraz pro N do rovnice (6.30) a vypočteme v:

$$v = \sqrt{\frac{gR}{f_s}} = \sqrt{\frac{(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}1\ \mathrm{m})}{(0{,}40)}} =$$
$$= 7{,}17\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 7{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že výsledek nezávisí na hmotnosti jezdce. Platí pro kohokoli, kdo se veze na Rotoru, od dítěte až po zápasníka v sumo.

(b) Jaká je velikost dostředivé síly působící na člověka o hmotnosti 49 kg?

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (6.31) je

$$N = \frac{mv^2}{R} = \frac{(49\ \mathrm{kg})(7{,}17\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2}{(2{,}1\ \mathrm{m})} \doteq$$
$$\doteq 1\,200\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 6: Rotor z příkladu 6.12 se zpočátku pohybuje nejmenší možnou rychlostí potřebnou k tomu, aby člověk nezačal padat. Poté začne velikost rychlosti postupně narůstat. Rozhodněte, zda následující veličiny rostou, klesají, či zůstávají neměnné: (a) velikost síly F_s, (b) velikost síly $\boldsymbol{N}$, (c) hodnota $F_{s,max}$.

6.5 PŘÍRODNÍ SÍLY

V předchozím textu jsme užívali písmene $\boldsymbol{F}$ pro označení síly v obecném smyslu. Užívají se i další symboly: $\boldsymbol{G}$, případně $\boldsymbol{F}_G$ pro tíhovou sílu, $\boldsymbol{F}_s$, resp. $\boldsymbol{F}_d$ pro třecí sílu statickou, resp. dynamickou, $\boldsymbol{N}$, případně $\boldsymbol{F}_N$ pro normálovou (tlakovou) sílu, příležitostně i $\boldsymbol{T}$ pro tahovou sílu. Na mikroskopické úrovni však lze všechny tyto síly zařadit do pouhých dvou kategorií: (1) **gravitační síla**, jejímž jediným příkladem, se kterým jsme se prozatím setkali, je síla tíhová, a (2) **elektromagnetická síla**, která bez výjimky zahrnuje všechny ostatní případy. Elektromagnetická síla je kombinací elektrických a magnetických sil. Síla, která způsobí, že elektricky nabitá bublina ulpí na stěně, a síla, díky níž magnet sebere ze země železnou jehlu, jsou jejími různými příklady. Ve skutečnosti, odhlédneme-li od sil gravitačních, mají všechny ostatní síly, které nějakým způsobem přímo vnímáme (například jako tahové nebo tlakové), elektro-

Klopení dráhy je nutné v zatáčkách, jimiž automobil projíždí tak rychle, že samotným třením nevznikne dostatečně velká dostředivá síla.



magnetickou povahu. Znamená to, že podstatou všech takových sil včetně třecích, odporových, tahových a tlakových je elektromagnetická interakce mezi atomy. Pnutí v provazu existuje jedině proto, že se jednotlivé atomy provazu navzájem přitahují.

Kromě gravitačních a elektromagnetických sil známe ještě dvě další interakce. Mají krátký dosah a nemáme s nimi přímou smyslovou zkušenost. Jsou to **slabá interakce**, která se uplatňuje u některých druhů radioaktivního rozpadu, a **silná interakce**, která k sobě váže kvarky vytvářející protony a neutrony a „drží pohromadě“ atomová jádra.

Fyzikové již dlouho věří, že podstatou přírody je jednoduchost a že počet fundamentálních interakcí je ve skutečnosti nižší. Einstein věnoval většinu svého životního pracovního úsilí snaze o interpretaci těchto interakcí jako různých aspektů jediné *supersíly*. Tehdy neuspěl. V šedesátých až sedmdesátých letech však prokázali jiní fyzikové, že slabá a elektromagnetická síla jsou různé projevy téže **elektroslabé interakce**. Snahy o další redukci pokračují dodneška a patří k nejpřednějším cílům fyziky. Tabulka 6.2 shrnuje kroky, které již byly směrem ke **sjednocení** (jak je cíl zkoumání nazýván) učiněny a naznačuje i leccos o jejich směřování v budoucnosti.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Tření

Snažíme-li se silou $\boldsymbol{F}$ uvést těleso do skluzu po podložce, působí podložka na těleso **třecí silou**. Ta je s podložkou rovnoběžná a míří proti pohybu tělesa. Je způsobena vazebními silami mezi částicemi tělesa a podložky.

Dokud nedojde ke skluzu, jedná se o **statickou třecí sílu** $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$, při skluzu se uplatní **třecí síla dynamická** (**kinetická**) $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$.

Vlastnosti tření

Vlastnost 1. Na těleso působíme silou $\boldsymbol{F}$ a snažíme se je uvést do pohybu. Dokud je těleso v klidu, má statická třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$ stejnou velikost jako průmět síly $\boldsymbol{F}$ do roviny podložky a má opačný směr. Při zvyšování velikosti tohoto průmětu roste i velikost síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$.

Vlastnost 2. Velikost síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$ nabývá maximální hodnoty $F_{\mathrm{s,max}}$ dané vztahem

$$F_{\mathrm{s,max}} = f_\mathrm{s} N, \tag{6.1}$$

kde f_s je **koeficient statického tření** a N je velikost normálové síly (tlakové síly podložky). Převýší-li velikost průmětu síly $\boldsymbol{F}$ do roviny podložky hodnotu $F_{\mathrm{s,max}}$, začne těleso po podložce klouzat.

Vlastnost 3. Začne-li těleso klouzat po podložce, velikost třecí síly prudce klesne na konstantní hodnotu F_d určenou vztahem

$$F_\mathrm{d} = f_\mathrm{d} N, \tag{6.2}$$

kde f_d je **koeficient dynamického (kinetického) tření**.

Odporová síla

Pohybuje-li se těleso relativní rychlostí $\boldsymbol{v}$ vůči prostředí, kterým je obklopeno (například vzduch), působí prostředí na těleso **odporovou silou** $\boldsymbol{F}$. Tato síla brání pohybu tělesa a směřuje proti relativní rychlosti. Velikost síly $\boldsymbol{F}$ souvisí s relativní rychlostí vztahem

$$F = \tfrac{1}{2} C \varrho S v^2, \tag{6.17}$$

kde ϱ je hustota prostředí (hmotnost vztažená na jednotku objemu), S je **účinný průřez** tělesa (tj. obsah největšího řezu tělesa rovinou kolmou k relativní rychlosti) a C je experimentálně určený koeficient — součinitel odporu.

Mezní rychlost

Padá-li oblé těleso ve vzduchu po dostatečně dlouhé dráze, dojde ke kompenzaci odporové a tíhové síly. Těleso se přestane urychlovat a padá konstantní **mezní rychlostí** o velikosti v_m dané vztahem

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{2mg}{C\varrho S}}, \tag{6.18}$$

kde m je hmotnost tělesa.

Rovnoměrný pohyb po kružnici

Pohyb, při němž se částice o hmotnosti m pohybuje po kružnici rychlostí, jejíž velikost je stálá, nazýváme **rovnoměrným pohybem po kružnici**. Částice se pohybuje s **dostředivým zrychlením** o velikosti

$$a = \frac{v^2}{r}, \tag{6.19}$$

které jí udílí **dostředivá síla** o velikosti

$$F = \frac{mv^2}{r}. \tag{6.20}$$

Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{F}$ míří do středu křivosti trajektorie.

Fundamentální síly

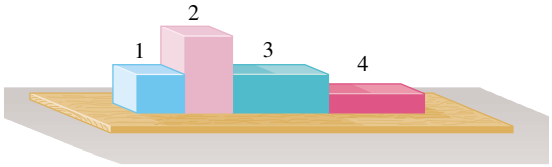
Nepřeberné množství příkladů sil lze roztřídit do tří fundamentálních typů interakce: **gravitační, elektroslabá** (kombinace sil členěných z historických důvodů na **elektrické** a **magnetické** a sil **slabých**) a konečně **silná**. V našem běžném světě se setkáváme pouze s gravitačními, elektrickými a magnetickými silami. Fyzikové doufají, že se seznam tří interakcí podaří zredukovat v jedinou všezahrnující *supersílu*.

OTÁZKY

1. Na obr. 6.16 jsou čtyři kostky uspořádané na desce. Pravý konec desky zvedáme (podobně jako u knihy na obr. 6.3a), dokud po ní kostky nezačnou sjíždět. Kostky jsou ze stejného materiálu a mají hmotnosti

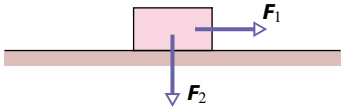
kostka 1 … 5 kg, kostka 2 … 10 kg,
kostka 3 … 10 kg, kostka 4 … 5 kg.

V jakém pořadí zleva doprava musí být kostky narovnány, aby začaly sjíždět při nejmenším možném úhlu sklonu desky vzhledem k vodorovné rovině?



Obr. 6.16 Otázka 1

2. Na obr. 6.17 je znázorněna kostka ležící na podlaze. Na kostku působí vodorovná síla $\boldsymbol{F}_1$ o velikosti 10 N. Kostka je však v klidu. Kostku začneme tlačit k podlaze silou $\boldsymbol{F}_2$, jejíž velikost postupně narůstá od nulové hodnoty. Rozhodněte, zda budou následující veličiny růst, klesat, či zůstanou zachovány: (a) velikost třecí síly $\boldsymbol{F}_s$ působící na kostku, (b) velikost normálové síly $\boldsymbol{N}$, jíž působí podlaha na kostku, (c) maximální hodnota $F_{s,max}$ velikosti statické třecí síly mezi kostkou a podlahou. (d) Může kostka začít klouzat?

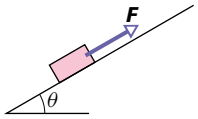


Obr. 6.17 Otázka 2

3. Přepravku na jablka tlačíme ke stěně tak silně, že neklouže dolů. Určete směr následujících sil, jimiž působí stěna na přepravku: (a) statická třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, (b) normálová síla $\boldsymbol{N}$. Co se stane s hodnotami (c) F_s, (d) N a (e) $F_{s,max}$, zvýšíme-li tlak?

4. Krabice leží na rampě, která svírá s vodorovnou rovinou úhel θ. Úhel θ narůstá z počáteční nulové hodnoty až do okamžiku, kdy krabice začne klouzat. Rozhodněte, zda hodnoty následujících veličin rostou, klesají, či zůstávají neměnné: (a) složka tíhové síly působící na krabici, měřená podél rampy, (b) velikost statické třecí síly, jíž působí rampa na krabici, (c) složka tíhové síly ve směru kolmém k rampě, (d) normálová síla, jíž působí rampa na krabici, (e) maximální hodnota velikosti statické třecí síly $F_{s,max}$.

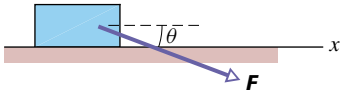
5. Kostka na obr. 6.18 leží na rampě v klidu vlivem třecí síly, jíž na ni rampa působí. Na kostku začneme působit silou $\boldsymbol{F}$, která míří podél rampy vzhůru a jejíž velikost postupně narůstá z počáteční nulové hodnoty. Jak se přitom mění velikost a směr třecí síly působící na kostku?



Obr. 6.18 Otázka 5

6. Vraťte se k otázce 5 s tím, že síla $\boldsymbol{F}$ bude nyní mířit podél rampy dolů. Její velikost opět narůstá od nulové hodnoty. Co se nyní děje se směrem a velikostí třecí síly působící na kostku?

7. Úhel θ mezi silou $\boldsymbol{F}$ působící na nepohyblivou kostku na obr. 6.19 a vodorovnou rovinou roste. Rozhodněte, zda následující veličiny rostou, klesají, či zůstávají konstantní: (a) F_x, (b) F_s, (c) N, (d) $F_{s,max}$.



Obr. 6.19 Otázka 7

8. Odpovězte na otázku 7, je-li síla $\boldsymbol{F}$ odkloněna vzhůru.

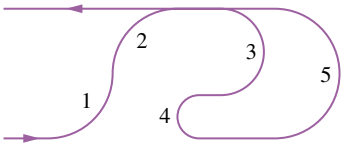
9. Jaká by byla perioda a rychlost kónického kyvadla z příkladu 6.9 pro úhel $\theta = 90°$?

10. Částice se může pohybovat různými rychlostmi po třech různých kruhových obloucích. Možnosti jsou shrnuty v následující tabulce:

OBLOUK	VELIKOST RYCHLOSTI	POLOMĚR
1	$2v_0$	r_0
2	$3v_0$	$3r_0$
3	$2v_0$	$4r_0$

Uspořádejte oblouky podle velikosti dostředivé síly působící na částici (sestupně).

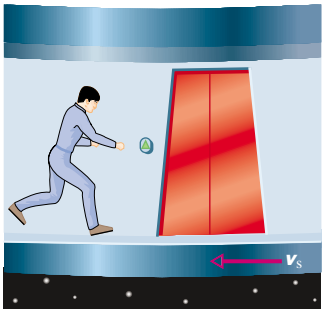
11. Na obr. 6.20 je zakreslen půdorys dráhy v zábavním parku. Vozík projíždí rovnoměrně pěti kruhovými oblouky o poloměrech R_0, $2R_0$ a $3R_0$. Uspořádejte oblouky podle velikosti dostředivé síly působící na projíždějící vozík (sestupně).



Obr. 6.20 Otázka 11

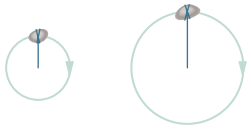
12. Obr. 6.21 znázorňuje řez kruhovou vesmírnou stanicí, která rotuje kolem svého středu. V důsledku toho působí na posádku zdánlivá tíhová síla. Jeden z členů posádky je právě v blízkosti

obvodové stěny, která má rychlost $\boldsymbol{v}_s$. (a) Astronaut se přemístí (například výtahem) blíže ke středu stanice. Rozhodněte, zda při tom velikost zdánlivé tíhové síly působící na astronauta vzroste, klesne, nebo se nezmění. (b) V druhé části pokusu astronaut běží podél stěny lodi v opačném směru vůči $\boldsymbol{v}_s$ (rychlostí, jejíž velikost je menší než v_s). Opět rozhodněte, zda velikost zdánlivé tíhové síly vzroste, klesne, nebo zůstane nezměněna.



Obr. 6.21 Otázka 12

13. Na obr. 6.22 je pohled shora na dva kameny obíhající po dokonale hladké podložce po kruhových trajektoriích. Každý z nich je přivázán na provaze, jehož druhý konec je upevněn ve středu kružnice. Rozhodněte, zda tahová síla delšího provazu je větší, menší, či stejně velká jako tahová síla provazu kratšího, pohybují-li se kameny (a) stejně velkými rychlostmi, (b) se stejnými periodami oběhu.



Obr. 6.22 Otázka 13

14. Mince leží na točně, jejíž rotace se postupně zrychluje. Co se děje s velikostí třecí síly, jíž působí točna na minci, jestliže rychlost otáčení narůstá z počáteční nulové hodnoty?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 6.2 Vlastnosti sil tření

1C. Plný prádelník o hmotnosti 45 kg stojí na podlaze. (a) Koeficient statického tření mezi ním a podlahou je 0,45. Jakou nejmenší vodorovnou silou musí člověk na prádelník působit, aby jím pohnul? (b) Zodpovězte předchozí otázku pro případ, že z prádelníku nejprve vyndáme prádlo a šatstvo o celkové hmotnosti 17 kg.

2C. Hráč baseballu o hmotnosti $m = 79$ kg klouže k druhé metě a je brzděn třecí silou o velikosti $F = 470$ N. Jaký je koeficient dynamického tření mezi hráčem a trávníkem?

3C. Koeficient statického tření mezi teflonem a míchanými vejci je asi 0,04. Při jakém nejmenším úhlu sklonu vzhledem k vodorovné rovině sklouznou vejce podél dna teflonové pánve?

4C. Síla $\boldsymbol{F}$ o velikosti 100 N, která svírá s vodorovnou rovinou úhel θ a míří vzhůru, působí na židli o hmotnosti 25,0 kg spočívající na podlaze. (a) Pro každou z hodnot úhlu $\theta = 0°; 30°; 60°$ vypočtěte velikost tlakové síly podlahy na židli a vodorovnou složku síly $\boldsymbol{F}$. (b) Pro každou z hodnot θ rozhodněte, bude-li židle v klidu, nebo bude-li klouzat po podlaze. Koeficient statického tření mezi židlí a podlahou je 0,420.

5C. V Nevadě a jižní Kalifornii zanechávají kameny v tvrdé a vyprahlé pouštní půdě stopy, jako by se stěhovaly (obr. 6.23). Po celá léta si lidé lámali hlavu, odkud se bere neviditelný pohyb vedoucí ke vzniku těchto stop. Odpověď přišla v sedmdesátých letech tohoto století: Když poušť zasáhla náhlá bouře, vytvořila se na pevném podkladu tenká vrstva bláta, která značně snížila koeficient tření mezi kameny a podkladem. Bouři doprovázel silný vítr, opíral se do kamenů, posouval je a ony zanechaly v půdě stopy, které později slunečním žárem ztvrdly. Předpokládejme, že hmotnost kamene je 300 kg (zhruba největší hmotnost kamenů, které zanechávají stopy) a že koeficient statického tření je zmenšen na hodnotu 0,15. Jak velká vodorovná síla musí na kámen působit při prudkém poryvu větru, aby se pohnul?



Obr. 6.23 Cvičení 5

6C. Jakého největšího zrychlení může dosáhnout běžec, je-li koeficient statického tření mezi obuví a běžeckou dráhou 0,95? (Při běhu je v kontaktu s dráhou jen jedna noha běžce.)

7C. Dělník tlačí vodorovným směrem bednu o hmotnosti 35 kg. Působí na ni při tom silou 110 N. Koeficient statického tření mezi bednou a podlahou je 0,37. (a) Jakou třecí silou působí podlaha na bednu? (b) Jaká je za této situace maximální velikost statické třecí síly $F_{s,max}$? (c) Pohne se bedna? (d) Druhý dělník přichází na pomoc a táhne bednu svisle vzhůru. Jakou nejmenší tahovou silou musí na bednu působit, aby se prvnímu dělníkovi podařilo uvést ji do pohybu? (První dělník stále tlačí bednu silou 110 N.) (e) Jakou nejmenší silou by musel na bednu působit druhý dělník, kdyby ji namísto zvedání tahal vodorovným směrem, aby se oběma podařilo bednu posunout?

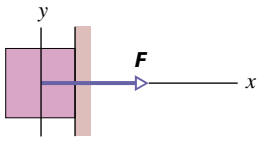
8C. Člověk tlačí po podlaze bednu o hmotnosti 55 kg vodo-

rovnou silou o velikosti 220 N. Koeficient dynamického tření je 0,35. (a) Jaká je velikost třecí síly? (b) Jaké je zrychlení bedny?

9C. Kufr vážící 220 N leží na vodorovné podlaze. Koeficient statického tření mezi kufrem a podlahou je 0,41, koeficient dynamického tření je 0,32. (a) Jakou nejmenší vodorovnou silou musí působit člověk na kufr, aby jím pohnul? (b) Jakou vodorovnou silou musí člověk působit na kufr, který se již dal do pohybu, aby udržel jeho rychlost stálou? (c) Jaké je zrychlení kufru, působí-li na něj člověk stále stejnou silou jako na začátku?

10C. Skříňka vážící 556 N stojí na podlaze. Koeficient statického tření mezi ní a podlahou je 0,68, koeficient dynamického tření je 0,56. Při čtyřech různých pokusech uvést skříňku do pohybu na ni působila pokaždé jinak velká vodorovná síla: (a) 222 N, (b) 334 N, (c) 445 N, (d) 556 N. Pro každý z uvedených případů zjistěte, zda se skříňka pohnula a vypočtěte velikost třecí síly, kterou na skříňku působí podlaha poté, co je uvedena do pohybu. Na počátku každého pokusu je skříňka v klidu.

11C. Kostku o váze 5,0 N tlačíme ke svislé stěně vodorovnou silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti 12 N (obr. 6.24). Koeficient statického tření mezi stěnou a kostkou je 0,60, koeficient dynamického tření mezi nimi je 0,40. Předpokládejme, že se kostka zpočátku nepohybuje. (a) Začne se kostka pohybovat? (b) Pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ vyjádřete sílu, jíž působí stěna na kostku.



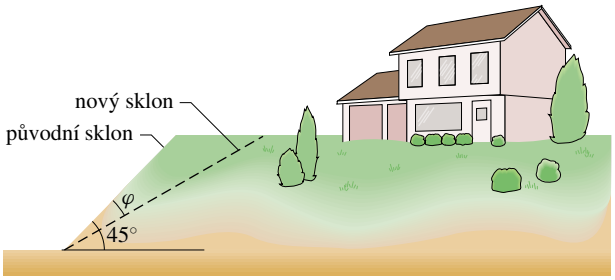
Obr. 6.24 Cvičení 11

12C. Horolezkyně o hmotnosti 49 kg šplhá „komínem“ mezi dvěma skalními stěnami způsobem znázorněným na obr. 6.25. Koeficient statického tření mezi její obuví a skálou je 0,8, mezi zády a skálou 1,2. Horolezkyně snižuje tlakovou sílu, kterou se tiskne nohama i zády ke skalní stěně, až do okamžiku těsně před sklouznutím. Předpokládáme, že poměr velikostí statických třecích sil, jimiž působí skalní stěna na chodidla, resp. záda horolezkyně, je takový, že by ke skluzu zad i chodidel došlo současně.* (a) Jak velkou silou se horolezkyně tiskne ke skále? (b) Jakou část tíhové síly kompenzuje třecí síla působící na její obuv?

13C. Dům je postaven na vrcholku kopce se sklonem svahu asi 45° (obr. 6.26). Geologická studie naznačuje, že úhel sklonu bude pravděpodobně časem klesat vlivem skluzu svrchních vrstev půdy. Koeficient statického tření mezi svrchní a spodní vrstvou je 0,5. O jaký nejmenší úhel φ je potřeba zmenšit sklon svahu, aby k sesuvům nedošlo?

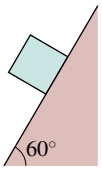


Obr. 6.25 Cvičení 12



Obr. 6.26 Cvičení 13

14C. Koeficient dynamického tření v situaci znázorněné na obr. 6.27 je 0,20. Jaké zrychlení má kostka, která (a) klesá podél nakloněné roviny, (b) byla vržena podél nakloněné roviny vzhůru a dosud stoupá.

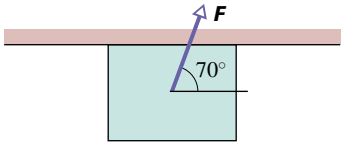


Obr. 6.27 Cvičení 14

15C. Hokejový kotouč o hmotnosti 110 g klouže po ledové ploše a urazí 15 m, než se zastaví. Velikost jeho počáteční rychlosti je 6,0 m/s. (a) Určete velikost třecí síly působící na kotouč a (b) koeficient tření mezi kotoučem a ledem.

16Ú. Po neúspěšné zkoušce z fyziky měl student děsivý sen: zdálo se mu, že tlačí jakousi kostku po stropě svého pokoje. Kostka má hmotnost 5,0 kg a student na ni působí silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti 80 N, která svírá s rovinou stropu úhel 70° (obr. 6.28). Koeficient dynamického tření mezi kostkou a stropem je 0,40. Úspěšnost zkoušky závisí na tom, zda se studentovi podaří určit, jak velké je zrychlení kostky.

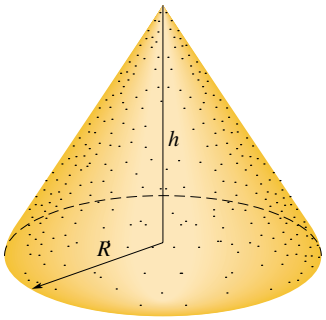
* Velikosti statických třecích sil, jimiž působí skalní stěna na chodidla, resp. na záda horolezkyně, nejsou shodné. Je to způsobeno tím, že horolezkyni nelze v popsané situaci považovat za hmotný bod. Její těžiště (viz kap. 9) leží v blízkosti stěny, o niž se sportovkyně opírá zády. Statická třecí síla, jíž na ni tato stěna působí, musí proto kompenzovat větší část tíhové síly než stěna protilehlá. Předpoklad o současném skluzu horolezkyně po *obou* stěnách nahrazuje v této úloze údaj o poloze těžiště a umožňuje při jejím řešení použít model hmotného bodu.



Obr. 6.28 Úloha 16

17Ú. Úkolem studenta v praktiku je určit koeficient statického i dynamického tření mezi krabicí a deskou. Položí krabici na desku a pozvolna zvedá jeden konec desky. V okamžiku, kdy úhel odklonu desky od vodorovné roviny dosáhne hodnoty 30°, začne krabice klouzat a během 4,0 s sjede podél desky o 2,5 m. Jak velké jsou oba koeficienty tření?

18Ú. Dělník potřebuje nasypat písek na kuželovou hromadu o kruhové podstavě. Poloměr kruhu je R. Žádný písek se nesmí rozsypat okolo (obr. 6.29). Koeficient statického tření mezi vrstvou písku uloženou podél pláště kužele a pískem vespod je f_s. Ukažte, že největší objem písku, který může být tímto způsobem uskladněn, je $\pi f_s R^3/3$. (Objem kužele je $Sh/3$, kde S je obsah základny a h výška kužele.)



Obr. 6.29 Úloha 18

19Ú. Lyžaři mají zkušenost, že lyže volně položená na zasněžený terén se přilepí. Když se však lyže pohybuje, sníh se třením zahřívá a částečně roztaje. Výsledkem je snížení koeficientu tření a zlepšení skluzu. Navoskovanou lyži voda navíc nesmáčí a tření mezi lyží a vrstvou vody se tím ještě více zmenší. Reklama v časopisu doporučuje nový typ plastových lyží jako zvláště nesmáčivý a uvádí následující srovnání: Na nových lyžích sjel lyžař po mírném, 200 m dlouhém svahu za pouhých 42 s, zatímco sjezd na lyžích standardního typu trval 61 s. (a) Určete průměrnou velikost zrychlení lyžaře v obou případech. (b) Za předpokladu, že svah má sklon 3,0°, určete pro oba typy lyží koeficient dynamického tření mezi sněhovou vrstvou a skluznicí.

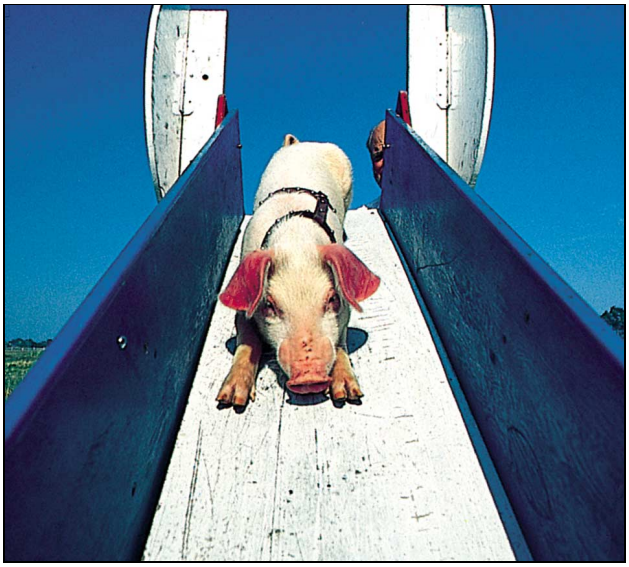
20Ú. Ocelová kostka o hmotnosti 11 kg spočívá na vodorovném stole. Koeficient statického tření mezi kostkou a stolem je 0,52. Jak velkou silou lze uvést kostku do pohybu, (a) je-li tato síla vodorovná, (b) svírá-li tato síla s vodorovnou rovinou úhel +60° (směřuje vzhůru)? (c) Předpokládejme, že na kostku působí síla, která svírá s vodorovnou rovinou úhel −60° (směřuje dolů). Jaká je největší přípustná hodnota její velikosti, má-li kostka zůstat v klidu?

21Ú. Železniční vůz je naložen bednami. Koeficient statického tření mezi nimi a podlahou vozu je 0,25. Vlak jede rychlostí 48 km/h. Jaká je nejkratší možná vzdálenost, na které může vlak zastavit, aby bedny neklouzaly? Vlak brzdí s konstantním zrychlením.

22Ú. Kostka klouže stálou rychlostí dolů po nakloněné rovině s úhlem sklonu θ. Poté je podél nakloněné roviny vržena zpět vzhůru počáteční rychlostí o velikosti v_0. (a) Jakou vzdálenost kostka podél nakloněné roviny urazí, než se zastaví? (b) Sklouzne pak zase dolů? Vysvětlete.

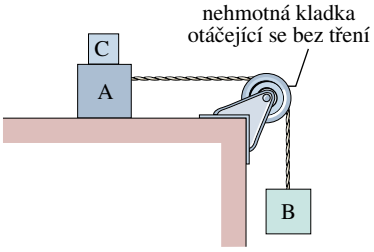
23Ú. Bedna o hmotnosti 68 kg je vlečena po podlaze na laně, které svírá s vodorovnou rovinou úhel 15°. (a) Koeficient statického tření mezi podlahou a bednou je 0,50. Určete nejmenší tahovou sílu lana, potřebnou k uvedení bedny do pohybu. (b) S jakým zrychlením se bedna začne v tomto případě pohybovat, je-li $f_d = 0{,}35$.

24Ú. Vepřík klouže po dřevěné skluzavce o úhlu sklonu 35° (obr. 6.30) dvakrát déle, než kdyby skluzavka byla dokonale hladká. Určete koeficient dynamického tření.



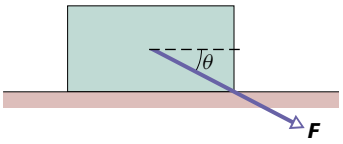
Obr. 6.30 Úloha 24

25Ú. Kostky A a B na obr. 6.31 váží 44 N, resp. 22 N. (a) Koeficient statického tření f_s mezi kostkou A a stolem je 0,20. Určete nejmenší váhu kostky C, kterou je třeba položit na kostku A, aby nedošlo ke skluzu. (b) Kostku C náhle zvedneme. Jaké je zrychlení kostky A, je-li koeficient dynamického tření mezi ní a deskou stolu 0,15?



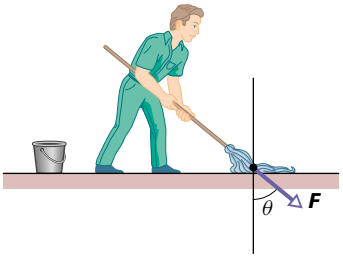
Obr. 6.31 Úloha 25

26Ú. Kostku o hmotnosti 3,5 kg suneme po vodorovné podlaze silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti $F = 15\,\mathrm{N}$, která svírá s podlahou úhel $\theta = 40^\circ$ (obr. 6.32). Koeficient dynamického tření mezi kostkou a podlahou je 0,25. Vypočtěte (a) velikost třecí síly působící na kostku a (b) zrychlení kostky.



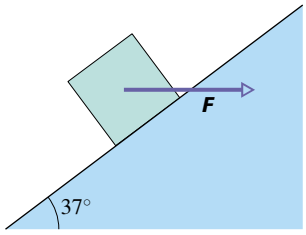
Obr. 6.32 Úloha 26

27Ú. Pečlivý pracovník na obr. 6.33 tlačí mop přímo ve směru jeho rukojeti silou $\boldsymbol{F}$. Rukojeť svírá se svislým směrem úhel θ. Koeficient statického, resp. dynamického tření mezi hlavicí mopu a podlahou je f_s, resp. f_d. Zanedbejte hmotnost rukojeti a předpokládejte, že celková hmotnost m mopu je soustředěna v hlavici. (a) Určete velikost síly F, pohybuje-li se mop po podlaze konstantní rychlostí. (b) Ukažte, že působením síly $\boldsymbol{F}$ (opět ve směru rukojeti) nelze uvést mop do pohybu, pokud úhel θ nedosáhne jisté nejmenší hodnoty θ_0. Určete ji.



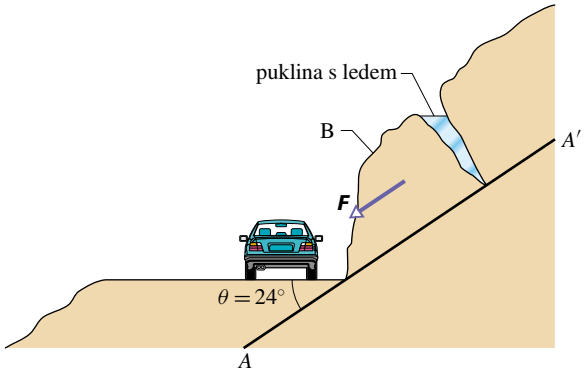
Obr. 6.33 Úloha 27

28Ú. Na kostku o hmotnosti 5,0 kg, pohybující se po nakloněné rovině, působí vodorovná síla $\boldsymbol{F}$ o velikosti 50 N (obr. 6.34). Koeficient dynamického tření mezi kostkou a nakloněnou rovinou je 0,30. Koeficient statického tření není zadán. (Jistou informaci o něm však v tuto chvíli již přece jen máme.) (a) Jaké je zrychlení pohybu kostky po nakloněné rovině? (b) Jakou vzdálenost urazí kostka podél nakloněné roviny, jestliže její počáteční rychlost směřovala vzhůru a měla velikost $4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$? (c) Co se stane v okamžiku, kdy se kostka dostane do bodu obratu? Zdůvodněte.



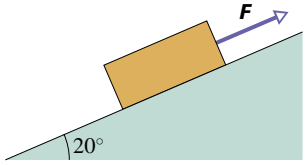
Obr. 6.34 Úloha 28

29Ú. Obr. 6.35 znázorňuje boční průřez silnicí zařízlnutou do svahu. Plnou čárou AA' je vyznačena tzv. oslabená vrstevná plocha, podél níž může docházet ke skluzu. Blok B, ležící přímo nad silnicí, je od skály nad ním oddělen velkou trhlinou a jeho sesuvu brání pouze tření o vrstevnou plochu. Hmotnost bloku je $1{,}8\cdot10^7$ kg, *hloubkový úhel* θ je 24° a koeficient statického tření mezi blokem a podložím má hodnotu 0,63. (a) Ukažte, že blok nesklouzne. (b) Do trhliny prosakuje voda a zamrzá. Zvyšuje přitom svůj objem a působí tak na blok silou $\boldsymbol{F}$ rovnoběžnou se směrem AA'. Při jaké nejmenší hodnotě F začne blok klouzat?



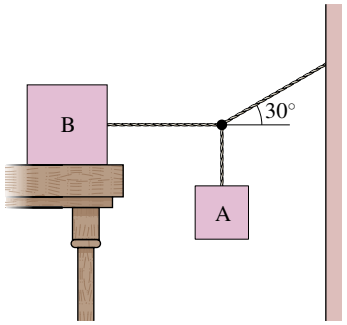
Obr. 6.35 Úloha 29

30Ú. Kostka vážící 80 N spočívá na nakloněné rovině o úhlu sklonu 20° (obr. 6.36). Koeficient statického tření je 0,25, koeficient dynamického tření 0,15. (a) Jaká je nejmenší velikost síly $\boldsymbol{F}$ rovnoběžné s nakloněnou rovinou, která zabrání kostce ve skluzu? (b) Jaká je nejmenší hodnota F, při níž se začne kostka pohybovat po nakloněné rovině vzhůru? (c) Při jaké hodnotě F bude kostka stoupat stálou rychlostí?



Obr. 6.36 Úloha 30

31Ú. Kostka B na obr. 6.37 má hmotnost 72,5 kg. Koeficient statického tření mezi kostkou a vodorovnou rovinou je 0,25. Určete největší možnou hmotnost kostky A, při níž ještě bude soustava v rovnováze.

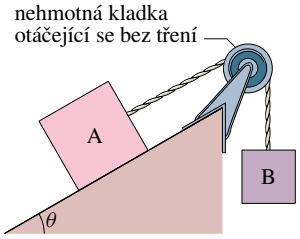


Obr. 6.37 Úloha 31

32Ú. Tělesa A a B na obr. 6.38 jsou spojena vláknem vedeným

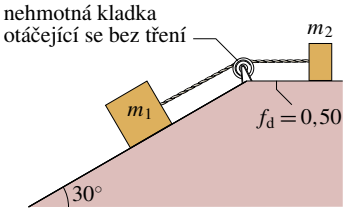
přes nehmotnou kladku otáčející se bez tření. Těleso A má hmotnost 10,4 kg, těleso B 3,3 kg. Koeficienty tření mezi tělesem A a nakloněnou rovinou jsou $f_s = 0{,}56$ a $f_d = 0{,}25$. Úhel θ je 40°. Určete zrychlení těles, jestliže (a) jsou zpočátku v klidu, (b) těleso A stoupá po nakloněné rovině, (c) těleso A klesá po nakloněné rovině.

33Ú. Uspořádání těles je stejné jako na obr. 6.38. Kostka A má hmotnost 10 kg, koeficient dynamického tření mezi ní a nakloněnou rovinou je 0,22. Úhel θ je 30°. Kostka A klouže dolů po nakloněné rovině stálou rychlostí. Jakou hmotnost má kostka B?



Obr. 6.38 Úlohy 32 a 33

34Ú. Kostky na obr. 6.39 mají hmotnosti $m_1 = 4{,}0$ kg a $m_2 = 2{,}0$ kg. Koeficient dynamického tření mezi m_2 a vodorovnou rovinou je 0,50. Nakloněná rovina je dokonale hladká. Určete (a) tahovou sílu vlákna a (b) zrychlení kostek.

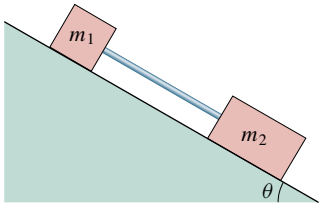


Obr. 6.39 Úloha 34

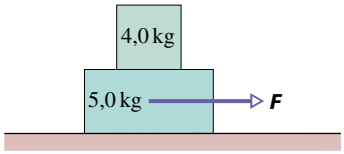
35Ú. Dvě kostky o hmotnostech 4,0 kg a 8,0 kg jsou spojeny vláknem zanedbatelné hmotnosti a kloužou dolů po nakloněné rovině o úhlu sklonu 30°. Čtyřkilogramová kostka je vpředu. Koeficient dynamického tření mezi čtyřkilogramovou (osmikilogramovou) kostkou a nakloněnou rovinou je 0,10 (0,20). (a) Určete zrychlení kostek a (b) sílu napínající vlákno. (c) Popište pohyb soustavy po záměně pořadí kostek.

36Ú. Dvě tělesa o hmotnostech $m_1 = 1{,}65$ kg a $m_2 = 3{,}30$ kg spojená nehmotnou tyčí kloužou po nakloněné rovině o úhlu sklonu $\theta = 30°$ (obr. 6.40) tak, že těleso m_1 je taženo tělesem m_2. Tyč je rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Koeficient dynamického tření mezi m_1 a nakloněnou rovinou je $f_1 = 0{,}226$, mezi m_2 a rovinou $f_2 = 0{,}113$. Vypočtěte (a) sílu napínající tyč a (b) zrychlení těles. (c) Jak se změní odpovědi (a) a (b), zaměníme-li pořadí těles?

37Ú. Kostka o hmotnosti 4,0 kg leží na horní podstavě jiné kostky, jejíž hmotnost je 5,0 kg. Předpokládejme nejprve, že spodní kostka je pevně spojena s podložkou. K uvedení horní kostky do pohybu je v takovém případě třeba, aby na ni působila vodorovná síla o velikosti nejméně 12 N. Nyní položíme obě kostky na vodorovný dokonale hladký stůl (obr. 6.41). Určete (a) největší možnou velikost vodorovné síly **F**, kterou lze působit na dolní kostku tak, aby se obě kostky pohybovaly společně a (b) společné zrychlení kostek.

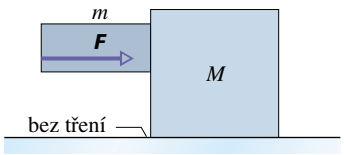


Obr. 6.40 Úloha 36



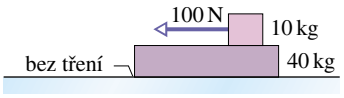
Obr. 6.41 Úloha 37

38Ú. Dvě kostky ($m = 16$ kg a $M = 88$ kg), znázorněné na obr. 6.42, nejsou spojeny. Koeficient statického tření mezi nimi je $f_s = 0{,}38$, podložka pod kostkou M je však dokonale hladká. Jakou nejmenší vodorovnou silou **F** je nutno tlačit kostku m ke stěně kostky M, aby se pohybovaly společně?



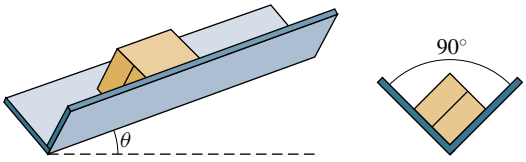
Obr. 6.42 Úloha 38

39Ú. Deska o hmotnosti 40 kg leží na dokonale hladké podlaze. Na desce spočívá kostka o hmotnosti 10 kg (obr. 6.43). Koeficient statického tření f_s mezi kostkou a deskou je 0,60, koeficient dynamického tření je $f_d = 0{,}40$. Na kostku působí vodorovná síla o velikosti 100 N. Určete zrychlení (a) kostky i (b) desky.



Obr. 6.43 Úloha 39

40Ú. Bedna klouže ve žlabu s pravoúhlým profilem (obr. 6.44). Koeficient dynamického tření mezi bednou a žlabem je f_d. Vyjádřete zrychlení bedny pomocí f_d, θ a g.



Obr. 6.44 Úloha 40

41Ú. Lokomotiva s 25 vagony se rozjíždí po vodorovné trati. Každý vagon má hmotnost 5 000 kg a je brzděn třecí silou o velikosti $F = 250v$ (v newtonech), kde v je velikost jeho okamžité rychlosti ($\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$). V okamžiku, kdy velikost rychlosti vlaku nabude hodnoty 30 km/h, má zrychlení velikost $0,20\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (a) Jak velkou tažnou silou působí lokomotiva na první vagon? (b) Předpokládejme, že získaná hodnota představuje velikost největší síly, kterou je lokomotiva schopna vyvinout. Určete nejpříkřejší možné stoupání svahu, po němž může lokomotiva vytáhnout vlak stálou rychlostí 30 km/h.

42Ú. Krabice s pískem, která je zpočátku v klidu, je upevněna na šňůře a tažena po podlaze. Velikost tahové síly šňůry nesmí převýšit 1 100 N. Koeficient statického tření mezi krabicí a podlahou je 0,35. (a) Jaký úhel mezi šňůrou a podlahou musíme zvolit, abychom přepravili co největší množství písku? (b) Jaká bude v této situaci hmotnost krabice s pískem?

43Ú*. Člun o hmotnosti 1 000 kg se pohybuje rychlostí 90 km/h. Posádka vypne motor. Velikost třecí síly F_d mezi člunem a vodou je úměrná velikosti rychlosti člunu podle vztahu $F_\mathrm{d} = 70v$, kde v je zadáno v metrech za sekundu a F_d v newtonech. Za jak dlouho klesne velikost rychlosti člunu na 45 km/h?

ODST. 6.3 Odporová síla a mezní rychlost

44C. Určete odporovou sílu, která působí na raketu o poloměru 53 cm při rychlosti $250\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, letí-li v nízké nadmořské výšce, kde je hustota vzduchu $1,2\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Předpokládejte, že $C = 0,75$.

45C. Mezní rychlost vzdušného akrobata v poloze rozepjatého orla je 160 km/h, při letu střemhlav pak 310 km/h. Předpokládáme, že koeficient C má stejnou hodnotu při obou figurách. Vypočtěte poměr odpovídajících účinných průřezů.

46C. Určete poměr velikostí odporové síly, která působí na tryskové dopravní letadlo letící rychlostí o velikosti 1 000 km/h v nadmořské výšce 10 km a odporové síly působící na vrtulové vojenské letadlo, které letí poloviční rychlostí v poloviční výšce. Hustota vzduchu ve výšce 10 km je $0,38\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, ve výšce 5,0 km je $0,67\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Předpokládejte, že účinné průřezy obou letadel i odporové koeficienty jsou stejné.

47Ú. Z údajů v tab. 6.1 určete průměr osmikilogramového náboje. Předpokládejte, že $C = 0,49$ a hustota vzduchu má hodnotu $1,2\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

ODST. 6.4 Rovnoměrný pohyb po kružnici

48C. Koeficient statického tření mezi pneumatikami automobilu a silnicí je 0,25. Jakou největší rychlostí může automobil projet bez smyku vodorovnou zatáčkou o poloměru 47,5 m?

49C. Jaký je nejmenší poloměr neklopené zatáčky, kterou může bez nehody projet cyklista, jede-li rychlostí 30 km/h? Koeficient statického tření mezi pneumatikami a silnicí je 0,32.

50C. Při olympijské soutěži závodních sání byla nejlepšímu evropskému družstvu naměřena rychlost 60 mil v hodině při průjezdu zatáčkou o poloměru 25 stop. Jakému přetížení (v jednotkách g) byli při tom jezdci vystaveni? (Zadané hodnoty převeďte do soustavy SI.)

51C. Automobil vážící 10,7 kN jede rychlostí 13,4 m/s. Řidič se chystá projet neklopenou zatáčkou o poloměru 61,0 m. (a) Jak velká třecí síla je schopna udržet automobil na kruhové dráze? (b) Jak dopadne řidičův pokus, je-li koeficient statického tření mezi pneumatikami vozu a silnicí 0,35?

52C. V kruhové zatáčce je předepsána rychlost o velikosti 60 km/h. (a) Jaký je správný úhel klopení zatáčky, je-li její poloměr 150 m? (b) Jaká by při uvedené rychlosti musela být minimální hodnota statického koeficientu tření mezi pneumatikami a silnicí, potřebná pro bezpečný průjezd vozidel (bez smyku), kdyby zatáčka nebyla klopená?

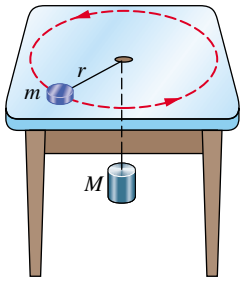
53C. V klopené zatáčce je předepsána rychlost 60 km/h. Poloměr zatáčky je 200 m. Automobil jede v dešti rychlostí 40 km/h. Určete nejmenší přípustnou hodnotu koeficientu tření mezi pneumatikami a silnicí, při níž může automobil projet zatáčkou ještě bez smyku?

54C. Holčička postavila piknikový košík na vnější obvod kolotoče. Kolotoč má poloměr 4,6 m a otočí se jednou za 30 s. (a) Jaká je velikost rychlosti bodu na obvodu kolotoče? (b) Jaký musí být koeficient statického tření mezi košíkem a kolotočem, má-li být košík vzhledem ke kolotoči v klidu?

55C. Malá kulička (hmotný bod) o hmotnosti 50 g zavěšená na niti délky 1,2 m tvoří konické kyvadlo. Kulička obíhá po vodorovné kružnici o poloměru 25 cm. (a) Jak velká je rychlost kuličky? (b) Jaké je její zrychlení? (c) Jak velká je tahová síla niti?

56C. Elektron v Bohrově modelu vodíkového atomu obíhá kolem jádra po kruhové dráze o poloměru $5,3{\cdot}10^{-11}$ m. Elektron oběhne jádro $6,6{\cdot}10^{15}$krát za sekundu. (a) Určete jeho rychlost, (b) zrychlení (velikost i směr) a (c) dostředivou sílu, která na elektron působí. (Tato síla je dána přitažlivou elektrostatickou interakcí záporně nabitého elektronu a kladně nabitého jádra.) Hmotnost elektronu je $9,11{\cdot}10^{-31}$ kg.

57C. Tělísko o hmotnosti m leží na dokonale hladkém stole a je spojeno se závažím o hmotnosti M provázkem provlečeným otvorem ve stole (obr. 6.45). Určete rychlost, kterou se musí tělísko m pohybovat, aby závaží M bylo v klidu.

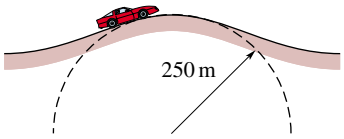


Obr. 6.45 Cvičení 57

58C. Kaskadér v autě přejíždí vrcholek, jehož profil je přibližně kruhový, s poloměrem 250 m (obr. 6.46). Jakou největší rychlostí může jet, aby vozidlo neztratilo kontakt se silnicí?

59Ú. Malá mince leží na ploché vodorovné točně. Točna se otočí třikrát za 3,14 s. (a) Jaká je rychlost mince, která se veze na točně

bez klouzání ve vzdálenosti 5,0 cm od jejího středu? (b) Jaké je zrychlení mince (velikost i směr)? (c) Jaká je velikost třecí síly působící na minci? Hmotnost mince je 2,0 g. (d) Zjistilo se, že mince umístěná do vzdálenosti větší než 10 cm od středu točny již bude klouzat. Jaký je koeficient statického tření mezi mincí a točnou?



Obr. 6.46 Cvičení 58

60Ú. Malý předmět je umístěn ve vzdálenosti 10 cm od středu talíře gramofonu. Při otáčkách $33\frac{1}{3}$ ot/min zůstává předmět vzhledem k točně v klidu, při 45 ot/min již klouže. V jakém intervalu leží hodnota statického koeficientu tření mezi předmětem a točnou?

61Ú. Cyklista projíždí kruhovou zatáčkou o poloměru 25 m rychlostí o stálé velikosti 9,00 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Hmotnost cyklisty i s kolem je 85,0 kg. Určete (a) velikost třecí síly, jíž působí povrch silnice na kolo, (b) velikost celkové síly, jíž působí silnice na kolo.

62Ú. Student o hmotnosti 67 kg se veze na ruském kole, které se otáčí rovnoměrně. Zdánlivá váha studenta v nejvyšším bodě dráhy je 560 N. (a) Jakou má student zdánlivou váhu v nejnižším bodě? (b) Jakou bude mít zdánlivou váhu v nejvyšším bodě, jestliže se rychlost kola zdvojnásobí?

63Ú. Auto projíždí plochou zatáčkou o poloměru $R = 220\,\mathrm{m}$ nejvyšší povolenou rychlostí o velikosti $v = 94{,}0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Jakou *celkovou* silou působí pasažér o hmotnosti 85,0 kg na sedadlo?

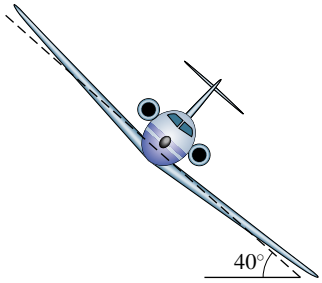
64Ú. Kámen uvázaný na vlákně obíhá ve svislé rovině po kružnici o poloměru R. Určete kritickou hodnotu velikosti rychlosti, kterou musí mít kámen při průchodu nejvyšším bodem dráhy, nemá-li se vlákno pokrčit.

65Ú. Pevnost šňůry je dána největší přípustnou velikostí tahové síly 40 N. Dítě přivázalo na šňůru kámen o hmotnosti 0,37 kg a roztočilo jej ve svislé rovině tak, aby kámen obíhal po kružnici o poloměru 1,0 m. Postupně zvyšovalo rychlost oběhu, až šňůra praskla. (a) Ve kterém bodě své trajektorie byl kámen v okamžiku, kdy se šňůra přetrhla? (b) Jak velká byla v tomto okamžiku jeho rychlost?

66Ú. Letadlo zatáčí rychlostí o velikosti 480 km/h po kružnici ležící ve vodorovné rovině. Křídla letadla svírají s vodorovnou rovinou úhel 40° (obr. 6.47). Jaký je poloměr zatáčky? Předpokládejte, že potřebná výsledná síla působící na letadlo je plně realizována aerodynamickou vztlakovou silou, která je kolmá ke křídlům letadla.

67Ú. Fregatka plachtí po vodorovné kruhové trajektorii. Úhel sklonu jejích křídel vzhledem k vodorovné rovině je přibližně 25°. Pták obletí celou kružnici za 13 s. (a) Určete rychlost jeho letu a (b) poloměr jeho trajektorie.

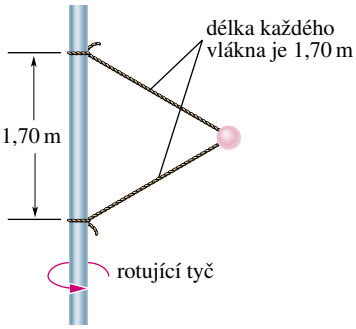
68Ú. Model letadla o hmotnosti 0,75 kg létá rovnoměrně po vodorovné kružnici ve výšce 18 m a vykoná 4,4 obletu na minutu. Model je připoután na šňůře délky 30 m, jejíž druhý konec je připevněn na zemi. Křídla letadélka jsou vodorovná, takže vztlaková síla vzduchu směřuje svisle vzhůru. (a) Jaké je zrychlení modelu? (b) Jakou silou je napínána šňůra? (c) Jaká je celková vztlaková síla působící na křídla letadla?



Obr. 6.47 Úloha 66

69Ú. Stará tramvaj projíždí neklopenou zatáčkou. Poloměr zatáčky je 30 stop a rychlost tramvaje má velikost 10 mil za hodinu (užijte převodní tabulky). Jaký úhel svírají volně visící kožená držadla se svislým směrem?

70Ú. Koule o hmotnosti 1,34 kg je pomocí dvou šňůr zanedbatelné hmotnosti připojena ke svislé rotující tyči (obr. 6.48). Šňůry jsou přivázány k tyči, jsou napjaté a tvoří dvě strany rovnostranného trojúhelníka. Tahová síla v horní šňůře je 35 N. (a) Nakreslete silový diagram koule. (b) Jakou silou je napínána spodní šňůra? (c) Určete výslednici sil působících na kouli v okamžiku zachyceném na obr. 6.48 a (d) rychlost koule.



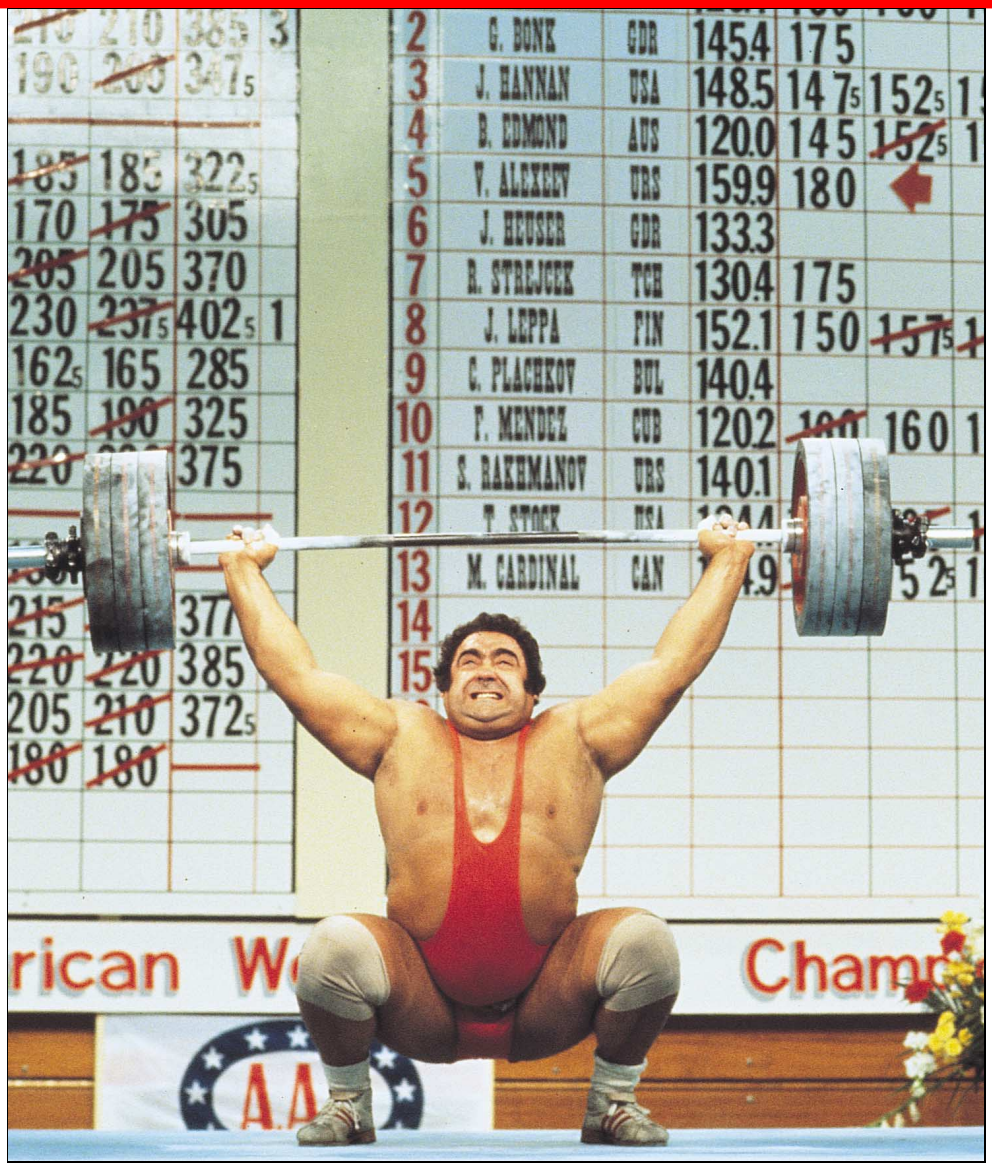
Obr. 6.48 Úloha 70

71Ú. Předpokládejme, že na těleso o hmotnosti standardního kilogramu by na rovníku při hladině moře působila tíhová síla přesně 9,8 N, kdyby se Země neotáčela. Ve skutečnosti Země rotuje, takže těleso se pohybuje po kružnici o poloměru $6{,}40{\cdot}10^6$ m (zemský poloměr) rychlostí o stálé velikosti 465 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Určete dostředivou sílu udržující standardní kilogram na této kruhové dráze. (b) Určete sílu, jíž působí standardní kilogramové těleso na pružinu siloměru, na který je zavěsíme (údaj na siloměru udává „zdánlivou váhu“ tělesa).

72Ú. Předpokládejme, že vesmírná stanice z otázky 12 má poloměr 500 m. (a) Jaká musí být velikost rychlosti v_s obvodové stěny stanice, má-li být zdánlivá tíhová síla působící na kosmonauta u stěny 300 N, váží-li kosmonaut na Zemi 600 N? (b) Určete zdánlivou tíhovou sílu působící na kosmonauta běžícího podél stěny rychlostí o velikosti 10 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (vzhledem ke stěně) ve směru souhlasném s $\boldsymbol{v}_s$.

7

Práce a kinetická energie



Při soutěži vzpěračů na olympijských hrách v roce 1976 byl celý sportovní svět doslova ohromen výkonem Vasilije Aleksejeva. Vzpěrač dokázal zvednout 562librovou činku (2 500 N) z podlahy nad hlavu do výšky asi 2 m. Téměř o dvacet let předtím mohli diváci žasnout nad výkonem Paula Andersona. Ten se sehnul pod nákladní plošinu vyrobenou ze dřeva vyztuženého ocelí, opřel si ruce o stoličku a zády nadzvedl asi o centimetr plošinu i s nákladem 6 270 liber (27 900 N)! Zdá se, že tyto dva výkony snad ani nelze srovnávat. A přece: kdo vykonal při zvedání předmětů větší práci, Aleksejev nebo Anderson?

7.1 KINETICKÁ ENERGIE

Pojem energie, jedné z klíčových veličin nejen mechaniky, ale celé fyziky, je velmi široký. Slovo *energie* užíváme v běžné řeči naprosto samozřejmě a do značné míry i volně. Definovat energii jako fyzikální veličinu však vůbec není snadné. Není prostě schůdné vyslovit nějakou jednoduchou definici, která by zahrnovala všechny aspekty tohoto pojmu. Je třeba jej postupně vybudovat, od jeho nejjednodušší podoby v mechanice až po úroveň zcela obecných úvah. Na samém začátku se spokojíme s velmi hrubou a neúplnou charakteristikou pojmu energie: **Energie** je skalární veličina, jejíž hodnota je určena stavem fyzikální soustavy (objektu). Pojem *stav* jsme v této formulaci použili v obvyklém významu: je to soubor podmínek, v nichž se objekt nachází, tj. soubor hodnot veličin (parametrů), jimiž je charakterizován. V této kapitole se soustředíme na jeden typ energie, **kinetickou energii** E_k, která souvisí s *pohybovým stavem* částice či tělesa. Pohybuje-li se těleso rychleji, má kinetickou energii větší. Je-li v klidu, je jeho kinetická energie nulová.

Kinetickou energii částice o hmotnosti m, která se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ velmi malou ve srovnání s rychlostí světla, definujeme vztahem

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(kinetická energie).} \qquad (7.1)$$

Kinetická energie nemůže být nikdy záporná, neboť m ani v^2 záporných hodnot nenabývají.

Tutéž definici můžeme použít i pro těleso nezanedbatelných rozměrů, pokud se všechny jeho části pohybují stejnou rychlostí $\boldsymbol{v}$, tj. konají *posuvný* neboli *translační* pohyb. (Těleso tedy nesmí rotovat, ani se deformovat.) Z hlediska definice kinetické energie se takové těleso chová jako částice. Někdy je nazýváme **bodovým objektem** a o jeho kinetické energii vypočtené podle vztahu (7.1) hovoříme jako o *translační* kinetické energii. Úvahy této kapitoly se týkají právě bodových objektů.

Jednotkou kinetické energie (a každého jiného typu energie) v soustavě SI je **joule** (J), pojmenovaný podle anglického vědce 18. století Jamese Prescotta Joula. Je odvozen přímo z jednotek hmotnosti a rychlosti:

$$1\,\text{joule} = 1\,\text{J} = 1\,\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}. \qquad (7.2)$$

Vhodnou jednotkou energie v oblasti atomové fyziky a fyziky subatomových částic je **elektronvolt** (eV):

$$1\,\text{elektronvolt} = 1\,\text{eV} = 1{,}60\cdot10^{-19}\,\text{J}. \qquad (7.3)$$

Nečastěji užívanými násobky elektronvoltu jsou kiloelektronvolt ($1\,\text{keV} = 10^3\,\text{eV}$), megaelektronvolt ($1\,\text{MeV} = 10^6\,\text{eV}$) a gigaelektronvolt ($1\,\text{GeV} = 10^9\,\text{eV}$).

PŘÍKLAD 7.1

Psal se rok 1896 a ve městě Waco v Texasu se odehrával neobvyklý experiment. Před zraky třiceti tisíc diváků jej předvedl pracovník železniční společnosti „Katy“ Wiliam Crush. Postavil dvě lokomotivy na opačných koncích trati dlouhé 6,4 km, roztopil jejich kotle a zablokoval záklopky strojů tak, aby zůstaly otevřené. Pak pustil lokomotivy plnou parou proti sobě (obr. 7.1). Čelný náraz měl nedozírné následky. Stovky lidí byly zraněny odletujícími úlomky, několik osob bylo dokonce usmrceno. Předpokládejme, že každá z lokomotiv vážila $1{,}2\cdot10^6$ N a jejich zrychlení při rozjezdu mělo konstantní velikost $0{,}26\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Jaká byla celková kinetická energie obou lokomotiv těsně před srážkou?



Obr. 7.1 Příklad 7.1. Následky srážky lokomotiv v roce 1896

ŘEŠENÍ: Abychom určili kinetickou energii lokomotivy, potřebujeme znát její hmotnost a velikost rychlosti těsně před srážkou. Pro stanovení velikosti rychlosti v můžeme použít vztahu (2.16), v němž položíme $v_x = v$, $v_{0x} = v_0$ a $a_x = a$:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Dosadíme $v_0 = 0$ a $x - x_0 = 3{,}2\cdot10^3$ m (polovina počáteční vzdálenosti lokomotiv) a dostaneme

$$v^2 = 0 + 2(0{,}26\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})(3{,}2\cdot10^3\,\text{m}),$$

tj.

$$v = 40{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 147\,\text{km/h}.$$

Hmotnost lokomotivy zjistíme vydělením její váhy (tj. tíhové síly, jíž na ni působí Země) tíhovým zrychlením:

$$m = \frac{(1{,}2\cdot10^6\,\text{N})}{(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})} = 1{,}22\cdot10^5\,\text{kg}.$$

Pomocí vztahu (7.1) nyní vypočteme celkovou kinetickou energii obou lokomotiv bezprostředně před srážkou:

$$E_k = 2(\tfrac{1}{2}mv^2) = (1{,}22\cdot 10^5\ \mathrm{kg})(40{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 = \\ = 2{,}0\cdot 10^8\ \mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato energie je ekvivalentní výbuchu asi 45 kg TNT.

7.2 PRÁCE

I když jsme při budování pojmu energie učinili zatím pouze první krůček (definovali jsme kinetickou energii částice), zdá se nám být nepochybné, že energie objektu v obecném smyslu musí mít jednu zcela přirozenou vlastnost: bude se měnit při jeho interakci s okolím. Stejně samozřejmě lze očekávat, že se bude měnit i energie okolí. Hovoříme o **výměně** nebo **přenosu** energie mezi objektem a jeho okolím. Přenos energie mezi jakoukoli fyzikální soustavou a jejím okolím může být zprostředkován silovým působením nebo tepelnou výměnou při různých dějích, které mohou v soustavě probíhat. (**Dějem** neboli procesem jednoduše rozumíme posloupnost stavových změn soustavy.) Výměnou tepla se budeme zabývat až v kapitole 19, zde si všimneme pouze dějů souvisejících se silovým působením a nazývaných souhrnně konáním **práce**.

Působíme-li na těleso určitou silou (silami) tak, že velikost jeho rychlosti přitom roste, roste i jeho kinetická energie ($= \frac{1}{2}mv^2$). A naopak, jestliže se těleso vlivem výsledné síly zpomaluje, klesá i jeho kinetická energie. V takových případech říkáme, že *síla koná na částici (soustavě částic či tělese) práci* W.

Formálnějším způsobem můžeme definovat práci takto: Kinetická energie částice se vlivem silového působení jejího okolí obecně mění. Říkáme, že síly působící na částici **konají práci**. Jestliže síla $\boldsymbol{F}$ zmenšila (nezměnila, zvětšila) kinetickou energii částice, říkáme, že vykonala kladnou (nulovou, zápornou) práci, případně říkáme, že síla práci koná (nekoná, spotřebovává) a pak udáváme už jen velikost práce v joulech, bez znaménka. (Je-li například $W = -6{,}0$ J, můžeme říci, že síla *spotřebovala* práci 6,0 J.)

V nejširším smyslu představuje „práce" tu část energie, kterou těleso získává prostřednictvím silového působení jeho okolí. Proces, při němž k takovému přenosu dochází, nazýváme obecně „konáním práce". Práce je skalární veličinou a měříme ji ve stejných jednotkách jako energii.

Slovo „přenos" může být někdy matoucí, není-li správně pochopena jeho souvislost se změnami energie tělesa a jeho okolí. Zatím známe přenos *hmoty* – substance, která se zachovává, nevzniká ani nezaniká a může se jen přemísťovat v prostoru. Hovoříme-li však o přenosu energie, neznamená to, že se na těleso nebo z tělesa do okolí přenáší nějaký „materiál". Analogii bychom mohli hledat spíše v proceduře elektronického převodu peněz mezi dvěma bankovními účty: údaj na jednom bankovním účtu vzroste, zatímco na druhém poklesne, a přitom se mezi účty nepřemisťuje nic „hmatatelného". Uvědomme si také, že slovo „práce" ve fyzice nemá svůj obvyklý význam, podle nějž je prací jakákoli tělesná či duševní činnost. Kdybychom například silně tlačili na stěnu, unaví nás udržovat svaly napjaté. V obvyklém smyslu tedy „pracujeme". Nedochází však ke změně energie stěny a to znamená, že síla našich svalů nekoná ve smyslu předchozí definice žádnou práci. (Ostatně stát delší dobu v pozoru je dost vyčerpávající, i když se člověk přitom navenek ani nepohne. *Fyzikální práce* je prostě něco jiného než *fyziologická námaha*.)

7.3 PRÁCE A KINETICKÁ ENERGIE

Pokusme se nyní formulovat vztah mezi prací, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykonala na studovaném objektu, a změnou jeho kinetické energie. Kinetickou energii částice či bodového objektu jsme již jednoduše a jasně definovali. Mění-li se velikost rychlosti částice, mění se podle této jednoduché definice i její kinetická energie. Ke změně rychlosti částice však nemůže dojít jinak než působením síly $\boldsymbol{F}$. Je proto zcela přirozené prohlásit, že změna kinetické energie částice ΔE_k je rovna práci W vykonané silou $\boldsymbol{F}$:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W \qquad \text{(vztah mezi prací a kinetickou energií).} \qquad (7.4)$$

Symbolem $E_{k,i}$ jsme označili počáteční kinetickou energii částice ($= \frac{1}{2}mv_0^2$) a $E_{k,f}$ představuje její výslednou kinetickou energii ($\frac{1}{2}mv^2$). Později uvidíme, že vztah (7.4), který vlastně *definuje* práci síly $\boldsymbol{F}$, lze přirozeně zobecnit i na případy, kdy na částici působí více sil. Znak $\boldsymbol{F}$ pak bude symbolizovat jejich výslednici.

Rovnost (7.4) můžeme přepsat ve tvaru

$$E_{k,f} = E_{k,i} + W. \qquad (7.5)$$

Vztahy (7.4) a (7.5) představují ekvivalentní formulace **vztahu mezi prací a kinetickou energií**.

Při jejich používání je třeba mít neustále na paměti, že byly formulovány pro částici nebo tzv. bodový objekt a jejich platnost je také tímto předpokladem omezena.

Zkusme posoudit, jakým způsobem může dojít k porušení jejich platnosti, budeme-li uvažovat o zcela libovolném tělese. U takového obecného objektu musíme především respektovat, že se jeho různé části pohybují různými rychlostmi. Stačí si představit rotující nebo deformující se

těleso. Pro výpočet jeho kinetické energie samozřejmě nemůžeme použít vztahu (7.1), ale musíme kinetické energie jednotlivých částí nějak sečíst. Poté, co se nám podaří kinetickou energii obecného tělesa vyjádřit, přijdou na řadu úvahy o jejích změnách prostřednictvím silového působení, tj. při procesu „konání práce“. Je zřejmé, že na tomto procesu se budou podílet nejen *vnější* síly, jimiž na těleso působí jeho okolí, ale i síly vzájemného působení jednotlivých částí tělesa, tzv. síly *vnitřní*. Později uvidíme, že práci vnitřních sil určitého typu (gravitačních, elektrostatických, sil pnutí apod.) je často možné a dokonce vhodné považovat za určitý typ energie tělesa. Vztahy (7.4) a (7.5) v takových případech platit nebudou, neboť práce W vykonaná *vnější* silou $\boldsymbol{F}$ přispěje nejen ke změně kinetické energie tělesa, ale i ke změně ostatních „druhů“ energie. Uveďme příklad: uvažujme o bruslaři, který se odstrčil od mantinelu, nebo o plavci, který se při obrátce odrazil od stěny bazénu. Bruslařovy dlaně či plavcova chodidla, na něž bezprostředně působí tlaková síla stěny (vnější síla), jsou během odrazu v klidu. Můžeme tedy usuzovat, že tlaková síla stěny nekoná práci. A přesto se kinetická energie sportovce změní. K této změně přispívá práce (vnitřních) sil svalstva, kterou můžeme interpretovat jako jeden z druhů energie tělesa. Podobná situace vzniká třeba při odrazu míče od stěny či od podlahy. Můžeme tedy vyslovit předběžný závěr:

Mění-li se vlivem působící síly i energie tělesa jiného typu než kinetická, pak vztahy (7.4) *a* (7.5) *nemusejí platit.*

Samostatnou úvahu si zaslouží případy, kdy na pohybující se těleso působí síly tření. Právem si můžeme klást otázku, zda v takových případech zůstanou vztahy (7.4) a (7.5) v platnosti, či nikoliv. Z experimentu totiž víme, že se těleso při působení třecích sil zahřívá. Se vzrůstem jeho teploty celkem přirozeně spojujeme další druh jeho energie, tzv. vnitřní energii. Tato veličina velmi úzce souvisí s mikrostrukturou tělesa, konkrétně s náhodným pohybem jeho atomů či molekul a jejich vzájemnými vazbami. O mechanismu třecích sil již leccos víme z kap. 6, a tak si umíme představit, že mikroskopické narušení materiálu troucích se ploch je doprovázeno změnami či uvolněním vazební energie mezi povrchovými atomy či molekulami a odpovídajícím zvýšením jejich kinetické energie. V makroskopickém měřítku se to projeví jako zvýšení teploty tělesa. Pro naše další úvahy zahrnující působení sil tření je však podstatné, že i přes zdánlivé komplikace s vnitřní energií můžeme vztahů (7.4) a (7.5) využívat. Mechanismus třecích sil sice souvisí výhradně s mikroskopickou strukturou objektů, avšak nakonec je přece jen možné vyjádřit třecí síly mezi nimi *makroskopickým* silovým zákonem $F_\mathrm{d} = f_\mathrm{d} N$, obsahujícím empiricky definovaný koeficient tření.

O dynamické třecí síle v souvislosti se změnami energie budeme podrobněji uvažovat v kap. 8 a o vnitřních přeměnách energie se zmíníme v kap. 9.

KONTROLA 1: Částice se pohybuje po ose x. Rozhodněte, zda se její kinetické energie zvýší, sníží, nebo se zachová, změní-li se rychlost částice (a) z $-3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na $-2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, (b) z $-2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na $2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (c) Pro každou z uvedených situací rozhodněte, zda je práce vykonaná silami působícími na částici kladná, záporná, nebo nulová.

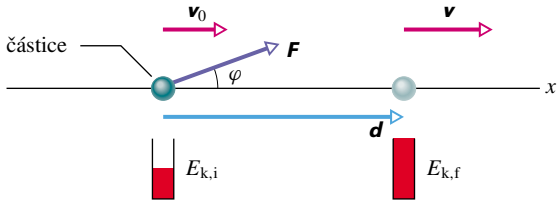
Práce síly

Uvedeme nyní do souvislosti změnu kinetické energie objektu ΔE_k se silou $\boldsymbol{F}$, která tuto změnu způsobila. Všimneme si nejprve situace, kdy sledovaným objektem je částice. Jediným typem energie, který tomuto nejjednoduššímu objektu přísluší, je energie kinetická. Na obr. 7.2 se částice pohybuje podél osy x po vodorovné dokonale hladké podlaze. Působí na ni stálá síla $\boldsymbol{F}$, která svírá s její trajektorií úhel φ. Zrychlení částice podél osy x je dáno vodorovnou složkou této síly $F\cos\varphi$. Rychlost částice a tedy i její kinetická energie se mění. Počáteční rychlost označme $\boldsymbol{v}_0$. Působení síly sledujeme v průběhu posunutí částice o vektor $\boldsymbol{d}$. Velikost v výsledné rychlosti částice $\boldsymbol{v}$ lze určit pomocí vztahu (2.16)

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d. \tag{7.6}$$

Vynásobením obou stran rovnice (7.6) hmotností částice m a úpravou dostaneme

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = ma_x d. \tag{7.7}$$



Obr. 7.2 Na částici působí stálá síla $\boldsymbol{F}$, která svírá s vektorem $\boldsymbol{d}$ posunutí částice úhel φ. Rychlost částice se změní z $\boldsymbol{v}_0$ na $\boldsymbol{v}$. „Měrka kinetické energie“ ukazuje, že došlo ke změně kinetické energie částice z hodnoty $E_\mathrm{k,i}$ na hodnotu $E_\mathrm{k,f}$.

Na levé straně rovnosti (7.7) vystupuje rozdíl kinetických energií $E_\mathrm{k,f}$ $(= \frac{1}{2}mv^2)$ a $E_\mathrm{k,i}$ $(= \frac{1}{2}mv_0^2)$ příslušných koncovému a počátečnímu pohybovému stavu částice. Tento rozdíl představuje změnu kinetické energie částice vyvolanou působením síly $\boldsymbol{F}$ podél úseku trajektorie

spojujícího počáteční a koncovou polohu částice. Náhradou součinu ma_x výrazem $F\cos\varphi$ (v souladu s platností druhého Newtonova zákona) dostaneme

$$\Delta E_k = Fd\cos\varphi. \tag{7.8}$$

Porovnáme-li nyní vztahy (7.8) a (7.4), vidíme, že pravá strana rovnosti (7.8) vyjadřuje práci W, kterou vykonala síla $\boldsymbol{F}$ při přemístění částice z počátečního do koncového stavu. Můžeme tedy psát

$$W = Fd\cos\varphi \quad \text{(práce konstantní síly).} \tag{7.9}$$

Je-li úhel φ menší než 90°, je práce W kladná a kinetická energie částice *roste*. Je-li φ větší než 90° (až do 180°), je práce W záporná a kinetická energie částice klesá. (Pro $\varphi = 90°$ je $W = 0$ a kinetická energie částice se nemění.) Síla $\boldsymbol{F}$ samozřejmě není v uvažovaném případě jedinou silou působící na částici. Pohyb částice je totiž přímočarý a jeho směr není shodný se směrem síly $\boldsymbol{F}$. Je proto zřejmé, že na částici nutně působí ještě alespoň jedna další síla, která kompenzuje průmět síly $\boldsymbol{F}$ do osy y. Celkovou práci dvou kompenzujících se sil však můžeme zcela jistě pokládat za nulovou.

Ze vztahu (7.9) je zřejmé, že kromě jednotky joule můžeme v soustavě SI používat také jednotku Newton·metr (N·m). Odpovídající jednotkou v britském systému jednotek je stopa·libra (ft·lb). Vztah (7.2) tedy můžeme ještě doplnit takto:

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}} = 1\,\mathrm{N{\cdot}m} = 0{,}738\,\mathrm{ft{\cdot}lb}. \tag{7.10}$$

Pravá strana rovnosti (7.9) představuje výraz pro skalární součin $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d}$ vektorů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$. Vektorový zápis vztahu (7.9) má tedy tvar

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d} \quad \text{(práce konstantní síly).} \tag{7.11}$$

(V tomto místě textu jsme poprvé použili skalárního součinu. Pro zopakování je vhodné připomenout si čl. 3.7.) Vztah (7.11) je zvláště užitečný, jsou-li vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$ zapsány pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic.

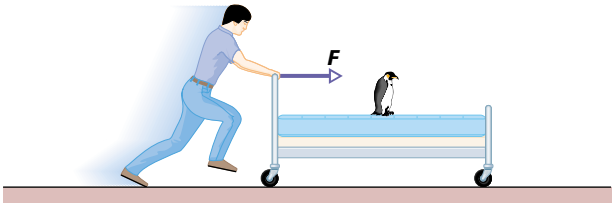
Vztahy (7.9) a (7.11) vyjadřují práci *konstantní* síly $\boldsymbol{F}$ působící na *částici* nebo *bodový objekt*. Jejich platnost však lze rozšířit i na případ konstantní síly působící na libovolné těleso, budeme-li symbolem $\boldsymbol{d}$ rozumět posunutí *působiště* síly $\boldsymbol{F}$. Práce síly $\boldsymbol{F}$ vykonaná na tělese pak bude opět dána vztahy (7.9), resp. (7.11), nebude však již obecně rovna změně kinetické energie uvažovaného tělesa.

Zdůrazněme ještě jednu důležitou možnost zobecnění vztahů (7.9) a (7.11). Přestože jsme je odvodili pro částici, která se pohybuje přímočaře, zůstanou v případě konstantní síly v platnosti i při pohybu po libovolné křivce. Budeme se o tom moci přesvědčit v čl. 7.5, kde se budeme zabývat výpočtem práce zcela obecně.

Úvahy týkající se práce síly působící na těleso můžeme prozatím shrnout takto:

> Práce stálé síly $\boldsymbol{F}$ působící na dané těleso v bodě, jehož posunutí je $\boldsymbol{d}$, je dána vztahy (7.9) a (7.11). V případě, že tělesem je částice nebo bodový objekt, je tato práce rovna změně jeho kinetické energie.

Na obr. 7.3 je například vyobrazen student, jak pohání postel při školních závodech o nejrychlejšího běžce s postelí. Vyjadřují vztahy (7.9) a (7.11) práci vykonanou silou, jíž působí student na postel, je-li tato síla konstantní? Uvedených vztahů pro výpočet práce samozřejmě použít můžeme. Snadno se přesvědčíme, že větší část této práce, ne však všechna, skutečně přispívá ke změně kinetické energie postele i s tučňákem, který se na ní veze. Jistá malá část je však potřebná pro urychlení rotačního pohybu koleček. Jestliže považujeme tento příspěvek za zanedbatelný, můžeme postel považovat za bodový objekt a použít i vztahů (7.4) a (7.5).



Obr. 7.3 Závody s postelemi. Pro výpočet práce, kterou vykoná student, stačí nahradit postel hmotným bodem.

KONTROLA 2: Obrázek ukazuje čtyři možnosti působení síly na kostku, která klouže po vodorovné dokonale hladké podložce směrem vpravo. Velikosti sil jsou stejné, různé orientace jsou schematicky vyznačeny v obrázcích. Uspořádejte obrázky podle práce (sestupně), kterou působící síla vykoná při posunutí kostky o vzdálenost d.



Práce vykonaná několika silami

Působí-li na částici několik sil $\boldsymbol{F}_j$, jejichž výslednice je konstantní, můžeme jejich celkovou práci určit tak, že ve

vztahu (7.11) nahradíme výraz $\boldsymbol{F}$ touto výslednicí $\sum_j \boldsymbol{F}_j$, tj.

$$\sum_j \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \dots , \qquad (7.12)$$

kde $\boldsymbol{F}_j$ jsou jednotlivé síly.

$$W = \left(\sum_j \boldsymbol{F}_j\right) \cdot \boldsymbol{d} \qquad (7.13)$$

je tedy práce vykonaná výslednicí sil při posunutí $\boldsymbol{d}$ částice. Jsou-li konstantní i jednotlivé síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, … , můžeme vztah (7.13) přepsat pomocí rov. (7.12) ve tvaru

$$W = \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_3 \cdot \boldsymbol{d} + \dots = \\ = W_1 + W_2 + W_3 + \dots \quad \text{(celková práce)}. \qquad (7.14)$$

Tento vztah vyjadřuje skutečnost, že celková práce vykonaná na částici je součtem prací vykonaných jednotlivými silami, které na ni působí. Vztah (7.4) nyní můžeme přepsat takto:

$$\Delta E_\mathrm{k} = E_{\mathrm{k,f}} - E_{\mathrm{k,i}} = W_1 + W_2 + W_3 + \dots . \qquad (7.15)$$

Změna ΔE_k kinetické energie částice je tedy rovna celkové práci vykonané všemi silami, které na částici působí.

PŘÍKLAD 7.2

Na obr. 7.4a jsou nakresleni dva průmysloví špioni, kteří sunou sejf o hmotnosti 225 kg po přímce do vzdálenosti 8,5 m k přistavenému nákladnímu autu. (Zpočátku byl sejf v klidu.) Špion 001 působí tlakovou silou $\boldsymbol{F}_1$ o velikosti 12,0 N, která svírá s vodorovnou rovinou úhel 30° a míří dolů. Špion 002 působí na sejf tahovou silou $\boldsymbol{F}_2$ o velikosti 10,0 N směrem vzhůru pod úhlem 40° vzhledem k vodorovné rovině. Sejf klouže po podlaze bez tření.

(a) Jakou celkovou práci vykonají síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ při posunutí sejfu o 8,5 m?

ŘEŠENÍ: Na obr. 7.4b je silový diagram sil zkonstruovaný pro sejf, který aproximujeme částicí. Celkovou práci sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ určíme tak, že vypočteme práci každé z nich a získané hodnoty sečteme. Podle vztahu (7.9) je práce síly $\boldsymbol{F}_1$ rovna

$$W_1 = F_1 d \cos\varphi_1 = (12{,}0\,\mathrm{N})(8{,}50\,\mathrm{m})\cos 30^\circ = \\ = 88{,}33\,\mathrm{J},$$

práce síly $\boldsymbol{F}_2$ je

$$W_2 = F_2 d \cos\varphi_2 = (10{,}0\,\mathrm{N})(8{,}50\,\mathrm{m})\cos 40^\circ = 65{,}11\,\mathrm{J}.$$

Podle (7.14) je celková práce W dána jejich součtem

$$W = W_1 + W_2 = 88{,}33\,\mathrm{J} + 65{,}11\,\mathrm{J} = \\ = 153{,}4\,\mathrm{J} \doteq 153\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při posunutí sejfu o 8,5 m tedy špioni vykonají práci 153 J. O tuto hodnotu se zvýší kinetická energie sejfu.

(b) Jakou práci W_g vykoná při posunutí $\boldsymbol{d}$ tíhová síla $\boldsymbol{G}$ a jaká je práce W_N normálové síly $\boldsymbol{N}$, jíž působí na sejf podlaha?

ŘEŠENÍ: Síly $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{N}$ jsou kolmé k posunutí. Podle vztahu (7.9) je

$$W_\mathrm{g} = mgd \cdot \cos 90^\circ = mgd \cdot 0 = 0 \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$W_N = Nd \cdot \cos 90^\circ = Nd \cdot 0 = 0.$$

Práce vykonaná každou ze sil $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{N}$ je nulová. Působení těchto sil při posunutí sejfu o vektor $\boldsymbol{d}$ nevede ke změně jeho kinetické energie.

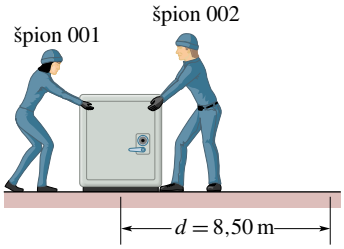
(c) Sejf byl zpočátku v klidu. Jak velká je jeho rychlost na konci posunutí?

ŘEŠENÍ: Změna velikosti rychlosti sejfu souvisí se změnou jeho kinetické energie, a tedy i s celkovou prací vykonanou silami, které na sejf působí. Spojením vztahů (7.4) a (7.1) dostaneme

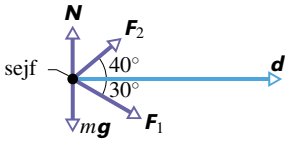
$$W = E_{\mathrm{k,f}} - E_{\mathrm{k,i}} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2.$$

Počáteční rychlost je nulová, celková práce W je rovna 153 J. Řešením předchozí rovnice vzhledem k neznámé v dostaneme po dosazení zadaných údajů

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(153{,}4\,\mathrm{J})}{(225\,\mathrm{kg})}} = \\ = 1{,}17\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



(a)

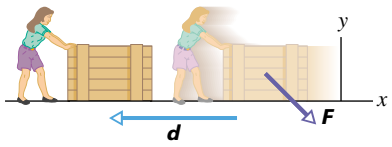


(b)

Obr. 7.4 Příklad 7.2. (a) Dva špioni posouvají sejf. (b) Silový diagram s vyznačením posunutí $\boldsymbol{d}$.

PŘÍKLAD 7.3

Ujíždějící bedna švestek klouže po vodorovné podlaze směrem k ženě, která se ji snaží zbrzdit tak, že ji odtlačuje silou $\boldsymbol{F} = (2{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-6{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$ a ustupuje před ní (obr. 7.5). Bedna se při tom posune o vektor $\boldsymbol{d} = (-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i}$.



Obr. 7.5 Příklad 7.3. Brzdění bedny silou $\boldsymbol{F}$ při posunutí $\boldsymbol{d}$.

(a) Jakou práci vykonala síla $\boldsymbol{F}$ při posunutí $\boldsymbol{d}$?

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (7.11) je hledaná práce rovna

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d} = [(2{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-6{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}]\cdot[(-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i}].$$

Ze všech skalárních součinů navzájem kolmých jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ jsou pouze tři nenulové, konkrétně $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$ (viz článek 3.7). Dostáváme tedy

$$W = (2{,}0)(-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + (-6{,}0\,\mathrm{N})(-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = \\ = (-6{,}0\,\mathrm{J})(1) + 0 = -6{,}0\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Síla $\boldsymbol{F}$ vykoná práci $-6{,}0\,\mathrm{J}$ a kinetická energie bedny o $6{,}0\,\mathrm{J}$ klesne.

(b) Jaká je kinetická energie bedny na konci posunutí, měla-li na začátku hodnotu $10\,\mathrm{J}$?

ŘEŠENÍ: Užitím vztahu (7.5) pro hodnoty $E_{\mathrm{k,i}} = 10\,\mathrm{J}$ a $W = -6{,}0\,\mathrm{J}$ dostaneme

$$E_{\mathrm{k,f}} = E_{\mathrm{k,i}} + W = 10\,\mathrm{J} + (-6{,}0\,\mathrm{J}) = 4{,}0\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

7.4 PRÁCE TÍHOVÉ SÍLY

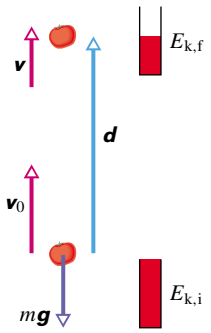
Nyní se pokusíme zjistit, jakou práci koná síla zcela určitého typu. Konkrétně půjde o sílu tíhovou. Rajské jablíčko o hmotnosti m na obr. 7.6, které lze považovat za bodový objekt, vyhodíme svisle vzhůru počáteční rychlostí o velikosti v_0 vzhledem k Zemi. Má tedy počáteční kinetickou energii $E_{\mathrm{k,i}} = \frac{1}{2}mv_0^2$. Během výstupu se jeho pohyb působením tíhové síly $m\boldsymbol{g}$ zpomaluje a kinetická energie klesá. Experiment potvrzuje, že je-li tíhová síla jedinou silou, která na jablíčko působí (odporová síla vzduchu je nějakým způsobem eliminována), pak jedině práce tíhové síly přispívá ke změně jeho kinetické energie. Abychom tuto práci W_{g} určili, dosadíme za F do vztahu (7.9) velikost tíhové síly mg. Pak

$$W_{\mathrm{g}} = mgd\cos\varphi \qquad \text{(práce tíhové síly).} \qquad (7.16)$$

Jestliže sledovaná částice stoupá, jako je tomu v našem případě, míří tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ proti posunutí $\boldsymbol{d}$ (obr. 7.6). Pak je $\varphi = 180^\circ$ a

$$W_{\mathrm{g}} = mgd\cdot\cos 180^\circ = mgd\cdot(-1) = -mgd. \qquad (7.17)$$

Znaménko minus signalizuje, že kinetická energie stoupající částice klesne působením tíhové síly po dráze d o hodnotu mgd. To je zcela v souhlasu se skutečností, že se pohyb částice zpomaluje.



Obr. 7.6 Rajské jablíčko o hmotnosti m (bodový objekt) je vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$. Vlivem tíhové síly $m\boldsymbol{g}$ se během posunutí $\boldsymbol{d}$ jeho pohyb zpomalí na rychlost $\boldsymbol{v}$. „Energiová odměrka“ znázorňuje výslednou změnu kinetické energie jablíčka z počáteční hodnoty $E_{\mathrm{k,i}} = \frac{1}{2}mv_0^2$ na hodnotu $E_{\mathrm{k,f}} = \frac{1}{2}mv^2$.

Poté, co částice dosáhla maximální výšky a padá zpět dolů, je úhel φ mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a posunutím $\boldsymbol{d}$ nulový. Pak platí

$$W_{\mathrm{g}} = mgd\cdot\cos(0^\circ) = mgd\cdot(+1) = +mgd. \qquad (7.18)$$

Znaménko plus nás informuje, že nyní kinetická energie objektu vzrostla. Výsledek je opět v souhlasu se skutečností, neboť velikost rychlosti tělesa při pádu roste. (Ve skutečnosti se přesvědčíme v kapitole 8, že při stoupání či pádu tělesa v tíhovém poli Země nestačí brát v úvahu změny kinetické energie jen tělesa samotného, nýbrž je třeba uvažovat o soustavě těleso + Země. Bez přítomnosti Země by slova „stoupání“ a „klesání“ samozřejmě pozbyla významu.)

Práce při stoupání a klesání tělesa

Představme si nyní, že na bodový objekt působíme silou $\boldsymbol{F}$ a zvedáme jej. Při jeho posunutí směrem vzhůru koná síla $\boldsymbol{F}$ kladnou práci W_a, zatímco tíhová síla koná práci zápornou, W_{g}. To znamená, že síla $\boldsymbol{F}$ se „snaží“ zvýšit kinetickou energii objektu, působení síly tíhové ji naopak snižuje.

Vztah (7.15) umožňuje vyjádřit změnu kinetické energie tělesa způsobenou oběma uvažovanými silami:

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k,f}} - E_{\mathrm{k,i}} = W_a + W_{\mathrm{g}}, \qquad (7.19)$$

kde $E_{\mathrm{k,f}}$, resp. $E_{\mathrm{k,i}}$ je kinetická energie tělesa na konci, resp. na počátku posunutí. Tento vztah platí i v případě, že těleso klesá. Působením tíhové síly se však nyní kinetická energie tělesa zvyšuje, zatímco působení síly $\boldsymbol{F}$ vede k jejímu poklesu (síla $\boldsymbol{F}$ směřuje stále vzhůru).

Obvyklá situace nastává, je-li objekt v klidu na začátku i na konci posunutí (například zvedneme-li knihu z podlahy a položíme ji na polici). Pak jsou hodnoty $E_{\mathrm{k,i}}$ i $E_{\mathrm{k,f}}$ nulové a vztah (7.19) se zjednoduší do tvaru

$$W_a + W_{\mathrm{g}} = 0,$$

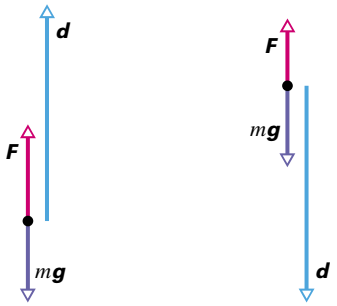
tj.

$$W_a = -W_{\mathrm{g}}. \qquad (7.20)$$

Stejný výsledek dostaneme i při nenulových, avšak shodných hodnotách $E_{\mathrm{k,i}}$ a $E_{\mathrm{k,f}}$. Má-li tedy těleso na počátku i na konci posunutí stejnou kinetickou energii, je práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při tomto posunutí rovna záporně vzaté práci vykonané tíhovou silou. Síla $\boldsymbol{F}$ vyvolá stejně velkou změnu kinetické energie tělesa jako síla tíhová, avšak opačného znaménka. Užitím (7.16) můžeme vztah (7.20) přepsat do tvaru

$$W_a = -mgd\cos\varphi \qquad \begin{array}{l}\text{(práce při vzestupu a pádu}\\ \text{tělesa při } E_{\mathrm{k,i}} = E_{\mathrm{k,f}}\text{),}\end{array} \qquad (7.21)$$

přičemž φ je úhel mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a posunutím $\boldsymbol{d}$. Míří-li vektor posunutí svisle vzhůru (obr. 7.7a), je $\varphi = 180^\circ$ a práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ je mgd. Při svislém posunutí směrem dolů (obr. 7.7b) je $\varphi = 0^\circ$ a práce této síly je $-mgd$.



(a) (b)

Obr. 7.7 Na těleso působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ a síla $\boldsymbol{F}$. (a) Těleso stoupá. Jeho posunutí $\boldsymbol{d}$ svírá úhel $\varphi = 180^\circ$ s tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$. Síla $\boldsymbol{F}$ koná kladnou práci. (b) Těleso klesá. Úhel mezi posunutím $\boldsymbol{d}$ a tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ je $\varphi = 0^\circ$. Síla $\boldsymbol{F}$ koná zápornou práci.

Vztahy (7.20) a (7.21) jsou použitelné pro stoupající i klesající těleso, které je na počátku i na konci posunutí v klidu. Jejich platnost je nezávislá na konkrétním průběhu velikosti síly $\boldsymbol{F}$ během pohybu. Když například Vasilij Alexejev zvedal nad hlavu rekordní činku 2 500 N, musela se síla, kterou na ni během tohoto úkonu působil, výrazně měnit. Činka ovšem byla na začátku i na konci celé akce v klidu. Vzpěrač tedy nepochybně vykonal práci danou vztahy (7.20) a (7.21), kde mg představuje zátěž, kterou zvedl, a d velikost jejího posunutí.



Pomocí postroje zvedá Paul Anderson 30 osob o celkové váze 2 400 lb.

PŘÍKLAD 7.4

Ještě jednou se vraťme k výkonům Vasilije Aleksejeva a Paula Andersona.

(a) Aleksejev zvedl činku o váze 2 500 N do výšky 2,0 m. Jakou práci přitom vykonala tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ působící na činku?

ŘEŠENÍ: Velikost tíhové síly $m\boldsymbol{g}$ je mg. Úhel φ mezi vektorem tíhové síly a vektorem posunutí $\boldsymbol{d}$ má hodnotu 180°. Ze vztahu (7.16) vyplývá, že práce tíhové síly je

$$W_{\mathrm{g}} = mgd\cos\varphi = (2\,500\,\mathrm{N})(2{,}0\,\mathrm{m})\cos 180^\circ = \\ = -5\,000\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou práci vykonala síla, jíž působil na činku Aleksejev?

ŘEŠENÍ: Protože byla činka v klidu na počátku i na konci úkonu, můžeme použít vztah (7.20) a dostaneme

$$W_{\mathrm{VA}} = -W_{\mathrm{g}} = +5\,000\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jakou práci vykonala síla, kterou působil Aleksejev na činku, když ji držel nad hlavou?

ŘEŠENÍ: Když vzpěrač držel činku nad hlavou, byla v klidu. Její posunutí bylo nulové a podle (7.9) byla tedy nulová i práce působící síly (i když držet činku bylo jistě velmi únavné).

(d) Jakou práci vykonala síla, jíž působil Paul Anderson při zvednutí zátěže 27 900 N o 1 cm?

ŘEŠENÍ: Užitím vztahu (7.21) a hodnot $mg = 27\,900\,\mathrm{N}$ a $d = 1{,}0\,\mathrm{cm}$ dostaneme

$$W_{\mathrm{PA}} = -mgd\cos\varphi = -mgd\cos 180^\circ = \\ = -(27\,900\,\mathrm{N})(0{,}01\,\mathrm{m})(-1) = 280\,\mathrm{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Andersonův výkon vyžadoval sice obrovskou sílu, ale vykonaná práce byla díky velmi malému posunutí nákladu pouhých 280 J.

PŘÍKLAD 7.5

Bedna, která byla zpočátku v klidu, je tažena na laně směrem vzhůru po dokonale hladké šikmé rampě. Pohyb tažného lana se zastavil poté, co bedna urazila vzdálenost $L = 5{,}70\,\mathrm{m}$ a zvedla se tak do výšky $h = 2{,}50\,\mathrm{m}$ nad počáteční úroveň (obr. 7.8a).

(a) Jakou práci přitom vykonala tíhová síla?

ŘEŠENÍ: Hledanou práci vypočteme podle vztahu (7.16) pro velikost posunutí $d = L$. Úhel mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a posunutím je $\theta + 90^\circ$ (viz silový diagram na obr. 7.8b). Dostáváme

$$W_{\mathrm{g}} = mgL\cos(\theta + 90^\circ) = -mgL\sin\theta.$$

Z obr. 7.8a vidíme, že $L\sin\theta$ je právě výška h, o kterou se bedna zvedla. Je tedy

$$W_{\mathrm{g}} = -mgh. \qquad (7.22)$$

Znamená to, že práce vykonaná tíhovou silou závisí pouze na posunutí bedny ve svislém směru, zatímco vodorovné posunutí není rozhodující. (K tomuto závěru se ještě vrátíme v kapitole 8.) Dosazením zadaných údajů do rov. (7.22) dostaneme

$$W_{\mathrm{g}} = -(15{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}50\,\mathrm{m}) = \\ = -368\,\mathrm{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou práci vykonala tahová síla lana $\boldsymbol{T}$?

ŘEŠENÍ: Bedna je na začátku i na konci posunutí v klidu, změna její kinetické energie ΔE_{k} je tedy nulová. Podle (7.15) je pak

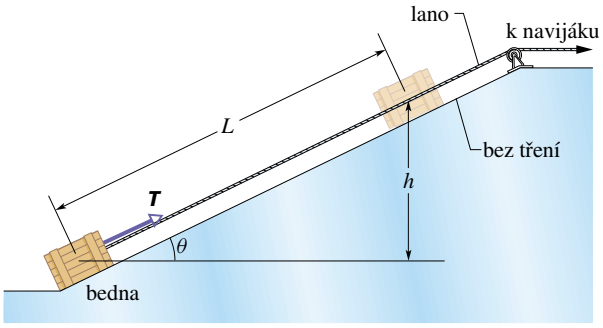
$$\Delta E_{\mathrm{k}} = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots. \qquad (7.23)$$

Vidíme, že celková práce všech sil působících na bednu musí být nulová. Kromě tíhové síly působí na bednu pouze dvě další síly: tahová síla lana $\boldsymbol{T}$ a normálová síla podložky $\boldsymbol{N}$. Síla $\boldsymbol{N}$ je kolmá k posunutí a proto nekoná práci. Označíme-li W_T práci tahové síly lana, dostáváme užitím vztahu (7.23)

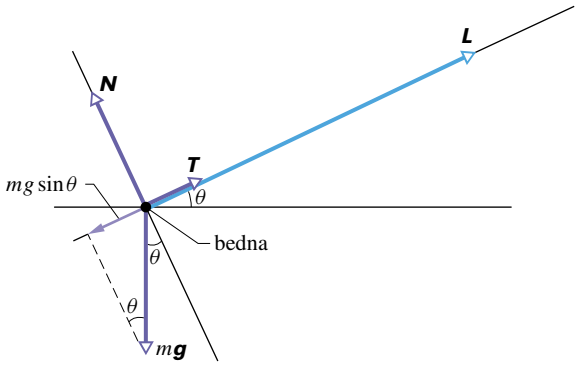
$$0 = W_{\mathrm{g}} + W_T.$$

Dosazením $W_{\mathrm{g}} = -368\,\mathrm{J}$ získáme hledanou práci W_T:

$$W_T = 368\,\mathrm{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$



(*a*)



(*b*)

Obr. 7.8 Příklad 7.5. (a) Bedna je tažena po dokonale hladké rampě. Tahová síla lana je s rampou rovnoběžná. (b) Silový diagram bedny s vyznačením všech sil, které na ni působí. Vyznačeno je i posunutí $\boldsymbol{L}$.

KONTROLA 3: Představme si, že jsme bednu z příkladu 7.5 vytáhli do stejné výšky h, avšak po delší rampě. (a) Je práce síly $\boldsymbol{T}$ nyní větší, menší, či stejná jako v př. 7.5? (b) Rozhodněte, zda je velikost síly $\boldsymbol{T}$ větší, menší, či stejná jako v př. 7.5.

PŘÍKLAD 7.6

Kabina výtahu o hmotnosti 500 kg klesá rychlostí o velikosti $v_{\mathrm{i}} = 4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Tažné lano začne najednou klouzat a pokles kabiny se urychluje, přičemž $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}/5$ (obr. 7.9a).

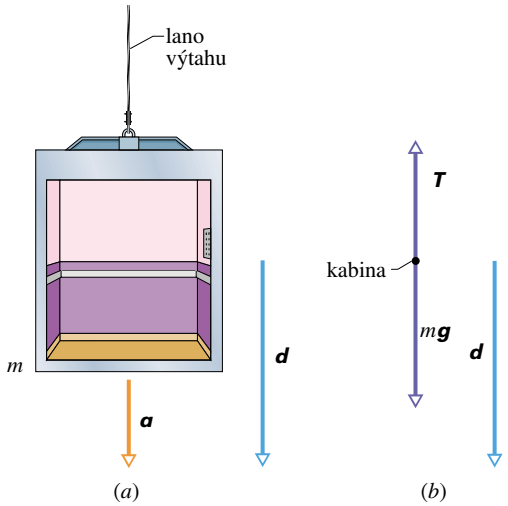
(a) Jakou práci vykoná tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ působící na padající kabinu při posunutí o velikosti $d = 12\,\mathrm{m}$?

ŘEŠENÍ: Silový diagram kabiny při poklesu o 12 m je znázorněn na obr. 7.9b. Úhel mezi posunutím $\boldsymbol{d}$ a tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ je 0°. Pomocí rov. (7.16) dostaneme

$$W_1 = mgd\cos 0^\circ = (500\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(12\,\mathrm{m})(1) = \\ = 5{,}88{\cdot}10^4\,\mathrm{J} \doteq 5{,}9{\cdot}10^4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou práci vykoná při témže posunutí kabiny tahová síla lana?

ŘEŠENÍ: Situace se liší od př. 7.4 a 7.5 tím, že kinetická energie kabiny na začátku a na konci posunutí není stejná. Rovnic (7.20) a (7.21) nelze použít: práce vykonaná silou $\boldsymbol{T}$ není rovna záporně vzaté práci tíhové síly.



Obr. 7.9 Příklad 7.6. Kabina výtahu, klesající rychlostí o velikosti v_i, se najednou začne urychlovat směrem dolů. (a) Kabina se posune o vektor $\boldsymbol{d}$ se zrychlením $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}/5$. (b) Silový diagram kabiny s vyznačením posunutí.

Práci W_2 síly $\boldsymbol{T}$ musíme určit pomocí vztahu (7.9) ($W = Fd\cos\varphi$). Nejprve zjistíme velikost síly $\boldsymbol{T}$. Užitím druhého Newtonova zákona pro pohyb kabiny dostáváme

$$\sum_j F_j = T - mg = ma.$$

Protože zrychlení $\boldsymbol{a}$ má velikost $g/5$ a míří dolů, je

$$T = m(g + a) = m(g - g/5) = \\ = (500\,\mathrm{kg})(\tfrac{4}{5})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = 3\,920\,\mathrm{N}.$$

Pro výpočet práce použijeme nyní vztahu (7.9). Úhel mezi silou $\boldsymbol{T}$ a posunutím kabiny $\boldsymbol{d}$ je 180°. Síla $\boldsymbol{T}$ má velikost 3 920 N, velikost posunutí je 12 m. Dostáváme

$$W_2 = Td\cos 180^\circ = (3\,920\,\mathrm{N})(12\,\mathrm{m})(-1) = \\ = -4{,}70{\cdot}10^4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaká je celková práce všech sil působících na kabinu?

ŘEŠENÍ: Podle (7.14) je celková práce algebraickým součtem prací obou sil:

$$W = W_1 + W_2 = (5{,}88{\cdot}10^4\,\mathrm{J}) - (4{,}70{\cdot}10^4\,\mathrm{J}) = \\ = 1{,}18{\cdot}10^4\,\mathrm{J} \doteq 1{,}2{\cdot}10^4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Během posunutí kabiny o 12 m se její kinetická energie zvýší o $1{,}2{\cdot}10^4$ J.

Práci W můžeme určit i jinak. Užitím druhého Newtonova zákona zjistíme nejprve výslednici sil působících na kabinu:

$$\sum F = ma = (500\,\mathrm{kg})\left(-\frac{9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}{5}\right) = -980\,\mathrm{N}.$$

Výslednice míří dolů a svírá s posunutím úhel 0°. Práce, kterou vykoná, je

$$W = (980\,\mathrm{N})(12\,\mathrm{m})\cos 0^\circ = \\ = 1{,}18{\cdot}10^4\,\mathrm{J} \doteq 1{,}2{\cdot}10^4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jaká je kinetická energie kabiny na konci posunutí?

ŘEŠENÍ: Kinetická energie na začátku posunutí, tj. při rychlosti o velikosti $v_\mathrm{i} = 4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, je

$$E_{\mathrm{k,i}} = \tfrac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2 = \tfrac{1}{2}(500\,\mathrm{kg})(4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 = 4\,000\,\mathrm{J}.$$

Kinetická energie $E_{\mathrm{k,f}}$ na konci posunutí je dána vztahem (7.5):

$$E_{\mathrm{k,f}} = E_{\mathrm{k,i}} + W = 4\,000\,\mathrm{J} + 1{,}18{\cdot}10^4\,\mathrm{J} = \\ = 1{,}58{\cdot}10^4\,\mathrm{J} \doteq 1{,}6{\cdot}10^4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(e) Jaká je velikost rychlosti v_f na konci posunutí?

ŘEŠENÍ: Z (7.1) dostaneme

$$E_{\mathrm{k,f}} = \tfrac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2,$$

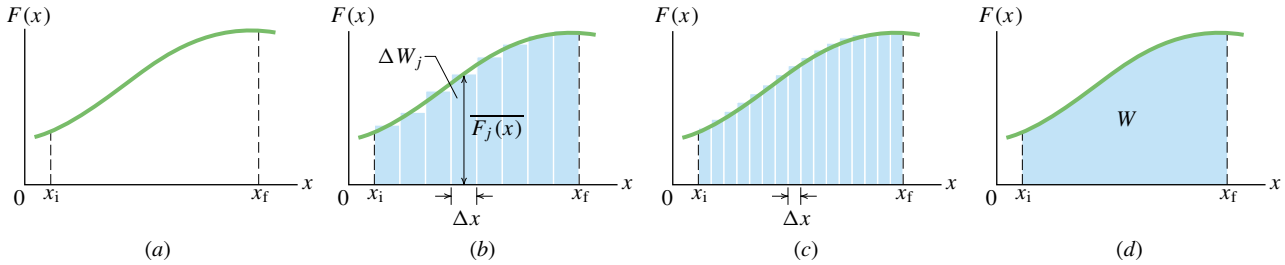
odkud pro v_f máme

$$v_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k,f}}}{m}} = \sqrt{\frac{2(1{,}58{\cdot}10^4\,\mathrm{J})}{(500\,\mathrm{kg})}} = \\ = 7{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

7.5 PRÁCE PROMĚNNÉ SÍLY

Jednorozměrný případ

Vraťme se k situaci na obr. 7.2. Předpokládejme však nyní, že síla $\boldsymbol{F}$, která působí na částici a koná při jejím pohybu jistou práci, směřuje podél osy x a její velikost se mění s polohou částice. Síla je tedy *proměnná*. V uvažovaném



Obr. 7.10 (a) Graf obecné závislosti síly působící na částici na její poloze. Částice se pohybuje po přímce (osa x), její poloha je popsána souřadnicí x v intervalu mezi počátečním a koncovým bodem x_i, resp. x_f. Síla je rovnoběžná s osou x. (b) Obrázek (a) s vyznačením rozdělení plochy pod grafem funkce $F(x)$ na úzké proužky. (c) Jemnější dělení než na obr. (b). (d) Limitní případ. Práce vykonaná působící silou je dána vztahem (7.27) a geometricky reprezentována vybarvenou plochou, omezenou osou x a grafem funkce $F(x)$ mezi hodnotami x_i a x_f.

speciálním případě se však mění pouze její velikost, zatímco její směr je stálý. Velikost síly navíc závisí pouze na souřadnici x, určující polohu částice, a není explicitní funkcí času.

Takový jednorozměrný příklad proměnné síly znázorňuje obr. 7.10. Jak určíme práci této síly při přesunutí částice z počáteční polohy o souřadnici x_i do polohy x_f? Vztah (7.9) použít nemůžeme, neboť platí jen pro konstantní sílu $\boldsymbol{F}$. Výpočet vyžaduje nový přístup: rozdělíme celkové posunutí částice na velký počet intervalů o šířce Δx. Zvolme tuto šířku natolik malou, abychom funkci $F(x)$ mohli v každém z intervalů považovat za konstantní. Nechť $\overline{F_j(x)}$ je střední hodnota veličiny $F(x)$ v j-tém intervalu.

Elementární práci ΔW_j vykonanou silou $\boldsymbol{F}$ v j-tém intervalu již vztahem (7.9) můžeme vyjádřit:

$$\Delta W_j \approx \overline{F_j(x)}\Delta x. \tag{7.24}$$

V grafu na obr. 7.10b je $\overline{F_j(x)}$ výška j-tého proužku a Δx jeho šířka. Elementární práce ΔW_j je číselně rovna obsahu proužku.

Celkovou práci W síly $\boldsymbol{F}$ působící na částici při jejím přemístění z polohy x_i do polohy x_f vyjádříme přibližně jako součet obsahů všech proužků ležících mezi x_i a x_f. Je tedy

$$W = \sum \Delta W_j \approx \sum \overline{F_j(x)}\Delta x. \tag{7.25}$$

Vztah (7.25) je přibližný, neboť přerušovaná modrá čára tvořená horními základnami pravoúhlých proužků v obrázku 7.10b pouze aproximuje skutečnou křivku $F(x)$.

Aproximaci můžeme zlepšit, zmenšíme-li šířku Δx a zvýšíme tak počet proužků, jako je tomu na obr. 7.10c. V limitě se šířka proužků blíží nulové hodnotě a počet proužků roste do nekonečna. Získáváme tak přesný výsledek

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \overline{F_j(x)}\Delta x. \tag{7.26}$$

Tato limita představuje integrál z funkce $F(x)$ v mezích x_i a x_f. Vztah (7.26) má tedy tvar

$$W = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} F(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(práce proměnné síly).} \tag{7.27}$$

Známe-li funkci $F(x)$, dosadíme ji do integrálu (7.27), opatříme jej mezemi a provedeme integraci. Získáme tak hledanou práci W. (V dod. E je uveden soupis nejznámějších integrálů.) Geometricky je práce dána obsahem plochy omezené grafem funkce $F(x)$ a osou x v intervalu s krajními body x_i a x_f (v obr. 7.10 vyznačeno barevně).

Trojrozměrný případ

Uvažujme nyní o částici, na niž působí obecně zadaná síla

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}, \tag{7.28}$$

jejíž složky F_x, F_y, F_z mohou být závislé na poloze částice (jsou funkcemi této polohy). Označme elementární posunutí částice jako

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}z. \tag{7.29}$$

Elementární práce $\mathrm{d}W$, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykoná při posunutí částice o $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, je podle vztahu (7.11) rovna

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z. \tag{7.30}$$

Celková práce W, vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při přesunutí částice z počáteční polohy $\boldsymbol{r}_\mathrm{i}$ o souřadnicích $(x_\mathrm{i}, y_\mathrm{i}, z_\mathrm{i})$ do koncové polohy $\boldsymbol{r}_\mathrm{f}$ o souřadnicích $(x_\mathrm{f}, y_\mathrm{f}, z_\mathrm{f})$, je pak vyjádřena *křivkovým* integrálem

$$W = \int_{\mathscr{C}} \mathrm{d}W = \int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \\ = \int_{\mathscr{C}} (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z), \tag{7.31}$$

kde $\mathscr{C}$ je křivka, po níž se částice pohybuje mezi body o polohových vektorech $\boldsymbol{r}_\mathrm{i}$ a $\boldsymbol{r}_\mathrm{f}$.* Má-li síla $\boldsymbol{F}$ nenulovou pouze x-ovou složku, jsou výrazy obsahující F_y a F_z nulové a vztah (7.31) přejde na tvar (7.27).

Vztah mezi prací proměnné síly a změnou kinetické energie

Vztahem (7.27) je dána práce proměnné síly působící na částici v jednorozměrném případě. Přesvědčíme se, že jedná-li se o výslednici sil, je tato práce podle očekávání rovna změně kinetické energie částice.

Uvažujme o částici s hmotností m, pohybující se po ose x. Na částici působí výsledná síla $F(x)$ směřující podél osy x. Práce vykonaná touto silou při přesunu částice z počáteční polohy x_i do koncové x_f je podle vztahu (7.27) rovna

$$W = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} ma\,\mathrm{d}x. \tag{7.32}$$

Použili jsme druhého Newtonova zákona a nahradili výslednou sílu $F(x)$ součinem ma. Výraz $ma\,\mathrm{d}x$ za integrálem v (7.32) lze přepsat ve tvaru

$$ma\,\mathrm{d}x = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x. \tag{7.33}$$

Podle pravidla o derivaci složené funkce platí

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v \tag{7.34}$$

a v rov. (7.33) lze psát

$$ma\,\mathrm{d}x = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v\,\mathrm{d}x = mv\,\mathrm{d}v. \tag{7.35}$$

Dosazením z rov. (7.35) do (7.32) dostáváme

$$W = \int_{v_\mathrm{i}}^{v_\mathrm{f}} mv\,\mathrm{d}v = m\int_{v_\mathrm{i}}^{v_\mathrm{f}} v\,\mathrm{d}v = \\ = \tfrac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 - \tfrac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2. \tag{7.36}$$

Uvědomme si, že při záměně proměnné x novou proměnnou v musíme provést i odpovídající záměnu mezí integrálu. Hmotnost m jsme mohli vytknout před integrál proto, že ji považujeme za konstantní.

Ve výsledku na pravé straně (7.36) poznáváme rozdíl kinetických energií částice v koncovém a počátečním pohybovém stavu. Můžeme proto opět psát známý vztah mezi prací a kinetickou energií

$$W = E_{\mathrm{k,f}} - E_{\mathrm{k,i}} = \Delta E_\mathrm{k}.$$

PŘÍKLAD 7.7

Síla $\boldsymbol{F} = (3x\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$, kde x je dáno v metrech, působí na částici pohybující se v rovině. Počáteční a koncová poloha částice jsou určeny souřadnicemi (2 m, 3 m) a (3 m, 0 m). Jakou práci vykoná síla $\boldsymbol{F}$? Rozhodněte, zda se velikost rychlosti částice zvětší, zmenší, či zůstane beze změny.

ŘEŠENÍ: Užitím vztahu (7.31) dostáváme

$$W = \int_{\mathscr{C}} (3x\,\mathrm{d}x + 4\,\mathrm{d}y) = \int_{\mathscr{C}} 3x\,\mathrm{d}x + \int_{\mathscr{C}} 4\,\mathrm{d}y,$$

kde $\mathscr{C}$ je křivka, po které se částice pohybuje. Vzhledem k tomu, že x-ová složka síly $\boldsymbol{F}$ nezávisí na souřadnici y a y-ová složka nezávisí na x, můžeme psát

$$\int_{\mathscr{C}} 3x\,\mathrm{d}x = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} 3x\,\mathrm{d}x = \int_2^3 3x\,\mathrm{d}x = 3\int_2^3 x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\mathscr{C}} 4\,\mathrm{d}y = \int_{y_\mathrm{i}}^{y_\mathrm{f}} 4\,\mathrm{d}y = \int_3^0 4\,\mathrm{d}y = 4\int_3^0 \mathrm{d}y.$$

Integrály můžeme vyhledat v dod. E. Dostaneme

$$W = 3[\tfrac{1}{2}x^2]_2^3 + 4[y]_3^0 = \tfrac{3}{2}[3^2 - 2^2] + 4[0-3] = \\ = -4{,}5\ \mathrm{J} \doteq -5\ \mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Záporný výsledek ukazuje, že kinetická energie částice, a tedy i velikost její rychlosti, klesne.

7.6 PRÁCE PRUŽNÉ SÍLY

V tomto článku se budeme zabývat výpočtem práce, kterou koná proměnná síla speciálního typu, tzv. **pružná síla**. Jedná se o sílu, jíž na částici působí natažená nebo stlačená pružina. Řada silových zákonů v přírodě má stejný matematický zápis jako zákon pro pružnou sílu. Rozbor tohoto konkrétního případu nám tedy umožní učinit si představu o celé skupině dalších sil s analogickým vyjádřením.

---

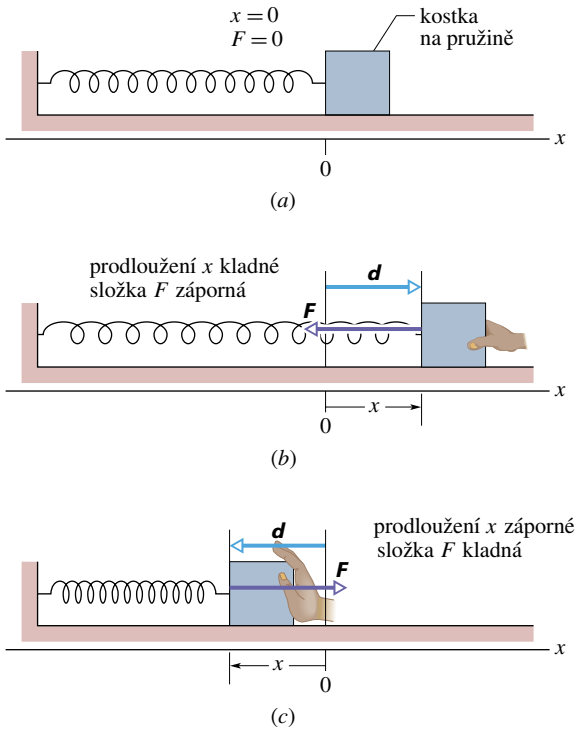
* Praktický výpočet integrálu (7.31), takzvaného **křivkového integrálu druhého typu**, lze snadno provést, známe-li závislost polohového vektoru částice na čase $\boldsymbol{r}(t)$. Pak lze psát $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$ a

$$W = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t,$$

kde t_i a t_f představují okamžiky, v nichž se částice nachází v počáteční a koncové poloze.

Pružná síla

Pružina na obr. 7.11a je v *nenapjatém stavu*, tj. není protažena ani stlačena. Jeden její konec je upevněn a s druhým, volným koncem je spojen bodový objekt, řekněme malá kostka. Na obr. 7.11b napínáme pružinu tak, že kostku táhneme směrem vpravo. Naopak, podle zákona akce a reakce táhne pružina kostku směrem vlevo „ve snaze“ obnovit nenapjatý stav. (Sílu pružiny proto někdy nazýváme *vratnou silou*.) Na obr. 7.11c stlačujeme pružinu tak, že kostku posouváme vlevo. Pružina naopak tlačí kostku vpravo, aby došlo k obnovení nenapjatého stavu.



Obr. 7.11 (a) Pružina v nenapjatém stavu. Počátek osy x je zvolen v poloze volného konce nenapjaté pružiny. K volnému konci je připojena malá kostka. (b) Kostka se posune o vektor $\boldsymbol{d}$ a pružina se prodlouží o délku x. Všimněte si vyznačeného směru vratné síly $\boldsymbol{F}$, jíž působí pružina na kostku. (c) Pružina je stlačena o délku x. Opět si všimněte vyznačené vratné síly.

V celé řadě praktických případů je vratná síla pružiny $\boldsymbol{F}$ v dobrém přiblížení úměrná jejímu prodloužení, tj. posunutí $\boldsymbol{d}$ volného konce pružiny vůči jeho poloze v nenapjatém stavu. *Síla pružiny* je tedy dána vztahem

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{d} \qquad \text{(Hookův zákon)}, \qquad (7.37)$$

známým pod názvem **Hookův zákon** (anglický vědec Robert Hooke patří k nejznámějším fyzikům druhé poloviny 17. století). Znaménko minus ve vztahu (7.37) upozorňuje, že síla pružiny má vždy opačný směr než posunutí jejího volného konce.

Konstanta k se nazývá **tuhostí pružiny** a je skutečně mírou toho, jak je pružina „tuhá“. Větší hodnota k znamená tužší pružinu, tj. větší pružnou sílu při daném prodloužení. Jednotkou tuhosti v soustavě SI je newton na metr ($\mathrm{N\cdot m^{-1}}$).

Osa x na obr. 7.11 je zvolena rovnoběžně s pružinou, její počátek ($x = 0$) splývá s polohou volného konce pružiny v nenapjatém stavu. Pro toto běžné uspořádání má vztah (7.37) tvar

$$F = -kx \qquad \text{(Hookův zákon)}. \qquad (7.38)$$

Symbolem F je v předchozím vztahu označena x-ová složka síly $\boldsymbol{F}$, zbývající složky jsou trvale nulové. Všimněte si, že pružná síla je proměnná, závisí na poloze volného konce pružiny. Podobně jako v čl. 7.5 lze psát $F = F(x)$. Uvědomte si také, že Hookův zákon představuje lineární závislost veličiny F na proměnné x.

Práce pružné síly

V dalších úvahách zanedbáme tření mezi kostkou a podložkou a budeme předpokládat, že pružina má ve srovnání s kostkou zanedbatelnou hmotnost (*nehmotná* pružina) a řídí se přesně Hookovým zákonem (*ideální* pružina). Představme si, že jsme do kostky prudce udeřili směrem vpravo a udělili jí tak jistou kinetickou energii. Kostka se začne pohybovat směrem vpravo. Pružná síla $\boldsymbol{F}$ její pohyb zpomaluje a kinetická energie kostky klesá. Experimentálně lze ověřit, že při splnění předpokladů o vlastnostech pružiny a podložky je změna kinetické energie kostky určena výhradně prací pružné síly $\boldsymbol{F}$. K výpočtu této práce musíme ovšem použít vztahu (7.27), neboť pružná síla je proměnná a řídí se silovým zákonem (7.38). Přesune-li se kostka z polohy x_i do polohy x_f, vykoná pružná síla práci

$$W_\mathrm{p} = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} F\,\mathrm{d}x = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} (-kx)\,\mathrm{d}x = -k\int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} x\,\mathrm{d}x = \\ = (-\tfrac{1}{2}k)[x^2]_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} = (-\tfrac{1}{2}k)(x_\mathrm{f}^2 - x_\mathrm{i}^2), \qquad (7.39)$$

tj.

$$W_\mathrm{p} = \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{i}^2 - \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{f}^2 \qquad \text{(práce pružné síly)}. \qquad (7.40)$$

Práce W_p pružné síly může být jak kladná, tak záporná a souvisí s celkovou změnou kinetické energie kostky při

jejím přemístění z polohy x_i do polohy x_f. Pro $x_\mathrm{i} = 0$ obvykle značíme $x_\mathrm{f} = x$. Ze vztahu (7.40) pak plyne

$$W_\mathrm{p} = -\tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(práce pružné síly).} \qquad (7.41)$$

V dalším myšleném experimentu si představme, že posouváme kostku podél osy x a přitom na ni stále působíme silou $\boldsymbol{F}_a$. Síla $\boldsymbol{F}_a$ koná práci W_a a pružná síla práci W_p. Podle (7.15) je změna kinetické energie kostky dána prací obou těchto sil, tj.

$$\Delta E_\mathrm{k} = E_{\mathrm{k,f}} - E_{\mathrm{k,i}} = W_a + W_\mathrm{p}, \qquad (7.42)$$

kde $E_{\mathrm{k,f}}$ a $E_{\mathrm{k,i}}$ značí kinetickou energii na konci a na počátku posunutí. Je-li rychlost kostky na počátku i na konci posunutí nulová, jsou hodnoty $E_{\mathrm{k,f}}$ i $E_{\mathrm{k,i}}$ nulové a vztah (7.42) se zjednoduší na tvar

$$W_a + W_\mathrm{p} = 0,$$

tj.

$$W_a = -W_\mathrm{p}. \qquad (7.43)$$

Tento výsledek znamená, že práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}_a$ je rovna záporně vzaté práci pružné síly.

Všimněte si, že délka pružiny přímo nevystupuje ani ve vyjádření pružné síly ((7.37) a (7.38)), ani ve vztazích pro její práci ((7.40) a (7.41)). Je však jedním z faktorů, které určují tuhost pružiny k a v uvedených vztazích je tedy obsažena „skrytě“, implicitně.

PŘÍKLAD 7.8

Abychom pružinu na obr. 7.11b udrželi protaženou o 12 mm, musíme na kostku, uchycenou na jejím volném konci, působit silou $\boldsymbol{F}_a$ o velikosti 4,9 N.

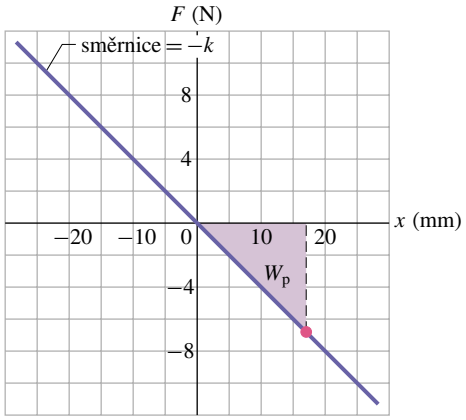
(a) Jaká je tuhost pružiny?

ŘEŠENÍ: Protažená pružina působí na kostku silou $F = -4{,}9\,\mathrm{N}$. Pro hodnotu $x = 12\,\mathrm{mm}$ dostaneme ze vztahu (7.38)

$$k = -\frac{F}{x} = -\frac{(-4{,}9\,\mathrm{N})}{(12{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m})} = 408\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} \doteq 410\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Znovu si uvědomte, že k určení tuhosti k není třeba znát délku pružiny. Grafické znázornění závislosti (7.38) pro tuto pružinu je na obr. 7.12. Grafem je přímka se směrnicí $-410\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$.

(b) Jakou silou bude působit pružina na kostku, jestliže ji protáhneme o 17 mm?



Obr. 7.12 Graf závislosti pružné síly na prodloužení pružiny v jednorozměrném případě (příklad 7.8). Pružina vyhovuje Hookovu zákonu (vztahy (7.37) a (7.38)). Její tuhost je $k = 410\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Význam červeně vyznačeného bodu grafu a vybarvené plochy je objasněn v příkladu 7.8 (b, c).

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (7.38) plyne

$$F = -kx = -(408\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}})(17{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m}) = -6{,}9\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Bod vyznačený v grafu na obr. 7.12 odpovídá vypočtené síle a příslušnému posunutí x. Všimněte si, že posunutí x je kladné, zatímco hodnota F je záporná, právě tak, jak to vyžaduje vztah (7.38).

(c) Jakou práci vykoná pružná síla při protažení pružiny z nenapjatého stavu o 17 mm (úloha (b))?

ŘEŠENÍ: Vzhledem k tomu, že pružina byla zpočátku v nenapjatém stavu, použijeme vztahu (7.41):

$$W_\mathrm{p} = -\tfrac{1}{2}kx^2 = -\tfrac{1}{2}(408\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}})(17{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m})^2 = -5{,}9{\cdot}10^{-2}\,\mathrm{J} = -59\,\mathrm{mJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Barevně vyznačená plocha v obr. 7.12 představuje velikost vypočtené práce. Tato práce je záporná, neboť pružná síla a posunutí kostky mají v dané úloze opačný směr. Kdybychom pružinu místo protažení o 17 mm o stejnou délku stlačili, byla by práce vykonaná pružnou silou stejná.

(d) Pružinu stlačenou o 17 mm uvolňujeme, až se kostka vrátí do polohy $x = 0$ (obnoví se nenapjatý stav pružiny). Poté pružinu stlačíme o 12 mm. Jakou práci vykonala pružná síla při celkovém posunutí kostky?

ŘEŠENÍ: V popsaném případě platí: $x_\mathrm{i} = +17\,\mathrm{mm}$ (v počátečním stavu je pružina napjatá) a $x_\mathrm{f} = -12\,\mathrm{mm}$ (v koncovém stavu je pružina stlačená). Ze vztahu (7.40) dostáváme

$$W_\mathrm{s} = \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{i}^2 - \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{f}^2 = \tfrac{1}{2}k(x_\mathrm{i}^2 - x_\mathrm{f}^2) = \tfrac{1}{2}(408\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}})[(17{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m})^2 - (-12{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m})^2] = 0{,}030\,\mathrm{J} = 30\,\mathrm{mJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Celková práce vykonaná pružnou silou je kladná. Kladná práce při posunutí kostky z polohy $x_i = +17\,\text{mm}$ do polohy $x = 0$ byla větší než absolutní hodnota záporné práce vykonané při posunutí kostky z polohy $x = 0$ do polohy $x_f = -12\,\text{mm}$.

KONTROLA 4: Pro soustavu pružina + kostka znázorněnou na obr. 7.11 uvažujte o třech situacích s různými počátečními a koncovými polohami kostky (x_i, x_f) a v každé z nich rozhodněte, zda je práce pružné síly kladná, záporná, nebo nulová: (a) $(-3\,\text{cm}, 2\,\text{cm})$, (b) $(2\,\text{cm}, 3\,\text{cm})$, (c) $(-2\,\text{cm}, 2\,\text{cm})$.

PŘÍKLAD 7.9

Kostka o hmotnosti 5,7 kg klouže po vodorovném dokonale hladkém stole konstantní rychlostí o velikosti $1{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Naráží na volný konec pružiny (obr. 7.13) a stlačuje ji. V určitém okamžiku je rychlost kostky nulová. Vypočtěte délku d, o kterou je pružina v tomto okamžiku stlačena. Tuhost pružiny je $k = 1\,500\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (7.41) je práce vykonaná silou, jíž *působí pružina* na kostku, při stlačení pružiny o d rovna

$$W_p = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

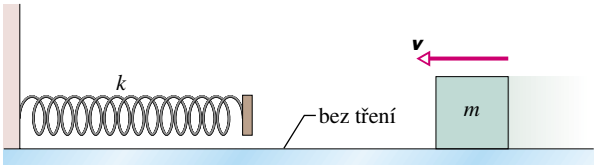
Změna kinetické energie kostky od okamžiku jejího nárazu na pružinu do okamžiku, kdy je její rychlost nulová, je

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Podle vztahu (7.4) mezi prací a kinetickou energií jsou si tyto veličiny rovny. Jejich porovnáním a řešením získané rovnice vzhledem k neznámé d dostaneme:

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (1{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\sqrt{\frac{(5{,}7\,\text{kg})}{(1\,500\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1})}} =$$

$$= 7{,}4\cdot10^{-2}\,\text{m} = 7{,}4\,\text{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 7.13 Příklad 7.9. Kostka se pohybuje směrem k pružině rychlostí $\boldsymbol{v}$, narazí na ni a stlačuje ji. V okamžiku, kdy je rychlost kostky nulová, je pružina stlačena o délku d.

RADY A NÁMĚTY

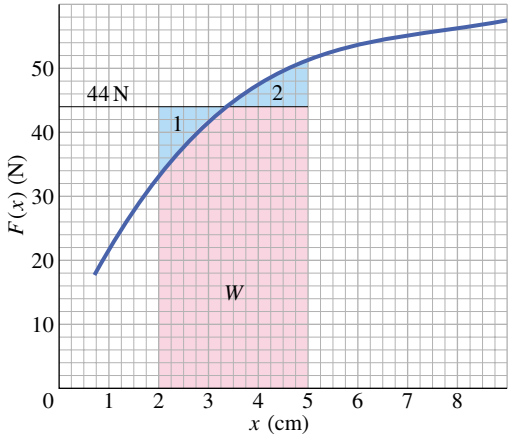
Bod 7.1: *Derivace a integrál, směrnice a plochy*

Pro zadanou funkci $y = F(x)$ umíme vypočítat hodnotu její derivace v libovolném bodě x i hodnotu jejího určitého integrálu v daných mezích proměnné x. Není-li funkce zadána analyticky (vzorcem), nýbrž grafem, lze zjišťovat hodnoty derivace i určitého integrálu graficky. Způsob grafického určení derivace byl vyložen v bodě 2.5. Proto si nyní všimneme jen grafické metody nalezení hodnoty určitého integrálu.

Na obr. 7.14 je znázorněn graf jisté funkce $F(x)$. Řekněme, že tato funkce představuje závislost x-ové složky síly, která působí na částici pohybující se po ose x, na (x-ové) souřadnici částice. Zaměříme se na grafické určení práce, kterou síla vykoná při posunutí částice z počáteční polohy $x_i = 2{,}0\,\text{cm}$ do koncové polohy $x_f = 5{,}0\,\text{cm}$. Podle vztahu (7.27) lze tuto práci vyjádřit integrálem

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx,$$

jehož hodnota je rovna obsahu vybarvené plochy ležící pod křivkou grafu a mezi zadanými krajními polohami x_i a x_f.



Obr. 7.14 Graf síly $F(x)$ v jednorozměrném případě. Vybarvená plocha pod křivkou (její obsah představuje práci síly F) je nahrazena obdélníkem vytvořeným vyjmutím plochy 2 a přidáním plochy 1, jejichž obsahy jsou přibližně shodné.

Tuto plochu lze přibližně nahradit obdélníkem, který vznikne doplněním obrázku o vodorovnou přímku, vedenou v takové poloze, aby obsahy plošek označených „1“ a „2“ byly shodné. Vyslovenému požadavku celkem dobře vyhovuje hodnota $F = 44\,\text{N}$. Odpovídající vodorovná přímka je v obr. 7.14 rovněž vyznačena. Obsah „náhradního“ obdélníka ($= W$) je

$$W = \text{výška} \cdot \text{základna} = (44\,\text{N})(5{,}0\,\text{cm} - 2{,}0\,\text{cm}) =$$

$$= 132\,\text{N}\cdot\text{cm} \doteq 1{,}3\,\text{N}\cdot\text{m} = 1{,}3\,\text{J}.$$

Obsah plochy představující práci W můžeme určit také tak, že spočítáme všechny čtverečky, které leží pod křivkou grafu

ve vybarvené části plochy. Je jich asi 260 a každý z nich představuje (2 N)(0,25 cm) = 0,5 N·cm. Práce W má tedy hodnotu

$$W = (260\,\text{čtverečků})\left(\frac{0{,}5\,\text{N·cm}}{1\,\text{čtvereček}}\right) = 130\,\text{N·cm} = 1{,}3\,\text{J},$$

stejně jako při výpočtu obsahu obdélníka z délek jeho stran. *Pamatujte*: V dvojrozměrném grafickém znázornění funkce jedné proměnné je derivace určena směrnicí grafu a integrál obsahem plochy pod křivkou grafu.

7.7 VÝKON

Na stavbě je třeba zvedat balíky cihel z chodníku na střechu budovy. Na staveništi je k dispozici naviják. Není obtížné spočítat práci, kterou musí při každém vyzvednutí nákladu vykonat síla působící na naviják. Je zde však ještě jeden problém: majiteli stavební firmy jde také o to, jak *rychle* bude tato práce vykonána. Za přijatelnou považuje dobu nejvýše 5 minut. Stihne se to?

Mírou toho, jak „rychle“ koná určitá síla práci, je **výkon**. Vykoná-li síla $\boldsymbol{F}$ práci ΔW za dobu Δt, je její **průměrný výkon** v daném časovém intervalu definován poměrem

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \text{(průměrný výkon).} \qquad (7.44)$$

Okamžitý výkon P odpovídá „okamžité rychlosti“ konání práce a je tedy limitním případem průměrného výkonu pro $\Delta t \to 0$:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(okamžitý výkon).} \qquad (7.45)$$

Jednotka výkonu v soustavě SI je joule za sekundu. Tato jednotka se užívá tak často, že dostala samostatný název. Nazývá se **watt** (W) podle Jamese Watta, jenž se v historii zasloužil o velmi výrazné zdokonalení činnosti parních strojů. V britském systému je jednotkou výkonu stopa·libra za sekundu. Někdy se užívá i jednotky zvané koňská síla. Některé vztahy mezi jednotkami výkonu:

$$1\,\text{watt} = 1\,\text{W} = 1\,\text{J·s}^{-1} = 0{,}738\,\text{ft·lb·s}^{-1} \qquad (7.46)$$

a

$$\text{koňská síla} = 1\,\text{HP} = 550\,\text{ft·lb·s}^{-1} = 746\,\text{W}. \qquad (7.47)$$

Ze vztahu (7.44) vidíme, že práci lze vyjádřit jako součin výkonu a času a získat tak její běžně užívanou praktickou jednotku, kilowatthodinu. Platí

$$1\,\text{kilowatthodina} = 1\,\text{kW·h} = (10^3\,\text{W})(3\,600\,\text{s}) = \\ = 3{,}60\cdot10^6\,\text{J} = 3{,}6\,\text{MJ}. \qquad (7.48)$$

Někdo si možná při vyslovení slov watt nebo kilowatthodina vybaví spíše elektrické jednotky. Jedná se však o jednotku výkonu a jednotku energie, používané naprosto obecně. Kdybychom třeba učebnici, kterou právě držíme v ruce, zvedli z podlahy a položili ji na stůl, mohli bychom vykonanou práci klidně zapsat údajem $4\cdot10^{-6}$ kW·h (nebo lépe 4 mW·h).

Výkon můžeme také vyjádřit pomocí síly, která působí na částici a koná tak práci, a rychlosti částice. Předpokládejme, že se částice pohybuje po ose x a působí na ni síla $\boldsymbol{F}$, která s osou x svírá s úhel φ. Ze vztahu (7.45) dostáváme

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{F\cos\varphi\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F\cos\varphi\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right),$$

tj.

$$P = Fv\cos\varphi. \qquad (7.49)$$

Po úpravě pravé strany rovnosti (7.49) do tvaru skalárního součinu $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$ můžeme psát

$$P = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \qquad \text{(okamžitý výkon).} \qquad (7.50)$$

Dejme tomu, že tahač na obr. 7.15 působí na naložený přívěs silou $\boldsymbol{F}$. Rychlost přívěsu v daném okamžiku je $\boldsymbol{v}$. Okamžitý výkon síly $\boldsymbol{F}$, vyjádřený vztahy (7.49) a (7.50), udává, jak



Obr. 7.15 Výkon síly, jíž působí tahač na přívěs s nákladem, je „rychlost“, s jakou tato síla koná práci.

„rychle“ koná síla $\boldsymbol{F}$ práci právě v tomto okamžiku. Za přijatelné lze považovat i to, budeme-li místo o výkonu síly hovořit o „výkonu tahače“. Musíme však mít stále na mysli, o co skutečně jde: výkon je „rychlost“, s jakou síla koná práci.

PŘÍKLAD 7.10

V obr. 7.16 jsou vyznačeny síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ působící na krabici, která klouže po dokonale hladké vodorovné podlaze směrem vpravo. Síla $\boldsymbol{F}_1$ je vodorovná a má velikost 2,0 N, síla $\boldsymbol{F}_2$ je od podlahy odkloněna o 60° a její velikost je 4,0 N. Rychlost krabice má v určitém okamžiku velikost $v = 3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

(a) Jaký je výkon každé z obou sil v tomto okamžiku? Jaký je jejich celkový výkon? Interpretujte získanou hodnotu celkového okamžitého výkonu.

ŘEŠENÍ: Výkon jednotlivých sil zjistíme pomocí vztahu (7.49). Síla $\boldsymbol{F}_1$ svírá s rychlostí $\boldsymbol{v}$ úhel $\varphi_1 = 180°$, takže je

$$P_1 = F_1 v \cos\varphi_1 = (2{,}0\,\mathrm{N})(3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\cos 180° = \\ = -6{,}0\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}} = -6{,}0\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek ukazuje, že síla $\boldsymbol{F}_1$ *spotřebovává* práci „s rychlostí“ 6,0 joulů za sekundu neboli s výkonem 6,0 W. Úhel mezi silou $\boldsymbol{F}_2$ a rychlostí $\boldsymbol{v}$ je $\varphi_2 = 60°$. Platí tedy

$$P_2 = F_2 v \cos\varphi_2 = (4{,}0\,\mathrm{N})(3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\cos 60° = \\ = 6{,}0\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z výsledku plyne, že síla $\boldsymbol{F}_2$ *koná* (kladnou) práci s výkonem 6,0 W.

Celkový výkon je součtem obou získaných hodnot:

$$P_{\mathrm{celk}} = P_1 + P_2 = -6{,}0\,\mathrm{W} + 6{,}0\,\mathrm{W} = 0. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Celkový okamžitý výkon sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ je v daném okamžiku t nulový. To znamená, že elementární práce $\mathrm{d}W$ vykonaná oběma silami společně v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ od okamžiku t do okamžiku $t+\mathrm{d}t$ je nulová. Výslednice sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ nepřispívá v daném okamžiku ke změně kinetické energie krabice. Ze skutečnosti, že hodnota $P_{\mathrm{celk}} = P_1 + P_2$ je *v daném okamžiku* nulová, nelze činit žádné další závěry. Soustřeďme se však na zadání úlohy pozorněji. Kromě zadaných sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ působí na krabici samozřejmě ještě tíhová síla $\boldsymbol{G}$ a tlaková síla podlahy $\boldsymbol{N}$. Ty jsou trvale kolmé k posunutí krabice, a proto nekonají práci. Ke změně kinetické energie krabice tedy přispívá jen práce sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$.

Výsledná síla působící na krabici je

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N}.$$

Zvolme soustavu souřadnic tak, že osa x je vodorovná a míří vpravo a osa y směřuje svisle vzhůru. Pro složky výsledné síly dostaneme

$$\sum F_x = F_1\cos\varphi_1 + F_2\cos\varphi_2 = \\ = (2{,}0\,\mathrm{N})\cos 180° + (4{,}0\,\mathrm{N})\cos 60° = \\ = (-2{,}0 + 4{,}0\cdot 0{,}5)\,\mathrm{N} = 0,$$

$$\sum F_y = F_2\sin\varphi_2 - mg + N = \\ = (4{,}0\,\mathrm{N})\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - mg + N.$$

Z rovnice pro x-ovou složku plyne $a_x = 0$. Vzhledem k tomu, že je pohyb krabice vázán na vodorovnou podlahu, platí také $a_y = 0$ (vazební podmínka). Z rovnice pro y-ovou složku výsledné síly lze pak díky vazební podmínce určit tlakovou sílu podložky

$$N = mg - (4{,}0\,\mathrm{N})\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Celkově je $\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Rychlost krabice $\boldsymbol{v}$ je tedy konstantní, stejně jako její kinetická energie. Celkový výkon P_{celk} sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ je tedy nulový trvale, nejen v jediném okamžiku zmiňovaném v zadání úlohy.

(b) Řešte úlohu (a) znovu za předpokladu, že velikost síly $\boldsymbol{F}_2$ je 6,0 N.

ŘEŠENÍ: Pro výkon síly $\boldsymbol{F}_2$ nyní dostáváme

$$P_2 = F_2 v \cos\varphi_2 = (6{,}0\,\mathrm{N})(3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\cos 60° = \\ = 9{,}0\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

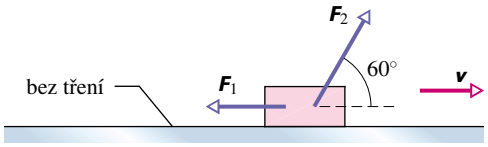
Výkon síly $\boldsymbol{F}_1$ jsme určili už v úloze (a) a jeho hodnota je

$$P_1 = -6{,}0\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Celkový výkon je tedy

$$P_{\mathrm{celk}} = P_1 + P_2 = -6{,}0\,\mathrm{W} + 9{,}0\,\mathrm{W} = \\ = 3{,}0\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kladná hodnota celkového výkonu znamená, že kinetická energie i velikost rychlosti krabice v daném okamžiku rostou. Ze vztahu (7.50) a ze skutečnosti, že síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ jsou konstantní, plyne, že v daném okamžiku roste i jejich celkový okamžitý výkon P_{celk}. Ten nabývá vypočtené hodnoty 3,0 W právě jen v okamžiku, kdy je velikost rychlosti krabice rovna $3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.



Obr. 7.16 Příklad 7.10. Síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ působí na krabici, která klouže směrem vpravo po dokonale hladké podlaze. Rychlost krabice je $\boldsymbol{v}$.

KONTROLA 5: Kostka je uvázána na provaze a pohybuje se rovnoměrně po kružnici, v jejímž středu je druhý konec provazu upevněn. Rozhodněte, zda je výkon tahové síly provazu kladný, záporný, nebo nulový.

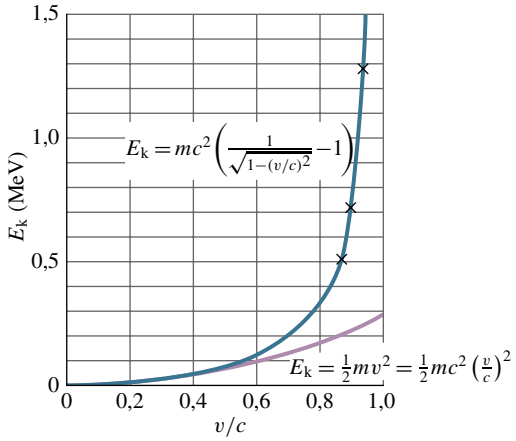


7.8 KINETICKÁ ENERGIE PŘI VYSOKÝCH RYCHLOSTECH

V čl. 4.10 jsme se dověděli, že pro částice pohybující se rychlostmi blízkými rychlosti světla newtonovská mechanika selhává a musí být nahrazena Einsteinovou speciální teorií relativity. Jedním z důsledků této skutečnosti je, že již nemůžeme vyjadřovat kinetickou energii ve tvaru $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Musíme použít relativistického vztahu

$$E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right), \qquad (7.51)$$

kde c je rychlost světla ve vakuu.



Obr. 7.17 Graf relativistického a klasického vyjádření kinetické energie elektronu (viz (7.51), resp. (7.1)) v závislosti na podílu v/c, kde v je velikost rychlosti elektronu a c je rychlost světla ve vakuu. Všimněte si, že tyto dvě křivky při nízkých rychlostech splývají. Při zvyšující se rychlosti v se však jejich odchylka výrazně zvětšuje. Experimentální body (označené křížkem ×) dokumentují souhlas relativistické křivky s experimentem při vysokých rychlostech. Od nerelativistické křivky se experimentální hodnoty výrazně odchylují.

Obr. 7.17 ukazuje, že tyto dvě formule, které jsou zcela odlišné již na první pohled, dávají skutečně při vysokých rychlostech výrazně různé výsledky. Experiment potvrzuje mimo veškerou pochybnost, že relativistický výraz (7.51) je správný na rozdíl od výrazu klasického (7.1). Při nízkých rychlostech však výsledky obou vzorců prakticky splývají. Speciálně pro $v = 0$ dávají oba vztahy nulovou hodnotu kinetické energie.

Všechny relativistické formule musí při nízkých rychlostech přejít na odpovídající klasický tvar. Ukážeme si to na příkladu vztahu (7.51), který pro snažší porovnání se vztahem (7.1) ještě upravíme:

$$E_k = mc^2\left[(1-\beta^2)^{-1/2} - 1\right]. \qquad (7.52)$$

Pro zjednodušení jsme místo podílu v/c použili bezrozměrového parametru β.

Při velmi malých rychlostech je $v \ll c$, odkud $\beta \ll 1$. Funkci $(1-\beta^2)^{-1/2}$ tedy můžeme rozvinout pomocí binomické věty (bod 7.2) a dostaneme

$$(1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \dots, \qquad (7.53)$$

Dosazení rozvoje (7.53) do (7.52) vede k výsledku

$$E_k = mc^2\left[\left(1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \dots\right) - 1\right]. \qquad (7.54)$$

Pro velmi malé hodnoty β rychle klesá velikost členů zastoupených tečkami. Součet v kulaté závorce tedy můžeme s jistou malou chybou nahradit prvními dvěma členy a psát

$$E_k \approx mc^2\left[\left(1 + \tfrac{1}{2}\beta^2\right) - 1\right],$$

nebo, při zpětném dosazení $\beta = \frac{v}{c}$,

$$E_k \approx mc^2\left(\tfrac{1}{2}\beta^2\right) = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Tento výsledek potvrzuje naše očekávání.

RADY A NÁMĚTY

Bod 7.2: *Aproximace pomocí binomické věty*

Často potřebujeme najít přibližnou hodnotu veličiny $(a+b)^n$ za předpokladu, že $b \ll a$. Nejjednodušší je vyjádřit tento výraz ve tvaru konst$\cdot(1+x)^n$, kde x je bezrozměrová veličina mnohem menší než jednička. Můžeme psát

$$(a+b)^n = a^n\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = (a^n)(1+x)^n,$$

kde $(1+x)^n$ je potřebný výraz s bezrozměrovou proměnnou $x = \frac{b}{a}$. Mocninu $(1+x)^n$ můžeme rozepsat pomocí binomické věty s tím, že vezmeme v úvahu jen tolik členů, kolik je při dané přesnosti úlohy třeba. (Takové rozhodování ovšem vyžaduje jistou zkušenost.)

Binomická věta, uvedená v dod. E, má tvar

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots. \qquad (7.55)$$

Vykřičníky ve vztahu (7.55) představují faktoriály, tj. postupné násobení celých čísel vzniklých z dané hodnoty n odečítáním jednotky. Například $4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$. Výpočet faktoriálů můžete pravděpodobně provádět i na své kalkulačce.

V předchozím textu jsme použili binomického rozvoje v rov. (7.53) pro $x = -\beta^2$ a $n = -\frac{1}{2}$.

Pro procvičení vypočtěte hodnotu $(1+0{,}045)^{-2{,}3}$ jak na kalkulačce, tak použitím rozvoje (7.55), v němž dosadíte $x = 0{,}045$ a $n = -2{,}3$. Vypočtěte si různé členy rozvoje, abyste se přesvědčili o jejich rychlém poklesu.

7.9 VZTAŽNÉ SOUSTAVY

Připomeňme, že Newtonovy zákony platí v inerciálních vztažných soustavách. Tyto preferované vztažné soustavy jsou spojeny s volnými částicemi a navzájem se pohybují rovnoměrně přímočaře.

V případě některých fyzikálních veličin naměří pozorovatelé v různých inerciálních vztažných soustavách tytéž hodnoty. V newtonovské mechanice jsou těmito *invariantními* veličinami síla, hmotnost, zrychlení, čas. Jestliže například jeden z pozorovatelů v inerciální vztažné soustavě zjistí, že hmotnost určité částice je 3,15 kg, je jisté, že pozorovatelé ve všech ostatních inerciálních soustavách naměří stejnou hodnotu. Jiné fyzikální veličiny, například posunutí částice nebo její rychlost, nabývají pro pozorovatele v různých inerciálních vztažných soustavách různých hodnot. Tyto veličiny *nejsou* invariantní.

Jestliže tedy posunutí částice závisí na volbě vztažné soustavy, bude na ní závislá i práce sil, které na částici působí, neboť práce ($W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d}$) je pomocí posunutí definována. Uvažujme například o částici, která se pohybuje podél společného směru osy x tří různých vztažných soustav. Dejme tomu, že její posunutí je v jedné vztažné soustavě $+2{,}47$ m, v jiné je nulové a v další třeba $-3{,}64$ m. Předpokládejme, že na částici působí ve směru jejího pohybu síla $\boldsymbol{F}$. Protože je síla $\boldsymbol{F}$ ve všech třech soustavách stejná (je invariantní), je zřejmé, že její práce měřená pozorovatelem v první soustavě je kladná, v druhé nulová a ve třetí záporná. Co můžeme usoudit o kinetické energii částice? Protože rychlost částice závisí na volbě vztažné soustavy, bude na ní záviset i kinetická energie ($E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$), která je pomocí rychlosti definována. Znamená to snad, že vztah mezi prací a kinetickou energií je chybný?

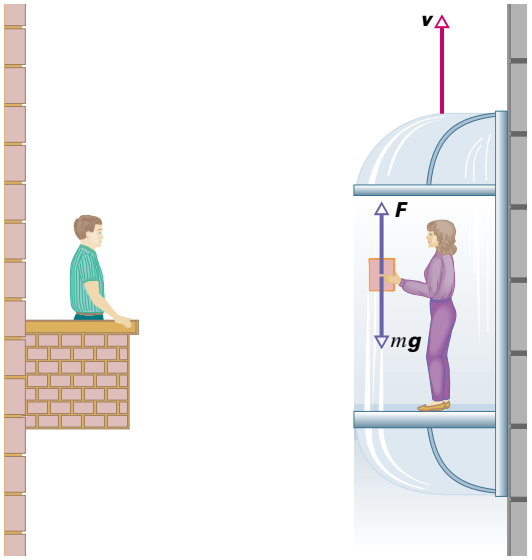
V průběhu doby, která uplynula od Galileiových experimentů až po Einsteinovy objevy, dospěli fyzikové k přesvědčení, že platí tzv. **princip invariance**:

> Fyzikální zákony musí mít stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách.

Některé *fyzikální veličiny* nabývají sice v různých vztažných soustavách různých hodnot, avšak volba vztažné soustavy nemůže ovlivnit platnost *fyzikálních zákonů*. Intuitivně cítíme, že v tomto formálním tvrzení o invarianci je skryta skutečnost, že dva různí pozorovatelé, kteří budou studovat tutéž událost, musí dojít k závěru, že příroda funguje pro oba naprosto stejně.

Mezi zákony, kterých se princip invariance týká, patří i vztah mezi prací a kinetickou energií. Přestože se hodnoty práce naměřené různými pozorovateli budou lišit, stejně jako hodnoty kinetické energie, budou pozorovatelé zjišťovat, že vztah mezi prací a kinetickou energií platí ve vztažné soustavě každého z nich. Zaměřme se na jednoduchý příklad.

Na obr. 7.18 sledujeme Soňu, jak stoupá v kabině výtahu vzhůru stálou rychlostí a v ruce drží knihu. Štěpán stojí na balkoně a pozoruje, že kabina stoupla do výšky h. Posuďte platnost vztahu mezi prací a kinetickou energií z hlediska obou pozorovatelů, kteří sledují pohyb knihy.



Obr. 7.18 Soňa jede ve výtahu vzhůru a drží knihu. Štěpán ji pozoruje. Každý z nich sleduje ve své vztažné soustavě pohyb knihy a zkoumá platnost vztahu mezi prací a kinetickou energií.

1. *Sonin komentář.* „Mou vztažnou soustavou je kabina výtahu. Na knihu působí moje ruka silou, která směřuje svisle vzhůru. Tato síla však nekoná práci, protože kniha je v mé vztažné soustavě v klidu. Ze stejného důvodu nekoná práci ani tíhová síla, jíž působí na knihu Země. Celková práce všech sil působících na knihu je tedy nulová. V souhlasu se vztahem mezi prací a kinetickou energií se kinetická energie knihy nemění. To je přesně to, co pozoruji: kinetická energie knihy je v mé vztažné soustavě nulová a zachovává se. Všechno je tedy v pořádku."

2. *Štěpánův komentář.* „Mou vztažnou soustavou je balkon. Vidím, že Soňa působí na knihu silou $\boldsymbol{F}$. Vzhledem k mé vztažné soustavě se působiště této síly pohybuje a práce, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykoná při zvednutí knihy do výšky h, je Fh. Protože se kniha pohybuje rovnoměrně přímočaře, musí síla $\boldsymbol{F}$ kompenzovat sílu tíhovou, takže platí $Fh = +mgh$. Vím také, že i tíhová síla, působící na knihu, koná práci. Její hodnota je $-mgh$. Celková práce, kterou vykonají síly

působící na knihu při jejím posunutí do výšky h, je nulová. Ve shodě se vztahem mezi prací a kinetickou energií je kinetická energie knihy neměnná. A právě to pozoruji. V mé vztažné soustavě je kinetická energie knihy konstantní a má hodnotu $\frac{1}{2}mv^2$. Všechno souhlasí."

I když Soňa a Štěpán nezaznamenají shodné výsledky při měření posunutí knihy či její kinetické energie, každý z nich dospívá k závěru, že v jeho vztažné soustavě platí rovnost mezi prací všech sil působících na knihu a změnou její kinetické energie.

Není podstatné, jakou (inerciální) vztažnou soustavu si zvolíme pro řešení úlohy, jestliže (1) si dobře uvědomíme a zapamatujeme, jakou konkrétní soustavu jsme si zvolili, a (2) při řešení úlohy používáme stále tutéž vztažnou soustavu.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Kinetická energie

Kinetická energie E_k částice o hmotnosti m, která se pohybuje velmi malou rychlostí $\boldsymbol{v}$ ve srovnání s rychlostí světla, je

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(kinetická energie).} \tag{7.1}$$

Práce

Práce W každé ze sil působících na daný objekt přispívá ke změně jeho energie. Je-li práce vykonaná určitou silou kladná (síla práci *koná*), je odpovídající příspěvek ke změně energie objektu *přírůstkem*, je-li záporná (síla práci *spotřebovává*), dochází k *úbytku* energie objektu.

Práce a kinetická energie

Jsou-li podmínky při působení síly na daný objekt takové, že se může měnit pouze jeho kinetická energie, můžeme tuto změnu ΔE_k vyjádřit vztahem

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W \qquad \text{(vztah mezi prací a kinetickou energií),} \tag{7.4}$$

kde $E_{k,i}$ je počáteční kinetická energie objektu a $E_{k,f}$ je jeho kinetická energie poté, co síla vykonala práci W. Rovnost (7.4) je vhodné přepsat do tvaru

$$E_{k,f} = E_{k,i} + W. \tag{7.5}$$

Práce konstantní síly

Práce, kterou vykoná konstantní síla $\boldsymbol{F}$ působící na částici při jejím posunutí $\boldsymbol{d}$, je

$$W = Fd\cos\varphi = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d} \qquad \text{(práce konstantní síly),} \tag{7.9, 7.11}$$

kde φ je konstantní úhel mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$. Působí-li na částici více sil $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, …, jejichž výslednice je konstantní, je jejich výsledná práce

$$W = \left(\sum_j \boldsymbol{F}_j\right)\cdot\boldsymbol{d} \qquad \text{(práce konstantní výslednice sil).} \tag{7.13}$$

Tato práce je rovna součtu prací vykonaných jednotlivými silami. Jsou-li tyto síly rovněž konstantní, platí

$$W = \boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_3\cdot\boldsymbol{d} + \ldots = \\ = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots \qquad \text{(celková práce).} \tag{7.14}$$

Dosazením výrazu pro celkovou práci do vztahu mezi prací a kinetickou energií můžeme vyjádřit změnu kinetické energie částice jako celkovou práci všech sil, které na částici působí:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots. \tag{7.15}$$

Práce tíhové síly

Tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, působící na částici o hmotnosti m, vykoná při posunutí částice o vektor $\boldsymbol{d}$ práci

$$W_g = mgd\cos\varphi, \tag{7.16}$$

kde φ je úhel mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a vektorem posunutí $\boldsymbol{d}$.

Práce při vzestupu a poklesu tělesa

Působí-li na částici v blízkosti povrchu Země kromě tíhové síly ještě další síla $\boldsymbol{F}_a$ (či síly o výslednici $\boldsymbol{F}_a$), určuje celková práce těchto sil W_a spolu s prací síly tíhové W_g změnu kinetické energie částice

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_a + W_g. \tag{7.19}$$

Změní-li se výška částice nad povrchem Země beze změny její kinetické energie, zjednoduší se vztah (7.19) takto:

$$W_a = -W_g. \tag{7.20}$$

Práce síly $\boldsymbol{F}_a$ a práce tíhové síly se tedy v takovém případě liší pouze znaménkem. Přírůstek kinetické energie částice daný působením síly $\boldsymbol{F}_a$ je roven úbytku, který způsobila síla tíhová.

Práce proměnné síly

Síla $\boldsymbol{F}$, která působí na částici při jejím pohybu po křivce $\mathscr{C}$ z počátečního bodu $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ do koncového bodu $\boldsymbol{r}_f = (x_f, y_f, z_f)$, může obecně záviset na poloze částice. Práce takové síly je dána křivkovým integrálem

$$W = \int_{\mathscr{C}} (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z) = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t. \tag{7.31}$$

Okamžiky t_i a t_f odpovídají počátečnímu a koncovému bodu křivky $\mathscr{C}$.

V jednorozměrném případě se vztah (7.31) zjednoduší na tvar

$$W = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.27}$$

Pružná síla

Pro pružnou sílu platí

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{d} \qquad \text{(Hookův zákon)}, \tag{7.37}$$

kde $\boldsymbol{d}$ je posunutí volného konce pružiny z **nenapjatého stavu** (pružina v tomto stavu není natažena ani stlačena) a k je **tuhost** pružiny. Zvolíme-li osu x podél pružiny a počátek ztotožníme s polohou jejího volného konce v nenapjatém stavu, lze vztah (7.37) přepsat ve tvaru

$$F = -kx \qquad \text{(Hookův zákon)}. \tag{7.38}$$

Práce pružné síly

Přesune-li se těleso připevněné k volnému konci pružiny z počáteční polohy x_i do koncové polohy x_f, vykoná pružná síla práci

$$W_\mathrm{p} = \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{i}^2 - \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{f}^2. \tag{7.40}$$

Pro $x_\mathrm{i} = 0$ a $x_\mathrm{f} = x$ je

$$W_\mathrm{p} = -\tfrac{1}{2}kx^2. \tag{7.41}$$

Výkon

Výkon síly je „*rychlost*“, s jakou tato síla koná práci. Vykoná-li síla v časovém intervalu Δt práci ΔW, je *průměrný výkon* v tomto časovém intervalu definován poměrem

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \tag{7.44}$$

Okamžitý výkon síly $\boldsymbol{F}$ je „okamžitá rychlost“ konání práce

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}. \tag{7.45}$$

Svírá-li síla $\boldsymbol{F}$ s trajektorií částice úhel φ, je okamžitý výkon roven

$$P = Fv\cos\varphi = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}, \tag{7.49, 7.50}$$

kde $\boldsymbol{v}$ je okamžitá rychlost částice.

Relativistická kinetické energie

Kinetickou energii objektu pohybujícího se rychlostí blízkou rychlosti světla c je třeba počítat z relativistického vztahu

$$E_\mathrm{k} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \tag{7.51}$$

Tento vztah přejde na tvar (7.1) v případě, že v je mnohem menší než c.

Princip invariance

Některé veličiny (např. hmotnost, síla, zrychlení a čas v newtonovské mechanice) jsou *invariantní*. To znamená, že při jejich měření v různých inerciálních vztažných soustavách zaznamenáváme stejné hodnoty. Jiné veličiny (například rychlost, kinetická energie, práce) mají v různých vztažných soustavách různé hodnoty. Fyzikální *zákony* však mají stejný *tvar* ve všech inerciálních vztažných soustavách. Tuto skutečnost nazýváme **principem invariance**.

OTÁZKY

1. Uspořádejte následující rychlosti tak, aby odpovídající hodnoty kinetické energie byly řazeny sestupně: (a) $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, (b) $\boldsymbol{v} = -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, (c) $\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$, (d) $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$, (e) $\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{i}$ a (f) $v = 5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, svírá-li vektor rychlosti s vodorovnou rovinou úhel 30°.

2. Rozhodněte, zda kinetická energie částice roste, klesá, či zůstává neměnná, platí-li pro rychlost částice (a) $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i}$, (b) $v = -4t$, $t > 0$.

3. Rozhodněte, zda kinetická energie částice roste, klesá, či zůstává neměnná, platí-li pro polohu částice (a) $x = 4t^2 - 2$, (b) $x = -3t + 14$, (c) $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} - 3t\boldsymbol{j}$, (d) $\boldsymbol{r} = (2t^2 - 3)\boldsymbol{i} + (4t - 2)\boldsymbol{j}$. Ve všech případech je $t > 0$.

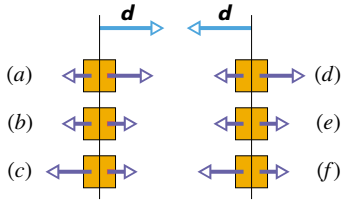
4. Na částici působí síla $\boldsymbol{F}$ ve směru osy x. Částice se posune po ose x o 5 m. Můžeme pro výpočet práce, kterou síla vykonala, použít vztahů (7.9) a (7.11), je-li její velikost (v newtonech) (a) $F = 3$, (b) $F = 2x$, (c) $F = 2t$?

5. Rozhodněte, zda práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při posunutí částice o vektor $\boldsymbol{d}$ je v následujících případech kladná, či záporná: (a) úhel mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$ je 30°, (b) úhel mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$ je 100°, (c) $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{d} = -4\boldsymbol{i}$.

6. Částice o hmotnosti 5 kg se pohybuje rovnoměrně po kružnici rychlostí o velikosti 4 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jakou práci vykoná dostředivá síla působící na částici (a) v libovolně zvoleném časovém intervalu, (b) během jednoho oběhu částice?

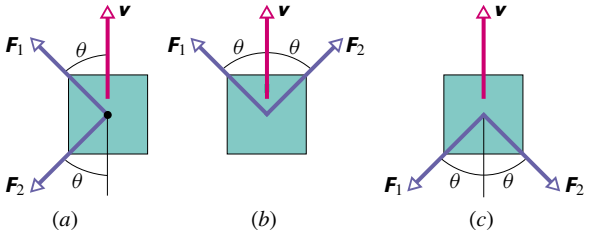
7. Na obr. 7.19 vidíme šest situací, v nichž na krabici pohybující se po vodorovné dokonale hladké podložce působí současně dvě síly. Jedna z nich směřuje vpravo, druhá vlevo. Síly mají velikosti 1 N, resp. 2 N, a v obrázku jsou znázorněny vektory

různých délek. V jednotlivých případech rozhodněte, zda je práce výslednice obou sil při posunutí krabice o vyznačený vektor **d** kladná, záporná, či nulová.



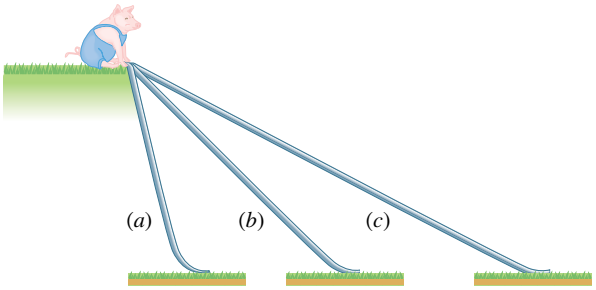
Obr. 7.19 Otázka 7

8. Na obr. 7.20 jsou v pohledu shora zobrazeny tři situace, kdy na krabici působí dvě síly ($\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$) stejných velikostí. Síly svírají s rychlostí krabice stálé úhly. Rozhodněte, zda celková práce, kterou síly konají při pohybu krabice, je kladná, záporná, či nulová.



Obr. 7.20 Otázka 8

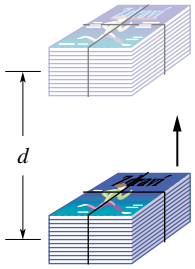
9. Vepřík na obr. 7.21 může sklouznout po jedné ze tří dokonale hladkých skluzavek. Uspořádejte skluzavky sestupně podle velikosti práce, kterou při takové jízdě vykoná tíhová síla působící na vepříka.



Obr. 7.21 Otázka 9

10. Představme si poměrně absurdní situaci. Ulovili jsme pásovce a chceme jej zvednout na mořský útes. Rozhodněte, zda práce vykonaná silou, kterou při tom na pásovce působíme, závisí (a) na jeho hmotnosti, (b) na tíhové síle, kterou na něj působí Země, (c) na výšce útesu, (d) na době, během níž pásovce zvedneme, (e) na tom, zda pásovce vychylujeme do stran, nebo jej zvedáme přímo vzhůru.

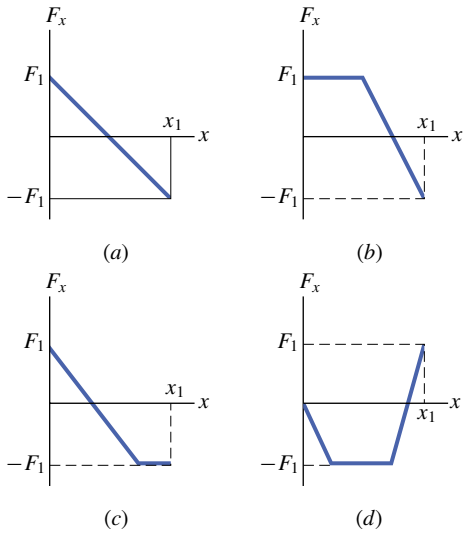
11. Obr. 7.22 zachycuje balík časopisů, který je třeba zvednout do výšky d. Balík zvedáme tahem za provaz, jímž je ovázán. V tabulce je uvedeno šest dvojic hodnot udávajících velikost rychlosti balíku (v metrech za sekundu) v_0, resp. v na počátku, resp. na konci jeho posunutí o svislou vzdálenost d. Uspořádejte tyto dvojice sestupně podle práce vykonané tahovou silou provazu při daném posunutí.



	a	b	c	d	e	f
$v =$	0	2	2	2	0	1
$v_0 =$	0	2	0	1	2	2

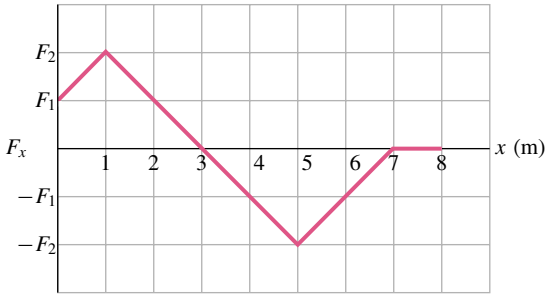
Obr. 7.22 Otázka 11

12. Na obr. 7.23 jsou znázorněny čtyři grafy závislosti proměnné síly $\boldsymbol{F}$, působící na částici pohybující se podél osy x, na poloze této částice. Poloha je určena souřadnicí x, síla $\boldsymbol{F}$ má směr osy x. Stupnice na odpovídajících si osách grafů jsou stejné. Seřaďte grafy sestupně podle hodnoty práce, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykonala při posunutí částice z polohy $x = 0$ do polohy x_1.



Obr. 7.23 Otázka 12

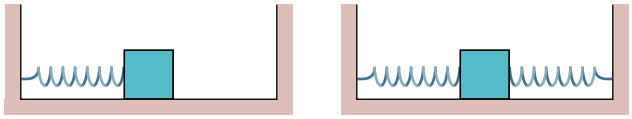
13. Síla $\boldsymbol{F}$ rovnoběžná s osou x působí na částici pohybující se ve směru osy x. Obr. 7.24 znázorňuje závislost této síly na



Obr. 7.24 Otázka 13

poloze částice, zadané souřadnicí x. V počáteční poloze $x = 0$ byla částice v klidu. Jaká je její poloha v okamžiku, kdy má (a) největší kinetickou energii, (b) největší rychlost, (c) nulovou rychlost? (d) Jaký je směr pohybu částice při jejím průchodu bodem o souřadnici $x = 6\,\mathrm{m}$?

14. Kostka je upevněna k volnému konci nenapjaté pružiny podle obr. 7.25a. Tuhost pružiny k je taková, že při posunutí kostky o vektor $\boldsymbol{d}$ vpravo vykoná pružná síla práci W_1. Velikost pružné síly na konci posunutí je F_1. Kostku připojíme na opačné straně ještě k druhé, stejné pružině, podle obr. 7.25b. Vzdálenost uchycení pružin je zvolena tak, aby ve výchozím stavu byly obě nenapjaté. Kostku posuneme opět o vektor $\boldsymbol{d}$. (a) Jaká je velikost výslednice sil, jimiž na kostku působí obě pružiny? (b) Jakou práci vykonaly pružné síly?

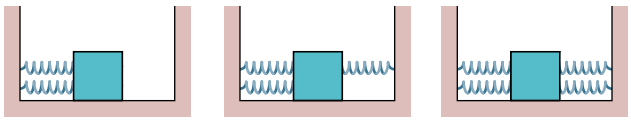


(*a*) (*b*)

Obr. 7.25 Otázka 14

15. Pružina A je tužší než pružina B, tj. $k_A > k_B$. Pružiny stlačujeme působením vnější síly tak, že (a) docílíme jejich stejného stlačení, (b) obě pružiny stlačujeme stejně velkými vnějšími silami. V každém z případů (a) a (b) rozhodněte, která z pružných sil $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$ vykonala větší práci.

16. Na obr. 7.26 jsou znázorněny tři situace. V každé z nich je kostka připojena ke stejným pružinám. V okamžiku, kdy je kostka uprostřed, jsou pružiny nenapjaté. Seřaďte situace sestupně podle velikosti výsledné síly, která bude působit na kostku posunutou o vzdálenost d (a) vpravo, (b) vlevo. Seřaďte situace sestupně podle celkové práce pružných sil působících na kostku posunutou o vzdálenost d (a) vpravo, (b) vlevo.



(1) (2) (3)

Obr. 7.26 Otázka 16

17. Jakým násobkem tuhosti pružiny je tuhost každé z pružin, které vzniknou rozpůlením pružiny původní? (*Tip*: Uvažte, jaké protažení každé z poloviční pružin způsobí vnější síla o dané velikosti.)

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 7.1 Kinetická energie

1C. Jaká je kinetická energie rakety Saturn V, spojené s kosmickou stanicí Apollo, je-li jejich celková hmotnost $2{,}9\cdot10^5$ kg a dosáhnou-li společné rychlosti $11{,}2\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$?

2C. Volný elektron (hmotnost $m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ kg) v mědi má při nejnižší dosažitelné teplotě kinetickou energii $6{,}7\cdot10^{-19}$ J. Jak velká je jeho rychlost?

3C. Určete kinetickou energii následujících objektů, pohybujících se danou rychlostí: (a) fotbalový obránce o hmotnosti 110 kg, který běží rychlostí 8,1 m/s, (b) kulka o hmotnosti 4,2 g letící rychlostí 950 m/s, (c) letadlová loď *Nimitz* o výtlaku 91 400 tun při rychlosti 32 uzlů (1 uzel $\doteq 0{,}51\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$).

4C. Dne 10. srpna 1972 proletěl atmosférou nad východním územím USA a Kanady velký meteorit. Odrážel se od horní vrstvy atmosféry, asi jako když se kamenem hází žabičky po vodě. Ohnivá koule na obloze byla tak jasná, že byla vidět i ve dne (obr. 7.27). Hmotnost meteoritu byla asi $4\cdot10^6$ kg, velikost jeho rychlosti zhruba $15\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Kdyby meteorit vstoupil do atmosféry ve svislém směru, dosáhl by povrchu Země s přibližně nezměněnou rychlostí. (a) Vypočtěte ztrátu energie meteoritu (v joulech) při jeho zabrzdění po kolmém dopadu na povrch Země. (b) Vyjádřete tuto energii jako násobek energie uvolněné při výbuchu jedné megatuny TNT, která činí $4{,}2\cdot10^{15}$ J. (c) Energie uvolněná při výbuchu atomové bomby svržené na Hirošimu byla ekvivalentní 13 kilotunám TNT. Kolika „hirošimským bombám“ odpovídá srážka meteoritu se Zemí?



Obr. 7.27 Cvičení 4. Velký meteorit prolétá atmosférou nad pohořím (vpravo nahoře).

5C. Výbuch na zemském povrchu zanechá kráter, jehož průměr je úměrný třetí odmocnině z energie, která se při tom uvolnila. Při výbuchu jedné megatuny TNT vznikne kráter o průměru 1 km. Pod Huronským jezerem v Michiganu byl objeven starý kráter o průměru 50 km. Jaká byla kinetická energie tělesa, které kráter vytvořilo, vyjádřená (a) v megatunách TNT, (b) v jednotkách odpovídajících ekvivalentu hirošimské bomby (cvič. 4)? (Takový dopad meteoritu nebo komety mohl významně ovlivnit pozemské podnebí či přispět k vyhynutí dinosaurů i jiných forem života.)

6Ú. Proton (hmotnost $m = 1{,}67{\cdot}10^{-27}$ kg) prochází *lineárním urychlovačem* se zrychlením o velikosti $3{,}6{\cdot}10^{15}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Počáteční rychlost protonu byla $2{,}4{\cdot}10^{7}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jaká je velikost jeho rychlosti poté, co prošel vzdálenost 3,5 cm? (b) Jaký je přírůstek jeho kinetické energie v elektronvoltech?

7Ú. Otec běží o závod se svým synem. Kinetická energie otce je ve srovnání se synem poloviční, hmotnost dvojnásobná. Jestliže otec zvýší svou rychlost o $1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, bude mít stejnou kinetickou energii jako syn. Určete velikost počáteční rychlosti otce i syna.

8Ú. Jaká je kinetická energie Země při jejím oběhu kolem Slunce? (Potřebné číselné údaje vyhledejte v dodatku C.)

ODST. 7.3 Práce a kinetická energie

9C. Objekt o hmotnosti 102 kg se pohybuje po vodorovné přímce a je brzděn se zpožděním $2{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jeho počáteční rychlost má velikost $53\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jaká je velikost brzdící síly? (b) Jakou vzdálenost těleso urazí, než se zastaví? (c) Jakou práci vykoná brzdná síla? (d) Zodpovězte otázky (a) až (c) pro případ, že zpoždění je $4{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

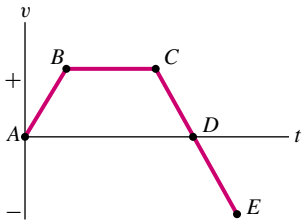
10C. Dělník vleče bednu o hmotnosti 50 kg po dokonale hladké vodorovné podlaze. Působí na ni při tom silou o velikosti 210 N pod úhlem 20° vzhledem k podlaze. Zjistěte, jakou práci vykonaly při posunutí bedny o 3,0 m následující síly: (a) síla, kterou působí na bednu dělník, (b) tíhová síla, (c) tlaková síla, jíž působí na bednu podlaha. (d) Jaká je celková práce všech sil působících na bednu?

11C. Plovoucí ledová kra je hnána proudem vody podél pobřeží. Proud na ni působí silou $\boldsymbol{F} = (210\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} - (150\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Jakou práci vykoná tato síla při posunutí kry o vektor $\boldsymbol{d} = (15\ \mathrm{m})\boldsymbol{i} - (12\ \mathrm{m})\boldsymbol{j}$?

12C. Částice se posune po přímce o vektor $\boldsymbol{d} = (8\ \mathrm{m})\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j}$. Jedna ze sil, které na částici působí, je $\boldsymbol{F} = (2\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} - (4\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Pro jaké hodnoty c je práce této síly při posunutí $\boldsymbol{d}$ (a) nulová, (b) kladná, (c) záporná?

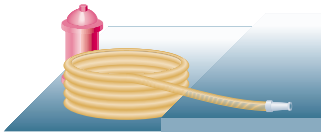
13C. Proton, který byl zpočátku v klidu, byl v cyklotronu urychlen na výslednou rychlost o velikosti $3{,}0{\cdot}10^{6}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jakou práci (v elektronvoltech) při tom vykonala elektrická síla, která proton urychlila? (I když velikost zadané rychlosti činí již 1 % rychlosti světla, nepočítejte s relativistickou opravou.)

14C. Na částici pohybující se po přímce působí jediná síla. Obr. 7.28 ukazuje časovou závislost rychlosti částice. Určete znaménko (plus, resp. minus) práce, kterou tato síla vykoná v každém z časových intervalů AB, BC, CD a DE.



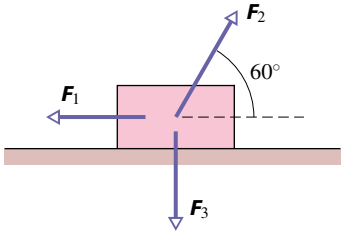
Obr. 7.28 Cvičení 14

15C. Dvanáctimetrovou požární hadici (obr. 7.29) rozvíjíme tak, že její konec s tryskou táhneme po dokonale hladké podlaze stálou rychlostí o velikosti $2{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Hmotnost jednoho metru hadice je 0,25 kg (její délková hustota tedy je $0{,}25\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$). Jakou práci vykoná síla působící na hadici při jejím rozvíjení do okamžiku, kdy je celá hadice v pohybu?



Obr. 7.29 Cvičení 15

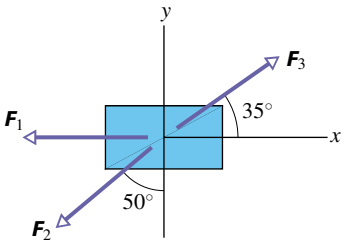
16Ú. Na obr. 7.30 jsou znázorněny tři síly působící na kufr, který se posune o 3,00 m vlevo po dokonale hladké podlaze. Velikosti sil jsou $F_1 = 5{,}00$ N, $F_2 = 9{,}00$ N a $F_3 = 3{,}00$ N. (a) Jaká je celková práce těchto sil při uvedeném posunutí kufru? (b) Rozhodněte, zda kinetická energie kufru vzroste, nebo poklesne.



Obr. 7.30 Úloha 16

17Ú. Síla $\boldsymbol{F}$ působí na částici o hmotnosti 3,0 kg tak, že její poloha závisí na čase vztahem $x = 3{,}0t - 4{,}0t^2 + 1{,}0t^3$. Souřadnice x je zadána v metrech a čas t v sekundách. Určete práci síly $\boldsymbol{F}$ v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 4{,}0$ s. (*Tip*: Určete rychlost částice v obou okamžicích.)

18Ú. Obr. 7.31 představuje pohled shora na nádobu pohybující se po dokonale hladké podlaze, na kterou působí tři síly. Nádoba byla zpočátku v klidu. Velikosti sil jsou $F_1 = 3{,}00$ N, $F_2 = 4{,}00$ N a $F_3 = 10{,}00$ N. Jakou celkovou práci tyto síly vykonají při posunutí nádoby o 4,00 m od okamžiku, kdy se dala do pohybu?



Obr. 7.31 Úloha 18

19Ú. Na částici o hmotnosti 2,0 kg působí stálá síla o velikosti 10 N, která svírá se směrem kladné osy x úhel 150°

(měřeno v kladném smyslu, tj. proti směru otáčení hodinových ručiček). Jakou práci vykoná tato síla při posunutí částice z počátku soustavy souřadnic do bodu o polohovém vektoru $(2{,}0\text{ m})\boldsymbol{i} - (4{,}0\text{ m})\boldsymbol{j}$?

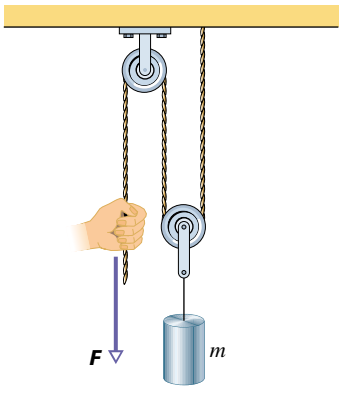
ODST. 7.4 Práce tíhové síly

20C. (a) Při úpravách montrealského velodromu v roce 1975 bylo třeba vycentrovat jeho střechu vážící 41 000 tun. K tomu bylo nutné ji nadzvednout asi o 10 cm. Jakou práci při tom vykonaly síly, které střechu zvedaly? (b) V roce 1960 prý paní Maxwell Rogersová z Tampy na Floridě dokázala nadzvednout jeden konec auta, které spadlo na jejího syna poté, co selhal zvedák. Připusťme, že v takovém šoku byla skutečně schopna nadzvednout automobil o váze 16 000 N silou o velikosti 4 000 N asi o 5 cm. Jakou práci tato síla vykonala?

21C. Dělník tlačí bednu o hmotnosti 25,0 kg vzhůru po dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 25,0°. Působí na ni při tom silou o velikosti 209 N, která je rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Vypočtěte práci, kterou při posunutí bedny o 1,50 m vykonají síly působící na bednu: (a) síla, kterou působí dělník, (b) tíhová síla, (c) normálová (tlaková) síla nakloněné roviny. (d) Jaká je celková práce, kterou vykonaly síly působící na bednu?

22C. Kostka ledu o hmotnosti 45 kg klouže dolů po nakloněné rovině dlouhé 1,5 m a vysoké 0,91 m. Dělník tlačí kostku silou směřující vzhůru podél nakloněné roviny tak, aby klesala stálou rychlostí. (a) Jakou silou působí dělník na kostku? Určete práci, kterou vykonají síly působící na kostku: (b) síla, kterou působí dělník, (c) tíhová síla, (d) normálová síla, jíž působí na kostku povrch nakloněné roviny, (e) výsledná síla.

23C. Na obr. 7.32 je znázorněno zařízení s volnou kladkou: provaz je veden přes dvě nehmotné kladky, které se mohou otáčet bez tření. Na volné kladce visí nádoba o hmotnosti $m = 20$ kg, na volný konec provazu působíme silou $\boldsymbol{F}$. (a) Jak velká musí



Obr. 7.32 Cvičení 23

být síla $\boldsymbol{F}$, máme-li nádobu zvedat stálou rychlostí? (b) O jakou vzdálenost musíme posunout volný konec provazu, chceme-li nádobu zvednout o 2,0 cm? Určete, jakou práci vykonají při tomto posunutí následující síly: (c) síla $\boldsymbol{F}$, (d) tíhová síla působící na nádobu. (*Tip*: Provaz vedený přes kladku podle obrázku na ni působí celkovou silou, jejíž velikost je rovna dvojnásobku velikosti tahové síly provazu.)

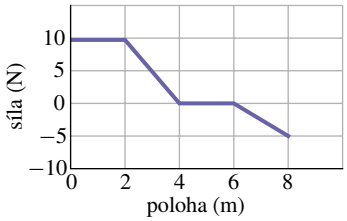
24Ú. Helikoptéra zvedala 72 kg astronauta na laně z hladiny oceánu do výšky 15 m se zrychlením $g/10$. Určete práci, kterou při tom vykonaly síly působící na astronauta: (a) síla, kterou působila helikoptéra, (b) tíhová síla. Jakou (c) kinetickou energii a (d) rychlost astronaut získal?

25Ú. Kostku o hmotnosti M, která byla zpočátku v klidu, spouštíme na laně svisle dolů se zrychlením $g/4$. Jakou práci vykonala (a) tahová síla lana, (b) tíhová síla, do okamžiku, kdy kostka poklesla o vzdálenost d? (c) Jaká je v tomto okamžiku kinetická energie kostky a (d) její rychlost?

26Ú. Speleologická záchranná četa zvedá zraněného průzkumníka ze zborcené jeskyně přímo vzhůru na laně navíjeném pomocí motoru. Akce má tři fáze, z nichž každá vyžaduje zvednutí člověka o svislou vzdálenost 10,0 m: (1) Člověk, který byl zpočátku v klidu, je zvedán s jistým zrychlením, až dosáhne rychlosti o velikosti 5,00 m·s^{-1}. (2) Další zdvih se děje stálou rychlostí, jíž bylo dosaženo v předchozí fázi. (3) Následuje rovnoměrně zpožděný pohyb až do zastavení. Jakou práci vykoná v každé fázi pohybu síla, jíž působí na speleologa tažné lano?

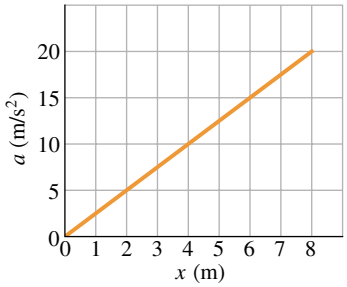
ODST. 7.5 Práce proměnné síly

27C. Kostka o hmotnosti 5,0 kg se pohybuje přímočaře po dokonale hladké vodorovné rovině. Na kostku působí síla, jejíž závislost na poloze kostky je znázorněna na obr. 7.33. Jakou práci vykoná tato síla při přemístění kostky z počátku soustavy souřadnic do polohy o souřadnici $x = 8{,}0$ m?



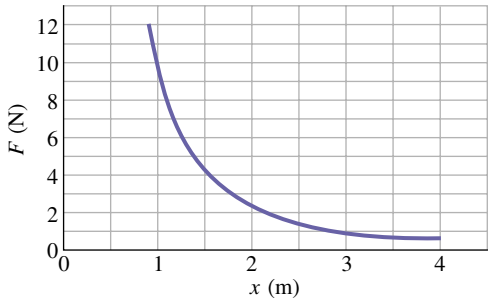
Obr. 7.33 Cvičení 27

28C. Těleso o hmotnosti 10 kg se pohybuje po ose x. Závislost jeho zrychlení na poloze je znázorněna na obr. 7.34. Jaká je celková práce vykonaná silami, které udělují tělesu toto zrychlení, jestliže se těleso přemístí z polohy $x = 0$ do polohy $x = 8{,}0$ m?



Obr. 7.34 Cvičení 28

29Ú. (a) Na částici pohybující se po ose x působí ve směru této osy síla, jejíž závislost na poloze částice je znázorněna v grafu 7.35. Odhadněte práci této síly při přemístění částice z polohy $x = 1\,\text{m}$ do polohy $x = 3\,\text{m}$. Zjemněte použitou metodu tak, abyste si udělali představu, jak blízko se vám podařilo přiblížit se přesné hodnotě 6 J. (b) Rovnice znázorněné křivky má tvar $F = ax^{-2}$, kde $a = 9\,\text{N}\cdot\text{m}^2$. Vypočtěte hledanou práci pomocí integrace.



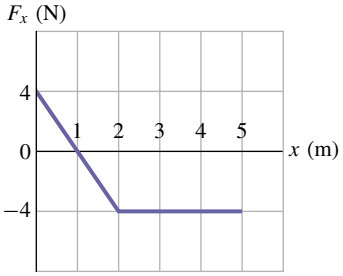
Obr. 7.35 Úloha 29

30Ú. Na částici působí síla $F = F_0(\frac{x}{x_0} - 1)$. Určete práci této síly při přemístění částice z polohy $x = 0$ do polohy $x = 2x_0$ (a) přibližně z grafu závislosti $F(x)$, (b) integrací funkce $F(x)$ v daných mezích proměnné x.

31Ú. Jakou práci vykoná síla $\boldsymbol{F} = (2x\,\text{N})\boldsymbol{i} + (3\,\text{N})\boldsymbol{j}$ působící na částici při jejím posunutí z polohy $\boldsymbol{r}_\text{i} = (2\,\text{m})\boldsymbol{i} + (3\,\text{m})\boldsymbol{j}$ do polohy $\boldsymbol{r}_\text{f} = -(4\,\text{m})\boldsymbol{i} - (3\,\text{m})\boldsymbol{j}$?

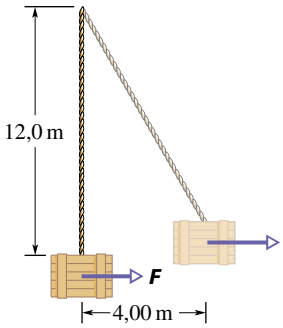
32Ú. Síla $\boldsymbol{F}$ působí na částici pohybující se podél osy x. Síla má směr kladně orientované osy x a závislost její velikosti na poloze částice je popsána funkcí $F(x) = 10\exp(-x/2{,}0)\,\text{N}$, kde proměnná x je zadávána v metrech. Určete práci síly $\boldsymbol{F}$ při posunutí částice z počátku osy x do polohy o souřadnici $x = 2{,}0\,\text{m}$ (a) jako obsah plochy pod grafem funkce $F(x)$, (b) výpočtem pomocí integrálu.

33Ú. Na těleso o hmotnosti 2,0 kg působí při jeho pohybu podél osy x jediná síla. Její závislost na poloze tělesa je znázorněna na obr. 7.36. Rychlost tělesa v bodě $x = 0$ je $v_x = 4{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Jaká je kinetická energie tělesa v bodě $x = 3\,\text{m}$? (b) V jaké poloze x má těleso kinetickou energii 8 J? (c) Jaká je největší kinetická energie, které těleso dosáhne během pohybu z polohy $x = 0$ do polohy $x = 5{,}0\,\text{m}$?



Obr. 7.36 Úloha 33

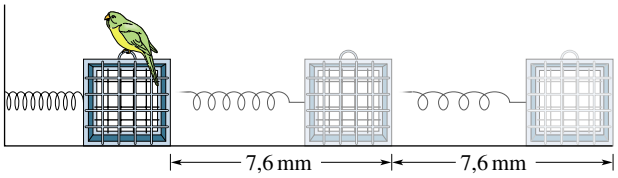
34Ú. Bedna o hmotnosti 230 kg visí na konci lana o délce 12,0 m. Na bednu začneme působit ve vodorovném směru silou $\boldsymbol{F}$ o proměnné velikosti a posuneme ji o 4,00 m ve vodorovném směru, jak ukazuje obr. 7.37. (a) Jaká je velikost síly $\boldsymbol{F}$ v koncové poloze bedny? (b) Jakou celkovou práci vykonaly síly působící na bednu při jejím posunutí? (c) Jakou práci vykonala tíhová síla a (d) tahová síla lana? (e) Za předpokladu, že bedna byla zpočátku v klidu, určete pomocí výsledků (b), (c) a (d) práci síly $\boldsymbol{F}$. (f) Vysvětlete, proč práce síly $\boldsymbol{F}$ není rovna součinu velikosti vodorovného posunutí bedny a velikosti síly $\boldsymbol{F}$ zjištěné v části (a) této úlohy?



Obr. 7.37 Úloha 34

ODST. 7.6 Práce pružné síly

35C. Ke konci pružiny o tuhosti $15\,\text{N}\cdot\text{cm}^{-1}$ je připevněna klec (obr. 7.38). (a) Jakou práci vykoná síla, jíž působí pružina na klec, při stlačení o 7,6 mm z výchozího nenapjatého stavu? (b) Jakou práci vykoná při dalším stlačení o 7,6 mm?



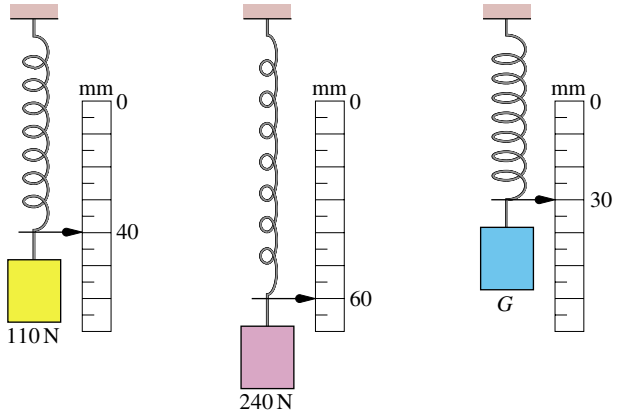
Obr. 7.38 Cvičení 35

36C. Studenti MIT (Massachusetts Institute of Technology, jedna z renomovaných univerzit v USA) obývající dvě sousední budovy studentské koleje East Campus zorganizovali jednou v rámci obvyklých studentských recesí bitvu, při níž používali praků vyrobených z chirurgických hadic, uchycených v okenních rámech. Míč naplněný obarvenou vodou vložili do „kapsy“ praku, připevněné k hadici. Hadici pak napjali přes celou šířku pokoje, uvolnili a míč tak vymrštili proti soupeřům bydlícím v protilehlé budově. Předpokládejme, že se napjatá hadice řídí Hookovým zákonem a že její tuhost je $100\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Jakou práci vykoná pružná síla, jíž působí hadice na kapsu s míčem, od okamžiku uvolnění hadice protažené o 5,00 m do okamžiku vymrštění míče, kdy je již hadice v nenapjatém stavu?

37Ú. Těleso o hmotnosti 2,0 kg se pohybuje po ose x. x-ová složka jediné síly, která na těleso působí, je tvaru $F_x = -6x\,\text{N}$. Souřadnice x je zadána v metrech. Rychlost tělesa v bodě o souřadnici $x = 3{,}0\,\text{m}$ je $v_x = 8{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Jaká je rychlost tělesa

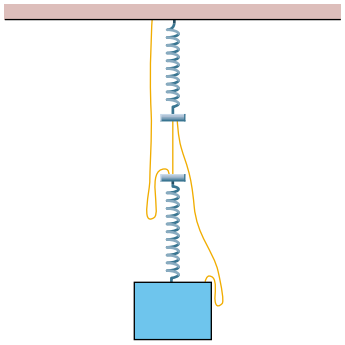
v poloze $x = 4{,}0\,\mathrm{m}$? (b) V jaké poloze má těleso rychlost $v_x = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$?

38Ú. Pružinový siloměr má stupnici cejchovanou v milimetrech. Na siloměr zavěšujeme postupně tři různá závaží (obr. 7.39). (a) Jakou hodnotu ukáže ukazatel siloměru na stupnici, jestliže závaží sejmeme? (b) Jaká je velikost tíhové síly G?



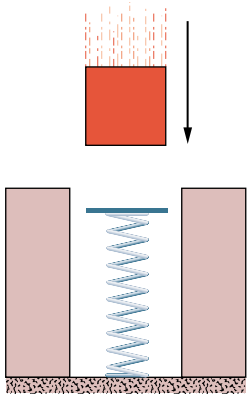
Obr. 7.39 Úloha 38

39Ú. Na obr. 7.40 jsou znázorněny dvě stejné pružiny spojené krátkým vláknem o délce 10 cm. Délka každé z pružin v nenapjatém stavu je 50 cm a tuhost $500\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Horní pružina je připevněna ke stropu, na volném konci dolní pružiny visí krabice o váze 100 N. Další dvě ohebná vlákna, každé o délce 85 cm (v dobrém přiblížení neměnné) jsou k soustavě připojena podle obrázku. Krátké vlákno přepálíme, takže krabice zůstane zavěšena pouze na pružinách a dlouhých vláknech a začne se pohybovat. Vlivem odporové síly prostředí se krabice nakonec zastaví v nové rovnovážné poloze. (a) Rozhodněte, zda tato poloha bude ležet nad, či pod původní rovnovážnou polohou, kterou zaujímala krabice před přepálením krátkého vlákna a (b) určete, jak daleko bude od ní vzdálena. (c) Jakou celkovou práci vykonaly pružné síly obou pružin v časovém intervalu mezi přepálením vlákna a ustálením nové rovnovážné polohy?



Obr. 7.40 Úloha 39

40Ú. Kostka o hmotnosti 250 g dopadne na svislou pružinu o tuhosti $k = 2{,}5\,\mathrm{N\cdot cm^{-1}}$ (obr. 7.41) a pevně se s ní spojí. Soustava začne kmitat. V okamžiku, kdy kostka poprvé dosáhne bodu obratu, je stlačení pružiny $d = 12\,\mathrm{cm}$. Určete, jakou práci vykonaly do tohoto okamžiku následující síly působící na kostku: (a) tíhová síla, (b) pružná síla. (c) Jaká byla rychlost kostky bezprostředně před dopadem na pružinu? (Třecí a odporové síly považujeme za zanedbatelné.) (d) Jaké by bylo maximální stlačení pružiny při dvojnásobné rychlosti dopadu kostky?



Obr. 7.41 Úloha 40

ODST. 7.7 Výkon

41C. Plně zatížená kabina výtahu má hmotnost $3{,}0\cdot10^3$ kg a stoupá stálou rychlostí. Za 23 s urazí 210 m. Jaký je průměrný výkon tahové síly lana kabiny?

42C. Lyžařský výtah vytáhne 100 lyžařů, z nichž každý má hmotnost průměrně 70 kg, do výšky 150 m za 60 s. Rychlost pohybu je konstantní. Jaký je průměrný výkon tažné síly výtahu?

43C. Kabina nákladní zdviže má hmotnost 4 500 kg, nejvyšší povolená hmotnost nákladu je 1 800 kg. Jaký musí být výkon tahové síly lana zdviže, zvedá-li se plně naložená kabina stálou rychlostí $3{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$?

44C. (a) Určete okamžitý výkon síly $\boldsymbol{F} = (4{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} - (2{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j} + (9{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{k}$ působící na částici, v okamžiku, kdy je její rychlost $\boldsymbol{v} = -(2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} + (4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{k}$. (b) Předpokládejme, že v jiném okamžiku má rychlost částice nenulový průmět pouze do směru vektoru $\boldsymbol{j}$ a že síla $\boldsymbol{F}$ zůstala nezměněna. Jaká je nyní rychlost částice, je-li okamžitý výkon síly $-12\,\mathrm{W}$?

45Ú. Kostka o hmotnosti 100 kg je tažena stálou rychlostí o velikosti $5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ po dokonale hladké podlaze silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti 122 N. Síla svírá s podlahou úhel 37° a je orientován směrem vzhůru. Jaký je výkon síly $\boldsymbol{F}$?

46Ú. Kůň táhne vozík silou o velikosti 180 N svírající s vodorovnou rovinou úhel +30°. Jedou stálou rychlostí o velikosti $10\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. (a) Jakou práci vykoná tažná síla během 10 min jízdy? (b) Jaký je průměrný výkon této síly (ve wattech a v jednotkách HP)?

47Ú. Těleso o hmotnosti 2,0 kg, které bylo zpočátku v klidu, se začne pohybovat rovnoměrně zrychleně a během 3,0 s dosáhne rychlosti o velikosti $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Jakou práci vykoná výsledná urychlující síla během uvedených 3,0 s? Jaký je okamžitý výkon

této síly (b) na konci uvedeného časového intervalu a (c) na konci jeho první poloviny?

48Ú. Síla o velikosti 5,0 N začne působit na těleso o hmotnosti 15 kg, které je zpočátku v klidu. Určete (a) práci, kterou tato síla vykoná během první, druhé a třetí sekundy od počátku pohybu, a (b) okamžitý výkon síly na konci třetí sekundy.

49Ú. Kabina plně naložené nákladní zdviže má hmotnost 1 200 kg. Kabinu je třeba zvednout do výšky 54 m za 3,0 min. Protizávaží má hmotnost pouze 950 kg, takže motor zdviže musí napomáhat k vyvažování kabiny. Jaký musí být průměrný výkon (v jednotkách HP) tažné síly motoru, který působí na kabinu prostřednictvím tažného lana?

50Ú. Síla, kterou je třeba vléci loď, aby se pohybovala rovnoměrně, je úměrná okamžité rychlosti lodi. (Tato síla musí kompenzovat odporovou sílu vody.) Její výkon při rychlosti 4 km/h je 7,5 kW. Jaký okamžitý výkon tažné síly odpovídá rychlosti 12 km/h?

51Ú. Tělísko o hmotnosti 0,30 kg, které může klouzat po vodorovné dokonale hladké podložce, je připevněno k volnému konci pružiny o tuhosti $k = 500\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, jejíž druhý konec je pevný. V okamžiku průchodu rovnovážnou polohou (v tomto okamžiku je pružná síla působící na tělísko nulová) má tělísko kinetickou energii 10 J. (a) Jaký je okamžitý výkon pružné síly při průchodu tělíska rovnovážnou polohou? (b) Jaký je okamžitý výkon pružné síly v okamžiku, kdy je pružina stlačena o 0,10 m a tělísko se vzdaluje od rovnovážné polohy?

ODST. 7.8 Kinetická energie při vysokých rychlostech

52C. Elektron urazí dráhu 5,1 cm za 0,25 ns. (a) Vyjádřete jeho rychlost v jednotkách rychlosti světla a (b) jeho kinetickou energii v elektronvoltech. (c) Jak velké chyby v procentech se dopustíme při výpočtu kinetické energie, použijeme-li klasickou formuli namísto relativistické?

53C. Vztah mezi prací a kinetickou energií lze použít pro částice s libovolnou rychlostí. Jakou práci (v elektronvoltech) je třeba vykonat při urychlení elektronu z klidu na rychlost o velikosti (a) $0{,}500c$, (b) $0{,}990c$, (c) $0{,}999c$?

54Ú. Elektron má rychlost o velikosti $0{,}999c$. (a) Jaká je jeho kinetická energie? (b) O kolik procent vzroste jeho kinetická energie, vzroste-li velikost rychlosti o 0,05 %?

PRO POČÍTAČ

55Ú. Síla $\boldsymbol{F} = (3{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (7{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{j} + (7{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{k}$ působí na těleso o hmotnosti 2,00 kg, které se posune z počáteční polohy $\boldsymbol{d}_\mathrm{i} = (3{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} - (2{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (5{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$ do koncové polohy $\boldsymbol{d}_\mathrm{f} = -(5{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (4{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (7{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$ za dobu 4,00 s. Určete (a) práci síly $\boldsymbol{F}$ v uvedeném časovém intervalu, (b) její průměrný výkon v tomto intervalu a (c) úhel mezi vektory $\boldsymbol{d}_\mathrm{i}$ a $\boldsymbol{d}_\mathrm{f}$.

8
Potenciální energie a zákon zachování energie

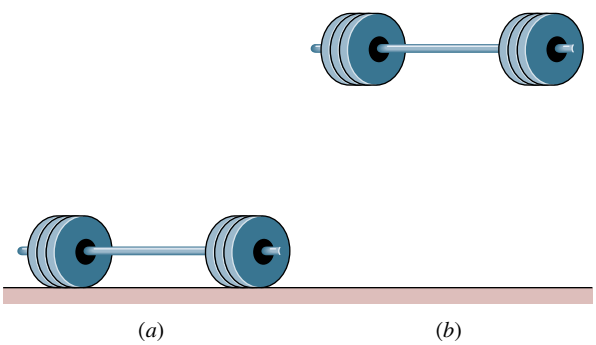


Jedním z nebezpečných „sportů“ je bungee-jumping (v překladu „zaražené skákání“). Skokan, připoutaný za kotníky ke speciálnímu pružnému lanu, se vrhá dolů z velké výšky, většinou z vysokých mostních konstrukcí. Napínající se lano způsobí zbrzdění střemhlavého letu. Lze vůbec zjistit, jaké největší hloubky skokan dosáhne? Odpověď na tuto otázku je pochopitelně obecně zajímavá, pro skokana však navíc životně důležitá.

8.1 POTENCIÁLNÍ ENERGIE

V kap. 7 jsme definovali kinetickou energii částice, resp. bodového objektu a přesvědčili jsme se, že její změny bezprostředně souvisejí se silami, jimiž na částici působí její okolí. Změna kinetické energie částice je totiž rovna výsledné práci všech těchto sil. Uvědomili jsme si také, že v případě soustavy částic či tělesa, které nelze považovat za bodový objekt, přispěje ke změně kinetické energie nejen práce sil, jimiž působí na částice soustavy její okolí, ale i práce interakčních sil, jimiž na sebe částice soustavy působí navzájem. V této kapitole se budeme problémem práce těchto *vnitřních sil* zabývat podrobněji a ukážeme, že za jistých podmínek lze pomocí ní definovat nový typ energie *soustavy*, tzv. **potenciální energii** E_p. Vzhledem k její souvislosti s **konfigurací** soustavy (tj. uspořádáním částic) hovoříme někdy o energii konfigurační. Mění-li se konfigurace soustavy, mění se i její potenciální (konfigurační) energie.

Jedním z typů potenciální energie je **tíhová**, případně* **gravitační** potenciální energie, jež souvisí s konfigurací soustavy částic, které na sebe působí tíhovými (gravitačními) silami. Když Vasilij Aleksejev zvedal nad hlavu 562librovou činku, zvyšoval tím vzdálenost mezi činkou a Zemí. Měnil tak konfiguraci soustavy činka + Země a tím i její tíhovou potenciální energii (obr. 8.1).



(*a*) (*b*)

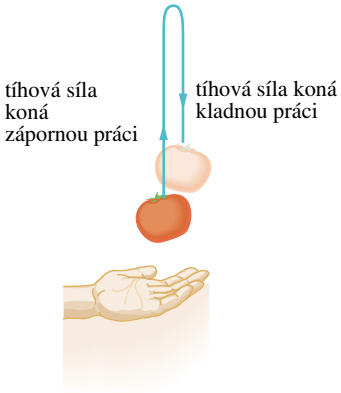
Obr. 8.1 Při zvedání činky nad hlavu zvyšoval V. Aleksejev její vzdálenost od Země a měnil tak konfiguraci soustavy činka + + Země z výchozí konfigurace (a) ve výslednou (b).

Jiným typem potenciální energie je **pružná potenciální energie**, která souvisí se stavem napjatosti (protažení či stlačení) pružných těles, například pružin. Silou, která zde hraje podstatnou roli, je pružná síla. Stlačíme-li nebo napneme-li pružinu, měníme tím vzájemné polohy jejích závitů. Pružná síla působí proti takovým změnám a to vede ke zvýšení pružné potenciální energie pružiny.

* Jemný rozdíl mezi nimi vyložíme v čl. 14.4.

Práce a potenciální energie

Pro úvahy o souvislosti práce vnitřních sil působících v soustavě částic a změnách potenciální energie zvolíme nejprve nejjednodušší možný model, soustavu libovolné těleso + Země. Vraťme se proto k příkladu jablíčka, vrženého svisle vzhůru podle obr. 8.2. Pro jednoduchost zanedbejme otáčení Země kolem Slunce i její rotaci kolem vlastní osy a popisujme vše v takové inerciální soustavě, v níž jsou obě tělesa Země + jablíčko zpočátku v klidu. V kap. 7 jsme konstatovali, že ve fázi výstupu je práce W_g vykonaná tíhovou silou působící na jablíčko záporná a kinetická energie jablíčka vzhledem k Zemi klesá.



Obr. 8.2 Rajské jablíčko je vrženo vzhůru. Při výstupu koná tíhová síla zápornou práci a kinetická energie jablíčka vzhledem k Zemi klesá. Roste však tíhová potenciální energie soustavy jablíčko + Země. Při sestupu je práce tíhové síly působící na jablíčko kladná, jeho kinetická energie vzhledem k Zemi roste a tíhová potenciální energie soustavy klesá.

Můžeme zřejmě očekávat, že potenciální energie soustavy jablíčko + Země, kterou se snažíme definovat jako energii závislou na vzájemné poloze obou částic, roste právě na úkor kinetické energie.

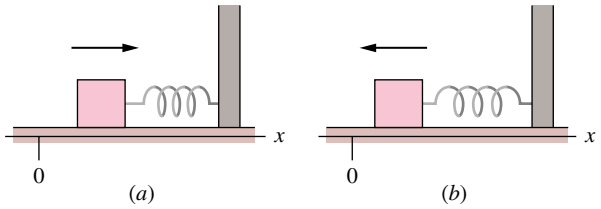
V další fázi pokusu se jablíčko zpomaluje, zastaví se a začíná padat, neboť je k Zemi přitahováno tíhovou silou. Při pádu se energiové poměry obrátí: práce W_g vykonaná tíhovou silou je nyní kladná, kinetická energie jablíčka roste a tíhová potenciální energie soustavy jablíčko+Země klesá. Úvahy z kap. 7 nyní zpřesníme.

Při pohybu tělesa v blízkosti povrchu Země je změna ΔE_p tíhové potenciální energie soustavy těleso + Země definována jako záporně vzatá práce vykonaná interakčními tíhovými silami $\boldsymbol{F}_g$ a $-\boldsymbol{F}_g$. Píšeme

$$\Delta E_p = -W_g. \qquad (8.1)$$

Veličinu E_p nazýváme **tíhovou potenciální energií soustavy** těleso + Země nebo také **potenciální energií tělesa**

v tíhovém poli Země. Při užívání druhého z obou názvů bychom si měli neustále připomínat, že potenciální energie přísluší *soustavě* obou objektů, tělesa i Země, neboť je definována pomocí práce *obou* interakčních sil. Stejný vztah platí pro soustavu kostka+pružina s upevněným koncem (obr. 8.3), přesněji řečeno pro soustavu kostka + Země s přidanou pružnou interakcí, zprostředkovanou pružinou. Jestliže náhle udeříme do kostky směrem vpravo a uvedeme ji tak do pohybu, koná pružná síla působící na kostku během pohybu vpravo zápornou práci. Kinetická energie kostky klesá a na její úkor roste pružná potenciální energie soustavy. (Vzhledem k tomu, že tato potenciální energie je určena výhradně změnou délky pružiny, hovoříme někdy stručně o potenciální energii pružiny.) Kostka se zpomaluje, zastaví se a začne se vlivem pružné síly pohybovat v opačném směru. Směr energiových změn se obrátí, kinetická energie kostky roste na úkor pružné potenciální energie soustavy.



Obr. 8.3 Kostka, která je připevněná k pružině a je zpočátku v klidu v poloze $x = 0$, je uvedena do pohybu směrem vpravo. (a) Při pohybu kostky vpravo (vyznačeno šipkou) koná pružná síla působící na kostku zápornou práci. Kinetická energie kostky klesá a potenciální energie pružiny roste. Kostka se zastaví v okamžiku, kdy je její kinetická energie nulová. (b) Poté se kostka pohybuje zpět směrem k poloze $x = 0$, pružná síla koná kladnou práci, kinetická energie kostky roste za současného poklesu potenciální energie pružiny.

Konzervativní a nekonzervativní síly

Shrňme klíčové prvky diskuse týkající se předchozích dvou situací:

1. *Soustava* se skládá ze dvou nebo více objektů.
2. Sledovaná částice (jablíčko, resp. kostka) a zbytek soustavy na sebe navzájem působí *interakčními silami*.
3. Mění-li se konfigurace soustavy, konají interakční síly práci W_1 a kinetická energie soustavy E_k se mění.
4. Obrátí-li se směr změn konfigurace soustavy, konají interakční síly práci W_2.

Jestliže za všech okolností platí $W_1 = -W_2$, lze pomocí práce interakčních sil definovat potenciální energii soustavy. O interakčních silách hovoříme v takovém případě jako o **silách konzervativních**. Jak se dalo tušit, jsou tíhová i pružná síla silami konzervativními (jinak bychom nemohli mluvit o tíhové či pružné potenciální energii).

Ne všechny síly jsou ovšem konzervativní. Představme si například kostku, jak klouže po podlaze, která není dokonale hladká. Při pohybu kostky koná dynamická třecí síla zápornou práci. Pohyb kostky se zpomaluje, její kinetická energie klesá. Nakonec se kostka zastaví a její kinetická energie je nulová. Práce třecích sil, jimiž na sebe navzájem působí kostka a podlaha podél styčných ploch, se spotřebovala na zvýšení vnitřní energie soustavy kostka + podlaha (dokladem toho je zahřátí obou těles). Experimentálně je však prokázáno, že opačný proces není možný: kostku nedokážeme uvést do pohybu tím, že ji ochladíme. I když tedy v soustavě kostka + podlaha působí interakční (třecí) síly, které konají práci na úkor kinetické energie soustavy, nelze tuto práci vyjádřit jako změnu nějakého druhu potenciální energie. Vnitřní energie soustavy kostka + podlaha není energií potenciální, síly tření jsou silami **nekonzervativními**.

Působí-li na částici výhradně konzervativní síly, můžeme jinak složitý problém jejího pohybu značně zjednodušit. V následujícím článku formulujeme kritéria, na základě nichž lze rozpoznat konzervativní síly, a vyjasníme si, v čem zmíněné zjednodušení spočívá.

8.2 NEZÁVISLOST PRÁCE KONZERVATIVNÍCH SIL NA TRAJEKTORII

K formulaci základního kritéria umožňujícího rozhodnout, zda daná síla je či není konzervativní, dospějeme postupnými úvahami: předpokládejme nejprve pro jednoduchost, že na částici pohybující se po *uzavřené trajektorii* působí jediná síla. Počáteční a koncová poloha částice na uzavřené trajektorii splývají, částice vykoná „*okružní cestu*“, která začíná a končí v tomtéž bodě. Síla působící na částici je konzervativní právě tehdy, je-li kinetická energie částice na počátku i na konci tohoto okruhu stejná. Práce, kterou síla vykoná při oběhu částice po uzavřené trajektorii je tedy nulová. Jako jeden z přirozených příkladů takové situace poslouží oběh Země kolem Slunce po prakticky kruhové trajektorii (nebo i komety po protáhlé eliptické trajektorii), který se skutečně děje vlivem jediné síly působící na planetu. Tou je gravitační síla, jíž na planetu působí Slunce. Jiným příkladem je pohyb jablíčka vrženého svisle vzhůru v tíhovém poli Země.

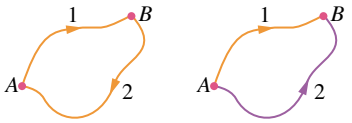
Obecně bychom ovšem měli umět určit práci zkoumané síly $\boldsymbol{F}$ při pohybu částice po *libovolné* trajektorii. Sama síla $\boldsymbol{F}$ však k zajištění takového předem naplánovaného pohybu obvykle nestačí. Musíme proto doplnit další, vhodně zvolenou sílu. Je výhodné, je-li tato síla kolmá k požadované trajektorii, protože potom nekoná práci. Typic-

kým příkladem takové *vazební síly* je tlaková síla vhodně tvarované podložky umístěné v tíhovém poli Země, po níž pouštíme těleso jako po skluzavce.

Předpokládejme tedy, že jsme studovanou sílu $\boldsymbol{F}$ doplnili vhodně zvolenou vazební silou. Sílu $\boldsymbol{F}$ nazveme konzervativní, je-li její příspěvek ke změně kinetické energie při každém oběhu částice po jakékoli uzavřené cestě nulový. Jinými slovy:

Práce vykonaná konzervativní silou působící na částici pohybující se po libovolné uzavřené trajektorii je nulová.

Experimenty ukazují, že tíhová síla toto kritérium splňuje. Příkladem je hra s jablíčkem na obr. 8.2. Jablíčko opouští výchozí bod s rychlostí o velikosti v_0 a kinetickou energií $\frac{1}{2}mv_0^2$. Tíhová síla Země jablíčko zpomaluje až do zastavení a jablíčko padá nazpět. V okamžiku návratu do výchozího bodu je velikost jeho rychlosti opět v_0 a kinetická energie má hodnotu $\frac{1}{2}mv_0^2$. Tíhová síla tedy během výstupu jablíčka spotřebovala stejně velkou práci ($W_1 < 0$), jako vykonala při jeho zpětném pádu do výchozího bodu ($W_2 > 0$, $W_1 = -W_2$). Tíhová síla, jíž působí Země na jablíčko, vykoná při jeho oběhu po uzavřené trajektorii celkově nulovou práci.



Obr. 8.4 (a) Částice, na niž působí mj. konzervativní síla $\boldsymbol{F}$, se pohybuje po okruhu z bodu A do bodu B po cestě 1 a vrací se zpět po cestě 2. (b) Částice může přejít z bodu A do bodu B jak po cestě 1, tak po cestě 2.

Obr. 8.4a znázorňuje oběh částice po obecně zvolené uzavřené trajektorii. Jednou ze sil působících na částici je i síla $\boldsymbol{F}$, jejíž konzervativnost studujeme. Částice se pohybuje z počátečního bodu A do bodu B po cestě 1 a vrací se do bodu A po cestě 2. Síla $\boldsymbol{F}$ koná jistou práci při pohybu částice po jakékoli trajektorii. Aniž bychom specifikovali, pro které části vyznačené trajektorie je tato práce kladná, resp. záporná, označme jako $W_{AB,1}$ práci, kterou uvažovaná síla vykonala při pohybu částice z bodu A do bodu B po cestě 1, a jako $W_{BA,2}$ práci vykonanou při pohybu z B do A po cestě 2. Je-li síla konzervativní, pak výsledná práce, kterou vykoná při pohybu částice po celém okruhu, musí být nulová:

$$W_{AB,1} + W_{BA,2} = 0,$$

tj.

$$W_{AB,1} = -W_{BA,2}. \tag{8.2}$$

Vyjádřeno slovy, práce, kterou síla vykoná při cestě částice z bodu A do bodu B, musí být rovna záporně vzaté práci vykonané při návratu částice.

Uvažujme nyní práci $W_{AB,2}$, kterou síla vykoná při pohybu částice z bodu A do bodu B, avšak po cestě 2 (obr. 8.4b).

Je-li síla $\boldsymbol{F}$ konzervativní, je tato práce až na znaménko rovna práci $W_{BA,2}$:

$$W_{AB,2} = -W_{BA,2}. \tag{8.3}$$

Dosazením $W_{AB,2}$ namísto $-W_{BA,2}$ do vztahu 8.2 dostaneme

$$W_{AB,1} = W_{AB,2}. \tag{8.4}$$

Tato jednoduchá rovnost představuje velmi silný výsledek, neboť umožňuje zjednodušit obtížné problémy pohybu částic v případě, že na ně působí pouze konzervativní síly. Vyplývá z ní totiž, že práce konzervativní síly při pohybu částice z určitého počátečního bodu A do koncového bodu B nezávisí na tom, po *jaké konkrétní cestě* se tento pohyb děje.

Práce konzervativní síly působící na částici při jejím pohybu mezi dvěma body je nezávislá na trajektorii částice.

Předpokládejme, že potřebujeme vypočítat práci konzervativní síly působící na částici při jejím pohybu po určité trajektorii spojující dva zadané body. Může se stát, že přímý výpočet je pro tuto konkrétní trajektorii složitý. Výsledek však lze získat pro jinou trajektorii spojující oba body, avšak zvolenou způsobem, který vede k usnadnění výpočtu. Tuto skutečnost dokumentuje př. 8.1.

PŘÍKLAD 8.1

Obr. 8.5a znázorňuje balíček o hmotnosti 2,0 kg, jak klouže po dokonale hladké skluzavce z bodu A do bodu B. Celková dráha, kterou po skluzavce urazí, je 2,0 m. Svislá vzdálenost bodů A a B je 0,80 m. Jakou práci vykoná při pohybu balíčku tíhová síla?

ŘEŠENÍ: Dejme tomu, že známe konkrétní tvar skluzavky $\mathscr{C}$. Počítejme práci tíhové síly podle vztahu (7.31):

$$W = \int_{\mathscr{C}} m\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathscr{C}} (0 \cdot \mathrm{d}x + (-mg)\,\mathrm{d}y) =$$

$$= -mg \int_{y_\mathrm{i}}^{y_\mathrm{f}} \mathrm{d}y = -mg(y_\mathrm{f} - y_\mathrm{i}).$$

Integrál tedy na tvaru skluzavky vůbec nezávisí.

Protože je tíhová síla konzervativní, můžeme určit hledanou práci mnohem snadněji. Pro výpočet vybereme jinou

trajektorii spojující body A a B tak, abychom jej zjednodušili. Zvolme trajektorii složenou ze dvou přímých úseků, které jsou v obr. 8.5b vyznačeny přerušovanou čarou. Podél vodorovného úseku je úhel φ konstantní a je roven $90°$. I když neznáme posunutí balíčku ve vodorovném směru, můžeme ze vztahu (7.16) usoudit, že práce tíhové síly po vodorovném úseku je nulová:

$$W_h = mgd\cos 90° = 0.$$

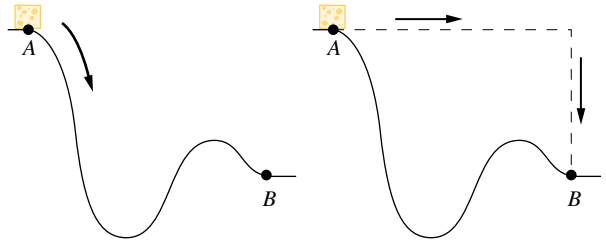
Posunutí balíčku podél svislého úseku je $d = 0{,}80$ m. Úhel φ mezi vektory $\boldsymbol{d}$ a $m\boldsymbol{g}$ je opět konstantní a roven $0°$. Podle (7.16) je tedy práce vykonaná tíhovou silou při pohybu balíčku po svislém úseku

$$W_v = mgd\cos 0° = (2{,}0\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m·s}^{-2})(0{,}80\,\text{m})(1) = \\ = 15{,}7\,\text{J}.$$

Celková práce vykonaná tíhovou silou působící na balíček při jeho pohybu z bodu A do bodu B po cestě vyznačené přerušovanou čarou je tedy

$$W = W_h + W_v = 0 + 15{,}7\,\text{J} \doteq 16\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

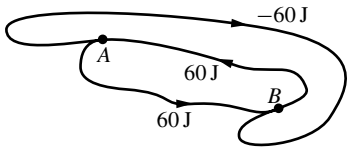
Tato práce je ovšem stejná jako při pohybu balíčku z A do B po skluzavce.



(*a*) (*b*)

Obr. 8.5 Příklad 8.1. (a) Balíček klouže po dokonale hladké skluzavce z bodu A do bodu B. (b) Výpočet práce vykonané při tomto pohybu tíhovou silou je snažší pro případ trajektorie vyznačené přerušovanou čarou než pro skutečnou trajektorii. Výsledky jsou však stejné.

KONTROLA 1: Obrázek ukazuje tři cesty spojující body A a B. Síla $\boldsymbol{F}$ působící na částici koná při pohybu částice po jednotlivých úsecích práci, jejíž hodnoty jsou v obrázku vyznačeny. Rozhodněte, zda je síla $\boldsymbol{F}$ konzervativní.*



* Dokázali byste rozhodnout i v případě, že by údaj u nejníže zakresleného úseku byl −60 J?

8.3 URČENÍ HODNOT POTENCIÁLNÍ ENERGIE

Uvažujme nyní bodový objekt (třeba meloun), který náleží do soustavy (řekněme meloun+Země), v níž působí konzervativní interakční síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$. Změna potenciální energie soustavy ΔE_p při přechodu z počáteční do koncové konfigurace je rovna záporně vzaté práci, kterou při této změně konfigurace vykonaly interakční síly. Tuto skutečnost jsme již vyjádřili vztahem (8.1) ($\Delta E_p = -W$). Práce, kterou vykonají konzervativní interakční síly uvnitř soustavy přitom závisí pouze na její výchozí a výsledné konfiguraci, nikoli však na způsobu, jakým ke změně konfigurace došlo. V případě částice (meloun), jejíž pohyb neovlivní konfiguraci zbytku soustavy (Země), je konfigurace určena polohovým vektorem $\boldsymbol{r}(t)$ této částice vzhledem k vybranému bodu zbytku soustavy (polohový vektor melounu vůči středu Země). Změna potenciální energie soustavy při přesunu částice z polohy $\boldsymbol{r}_i$ do polohy $\boldsymbol{r}_f$ po křivce $\mathscr{C}$ je

$$\Delta E_p = -W = -\int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \qquad (8.5)$$

Tento integrál však díky konzervativnosti interakčních sil $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ a $-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ nezávisí na tvaru křivky $\mathscr{C}$ a změna potenciální energie souvisí pouze s polohou jejího počátečního a koncového bodu. Znamená to tedy, že každé konfiguraci soustavy lze přisoudit určitou hodnotu potenciální energie E_p? Odpověď je kladná.

Velmi často se setkáváme se zvlášť jednoduchými případy soustav, jejichž konfiguraci lze popsat jedinou skalární veličinou, tzv. **konfigurační proměnnou**. Označme ji pro jednoduchost symbolem x, i když nemusí nutně jít o x-ovou souřadnici. (V případě soustavy meloun+Země jí může být například vzdálenost melounu od povrchu Země, pro soustavu vzniklou připoutáním tělesa k Zemi pružinou může mít x význam prodloužení pružiny, u soustavy planeta + Země pak význam vzdálenosti středů obou těles, apod.) Závisí-li navíc konzervativní interakční síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ pouze na této jediné proměnné, velmi často se výpočet změny potenciální energie zjednodušuje do tvaru analogického rov. (7.27):

$$\Delta E_p = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (8.6)$$

Tíhová potenciální energie

Uvažujme nyní částici o hmotnosti m pohybující se v blízkosti povrchu Země. Soustavu souřadnic zvolme tak, aby osa y směřovala svisle vzhůru. Za konfigurační proměnnou soustavy částice + Země můžeme zvolit y-ovou souřadnici částice. Při pohybu částice z bodu (x_i, y_i, z_i) do

bodu (x_f, y_f, z_f) závisí totiž práce interakčních sil $m\boldsymbol{g}$ a $-m\boldsymbol{g}$ pouze na hodnotách y_i a y_f (př. 8.1). Odpovídající změnu tíhové potenciální energie soustavy lze tedy určit užitím vztahu (8.6), v němž zaměníme x za y a dosadíme $F = -mg$. Dostáváme

$$\Delta E_p = -\int_{y_i}^{y_f} (-mg)\,dy = mg\int_{y_i}^{y_f} dy = mg[y]_{y_i}^{y_f},$$

a tedy

$$\Delta E_p = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y. \qquad (8.7)$$

Fyzikální význam má pouze změna ΔE_p tíhové potenciální energie (či potenciální energie jiného typu). Abychom však zjednodušili výpočet i další diskusi, můžeme požadovat, aby s každou konfigurací soustavy byla spojena určitá hodnota potenciální energie. Řekněme, že v případě soustavy částice + Země označíme jako E_p hodnotu tíhové potenciální energie příslušnou té konfiguraci, při které je částice v poloze o souřadnici y. Přepišme vztah (8.7) do tvaru

$$E_p - E_{p,i} = mg(y - y_i). \qquad (8.8)$$

Hodnotu $E_{p,i}$ pak chápeme jako tíhovou potenciální energii soustavy v tzv. **referenční konfiguraci**, při níž se částice nachází v **referenčním bodě** o y-ové souřadnici y_i. Obvykle klademe $E_{p,i} = 0$ pro $y_i = 0$. Podle vztahu (8.8) pak je

$$E_p - 0 = mg(y - 0),$$

a tedy

$$E_p(y) = mgy \quad \text{(tíhová potenciální energie).} \qquad (8.9)$$

Ze vztahu (8.9) je vidět, že tíhová potenciální energie soustavy částice+Země závisí pouze na svislé poloze y částice vzhledem k referenční poloze o souřadnici $y = 0$ (tj. na výšce částice nad referenčním bodem).

Pružná potenciální energie

Zabývejme se nyní soustavou kostka + (pružina) + Země, znázorněnou na obr. 8.3. Tuhost pružiny je k. Za konfigurační proměnnou soustavy zvolíme souřadnici x. Při pohybu kostky z bodu x_i do bodu x_f vykonají interakční pružné síly jistou práci. Odpovídající změna potenciální energie soustavy je opět dána vztahem (8.6), do kterého však tentokrát dosadíme $F = -kx$,

$$\Delta E_p = -\int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx = \tfrac{1}{2}k\left[x^2\right]_{x_i}^{x_f},$$

tj.

$$\Delta E_p = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2. \qquad (8.10)$$

Abychom mohli hovořit o potenciální energii E_p v obecné konfiguraci soustavy určené polohou kostky x, zvolme jako referenční bod rovnovážnou polohu kostky $x_i = 0$ a přisuďme jí nulovou potenciální energii $E_{p,i} = 0$. Ze vztahu (8.10) pak dostaneme

$$E_p - 0 = \tfrac{1}{2}kx^2 - 0,$$

odkud

$$E_p(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 \quad \text{(pružná potenciální energie).} \qquad (8.11)$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 8.1: *Užití pojmu „potenciální energie“*

Potenciální energie je spojena se soustavou jako celkem. Za jistých okolností ji však můžeme spojovat s některou z částí soustavy. Můžeme třeba říci: „Jablko na stromě má tíhovou potenciální energii 30 J.“ Taková tvrzení jsou často přijatelná (například u soustav tvořených dvěma částicemi s velmi rozdílnými hmotnostmi). Musíme však mít stále na paměti, že potenciální energie je charakteristikou celé soustavy, v našem případě soustavy jablko+Země. Dále nesmíme zapomínat, že hovořit o potenciální energii objektu či soustavy (v příkladu s jablkem na stromě hodnota 30 J) má smysl *jen tehdy*, je-li zvolené referenční konfiguraci přisouzena referenční hodnota potenciální energie.

PŘÍKLAD 8.2

Lenochod o hmotnosti 2,0 kg se drží větve, která je 5,0 m vysoko nad zemí (obr. 8.6).

(a) Jaká je tíhová potenciální energie E_p soustavy lenochod+ +Země, volíme-li za referenční bod místo o souřadnici $y = 0$, ležící (1) na povrchu Země, (2) na podlaze balkonu, jejíž úroveň je ve výšce 3,0 m nad zemí, (3) na větvi, (4) ve výšce 1,0 m nad větví? Bodu $y = 0$ přisuzujeme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie.

ŘEŠENÍ: Pomocí vztahu (8.9) vypočteme E_p pro každou volbu polohy počátku souřadnicové osy y, $y = 0$. V případě (1) je lenochod v poloze $y = 5{,}0$ m a platí

$$E_p = mgy = (2{,}0\,\text{kg})\cdot(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})(5{,}0\,\text{m}) = \\ = 98\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V dalších případech je

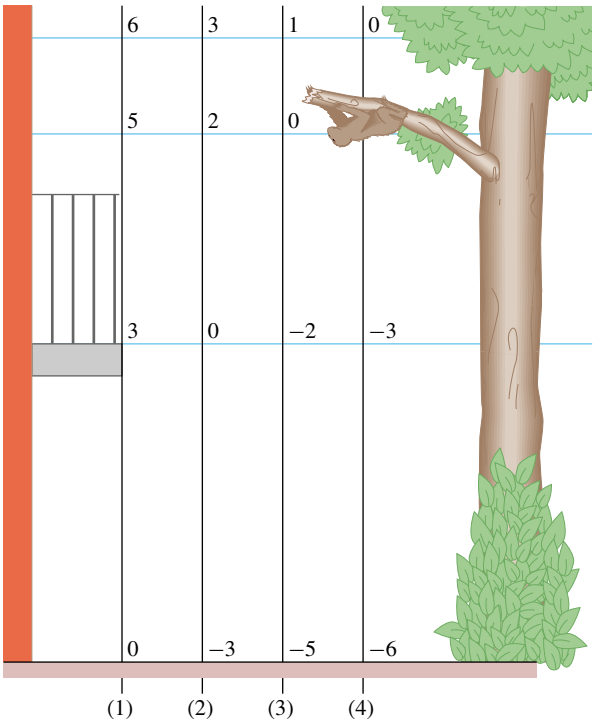
$$(2)\quad E_p = mgy = mg(2{,}0\,\text{m}) = 39\,\text{J},$$
$$(3)\quad E_p = mgy = mg(0) = 0\,\text{J},$$
$$(4)\quad E_p = mgy = mg(-1{,}0\,\text{m}) = -19{,}6\,\text{J} \doteq \\ \doteq -20\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Lenochod spadne na zem. Pro každou z předchozích možností volby referenčního bodu určete změnu potenciální energie soustavy lenochod + Země, ke které při pádu lenochoda došlo.

ŘEŠENÍ: Ve všech čtyřech situacích je $\Delta y = -5{,}0\,\text{m}$, takže pro každou z nich podle (8.7) platí

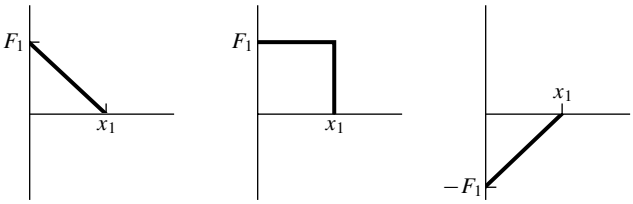
$$\Delta E_p = mg\Delta y = (2{,}0\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})(-5{,}0\,\text{m}) = \\ = -98\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

I když hodnota E_p závisí na volbě polohy počátku soustavy souřadnic, je *změna* potenciální energie na ní nezávislá. Připomeňme, že fyzikální význam má pouze změna ΔE_p potenciální energie, nikoli samotná hodnota E_p, která je závislá na libovůli při volbě referenční konfigurace.



Obr. 8.6 Příklad 8.2. Čtyři možnosti volby referenčního bodu $y = 0$. Osa y je ve všech případech cejchována v metrech.

KONTROLA 2: Částice se pohybuje po ose x z bodu $x = 0$ do bodu x_1. Působí na ni konzervativní síla, která má směr osy x. Obrázek ukazuje tři případy závislosti této síly na souřadnici x. Uspořádejte tyto situace sestupně podle odpovídající změny potenciální energie.



8.4 ZÁKON ZACHOVÁNÍ MECHANICKÉ ENERGIE

Mechanická energie E soustavy je definována jako součet její potenciální energie E_p a celkové kinetické energie E_k všech jejích objektů:

$$E = E_p + E_k \qquad \text{(mechanická energie).} \qquad (8.12)$$

V tomto článku se budeme zabývat otázkou, co se děje s mechanickou energií soustavy, ve které působí výhradně konzervativní interakční síly. (Teprve později budeme uvažovat o vlivu sil nekonzervativních.)

Uvažujme nyní soustavu částic, které neinteragují s okolními objekty (tzv. **izolovaná soustava**). Práce W, kterou konají konzervativní interakční síly, jimiž na sebe navzájem působí částice soustavy, určuje změnu kinetické energie soustavy. Současně ji však lze vyjádřit jako záporně vzatou změnu energie potenciální. Kinetická energie soustavy se tedy mění na úkor její energie potenciální. Skutečně, podle vztahu (7.4) je změna kinetické energie

$$\Delta E_k = W \qquad (8.13)$$

a pro změnu potenciální energie platí podle (8.1)

$$\Delta E_p = -W. \qquad (8.14)$$

Kombinací posledních dvou vztahů dostáváme

$$\Delta E_k = -\Delta E_p. \qquad (8.15)$$

Jinými slovy, vzrůst jedné z obou forem energie je přesně vyvážen poklesem druhé.

Vztah (8.15) lze přepsat takto:

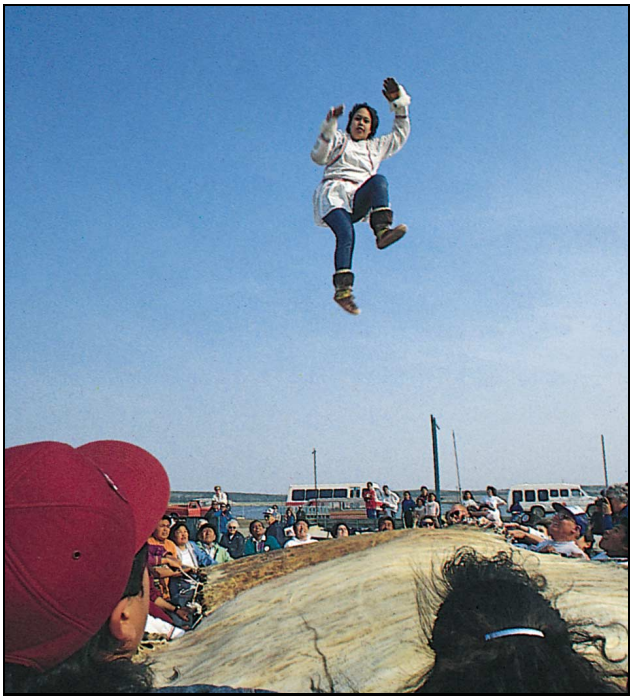
$$E_{k,2} - E_{k,1} = -(E_{p,2} - E_{p,1}), \qquad (8.16)$$

kde se indexy 1 a 2 vztahují ke dvěma různým okamžikům, tj. ke dvěma různým konfiguracím soustavy. Úpravou (8.16) dostaneme

$$E_{k,2} + E_{p,2} = E_{k,1} + E_{p,1} \qquad \text{(zákon zachování mechanické energie).} \qquad (8.17)$$

Levá a pravá strana rovnosti (8.17) představují mechanickou energii v různých okamžicích, a tedy ve dvou různých konfiguracích soustavy. Vztah (8.17) vyjadřuje rovnost obou hodnot:

Působí-li v izolované soustavě pouze konzervativní interakční síly, mění se její kinetická a potenciální energie tak, že jejich součet, tj. mechanická energie soustavy, je stálý.



Kdysi se eskymáci z Aljašky nechali vyhazovat do vzduchu napnutou plachtou, aby po široké pláni dohlédli co nejdále. Dnes se to dělá jen pro zábavu. Všimněme si však, co se při takovém pohybu (viz fotografie) děje z fyzikálního hlediska. Při vzestupu klesá kinetická energie dítěte vzhledem k Zemi a roste tíhová potenciální energie soustavy dítě + Země. Maximální výška výstupu odpovídá situaci, kdy je kinetická energie nulová. Během pádu se sled energiových změn obrací: kinetická energie roste na úkor energie potenciální.

Tento výsledek vyjadřuje **zákon zachování mechanické energie**. (Z toho vidíme, jak vznikl termín „konzervativní“ síla: uchovává (lat. conservare) energii.) Pomocí vztahu (8.15) můžeme zákon zachování mechanické energie ještě přepsat ve tvaru

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0. \qquad (8.18)$$

Tento zákon umožňuje řešit problémy, jejichž řešení pomocí samotných Newtonových zákonů by bylo obtížné:

Zachovává-li se mechanická energie soustavy, můžeme porovnávat součet celkové kinetické a potenciální energie v různých okamžicích, *aniž bychom uvažovali o pohybu soustavy v intervalu mezi těmito okamžiky* a *počítali práci interakčních sil částic soustavy.*

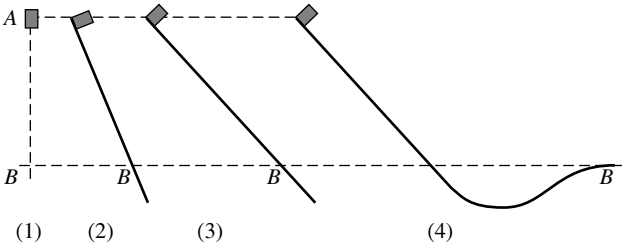
Obr. 8.7 znázorňuje případ, kdy je vhodné zákon zachování mechanické energie použít: kmity kyvadla v tíhovém poli Země. Při kmitavém pohybu kyvadla se mění kinetická i potenciální energie soustavy kyvadlo+Země tak, že součet $E_k + E_p$ je konstantní. Známe-li tíhovou potenciální energii soustavy v konfiguraci, kdy je kulička kyvadla v nejvyšším bodě své trajektorie (obr. 8.7c, g), můžeme určit kinetickou energii kuličky (vzhledem k Zemi) v nejnižším bodě (obr. 8.7a, e) užitím vztahu (8.17).

Zvolme například konfiguraci, při níž je kulička v nejnižší poloze, za referenční a přisuďme jí potenciální energii $E_{p,2} = 0$. Předpokládejme, že při této volbě referenční konfigurace odpovídá nejvyšší poloze kuličky potenciální energie $E_{p,1} = 20\,\text{J}$. Kulička má v nejvyšším bodě nulovou rychlost, takže její kinetická energie je $E_{k,1} = 0$. Dosazením těchto hodnot do vztahu (8.17) zjistíme kinetickou energii $E_{k,2}$ v nejnižším bodě:

$$E_{k,2} + 0 = 0 + 20\,\text{J}, \qquad \text{tj.} \qquad E_{k,2} = 20\,\text{J}.$$

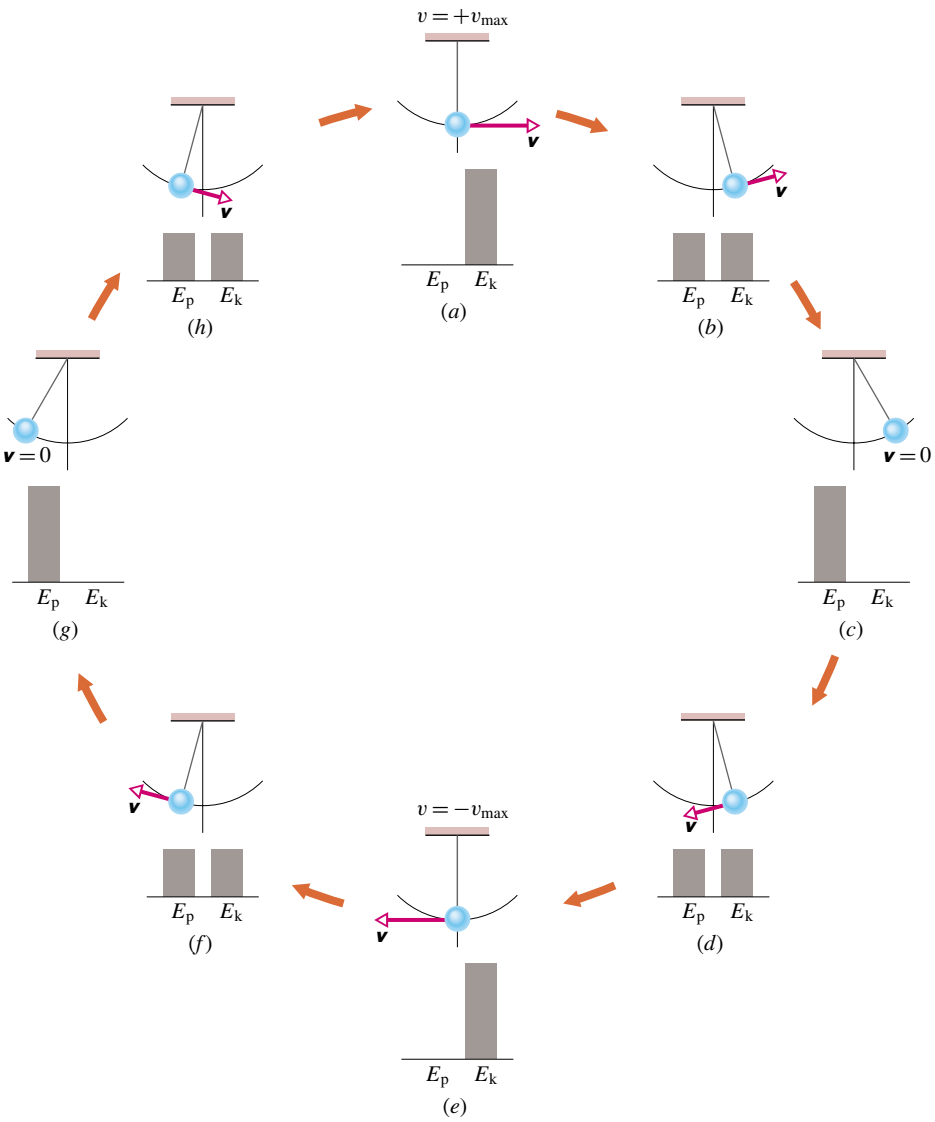
Všimněte si, že tento výsledek jsme získali, aniž bychom se zajímali o pohyb kyvadla mezi nejnižším a nejvyšším bodem (např. obr. 8.7d) a aniž bychom museli počítat práci sil působících na tělesa soustavy.

KONTROLA 3: Následující obrázek ukazuje čtyři situace. V prvé z nich kostka, která byla zpočátku v klidu, volně padá a v ostatních třech sjíždí po dokonale hladké skluzavce. Uspořádejte tyto situace sestupně podle (a) hodnoty kinetické energie kostky v bodě B a podle (b) velikosti rychlosti kostky v bodě B.



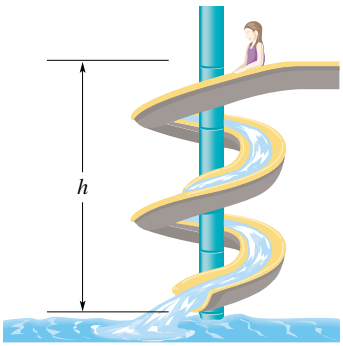
PŘÍKLAD 8.3

Na obr. 8.8 se dítě spouští z vrcholu vodní skluzavky. Dítě je zpočátku v klidu a nejvyšší bod skluzavky je ve výšce $h = 8{,}5\,\text{m}$ nad jejím ústím do bazénu. Předpokládejme, že



Obr. 8.7 Kyvadlo, jehož hmotnost je soustředěna v kuličce upevněné na konci vlákna, koná kmitavý pohyb. Obrázek zachycuje jednu periodu tohoto pohybu. Během periody se hodnoty kinetické i potenciální energie soustavy kyvadlo + Země spojitě mění, ale její celková mechanická energie zůstává zachována. Pro názornost můžeme použít i takovou představu, že se celková energie E spojitě „přelévá“ z jedné formy v druhou (potenciální v kinetickou a naopak). Ve stavech (a) a (e) je celková energie dána pouze energií kinetickou. Kulička je v nejnižším bodě a má největší rychlost. Ve stavech (c) a (g) je naopak celková energie rovna energii potenciální, neboť kulička je v nejvyšším bodě a její rychlost je v tom okamžiku nulová. V případech (b), (d), (f) a (h) tvoří jak kinetická, tak potenciální energie právě polovinu energie celkové. Pokud by se při kmitech kyvadla uplatňovaly třecí síly v závěsu nebo odporová síla vzduchu, energie E by se nezachovávala a kyvadlo by se nakonec zastavilo.

skluzavka je dokonale hladká díky proudu vody, který po ní stéká. Určete, s jakou rychlostí dítě vklouzne do bazénu.



Obr. 8.8 Příklad 8.3. Dítě sjíždí po vodní skluzavce z výšky h.

ŘEŠENÍ: Pokud bychom chtěli tuto úlohu řešit pouze na základě znalostí z kap. 2 až kap. 6, museli bychom obecně pracovat s neznámým vyjádřením tvaru skluzavky a k výsledku, který je na tvaru skluzavky nezávislý, bychom nakonec dospěli po zbytečných výpočtech. Užitím závěrů kap. 7 a kap. 8 ji však vyřešíme snadno. Nejprve si uvědomme, že zanedbáváme třecí sílu. Jedinou silou, kterou na dítě působí skluzavka, je tedy normálová (tlaková) síla, která je neustále kolmá k povrchu skluzavky. Dítě se ovšem pohybuje *podél* skluzavky. Normálová síla je proto stále kolmá k vektoru posunutí a nekoná práci.

Při pohybu dítěte po skluzavce konají práci pouze tíhové síly, které jsou konzervativní. Mechanická energie soustavy dítě + Země se tedy při jízdě dítěte po skluzavce zachovává.

Její hodnota E_d v okamžiku, kdy je dítě v dolním bodě

skluzavky, je stejná jako hodnota E_v v okamžiku, kdy je na vrcholu, tj. $E_d = E_v$. Vyjádříme-li tuto skutečnost pomocí vztahu (8.17), dostaneme

$$E_{k,d} + E_{p,d} = E_{k,v} + E_{p,v},$$

tj.

$$\tfrac{1}{2}mv_d^2 + mgy_d = \tfrac{1}{2}mv_v^2 + mgy_v.$$

Po vydělení této rovnice hmotností m a úpravě máme

$$v_d^2 = v_v^2 + 2g(y_v - y_d)$$

a po dosazení $v_v = 0$ a $y_v - y_d = h$ dostaneme

$$v_d = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(8{,}5\,\mathrm{m})} = \\ = 13\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Stejně velké rychlosti by dítě dosáhlo, kdyby z výšky 8,5 m spadlo. Na skutečné skluzavce se však přece jen nějaké třecí síly uplatňují, takže rychlost dítěte nebude tak velká.

Již jsme se zmínili, že řešení tohoto problému pomocí Newtonových zákonů by sice bylo možné, ale zbytečně zdlouhavé. Užitím zákona zachování mechanické energie jsme je získali velmi jednoduše. Kdybychom se však zajímali o to, za jak dlouho dítě po skluzavce sjede, pak by nás „energiová metoda“ k výsledku nepřivedla. Abychom dobu jízdy zjistili, museli bychom znát tvar skluzavky a provést poměrně složitý výpočet.

PŘÍKLAD 8.4

Pružina nabité vzduchovky je oproti výchozímu nenapjatému stavu stlačena o délku $d = 3{,}2\,\mathrm{cm}$. Náboj má hmotnost $m = 12\,\mathrm{g}$. S jakou rychlostí opustí náboj po výstřelu hlaveň? Tuhost pružiny je $k = 7{,}5\,\mathrm{N\cdot cm^{-1}}$. Předpokládejme, že hlaveň je při výstřelu vodorovná, tření při pohybu náboje je zanedbatelné a že po výstřelu zůstane pružina v nenapjatém stavu.

ŘEŠENÍ: Označme E_i mechanickou energii soustavy náboj + puška v počátečním stavu (před výstřelem) a E_f její mechanickou energii v koncovém stavu (poté, co náboj opustil hlaveň). V počátečním stavu je mechanická energie dána pouze potenciální energií stlačené pružiny $E_{p,i} = \frac{1}{2}kd^2$, v koncovém stavu pak pouze kinetickou energií náboje $E_{k,f} = \frac{1}{2}mv^2$. Poněvadž se mechanická energie soustavy zachovává, platí

$$E_i = E_f,$$
$$E_{p,i} + E_{k,i} = E_{p,f} + E_{k,f},$$

a tedy

$$\tfrac{1}{2}kd^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}mv^2.$$

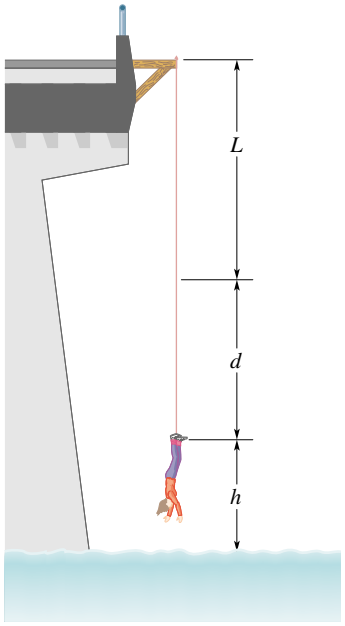
Řešením této rovnice vzhledem k neznámé v dostáváme

$$v = d\sqrt{\frac{k}{m}} = (0{,}032\,\mathrm{m})\sqrt{\frac{(750\,\mathrm{N\cdot m^{-1}})}{(12{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{kg})}} = \\ = 8{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 8.5

Vyznavač bungee-jumpingu se chystá ke skoku z mostu vysokého 45,0 m. Jeho hmotnost je $m = 61{,}0\,\mathrm{kg}$ a pružné lano, které hodlá použít, má v nenapjatém stavu délku $L = 25{,}0\,\mathrm{m}$. Předpokládejme, že se lano řídí Hookovým zákonem* a jeho tuhost je $160\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Tělo skokana považujeme při pohybu za bodový objekt.

(a) Jaká je výška chodidel skokana nad hladinou řeky, tekoucí pod mostem, v okamžiku, kdy se jeho let zastaví v dolním bodě obratu?



Obr. 8.9 Příklad 8.5. Skokan bungee-jumpingu v dolním bodě obratu.

ŘEŠENÍ: V souhlasu s obr. 8.9 označme d prodloužení lana v okamžiku dosažení bodu obratu. Změna tíhové potenciální energie soustavy skokan + Země vzhledem k počátečnímu stavu, kdy skokan stál na mostě, je

$$\Delta E_{p,g} = mg\Delta y = -mg(L + d).$$

Změna pružné potenciální energie je

$$\Delta E_{p,p} = \tfrac{1}{2}kd^2.$$

Počátečnímu stavu i bodu obratu přísluší nulová kinetická energie.

* Ve skutečnosti se guma chová mnohem složitěji. Nesvěřujte svůj život první aproximaci.

Užitím (8.18) dostáváme pro soustavu skokan + Země vztahy

$$\Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p,p}} + \Delta E_{\mathrm{p,g}} = 0,$$
$$0 + \tfrac{1}{2}kd^2 - mg(L+d) = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}kd^2 - mgL - mgd = 0.$$

Dosazením zadaných údajů pak získáme kvadratickou rovnici

$$\tfrac{1}{2}(160\,\mathrm{N\cdot m^{-1}})d^2 - (61{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(25{,}0\,\mathrm{m}) - \\ - (61{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})d = 0.$$

Jejím řešením dostaneme

$$d = 17{,}9\,\mathrm{m}.$$

(Druhý kořen rovnice je záporný a pro naši úlohu nemá význam.) Chodidla skokana tedy budou v hloubce $(L+d) = 42{,}9\,\mathrm{m}$ pod úrovní mostu, a tedy

$$h = 45{,}0\,\mathrm{m} - 42{,}9\,\mathrm{m} = 2{,}1\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Velmi vysoký skokan by se tedy mohl i namočit.*

(b) Jaká je výsledná síla působící na skokana v nejnižším bodě? (Je nulová?)

ŘEŠENÍ: Na skokana působí směrem dolů tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ o velikosti $mg = 597{,}8\,\mathrm{N}$ a směrem vzhůru pružná síla, jejíž velikost v bodě obratu je podle Hookova zákona rovna

$$F = kd = (160\,\mathrm{N\cdot m^{-1}})(17{,}9\,\mathrm{m}) = 2\,864\,\mathrm{N}.$$

Celková síla má velikost

$$2\,864\,\mathrm{N} - 597{,}8\,\mathrm{N} \doteq 2\,270\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledná síla, která působí na skokana v nejnižším bodě jeho trajektorie, je tedy v porovnání s jeho váhou téměř čtyřnásobná. Umíte si jistě představit, jak to s ním „trhne“ vzhůru.

* V případě, že výšku skokana l nepovažujeme za zanedbatelnou, měli bychom výpočet zpřesnit. Hmotný bod, kterým skokana nahrazujeme při použití zákona zachování mechanické energie, umístíme do jeho těžiště, které leží zhruba v polovině jeho výšky. Za předpokladu, že před seskokem odvážlivec na mostě stojí a v bodě obratu naopak visí na laně podle obr. 8.9, je $\Delta y = -(L+d+l)$. V kvadratické rovnici pro neznámou veličinu d je pak třeba zaměnit člen $-mgL$ za $-mg(L+l)$. Proveďte tuto záměnu a rovnici vyřešte. Vezměte v úvahu přesnost zadání výchozích hodnot a posuďte, má-li toto zpřesnění vliv na výsledek.

RADY A NÁMĚTY

Bod 8.2: *Zachování mechanické energie*

Při řešení úloh pomocí zákona zachování mechanické energie si vždy položme následující otázky:

Jak je definována soustava, na kterou hodláme zákon zachování mechanické energie aplikovat? Je třeba, abychom uměli vymezit soustavu a její okolí. Představme si vždy uzavřenou plochu zakreslenou tak, že všechno, co je uvnitř, patří do naší soustavy, zatímco všechno ostatní náleží jejímu okolí. V př. 8.3 tvoří soustavu *dítě + Země*. V př. 8.4 je to dvojice *náboj + puška*. V př. 8.5 pak *skokan + (lano) + Země*.

Jsou ve hře třecí nebo odporové síly? Působí-li uvnitř soustavy třecí nebo odporové síly, její mechanická energie se nezachovává.

Platí pro naši soustavu zákon zachování mechanické energie? Zákon zachování mechanické energie platí především pro *izolované soustavy*, tj. v situacích, kdy na objekty soustavy nepůsobí žádné *vnější síly* (částice soustavy neinteragují s jejím okolím). Pro soustavy neizolované jej lze použít ve speciálních případech, kdy vnější síly nekonají práci. Kdybychom třeba v př. 8.4 zvolili jako zkoumanou soustavu samotný náboj, nebylo by možné zákona zachování mechanické energie použít. Na náboj totiž působí pružná síla, která koná práci. Jeho mechanická energie, která je shodná s jeho energií kinetickou, se nezachovává.

Jaký je počáteční a koncový stav soustavy? Stav soustavy se s časem mění. Z jistého počátečního stavu (či konfigurace) dospěje soustava do stavu koncového. Při aplikaci zákona zachování mechanické energie obvykle využíváme skutečnosti, že mechanická energie má v obou těchto stavech stejnou hodnotu E. Je však třeba si předem ujasnit, jak jsou tyto dva stavy definovány.

8.5 INTERPRETACE KŘIVKY POTENCIÁLNÍ ENERGIE

Vraťme se k problematice izolované soustavy, v níž působí konzervativní interakční síly. Mechanická energie takové soustavy, daná součtem její celkové kinetické energie a všech typů její energie potenciální, se zachovává. Uvažujme velmi speciální situaci, kdy hmotnost jedné z částic soustavy je velmi malá ve srovnání s celkovou hmotností ostatních objektů, jako např. u soustavy typu jablko+Země. V tomto přiblížení (čl. 8.1) je změna kinetické energie soustavy dána změnou kinetické energie uvažované částice, tj. prací konzervativních sil působících na částici. Předpokládejme dále, že pohyb částice je vázán na osu x. V uvedeném přiblížení lze vyjádřit potenciální energii soustavy $E_{\mathrm{p}}(x)$ jako funkci polohy částice x, která tak hraje roli konfigurační proměnné. Ukazuje se, že celou řadu informací

o pohybu částice lze získat již z průběhu křivky $E_p(x)$. Než se však do takové diskuse pustíme, potřebujeme ještě další vztahy.

Analytické vyjádření síly

Vztah (8.6) umožňuje vyjádřit potenciální energii v jednorozměrné situaci, známe-li sílu $F(x)$. Uvažujme však opačný problém. Předpokládejme, že známe průběh potenciální energie $E_p(x)$ a potřebujeme vyjádřit sílu.

Síla $F(x)$, působící na částici pohybující se podél osy x, vykoná při jejím posunutí o Δx práci $W = F(x)\Delta x$. Podle rov. (8.1) je

$$\Delta E_p(x) = -W = -F(x)\Delta x.$$

Vyjádříme $F(x)$ a provedeme limitní přechod $\Delta x \to 0$. Dostaneme

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} \qquad \text{(jednorozměrný pohyb).} \qquad (8.19)$$

Tento výsledek můžeme ověřit například pro pružnou potenciální energii $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Podle očekávání dostaneme ze vztahu (8.19) výraz pro pružnou sílu $F(x) = -kx$, tj. Hookův zákon. Podobně pro tíhovou potenciální energii $E_p(x) = mgx$ částice o hmotnosti m ve výšce x nad zemským povrchem dostaneme z (8.19) tíhovou sílu $F(x) = -mg$ působící na částici.

Křivka potenciální energie

Na obr. 8.10a vidíme graf závislosti potenciální energie $E_p(x)$ na poloze částice, která koná jednorozměrný pohyb, při kterém na ni působí konzervativní síla $F(x)$ (resp. konzervativní síly, jejichž výslednice je $F(x)$). Průběh síly $F(x)$ můžeme snadno určit graficky tak, že budeme zjišťovat směrnici křivky $E_p(x)$ v jejích různých bodech (vztah (8.19)). Na obr. 8.10b je graf funkce $F(x)$ získaný právě takovým způsobem.

Body obratu

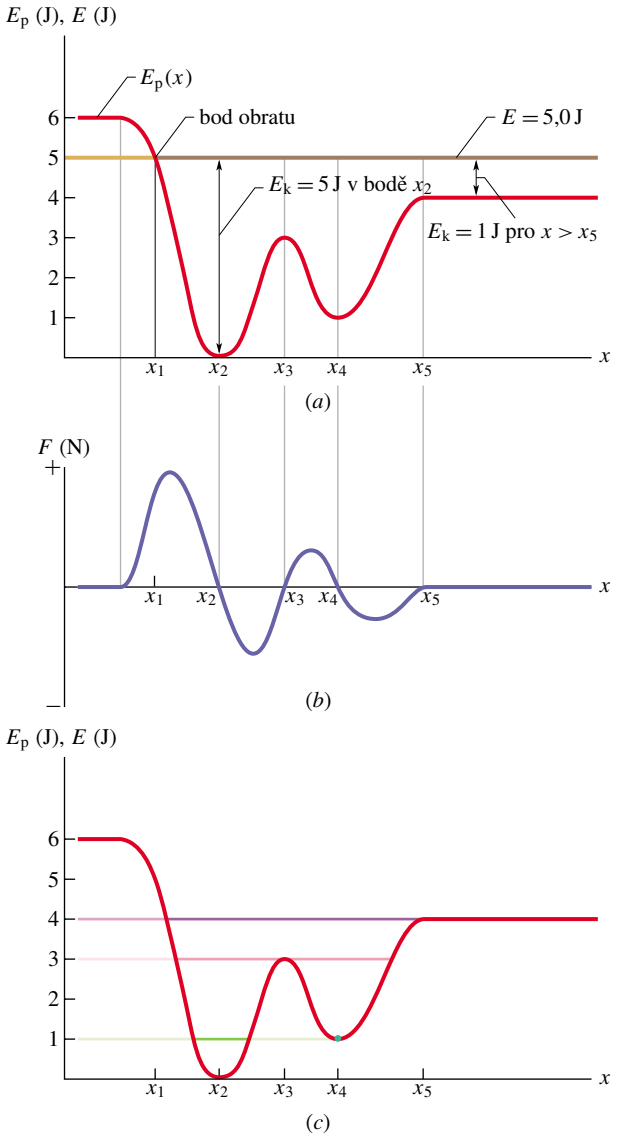
Nepůsobí-li v izolované soustavě nekonzervativní síly, její mechanická energie E se zachovává:

$$E_p(x) + E_k(x) = E. \qquad (8.20)$$

Funkce $E_k(x)$ popisuje *závislost kinetické energie* částice na její poloze x. Vztah (8.20) můžeme přepsat do tvaru

$$E_k(x) = E - E_p(x). \qquad (8.21)$$

Předpokládejme, že hodnota E (mějme na paměti, že je konstantní) činí 5,0 J. Tato hodnota je vyznačena vodorovnou přímkou, která prochází značkou 5,0 J na energiové ose (obr. 8.10a).



Obr. 8.10 (a) Graf závislosti potenciální energie $E_p(x)$ soustavy na poloze částice, která se pohybuje po ose x. Částice náleží do soustavy. Nepůsobí-li v soustavě třecí síly, zachovává se její mechanická energie. (b) Graf závislosti síly $F(x)$, působící na částici, na její poloze. Graf je konstruován z hodnot směrnic tečen ke křivce $E_p(x)$ v různých bodech. (c) Graf $E_p(x)$ s vyznačením tří různých hodnot energií E.

Rovnice (8.21) dává návod, jak určit kinetickou energii částice v poloze x: na křivce $E_p(x)$ najdeme hodnotu E_p odpovídající této poloze a odečteme ji od E. Je-li částice např.

v kterémkoli bodě vpravo od x_5, je $E_k = 1{,}0\,\text{J}$. Nejvyšší hodnoty (5 J) nabývá E_k, je-li částice v bodě x_2 a nejnižší (0 J), je-li v bodě x_1.

Protože kinetická energie nemůže být záporná (hodnota v^2 je vždy kladná), nemůže se částice nikdy ocitnout vlevo od bodu x_1 (v této oblasti poloh by byl rozdíl $E - E_p$ záporný). Blíží-li se částice k bodu x_1, její kinetická energie klesá, částice se zpomaluje. Při $E_k = 0$ je její rychlost nulová.

Všimněme si, že v okamžiku, kdy částice dosáhne bodu x_1, působí na ni síla, daná vztahem (8.19). Tato síla míří ve směru kladné osy x (směrnice $\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$ je záporná). To znamená, že částice nezůstane v klidu v bodě x_1, ale začne se pohybovat doprava, tj. opačným směrem. Polohu x_1 proto nazveme **bodem obratu**, tj. místem, kde kinetická energie částice nabývá nulové hodnoty a směr jejího pohybu se obrací.

Vpravo od bodu x_1 již žádný bod obratu není. Pohyb částice směrem vpravo bude pokračovat donekonečna.

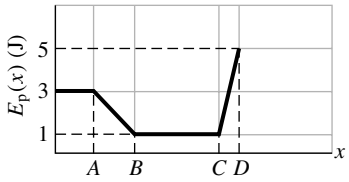
Rovnovážné konfigurace

V grafu potenciální energie $E_p(x)$ na obr. 8.10c jsou vyznačeny tři další hodnoty mechanické energie E. Všimněme si podrobněji jednotlivých situací, abychom zjistili, jaký vliv má volba hodnoty E na pohyb částice. Je-li $E = 4{,}0\,\text{J}$ (fialová čára), posune se bod obratu z polohy x_1 do nové polohy, která leží mezi x_1 a x_2. Dále vidíme, že v každém bodě ležícím napravo od x_5 je potenciální energie konstantní a její hodnota splývá s hodnotou energie mechanické. Kinetická energie částice je nulová, stejně jako síla $\boldsymbol{F}(x)$. Částice setrvává v klidu. V takovém případě hovoříme o **volné** (neboli indiferentní) **rovnovážné poloze**. Příkladem je kulička ležící na vodorovném stole.

Pro $E = 3{,}0\,\text{J}$ (růžová čára) existují dva body obratu. Jeden z nich leží mezi x_1 a x_2, druhý mezi x_4 a x_5. V bodě x_3 je navíc $E_k = 0$. Nachází-li se částice právě v tomto bodě, je $F(x) = 0$ a částice setrvává v klidu. Při sebemenším vysunutí částice z této polohy na kteroukoli stranu (například působením náhodných vlivů) však vznikne nenulová síla $F(x)$ ve směru původní náhodné výchylky a částice se začne pohybovat. Takovou polohu proto nazýváme **vratkou** (neboli labilní) **rovnovážnou polohou**. Ve vratké rovnovážné poloze je například malá kulička položená na vrch velké kulečníkové koule.

Nakonec uvažujme chování částice při hodnotě $E = 1{,}0\,\text{J}$ (zelená čára). Vložíme-li částici do polohy x_4, částice v ní setrvá a sama od sebe se z ní nemůže vychýlit v žádném směru. Všem bodům v blízkém okolí x_4 by totiž odpovídala záporná kinetická energie. Vysuneme-li částici z polohy x_4 vlevo či vpravo, začne na ni působit vratná síla a částice se bude pohybovat zpět k bodu x_4. Hovoříme o tzv. **stálé** (neboli stabilní) **rovnovážné poloze**. Příkladem může být kulička na dně duté polokoule. Částice na dně *potenciálové jámy* tvaru „poháru“ s minimem v bodě x_2 se bude pohybovat v rozmezí bodů obratu ležících někde mezi x_2 a x_1, resp. x_2 a x_3.

KONTROLA 4: Na obrázku je křivka potenciální energie $E_p(x)$ pro případ jednorozměrného pohybu částice. (a) Uspořádejte úseky AB, BC a CD sestupně podle velikosti síly působící na částici. (b) Jaký směr má síla působící na částici v úseku AB?





Mechanická energie dvoučásticové soustavy

V tomto odstavci se přesnějšími úvahami vracíme k problematice zákona zachování mechanické energie dvoučásticových izolovaných soustav s konzervativní interakcí a k podrobnější diskusi o oprávněnosti přiblížení, jichž jsme používali u soustav typu těleso + Země, charakterizovaných velmi malou hodnotou poměru hmotností m/M.

Uvažujme tedy libovolnou izolovanou soustavu složenou ze dvou těles o hmotnostech m a M, která na sebe navzájem působí interakčními (vnitřními, interními) silami jakékoli povahy. Nechť $\boldsymbol{F}_{int}$ je síla, jíž působí těleso M na m a $-\boldsymbol{F}_{int}$ označuje působení tělesa m na M. Při změnách konfigurace soustavy konají obě tyto síly práci. Práce síly $\boldsymbol{F}_{int}$ je podle vztahu (7.4) rovna změně kinetické energie tělesa m, zatímco práce síly $-\boldsymbol{F}_{int}$ určuje změnu kinetické energie tělesa M. Celková práce interakčních sil W_{int} tedy představuje změnu kinetické energie soustavy vzhledem k libovolně zvolené inerciální vztažné soustavě. Předpokládejme nejprve pro jednoduchost, že jiné interakční síly než $\boldsymbol{F}_{int}$ a $-\boldsymbol{F}_{int}$ v naší soustavě nepůsobí, a označme zrychlení těles m a M jako $\boldsymbol{a}_m$ a $\boldsymbol{a}_M$. Platí

$$m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{F}_{int}$$

a

$$M\boldsymbol{a}_M = -\boldsymbol{F}_{int}.$$

Odtud

$$m\boldsymbol{a}_m + M\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{0}.$$

Označíme-li $\Delta\boldsymbol{v}_m$ a $\Delta\boldsymbol{v}_M$ změny rychlosti těles m a M při určité změně konfigurace soustavy, vidíme, že

$$m\Delta\boldsymbol{v}_m + M\Delta\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{0}$$

a veličina

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_m + M\boldsymbol{v}_M,$$

zvaná **hybnost** soustavy, se tedy zachovává. Tato skutečnost umožňuje zvolit pro řešení našeho problému takovou inerciální vztažnou soustavu* $\mathscr{S}$, ve které je $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$.

Opravdu, pokud bychom jako $\overline{\boldsymbol{v}}_m$ a $\overline{\boldsymbol{v}}_M$ označili rychlosti těles m a M vzhledem k inerciální vztažné soustavě $\overline{\mathscr{S}}$, na jejíž konkrétní volbu jsme nekladli žádné požadavky, bude celková hybnost soustavy těles nulová v každé vztažné soustavě $\mathscr{S}$, která se vůči $\overline{\mathscr{S}}$ pohybuje rychlostí

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{m\overline{\boldsymbol{v}}_m + M\overline{\boldsymbol{v}}_M}{m+M}.$$

Tato rychlost bude konstantní, neboť celková hybnost $\overline{\boldsymbol{p}}_0$ izolované soustavy dvou těles se zachovává. Rychlosti těles v nové vztažné soustavě jsou $\boldsymbol{v}_m = \overline{\boldsymbol{v}}_m - \boldsymbol{v}_0$ a $\boldsymbol{v}_M = \overline{\boldsymbol{v}}_M - \boldsymbol{v}_0$. Platí

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= m\boldsymbol{v}_m + M\boldsymbol{v}_M = m(\overline{\boldsymbol{v}}_m - \boldsymbol{v}_0) + M(\overline{\boldsymbol{v}}_M - \boldsymbol{v}_0) = \\
&= m\left(\overline{\boldsymbol{v}}_m - \frac{m\overline{\boldsymbol{v}}_m + M\overline{\boldsymbol{v}}_M}{m+M}\right) + M\left(\overline{\boldsymbol{v}}_M - \frac{m\overline{\boldsymbol{v}}_m + M\overline{\boldsymbol{v}}_M}{m+M}\right) = \\
&= \frac{m}{m+M}(m\overline{\boldsymbol{v}}_m + M\overline{\boldsymbol{v}}_m - m\overline{\boldsymbol{v}}_m - M\overline{\boldsymbol{v}}_M) + \\
&\quad + \frac{M}{m+M}(m\overline{\boldsymbol{v}}_M + M\overline{\boldsymbol{v}}_M - m\overline{\boldsymbol{v}}_m - M\overline{\boldsymbol{v}}_M) = \\
&= \frac{mM}{m+M}(\overline{\boldsymbol{v}}_m - \overline{\boldsymbol{v}}_M) + \frac{mM}{m+M}(\overline{\boldsymbol{v}}_M - \overline{\boldsymbol{v}}_m) = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

Rychlosti $\boldsymbol{v}_m$ a $\boldsymbol{v}_M$ nyní vyjádříme pomocí rychlosti $\boldsymbol{v}$ tělesa m vzhledem k tělesu M,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}_M.$$

Ve vztažné soustavě $\mathscr{S}$ platí

$$m\boldsymbol{v}_m + M\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{0}.$$

Řešením posledních dvou rovnic vzhledem k neznámým $\boldsymbol{v}_m$ a $\boldsymbol{v}_M$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_m &= \frac{M\boldsymbol{v}}{m+M}, \\
\boldsymbol{v}_M &= -\frac{m\boldsymbol{v}}{m+M}.
\end{aligned}$$

Celková kinetická energie soustavy těles měřená vzhledem k $\mathscr{S}$ je pak

$$\begin{aligned}
E_\mathrm{k} &= \tfrac{1}{2}mv_m^2 + \tfrac{1}{2}Mv_M^2 = \\
&= \frac{1}{2}\frac{m(Mv)^2}{(m+M)^2} + \frac{1}{2}\frac{M(-mv)^2}{(m+M)^2} = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v^2.
\end{aligned}$$

* Nazývá se **těžišťová**, protože vůči ní je v klidu těžiště soustavy; to však zavedeme až v čl. 9.2. Srovnej př. 9.10.

Veličina

$$m_\mathrm{red} = \frac{mM}{m+M}$$

charakterizuje soustavu jako celek a nazývá se **redukovaná hmotnost** soustavy. Změna kinetické energie naší soustavy při změně její konfigurace je určena celkovou prací W_int interakčních sil $\boldsymbol{F}_\mathrm{int}$ a $-\boldsymbol{F}_\mathrm{int}$, tj.

$$\tfrac{1}{2}m_\mathrm{red}\Delta(v^2) = W_\mathrm{int}.$$

Tento závěr je platný bez ohledu na povahu interakčních sil. Pohybuje-li se během změny konfigurace soustavy těleso m po křivce $\mathscr{C}_m$ a těleso M po křivce $\mathscr{C}_M$, platí

$$W_\mathrm{int} = \int_{\mathscr{C}_m} \boldsymbol{F}_\mathrm{int}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_m + \int_{\mathscr{C}_M} -\boldsymbol{F}_\mathrm{int}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_M.$$

Označíme-li jako $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_M$ vektor, který udává polohu tělesa m vzhledem k M a určuje tedy konfiguraci soustavy, dostaneme

$$W_\mathrm{int} = \int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{F}_\mathrm{int}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

kde $\mathscr{C}$ je křivka, po které se pohybuje těleso m vzhledem k M. (Pro lepší pochopení předchozího výpočtu se vraťte k poznámce o křivkových integrálech v čl. 7.5.)

Jsou-li však síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{int}$ a $-\boldsymbol{F}_\mathrm{int}$ konzervativní, lze jejich práci W_int zapsat jako záporně vzatou změnu odpovídajícího typu potenciální energie soustavy:

$$W_\mathrm{int} = -\Delta E_\mathrm{p}.$$

Dostáváme tak zákon zachování mechanické energie dvoučásticové izolované soustavy ve tvaru

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}\Delta(v^2) + \Delta E_\mathrm{p} = 0.$$

Působí-li v soustavě více typů konzervativních interakčních sil, je třeba náš výsledek zobecnit:

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}\Delta(v^2) + \Delta E_{\mathrm{p},1} + \Delta E_{\mathrm{p},2} + \ldots = 0.$$

Vyjádření zákona zachování mechanické energie lze zobecnit i na vícečásticové soustavy. Pojem redukované hmotnosti, který je velmi užitečný při praktických výpočtech u dvoučásticových soustav, však nemá analogii u soustav vícečásticových.

Mechanická energie dvoučásticové (resp. vícečásticové) izolované soustavy, v níž působí pouze konzervativní interakční síly, je definována jako součet kinetických energií obou (všech) částic a všech typů potenciální energie soustavy, příslušejících jednotlivým dvojicím konzervativních interakčních sil. Při změnách konfigurace soustavy se mechanická energie nemění.

S pojmem redukované hmotnosti je užitečné se vrátit k úvahám o přiblíženích, o nichž jsme se již předběžně zmínili v článku 8.1 při rozboru energiové bilance soustav typu těleso + Země. Tyto soustavy se vyznačují mizivou hodnotou poměru m/M. Upravme výraz pro redukovanou hmotnost na tvar:

$$m_{\mathrm{red}} = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1+\frac{m}{M}}.$$

Z tohoto vyjádření je ihned patrný vliv podílu m/M na odchylku redukované hmotnosti soustavy od hmotnosti tělesa m. Veličina $x = \frac{m}{M}$ je velmi malá, takže v rozvoji funkce

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$$

lze členy s vyššími mocninami proměnné x zanedbat. Pro redukovanou hmotnost dvoučásticové soustavy pak dostáváme

$$m_{\mathrm{red}} \approx m\left(1 - \frac{m}{M}\right) \approx m.$$

Náhradou redukované hmotnosti hmotností méně hmotného tělesa se tedy při výpočtu kinetické energie soustavy dopouštíme relativní chyby m/M. Tato hodnota například pro soustavu tvořenou tělesem o hmotnosti $m = 5\,\mathrm{kg}$ a Zemí, jejíž hmotnost je $M \doteq 6{\cdot}10^{24}\,\mathrm{kg}$, je zhruba 10^{-24}. Namísto o celkové kinetické energii soustavy těleso + Země pak můžeme hovořit o kinetické energii tělesa vzhledem k Zemi (kap. 7).

Na závěr toho odstavce si uvědomme ještě jeden aspekt pojmu redukovaná hmotnost. Pozorovatel spojený s tělesem M a sledující pohyb částice m nemůže pro tuto částici přímo použít druhý Newtonův zákon, neboť vztažná soustava spojená s M je neinerciální (na těleso M působí síla $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$). Pomocí druhého Newtonova zákona lze však vyjádřit zrychlení $\boldsymbol{a}_m$ a $\boldsymbol{a}_M$ (viz výše) a určit zrychlení $\boldsymbol{a}$ částice m vzhledem k vztažné soustavě spojené s M:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_M = \frac{\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}}{m} - \frac{(-\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}})}{M} =$$
$$= \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}} = \frac{1}{m_{\mathrm{red}}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}},$$

odkud

$$m_{\mathrm{red}}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}.$$

Tento vztah má formálně tvar zápisu druhého Newtonova zákona pro částici o hmotnosti m_{red}, na kterou působí síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$. Neinerciálnost vztažné soustavy spojené s tělesem M, způsobenou přítomností tělesa m, lze tedy při formulaci pohybového zákona pro těleso m „vykompenzovat“ záměnou jeho skutečné hmotnosti redukovanou hmotností soustavy. Víme již, že relativní chyba, které se dopustíme zanedbáním této neinerciálnosti a dosazením $m_{\mathrm{red}} \approx m$, je řádu m/M. Je-li v roli tělesa M Země, je tato nepřesnost opět zcela neměřitelná. Je zřejmé, že neinerciálnost laboratorní vztažné soustavy, spojené s povrchem Země, je v daleko větší míře způsobena pohybem Země kolem Slunce a především její vlastní rotací (pozn. pod čarou u čl. 5.2).

8.6 PRÁCE VNĚJŠÍCH A NEKONZERVATIVNÍCH SIL

Působí-li v izolované soustavě pouze konzervativní interakční síly, je její mechanická energie konstantní. Jsou-li však interakční síly v soustavě nekonzervativní, nebo působí-li na částice soustavy vnější síly, které konají nenulovou práci, nebude se mechanická energie soustavy zachovávat. V takových případech *nemůžeme* použít vztahů (8.17) a (8.18). Co potom můžeme říci o změnách energie soustavy? Abychom na tuto otázku odpověděli, všimneme si odděleně obou situací, v nichž se mechanická energie soustavy nezachovává. Zvláštní pozornost budeme věnovat případu, kdy v soustavě působí třecí síly.

Práce nekonzervativních interakčních sil

Představme si, že zvedáme kuželkovou kouli svisle vzhůru. Soustavu koule+člověk+Země můžeme opět považovat za izolovanou. Můžeme si představit, že koule a Země takto interagují prostřednictvím vazby, kterou zajišťuje člověk. Působí-li člověk na kouli silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$, změní se tlaková síla, jíž působí na podložku pod svýma nohama, o vektor $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$. Obě tyto síly jsou *vnitřními* silami soustavy. Při zvedání koule dochází ke změnám konfigurace soustavy. Tíhové síly při tom vykonají práci W_{g}, která určuje změnu tíhové potenciální energie soustavy $\Delta E_{\mathrm{p,g}} = -W_{\mathrm{g}}$. Celkovou práci *obou* sil $\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$ i $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$ označme W_{int}. Pokud tyto síly nejsou konzervativní, nelze jim přisoudit potenciální energii. Víme, že mechanická energie soustavy je součtem kinetických energií všech objektů a všech druhů potenciální energie příslušných *konzervativním interakčním silám*. Mechanická energie naší soustavy je tedy součtem její tíhové potenciální energie a kinetických energií koule a zbytku soustavy. Ukážeme, že se nebude zachovávat, ale bude se měnit právě na úkor práce nekonzervativních sil

$\boldsymbol{F}_{\text{int}}$ a $-\boldsymbol{F}_{\text{int}}$: vzhledem k zanedbatelnému poměru hmotnosti koule a zbytku soustavy je změna kinetické energie soustavy při zvedání koule dána změnou kinetické energie koule samotné. Ze zkušenosti víme, že kouli můžeme v rámci tohoto experimentu považovat za bodový objekt. Užitím vztahu (7.15) mezi prací a kinetickou energií dostaneme změnu kinetické energie koule:

$$\Delta E_{\text{k}} = W_{\text{int}} + W_{\text{g}}.$$

Tíhová síla je konzervativní, a tak můžeme práci W_{g} zapsat pomocí odpovídající změny tíhové potenciální energie soustavy koule + člověk + Země:

$$W_{\text{g}} = -\Delta E_{\text{p,g}}. \tag{8.22}$$

Dosazením za W_{g} do rov. (8.22) dostaneme

$$\Delta E_{\text{k}} + \Delta E_{\text{p,g}} = W_{\text{int}}. \tag{8.23}$$

Levá strana této rovnice představuje změnu ΔE mechanické energie soustavy koule + člověk + Země. Vlivem nekonzervativních interakčních sil v soustavě se tedy obecně mění mechanická energie soustavy.

Práce vnější síly

Stejně jako v předchozím odstavci uvažujme i nyní soustavu koule + Země. Místo člověka, který byl součástí soustavy a působil na kouli silou $\boldsymbol{F}_{\text{int}}$, bude však na kouli působit jiné těleso, které do soustavy nepatří (je součástí jejího okolí). Soustava koule + Země tedy *nebude* izolovaná a o síle $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, kterou působí na kouli vnější těleso, budeme hovořit jako o síle **vnější** (externí). Označme W_{ext} práci, kterou tato síla koná při změnách vzdálenosti koule od povrchu Země. Podle (7.15) opět platí

$$\Delta E_{\text{k}} = W_{\text{ext}} + W_{\text{g}}.$$

Užitím (8.22) dostaneme

$$\Delta E_{\text{k}} = W_{\text{ext}} - \Delta E_{\text{p,g}}$$

a nakonec

$$\Delta E = W_{\text{ext}}. \tag{8.24}$$

Vidíme, že změna mechanické energie neizolované soustavy, v níž působí pouze konzervativní interakční síly, je rovna práci vykonané vnějšími silami.

Získané závěry lze zobecnit i pro soustavy, které nejsou izolované a v nichž působí jak konzervativní, tak nekonzervativní interakční síly:

Změna mechanické energie soustavy je rovna celkové práci nekonzervativních interakčních sil soustavy a vnějších sil, jimiž na objekty soustavy působí její okolí.

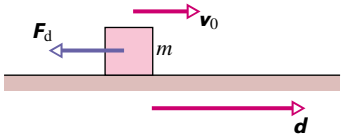
Platí

$$\Delta E = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}}. \tag{8.25}$$

Tento vztah platí pro libovolnou soustavu, ať již je tvořena jediným objektem jako v kap. 7, nebo dvěma (či více) objekty, jako například u soustavy koule + Země, jíž jsme se zabývali před chvílí.

Práce třecí síly

Kostka o hmotnosti m na obr. 8.11 klouže po podlaze, která není dokonale hladká. Počáteční rychlost kostky má velikost v_0. Vlivem dynamické třecí síly $\boldsymbol{F}_{\text{d}}$ se kostka zastaví poté, co urazila dráhu d. Z experimentu víme, že působením třecí síly klesá kinetická energie kostky a soustava kostka + podložka + Země se zahřeje. V kap. 19 až 21 uvidíme, že toto zahřátí souvisí se změnou vnitřní energie těles, způsobenou urychlením neuspořádaného pohybu částic, z nichž jsou tělesa složena.



Obr. 8.11 Kostka o hmotnosti m klouže po podlaze, která není dokonale hladká, počáteční rychlostí v_0. Vlivem dynamické třecí síly $\boldsymbol{F}_{\text{d}}$ se kostka zpomaluje a po posunutí d se zcela zastaví.

Z experimentu je známo i to, že takový proces vzrůstu vnitřní energie soustavy na úkor její energie kinetické je nevratný. Říkáme, že kinetická energie kostky je *rozptylována* (disipována) působením síly $\boldsymbol{F}_{\text{d}}$, nebo že dochází k energiovým ztrátám. Práce W_{f} třecích sil $\boldsymbol{F}_{\text{d}}$ a $-\boldsymbol{F}_{\text{d}}$, které jsou *nekonzervativními vnitřními* silami soustavy kostka + podložka + Země, je záporná a její velikost je rovna úbytku kinetické energie kostky vzhledem k podložce. Tento úbytek představuje rozptýlenou energii (energiovou ztrátu) a přispívá ke zvýšení vnitřní energie jak kostky, tak i podložky.

Předchozí úvahu objasníme ještě na příkladu kostky z obr. 8.11. Dejme tomu, že jsme při měření změny kinetické energie kostky získali hodnotu $\Delta E_{\text{k}} = -100\,\text{J}$. Tato hodnota představuje současně i práci W_{d} vykonanou silami dynamického tření. Rozptýlená energie je tedy 100 J. O tuto hodnotu vzroste vnitřní energie soustavy kostka + + podložka + Země, tj. $\Delta E_{\text{int}} = 100\,\text{J}$. Předpokládejme dále, že jsme bezprostředně po zastavení kostky zjistili

pomocí přesných kalorimetrických měření, že při brzdění došlo ke zvýšení její vnitřní energie o 60 J. Je zřejmé, že vnitřní energie podložky se zvýšila o 40 J.

Situace na obr. 8.11 je podobná jako na obr. 7.2 v čl. 7.3. Můžeme tedy použít vztah (7.8) se dvěma obměnami. Velikost síly je nyní F_d namísto F a úhel φ mezi silou a posunutím je 180°. Vztah (7.8) pak nabude tvaru

$$\Delta E_k = F_d d \cos 180^\circ = -F_d d. \qquad (8.26)$$

Hodnota součinu $-F_d d$ tedy představuje pokles kinetické energie kostky na obr. 8.11 vlivem působení třecích sil. Kdyby se měnila i potenciální energie soustavy (kostka by například sjížděla po šikmé rampě), představovala by tato hodnota pokles mechanické energie soustavy E vlivem třecích sil, tj. energiovou ztrátu:

$$\Delta E = -F_d d \qquad \text{(rozptýlená mechanická energie).} \quad (8.27)$$

Rozptýlená energie přispěje částečně ke zvýšení vnitřní energie kostky (zahřátí), částečně ke zvýšení vnitřní energie podložky.

PŘÍKLAD 8.6

Vadný robot o hmotnosti $m = 40\,\text{kg}$ je tažen na laně po stěně sopečného kráteru (obr. 8.12). Stěna svírá s vodorovnou rovinou úhel 30°. Tažná síla lana $\boldsymbol{F}$ má velikost 380 N, velikost dynamické třecí síly působící proti pohybu robota je 140 N. Robot se posune o vzdálenost $d = 0{,}50\,\text{m}$ podél stěny kráteru.

(a) Jaká je ztráta mechanické energie soustavy robot + Země způsobená vlivem třecích sil při posunutí robota o vektor $\boldsymbol{d}$?

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (8.27) a zadaných údajů dostaneme

$$\Delta E = -F_d d = -(140\,\text{N})(0{,}50\,\text{m}) = \\ = -70\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vnitřní energie robota a podložky se tedy zvýšila o 70 J.

(b) Jakou práci vykonají při posunutí robota tíhové síly?

ŘEŠENÍ: Podle vztahů (8.1) a (8.7) je

$$W_g = -\Delta E_p = -mg\Delta y. \qquad (8.28)$$

Na obr. 8.12 vidíme, že změna y-ové souřadnice robota, v obrázku označená jako h, je $h = d \sin 30^\circ$. Dosazením tohoto výrazu do (8.28) a užitím zadaných hodnot dostáváme

$$W_g = -mgh = -mgd \sin 30^\circ = \\ = -(40\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m·s}^{-2})(0{,}50\,\text{m})0{,}5 = \\ = -98\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

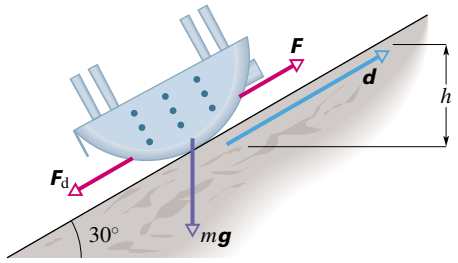
Potenciální energie soustavy robot + Země vzrostla během posunutí robota o 98 J.

(c) Jakou práci vykonala síla $\boldsymbol{F}$?

ŘEŠENÍ: Práce síly $\boldsymbol{F}$ je prakticky rovna celkové práci W_{int} sil $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$. (Silou $-\boldsymbol{F}$ působí robot prostřednictvím tažného lana na naviják, který je pevně spojen se stěnou kráteru a náleží tedy rovněž do studované soustavy.) Pro její výpočet užijeme vztahu (7.9) ($W = Fd\cos\varphi$). Úhel φ mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$ je 0°. Dosazením do (7.9) dostáváme:

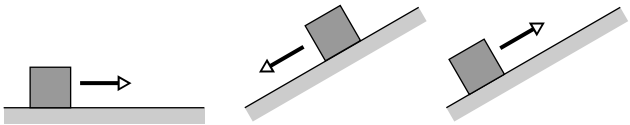
$$W_{int} = Fd\cos\varphi = (380\,\text{N})(0{,}50\,\text{m})\cos 0^\circ = \\ = 190\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Působením sil $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ při posunutí robota došlo ke zvýšení mechanické energie soustavy robot + Země o 190 J.



Obr. 8.12 Příklad 8.6. Vadný robot je tažen na laně po šikmé stěně sopečného kráteru silou $\boldsymbol{F}$, proti pohybu působí dynamická třecí síla $\boldsymbol{F}_d$. Robot se posune podél nakloněné roviny o vektor $\boldsymbol{d}$, jeho výška nad dnem kráteru při tom vzroste o h.

KONTROLA 5: Obrázek ukazuje tři možnosti pohybu kostky po nakloněné rovině, která není dokonale hladká. Ve všech případech je velikost počáteční rychlosti kostky stejná. Pohyb kostky sledujeme až do zastavení. Uspořádejte tyto situace sestupně podle velikosti rozptýlené mechanické energie.



(1) (2) (3)

8.7 ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE

Představme si kostku, která klouže po dokonale hladké vodorovné podlaze. Soustavu tvořenou samotnou kostkou můžeme považovat za izolovanou v tom smyslu, že žádná ze sil, které na ni působí (tíhová síla a tlaková síla podložky), nekoná práci. Na tuto jednoduchou soustavu lze samozřejmě rovněž aplikovat zákon zachování energie: energie kostky se zachovává.

Nyní nechme kostku klouzat po podlaze, která není dokonale hladká. Uvažujeme-li opět soustavu tvořenou samotnou kostkou, musíme konstatovat, že tentokrát se o izolovanou soustavu nejedná. Dynamická třecí síla, která na kostku působí, je z hlediska zvolené soustavy silou vnější. Energie soustavy (kostky) se nezachovává.

Můžeme však soustavu rozšířit tak, že do ní zahrneme jak kostku, tak podložku pevně spojenou se Zemí. V této soustavě jsou již třecí síly silami vnitřními, soustava je izolovaná a její energie se zachovává. Zobecníme-li náležitě představy o tom, co rozumíme *soustavou*, můžeme formulovat nový zákon zachování energie, který umožňuje uvažovat o různých energiových přeměnách.

Dospějeme k němu pomocí vztahu (8.27) pro vyjádření mechanické energie rozptýlené třecími silami $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ a $-\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$. V případě kostky pohybující se po vodorovné podlaze zahrnuje mechanická energie pouze energii kinetickou a vztah (8.27) má tvar

$$\Delta E_\mathrm{k} = -F_\mathrm{d} d, \tag{8.29}$$

kde ΔE_k je změna kinetické energie. Celý úbytek kinetické energie přispěje ke zvýšení vnitřní energie kostky a podložky (obě se zahřejí). Změna vnitřní energie soustavy je tedy

$$\Delta E_\mathrm{int} = -\Delta E_\mathrm{k}, \tag{8.30}$$

odkud

$$\Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{int} = 0. \tag{8.31}$$

A tak i když se mechanická energie kostky nezachovává, je součet její mechanické energie a vnitřní energie soustavy kostka+podložka konstantní. Tento součet představuje *celkovou energii* soustavy kostka + podložka. Nově získaný vztah pro zachovávající se energii nazýváme **zákonem zachování energie**. Užitím vztahu (8.31) jej můžeme zapsat ve tvaru

$$\Delta E_\mathrm{celk} = \Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{int} = 0. \tag{8.32}$$

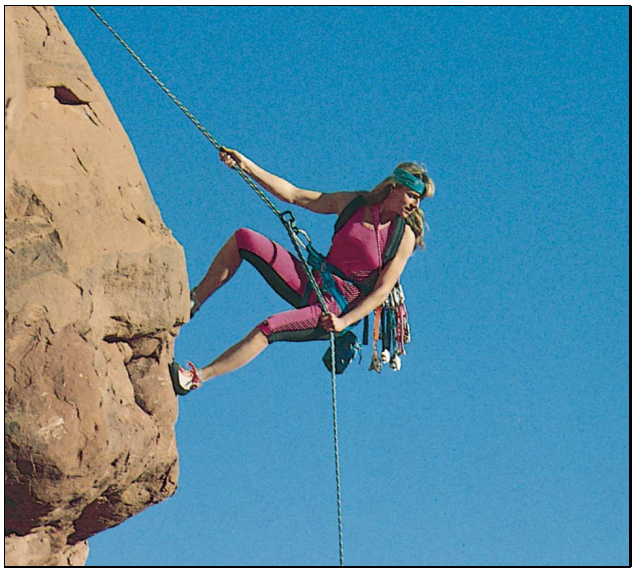
Působí-li navíc v soustavě konzervativní interakční síly, máme opět poněkud širší a obecnější pojem izolované soustavy, ve které může kromě změn kinetické a vnitřní energie jednotlivých objektů docházet i ke změnám energie potenciální. Celková energie se bude opět zachovávat a zákon zachování nabude tvaru

$$\Delta E_\mathrm{celk} = \Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{p} + \Delta E_\mathrm{int} = 0 \quad \text{(izolovaná soustava, zákon zachování celkové energie).} \tag{8.33}$$

Objevíme-li ještě jiné formy energie, můžeme je vždy zahrnout do zákona zachování energie a přepsat vztah (8.33) takto:

$$\Delta E_\mathrm{celk} = \Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{p} + \Delta E_\mathrm{int} + \Delta E_\mathrm{ostatní} = 0. \tag{8.34}$$

Uvědomme si, že tento obecný zákon zachování energie jsme *nijak* neodvodili. Naopak, vyplývá z nesčetných experimentů. Vědci ani konstruktéři dosud neobjevili žádnou výjimku z tohoto zákona. Jeho značná účinnost při analýze obtížných situací spočívá právě v tom, že přisuzuje celkové energii úlohu zachovávající se veličiny i v situacích, kdy se dílčí energie různých typů mění.



Obr. 8.13 Při sestupu se snižuje tíhová potenciální energie soustavy horolezkyně s výstrojí + Země. Lano je provlečeno kovovými karabinami a tře se o ně. Podstatná část úbytku potenciální energie tak přispěje ke vzrůstu vnitřní energie soustavy a kinetická energie horolezkyně se prakticky nezvyšuje.

V izolované soustavě může docházet ke změnám všech typů energie, které lze soustavě přisoudit. Celková energie však zůstává zachována.

Chceme-li tuto skutečnost vyjádřit méně formálně, můžeme říci, že energie nemůže záhadně mizet ani se objevovat.

Nad obr. 8.13 můžeme například uvažovat tak, že do soustavy zahrneme jak horolezkyni s kompletní výstrojí, tak Zemi. Při slaňování po skalní stěně musí horolezkyně řídit pokles potenciální energie soustavy (tato energie nemůže najednou záhadně zmizet). Část jejího úbytku se jistě může projevit přírůstkem kinetické energie horolezkyně, ten však nesmí být příliš velký. V tom tkví podstata slaňování: lano je provlečeno kovovými karabinami. Třecí síly mezi lanem a karabinami řízeně a pomalu rozptylují

převážnou část mechanické energie soustavy a zvyšují tak energii vnitřní.

Není-li soustava izolovaná a vnější síly konají práci, nelze vztahy (8.33) a (8.34) použít. Je třeba je nahradit obecnějším vztahem

$$W = \Delta E_{\text{celk}} = \Delta E_{\text{k}} + \Delta E_{\text{p}} + \Delta E_{\text{int}}, \qquad (8.35)$$

kde W je celková práce vnějších sil působících na objekty soustavy. Kdybychom například lano horolezkyně (obr. 8.13) nezahrnuli do soustavy, bylo by třeba třecí sílu, jíž působí lano na karabiny, považovat za vnější sílu, jejíž práce W přispívá ke změně kinetické, potenciální a vnitřní energie soustavy.

Výkon

Poté, co jsme podrobně prodiskutovali problematiku a mechanismy energiových přeměn a uvědomili jsme si přitom existenci různých typů energie, můžeme rozšířit i definici výkonu formulovanou v čl. 7.7. Tam jsme výkon definovali jako „rychlost“, s jakou síla koná práci, tj. vykonanou práci vztaženou k časové jednotce. V obecnějším smyslu bude výkon veličinou, která určuje, jak „rychle“ dochází ke změnám energie. Označíme-li ΔE změnu energie soustavy, k níž došlo působením jisté síly za dobu Δt, můžeme definovat **průměrný výkon** této síly jako podíl

$$\overline{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \qquad (8.36)$$

Analogicky definujeme **okamžitý výkon** síly

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \qquad (8.37)$$

PŘÍKLAD 8.7

Cvičený pudl (obr. 8.14) o hmotnosti 6,0 kg vběhl rychlostí o velikosti $v_0 = 7{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na levý okraj skluzavky, který leží ve výšce 8,5 m nad podlahou. Při skluzu po ní se dostal do bodu obratu, ležícího ve výšce $y = 11{,}1$ m nad podlahou. Jaký byl při tom přírůstek vnitřní energie soustavy pudl + + skluzavka + Země?

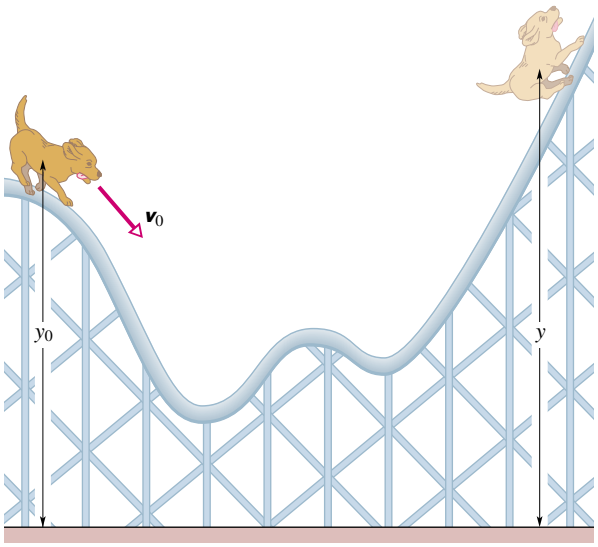
ŘEŠENÍ: Soustavu pudl + skluzavka + Země můžeme považovat za izolovanou a použít vztahu (8.33), neboť jedinými silami, které v soustavě působí, jsou síly tíhové, normálové (tlakové) a třecí. Tíhové síly jsou konzervativní a jsou spjaty se změnami tíhové potenciální energie soustavy. Vlivem třecích sil dochází při pohybu pudla po skluzavce k rozptylu mechanické energie soustavy za současného přírůstku vnitřní energie soustavy o hodnotu ΔE_{int}. Normálové síly nekonají práci, neboť jsou trvale kolmé k trajektorii pudla. Nepřispívají tedy k energiovým změnám.

V bodě obratu má pudl nulovou rychlost a tedy i nulovou kinetickou energii. Užitím vztahu (8.33) pro soustavu pudl + + skluzavka + Země dostáváme:

$$\Delta E_{\text{k}} + \Delta E_{\text{p,g}} + \Delta E_{\text{int}} = 0,$$
$$(0 - \tfrac{1}{2}mv_0^2) + mg(y - y_0) + \Delta E_{\text{int}} = 0.$$

Odtud určíme ΔE_{int}:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{int}} &= \tfrac{1}{2}mv_0^2 - mg(y - y_0) = \\ &= \tfrac{1}{2}(6{,}0\,\mathrm{kg})(7{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 - \\ &\quad -(6{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(11{,}1\,\mathrm{m} - 8{,}5\,\mathrm{m}) \doteq \\ &\doteq 30\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$



Obr. 8.14 Příklad 8.7. Pudl klouže po skluzavce z výšky y_0 s počáteční rychlostí o velikosti v_0 a dosáhne bodu obratu ve výšce y.

PŘÍKLAD 8.8

Ocelová kulka o hmotnosti 5,2 g je vystřelena svisle dolů z výšky $h_1 = 18$ m. Její počáteční rychlost má velikost $v_0 = 14\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (obr. 8.15a). Kulka se zaryje do písku a zastaví se v hloubce $h_2 = 21$ cm.

(a) K jaké změně mechanické energie kulky přitom došlo?

ŘEŠENÍ: V místě, kde se kulka zastavila, je její rychlost, a tedy i kinetická energie, nulová. Změna mechanické energie kulky je dána vztahem

$$\Delta E = \Delta E_{\text{k}} + \Delta E_{\text{p,g}}. \qquad (8.38)$$

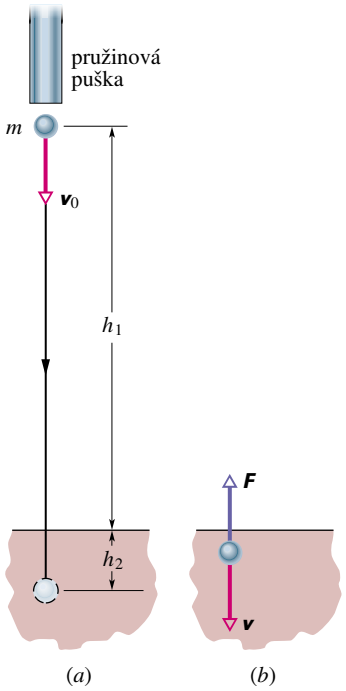
Odtud užitím vztahu (8.8) ($\Delta E_{\text{p,g}} = mg\Delta y$) dostáváme

$$\Delta E = (0 - \tfrac{1}{2}mv_0^2) - mg(h_1 + h_2),$$

kde $-(h_1 + h_2)$ je celkové posunutí kulky. Dosazením zadaných údajů určíme hodnotu ΔE:

$$\Delta E = -\tfrac{1}{2}(5{,}2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg})(14\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 - \\ -(5{,}2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(18\,\mathrm{m} + 0{,}21\,\mathrm{m}) = \\ = -1{,}437\,\mathrm{J} \doteq -1{,}4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Všimněte si, že jsme v této úloze hovořili o potenciální energii kulky, místo abychom ji správně přisuzovali soustavě kulka + Země. Jedná se o přiblížení, jehož oprávněnost jsme již zdůvodnili v bodě 8.1.)



Obr. 8.15 Příklad 8.8. (a) Kulka je vystřelena svisle dolů a zabrzdí se v písku. Její mechanická energie se při pohybu po dráze h_1 zachovává, při brzdění po dráze h_2 působí na kulku odporová síla $\boldsymbol{F}$. (b) Při působení odporových sil klesá mechanická energie kulky a roste vnitřní energie soustavy kulka + písek.

(b) Jaká je změna vnitřní energie soustavy kulka + pískoviště + Země?

ŘEŠENÍ: Soustavu kulka + pískoviště + Země po výstřelu lze považovat za izolovanou. Jedinými vnitřními silami jsou síly tíhové a odporové síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$, jimiž na sebe vzájemně působí kulka a částečky písku (obr. 8.15b). Lze tedy použít vztah (8.33). Dosazením ze vztahu (8.38) do (8.33) získáme pro soustavu kulka + pískoviště + Země vztah

$$\Delta E + \Delta E_{\mathrm{int}} = 0,$$

tj.

$$\Delta E_{\mathrm{int}} = -\Delta E = -(-1{,}437\,\mathrm{J}) \doteq \\ \doteq 1{,}4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při průchodu kulky pískem konají odporové síly práci a dochází k rozptylu mechanické energie soustavy. Vnitřní energie soustavy roste.

(c) Jaká je velikost průměrné odporové síly $\boldsymbol{F}$?

ŘEŠENÍ: Mechanická energie soustavy se nemění, dokud kulka nedoletí k pískovišti. Při zarytí kulky do hloubky h_2 se však změní o hodnotu ΔE. Vztah (8.27) ($-F_{\mathrm{d}}d = \Delta E$) lze přepsat do tvaru

$$-Fh_2 = \Delta E.$$

Řešením vzhledem k neznámé F dostaneme

$$F = \frac{\Delta E}{-h_2} = \frac{(-1{,}437\,\mathrm{J})}{(-0{,}21\,\mathrm{m})} = 6{,}84\,\mathrm{N} \doteq 6{,}8\,\mathrm{N}. \text{ (Odpověď)}$$

Hodnotu F bychom mohli určit také užitím postupů vyložených v kap. 2: zjistili bychom velikost rychlosti kulky těsně nad pískovištěm a její průměrné zrychlení při brzdění v písku. Užitím druhého Newtonova zákona bychom zjistili F. Tento postup by však vyžadoval provedení většího počtu algebraických výpočtů.



8.8 HMOTNOST A ENERGIE

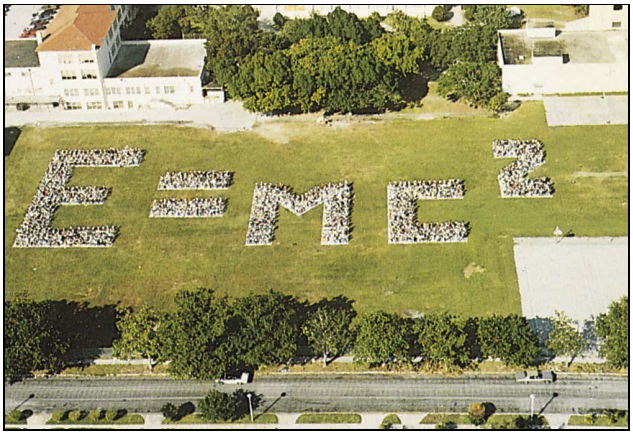
Klasická chemie byla založena na předpokladu, že při chemických reakcích se zachovává jak energie, tak hmotnost. V roce 1905 však ukázal Albert Einstein v rámci své speciální teorie relativity, že hmotnost lze ekvivalentně vyjádřit pomocí energie a že zákon zachování energie říká jinými slovy totéž, co zákon zachování hmotnosti.

Při chemických reakcích jsou ovšem změny hmotnosti odpovídající změnám energie ve smyslu Einsteinovy teorie tak nepatrným zlomkem celkové hmotnosti látek, které se reakce účastní, že není naděje na jejich registraci ani při nejpřesnějších laboratorních analýzách. Situace se tedy *jeví* tak, že hmotnost i energie se skutečně zachovávají odděleně. Během reakcí jaderných však často dochází k uvolnění energie až milionkrát větší a změny hmotnosti lze měřit docela snadno. Úvahy o souvislostech změn hmotnosti a energie při jaderných reakcích se již staly součástí laboratorní rutiny.

Vztah mezi hmotností a energií je zcela jistě nejznámější rovnicí fyziky (obr. 8.16):

$$E = mc^2, \qquad (8.39)$$

kde E je energie ekvivalentní hmotnosti m (tzv. **energiový ekvivalent hmotnosti**), c je rychlost světla ve vakuu. (Při hlubším studiu fyziky mimo rámec této knihy se jistě časem setkáte s hlubším rozborem vztahu mezi hmotností a energií a pravděpodobně i s různými názory na jeho správnou interpretaci.)



Obr. 8.16 Takto vzdali hold Albertu Einsteinovi studenti střední školy Shenandoah Junior v Miami (Florida) při oslavách stého výročí jeho narození v roce 1979. Slavnou formuli vytvořili svými těly.

Tabulka 8.1 shrnuje energiové ekvivalenty hmotností vybraných objektů. Energie uložená v běžných objektech je obrovská. Například výroba energiového ekvivalentu tří-gramové mince by stála desítky milionů korun. Také hmotnostní ekvivalenty některých typických hodnot energie jsou šokující. Například celá roční produkce elektrické energie v USA odpovídá hmotnosti pouhých několika stovek kilogramů látky (kamení, brambor, prostě čehokoliv!).

Tabulka 8.1 **Energiové ekvivalenty vybraných objektů**

OBJEKT	HMOTNOST (kg)	ENERGIOVÝ EKVIVALENT
Elektron	$9{,}11\cdot10^{-31}$	$8{,}2\cdot10^{-14}$ J (= 511 keV)
Proton	$1{,}67\cdot10^{-27}$	$1{,}5\cdot10^{-10}$ J (= 938 MeV)
Atom uranu	$4{,}0\cdot10^{-25}$	$3{,}6\cdot10^{-8}$ J (= 225 GeV)
Prachová částice	$1\cdot10^{-13}$	$1\cdot10^{4}$ J (= 2 kcal)
Mince	$3{,}1\cdot10^{-3}$	$2{,}8\cdot10^{14}$ J (= 78 GW·h)

Chceme-li použít vztah (8.39) pro chemické či jaderné reakce, je vhodné jej přepsat do tvaru

$$Q = -\Delta m\, c^2, \tag{8.40}$$

kde Q je energie uvolněná (kladná hodnota), nebo pohlcená (záporná hodnota) při reakci a Δm je odpovídající úbytek, či přírůstek hmotnosti částic v důsledku reakce. Při jaderném štěpení, kdy se větší jádra rozpadnou v jádra s nižším atomovým číslem, činí hmotnostní úbytek méně než 0,1% původní hmotnosti. Při chemických reakcích je toto procento zhruba milionkrát nižší.

Při praktických výpočtech pomocí vztahu (8.40) se jen zřídka užívá jednotek SI, neboť jsou pro tento účel příliš velké. Hmotnost obvykle udáváme v atomových jednotkách (zkratka u, čl. 1.6), kde

$$1\,\mathrm{u} = 1{,}66\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg}. \tag{8.41}$$

Obvyklou jednotkou energie je elektronvolt či jeho násobky. Podle (7.3) je

$$1\,\mathrm{eV} = 1{,}60\cdot10^{-19}\,\mathrm{J}. \tag{8.42}$$

V jednotkách definovaných vztahy (8.41) a (8.42) má kvadrát rychlosti světla hodnotu

$$c^2 = 9{,}315\cdot10^{8}\,\mathrm{eV\cdot u^{-1}} = 9{,}315\cdot10^{5}\,\mathrm{keV\cdot u^{-1}} = \\ = 931{,}5\,\mathrm{MeV\cdot u^{-1}}. \tag{8.43}$$

PŘÍKLAD 8.9

Při *jaderném štěpení*

$$\mathrm{n} + {}^{235}\mathrm{U} \rightarrow {}^{140}\mathrm{Ce} + {}^{94}\mathrm{Zr} + \mathrm{n} + \mathrm{n}$$

je neutron (n) zachycen jádrem uranu (^{235}U). Vznikne nestabilní jádro, které se rozštěpí na dvě menší jádra (^{140}Ce a ^{94}Zr) za současného uvolnění dvou neutronů. Hmotnosti zúčastněných elementů jsou

$$\begin{aligned} \text{hmotnost } (^{235}\mathrm{U}) &= 235{,}04\,\mathrm{u}, \\ \text{hmotnost } (^{94}\mathrm{Zr}) &= 93{,}91\,\mathrm{u}, \\ \text{hmotnost } (^{140}\mathrm{Ce}) &= 139{,}91\,\mathrm{u}, \\ \text{hmotnost (n)} &= 1{,}008\,67\,\mathrm{u}. \end{aligned}$$

(a) Jaká je relativní změna hmotnosti interagujících částic?

ŘEŠENÍ: Změnu hmotnosti Δm získáme odečtením hmotnosti částic, které vstupují do reakce od hmotnosti částic, které jsou výsledkem reakce:

$$\begin{aligned} \Delta m &= (139{,}91 + 93{,}91 + 2\cdot 1{,}008\,67)\,\mathrm{u} - \\ &\quad - (235{,}04 + 1{,}008\,67)\,\mathrm{u} = \\ &= -0{,}211\,\mathrm{u}. \end{aligned}$$

Hmotnost částic vstupujících do reakce je

$$M = 235{,}04\,\mathrm{u} + 1{,}008\,67\,\mathrm{u} = 236{,}05\,\mathrm{u}.$$

Tomu odpovídá relativní úbytek hmotnosti

$$\frac{|\Delta m|}{M} = \frac{0{,}211\,\mathrm{u}}{236{,}05\,\mathrm{u}} = \\ = 0{,}000\,89, \quad \text{tj. asi } 0{,}1\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Jakkoli je tato veličina malá, je poměrně snadno měřitelná.

(b) Jaká energie se při štěpné reakci uvolní?

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (8.40) dostaneme

$$Q = -\Delta m\, c^2 = -(-0{,}211\ \mathrm{u})(931{,}5\ \mathrm{MeV\cdot u^{-1}}) = \\ = 197\ \mathrm{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Za c^2 jsme dosadili hodnotu uvedenou ve vztahu (8.43). Uvolněná energie 197 MeV, připadající na jednu reakci, je mnohonásobně větší než typické hodnoty energie uvolněné při chemických reakcích, které se pohybují v jednotkách elektronvoltů.

PŘÍKLAD 8.10

Jádro atomu deuteria (tzv. těžký vodík) se nazývá **deuteron**. Je složeno z protonu a neutronu. Jak velká energie se uvolní, či absorbuje při procesu, při němž dojde k odtržení neutronu a protonu? Hmotnosti částic účastnících se reakce jsou:

$$\left.\begin{aligned} \text{deuteron: } m_\mathrm{d} &= 2{,}013\,55\ \mathrm{u} \\ \text{proton: } m_\mathrm{p} &= 1{,}007\,28\ \mathrm{u} \\ \text{neutron: } m_\mathrm{n} &= 1{,}008\,67\ \mathrm{u} \end{aligned}\right\} \ 2{,}015\,95\ \mathrm{u}$$

ŘEŠENÍ: Vzhledem k tomu, že celková hmotnost volného protonu a volného neutronu je větší než hmotnost deuteronu, je při štěpení deuteronu nutno energii dodat. Přírůstek hmotnosti při reakci činí

$$\Delta m = (m_\mathrm{p} + m_\mathrm{n}) - m_\mathrm{d} = \\ = (1{,}007\,28 + 1{,}008\,67)\ \mathrm{u} - (2{,}013\,55)\ \mathrm{u} = 0{,}002\,40\ \mathrm{u}.$$

Odpovídající energie je dána vztahem (8.40):

$$Q = -\Delta m\, c^2 = -(0{,}002\,40\ \mathrm{u})(931{,}5\ \mathrm{MeV\cdot u^{-1}}) = \\ = -2{,}24\ \mathrm{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

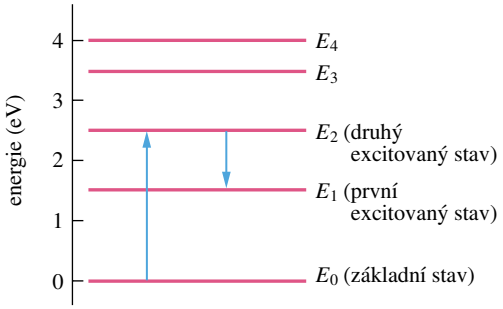
Znaménko minus ve výsledku potvrzuje, že při této reakci se energie absorbuje. Hodnota 2,24 MeV se nazývá *vazební energie* deuteronu. Vazební energie jádra je definována jako energie, kterou by bylo třeba jádru dodat, aby se rozštěpilo na volné protony a neutrony, resp. energie, která by se musela uvolnit, kdybychom měli jádro z volných protonů a neutronů vytvořit.

KONTROLA 6: Představme si, že bychom nějakým způsobem dokázali přimět šest volných protonů a stejný počet volných neutronů, aby se spojily v jádro uhlíkového atomu ^{12}C. Byla by hmotnost jádra větší, či menší než celková hmotnost volných částic?

8.9 KVANTOVÁNÍ ENERGIE

Dosud jsme předpokládali, že energie soustavy může nabývat *jakýchkoli* hodnot. Tento předpoklad je nepochybně rozumný u soustav, s nimiž se setkáváme v každodenním životě. Pro soustavy z oblasti mikrosvěta, jako jsou atomy nebo i tzv. *kvantové tečky* (laboratorně vyrobené shluky elektronů, které se atomům podobají), však nevyhovuje. Vnitřní energie takových mikrosoustav je **kvantována**, může nabývat jen některých hodnot. Přísluší-li soustavě určitá hodnota energie, říkáme, že se soustava nachází v **kvantovém stavu** s touto energií.

Obr. 8.17 ukazuje typický diagram hodnot energie (tzv. *energiových hladin*) atomu.* Energie je vynesena na svislé stupnici a každá z pěti nejnižších energiových hladin $E_0, E_1, \ldots, E_4$ je vyznačena vodorovnou čarou (odtud název *hladiny*). Energie atomu nemůže nabývat žádné hodnoty ležící mezi povolenými hladinami. Kvantový stav spojený s nejnižší hladinou, označenou na obr. 8.17 jako E_0, se nazývá *základním stavem* atomu. (V obr. 8.17 je mu přisouzena nulová hodnota energie.) Kvantové stavy s vyšší energií se nazývají *excitované*. Stav s energií E_1 je první excitovaný stav, stav s energií E_2 druhý excitovaný stav atd.



Obr. 8.17 Diagram energiových hladin atomu, znázorňující kvantované hodnoty energie (energiové hladiny). Každá hladina odpovídá jistému kvantovému stavu atomu. Nejnižší energie, označená jako E_0, přísluší základnímu stavu. Šipka směřující vzhůru symbolizuje kvantový přechod atomu ze základního stavu do druhého excitovaného stavu, jemuž odpovídá energie E_2. Šipka směřující dolů odpovídá kvantovému přechodu z druhého do prvního excitovaného stavu o energii E_1.

Atomy mají tendenci zaujímat konfiguraci základního stavu, jemuž odpovídá nejnižší energie (podobně jako se koule kutálí po svahu dolů). Atom může přejít do excitovaného stavu s vyšší energií jen tehdy, je-li mu z vnějšího zdroje dodána energie daná rozdílem mezi excitovaným a základním stavem. Atom může tuto energii získat na-

* I když ve zkratce hovoříme o energiových hladinách atomu, máme většinou na mysli možné hodnoty energie jednotlivých elektronů jeho elektronového obalu.

příklad při srážce s jiným atomem nebo volným elektronem, případně při pohlcení (absorpci) světla. Každopádně je třeba, aby získaná energie postačovala pro přechod na některou z vyšších hladin. Kvantovány jsou tedy nejen hodnoty energie samotné, ale i jejich možné změny (přírůstky i ztráty). Při změnách energie dochází ke kvantovým *přechodům* neboli *přeskokům* atomu mezi jednotlivými energiovými hladinami.

Šipka mířící v obr. 8.17 vzhůru představuje kvantový skok ze základního do druhého excitovaného stavu. Podle diagramu je pro takový přechod třeba, aby atom získal energii 2,5 eV. Při absorpci fotonu s touto energií foton zanikne a celá jeho energie přispěje k přírůstku energie atomu. Světlo tedy musí mít energii právě 2,5 eV, aby byl atom schopen je pohltit. Je-li energie světla o něco větší či menší, k absorpci nedojde.

Aby došlo k absorpci světla atomem, musí být energie absorbovaného fotonu rovna rozdílu energiových hladin odpovídajících výslednému a výchozímu stavu atomu.

Přejde-li atom do excitovaného stavu, nesetrvá v něm, ale je rychle *deexcitován*. Ztrácí energii buď při srážkách nebo vyzářením (emisí) světla. Světlo vyzářené při deexcitaci atomu při ní skutečně *vzniká* (předtím neexistovalo). Při kterémkoli z obou deexcitačních procesů je však třeba, aby atom ztratil přesně definovanou energii, a mohl tak přejít na některou z nižších energiových hladin.

Energie světla emitovaného atomem je vždy rovna rozdílu energií výchozí hladiny atomu a některé nižší hladiny.

Šipka, směřující v obr. 8.17 dolů, označuje kvantový přechod z druhého do prvního excitovaného stavu. Energie světla vyzářeného při tomto přechodu je 1,0 eV. Poté atom přejde do základního stavu a znovu vyzáří světlo, tentokrát o energii 1,5 eV. Místo tohoto dvoustupňového procesu mohl také atom přejít do základního stavu rovnou a vyzářit světlo o energii 2,5 eV.

KONTROLA 7: Bylo zjištěno, že kvantový systém vyzářil světlo čtyř různých energií, aniž byl mezitím znovu excitován. Tři hodnoty energie emitovaného světla byly změřeny: 1,1 eV, 1,4 eV a 2,8 eV. Pořadí emisí není známo. Energiové hladiny systému jsou tyto:

$$E_8 = 7{,}7\,\text{eV} \quad E_5 = 4{,}8\,\text{eV} \quad E_2 = 2{,}7\,\text{eV}$$
$$E_7 = 6{,}6\,\text{eV} \quad E_4 = 4{,}2\,\text{eV} \quad E_1 = 1{,}3\,\text{eV}$$
$$E_6 = 5{,}5\,\text{eV} \quad E_3 = 3{,}9\,\text{eV} \quad E_0 = 0{,}0\,\text{eV}$$

(a) Jaký byl počáteční stav systému a (b) jakou energii mělo světlo vyzářené při čtvrté emisi?

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Konzervativní síly

Síla působící na částici je **konzervativní**, je-li celková práce, kterou vykoná při pohybu částice po libovolné uzavřené trajektorii, nulová. Ekvivalentní vyjádření: Síla působící na částici je konzervativní, jestliže práce, kterou vykoná při přemístění částice mezi dvěma zadanými body, nezávisí na trajektorii, po které se částice pohybovala. Tíhová síla a pružná síla jsou konzervativní. Dynamická třecí síla je *nekonzervativní*.

Potenciální energie

Potenciální energie souvisí s konfigurací soustavy, v níž působí konzervativní interakční síly. Změna potenciální energie soustavy je definována jako záporně vzatá práce, kterou konzervativní interakční síly vykonají při odpovídající změně konfigurace soustavy

$$\Delta E_p = -W_g. \tag{8.1}$$

Je-li konfigurace soustavy (poloha částice vzhledem ke zvolenému bodu zbytku soustavy) určena jedinou skalární proměnnou x a závisí-li konzervativní síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ popisující interakci částice se zbytkem soustavy pouze na této proměnné, je často možné vyjádřit změnu potenciální energie vztahem

$$\Delta E_p = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx, \tag{8.6}$$

kde x_i je počáteční a x_f koncová poloha částice.

Tíhová potenciální energie

Potenciální energie soustavy s tíhovou interakcí se nazývá **tíhová potenciální energie**. Jedná-li se o soustavu zahrnující Zemi a částici, která se pohybuje v blízkosti jejího povrchu, hovoříme o **tíhové potenciální energii**. Při přechodu částice mezi body ležícími ve výškách y_i a y_f nedaleko od povrchu Země je změna tíhové potenciální energie soustavy částice + Země rovna

$$\Delta E_p = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y. \tag{8.7}$$

Je-li **referenční konfigurace** soustavy zvolena tak, že $y_i = 0$, a je-li jí přisouzena nulová hodnota tíhové potenciální energie $E_{p,i} = 0$, můžeme tíhovou potenciální energii soustavy v obecné konfiguraci (resp. tíhovou potenciální energii částice v obecné poloze vzhledem k Zemi) vyjádřit vztahem

$$E_p = mgy. \tag{8.9}$$

Pružná potenciální energie

Pružná potenciální energie je spojena se stavem napjatosti (při napínání či stlačování) pružných objektů. Pro pružinu, která vyhovuje lineárnímu vztahu pro pružnou sílu $F(x) = -kx$, je pružná potenciální energie

$$E_{\mathrm{p}}(x) = \tfrac{1}{2}kx^2. \tag{8.11}$$

Tento vztah platí pro případ, že referenční konfigurace odpovídá nenapjaté pružině a je jí přisouzena nulová potenciální energie. Je tedy $E_{\mathrm{p}} = 0$ pro $x = 0$.

Mechanická energie

Mechanickou energii E soustavy definujeme jako součet její kinetické energie E_{k} a potenciální energie E_{p}:

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}}. \tag{8.12}$$

Kinetická energie soustavy je součtem kinetických energií všech jejích objektů. Potenciální energie je součtem všech příspěvků odpovídajících konzervativním interakčním silám uvnitř soustavy. Působí-li v izolované soustavě pouze konzervativní interakční síly, nemění se její mechanická energie E. Tuto skutečnost nazýváme **zákonem zachování mechanické energie** a píšeme

$$E_{\mathrm{k},2} + E_{\mathrm{p},2} = E_{\mathrm{k},1} + E_{\mathrm{p},1}. \tag{8.17}$$

Indexy 1 a 2 odpovídají různým okamžikům v průběhu energiových změn. Zákon zachování mechanické energie lze zapsat i ve tvaru

$$\Delta E = \Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}} = 0. \tag{8.18}$$

Křivky potenciální energie

Je-li sledovaná částice v soustavě popsána svou polohou x a známe-li závislost potenciální energie E_{p} soustavy na této poloze, můžeme vyjádřit výslednou sílu, kterou zbytek soustavy působí na částici:

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{8.19}$$

Při zadání funkce $E_{\mathrm{p}}(x)$ grafem lze pro libovolnou hodnotu x zjistit hodnotu $F(x)$ jako záporně vzatou směrnici tohoto grafu. Kinetickou energii částice lze pak spočítat ze vztahu

$$E_{\mathrm{k}}(x) = E - E_{\mathrm{p}}(x), \tag{8.21}$$

kde E je mechanická energie soustavy. **Bodem obratu** rozumíme takovou polohu x, v níž se obrací směr pohybu částice (tj. $E_{\mathrm{k}} = 0$). Částice je v **rovnováze** v každém bodě, v němž je směrnice grafu funkce $E_{\mathrm{p}}(x)$ nulová ($F(x) = 0$).

Práce vnějších a nekonzervativních sil

Uvažujme částici, která je součástí soustavy. Působí-li na ni vnější síla $\boldsymbol{F}$, která při změně konfigurace soustavy vykoná práci W, změní se o tuto hodnotu mechanická energie soustavy:

$$W = \Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}} = \Delta E. \tag{8.24, 8.25}$$

Působí-li v soustavě dynamické třecí síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}$ a $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}$, je změna celkové mechanické energie soustavy dána vztahem

$$\Delta E = -F_{\mathrm{d}}d, \tag{8.27}$$

kde d je velikost posunutí sledované částice při změně konfigurace soustavy. O úbytku mechanické energie, k níž vlivem třecích sil došlo, hovoříme jako o **energii rozptýlené** třecími silami. Rozptýlená energie je rovna práci sil $\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}$ a $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}$.

Zákon zachování energie

V izolované soustavě může docházet ke změnám různých typů energie, avšak celková energie soustavy E_{celk} se zachovává. Tento zákon zachování lze zapsat ve tvaru

$$\Delta E_{\mathrm{celk}} = \Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}} + \Delta E_{\mathrm{int}} + \Delta E_{\mathrm{ostatní}} = 0. \tag{8.34}$$

ΔE_{int} je změna vnitřní energie soustavy a zahrnuje změny vnitřní energie všech jejích objektů.

Není-li soustava izolovaná, dochází vlivem působení vnějších sil ke změnám její celkové energie. Změna celkové energie soustavy je rovna práci vykonané vnějšími silami

$$W = \Delta E_{\mathrm{celk}} = \Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}} + \Delta E_{\mathrm{int}}. \tag{8.35}$$

Výkon

Výkon síly udává, s jakou „rychlostí“ dochází při jejím působení ke změnám energie soustavy. Dojde-li za dobu Δt ke změně energie o ΔE (tato změna je rovna práci, kterou síla za dobu Δt vykonala), je **průměrný výkon** síly roven

$$\overline{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \tag{8.36}$$

Okamžitý výkon síly je dán vztahem

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \tag{8.37}$$

Hmotnost a energie

Energiovým ekvivalentem E hmotnosti m rozumíme energii danou vztahem

$$E = mc^2, \tag{8.39}$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. Pro výpočet energiového ekvivalentu v megaelektronvoltech je třeba údaj o hmotnosti zadaný v atomových jednotkách (u) vynásobit faktorem $931{,}5\,\mathrm{MeV{\cdot}u^{-1}}$. Energii uvolněnou či pohlcenou při jaderných nebo chemických reakcích vyjadřujeme vztahem

$$Q = -\Delta m\, c^2, \tag{8.40}$$

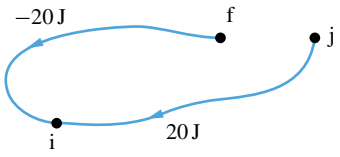
kde Δm je odpovídající úbytek, či přírůstek hmotnosti. (Hodnota Q je kladná, jestliže se při reakci energie uvolňuje, a záporná, je-li reakce doprovázena pohlcením energie.)

Kvantování energie

Energie v mikroskopických soustavách, jakými jsou např. atomy, je **kvantována** (nabývá pouze některých hodnot). Soustava se může nacházet v **kvantových stavech** charakterizovaných povolenými hodnotami energie. Energie soustavy nenabývá žádných jiných hodnot. Nejnižší energie odpovídá **základnímu stavu** soustavy, vyšší hodnoty energie příslušejí jejím **excitovaným stavům**. Jestliže soustava získává, či ztrácí energii pohlcením (absorpcí), či vyzářením (emisí) světla, je energie světla vždy rovna rozdílu některých povolených hodnot energie soustavy.

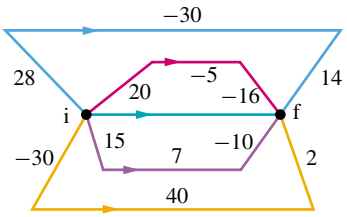
OTÁZKY

1. Částice na obr. 8.18 se pohybuje mezi polohami (f) a (i), resp. (j) a (i) ve vyznačených směrech. Přitom na ni působí konzervativní síla $\boldsymbol{F}$, která při jednotlivých přesunech částice vykoná práci, jejíž hodnoty jsou v obrázku rovněž vyznačeny. Jakou práci by síla $\boldsymbol{F}$ vykonala při přemístění částice z polohy (f) do polohy (j)?



Obr. 8.18
Otázka 1

2. Částice na obr. 8.19 se může dostat z polohy (i) do polohy (f) různými cestami. V obrázku je vyznačena jedna přímá cesta a čtyři možnosti pohybu částice po lomených čarách. Při pohybu po přímé cestě a po třech ze čtyř lomených čar působí na částici pouze konzervativní síla $\boldsymbol{F}_c$. Při pohybu po čtvrté trajektorii se přidá ještě působení nekonzervativní síly $\boldsymbol{F}_{nc}$. Každý z přímých úseků jednotlivých lomených trajektorií je opatřen údajem o práci (v joulech), kterou vykonala výslednice sil působících na částici při jejím pohybu po tomto úseku. (a) Jakou práci vykonaly všechny síly působící na částici při jejím pohybu z (i) do (f) po přímé trajektorii? (b) Jakou práci vykonala nekonzervativní síla $\boldsymbol{F}_{nc}$ při pohybu částice po čtvrté trajektorii?

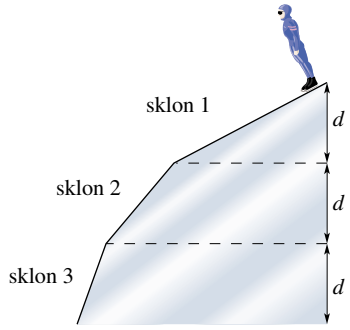


Obr. 8.19
Otázka 2

3. Pružina je oproti nenapjatému stavu protažena o 3,0 cm. Uvažujeme čtyři možné koncové stavy pružiny: (a) protažena o 2,0 cm, (b) stlačena o 2,0 cm, (c) stlačena o 4,0 cm, (d) protažena o 4,0 cm. Uspořádejte tyto možnosti sestupně podle změny potenciální energie pružiny při přechodu z počátečního do koncového stavu.

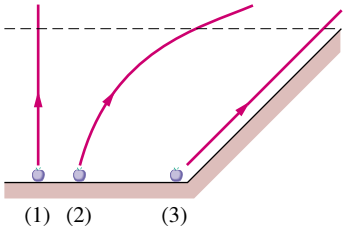
4. Odvážný bruslař na obr. 8.20 sjíždí po ledovém svahu se třemi různými sklony. Výška všech úseků je stejná a rovna d. Uspořádejte jednotlivé úseky sestupně podle (a) práce vykonané tíhovou silou působící na bruslaře, (b) změny jeho kinetické energie.

5. Kokosový ořech je vržen ze skalního útesu do širokého plochého údolí s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}$ o velikosti $8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Následující možnosti volby směru počáteční rychlosti uspořádejte sestupně (a) podle počáteční kinetické energie ořechu, (b) podle kinetické energie ořechu při jeho dopadu na dno údolí: (1) vektor $\boldsymbol{v}$ směřuje téměř svisle vzhůru, (2) $\boldsymbol{v}$ směřuje vzhůru pod úhlem 45° vzhledem k vodorovné rovině, (3) směr vektoru $\boldsymbol{v}$ je vodorovný, (4) $\boldsymbol{v}$ směřuje dolů pod úhlem 45° vzhledem k vodorovné rovině, (5) $\boldsymbol{v}$ směřuje téměř svisle dolů.



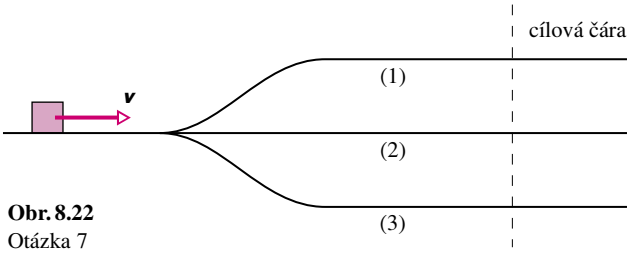
Obr. 8.20
Otázka 4

6. Na obr. 8.21 jsou tři švestky, které jsou vymrštěny z míst ležících na stejné vodorovné úrovni rychlostmi o stejných velikostech. Jedna z nich se pohybuje svisle vzhůru, druhá je vržena pod malým úhlem vzhledem ke svislému směru a třetí klouže po dokonale hladké nakloněné rovině. Uspořádejte tyto situace sestupně podle velikosti výsledné rychlosti švestek při dosažení úrovně vyznačené přerušovanou čarou.



Obr. 8.21
Otázka 6

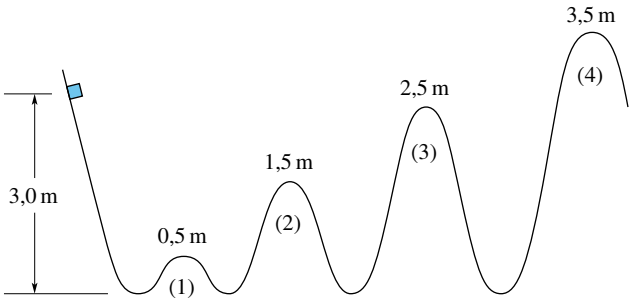
7. Kostku pohybující se zpočátku po vodorovné podložce (obr. 8.22) je možné navést na kteroukoli ze tří vyznačených drah



Obr. 8.22
Otázka 7

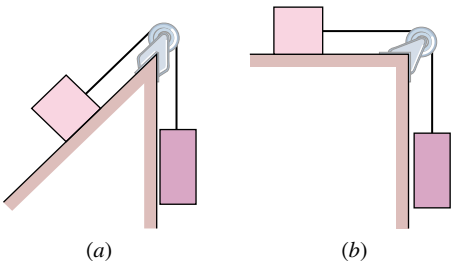
vedených v různých úrovních vzhledem k původní vodorovné rovině. Ve všech případech je podložka dokonale hladká. Kostku sledujeme do okamžiku, než dospěje k cílové čáře (zakreslena přerušovaně). Uspořádejte dráhy sestupně (a) podle velikosti rychlosti kostky v okamžiku průchodu cílovou čarou, (b) podle doby pohybu.

8. Malá krychlička je volně vypuštěna z bodu ve výšce 3,0 m nad základní úrovní po dokonale hladké trati (obr. 8.23). V obrázku jsou vyznačeny výšky vrcholků, které jsou na trati vymodelovány. Všechny pahorky mají v okolí nejvyššího bodu stejný kruhový tvar. Předpokládáme, že krychlička v žádném bodě neztratí kontakt s dráhou. (a) Přes který pahorek krychlička nepřejde? (b) Jaký bude její další pohyb? (c) Na kterém z vrcholků má krychlička největší dostředivé zrychlení a (d) na kterém z nich na ni podložka působí nejmenší tlakovou silou?



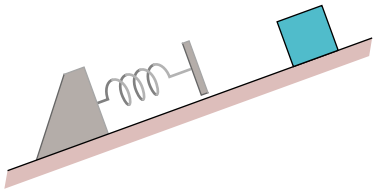
Obr. 8.23 Otázka 8

9. Na obr. 8.24 vidíme dvě uspořádání dvou experimentů s dvojicí kostek. Kostky jsou spojeny lankem vedeným přes kladku zanedbatelné hmotnosti, která se může otáčet bez tření. Podložka, po které se pohybuje světlejší kostka, je v obou případech dokonale hladká. V obou případech visutá kostka po uvolnění soustavy klesá. Uvažujme celkovou energii kostek v časovém intervalu, během něhož kostka klesne o vzdálenost d. Rozhodněte, zda kinetická energie kostek v uspořádání (a) je po uplynutí tohoto intervalu větší, menší, nebo stejná jako v uspořádání (b).



Obr. 8.24 Otázka 9

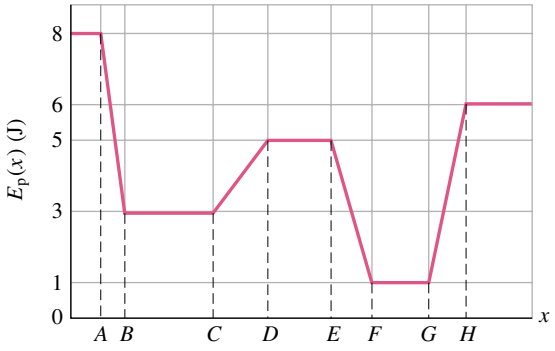
10. Kostku zakreslenou na obr. 8.25 jsme v okamžiku t_1 vypustili z klidu po dokonale hladké nakloněné rovině. V okamžiku t_2 narazí kostka na pružinu zanedbatelné hmotnosti, připevněnou k nakloněné rovině, a stlačuje ji. Stlačení pružiny je maximální v okamžiku t_3. Jak se v časovém intervalu od t_1 do t_3 mění (a) kinetická energie kostky, (b) tíhová potenciální energie soustavy kostka + Země, (c) pružná potenciální energie pružiny, (d) mechanická energie soustavy tvořené jen kostkou a Zemí, (e) mechanická energie pružiny, (f) mechanická energie soustavy kostka + pružina + Země?



Obr. 8.25 Otázka 10

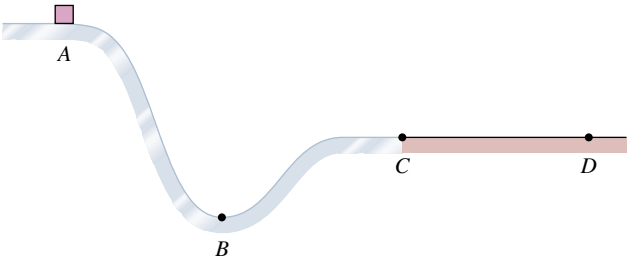
11. Jakou hodnotu nesmí překročit mechanická energie E a kinetická energie E_k částice v kontrole 4, (a) má-li být částice uvězněna v potenciálové jámě, (b) má-li být umožněn pohyb částice pouze vlevo od bodu D?

12. Na obr. 8.26 je graf potenciální energie částice. (a) Uspořádejte úseky AB, BC, CD a DE sestupně podle velikosti síly působící na částici. Jakou hodnotu nesmí překročit mechanická energie částice E, má-li částice (b) být uvězněna v levé potenciálové jámě, (c) v pravé potenciálové jámě, (d) mít možnost pohybu mezi jámami, ale nedostat se vpravo za bod H? V případě situace (d) určete, ve kterém z úseků má částice (e) největší kinetickou energii, (f) nejmenší rychlost.



Obr. 8.26 Otázka 12

13. Kostka sjíždí po skluzavce znázorněné na obr. 8.27. Mezi body A a C je skluzavka dokonale hladká, mezi body C a D působí na kostku třecí síla. Rozhodněte, zda v jednotlivých úsecích dráhy kinetická energie kostky roste, klesá, nebo zůstává konstantní: (a) AB, (b) BC, (c) CD. (d) Jak je tomu v každém z těchto úseků s mechanickou energií kostky?



Obr. 8.27 Otázka 13

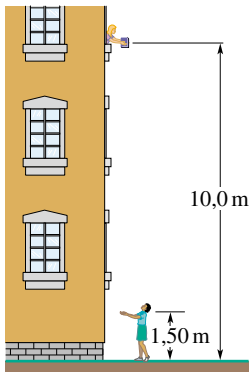
CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 8.3 Určení hodnot potenciální energie

1C. Částice náleží do soustavy, v níž působí pouze konzervativní interakční síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$. Na částici působí síla $\boldsymbol{F}$. Je-li částice v bodě A, je potenciální energie soustavy rovna 40 J. Během pohybu částice z bodu A do bodu B vykonají interakční síly práci +25 J. Jaká je potenciální energie soustavy v okamžiku, kdy je částice v bodě B?

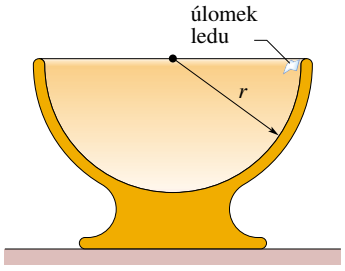
2C. Jaká je tuhost pružiny, jejíž potenciální energie je 25 J při stlačení o 7,5 cm vzhledem k nenapjatému stavu?

3C. Student hodil kamarádovi z okna knihu, jejíž hmotnost je 2,00 kg. Přítel stojí pod oknem a drží ruce ve výšce 1,5 m nad zemí, aby knihu zachytil (obr. 8.28). (a) Jakou práci vykonala tíhová síla působící na knihu od okamžiku jejího vypuštění do chvíle, kdy ji přítel chytil? (b) Jak se přitom změnila potenciální energie soustavy kniha + Země? Zvolme nulovou hladinu tíhové potenciální energie této soustavy na zemském povrchu. Jaká je potenciální energie soustavy v okamžiku (c) vypuštění knihy, (d) zachycení knihy?



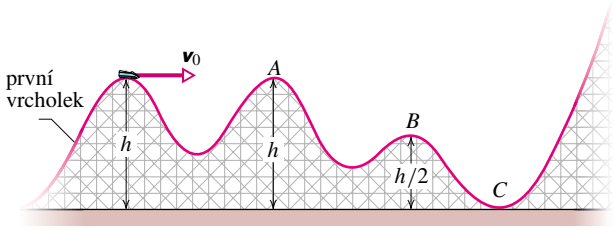
Obr. 8.28 Cvičení 3 a 12

4C. Ledový úlomek o hmotnosti 2,00 g jsme volně vypustili z bodu na vnitřním okraji polokulového poháru o poloměru $r = 22{,}0$ cm (obr. 8.29). Tření mezi ledem a stěnou poháru je zanedbatelné. (a) Jakou práci vykonala tíhová síla působící na úlomek při jeho přesunutí na dno poháru? (b) Jak se přitom změnila potenciální energie soustavy úlomek + Země? (c) Konfiguraci, v níž je úlomek na dně poháru, přisoudíme nulovou potenciální energii. Jaká je potenciální energie soustavy v okamžiku vypuštění ledového úlomku? (d) Jaká je hodnota potenciální energie soustavy v okamžiku, kdy je úlomek na dně poháru, jestliže pro změnu přisoudíme její nulovou hodnotu konfiguraci, v níž je na jeho okraji?



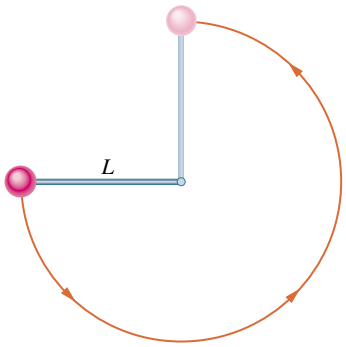
Obr. 8.29 Cvičení 4 a 13

5C. Vozík horské dráhy má hmotnost m a pohybuje se po dráze bez tření. Prvním vrcholkem dráhy (obr. 8.30) projíždí rychlostí $\boldsymbol{v}_0$. Jakou práci vykoná tíhová síla, která působí na vozík, od tohoto počátečního okamžiku do okamžiku průjezdu vozíku (a) bodem A, (b) bodem B, (c) bodem C? Tíhové potenciální energii soustavy vozík + Země přisoudíme nulovou hodnotu v konfiguraci, v níž je vozík v bodě C. Jaká je její hodnota při průjezdu vozíku (d) bodem B, (e) bodem A?



Obr. 8.30 Cvičení 5 a 14

6C. Koule o hmotnosti m je upevněna na konci tenké tyčky o délce L (obr. 8.31), jejíž hmotnost je zanedbatelná. Druhý konec tyčky je uchycen tak, aby se koule mohla pohybovat po kružnici ve svislé rovině. Tyčku nastavíme do vodorovné polohy a udělíme kouli směrem dolů takovou rychlost, aby prošla částí kružnice vyznačenou na obrázku a dosáhla nejvyššího bodu právě s nulovou rychlostí. Určete práci, kterou vykonala tíhová síla působící na kouli mezi počátečním bodem a (a) nejnižším bodem trajektorie, (b) nejvyšším bodem trajektorie, (c) bodem ležícím na protilehlé straně trajektorie na stejné úrovni s počátečním bodem. (d) Konfiguraci soustavy koule + Země, v níž je koule v počátečním bodě, přisoudíme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie. Jaká hodnota tíhové potenciální energie odpovídá konfiguracím (a), (b) a (c)?

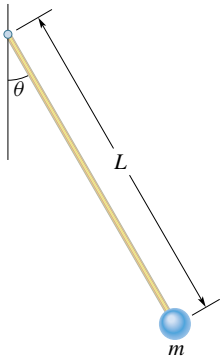


Obr. 8.31 Cvičení 6 a 15

7Ú. Pružina o tuhosti $3\,200\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ je protažena tak, že její pružná potenciální energie je 1,44 J. (Pro nenapjatou pružinu klademe $E_p = 0$.) Jaká bude změna pružné potenciální energie, změní-li se stav pružiny tak, že pružina bude (a) napjata o 2,0 cm, (b) stlačena o 2,0 cm, (c) stlačena o 4,0 cm?

8Ú. Sněhovou kouli o hmotnosti 1,50 kg házíme ze skály vysoké 12,5 m. Počáteční rychlost koule svírá s vodorovnou rovinou úhel 41,0°, míří vzhůru a má velikost $14{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jakou práci vykoná tíhová síla, která působí na kouli, od počátečního okamžiku do okamžiku jejího dopadu na vodorovný povrch pod skálou? (b) Jak se během letu koule změní tíhová potenciální energie soustavy koule+Země? (c) Konfiguraci, v níž je koule na vrcholku skály, přisoudíme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie soustavy koule + Země. Jaká je její hodnota při dopadu koule na zem?

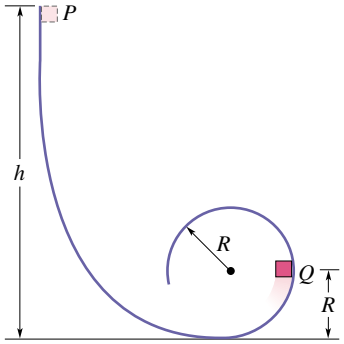
9Ú. Tenká tyč délky L a zanedbatelné hmotnosti je na konci uchycena tak, aby se mohla otáčet ve svislé rovině, podle obr. 8.32. K jejímu druhému konci je upevněna těžká koule o hmotnosti m. Tyč odchýlíme od svislého směru o úhel θ a volně vypustíme. Uvažme časový interval mezi uvolněním tyče a okamžikem, kdy koule prochází nejnižším bodem své trajektorie. (a) Jakou práci vykoná v tomto intervalu tíhová síla působící na kouli? (b) Jak se změní tíhová potenciální energie soustavy koule+Země? (c) Jaká hodnota tíhové potenciální energie odpovídá konfiguraci soustavy koule + Země, v níž je koule v krajní poloze, přisoudíme-li nejnižší poloze koule nulovou hodnotu této energie?



Obr. 8.32 Úlohy 9 a 20

10Ú. Malá kostka o hmotnosti m může klouzat bez tření po dráze tvaru „smyčky smrti“, znázorněné na obr. 8.33. Kostku vypustíme z klidové polohy v bodě P, který leží ve výšce $h = 5R$ nade dnem smyčky. Jakou práci vykoná tíhová síla působící na kostku od okamžiku jejího vypuštění z bodu P do okamžiku průchodu (a) bodem Q, (b) vrcholem smyčky? Konfiguraci soustavy kostka + Země, v níž je kostka na dně smyčky, přisoudíme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie. Jaká je tíhová potenciální energie soustavy, je-li kostka (c) v bodě P, (d) v bodě Q, (e) ve vrcholu smyčky?

11Ú. Částice se pohybuje podél osy x z bodu $x = 1{,}0\,\mathrm{m}$ do bodu $x = 4{,}0\,\mathrm{m}$ a pak zpět do výchozího bodu $x = 1{,}0\,\mathrm{m}$. Jednou



Obr. 8.33 Úlohy 10 a 39

ze sil, které na ni při tom působí, je síla $\boldsymbol{F}$, která má rovněž směr osy x. Jakou práci vykoná tato síla při každém takovém oběhu částice, jestliže její složka ve směru osy x nabývá při pohybu z počátečního bodu do bodu obratu, resp. při návratu, těchto hodnot: (a) pohyb k bodu obratu: $F_x = 3{,}0\,\mathrm{N}$, resp. pohyb zpět: $F_x = -3{,}0\,\mathrm{N}$, (b) 5,0 N, resp. 5,0 N, (c) $2{,}0x$, resp. $-2{,}0x$, (d) $3{,}0x^2$, resp. $3{,}0x^2$? Souřadnice x je zadávána v metrech a údaje o síle $\boldsymbol{F}$ v newtonech. (e) Ve kterých z uvedených případů by mohla být síla $\boldsymbol{F}$ konzervativní?

ODST. 8.4 Zákon zachování mechanické energie

12C. (a) Jak velkou rychlost má kniha, o níž jsme uvažovali ve cvič. 3, v okamžiku, kdy ji zachytí člověk pod oknem? (b) Jaká by v okamžiku zachycení byla rychlost knihy, jejíž hmotnost by byla dvojnásobná?

13C. (a) Jak velkou rychlost má na dně poháru úlomek ledu, kterým jsme se zabývali ve cvič. 4? (b) Jak velkou rychlost by měl na dně poháru jiný úlomek, jehož hmotnost by byla dvojnásobná?

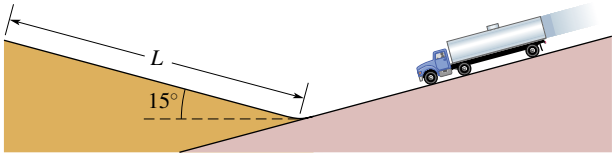
14C. Určete rychlost vozíku horské dráhy ze cvič. 5 v bodech (a) A, (b) B a (c) C. (d) Poslední, nejvyšší, pahorek již vozík nepřekoná. Do jaké výšky vyjede po jeho svahu? (e) Zodpovězte znovu otázky (a) až (d) pro vozík o dvojnásobné hmotnosti.

15C. (a) Jakou počáteční rychlost jsme udělili kouli ve cvič. 6? Jaká byla její rychlost (b) v nejnižším bodě trajektorie, (c) v bodě protilehlém k počátečnímu bodu?

16C. Člověk o hmotnosti 70,0 kg vyskočil z okna a dopadl do záchranné plachty rozestřené a uchycené v hloubce 11,0 m pod oknem. Během brzdění pádu se plachta napínala a v okamžiku, kdy člověk dosáhl nulové rychlosti, bylo její dno 1,50 m pod původní úrovní. Předpokládejme, že se mechanická energie soustavy člověk+plachta+Země během popsaného děje zachovává a že chování pružné plachty lze popsat pomocí modelu ideální pružiny. Určete pružnou energii plachty ve stavu, kdy je napjata o 1,50 m.

17C. Nákladní automobil s vadnými brzdami sjíždí po svahu (obr. 8.34). V okamžiku, kdy jej řidič navádí na bezpečnostní nájezd o sklonu 15°, ukazuje tachometr údaj $130\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Jakou nejmenší délku L by musel nájezd mít, aby na něm automobil

ještě dosáhl nulové okamžité rychlosti? Proč bývají bezpečnostní nájezdy obvykle pokryty silnou vrstvou písku, nebo štěrku?



Obr. 8.34 Cvičení 17

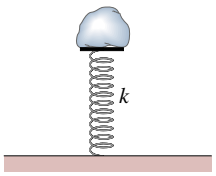
18C. Proud sopečného popela se pohybuje po vodorovném povrchu a dorazí ke svahu se stoupáním 10°. Čelo proudu urazí podél svahu ještě 920 m a zastaví se. Dejme tomu, že plyny unášené proudem jej nadnášejí a minimalizují tak tření mezi částečkami popela a zemským povrchem. Předpokládejme také, že mechanická energie souboru částic v oblasti čela proudu se zachovává. Jaká je počáteční rychlost čela proudu?

19Ú. Balon naplněný vodou o hmotnosti 1,50 kg je vyhozen svisle vzhůru počáteční rychlostí 3,00 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jaká je v tom okamžiku kinetická energie balonu? (b) Jakou práci vykoná tíhová síla působící na balon během jeho výstupu k bodu obratu? (c) Jak se během výstupu změní tíhová potenciální energie soustavy balon + Země? (d) Jaká je tíhová potenciální energie této soustavy v okamžiku, kdy balon dosáhne nejvyššího bodu, přisoudíme-li nulovou hodnotu této energie konfiguraci, v níž je soustava v počátečním okamžiku? (e) Položme naopak $E_p = 0$ v konfiguraci, v níž je balon v nejvyšším bodě své trajektorie. Jaká byla potenciální energie soustavy balon + Země v okamžiku vyhození balonu? (f) Jaké výšky nad povrchem Země balon dosáhne?

20Ú. Jaká je rychlost koule z úlohy 9 v nejvyšším bodě její trajektorie, je-li $L = 2{,}00$ m a $\theta = 30°$?

21Ú. (a) Určete velikost rychlosti sněhové koule z úlohy 8 v okamžiku jejího dopadu na vodorovný povrch pod skaliskem. Při řešení úlohy je samozřejmě možné použít výsledků kap. 4. Vyjděte však raději z energiových úvah. (b) Jak by se změnil výsledek úlohy (a), kdyby byla koule vyhozena opět pod úhlem 41,0° vzhledem k vodorovné rovině, avšak směrem *dolů*?

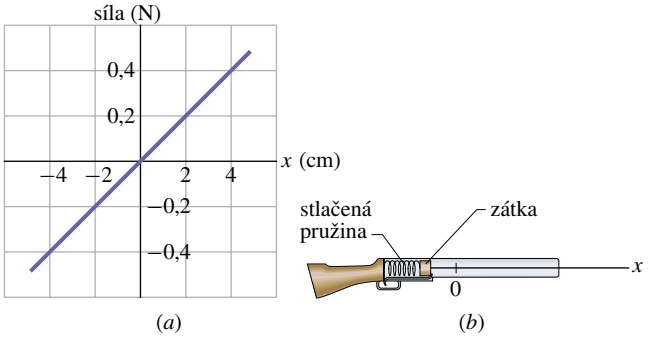
22Ú. Na obr. 8.35 je vyobrazen kámen o hmotnosti 8 kg spočívající na svislé pružině. Pružina je kamenem stlačena o 10,0 cm. (a) Jaká je tuhost pružiny? (b) Pružinu stlačíme o dalších 30,0 cm a uvolníme. Bod, v němž se kámen nachází v tomto okamžiku, označme U. Jaká je pružná potenciální energie soustavy bezprostředně před uvolněním pružiny? (c) Jaká změna tíhové potenciální energie soustavy kámen + Země odpovídá přemístění kamene z bodu U do nejvyššího bodu nad povrchem Země, jehož kámen dosáhne? (d) Jaká je největší výška kamene nad bodem U?



Obr. 8.35
Úloha 22

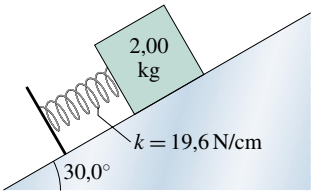
23Ú. Kulka o hmotnosti 5,0 g je vystřelena ze vzduchovky svisle vzhůru. Má-li kulka právě doletět k terči umístěnému ve výšce 20 m nad místem, v němž se nacházela před výstřelem (spočívala na horním konci stlačené svislé pružiny), musí být pružina před výstřelem stlačena o 8,0 cm. (a) Jak se změní tíhová potenciální energie soustavy kulka + Země během výstupu kulky? (b) Jak se změní pružná potenciální energie pružiny během výstřelu? (c) Jaká je tuhost pružiny?

24Ú. Graf závislosti pružné síly na prodloužení pružiny na obr. 8.36a odpovídá dětské špuntovce z obr. 8.36b. Pružina připravená k výstřelu je stlačena o 5,5 cm, hmotnost zátky sloužící jako náboj je 3,8 g. (a) S jak velkou rychlostí opustí zátka hlaveň za předpokladu, že ztrácí s pružinou kontakt v okamžiku, kdy konec pružiny prochází polohou odpovídající nenapjatému stavu? (b) Předpokládejme pro změnu, že se zátka k pružině přilepila a ještě ji o 1,5 cm protáhne, než s ní ztratí kontakt. Jaká bude rychlost vystřelené zátky nyní?



Obr. 8.36 Úloha 24

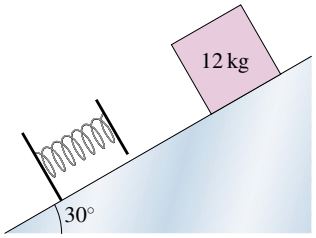
25Ú. Dvoukilogramová kostka spočívá na dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 30,0° a proti sklouznutí je zajištěna pružinou (obr. 8.37). Pružinu, jejíž tuhost je 19,6 $\mathrm{N{\cdot}cm^{-1}}$, stlačíme tak, aby její celkové stlačení bylo 20,0 cm, a uvolníme. (a) Jaká je pružná potenciální energie stlačené pružiny? (b) Jak se změní tíhová potenciální energie soustavy kostka + Země od okamžiku uvolnění pružiny do okamžiku, kdy kostka dostoupí při pohybu podél nakloněné roviny do nejvyššího bodu své trajektorie? (c) Jakou dráhu urazí kostka podél nakloněné roviny během pohybu popsaného v části (b)?



Obr. 8.37 Úloha 25

26Ú. Kostku o hmotnosti 12 kg položíme na nakloněnou rovinu o úhlu sklonu $\theta = 30°$ a vypustíme s nulovou počáteční rychlostí. Na nakloněné rovině je připevněna pružina (obr. 8.38), jejíž tuhost je taková, že ji silou o velikosti 270 N dokážeme stlačit

o 2,0 cm. Kostka narazí na pružinu a stlačuje ji. V okamžiku, kdy je rychlost kostky nulová, je pružina stlačena o 5,5 cm. (a) Jakou dráhu urazila kostka podél nakloněné roviny od okamžiku, kdy byla vypuštěna, do okamžiku, kdy dosáhla bodu obratu? (b) S jakou rychlostí narazila do pružiny?



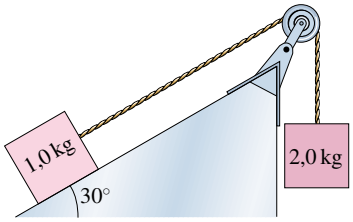
Obr. 8.38 Úloha 26

27Ú. Střela o hmotnosti 0,55 kg je vystřelena z hrany skalního útesu s počáteční kinetickou energií 1 550 J. Nejvyšší bod, kterého střela dosáhne, leží ve výšce 140 m nad ústím hlavně. (a) Jaká je vodorovná složka rychlosti střely? (b) Jaká je svislá složka její rychlosti bezprostředně po výstřelu? (c) V jistém okamžiku má svislá složka rychlosti velikost 65 $m \cdot s^{-1}$. Jaká je v tomto okamžiku poloha střely vzhledem k ústí hlavně (vodorovná vzdálenost a výška, resp. hloubka)?

28Ú. Z okna vyletěl 50 g míček s počáteční rychlostí 8,0 $m \cdot s^{-1}$ vzhůru pod elevačním úhlem 30°. Pomocí energiové metody určete (a) kinetickou energii míčku na vrcholu jeho dráhy, (b) jeho rychlost v okamžiku, kdy je 3 m pod oknem. Závisí tato rychlost na (c) hmotnosti míčku, (d) počátečním úhlu?

29Ú. Pružina dětské vzduchovky má tuhost 7,0 $N \cdot cm^{-1}$. Dítě vystřelilo kulku o hmotnosti 30 g pod úhlem 30° šikmo vzhůru. Kulka dosáhla maximální výšky 1,8 m nad ústím hlavně. (a) Jakou rychlostí opustila kulka hlaveň? (b) Jaké bylo stlačení pružiny před výstřelem?

30Ú. Nakloněná rovina v experimentu na obr. 8.39 je dokonale hladká, kladka má zanedbatelnou hmotnost a může se otáčet bez tření. Tělesa spojená napjatou nepružnou šňůrou jsou nejprve v klidu a pak je uvolníme. Jaká je celková kinetická energie soustavy v okamžiku, kdy těleso o hmotnosti 2,0 kg pokleslo o 25 cm?

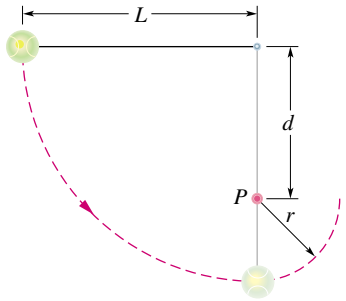


Obr. 8.39 Úloha 30

31Ú. Sněhovou kouli o hmotnosti 1,50 kg jsme vyhodili šikmo vzhůru pod elevačním úhlem 34,0° s počáteční rychlostí o velikosti 20,0 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jaká je její počáteční kinetická energie? (b) Jak se změní potenciální energie soustavy koule + Země od počátečního okamžiku do okamžiku, kdy koule dosáhne největší výšky nad výchozím místem? (c) Určete tuto výšku.

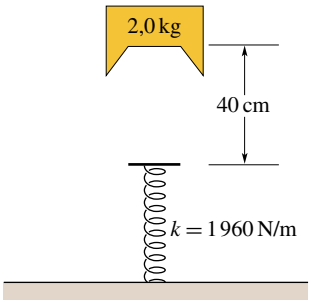
32Ú. Kyvadlo je vyrobeno z kamene o hmotnosti 2,0 kg, který se může houpat na nehmotné šňůře o délce 4,0 m. Při průchodu nejnižším bodem své trajektorie má kámen rychlost 8,0 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jak velká je jeho rychlost v okamžicích, kdy šňůra svírá se svislým směrem úhel 60°? (b) Jaké největší hodnoty dosahuje během pohybu kyvadla úhel mezi šňůrou a svislým směrem? (c) Určete celkovou mechanickou energii soustavy kyvadlo + + Země, přisoudíme-li nulovou hodnotu její potenciální energie konfiguraci, v níž je kámen v nejnižší poloze.

33Ú. Délka šňůry kyvadla na obr. 8.40 je $L = 120$ cm. V bodě P je umístěn pevný kolík, jehož vzdálenost od bodu závěsu kyvadla je $d = 75{,}0$ cm. Kuličku kyvadla zvedneme tak, aby šňůra byla vodorovná a volně ji vypustíme (obr. 8.40). Kulička se pohybuje po trajektorii vyznačené v obrázku přerušovanou čarou. Jaká je její rychlost v okamžiku, kdy dosáhne (a) nejnižšího bodu trajektorie, (b) nejvyššího bodu poté, co se šňůra zachytí o kolík.



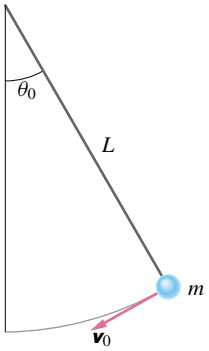
Obr. 8.40 Úlohy 33 a 41

34Ú. Kostka o hmotnosti 2,0 kg je upuštěna z výšky 40 cm a dopadne na svislou pružinu o tuhosti $k = 1\,960$ $N \cdot m^{-1}$ (obr. 8.41). Určete největší stlačení pružiny.



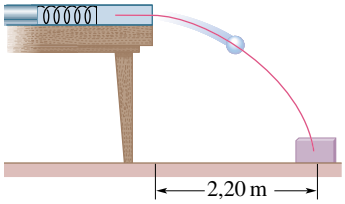
Obr. 8.41 Úloha 34

35Ú. Na obr. 8.42 je nakresleno kyvadlo délky L. Kulička, která prakticky nese veškerou hmotnost kyvadla, má rychlost $\boldsymbol{v}_0$ v okamžiku, kdy šňůra svírá se svislým směrem úhel θ_0. (a) Odvoďte vztah pro rychlost kuličky v nejnižším bodě její trajektorie. Jaká je nejmenší možná hodnota v_0, má-li kyvadlo (b) dosáhnout polohy, v níž je šňůra vodorovná, (c) projít nejvyšším bodem nad místem závěsu tak, aby se šňůra nepokrčila?



Obr. 8.42 Úloha 35

36Ú. Dvě děti hrají hru, při níž se snaží kuličkou z dětské pušky, připevněné ke stolu, trefit do malé krabičky na podlaze (obr. 8.43). Krabička leží ve vzdálenosti 2,20 m od stolu. Honza stlačil pružinu pušky o 1,10 cm a kulička dopadla 27,0 cm před střed krabičky. Jak musí stlačit pružinu Eva, aby zasáhla cíl?



Obr. 8.43 Úloha 36

37Ú. Velikost gravitační síly, jíž na sebe působí dvě částice o hmotnostech m_1 a m_2, je dána vztahem

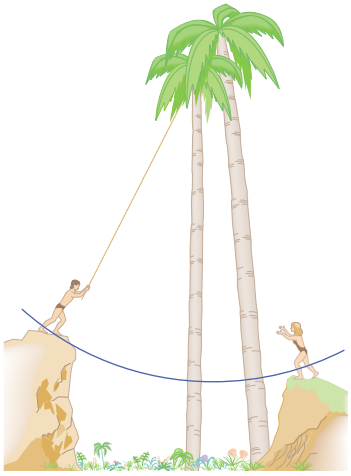
$$F(x) = G\frac{m_1 m_2}{x^2},$$

kde G je konstanta a x je vzdálenost částic. (a) Najděte odpovídající funkci pro potenciální energii $E_p(x)$. Předpokládejte, že $E_p(x) \to 0$ pro $x \to \infty$. (b) Jakou práci vykonají síly, jimiž je třeba na částice působit, abychom jejich vzdálenost zvýšili z hodnoty x_1 na hodnotu $x = x_1 + d$ (beze změny jejich kinetické energie)?

38Ú. Na těleso o hmotnosti 20 kg, které je součástí izolované soustavy, působí ve směru osy x konzervativní síla $F = -3{,}0x - 5{,}0x^2$, kde F je v newtonech a x v metrech. Potenciální energii soustavy spojenou s tímto silovým působením považujeme za nulovou při $x = 0$. (a) Jaká je potenciální energie soustavy pro $x = 2{,}0$ m? (b) V okamžiku, kdy je poloha tělesa určena souřadnicí $x = 5{,}0$ m, má jeho rychlost velikost 4,0 m·s^{-1} a je nesouhlasně rovnoběžná s osou x. Jaká je velikost rychlosti tělesa v okamžiku, kdy prochází počátkem soustavy souřadnic? (c) Odpovězte na otázky (a) a (b) za předpokladu, že konfiguraci $x = 0$ přisoudíme potenciální energii $-8{,}0$ J.

39Ú. (a) Jaká je výslednice sil, které působí na kostku z úlohy 10, v okamžiku jejího průchodu bodem Q? (b) Z jaké výšky h je třeba kostku volně vypustit, aby ztratila kontakt se smyčkou právě při průchodu jejím vrcholem? (*Ztráta kontaktu se smyčkou* je charakterizována tím, že tlaková síla smyčky na kostku se právě anuluje.)

40Ú. Představme si románového hrdinu Tarzana, jak se zhoupne ze skalního výběžku na liáně dlouhé 18 m (obr. 8.44). Nejnižší bod trajektorie leží 3,2 m pod úrovní výběžku. Liána vydrží zátěž 950 N, Tarzan váží 688 N. (a) Přetrhne se liána? (b) Jestliže ne, zjistěte, jak velká je největší síla, která ji napíná během zhoupnutí.

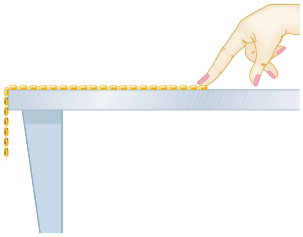


Obr. 8.44 Úloha 40

41Ú. Ukažte, že kulička na obr. 8.40 může oběhnout pevný kolík (při napjaté šňůře) jedině tehdy, je-li $d > 3L/5$. (*Tip*: Kulička musí mít v nejvyšším bodě kruhové trajektorie stále ještě nenulovou rychlost. Víte proč a jak velkou?)

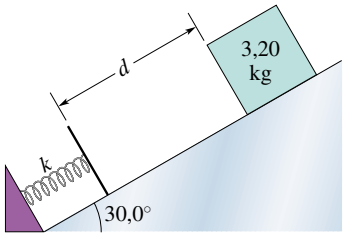
42Ú. Kyvadlo je tvořeno kuličkou o hmotnosti m připevněnou na konci tuhé tyče délky L. Hmotnost tyče je zanedbatelná. Kuličku zvedneme tak, aby tyčka mířila přímo vzhůru, a pak uvolníme. (a) Jaká je rychlost kuličky v nejnižším bodě její trajektorie? (b) Jakou silou je napínána tyč při průchodu kuličky tímto bodem? (c) Kyvadlo nyní vychýlíme tak, aby tyč byla vodorovná, a opět uvolníme. Jaký úhel svírá tyč se svislým směrem v okamžiku, kdy jsou tíhová síla a tahová síla tyče působící na kuličku stejně velké?

43Ú*. Řetěz přidržujeme na dokonale hladkém vodorovném stole tak, že jedna čtvrtina jeho délky visí přes okraj (obr. 8.45). Řetěz má délku L a hmotnost m. Jak velkou práci musíme vykonat, abychom vytáhli celý řetěz zpět na stůl?



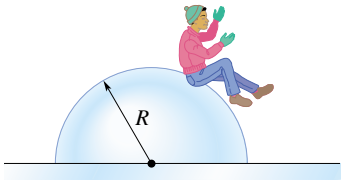
Obr. 8.45 Úloha 43

44Ú*. Kostka o hmotnosti 3,20 kg může klouzat po dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 30°. Na nakloněné rovině leží pružina o tuhosti 431 N·m^{-1}, připevněná k jejímu spodnímu okraji (obr. 8.46). Kostka je vypuštěna s nulovou počáteční rychlostí z místa, jehož vzdálenost od volného konce pružiny, měřená podél nakloněné roviny, je d. Kostka narazí do pružiny a urazí ještě 21,0 cm, než se dostane do bodu obratu (její rychlost je v tom okamžiku nulová). (a) Určete vzdálenost d. (b) Určete vzdálenost mezi bodem prvního kontaktu kostky s pružinou a bodem, v němž je rychlost kostky největší.



Obr. 8.46 Úloha 44

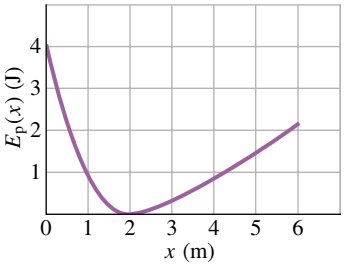
45Ú*. Chlapec si sedl na vršek polokulového ledového náspu (obr. 8.47). Nepatrně se odrazil a začal klouzat dolů. Tření považujte za zanedbatelné a ukažte, že chlapec ztratil kontakt s ledovou polokoulí v bodě ležícím ve výšce $2R/3$ nad vodorovnou podložkou. (*Tip*: Při ztrátě kontaktu se anuluje tlaková síla podložky.)



Obr. 8.47 Úloha 45

ODST. 8.5 Interpretace křivky potenciální energie

46C. Na částici pohybující se podél osy x působí konzervativní síla $F(x)$. Na obr. 8.48 je graf závislosti příslušné potenciální energie E_p na poloze částice. (a) Nakreslete závislost $F(x)$. Použijte stejnou stupnici proměnné x jako na obr. 8.48. (b) Mechanická energie soustavy E je 4,0 J. Nakreslete graf závislosti kinetické energie $E_k(x)$ částice na poloze x.



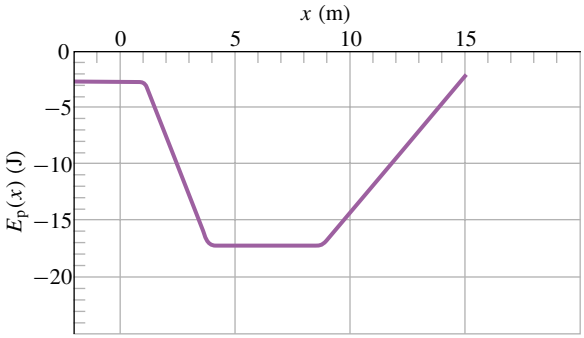
Obr. 8.48 Cvičení 46

47Ú. Potenciální energie dvouatomové molekuly (např. H_2 nebo O_2) je dána vztahem

$$E_p = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6},$$

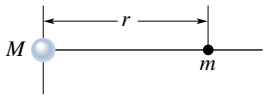
kde r je vzdálenost atomů v molekule a A a B jsou kladné konstanty. Tato potenciální energie souvisí s interakčními (vazebními) silami, které drží molekulu pohromadě. (a) Určete *rovnovážnou vzdálenost* atomů, tj. vzdálenost, jíž odpovídají nulové interakční síly. Rozhodněte, zda je výsledná síla vzájemného působení atomů odpudivá, nebo přitažlivá, jestliže je vzdálenost atomů (b) menší, (c) větší než vzdálenost rovnovážná.

48Ú. Na částici o hmotnosti $m = 2$ kg pohybující se podél osy x působí konzervativní síla $F(x)$. Graf odpovídající potenciální energie je na obr. 8.49.

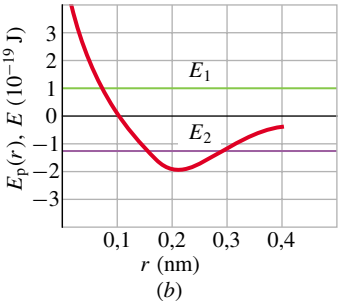


Obr. 8.49 Úloha 48

V poloze $x = 2{,}0$ m má částice rychlost $v_x = -1{,}5$ m·s^{-1}. (a) Jakou velikost a směr má v této poloze síla $F(x)$? (b) Mezi jakými krajními hodnotami x se částice pohybuje? (c) Jaká je rychlost částice v bodě $x = 7{,}0$ m?



(*a*)



(*b*)

Obr. 8.50 Úloha 49

49Ú. Na obr. 8.50a je dvouatomová molekula. Hmotnosti atomů jsou m a M ($m \ll M$) a jejich vzdálenost je r. Na obr. 8.50b je graf závislosti potenciální energie molekuly $E_p(r)$ na vzdálenosti r. Popište pohyb atomů, (a) je-li celková mechanická

energie molekuly E kladná (např. E_1), (b) záporná (např. E_2). Pro $E_1 = 1{\cdot}10^{-19}$ J a $r = 0{,}3$ nm určete (c) potenciální energii soustavy, (d) celkovou kinetickou energii obou atomů, (e) sílu (velikost a směr) působící na každý atom. Pro jaké hodnoty r je interakce atomů (f) odpudivá, (g) přitažlivá, (h) nulová?

ODST. 8.6 Práce nekonzervativních sil

50C. Pes vleče svou boudu vodorovnou silou 8,0 N. Na boudu působí dynamická třecí síla o velikosti 5,0 N. (a) Jakou práci vykoná síla, jíž působí na boudu pes, a (b) jak velká mechanická energie bude rozptýlena vlivem třecí síly při posunutí boudy o 0,70 m?

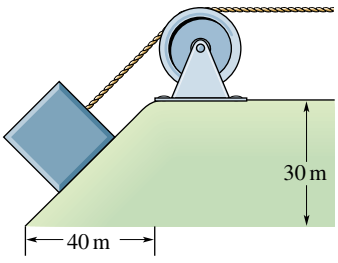
51C. Na kostku z umělé hmoty působí vodorovná síla o velikosti 15 N. Kostka se pohybuje po podlaze stálou rychlostí, přičemž je průběžně zaznamenávána její teplota. Zjistilo se, že při posunutí o 3,0 m se zvýšila vnitřní energie kostky o 20 J. Jakou práci vykonala dynamická třecí síla působící na kostku?

52Ú. Dělník sune bednu o hmotnosti 27 kg po vodorovné podlaze stálou rychlostí. Síla, kterou na ni při tom působí, svírá s vodorovnou rovinou úhel 32° a míří dolů. (a) Jakou práci vykoná tato síla při posunutí bedny o 9,2 m, je-li koeficient dynamického tření mezi bednou a podlahou 0,20? (b) Určete mechanickou energii rozptýlenou třecími silami.

53Ú. Stroj tlačí kmen o hmotnosti 50 kg stálou rychlostí vzhůru po nakloněné rovině o úhlu sklonu 30°. Síla, kterou stroj na kmen působí, je stálá a má vodorovný směr. Koeficient tření mezi kmenem a nakloněnou rovinou je 0,20. (a) Určete práci, kterou vykoná síla stroje při posunutí kmenu o 6,0 m, a (b) práci tíhové síly působící na kmen. (c) Jaká energie je rozptýlena třecími silami?

54Ú. Kostka o hmotnosti 3,57 kg je tažena na laně po vodorovné podlaze stálou rychlostí. Tahová síla lana má velikost 7,68 N a míří vzhůru po úhlem 15° vzhledem k vodorovné rovině. Vypočtěte (a) práci tahové síly lana při posunutí kostky o 4,06 m a (b) koeficient dynamického tření mezi kostkou a podlahou. (c) Jaká energie je přitom rozptýlena třecími silami?

55Ú. Žulový blok o hmotnosti 1 400 kg je tažen pomocí navijáku po nakloněné rovině stálou rychlostí 1,34 m·s^{-1} (obr. 8.51). Koeficient dynamického tření mezi blokem a nakloněnou rovinou je 0,40. Jaký je výkon tahové síly lana?



Obr. 8.51 Úloha 55

ODST. 8.7 Zákon zachování energie

56C. Fotbalista o hmotnosti 70 kg běží rychlostí 10 m·s^{-1}, sklouzne po trávníku a zastaví se vlivem třecích sil. (a) Jak velká energie je třecími silami rozptýlena? (b) Jaká je změna vnitřní energie fotbalisty a podložky, po níž klouže?

57C. Dítě vyhodilo míček o hmotnosti 75 g z místa ve výšce 1,1 m nad zemí. Udělilo mu přitom rychlost o velikosti 12 m·s^{-1}. Ve výšce 2,1 m nad zemí měla rychlost míčku velikost 10,5 m·s^{-1}. (a) Jakou práci vykonala tíhová síla působící na míček? (b) K jaké energiové ztrátě došlo vlivem odporu vzduchu?

58C. Brankář vyhodil míč rychlostí o velikosti 35 m·s^{-1}. Bezprostředně před tím, než míč zachytil ve stejné výšce útočník, byla velikost rychlosti míče 28 m·s^{-1}. Zjistěte, k jaké ztrátě energie míče došlo vlivem odporu prostředí. Hmotnost míče je 0,3 kg.

59C. Hráč vyhodil míč o hmotnosti 0,63 kg počáteční rychlostí 14 m·s^{-1}. Míč vystoupil do výšky 8,1 m. Jakou energiovou ztrátu způsobil odpor prostředí?

60C. Střela o hmotnosti 9,4 kg byla vystřelena svisle vzhůru. Během jejího výstupu došlo vlivem odporu prostředí k energiové ztrátě 68 kJ. O kolik metrů výše by střela vystoupila při zanedbatelném odporu prostředí?

61C. Výška peřejí na řece je 15 m. Velikost rychlosti toku řeky nad peřejemi je 3,2 m·s^{-1}, pod nimi 13 m·s^{-1}. Jaká část změny tíhové potenciální energie soustavy voda+Země (v procentech), k níž došlo při pádu vody, přispěla k přírůstku energie kinetické? (*Tip*: Úvahu proveďte pro zvolené množství vody, řekněme 10 kg.)

62C. Niagarským vodopádem protéká přibližně $5{,}5{\cdot}10^6$ kg vody za sekundu. (a) K jak velkému poklesu tíhové potenciální energie soustavy voda + Země každou sekundu dochází, padá-li voda z výšky 50 m? (b) Představme si, i když je to nemožné, že by se této energie využilo pro výrobu elektřiny. Jak velký elektrický výkon by byl dodáván do sítě? (c) Kolik bychom získali ročně, kdyby cena jedné kilowatthodiny elektrické energie byla 30 haléřů?

63C. Vodopádem o výšce 100 m proteče 1 200 m^3 vody za každou sekundu. Tři čtvrtiny kinetické energie, kterou voda získá pádem z této výšky, se využijí pro výrobu elektrické energie ve vodní elektrárně. Jaký je výkon generátoru?

64C. Rozloha pevninské části USA je asi $8{\cdot}10^6$ km^2, průměrná nadmořská výška je 500 m. Průměrné roční srážky činí 75 cm. Dvě třetiny dešťové vody se opět odpaří do atmosféry, zbytek se dostává do oceánu. Představme si, že by odpovídající přírůstek tíhové potenciální energie soustavy voda + Země mohl být plně využit pro výrobu elektrické energie. Jaký by byl průměrný výkon pomyslné elektrárny?

65C. Výsadkář o hmotnosti 68 kg padá s konstantní mezní rychlostí 59 m·s^{-1}. (a) Jak rychle klesá tíhová potenciální energie soustavy výsadkář + Země? (b) Jak rychle dochází ke ztrátám mechanické energie (energiová ztráta za sekundu)?

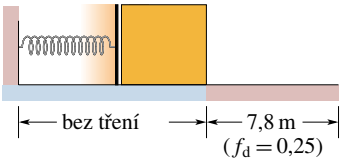
66C. Medvídek o hmotnosti 25 kg sjel ze stromu o výšce 12 m. V počátečním okamžiku byla jeho rychlost nulová, těsně před dopadem na zem měla velikost 5,6 m·s^{-1}. (a) Jak se změnila

potenciální energie soustavy medvídek + Země? (b) Jakou kinetickou energii měl medvídek těsně nad zemí? (c) Jak velká průměrná třecí síla na něj působila?

67C. Kámen o hmotnosti 520 kg sjíždí po svahu dlouhém 500 m a vysokém 300 m. Kámen je zpočátku v klidu. Koeficient dynamického tření mezi kamenem a svahem je 0,25. Zvolme hladinu nulové tíhové potenciální energie soustavy kámen + Země na úpatí svahu. (a) Jaká byla potenciální energie soustavy, než se kámen dal do pohybu? (b) K jaké ztrátě mechanické energie soustavy došlo během skluzu vlivem tření? (c) Jaká je kinetická energie kamene na úpatí svahu? (d) Jaká je jeho rychlost?

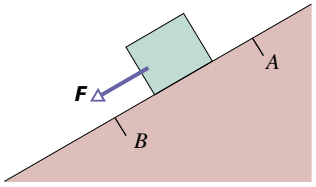
68C. Střela o hmotnosti 30 g letící vodorovnou rychlostí o velikosti 500 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ se zaryla 12 cm hluboko do stěny. (a) Jak se změnila její mechanická energie? (b) Jaká byla velikost průměrné brzdící síly působící na střelu?

69Ú. Kostka o hmotnosti 3,5 kg na obr. 8.52 je urychlována stlačenou pružinou. Tuhost pružiny je 640 $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. V okamžiku, kdy je pružina nenapjatá, ztrácí s ní kostka kontakt a pohybuje se dále po vodorovné podložce. Podložka je zčásti dokonale hladká, zčásti je vyrobena z materiálu, který působí na kostku třecí silou charakterizovanou koeficientem tření 0,25. Poloha rozhraní obou částí je shodná s polohou volného konce nenapjaté pružiny (obr. 8.52). Po ztrátě kontaktu s pružinou urazí kostka ještě 7,8 m a zastaví se. (a) K jaké ztrátě mechanické energie došlo při brzdění kostky vlivem třecích sil? (b) Jaká byla největší hodnota kinetické energie kostky? (c) Jaké bylo stlačení pružiny na začátku pokusu?



Obr. 8.52 Úloha 69

70Ú. Kostka na obr. 8.53 se posune po nakloněné rovině z bodu A do bodu B, vzdáleného o 5,0 m. Kromě tíhové, tlakové a třecí síly působí na kostku ještě síla F o velikosti 2,0 N, rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Velikost třecí síly je 10 N. Při přesunu mezi body A a B vzrostla kinetická energie kostky o 35 J. Jakou práci vykonala tíhová síla?

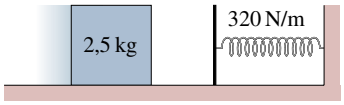


Obr. 8.53 Úloha 70

71Ú. Jeden konec pružiny upevníme ke stropu a na druhý připevníme hlávku zelí. Hlávku pomalu uvolňujeme, až přejde do rovnovážné polohy, v níž je pružná síla kompenzována silou tíhovou. Ukažte, že změna tíhové potenciální energie soustavy hlávka + Země je rovna dvojnásobku přírůstku pružné potenciální energie. Jak to, že se tyto dvě veličiny nerovnají?

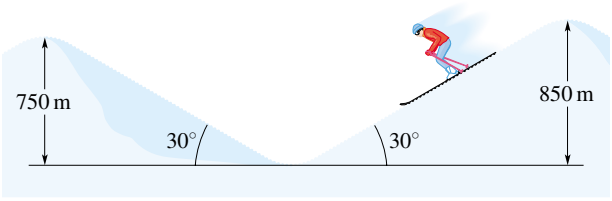
72Ú. Kostku o hmotnosti 2,0 kg přitiskneme k volnému konci vodorovné pružiny a stlačíme pružinu o 15 cm. Poté kostku uvolníme. Kostka bude klouzat po vodorovném stole a zastaví se ve vzdálenosti 75 cm od místa, kde byla uvolněna. Tuhost pružiny je 200 $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Určete koeficient tření mezi kostkou a deskou stolu.

73Ú. Kostka o hmotnosti 2,5 kg narazí na konec vodorovné pružiny o tuhosti 320 $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ (obr. 8.54). V okamžiku, kdy je kostka v bodě obratu, je pružina stlačena o 7,5 cm. Koeficient dynamického tření mezi kostkou a podložkou je 0,25. (a) Jakou práci vykonala pružná síla působící na kostku během jejího brzdění? (b) K jak velké ztrátě mechanické energie došlo vlivem třecích sil? (c) Jaká byla rychlost kostky v okamžiku nárazu na pružinu?



Obr. 8.54 Úloha 73

74Ú. Výšky dvou zasněžených vrcholků nad údolím jsou 850 m a 750 m. Lyžař sjede z vyššího z nich, zamíří do protisvahu a vyjede na nižší vrcholek. Urazí přitom celkovou dráhu 3,2 km. Průměrný sklon obou svahů je 30° (obr. 8.55). (a) Předpokládejme, že lyžař odstartuje z vyššího vrcholku s nulovou rychlostí, a zanedbejme vliv tření. Jakou rychlost má na nižším vrcholku, neodráží-li se holemi? (b) Jaký by musel být koeficient tření mezi lyžemi a sněhovou pokrývkou, aby se lyžař na nižším vrcholku právě zastavil?



Obr. 8.55 Úloha 74

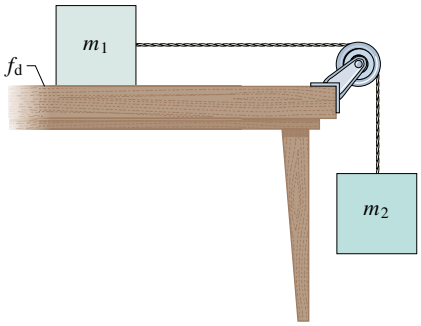
75Ú. V továrně došlo nešťastnou náhodou k uvolnění bedny o hmotnosti 0,2 tuny, která byla upevněna v nejvyšším bodě šikmé rampy. Rampa má délku 4,0 m a její úhel sklonu vzhledem k vodorovné podložce je 39°. Koeficient dynamického tření mezi rampou a bednou je 0,28. (a) Jaká je rychlost bedny na konci rampy? (b) Jak daleko bude bedna klouzat po vodorovné podlaze? (Předpokládáme, že kinetická energie bedny se v okamžiku sklouznutí z rampy na podlahu nezmění.) (c) Vysvětlete, proč jsou odpovědi na otázky (a) i (b) nezávislé na hmotnosti bedny?

76Ú. Dvě kostky spojené šňůrou podle obr. 8.56 jsou uvolněny z klidového stavu. Ukažte, že velikost rychlosti kostek je v zá-

vislosti na uražené dráze L dána vztahem

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - f_d m_1)gL}{m_1 + m_2}},$$

kde f_d je koeficient dynamického tření mezi kostkou m_1 a deskou stolu. Předpokládáme, že kladka má zanedbatelnou hmotnost a otáčí se bez tření.



Obr. 8.56 Úloha 76

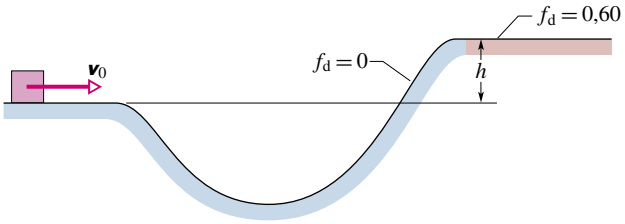
77Ú. Balík o hmotnosti 4,0 kg je uveden do pohybu směrem vzhůru po nakloněné rovině o úhlu sklonu 30°. Jeho počáteční kinetická energie je 128 J. Jak daleko bude balík klouzat po nakloněné rovině, je-li koeficient tření 0,30?

78Ú. Nádoba se pohybuje vzhůru po nakloněné rovině o úhlu sklonu 40°. V bodě ležícím ve vzdálenosti 0,55 m od jejího dolního konce (měřeno podél nakloněné roviny) je rychlost nádoby 1,4 m·s^{-1}. Koeficient dynamického tření mezi nádobou a nakloněnou rovinou je 0,15. (a) Jak daleko se bude nádoba podél nakloněné roviny ještě pohybovat? (b) Jaká bude její rychlost poté, co opět sklouzne k dolnímu konci nakloněné roviny?

79Ú. Experimentátor zjistil, že pružina používaná k pokusům *nevyhovuje* Hookovu zákonu. Pružná síla (v newtonech) má při prodloužení o vzdálenost x (v metrech) velikost $52{,}8x + 38{,}4x^2$ a působí proti prodloužení. (a) Vypočtěte práci potřebnou k prodloužení pružiny z hodnoty $x = 0{,}500$ m na hodnotu $x = 1{,}00$ m. (b) Jeden konec pružiny upevníme a k druhému připojíme částici o hmotnosti 2,17 kg. Pružinu protáhneme o $x = 1{,}00$ m a uvolníme. Určete rychlost částice v okamžiku, kdy je pružina prodloužena o $x = 0{,}500$ m. (c) Rozhodněte, zda síla, jíž působí pružina na částici, je konzervativní či nikoliv. Zdůvodněte.

80Ú. Dívenka vážící 267 N se vozí po dětské skluzavce. Skluzavka měří 6,1 m a svírá s vodorovnou rovinou úhel 20°. Koeficient dynamického tření je 0,10. (a) Jakou práci vykoná během jedné „jízdy“ tíhová síla působící na holčičku? (b) Určete energiovou ztrátu způsobenou třecími silami. (c) Jak velkou rychlost bude mít holčička na konci skluzavky, jestliže na jejím vrcholu startuje s rychlostí o velikosti 0,457 m·s^{-1}?

81Ú. Kostka se pohybuje po vodorovném úseku kolejnic na obr. 8.57 rychlostí $v_0 = 6{,}0$ m·s^{-1}, projede dolíkem a vyjede na plošinu vyvýšenou nad původní úroveň o $h = 1{,}1$ m. Na horní plošině je kostka brzděna třecí silou, charakterizovanou koeficientem dynamického tření $f_d = 0{,}60$ a zastaví se poté, co urazila vzdálenost d. Určete tuto vzdálenost.

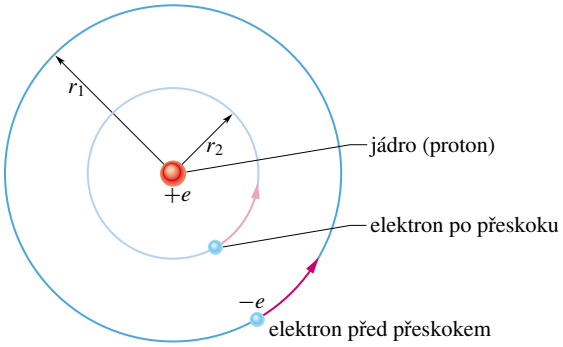


Obr. 8.57 Úloha 81

82Ú. Velikost přitažlivých elektrostatických sil, jimiž na sebe vzájemně působí kladně nabité jádro (proton) a záporně nabitý elektron ve vodíkovém atomu, je dána vztahem

$$F = k\frac{e^2}{r^2},$$

kde e je velikost náboje elektronu a protonu, k je konstanta a r je vzdálenost elektronu od jádra. Předpokládejme, že jádro je nepohyblivé. Představme si, že elektron, který zpočátku obíhal kolem jádra po kružnici o poloměru r_1, náhle „přeskočí“ na kruhovou dráhu o menším poloměru r_2 (obr. 8.58). (a) Určete změnu kinetické energie elektronu užitím druhého Newtonova zákona. (b) Na základě znalosti vztahu mezi silou a potenciální energií určete změnu potenciální energie atomu. (c) Jaký je pokles celkové energie atomu při tomto ději? (Celková energie atomu musí klesnout, neboť při popsaném přechodu elektronu vyzáří atom světlo.)



Obr. 8.58 Úloha 82

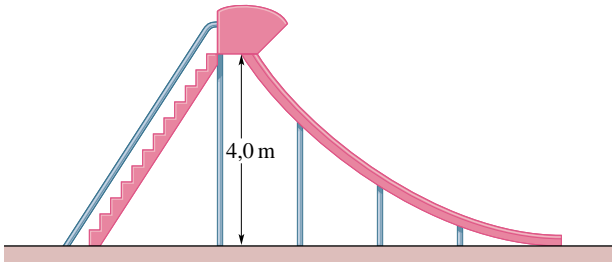
83Ú. Kámen o váze G (v newtonech) je vržen svisle vzhůru počáteční rychlostí v_0. Předpokládáme, že na letící kámen působí stálá odporová síla vzduchu o velikosti F. (a) Ukažte, že kámen dosáhne maximální výšky

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + \frac{F}{G})}.$$

(b) Dále ověřte, že rychlost kamene bezprostředně před dopadem na zem je

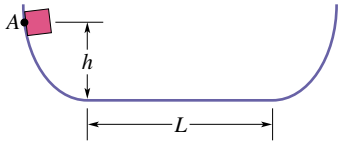
$$v = v_0\left(\frac{G - F}{F + G}\right)^{1/2}.$$

84Ú. Skluzavka ve tvaru kruhového oblouku o poloměru 12 m je vysoká 4,0 m a dotýká se povrchu Země (obr. 8.59). Dítě o hmotnosti 25 kg sjede z vrcholu skluzavky. Při nulové počáteční rychlosti je velikost jeho rychlosti na konci skluzavky $6{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Jaká je délka skluzavky? (b) Jaká je průměrná velikost třecí síly působící na dítě? Představme si nyní, že by skluzavka byla umístěna tak, aby svislá přímka procházející jejím nejvyšším bodem byla tečnou ke kruhovému oblouku. (c) Jaká by byla v tomto případě délka skluzavky a (d) průměrná velikost třecí síly působící na dítě při skluzu?



Obr. 8.59 Úloha 84

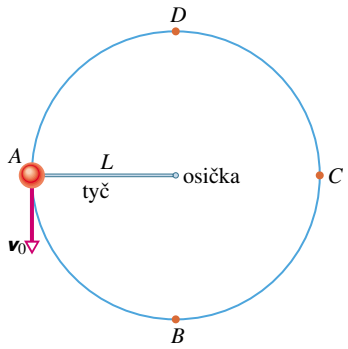
85Ú. Částice může klouzat po kolejnici upravené do tvaru znázorněného na obr. 8.60. Střední vodorovný úsek má délku L. Zakřivené úseky kolejnice jsou dokonale hladké, v rovném úseku však na částici působí třecí síla charakterizovaná koeficientem tření $f_\mathrm{d} = 0{,}20$. Částice je volně vypuštěna z bodu A, ležícího ve výšce $h = L/2$ nad vodorovným úsekem. Kde se částice nakonec zastaví?



Obr. 8.60 Úloha 85

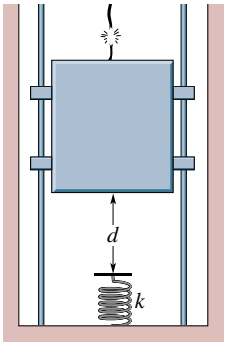
86Ú. Ke konci tenké tuhé tyče o zanedbatelné hmotnosti a délce L je připevněna koule o hmotnosti m (obr. 8.61). Druhý konec tyče je nasazen na tenké osičce tak, aby se koule mohla pohybovat po kružnici ležící ve svislé rovině. Koule je z výchozí polohy A, kdy je tyč vodorovná, uvedena do pohybu počáteční rychlostí o velikosti v_0, směřující dolů. Rychlost koule se anuluje právě v okamžiku jejího průchodu bodem D. (a) Vyjádřete v_0 pomocí L, m a g. (b) Jakou silou je namáhána tyč, je-li koule právě v bodě B? (c) Osičku posypeme jemným pískem, aby otáčení tyče bylo poněkud brzděno třením, a uvedeme kyvadlo do pohybu stejným způsobem jako v předchozím pokusu. Koule však nyní dostoupí pouze do bodu C. Jak velká je ztráta mechanické energie způsobená třením? (d) Po několika kmitech se kyvadlo zastaví v poloze B. Určete celkovou energiovou ztrátu způsobenou třením od okamžiku vypuštění kyvadla z výchozí polohy A.

87Ú. Kabina zdviže na obr. 8.62 váží 20 000 N. Tažné lano zdviže se přetrhlo v okamžiku, kdy zdviž stála v prvním poschodí a její dno bylo ve vzdálenosti $d = 4$ m od konce tlumicí pružiny



Obr. 8.61 Úloha 86

o tuhosti $k = 1{,}2\cdot10^5\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Při přetržení lana bylo uvedeno do chodu bezpečnostní zařízení, které sevřelo kabinu mezi svislé vodicí kolejnice. Na kabinu tak začala působit třecí síla o stálé velikosti 5 000 N, směřující proti jejímu pohybu. (a) Jaká byla rychlost kabiny těsně před nárazem na tlumicí pružinu? (b) Určete maximální stlačení x pružiny. (c) Jakou dráhu urazí kabina od okamžiku odskoku od pružiny do okamžiku, kdy se dostane do bodu obratu a začne opět padat? (d) Pomocí zákona zachování energie určete přibližně celkovou dráhu, kterou kabina urazí od okamžiku přetržení lana do úplného zastavení. Proč může být odpověď pouze přibližná?

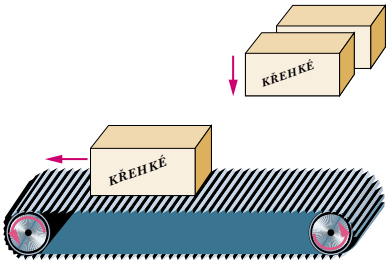


Obr. 8.62 Úloha 87

88Ú. Brusič tlačí kovový nástroj ke kotouči brusky silou o velikosti 180 N. Kotouč má poloměr 20 cm a vykoná 2,5 otáčky za sekundu. Koeficient tření mezi nástrojem a kotoučem je 0,32. Jaký je výkon třecí síly (energiová ztráta způsobená třecí silou za jednu sekundu, která se projeví přírůstkem vnitřní energie soustavy)?

89Ú⋆. Zboží z balírny se expeduje v krabicích na pásovém přepravníku. Hmotnost krabice se zbožím je 300 kg. Motor přepravníku udržuje velikost rychlosti pásu na stálé hodnotě $1{,}20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Balicí stroj uvolňuje krabice tak, aby na pás dopadaly kolmo (obr. 8.63). Koeficient dynamického tření mezi pásem a krabicí je 0,400. Po dopadu pás pod krabicí nejprve prokluzuje. Během velmi krátké doby Δt však prokluzování ustane a krabice se začne pohybovat spolu s pásem. Zvolte vztažnou soustavu spojenou s místností balírny a určete (a) kinetickou energii,

kterou získá krabice za dobu Δt, (b) velikost dynamické třecí síly, kterou působí pás na krabici, (c) energii dodanou soustavě pás + krabice za dobu Δt motorem přepravníku. (d) Vysvětlete, proč se odpovědi (a) a (c) liší.



Obr. 8.63 Úloha 89

ODST. 8.8 Hmotnost a energie

90C. (a) Jaká energie (v joulech) odpovídá hmotnosti 102 g? (b) Kolik let by takový „zdroj energie" mohl zásobovat jednu domácnost, je-li k provozu domácnosti potřeba průměrný výkon 1,00 kW?

91C. „Mohutnost" zemětřesení M v tzv. Richterově stupnici souvisí s uvolněnou energií E (v joulech) vztahem

$$\log E = 5{,}24 + 1{,}44M.$$

(a) V roce 1906 bylo San Francisco postiženo zemětřesením o velikosti 8,2 stupňů Richterovy stupnice (obr. 8.64). Kolik energie se při tomto zemětřesení uvolnilo? (b) Jak velká hmotnost je ekvivalentní této energii?

92C. Celková produkce elektrické energie v USA činila v roce 1983 $2{,}31 \cdot 10^{12}$ kW·h. Určete odpovídající hmotnostní ekvivalent.

93Ú. Jaká nejmenší energie je potřebná k rozštěpení jádra uhlíku ^{12}C (hmotnost 11,996 71 u) na tři jádra helia ^{4}He (hmotnost každého z nich je 4,001 51 u)?

94Ú. Jádro atomu zlata obsahuje 79 protonů a 118 neutronů. Jeho hmotnost je 196,923 2 u. Jaká je jeho vazební energie? Další potřebné údaje najdete v př. 8.10.

95Ú. Při jaderné fúzi popsané rovnicí $\mathrm{d} + \mathrm{t} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{n}$ se deuteron (označený symbolem d) sloučí s atomem tritia (označený symbolem t, obsahuje jeden proton a dva neutrony). Vzniká jádro helia (dva protony a dva neutrony) a volný neutron (n). Hmotnosti částic účastnících se reakce jsou tyto:

d: 2,013 55 u	^{4}He: 4,001 51 u
t: 3,015 50 u	n: 1,008 67 u

(a) Rozhodněte, zda při této reakci dochází k uvolnění energie, nebo k jejímu pohlcení. (b) Jak velká je uvolněná, resp. pohlcená energie?

ODST. 8.9 Kvantování energie

96C. V následující tabulce jsou uvedeny energie pěti nejnižších energiových hladin tří typů hypotetických atomů v elektronvoltech:

Typ A	Typ B	Typ C
3,8	3,2	3,1
3,0	2,7	2,9
2,4	2,0	2,2
1,4	1,2	1,5
0	0	0

U každého z těchto „atomů" byly zaznamenány dvě emisní spektrální čáry: (a) 1,4 eV, (b) 1,5 eV. Pro každou z nich najděte odpovídající přechody elektronu v jednotlivých atomech.



Obr. 8.64 Cvičení 91. Oblast Nob Hill v San Francisku zničená zemětřesením v roce 1906. Čára zlomu v oblasti San Andreas měřila přes 400 km.

97C. Přístroj sledující chování hypotetického atomu zaznamenal pět případů emise světla, aniž při tom došlo k nové excitaci atomu. Energie vyzářeného světla ve čtyřech z nich jsou 0,7 eV; 0,8 eV; 0,9 eV a 2,0 eV. Poslední hodnota a údaje o pořadí jednotlivých přechodů se ztratily chybou v počítači. Následující tabulka uvádí dvanáct nejnižších energiových hladin atomu v elektronvoltech:

6,5	4,1	2,6
5,3	3,8	2,0
4,9	3,4	1,5
4,5	2,9	0

(a) Jaká energiová hladina odpovídala kvantovému stavu excitovaného atomu před vyzářením? (b) Jaká byla hodnota energie vyzářeného světla, která se ztratila chybou v počítači?

PRO POČÍTAČ

98Ú. Mezní rychlost kulky o hmotnosti 9,8 g při pohybu ve vzduchu je 7,3 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Kulku vystřelíme svisle vzhůru počáteční rychlostí o velikosti 15 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Numerickou integrací s krokem

$\Delta t = 0,1$ s určete polohu a rychlost kulky v libovolném okamžiku $t_n = n \cdot \Delta t$ od výstřelu do okamžiku jejího návratu k místu výstřelu. V každém z okamžiků t_n určete kinetickou energii kulky, její potenciální energii v tíhovém poli Země (potenciální energie soustavy kulka + Země) a celkovou mechanickou energii. K jak velké ztrátě mechanické energie soustavy kulka+Země dojde při výstupu kulky vlivem odporu vzduchu? Jaká je energiová ztráta při pádu kulky? V okamžiku výstřelu přisuzujeme soustavě nulovou potenciální energii.

99Ú. Kostku o hmotnosti 700 g upustíme z výšky h_0 přesně nad koncem svislé pružiny. Pružina má zanedbatelnou hmotnost a její tuhost je $k = 400\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Kostka narazí na pružinu a stlačuje ji. V bodě obratu je pružina stlačena o 19,0 cm. Jakou práci vykonala (a) síla, jíž působila kostka na pružinu, (b) síla, jíž působila pružina na kostku? (c) Z jaké výšky h_0 kostka padala? (d) Jaké by bylo maximální stlačení pružiny, kdyby kostka padala z dvojnásobné výšky?

100Ú. Kyvadlo je tvořeno tělesem o hmotnosti 300 g zavěšeným na niti dlouhé 1,4 m. Kyvadlo vychýlíme tak, aby napjatá nit svírala se svislým směrem úhel 30° a uvolníme. Určete (a) rychlost tělesa v okamžiku, kdy nit svírá se svislým směrem úhel 20°, a (b) největší rychlost, jíž těleso dosáhne. (c) Jaký úhel svírá nit se svislým směrem v okamžiku, kdy velikost rychlosti tělesa dosahuje jedné třetiny největší hodnoty?

9
Soustavy částic



Potemnělé hlediště a ozářená scéna. Obecenstvo s obdivem sleduje sólový výstup primabaleríny. Je nadšeno zejména efektními skoky „grand jeté“, při nichž se její hlava i trup pohybují takřka vodorovně téměř po celou dobu letu. Baletka se na scéně doslova vznáší. Laik v hledišti asi není podrobně obeznámen s problematikou gravitačního působení a pohybu těles v tíhovém poli Země. Ví však, že kdyby se sám pokusil takto vyskočit, bude dráha jeho trupu i hlavy spíše parabolická, podobně jako je tomu v případě vyhozeného kamene či fotbalového míče po brankářově výkopu. Na scéně se tedy zjevně děje něco velmi neobvyklého. Jak to baletka dokáže, že se jí gravitace příliš „netýká“?

9.1 VÝZNAČNÝ BOD

Fyzikové rádi přemýšlejí nad složitými problémy a hledají v nich něco jednoduchého a známého. Představme si například, že vyhazujeme do vzduchu baseballovou pálku. Pálka se otáčí. Její pohyb je tedy mnohem složitější než třeba pohyb míčku, který se chová jako hmotný bod (obr. 9.1a). Trajektorie jednotlivých elementů pálky jsou navzájem odlišné. Proto ji při popisu jejího pohybu nelze nahradit hmotným bodem. Pálku je třeba chápat jako soustavu hmotných bodů.

Při podrobnějším zkoumání však zjistíme, že jeden z bodů pálky má význačné postavení. Pohybuje se totiž po jednoduché parabolické dráze, stejně jako se pohybuje částice při šikmém vrhu (obr. 9.1b). Jeho pohyb je přesně takový, jako kdyby (1) v něm byla soustředěna veškerá hmota pálky a (2) působila v něm celková tíhová síla působící na pálku. Tento význačný bod se nazývá **střed hmotnosti** pálky neboli **těžiště**.* Obecně platí:

> Těžiště tělesa nebo soustavy těles je bod, který se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna veškerá hmota tělesa (soustavy) a působily v něm všechny vnější síly působící na těleso (soustavu).

Těžiště baseballové pálky leží na její podélné ose. Můžeme ho najít tak, že si pálku položíme vodorovně na napjatý prst a vyvážíme ji. Těžiště pak bude ležet na ose pálky právě nad prstem.

9.2 TĚŽIŠTĚ

Zabývejme se nyní problémem, jak nalézt těžiště nejrůznějších soustav. Začneme u soustavy složené pouze z několika částic a teprve pak budeme uvažovat o souborech obsahujících velké množství částic (např. baseballová pálka).

Soustavy částic

Na obr. 9.2a jsou zakresleny dvě částice o hmotnostech m_1 a m_2. Jejich vzdálenost je d. Počátek osy x, jehož volba není nijak omezena, jsme vybrali tak, aby splýval s částicí m_1. Polohu těžiště této dvoučásticové soustavy *definujeme* vztahem

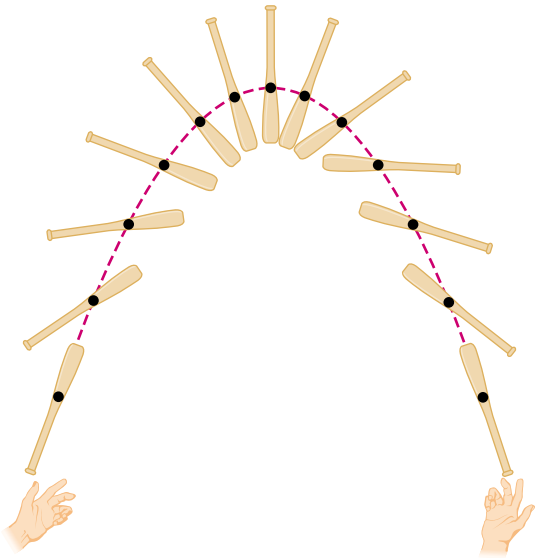
$$x_T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d. \qquad (9.1)$$

Abychom posoudili, nakolik je tato definice rozumná, uvažujme speciální případy. Zvolme nejprve $m_2 = 0$. Tato volba odpovídá soustavě s jedinou částicí m_1. Její těžiště

* V celé knize užíváme označení „těžiště“, „hmotný střed“ a „střed hmotnosti“ jako synonyma. V čl. 13.3 najdete podrobné zdůvodnění.



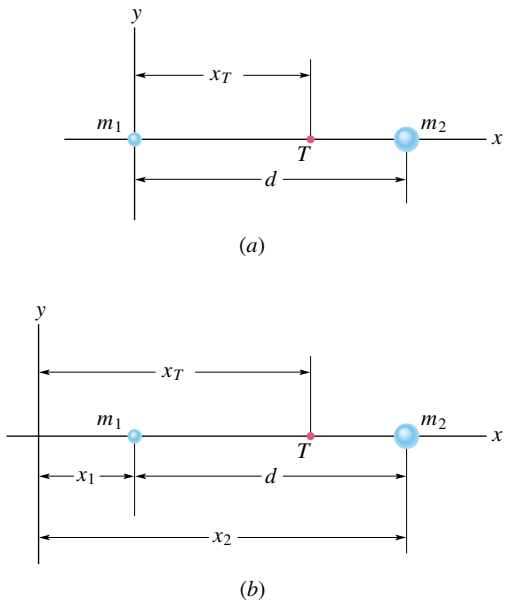
(*a*)



(*b*)

Obr. 9.1 (a) Míček vržený šikmo vzhůru se pohybuje po parabolické trajektorii. (b) Těžiště baseballové pálky (černá tečka) vyhozené do vzduchu se rovněž pohybuje po parabole, ostatní body pálky však opisují trajektorie komplikovanější.

by mělo s touto částicí splývat. Z rov. (9.1) skutečně plyne $x_T = 0$. Je-li naopak $m_1 = 0$, obsahuje soustava opět jedinou částici, tentokrát m_2. Podle očekávání dostáváme $x_T = d$. Pro $m_1 = m_2$ by mělo být těžiště uprostřed mezi částicemi. Skutečně tomu tak je, neboť z rov. (9.1) dostáváme $x_T = d/2$. Ze vztahu (9.1) také vyplývá, že pro obecně zvolené nenulové hmotnosti obou částic leží hodnota x_T vždy uvnitř intervalu $(0, d)$. Těžiště tedy v každém případě leží někde mezi oběma částicemi.



Obr. 9.2 (a) Vzdálenost dvou částic o hmotnostech m_1 a m_2 je d. Bod označený symbolem T je těžištěm dvoučásticové soustavy, vypočteným z rov. (9.1). (b) Situace se od obr. (a) liší obecným umístěním počátku soustavy souřadnic. Těžiště je vypočteno z rov. (9.2). Poloha těžiště soustavy vzhledem k oběma částicím je v obou případech stejná.

Na obr. 9.2b je znázorněna situace odpovídající obecnější volbě počátku soustavy souřadnic. Poloha těžiště je v takovém případě definována vztahem

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \tag{9.2}$$

Všimněme si, že pro $x_1 = 0$ přejde rov. (9.2) na jednodušší tvar (9.1). Posunutí počátku soustavy souřadnic nemá vliv na polohu těžiště vzhledem k jednotlivým částicím.

Přepišme rov. (9.2) do tvaru

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, \tag{9.3}$$

kde M je celková hmotnost soustavy, $M = m_1 + m_2$. Platnost tohoto vztahu lze snadno zobecnit na případ soustavy n částic umístěných na ose x. Celková hmotnost soustavy je $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ a těžiště je v bodě o souřadnici

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_n x_n}{M} = \\ = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i. \tag{9.4}$$

Sčítací index i nabývá všech celočíselných hodnot od 1 do n. Představuje pořadové (identifikační) číslo částice a „čísluje“ i její hmotnost a x-ovou souřadnici.

Jsou-li částice soustavy rozmístěny v trojrozměrném prostoru, je poloha jejího těžiště určena trojicí souřadnic. Získáme ji zobecněním rov. (9.4) na trojrozměrný případ:

$$x_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \\ y_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \\ z_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \tag{9.5}$$

Polohu těžiště můžeme zapsat i použitím vektorové symboliky. Polohu i-té částice lze totiž zadat buď jejími souřadnicemi x_i, y_i a z_i, nebo polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}_i = x_i \boldsymbol{i} + y_i \boldsymbol{j} + z_i \boldsymbol{k}. \tag{9.6}$$

Index i označuje částici, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory kartézské soustavy souřadnic. Těžiště je zadáno polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}_T = x_T \boldsymbol{i} + y_T \boldsymbol{j} + z_T \boldsymbol{k}. \tag{9.7}$$

Tři skalární rovnice (9.5) lze tak nahradit jedinou vektorovou rovnicí:

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i. \tag{9.8}$$

O její správnosti se můžeme přesvědčit dosazením z (9.6) a (9.7) a rozepsáním do souřadnic. Dostaneme skalární rovnice (9.5).

Tuhá tělesa

Běžné těleso, jakým je například i baseballová pálka, obsahuje tak obrovské množství částic (atomů), že je přirozenější posuzovat je jako objekt se spojitě rozloženou hmotou. Takový objekt již není tvořen jednotlivými navzájem oddělenými částmi, nýbrž infinitezimálně malými

částicemi (elementy) o hmotnosti dm. Součty v rovnicích (9.5) je třeba nahradit integrály a souřadnice těžiště definovat vztahy

$$x_T = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m,\qquad y_T = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m,\qquad z_T = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m. \tag{9.9}$$

M opět představuje celkovou hmotnost tělesa. Integrály symbolizují „sčítání“ všech elementů v celém tělese. Jejich výpočet je ovšem třeba provádět v souřadnicích. Je-li těleso homogenní, lze jeho hustotu ϱ (hmotnost jednotkového objemu) vyjádřit vztahem

$$\varrho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \frac{M}{V}, \tag{9.10}$$

kde dV je objem elementu hmotnosti dm a V je celkový objem tělesa. V rov. (9.9) můžeme element dm nahradit výrazem $\varrho\,\mathrm{d}V$ získaným z rov. (9.10) a dostaneme

$$x_T = \frac{1}{V}\int x\,\mathrm{d}V,\qquad y_T = \frac{1}{V}\int y\,\mathrm{d}V,\qquad z_T = \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}V. \tag{9.11}$$

Integračním oborem těchto integrálů je objem tělesa, tj. útvar vymezený tímto tělesem v trojrozměrném prostoru (př. 9.4).

Celá řada těles má určitou geometrickou symetrii, například středovou, osovou nebo rovinnou. Poloha těžiště takového symetrického *homogenního* tělesa s jeho symetrií úzce souvisí. Je-li těleso středově symetrické, splývá jeho těžiště se středem symetrie. Těžiště tělesa s osovou (resp. rovinnou) symetrií leží na ose (resp. v rovině) symetrie. Těžiště homogenní koule splývá s jejím geometrickým středem. Těžiště homogenního kužele leží na jeho ose. Těžiště banánu, jehož rovina symetrie jej dělí na dvě zrcadlově stejné části, leží v této rovině.

Těžiště však nemusí nutně ležet v tělese. Tak například v těžišti preclíku není žádné těsto a v těžišti podkovy není žádné železo.

PŘÍKLAD 9.1

Na obr. 9.3 jsou tři částice o hmotnostech $m_1 = 1{,}2\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 2{,}5\,\mathrm{kg}$ a $m_3 = 3{,}4\,\mathrm{kg}$ umístěny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně $a = 140\,\mathrm{cm}$. Určete polohu těžiště soustavy.

ŘEŠENÍ: Zvolme souřadnicové osy x a y tak, aby jedna z částic byla umístěna v počátku a osa x splývala s jednou ze stran trojúhelníka. Částice mají tyto souřadnice:

ČÁSTICE	HMOTNOST (kg)	x (cm)	y (cm)
m_1	1,2	0	0
m_2	2,5	140	0
m_3	3,4	70	121

Díky vhodné volbě soustavy souřadnic jsou tři souřadnice v tabulce nulové. Výpočet bude velmi jednoduchý.

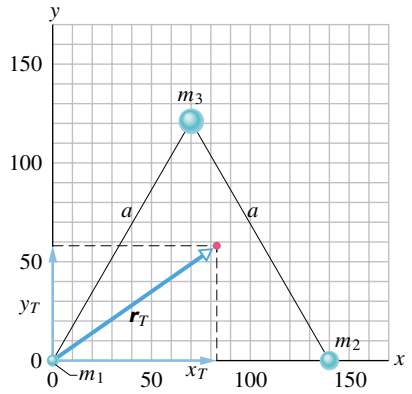
Z rov. (9.5) plyne, že souřadnice těžiště jsou

$$x_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M} = \frac{(1{,}2\,\mathrm{kg})(0) + (2{,}5\,\mathrm{kg})(140\,\mathrm{cm}) + (3{,}4\,\mathrm{kg})(70\,\mathrm{cm})}{(7{,}1\,\mathrm{kg})} = 83\,\mathrm{cm} \quad \text{(Odpověď)}$$

a

$$y_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i y_i = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{M} = \frac{(1{,}2\,\mathrm{kg})(0) + (2{,}5\,\mathrm{kg})(0) + (3{,}4\,\mathrm{kg})(121\,\mathrm{cm})}{(7{,}1\,\mathrm{kg})} = 58\,\mathrm{cm}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Těžiště soustavy na obr. 9.3 je určeno polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_T$ o souřadnicích x_T a y_T.



Obr. 9.3 Příklad 9.1. Tři částice s různými hmotnostmi tvoří rovnostranný trojúhelník o straně a. Polohový vektor těžiště je $\boldsymbol{r}_T$.

PŘÍKLAD 9.2

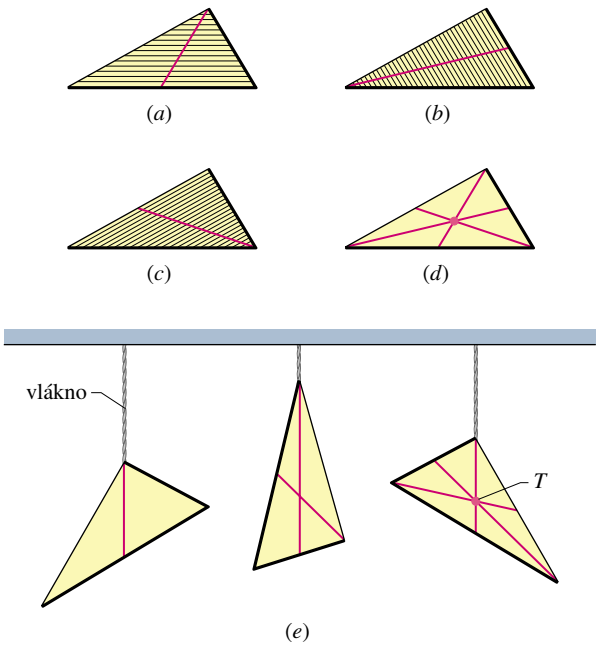
Najděte těžiště homogenní trojúhelníkové desky znázorněné na obr. 9.4.

ŘEŠENÍ: Obr. 9.4a znázorňuje desku rozdělenou na úzké proužky rovnoběžné s jednou z jejích stran. Ze symetrie je

zřejmé, že těžiště úzkého homogenního proužku leží v jeho geometrickém středu. Těžiště trojúhelníkové desky musí proto ležet někde na spojnici středů všech rovnoběžných proužků. Touto spojnicí je přímka spojující vrchol trojúhelníka se středem protilehlé strany, tj. je těžnicí trojúhelníka. Kdybychom desku podepřeli rovným ostřím nože přesně podél těžnice, byla by v rovnováze.

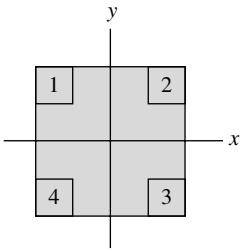
Na obr. 9.4b, c jsme desku rozdělili na proužky rovnoběžné s dalšími dvěma stranami. V každém z těchto případů leží těžiště desky na přímce spojující středy proužků (na těžnici trojúhelníka), podobně jako na obr. 9.4a. Všechny tři těžnice mají společný průsečík. V něm leží těžiště desky (obr. 9.4d).

Předchozí závěr můžeme ověřit jednoduchým pokusem. Využijeme při tom správnou intuitivní představu, že těleso zavěšené v jednom bodě zaujme takovou polohu, v níž jeho těžiště leží pod bodem závěsu. Zavěsíme tedy trojúhelníkovou desku postupně v jednotlivých vrcholech a podle obr. 9.4e vedeme z každého vrcholu svislou přímku. Těžiště desky splývá s průsečíkem těchto tří přímek. Kdybychom desku umístili do vodorovné polohy a podepřeli ji v těžišti hrotem, byla by v rovnováze.



Obr. 9.4 Příklad 9.2. Na obrázcích (a), (b) a (c) je trojúhelníková deska rozdělena na soustavu úzkých proužků rovnoběžných s některou její stranou. Těžiště desky leží na těžnici trojúhelníka, tj. na spojnici středů proužků. (d) Průsečík těžnic splývá s těžištěm desky. (e) Experimentální zjištění polohy těžiště. Trojúhelník postupně zavěšujeme v jeho vrcholech.

KONTROLA 1: Na obrázku je nakreslena homogenní čtvercová deska, z níž byly odříznuty čtyři stejné čtverce. (a) Jaká je poloha těžiště původní desky? (b) Odhadněte polohu těžiště zbylého útvaru po odstranění čtverce 1, (c) čtverců 1 a 2, (d) čtverců 1 a 3, (e) čtverců 1, 2 a 3, (f) všech čtyř čtverců. Neprovádějte žádný přesný výpočet. Využijte pouze symetrie útvaru nebo naopak jeho asymetrie vzniklé odstraňováním čtverců a rozhodněte, v kterém z kvadrantů, na které ose či v kterém bodě těžiště leží.



PŘÍKLAD 9.3

Obr. 9.5a znázorňuje zbytek homogenní kruhové kovové desky o poloměru $2R$, z níž byl vyříznut kotouč o poloměru R. Vzniklé těleso označme X. Jeho těžiště leží na ose x a v obrázku je označeno tečkou. Určete jeho souřadnici.

ŘEŠENÍ: Obr. 9.5b ukazuje desku C před vyjmutím kotouče D. Ze symetrie vyplývá, že těžiště desky C je v jejím středu (obr. 9.5b).

Těleso C je složeno ze dvou částí, D a X. Můžeme předpokládat, že hmotnost každé z nich je soustředěna v jejím těžišti. Těžiště dvoučásticové soustavy $T_D + T_X$ splývá s těžištěm tělesa C. Polohy těžišť těles C, D a X na ose x jsou vyznačeny v obr. 9.5c.

Z rov. (9.2) vyplývá, že těžiště tělesa C je v bodě

$$x_C = \frac{m_D x_D + m_X x_X}{m_D + m_X},$$

kde x_D a x_X jsou souřadnice těžišť těles D a X. Vzhledem k tomu, že je $x_C = 0$, platí

$$x_X = -\frac{x_D m_D}{m_X}. \qquad (9.12)$$

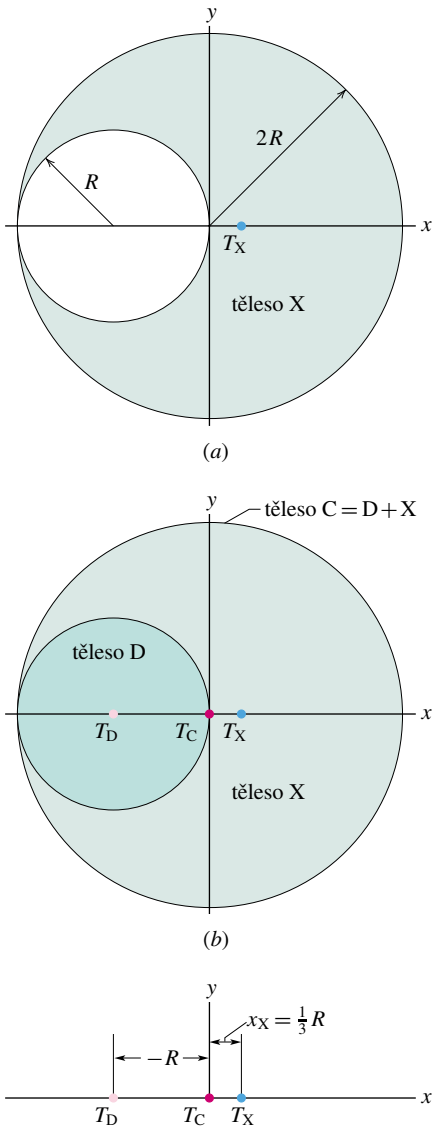
Označme ϱ hustotu materiálu desky a d její (konstantní) tloušťku. Pak

$$m_D = \pi R^2 \varrho d \qquad \text{a} \qquad m_X = \pi(2R)^2 \varrho d - \pi R^2 \varrho d.$$

Uvážíme-li navíc, že $x_D = -R$, dostaneme z rov. (9.12) polohu těžiště tělesa X:

$$x_X = -\frac{(-R)(\pi R^2 \varrho d)}{\pi(2R)^2 \varrho d - \pi R^2 \varrho d} = \frac{1}{3}R. \quad \text{(Odpověď)}$$

Všimněme si, že konstantní hustota a konstantní tloušťka desky se při výpočtu vykrátily. Na hodnotu x_X tedy nemají vliv.



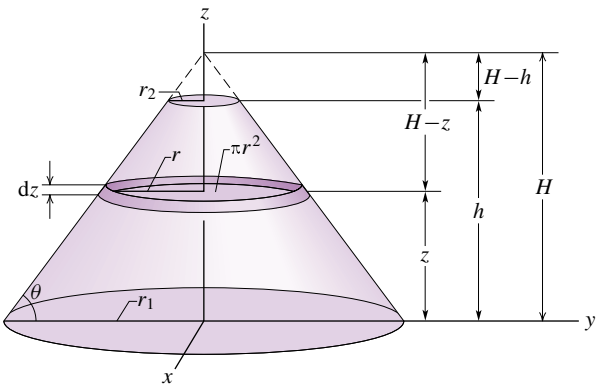
Obr. 9.5 Příklad 9.3. (a) Těleso X, jehož těžiště je označeno T_X, vzniklo vyříznutím kruhového otvoru o poloměru R v kovovém kotouči o poloměru $2R$. (b) Vyjmutý kotouč je označen symbolem D. Jeho těžiště T_D leží v jeho geometrickém středu a má souřadnici $x_D = -R$. Těleso C je složeno z částí X a D. Jeho těžiště je v počátku soustavy souřadnic. (c) Těžiště všech tří těles.

PŘÍKLAD 9.4

Obr. 9.6a zachycuje mohylu Silbury Hill, postavenou na pláních nedaleko Stonehenge před 4 600 lety. Účel stavby není přesně znám, pravděpodobně sloužila jako pohřebiště. Má tvar komolého kužele (obr. 9.6b) o výšce $h = 40\,\text{m}$ a poloměrech podstav $r_2 = 16\,\text{m}$ (horní podstava) a $r_1 = 88\,\text{m}$ (základna). Jeho objem je $V = 4{,}09{\cdot}10^5\,\text{m}^3$. Povrchové přímky kužele svírají s vodorovnou rovinou úhel $\theta = 30^\circ$.



(a)



(b)

Obr. 9.6 Příklad 9.4. (a) Mohyla Silbury Hill v Anglii pochází z mladší doby kamenné. Její stavba si vyžádala asi $1{,}8{\cdot}10^7$ pracovních hodin. (b) Komolý kužel představující Silbury Hill. V obrázku je vyznačena vrstva o poloměru r s infinitezimální tloušťkou dz, ležící ve výšce z nad základnou kužele.

(a) Určete polohu těžiště mohyly.

ŘEŠENÍ: Mohyla je rotačně symetrická, takže její těžiště leží na její ose symetrie, ve výšce z_T nad základnou kužele. K výpočtu této výšky použijeme poslední z rovnic (9.11) a integrál zjednodušíme užitím symetrie mohyly. Uvažme tenkou vodorovnou vrstvu zvolenou podle obr. 9.6b. Vrstva má poloměr r, tloušťku dz a leží ve vzdálenosti z od základny

mohyly. Obsah její podstavy je πr^2 a objem

$$\mathrm{d}V = \pi r^2 \,\mathrm{d}z. \tag{9.13}$$

Mohyla je tvořena všemi takovými vrstvami, jejichž poloměr se mění od největší hodnoty r_1, odpovídající poloměru základny, po hodnotu r_2 poloměru horní podstavy. Výšku celého kužele, z něhož náš komolý kužel vznikl, označme H (obr. 9.6b). Pro poloměr r libovolné vrstvy pak platí

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{H}{r_1} = \frac{H-z}{r},$$

tj.

$$r = (H-z)\frac{r_1}{H}. \tag{9.14}$$

Dosazením z (9.13) a (9.14) do poslední z rovnic (9.11) dostaneme

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}V = \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\int_0^h z(H-z)^2\,\mathrm{d}z = \\ &= \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\int_0^h (z^3 - 2z^2H + zH^2)\,\mathrm{d}z = \\ &= \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\left[\frac{z^4}{4} - \frac{2z^3H}{3} + \frac{z^2H^2}{2}\right]_0^h = \\ &= \frac{\pi r_1^2 h^4}{VH^2}\left[\frac{1}{4} - \frac{2H}{3h} + \frac{H^2}{2h^2}\right]. \end{aligned}$$

Pro zadané číselné hodnoty pak vychází

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{\pi(88\,\mathrm{m})^2(40\,\mathrm{m})^4}{(4{,}09{\cdot}10^5\,\mathrm{m}^3)(50{,}8\,\mathrm{m})^2}\cdot \\ &\quad\cdot\left[\frac{1}{4} - \frac{2(50{,}8\,\mathrm{m})}{3(40\,\mathrm{m})} + \frac{(50{,}8\,\mathrm{m})^2}{2(40\,\mathrm{m})^2}\right] = \\ &= 12{,}37\,\mathrm{m} \doteq 12\,\mathrm{m}. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Předpokládejme, že průměrná hustota materiálu, z něhož je mohyla Silbury Hill postavena, je $\varrho = 1{,}5{\cdot}10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Jakou práci vykonali dělníci při vršení mohyly, jestliže zeminu zvedali z úrovně základny kužele?

ŘEŠENÍ: K výpočtu elementární práce $\mathrm{d}W$ potřebné k vyzdvižení hmotného elementu $\mathrm{d}m$ do výšky z použijeme rov. (7.21), do níž dosadíme $\varphi = 180^\circ$:

$$\mathrm{d}W = -\mathrm{d}m\, gz\cos 180^\circ = gz\,\mathrm{d}m.$$

Ze vztahu (9.10) vyjádříme $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$ a dosazením do předchozí rovnice dostaneme

$$\mathrm{d}W = \varrho g z\,\mathrm{d}V.$$

Celkovou práci vypočteme pomocí integrálu jako součet elementárních prací $\mathrm{d}W$:

$$W = \int \mathrm{d}W = \int \varrho g z\,\mathrm{d}V = \varrho g \int z\,\mathrm{d}V.$$

Ze vztahů (9.11) je zřejmé, že poslední integrál má hodnotu Vz_T. Nakonec tedy dostáváme

$$W = \varrho V g z_T. \tag{9.15}$$

Práce potřebná k navršení mohyly Silbury Hill je tedy stejná jako práce, kterou bychom museli vykonat při zvednutí stejně hmotného bodového objektu z úrovně základny do těžiště mohyly. Pro číselné hodnoty uvedené v zadání úlohy pak z rov. (9.15) dostaneme:

$$\begin{aligned} W &= (1{,}5{\cdot}10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}})(4{,}09{\cdot}10^5\,\mathrm{m}^3)\cdot \\ &\quad\cdot(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(12{,}37\,\mathrm{m}) = \\ &= 7{,}4{\cdot}10^{10}\,\mathrm{J}. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 9.1: *Úlohy o těžišti*

V příkladech 9.1 až 9.3 jsme se seznámili se třemi různými způsoby zjednodušení úloh směřujících k výpočtu polohy těžiště: (1) Využití všech prvků symetrie zadaného tělesa (střed symetrie, osy symetrie, roviny symetrie). (2) Těleso lze pro účely výpočtu rozdělit na několik částí a každou z nich nahradit částicí umístěnou v jejím těžišti. (3) Vhodná volba souřadnicových os: volba souřadnic nemá vliv na polohu těžiště soustavy částic vzhledem k těmto částicím. Je proto vhodné volit počátek i osy soustavy souřadnic tak, aby se výpočet co nejvíce zjednodušil. Je-li zadaná soustava tvořena jen několika částicemi, volíme obvykle počátek soustavy souřadnic v některé z nich. Má-li soustava navíc osu symetrie, ztotožníme ji s některou ze souřadnicových os, například s osou x.

9.3 VĚTA O HYBNOSTI

Sledujeme-li srážku dvou kulečníkových koulí, z nichž jedna je zpočátku v klidu, přirozeně očekáváme, že i po srážce bude soustava nějak pokračovat v pohybu ve směru nárazu. Asi bychom se divili, kdyby se obě koule vrátily zpět nebo se třeba pohybovaly obě stejným směrem kolmým k pohybu první koule před srážkou.

Bod, který se stále pohybuje kupředu bez ohledu na srážku, opravdu existuje. Je jím těžiště soustavy našich dvou koulí. Snadno se o tom přesvědčíme přímo při kulečníkové hře. Stačí si uvědomit, že těžiště soustavy dvou stejně hmotných těles leží vždy uprostřed mezi nimi. Ať je srážka jakákoliv — přímá, nebo zcela obecná, těžiště se neochvějně pohybuje kupředu, jako by srážka vůbec nenastala. Sledujme tento jev podrobněji.

Místo dvojice kulečníkových koulí vezměme v úvahu soustavu n částic, jejichž hmotnosti jsou obecně různé. Budeme se zabývat pohybem těžiště této soustavy, *bez ohledu*

na pohyb jednotlivých částic. I když je těžiště pouze geometrickým bodem, můžeme o něm uvažovat jako o částici, jejíž hmotnost je rovna celkové hmotnosti soustavy. Můžeme mu přisoudit polohu, rychlost i zrychlení. Později ukážeme, že vektorová rovnice popisující pohyb těžiště soustavy částic, zvaná **věta o hybnosti** (soustavy částic) neboli **první impulzová věta**,* má tvar

$$M\boldsymbol{a}_T = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}. \tag{9.16}$$

Vztah (9.16) má tvar druhého Newtonova zákona pro těžiště soustavy částic. Skutečně, má stejný tvar ($m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$) jako druhý Newtonův zákon pro částici. Veličiny vystupující v rov. (9.16) je však třeba správně interpretovat:

1. $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ je *vektorový* součet *všech vnějších sil* působících na soustavu, tj. všech sil, jimiž okolní objekty působí na jednotlivé částice soustavy. Síly, kterými na sebe působí jednotlivé částice, resp. části soustavy navzájem, se nazývají silami *vnitřními*. Ve vztahu (9.16) nevystupují, neboť podle třetího Newtonova zákona je jejich součet roven nule: $\sum \boldsymbol{F}_{\text{int}} = \boldsymbol{0}$.
2. M je *celková hmotnost* soustavy. Předpokládáme, že nedochází k výměně hmoty mezi soustavou a jejím okolím, takže M je konstantní. Taková soustava se nazývá **uzavřená**.
3. $\boldsymbol{a}_T$ je zrychlení *těžiště* soustavy. Vztah (9.16) nedává žádnou informaci o zrychlení jiných bodů soustavy.

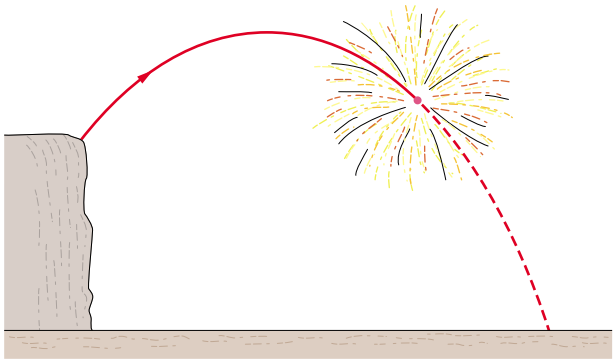
Jako každá vektorová rovnice je i rov. (9.16) ekvivalentní třem rovnicím skalárním pro složky vektorů $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ a $\boldsymbol{a}_T$ vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic:

$$\begin{aligned} Ma_{T,x} &= \sum F_{\text{ext},x}, \\ Ma_{T,y} &= \sum F_{\text{ext},y}, \\ Ma_{T,z} &= \sum F_{\text{ext},z}. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Vraťme se nyní k původnímu problému a zkoumejme chování soustavy dvou kuleníkových koulí. Po uvedení první koule do pohybu je výsledná vnější síla působící na soustavu nulová, tj. $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \boldsymbol{0}$. Podle rov. (9.16) je tedy nulové i zrychlení těžiště soustavy ($\boldsymbol{a}_T = \boldsymbol{0}$). Těžiště soustavy koulí se tedy před srážkou pohybuje konstantní rychlostí. Při srážce na sebe koule působí silami, které jsou z hlediska soustavy silami *vnitřními*. Tyto síly mají sice vliv na pohyb každé z koulí, neovlivní však pohyb těžiště soustavy. Nepřispívají totiž k výrazu $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, jehož hodnota tak zůstává stále nulová. Těžiště soustavy se i po srážce pohybuje konstantní rychlostí, shodnou s jeho rychlostí před srážkou.

Rov. (9.16) platí nejen pro soustavu částic, ale i pro tuhé těleso, jakým je např. baseballová pálka na obr. 9.1b. V tomto případě značí M v rov. (9.16) hmotnost pálky a $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ představuje tíhovou sílu $M\boldsymbol{g}$, jíž na pálku působí Země.

Obr. 9.7 ukazuje jiný zajímavý případ. Raketa vystřelená při ohňostroji se pohybuje po parabolické dráze a najednou se roztrhne na malé části. Kdyby k explozi nedošlo, raketa by pokračovala v pohybu po parabole, vyznačené v obrázku. Síly, které způsobily explozi, jsou z hlediska soustavy, tvořené nejprve raketou a poté všemi jejími částmi, silami *vnitřními*, tj. silami vzájemného působení jednotlivých částí soustavy. Zanedbáme-li odpor vzduchu, je výslednice *vnějších* sil působících na soustavu určena výhradně silou tíhovou: $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = M\boldsymbol{g}$, bez ohledu na to, zda raketa explodovala či nikoliv. Z rov. (9.16) je tedy zřejmé, že zrychlení těžiště soustavy úlomků (pokud jsou ještě všechny v pohybu ve vzduchu) je $\boldsymbol{g}$ a těžiště opisuje tutéž parabolickou trajektorii, po jaké by se pohybovala raketa, kdyby se neroztrhla.



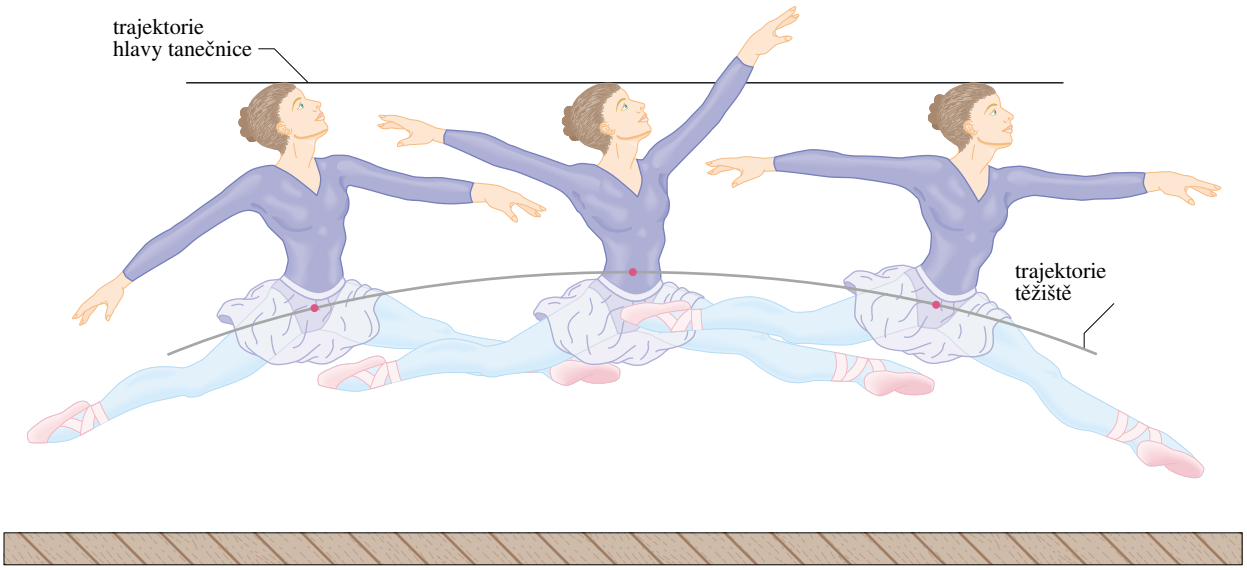
Obr. 9.7 Při ohňostroji exploduje raketa během letu. Zanedbáme-li odpor vzduchu, opisuje těžiště soustavy úlomků původní parabolickou dráhu rakety, dokud některý z úlomků nedopadne na zem.

Při figuře „grand jeté“, zvedne baletka ruce a napne nohy do vodorovné polohy (obr. 9.8). Tím posune těžiště uvnitř svého těla co nejvýše. Těžiště samozřejmě věrně sleduje parabolickou trajektorii. Hmotnost tanečnice je však vůči němu rozložena tak, že se její hlava a trup pohybují takřka vodorovně.

Odvození věty o hybnosti

Věta o hybnosti je jednou ze dvou významných pohybových rovnic soustavy částic. V tomto odstavci se věnujeme jejímu odvození. Uvažujme soustavu n částic. Podle

* Její první název pochopíme později z jejího ekvivalentního zápisu (9.28). Druhý název souvisí s rovnicí (10.4).



Obr. 9.8 Baletní skok „grand jeté“. (Převzato z Kennet Laws, *The Physics of Dance*, Schirmer Books, 1984.)

rov. (9.8) pro ni platí

$$M\boldsymbol{r}_T = m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{r}_n, \qquad (9.18)$$

kde M je její celková hmotnost, $\boldsymbol{r}_T$ polohový vektor jejího těžiště. Derivováním rov. (9.18) podle času dostaneme

$$M\boldsymbol{v}_T = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n. \qquad (9.19)$$

Symbolem $\boldsymbol{v}_i$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i/\mathrm{d}t)$ jsme označili rychlost i-té částice a $\boldsymbol{v}_T$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{r}_T/\mathrm{d}t)$ představuje rychlost těžiště.

Dalším derivováním rov. (9.19) vzhledem k času již dospějeme ke vztahu

$$M\boldsymbol{a}_T = m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + m_3\boldsymbol{a}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{a}_n, \qquad (9.20)$$

kde $\boldsymbol{a}_i$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i/\mathrm{d}t)$ je zrychlení i-té částice a $\boldsymbol{a}_T$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{v}_T/\mathrm{d}t)$ zrychlení těžiště. Znovu si uvědomme, že těžiště je pouze geometrickým bodem. Má však smysl mu kromě polohy připisovat i rychlost a zrychlení, jako by se jednalo o hmotnou částici.

Podle druhého Newtonova zákona je součin $m_i\boldsymbol{a}_i$ určen výslednicí $\boldsymbol{F}_i$ všech sil působících na i-tou částici. Vztah (9.20) můžeme tedy přepsat do tvaru

$$M\boldsymbol{a}_T = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \ldots + \boldsymbol{F}_n. \qquad (9.21)$$

Pravá strana rov. (9.21) zahrnuje kromě vnějších sil, jimiž na jednotlivé částice soustavy působí její okolí, i interakční síly, jimiž na sebe částice působí navzájem (vnitřní síly). Podle třetího Newtonova zákona je však součet vnitřních sil nulový, neboť je tvořen dvojicemi typu akce — reakce, tj. dvojicemi stejně velkých opačně orientovaných sil. Na pravé straně rov. (9.21) tak zůstane pouze vektorový součet *vnějších* sil působících na soustavu, ve shodě s větou o hybnosti (9.16).

KONTROLA 2: František a Eva bruslí ve dvojici. Drží přitom v rukou opačné konce dlouhé tyče. František má dvakrát větší hmotnost než Eva, hmotnost tyče je zanedbatelná. Tření mezi bruslemi a ledem rovněž zanedbáváme. Bruslaři jsou zpočátku v klidu. (a) Potom František začne ručkovat k Evě, zatímco ona drží pevně v rukou svůj konec tyče. Určete polohu bodu, v němž se setkají. (b) Řešte tutéž úlohu za předpokladu, že se Eva přitahuje k Františkovi, a (c) za předpokladu, že ručkují oba. Soustavu souřadnic volíme tak, že její počátek umístíme do počáteční polohy těžiště soustavy a jednu z os namíříme podél tyče.

PŘÍKLAD 9.5

Na obr. 9.9a je soustava tří částic, které jsou zpočátku v klidu. Na každou z nich působí vnější síla, která je v obrázku rovněž vyznačena. Určete zrychlení těžiště soustavy.

ŘEŠENÍ: Podle př. 9.1 vypočteme počáteční polohu těžiště soustavy (obr. 9.9a). Jak napovídá obr. 9.9b, zacházíme s ním jako s částicí o hmotnosti M, shodné s celkovou hmotností soustavy (16 kg), na niž působí všechny vnější síly působící na soustavu. Výslednice všech vnějších sil působících na soustavu $\sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$ představuje tedy výslednici všech sil působících na těžiště. Její x-ová, resp. y-ová složka jsou

$$\sum F_{\mathrm{ext},x} = (14\,\mathrm{N}) - (6{,}0\,\mathrm{N}) + (12\,\mathrm{N})\cos 45^\circ = 16{,}5\,\mathrm{N},$$

resp.

$$\sum F_{\mathrm{ext},y} = (12\,\mathrm{N})\sin 45^\circ = 8{,}49\,\mathrm{N}.$$

Výsledná síla má velikost

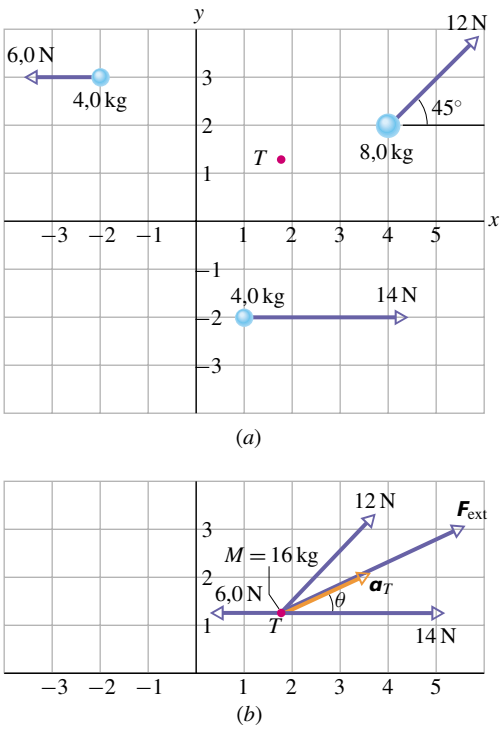
$$\sum F_{\text{ext}} = \sqrt{(16{,}5\,\text{N})^2 + (8{,}49\,\text{N})^2} = 18{,}6\,\text{N}$$

a svírá s osou x úhel

$$\operatorname{tg}\theta = \left(\frac{8{,}49\,\text{N}}{16{,}5\,\text{N}}\right) = 0{,}515,$$
$$\theta = 27^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tímto úhlem je určen směr zrychlení těžiště $\boldsymbol{a}_T$, jehož velikost je podle rov. (9.16)

$$a_T = \frac{\sum F_{\text{ext}}}{M} = \frac{(18{,}6\,\text{N})}{(16\,\text{kg})} = 1{,}16\,\text{m·s}^{-2} \doteq$$
$$\doteq 1{,}2\,\text{m·s}^{-2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 9.9 Příklad 9.5. (a) Na tři částice, které jsou zpočátku v klidu, působí vnější síly. Těžiště soustavy je v bodě označeném T. (b) Vnější síly umístíme do těžiště. Jeho pohyb se řídí stejnými zákonitostmi jako pohyb částice o hmotnosti M shodné s celkovou hmotností soustavy. Obrázek zachycuje výslednici vnějších sil i zrychlení těžiště soustavy částic.

Pohyb každé z částic na obr. 9.9a je přímočarý a rovnoměrně zrychlený, stejně jako pohyb těžiště celé soustavy. Jednotlivá zrychlení jsou však navzájem různá. Poněvadž zpočátku byly částice v klidu, bude se každá z nich pohybovat s rovnoměrně rostoucí rychlostí ve směru síly, která na ni působí. Těžiště se bude pohybovat po přímce rovnoběžné s vektorem $\boldsymbol{a}_T$.

9.4 HYBNOST

Hybnost částice $\boldsymbol{p}$ je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}, \qquad (9.22)$$

kde m je hmotnost částice a $\boldsymbol{v}$ její rychlost. Hmotnost částice je kladná skalární veličina. Vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou tedy souhlasně rovnoběžné. Z rov. (9.22) je také zřejmé, že jednotkou hybnosti v soustavě jednotek SI je kg·m·s^{-1}.

Původní Newtonova formulace druhého zákona již pojem hybnosti obsahovala:

> Časová změna hybnosti částice je rovna výslednici sil, které na částici působí.

Matematické vyjádření tohoto zákona má tvar

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}. \qquad (9.23)$$

Předpokládejme, že hmotnost částice je neproměnná. Dosazením za $\boldsymbol{p}$ z definičního vztahu (9.22) a úpravou pak dostaneme

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}.$$

Vztahy $\sum \boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ a $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ tedy představují dvě ekvivalentní vyjádření druhého Newtonova zákona pro pohyb částice s konstantní hmotností v rámci klasické mechaniky.

Hybnost při velmi velkých rychlostech

Víme již, že pro částice s rychlostmi blízkými rychlosti světla nesouhlasí výsledky newtonovské mechaniky s experimenty. V takových případech musíme použít Einsteinovu speciální teorii relativity. Vztah $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}$ zůstane v platnosti i v rámci této obecnější teorie *za předpokladu*, že změníme definici hybnosti takto:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \qquad (9.24)$$

Člen $\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ signalizuje relativistický charakter vztahu.

Tabulka 9.1 **Některé definice a zákony v klasické mechanice**

DEFINICE NEBO ZÁKON	JEDNA ČÁSTICE	SOUSTAVA ČÁSTIC
Druhý Newtonův zákon	$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$ (5.1)	$M\boldsymbol{a}_T = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ (9.16)
Hybnost	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ (9.22)	$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T$ (9.26)
Druhý Newtonův zákon	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}$ (9.23)	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ (9.28)

Rychlosti běžných makroskopických objektů, jakými jsou například míče, projektily nebo kosmické sondy, jsou ovšem mnohem menší než rychlost světla, takže veličina $(v/c)^2$ v rovnici (9.24) je prakticky nulová. V takovém případě lze (9.24) nahradit klasickou definicí (9.22) a Einsteinova speciální teorie relativity se redukuje na newtonovskou mechaniku. U elektronů a jiných subatomových částic lze však snadno dosáhnout rychlostí velmi blízkých rychlosti světla. Pak *je nutné* použít pro vyjádření hybnosti vztahu (9.24), a to dokonce i při rutinních technických výpočtech.

9.5 HYBNOST SOUSTAVY ČÁSTIC

Uvažujme nyní soustavu n částic, z nichž každá je charakterizována svou hmotností, rychlostí a hybností. Částice mohou vzájemně interagovat a okolní objekty na ně mohou působit vnějšími silami. Soustavě přisoudíme celkovou hybnost $\boldsymbol{P}$, definovanou jako vektorový součet hybností jednotlivých částic:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 + \ldots + \boldsymbol{p}_n = \\ = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n. \quad (9.25)$$

Porovnáme-li tento vztah s (9.19), vidíme, že platí

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T. \quad (9.26)$$

Hybnost soustavy částic můžeme tedy vyjádřit i jinak:

Hybnost soustavy částic je rovna součinu její celkové hmotnosti M a rychlosti jejího těžiště.

Derivací rov. (9.26) dostaneme

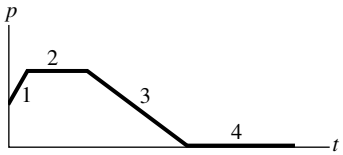
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_T}{\mathrm{d}t} = M\boldsymbol{a}_T. \quad (9.27)$$

Porovnáním rov. (9.26) a (9.27) získáme nakonec ekvivalentní vyjádření věty o hybnosti ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}. \quad (9.28)$$

Tento výsledek můžeme považovat za zobecnění druhého Newtonova zákona pro částici, zapsaného ve tvaru $(\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t) = \sum \boldsymbol{F}$, na případ soustavy částic. (Uvědomme si, že jsme při formulaci tohoto zobecnění použili i třetího Newtonova zákona.) V tab. 9.1 jsou shrnuty důležité vztahy platné pro jednu částici a odpovídající vztahy odvozené pro soustavu částic.

KONTROLA 3: Na obrázku je znázorněna časová závislost hybnosti částice pohybující se po přímce. Na částici působí síla ve směru této přímky. (a) Seřaďte čtyři označené oblasti sestupně podle velikosti této síly. (b) V které oblasti je částice brzděna?



PŘÍKLAD 9.6

Obr. 9.10a zachycuje dětské autíčko o hmotnosti 2,0 kg před a za zatáčkou. Velikost jeho rychlosti před zatáčkou je $0{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, za zatáčkou $0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete odpovídající změnu hybnosti $\Delta\boldsymbol{P}$.

ŘEŠENÍ: K vyjádření počáteční a výsledné hybnosti autíčka použijeme vztahu (9.26). Nejprve však musíme vyjádřit vektor jeho rychlosti $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ před zatáčkou a vektor rychlosti $\boldsymbol{v}_\mathrm{f}$ poté, co autíčko zatáčkou projelo. Zvolíme-li soustavu souřadnic podle obr. 9.10a, dostaneme

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{i} = -(0{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{v}_\mathrm{f} = (0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i}.$$

Pro odpovídající hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ a $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ pak podle rov. (9.26) platí

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = M\boldsymbol{v}_\mathrm{i} = (2{,}0\,\mathrm{kg})(-0{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j} = (-1{,}0\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j}$$

a

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{f} = M\boldsymbol{v}_\mathrm{f} = (2{,}0\,\mathrm{kg})(0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} = (0{,}80\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i}.$$

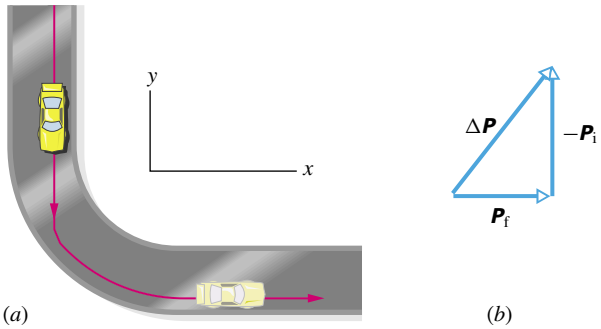
Tyto hybnosti mají různý směr. Proto *nemůžeme* vyjádřit změnu hybnosti $\Delta\boldsymbol{P}$ jako pouhý rozdíl velikostí vektorů $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ a $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$. Změna hybnosti je dána vektorovým vztahem

$$\Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f} - \boldsymbol{P}_\mathrm{i}, \quad (9.29)$$

tj.

$$\Delta \boldsymbol{P} = (0{,}80\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} - (-1{,}0\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j} = \\ = (0{,}8\boldsymbol{i} + 1{,}0\boldsymbol{j})\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Na obr. 9.10b jsou vyznačeny vektory $\Delta\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ a $-\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$. Připomeňme si, že $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ odečítáme od $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ tak, že k vektoru $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ přičteme vektor $-\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$.



Obr. 9.10 Příklad 9.6. (a) Autíčko v zatáčce závodní dráhy. (b) Změna hybnosti $\Delta\boldsymbol{P}$ autíčka je vektorovým rozdílem jeho výsledné hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ a počáteční hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$.

9.6 ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI

Uvažujme soustavu částic, na kterou nepůsobí žádné vnější síly (soustava je izolovaná), anebo je výslednice vnějších sil nulová. Předpokládejme, že částice soustavu neopouštějí ani do ní nevstupují z okolí (soustava je uzavřená). S uvážením skutečnosti, že $\sum \boldsymbol{F}_\mathrm{ext} = \boldsymbol{0}$, dostaneme z rov. (9.28) vztah $\mathrm{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$, tj.

$$\boldsymbol{P} = \text{konst.} \qquad (9.30)$$

Tento důležitý výsledek představuje **zákon zachování hybnosti** a lze jej vyjádřit také ve tvaru

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f}. \qquad (9.31)$$

Indexy (i), resp. (f) označují hybnost soustavy v počátečním, resp. koncovém okamžiku. Vztahy (9.30) i (9.31) vyjadřují, že celková hybnost soustavy částic se nemění, je-li výslednice vnějších sil působících na soustavu nulová. Toto tvrzení zahrnuje i méně obecnou, avšak rovněž důležitou formulaci zákona zachování hybnosti: hybnost izolované soustavy částic je stálá.

Podobně jako v případě zákona zachování energie, formulovaného v kap. 8, sahá platnost zákona zachování hybnosti za rámec newtonovské mechaniky. Tento zákon totiž platí i v mikrosvětě, kde již s Newtonovými zákony nelze počítat. Nebude porušen ani pro soustavy částic pohybujících se velkými rychlostmi, pro něž je nutné nahradit newtonovskou mechaniku Einsteinovou teorií relativity, pokud hybnost vyjádříme vztahem (9.24) namísto (9.22).

Z rov. (9.26) ($\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T$) je zřejmé, že v případě konstantní celkové hybnosti $\boldsymbol{P}$ je stálá i rychlost těžiště soustavy $\boldsymbol{v}_T$. Znamená to, že jeho zrychlení $\boldsymbol{a}_T$ je nulové, přesně ve shodě s větou o hybnosti uvedenou v tab. 9.1.

Vztahy (9.30) a (9.31) mají vektorový charakter a každý z nich je proto ekvivalentní třem skalárním rovnicím, vyjadřujícím zachování jednotlivých složek vektoru celkové hybnosti. V závislosti na silovém působení okolí na uvažovanou soustavu částic mohou nastat i situace, kdy se zachovává jen jedna nebo dvě složky celkové hybnosti:

Je-li některá složka výslednice *vnějších* sil působících na uzavřenou soustavu nulová, pak se odpovídající složka celkové hybnosti soustavy nemění.

Pro ilustraci si představme letící míč. Při zanedbatelném odporu prostředí je jedinou silou, která na míč při jeho pohybu působí, tíhová síla $m\boldsymbol{g}$. Ta ovšem směřuje svisle dolů. Svislá složka hybnosti míče se tedy mění, zatímco její vodorovná složka se zachovává.

Znovu připomeňme, že celkovou hybnost uzavřené soustavy lze změnit jen působením vnějších sil. Působení vnitřních sil může sice vést ke změnám hybnosti jednotlivých částí soustavy, ke změně celkové hybnosti však nepřispívá.

KONTROLA 4: Předmět spočívající v klidu na vodorovné dokonale hladké podložce explodoval a roztrhl se na dvě části. Jedna z nich se dala do pohybu podél kladné osy x. (a) Jaká byla celková hybnost soustavy po výbuchu? (b) Mohla se druhá část pohybovat po přímce svírající s osou x nenulový úhel? (c) Jaký byl směr vektoru hybnosti druhé části?

PŘÍKLAD 9.7

Záhadná bedna o hmotnosti $m = 6{,}0\,\mathrm{kg}$ klouže po dokonale hladké vodorovné podlaze podél kladné osy x. Velikost její rychlosti je $v = 4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Náhle bedna vybuchne a rozpadne se na dvě části: jedna z nich, o hmotnosti $m_1 = 2{,}0\,\mathrm{kg}$, se dále pohybuje podél kladné osy x rychlostí o velikosti $v_1 = 8{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jaká je rychlost druhé části?

ŘEŠENÍ: Soustava částic, kterou sledujeme, je tvořena nejprve bednou a po jejím roztržení oběma jejími částmi. Jedná se sice o soustavu uzavřenou, nikoli však izolovanou. Na

bednu samotnou i na každou její část působí totiž jednak tíhová síla, jednak tlaková síla podlahy. Všechny tyto síly jsou svislé a nepřispějí proto ke změně vodorovné složky celkové hybnosti soustavy. Síly, jimiž na sebe působí jednotlivé části bedny při explozi, neovlivní celkovou hybnost vůbec, neboť jsou vnitřními silami soustavy. Vodorovná složka hybnosti soustavy se tedy zachovává a platí pro ni vztah (9.31).

Počáteční hybnost soustavy je určena hybností bedny

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{i}} = m\boldsymbol{v}.$$

Hybnost soustavy $\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}}$ po roztržení bedny je dána vektorovým součtem hybností obou částí:

$$\boldsymbol{P}_{1\mathrm{f}} = m_1\boldsymbol{v}_1 \quad \text{a} \quad \boldsymbol{P}_{2\mathrm{f}} = m_2\boldsymbol{v}_2,$$
$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}} = \boldsymbol{P}_{1\mathrm{f}} + \boldsymbol{P}_{2\mathrm{f}} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2.$$

Pro snazší vyjádření složek vektorů hybnosti spojíme soustavu souřadnic s podlahou a osu x zvolíme ve směru pohybu bedny. Všechny vektory hybnosti mají tedy směr osy x a jejich x-ové složky jsou dány přímo jejich velikostmi opatřenými příslušnými znaménky. Z (9.31) pak dostaneme

$$P_{\mathrm{i},x} = P_{\mathrm{f},x},$$

tj.

$$mv_x = m_1v_{1x} + m_2v_{2x}.$$

Uvážíme-li, že hmotnost druhé části bedny je $m_2 = m - m_1 = 4{,}0\,\mathrm{kg}$, a dosadíme-li do obecných vztahů vstupní číselné údaje, dostaneme nakonec

$$(6{,}0\,\mathrm{kg})(4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = (2{,}0\,\mathrm{kg})(8{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) + (4{,}0\,\mathrm{kg})v_{2x},$$

odkud

$$v_{2x} = 2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledná hodnota je kladná. Znamená to, že se druhá část bedny pohybuje rovněž ve směru kladné osy x.

PŘÍKLAD 9.8

Z děla o hmotnosti $M = 1\,300\,\mathrm{kg}$ byla ve vodorovném směru vypálena koule o hmotnosti $m = 72\,\mathrm{kg}$ (obr. 9.11). Rychlost koule vzhledem k dělu je $\boldsymbol{v}$ a má velikost $v = 55\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Při zpětnému rázu se dělo volně pohybuje vzhledem k Zemi rychlostí $\boldsymbol{V}$.

(a) Určete vektor $\boldsymbol{V}$.

ŘEŠENÍ: Uvažujme soustavu složenou ze dvou těles, děla a koule. Díky této volbě budou síly vzájemného působení děla a koule při výstřelu vnitřními silami soustavy a není třeba se jimi zabývat. Vodorovné složky vnějších sil působících na soustavu jsou nulové a vodorovná složka celkové hybnosti soustavy se při výstřelu zachovává. Rychlost koule vzhledem k Zemi $\boldsymbol{v}_{\mathrm{Z}}$ je rovna vektorovému součtu rychlosti koule vzhledem k dělu a rychlosti děla vzhledem k Zemi, tj.

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{Z}} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{V}.$$

Soustavu souřadnic spojíme se zemským povrchem a osu x namíříme ve směru hlavně (na obr. 9.11 vpravo). Všechny rychlosti mají směr osy x. (V obrázku směřuje rychlost $\boldsymbol{V}$ doleva, její skutečnou orientaci však dosud neznáme.) Pak

$$v_{\mathrm{Z},x} = v_x + V_x. \qquad (9.32)$$

Před výstřelem má soustava nulovou hybnost $\boldsymbol{P}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{0}$. Vodorovnou složku její hybnosti po výstřelu označme $P_{\mathrm{f},x}$. Podle (9.32) pro ni platí

$$P_{\mathrm{f},x} = MV_x + mv_{\mathrm{Z},x} = MV_x + m(v_x + V_x).$$

První člen na pravé straně této rovnosti představuje vodorovnou složku hybnosti děla a druhý vodorovnou složku hybnosti koule vzhledem k Zemi.

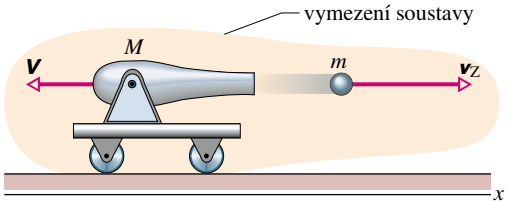
Vodorovná složka celkové hybnosti se ovšem nemění, tj. $P_{\mathrm{f},x} = P_{\mathrm{i},x}$. Platí tedy

$$0 = MV_x + m(v_x + V_x).$$

Řešením této rovnice vzhledem k neznámé V_x dostaneme

$$V_x = -\frac{mv_x}{M+m} = -\frac{(72\,\mathrm{kg})(55\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})}{(1\,300\,\mathrm{kg} + 72\,\mathrm{kg})} =$$
$$= -2{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Záporné znaménko potvrzuje očekávání, že se dělo při zpětném rázu pohybuje v opačném směru než koule (v obr. 9.11 vlevo).



Obr. 9.11 Příklad 9.8. Dělo o hmotnosti M vypálilo kouli o hmotnosti m. Koule má rychlost $\boldsymbol{v}_{\mathrm{Z}}$ vzhledem k Zemi a rychlost $\boldsymbol{v}$ vzhledem k dělu. Rychlost zpětného rázu děla vzhledem k Zemi je $\boldsymbol{V}$.

(b) Určete rychlost koule vzhledem k Zemi $\boldsymbol{v}_{\mathrm{Z}}$.

ŘEŠENÍ: Z rovnice (9.32) vyplývá

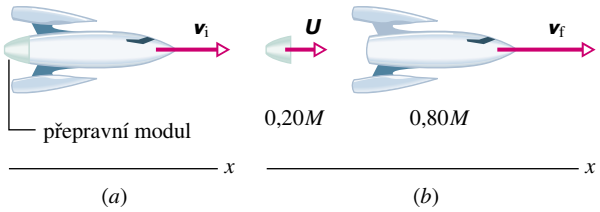
$$v_{\mathrm{Z},x} = v_x + V_x = (55\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) + (-2{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) =$$
$$= 52\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vlivem zpětného rázu děla se koule pohybuje vzhledem k Zemi poněkud pomaleji, než kdyby ke zpětnému rázu nedocházelo.

Při řešení této úlohy jsme si mohli uvědomit důležitost vhodného vymezení studované soustavy částic (*dělo+koule*) i vhodné volby vztažné soustavy, vzhledem k níž vyjadřujeme složky vektorových veličin. (Ze dvou přirozeně se nabízejících možností, spojit soustavu souřadnic buď s povrchem Země, nebo s pohybujícím se dělem, jsme rozumně zvolili prvou možnost.)

PŘÍKLAD 9.9

Představme si vesmírnou loď o celkové hmotnosti M vybavenou přepravním modulem, která letí vesmírem rychlostí $v_i = 2\,100$ km/h vzhledem ke Slunci (obr. 9.12a). Poté, co se přepravní modul o hmotnosti $0{,}20M$ odpoutá od lodi pomocí malého výbuchu (obr. 9.12b), pohybuje se loď o 500 km/h rychleji než modul. (Velikost relativní rychlosti lodi vůči modulu je tedy $v_{rel} = 500$ km/h.) Určete velikost rychlosti lodi v_f vzhledem ke Slunci.



Obr. 9.12 Příklad 9.9. (a) Vesmírná loď s přepravním modulem se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_i$. (b) Přepravní modul se odpoutal od lodi. Loď se nyní pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_f$ a modul rychlostí $\boldsymbol{U}$.

ŘEŠENÍ: Soustava tvořená lodí a modulem je uzavřená a izolovaná. Její celková hybnost se tedy zachovává, tj.

$$P_i = P_f. \tag{9.33}$$

Indexy (i) a (f) označují hybnost soustavy před a po odpoutání modulu. Soustava souřadnic je volena tak, že osa x směřuje ve směru pohybu lodi. Všechny vektorové veličiny popisující pohyb jednotlivých částí soustavy ve všech jeho fázích mají tedy nenulové pouze x-ové složky, které jsou navíc rovny velikostem příslušných vektorů. Platí

$$P_i = Mv_i. \tag{9.34}$$

Označíme-li symbolem $\boldsymbol{U}$ rychlost uvolněného modulu vzhledem ke Slunci, můžeme výslednou hybnost soustavy $\boldsymbol{P}_f$ vyjádřit vztahem

$$P_f = (0{,}20M)U + (0{,}80M)v_f. \tag{9.35}$$

První člen na pravé straně odpovídá hybnosti modulu a druhý hybnosti lodi.

Relativní rychlost $\boldsymbol{v}_{rel}$ lodi vzhledem k modulu je rovna rozdílu jejich rychlostí, tj.

$$v_{rel} = v_f - U.$$

Odtud

$$U = v_f - v_{rel}.$$

Dosazením tohoto výrazu do rov. (9.35) a využitím vztahů (9.33) a (9.34) dostaneme

$$Mv_i = 0{,}20M(v_f - v_{rel}) + 0{,}80Mv_f.$$

Odtud již snadno získáme výslednou rychlost lodi:

$$v_f = v_i + 0{,}20v_{rel},$$

tj.

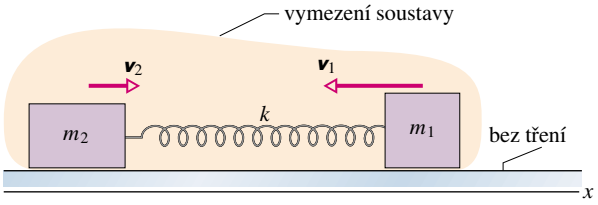
$$v_f = (2\,100\text{ km/h}) + 0{,}20(500\text{ km/h}) = \\ = 2\,200\text{ km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 5: V následující tabulce vztahující se k příkladu 9.9 jsou uvedeny některé hodnoty určující rychlost vesmírné lodi a přepravního modulu vzhledem ke Slunci, resp. relativní rychlost lodi vzhledem k modulu. Doplňte chybějící údaje.

	RYCHLOSTI (km/h)		RELATIVNÍ RYCHLOST (km/h)
	MODUL	LOĎ	
(a)	1 500	2 000	
(b)		3 000	400
(c)	1 000		600

PŘÍKLAD 9.10

Dvě tělesa na obr. 9.13 jsou spojena ideální pružinou a mohou se pohybovat po dokonale hladké vodorovné podložce. Jejich hmotnosti jsou m_1 a m_2. Tělesa nejprve oddálíme (pružina se napne) a poté uvolníme.



Obr. 9.13 Příklad 9.10. Dvě tělesa spojená pružinou a ležící na dokonale hladké vodorovné podložce nejprve oddálíme a poté uvolníme. Vektorový součet jejich hybností zůstává při jejich dalším pohybu nulový. V obrázku je vyznačen i způsob vymezení soustavy.

(a) Jaký je poměr rychlostí v_1/v_2 přibližujících se těles?

ŘEŠENÍ: Sledujeme soustavu obou těles spojených pružinou. Vztažná soustava je spojena s podložkou a osa x směřuje podél pružiny. Počáteční hybnost $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ soustavy před uvolněním těles je nulová. V libovolném okamžiku po uvolnění těles lze hybnost soustavy zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{f} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2.$$

Ze zákona zachování hybnosti plyne rovnost $\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f}$, tj.

$$\boldsymbol{0} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2. \tag{9.36}$$

S ohledem na speciální volbu soustavy souřadnic můžeme psát

$$\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}} = -\frac{m_2}{m_1}. \tag{9.37}$$

Záporné znaménko vyjadřuje skutečnost, že rychlosti těles mají v každém okamžiku opačný směr. Rov. (9.37) platí v libovolném okamžiku po uvolnění těles bez ohledu na jejich okamžitou rychlost.

(b) Jaký je poměr kinetických energií $E_{\mathrm{k},1}/E_{\mathrm{k},2}$ přibližujících se těles?

ŘEŠENÍ: Poměr $E_{k,1}/E_{k,2}$ lze zapsat ve tvaru

$$\frac{E_{\mathrm{k},1}}{E_{\mathrm{k},2}} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_{1,x}^2}{\frac{1}{2}m_2v_{2,x}^2} = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}}\right)^2.$$

Dosazením za $v_{1,x}/v_{2,x}$ z rov. (9.37) a úpravou dostaneme

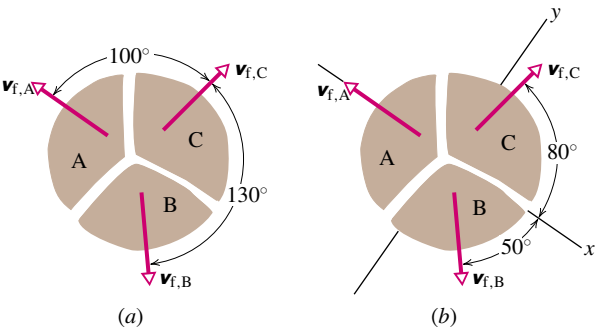
$$\frac{E_{\mathrm{k},1}}{E_{\mathrm{k},2}} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{9.38}$$

Zatímco se tělesa k sobě přibližují, zmenšuje se prodloužení spojovací pružiny. Pružná potenciální energie tak klesá ve prospěch kinetických energií těles. Hodnoty veličin $E_{\mathrm{k},1}$ a $E_{\mathrm{k},2}$ rostou, jejich poměr se však nemění. Podle rov. (9.38) je totiž v každém okamžiku určen podílem hmotností těles. Kinetická energie obou těles je největší ve chvíli, kdy je pružina opět nenapjatá. Poté se pružina začne stlačovat a pružná energie soustavy poroste na úkor energie kinetické. Vztah (9.38) však platí i v této fázi pohybu.

Vztahy (9.36) až (9.38) platí i v jiných situacích, kdy se dvě tělesa přitahují (nebo odpuzují). Můžeme je použít například při sledování pádu kamene k Zemi. V analogii s př. 9.10 a obr. 9.13 bude kámen představovat těleso 1 a Země těleso 2. Vzájemné působení kamene a Země je ovšem popsáno nikoli pružnými, nýbrž gravitačními silami. Vztažnou soustavu spojíme s těžištěm dvojice kámen + Země (takzvaná těžišťová soustava). Z rov. (9.36) je vidět, že vzhledem k takto zvolené vztažné soustavě jsou hybnosti kamene a Země v každém okamžiku stejně velké. Z rov. (9.37) a (9.38) je pak zřejmé, že padající kámen má vzhledem k těžišťové soustavě mnohem větší rychlost i kinetickou energii než Země, neboť $m_2 \gg m_1$.

PŘÍKLAD 9.11

Uvnitř tělesa o hmotnosti M, které leží na vodorovné dokonale hladké podlaze, je umístěna malá rozbuška. Výbuch roztrhne těleso na tři části, které se dají do pohybu po podlaze. Obr. 9.14 ukazuje pohled shora na situaci. Díl C o hmotnosti $0{,}30M$ má po výbuchu rychlost o velikosti $v_{\mathrm{f,C}} = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.



Obr. 9.14 Příklad 9.11. Tři díly rozbitého tělesa se pohybují různými směry po dokonale hladké vodorovné podlaze. (a) Pohled na situaci shora. (b) Totéž s vyznačením soustavy souřadnic.

(a) Jaká je rychlost dílu B o hmotnosti $0{,}20M$?

ŘEŠENÍ: Zvolme soustavu souřadnic podle obr. 9.14b: záporný směr osy x splývá se směrem vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f,A}}$. Osa x svírá s vektorem $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f,C}}$ úhel 80° a s vektorem $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f,B}}$ úhel 50°.

Obě složky celkové hybnosti soustavy, tvořené nejprve tělesem a po rozpadu všemi jeho částmi, se zachovávají. Síly působící při výbuchu jsou totiž vnitřními silami soustavy a vnější síly (tíhová a normálová) jsou kolmé k souřadnicové rovině xy. Při výpočtu rychlosti dílu B vyjdeme ze zákona zachování pro y-ovou složku celkové hybnosti:

$$P_{\mathrm{i},y} = P_{\mathrm{f},y}. \tag{9.39}$$

Indexy (i) a (f) symbolizují jako obvykle počáteční a koncový stav soustavy.

Složky počáteční hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ jsou nulové, neboť těleso bylo zpočátku v klidu. Abychom získali $P_{\mathrm{f},y}$, vyjádříme y-ové složky výsledné hybnosti všech dílů tělesa:

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{f,A},y} &= 0, \\ p_{\mathrm{f,B},y} &= -0{,}20Mv_{\mathrm{f,B},y} = -0{,}20Mv_{\mathrm{f,B}}\sin 50^\circ, \\ p_{\mathrm{f,C},y} &= 0{,}30Mv_{\mathrm{f,C},y} = 0{,}30Mv_{\mathrm{f,C}}\sin 80^\circ. \end{aligned}$$

(Uvědomme si, že vzhledem k speciální volbě os soustavy souřadnic je $p_{\mathrm{f,A},y} = 0$.) Vztah (9.39) lze tedy přepsat do tvaru

$$P_{\mathrm{i},y} = P_{\mathrm{f},y} = p_{\mathrm{f,A},y} + p_{\mathrm{f,B},y} + p_{\mathrm{f,C},y}.$$

Dosazením $v_{\mathrm{f,C}} = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ dostaneme

$$0 = 0 - 0{,}20Mv_{\mathrm{f,B}}\sin 50^\circ + (0{,}30M)(5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\sin 80^\circ$$

a odtud

$$v_{f,B} = 9{,}64\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 9{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je rychlost části B?

ŘEŠENÍ: Vzhledem k tomu, že se zachovává i x-ová složka celkové hybnosti, můžeme psát

$$P_{i,x} = P_{f,x}. \qquad (9.40)$$

Platí $P_{i,x} = 0$ (těleso bylo zpočátku v klidu). Vyjádříme x-ové složky výsledných hybností jednotlivých dílů tělesa (díl A má hmotnost $0{,}50M$):

$$p_{f,A,x} = -0{,}50M v_{f,A},$$
$$p_{f,B,x} = 0{,}20M v_{f,B,x} = 0{,}20M v_{f,B}\cos 50^\circ,$$
$$p_{f,C,x} = 0{,}30M v_{f,C,x} = 0{,}30M v_{f,C}\cos 80^\circ.$$

Vztah (9.40) nabývá tvaru

$$P_{i,x} = P_{f,x} = p_{f,A,x} + p_{f,B,x} + p_{f,C,x}.$$

Dosadíme $v_{f,C} = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $v_{f,B} = 9{,}64\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a dostaneme

$$0 = -0{,}50M v_{f,A} + 0{,}20M(9{,}64\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\cos 50^\circ + \\ + 0{,}30M(5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\cos 80^\circ.$$

Odtud již získáme velikost rychlosti dílu A:

$$v_{f,A} = 3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 6: Předpokládejme, že těleso v př. 9.11 je urychlováno ve směru záporné osy y (pohybuje se například po nakloněné rovině). Rozhodněte, zda se zachovává (a) x-ová složka jeho celkové hybnosti (podle (9.40)) a (b) y-ová složka jeho celkové hybnosti (vztah (9.39)).

RADY A NÁMĚTY

Bod 9.2: *Zachování hybnosti*

Je vhodné vrátit se k bodu 8.2, který se týkal zákona zachování mechanické energie. Otázky, které v něm byly formulovány, stojí za zamyšlení i v souvislosti s úvahami o zákonu zachování hybnosti.

Při výpočtech vycházejících ze zákona zachování hybnosti se především vždy ujistíme, zda soustava, pro niž chceme zákon zachování hybnosti použít, je uzavřená a izolovaná. *Uzavřenost* znamená, že si soustava nevyměňuje částice se svým okolím (žádná částice neprojde ze soustavy do okolí ani naopak). Soustavu považujeme za *izolovanou*, je-li její interakce s okolními objekty zanedbatelná. Z hlediska zákona zachování hybnosti se jako izolovaná chová i soustava, na kterou její okolí působí silami s nulovou výslednicí. Není-li soustava uzavřená nebo izolovaná, vztahy (9.30) a (9.31) neplatí.

Připomeňme si, že hybnost je vektorová veličina. Má tedy smysl uvažovat o zachování každé z jejích složek odděleně. Daná složka celkové hybnosti soustavy se zachovává za předpokladu, že odpovídající složka výslednice vnějších sil, jimiž na částice soustavy působí její okolí, je nulová. V př. 9.8 byla nulová vodorovná složka výslednice vnějších sil působících na soustavu dělo + koule. Zachovávala se tedy vodorovná složka hybnosti soustavy. Svislá složka výsledné vnější síly ovšem nulová nebyla, neboť na letící kouli působila tíhová síla. Svislá složka hybnosti soustavy byla proměnná.

Vybereme dva vhodné stavy soustavy (počáteční a koncový) a vyjádříme její celkovou hybnost v každém z nich. Přitom bychom si měli stále uvědomovat, v jaké vztažné soustavě pracujeme. Musíme dát pozor, abychom do celkové hybnosti neopomněli zahrnout hybnost některé z částí studované soustavy, nebo naopak do ní omylem nezapočítali hybnost objektů, které do soustavy nepatří. Tak třeba v př. 9.8 jsme se nejprve museli rozhodnout, zda použijeme vztažnou soustavu spojenou se Zemí, nebo s dělem, které se pohybuje vlivem zpětného rázu.

Nakonec výrazy pro $\boldsymbol{P}_i$ a $\boldsymbol{P}_f$ porovnáme a řešením získané rovnice najdeme neznámou veličinu, požadovanou v zadání úlohy.



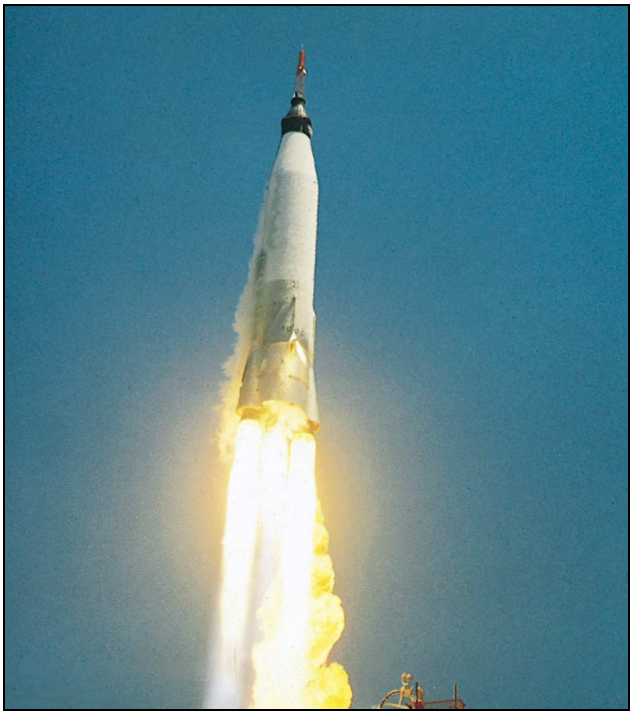
9.7 SOUSTAVY S PROMĚNNOU HMOTNOSTÍ: RAKETA

Prozatím jsme se zabývali soustavami, jejichž celková hmotnost byla konstantní. Tento předpoklad však nebývá vždy splněn. Uvažujme například startující raketu (obr. 9.15). Převážnou část její hmoty před startem tvoří pohonné látky, které se postupně spalují a proudí ven tryskou raketového motoru.

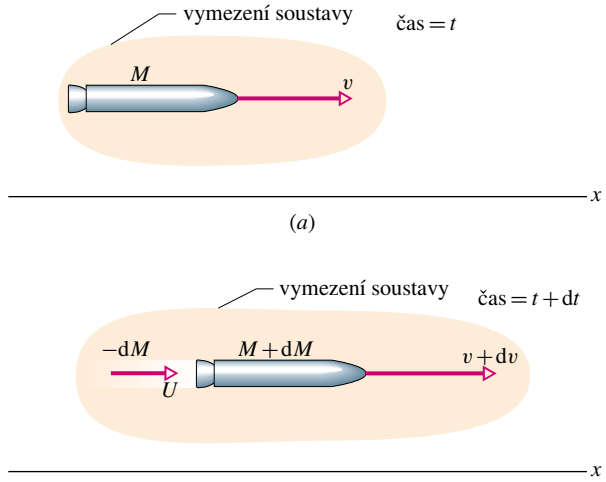
Pro popis pohybu rakety s proměnnou hmotností použijeme větu o hybnosti, nikoli však pro raketu samotnou, nýbrž pro soustavu, do níž kromě rakety zahrneme i zplodiny vzniklé spálením pohonných hmot, které raketu opouštějí. Hmotnost *takto vymezené soustavy* se *nemění*.

Výpočet zrychlení rakety

Sledujme raketu v pozdější fázi jejího pohybu v meziplanetárním prostoru, kde zanedbáme gravitační sílu i odpor prostředí. Přímočarý pohyb rakety budeme popisovat



Obr. 9.15 Start rakety v projektu Mercury



Obr. 9.16 (a) Zrychlený pohyb rakety o hmotnosti M sledujeme v inerciální vztažné soustavě. Obrázek odpovídá okamžiku t. (b) Raketa v okamžiku $t + \mathrm{d}t$. Obrázek znázorňuje i odpad vzniklý spálením pohonných hmot v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ a vypuzený do prostoru.

v inerciální vztažné soustavě a souřadnicovou osu x zvolíme ve směru tohoto pohybu. Označme M hmotnost rakety a v její rychlost (x-ová složka) v libovolném okamžiku t (obr. 9.16a).

Obr. 9.16b zachycuje situaci v pozdějším okamžiku $t + \mathrm{d}t$. Raketa má nyní rychlost $v + \mathrm{d}v$ a její hmotnost je $M + \mathrm{d}M$. Uvědomme si, že změna hmotnosti $\mathrm{d}M$ je *záporná*. Zplodiny vzniklé spálením pohonných látek v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ mají hmotnost $-\mathrm{d}M$ a opouštějí raketu rychlostí U měřenou ve zvolené inerciální vztažné soustavě.

Uvažujme nyní soustavu tvořenou raketou a zplodinami, které ji opustily během časového intervalu $\mathrm{d}t$. Tato soustava je uzavřená a izolovaná. Její hybnost se tedy v intervalu $\mathrm{d}t$ zachovává a platí

$$P_\mathrm{i} = P_\mathrm{f}. \tag{9.41}$$

Indexy (i) a (f) označují celkovou hybnost soustavy na začátku a na konci časového intervalu délky $\mathrm{d}t$. Rov. (9.41) můžeme přepsat do tvaru

$$Mv = -\mathrm{d}M\,U + (M + \mathrm{d}M)(v + \mathrm{d}v), \tag{9.42}$$

kde první člen na pravé straně představuje hybnost zplodin vzniklých v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ a druhý člen značí hybnost rakety na konci tohoto intervalu.

Vztah (9.42) lze ještě zjednodušit zavedením relativní rychlosti u zplodin vzhledem k raketě. Tato rychlost je rozdílem rychlosti $v + \mathrm{d}v$ rakety na konci intervalu $\mathrm{d}t$ a rychlosti zplodin U:

$$u = (v + \mathrm{d}v) - U,$$

tj.

$$U = v + \mathrm{d}v - u. \tag{9.43}$$

Dosazením tohoto výrazu do rov. (9.42) dostáváme po malé úpravě

$$-\mathrm{d}M\,u = M\,\mathrm{d}v. \tag{9.44}$$

Vydělením rov. (9.44) délkou časového intervalu $\mathrm{d}t$ dostaneme:

$$-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}u = M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{9.45}$$

Výraz $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ vyjadřuje rychlost ubývání hmotnosti rakety. Označme jej symbolem $-R$, kde R ($R > 0$) je rychlost spotřeby paliva v kg/s. Nakonec si uvědomme, že výraz $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ v rov. (9.45) představuje zrychlení a rakety a přepíšeme rovnici ve tvaru

$$Ma = Ru \quad \text{(rovnice Měščerského)}. \tag{9.46}$$

Rovnice (9.46) platí v libovolném okamžiku pro okamžité hodnoty hmotnosti M rakety, rychlosti R spotřeby paliva a zrychlení a rakety.

Její levá strana má rozměr síly ($\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}} = \mathrm{N}$) a závisí pouze na vlastnostech raketového motoru (na rychlosti R spotřeby paliva a na rychlosti u zplodin vzhledem k raketě). Výraz Ru na pravé straně rovnice nazveme **tahem** raketového motoru a označíme jej symbolem T. Rov. (9.46) získává při tomto označení formální podobu druhého Newtonova zákona $Ma = T$, kde a je zrychlení rakety a M její hmotnost.

Výpočet rychlosti rakety

Položme si nyní otázku, jak se mění rychlost rakety při spalování pohonných hmot. Odpověď získáme integrací rovnice (9.44) upravené na tvar

$$\mathrm{d}v = -u\,\frac{\mathrm{d}M}{M}.$$

Dostaneme

$$\int_{v_\mathrm{i}}^{v_\mathrm{f}} \mathrm{d}v = -u \int_{M_\mathrm{i}}^{M_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}M}{M}.$$

M_i a M_f představují počáteční a výslednou hmotnost rakety. Výpočtem integrálů dostaneme vztah

$$v_\mathrm{f} - v_\mathrm{i} = u \ln \frac{M_\mathrm{i}}{M_\mathrm{f}} \qquad \text{(vzorec Ciolkovského)}, \qquad (9.47)$$

který vyjadřuje změnu rychlosti rakety při změně její hmotnosti z hodnoty M_i na hodnotu M_f.* Dokumentuje rovněž výhodnost konstrukce vícestupňových raket, jejichž hmotnost M_f klesá nejen spalováním pohonných hmot, ale i uvolněním vyhořelých stupňů. Ideální raketu by v cíli jejího letu měl tvořit pouze užitečný náklad.

PŘÍKLAD 9.12

Raketa, jejíž počáteční hmotnost M_i je 850 kg, spotřebovává palivo rychlostí $R = 2{,}3\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$. Zplodiny opouštějí raketu relativní rychlostí $u = 2\,800\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

(a) Jaký je tah motoru?

ŘEŠENÍ: Tah motoru je

$$T = Ru = (2{,}3\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}})(2\,800\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = \\ = 6\,440\,\mathrm{N} \doteq 6\,400\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaké je počáteční zrychlení rakety?

ŘEŠENÍ: Z pohybové rovnice rakety dostáváme

$$a = \frac{T}{M_\mathrm{i}} = \frac{(6\,440\,\mathrm{N})}{(850\,\mathrm{kg})} = 7{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při startu rakety z povrchu Země musí být tah T motoru větší než tíhová síla, kterou na raketu působí Země. Ta má v našem případě velikost $M_\mathrm{i}g = (850\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 8\,300\,\mathrm{N}$. Tah motoru je však pouhých $T = 6\,400\,\mathrm{N}$, takže naše raketa nemůže odstartovat. Může však být do meziplanetárního prostoru vynesena nějakou silnější raketou.

(c) Předpokládejme, že naše raketa startuje z vesmírné lodi, která se již nachází v meziplanetárním prostoru. Gravitační síly tedy můžeme zanedbat. Po vyčerpání paliva má raketa hmotnost $M_\mathrm{f} = 180\,\mathrm{kg}$. Jaká je její rychlost vzhledem k lodi v tomto okamžiku? Předpokládejme, že hmotnost vesmírné lodi je tak velká, že start rakety její pohyb neovlivní.

ŘEŠENÍ: Počáteční rychlost rakety vzhledem k vesmírné lodi je $v_\mathrm{i} = 0$. Z rov. (9.47) dostaneme

$$v_\mathrm{f} = u \ln \frac{M_\mathrm{i}}{M_\mathrm{f}} = \\ = (2\,800\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \ln \frac{(850\,\mathrm{kg})}{(180\,\mathrm{kg})} = \\ = (2\,800\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \ln 4{,}72 \doteq 4\,300\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněme si, že výsledná rychlost rakety může převýšit relativní rychlost zplodin u vzhledem k raketě.

* Symbol „ln“ v rovnici (9.47) značí přirozený logaritmus, tj. logaritmus o základu e (= 2,718 …).

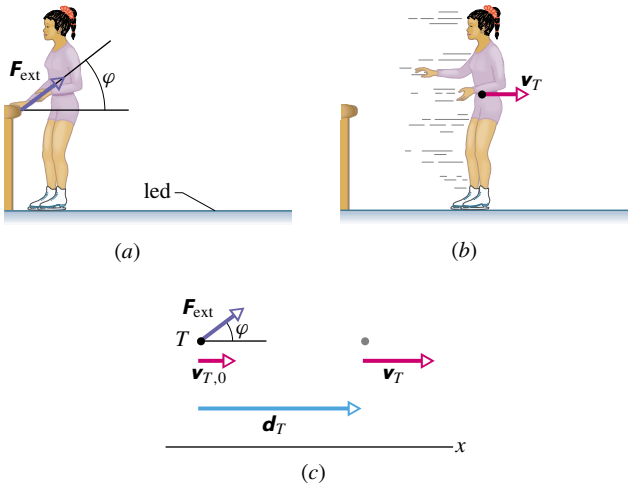
9.8 VNĚJŠÍ SÍLY A ZMĚNY VNITŘNÍ ENERGIE

Krasobruslařka na obr. 9.17a se odráží od mantinelu. Ten na ni působí silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$, svírající s vodorovnou rovinou úhel φ. Bruslařka, která byla zpočátku v klidu, získá vlivem této síly určitou rychlost, s níž se pak vzdaluje od mantinelu (obr. 9.17b). Působením síly se tedy zvýšila kinetická energie bruslařky.

Případ bruslařky se liší od předchozích příkladů, kdy docházelo ke změně kinetické energie tělesa vlivem působení vnějších sil, ve dvou podstatných rysech:

1. V předchozích příkladech byla rychlost všech částí tělesa stejná (těleso jsme mohli při studiu jeho pohybu považovat za bodový objekt). V případě bruslařky již tomu tak není. Například pohyb jejích paží se liší od pohybu jejího trupu.

2. V předchozích příkladech se kinetická energie tělesa měnila vlivem působení vnějších sil na úkor energie okolí. V případě bruslařky dochází ke změně její kinetické energie na úkor energie vnitřní (biochemické). Vnější síla v tomto případě nekoná práci, neboť vektor posunutí jejího působiště je po celou dobu jejího působení nulový (síla působí na ruku bruslařky v pevném bodě mantinelu). Práci konají síly napínající svalstvo, tj. *vnitřní síly soustavy*.



Obr. 9.17 (a) Bruslařka se odráží od mantinelu, který na ni působí silou $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$. (b) Její těžiště má v okamžiku ztráty kontaktu s mantinelem rychlost $\boldsymbol{v}_T$. (c) Vnější síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na bruslařku při odrazu od mantinelu je zakreslena jako síla působící na její těžiště. Při posunutí těžiště o vektor $\boldsymbol{d}_T$ se jeho rychlost změní z $\boldsymbol{v}_{T,0}$ na $\boldsymbol{v}_T$. Tato změna je určena vodorovnou složkou síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$.

Zdá se, že tyto rozdíly, odlišující popsaný případ bruslařky od všech ostatních příkladů změny kinetické energie těles, kterými jsme se prozatím zabývali, jsou naprosto zásadní. Přesto však je možné *formálně* vyjádřit změnu kinetické energie bruslařky jako práci síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na částici, jejímž pohybem lze nahradit pohyb bruslařky jako *celku*, tj. její **posuvný** neboli **translační** pohyb. Touto „náhradní“ částicí je těžiště bruslařky. Situaci ukazuje obr. 9.17c. Předpokládejme, že těžiště bruslařky se pohybuje vodorovně. Svislá složka výslednice sil působících na bruslařku, daná tíhovou silou $M\boldsymbol{g}$, tlakovou silou ledové plochy $\boldsymbol{N}$ a svislým průmětem síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, je tedy nulová. Vodorovná složka $F_{\text{ext}}\cos\varphi$ síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ určuje vodorovné zrychlení $\boldsymbol{a}_T$ těžiště. Za dobu, po kterou tato síla působí, se rychlost těžiště změní z počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_{T,0}$ na výslednou rychlost $\boldsymbol{v}_T$. Odpovídající posunutí těžiště bruslařky označme $\boldsymbol{d}_T$. Podle rov. (2.16) je velikost výsledné rychlosti těžiště dána vztahem

$$v_T^2 = v_{T,0}^2 + 2a_{T,x}d_T. \tag{9.48}$$

Po vynásobení této rovnice hmotností M a malé úpravě dostaneme

$$\tfrac{1}{2}Mv_T^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{T,0}^2 = Ma_{T,x}d_T. \tag{9.49}$$

Levá strana rov. (9.49) představuje změnu kinetické energie $\Delta E_{\text{k},T}$ těžiště bruslařky z počáteční hodnoty $(E_{\text{k},T})_{\text{i}}$ na výslednou hodnotu $(E_{\text{k},T})_{\text{f}}$. Vzhledem k platnosti věty o hybnosti (druhého Newtonova zákona pro těžiště) můžeme nahradit součin $Ma_{T,x}$ vodorovnou složkou vnější síly $F_{\text{ext}}\cos\varphi$:

$$\Delta E_{\text{k},T} = F_{\text{ext}}d_T\cos\varphi. \tag{9.50}$$

Tento *formální* výsledek lze interpretovat obvyklým způsobem: Kinetická energie příslušná posuvnému pohybu soustavy se mění na úkor práce, kterou koná výslednice vnějších sil umístěná v jejím těžišti.

Zdůrazněme ještě jednou důležitý aspekt problému bruslařky: Vnější síla, která na ni působí při odrazu od mantinelu, ve skutečnosti *nekoná práci*, neboť její skutečné působiště je v klidu. Změna kinetické energie $\Delta E_{\text{k},T}$ musí tedy být doprovázena změnou vnitřní energie ΔE_{int} soustavy. (Předpokládáme, že vnitřní energie bruslařky se změnila jen o biochemickou energii jejích svalů.) V souladu s obecnou formulací zákona zachování energie v kap. 8 platí

$$\Delta E_{\text{k},T} + \Delta E_{\text{int}} = 0,$$

tj.

$$\Delta E_{\text{int}} = -\Delta E_{\text{k},T}. \tag{9.51}$$

Dosazením z rov. (9.50) do (9.51) dostaneme změnu vnitřní energie bruslařky:

$$\Delta E_{\text{int}} = -F_{\text{ext}}d_T\cos\varphi. \tag{9.52}$$

Ze vztahů (9.51) a (9.52) je tedy nakonec zřejmé, že kinetická energie bruslařky se mění na úkor její energie vnitřní. Formálně lze tuto změnu vyjádřit výrazem $F_{\text{ext}}d_T\cos\varphi$.

Představme si nyní ještě obecnější situaci, při níž se bude těžiště bruslařky pohybovat i ve svislém směru. Bude se při tom měnit i tíhová potenciální energie *izolované* soustavy bruslařka + Země. Označíme-li změnu tíhové potenciální energie jako $\Delta E_{\text{p},T}$, můžeme psát zákon zachování energie ve tvaru

$$\Delta E_{\text{k},T} + \Delta E_{\text{p},T} + \Delta E_{\text{int}} = 0. \tag{9.53}$$

Změna vnitřní energie soustavy je dána prací sil napínajících svalstvo bruslařky. Tu můžeme opět formálně zapsat jako práci výslednice vnějších sil působících na bruslařku, umístěné však do jejího těžiště: zvolme soustavu souřadnic tak, aby osa x měla směr vodorovného posunutí těžiště bruslařky, osa y nechť je svislá. Zrychlení těžiště označme $\boldsymbol{a}_T$ a vektor jeho posunutí $\boldsymbol{d}_T$. Stejným postupem, jakým jsme odvodili vztah (9.49), získáme změnu kinetické energie bruslařky ve tvaru

$$\tfrac{1}{2}Mv_T^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{T,0}^2 = Ma_{T,x}d_{T,x} + Ma_{T,y}d_{T,y}.$$

Podle věty o hybnosti je zrychlení těžiště bruslařky určeno výslednicí všech vnějších sil, které na ni působí, tj. tíhové síly, tlakové síly ledové plochy a tlakové síly mantinelu:

$$M\boldsymbol{a}_T = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{\text{ext}}.$$

Této vektorové rovnici odpovídají dvě skalární rovnice pro její složky:

$$Ma_{T,x} = F_{\text{ext}}\cos\varphi, \quad Ma_{T,y} = -Mg + N + F_{\text{ext}}\sin\varphi.$$

Pro změnu kinetické energie bruslařky tedy dostáváme

$$\tfrac{1}{2}Mv_T^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{T,0}^2 = F_{\text{ext}}\cos\varphi\, d_{T,x} + \\ + (-Mg + N + F_{\text{ext}}\sin\varphi)d_{T,y}.$$

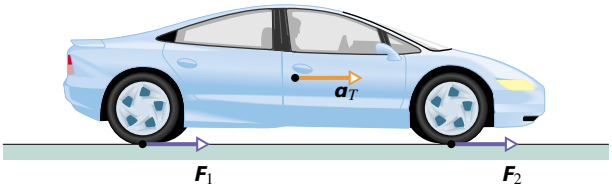
Výraz $-Mgd_{T,y}$ představuje práci tíhové síly, tj. záporně vzatou změnu tíhové potenciální energie soustavy bruslařka + Země. Porovnáme-li předchozí vztah s rov. (9.53), můžeme psát

$$\Delta E_{\text{k},T} + \Delta E_{\text{p},T} - \\ -F_{\text{ext}}\cos\varphi\, d_{T,x} - (N + F_{\text{ext}}\sin\varphi)d_{T,y} = 0,$$

tj.

$$\Delta E = \Delta E_{\text{k},T} + \Delta E_{\text{p},T} = (\boldsymbol{F}_{\text{ext}} + \boldsymbol{N})\cdot\boldsymbol{d}_T. \quad (9.54)$$

ΔE značí změnu mechanické energie soustavy bruslařka + + Země, která se podle rov. (9.54) mění na úkor její vnitřní energie. Formálně lze tuto změnu vyjádřit výrazem $(\boldsymbol{F}_{\text{ext}}+\boldsymbol{N})\cdot\boldsymbol{d}_T$. (Uvědomme si, že síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, jíž působí mantinel na ruku bruslařky, se stala vnitřní silou působící v nově zvolené izolované soustavě bruslařka+Země. Odpovídající reakcí je síla $-\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, jíž působí bruslařka na mantinel. Vnitřními silami nové soustavy jsou i tíhové síly $M\boldsymbol{g}$ a $-M\boldsymbol{g}$, vyjadřující gravitační interakci bruslařky se Zemí, a tlakové síly $\boldsymbol{N}$ a $-\boldsymbol{N}$, popisující vzájemné působení bruslařky a ledové plochy.)



Obr. 9.18 Automobil, který je zpočátku v klidu, se rozjíždí směrem vpravo. Silnice působí na povrch pneumatik třecími silami, z nichž dvě $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ jsou v obrázku vyznačeny. Součet těchto sil určuje výslednou vnější sílu $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na vozidlo.

Není-li vnější síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ konstantní, nahradíme ji ve vztazích (9.52) a (9.54) odpovídající průměrnou veličinou $\overline{\boldsymbol{F}}_{\text{ext}}$.

Věnujme bruslařce ještě poslední úvahu a zkusme si uvědomit, jakým způsobem dochází ke vzniku silového působení mantinelu na její ruku. Bruslařka položí pokrčenou paži na mantinel a začne se od něj „odtlačovat“ napínáním svalů. Svou vůlí tedy řídí vzájemné působení částí soustavy, ovlivňuje *vnitřní* síly. Ruka tlačí na mantinel určitou silou. Podle třetího Newtonova zákona působí naopak mantinel na ruku bruslařky silou opačnou. Tato síla, kterou jsme označili symbolem $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, je ovšem z hlediska bruslařky silou *vnější*.

Vztahy (9.52) a (9.54) platí i pro jiné objekty, u nichž dochází, podobně jako u bruslařky, k vyvolání vnějších sil, či jejich změn prostřednictvím změn sil vnitřních. Pokud tyto vnější síly nekonají práci (například proto, že jejich působiště je v klidu), mění se mechanická energie takových soustav pouze na úkor vnitřní energie.

Uvažujme například rozjíždějící se automobil. Motor pohání kola, jejichž pneumatiky působí na vozovku třecími silami směřujícími proti zrychlení automobilu. Podle třetího Newtonova zákona působí vozovka na povrch pneumatik rovněž třecími silami $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$, avšak ve směru zrychlení (obr. 9.18). Tyto třecí síly tvoří výslednou vnější sílu $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na vozidlo (tíhová a normálová síla jsou kompenzovány) a udílí jeho těžišti zrychlení $\boldsymbol{a}_T$. Vnitřní energie automobilu (uvolněná spalováním paliva v motoru) klesá ve prospěch jeho energie kinetické. Je-li síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ konstantní, lze při daném posunutí $\boldsymbol{d}_T$ těžiště vozidla snadno vyjádřit změnu $\Delta E_{\text{k},T}$ kinetické energie pomocí rov. (9.54), položíme-li $\Delta E_{\text{p},T} = 0$ a uvážíme-li, že výsledná vnější síla svírá s vektorem posunutí těžiště úhel $\varphi = 0°$.

Vztah (9.54) platí i v situaci, kdy rozjetý automobil brzdí. Výsledná vnější síla je nyní orientována proti směru pohybu a svírá tedy s vektorem posunutí těžiště úhel $\varphi = = 180°$. Kinetická energie těžiště vozidla klesá ve prospěch vnitřní energie (zahřívá se brzdové obložení).

PŘÍKLAD 9.13

Převrátí-li se brouk kovařík náhodou na záda, pomůže si obvykle tak, že prudce vyklene záda a vyskočí vzhůru. Při tom se energie uložená ve svalech „přemění“ v kinetickou energii. Tento pohyb je doprovázen slyšitelným cvaknutím, s kterým souvisí anglický název brouka („clik beetle“). Videozáznam výskoku brouka ukázal, že se jeho těžiště během vyklenutí zad těsně před výskokem zvedlo o $d_T = 0{,}77\,\text{mm}$ a při výskoku dosáhlo výšky $h = 0{,}30\,\text{m}$. Hmotnost brouka je $m = 4{,}0\cdot10^{-6}\,\text{kg}$. Určete velikost průměrné síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, kterou při výskoku působila podložka na záda brouka.

ŘEŠENÍ: Soustava brouk + Země je izolovaná. Její celková

energie se tedy zachovává. Aplikujme tento zákon zachování na časový interval T měřený od počátku výskoku do okamžiku, kdy těžiště brouka dosáhlo maximální výšky h. Během doby T dojde k následujícím změnám jednotlivých druhů energie: (1) Změna kinetické energie $\Delta E_{k,T}$ je nulová, protože na počátku i na konci uvažovaného časového intervalu je brouk v klidu. (2) Změna $\Delta E_{p,T}$ tíhové potenciální energie soustavy brouk + Země je rovna mgh. (3) Změna vnitřní energie ΔE_{int} svalstva brouka, která během „přípravy k výskoku“ vyvolá vnější sílu $\boldsymbol{F}_{ext}$.

Vztah vyjadřující skutečnost, že se energie soustavy brouk + Země v průběhu časového intervalu T zachovává, má tvar

$$\Delta E_{k,T} + \Delta E_{p,T} + \Delta E_{int} = 0.$$

Dosazením za $\Delta E_{k,T}$ a $\Delta E_{p,T}$ dostaneme

$$0 + mgh + \Delta E_{int} = 0,$$

tj.

$$\Delta E_{int} = -mgh. \tag{9.55}$$

Dosadíme z rov. (9.52) do (9.55):

$$\overline{F}_{ext} d_T \cos\varphi = mgh,$$

odkud

$$\overline{F}_{ext} = \frac{mgh}{d_T \cos\varphi}. \tag{9.56}$$

Úhel φ mezi silou $\boldsymbol{F}_{ext}$ směřující vzhůru a posunutím $\boldsymbol{d}_T$ je 0°. Pro zadané hodnoty nakonec dostaneme

$$\overline{F}_{ext} = \frac{(4{,}0\cdot10^{-6}\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(0{,}30\,\mathrm{m})}{(7{,}7\cdot10^{-4}\,\mathrm{m})\cos 0^\circ} = $$
$$= 1{,}5\cdot10^{-2}\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato síla je malá pouze zdánlivě. Velikost zrychlení, které uděluje tělu brouka při výskoku, dosahuje totiž hodnoty zhruba $380g$.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Těžiště

Těžiště soustavy částic je bod o souřadnicích

$$x_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i,\ y_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i,\ z_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i, \tag{9.5}$$

tj.

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i, \tag{9.8}$$

kde M je celková hmotnost soustavy. Je-li hmota soustavy rozložena spojitě, je poloha těžiště dána vztahy

$$x_T = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m,\ y_T = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m,\ z_T = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m. \tag{9.9}$$

Je-li hustota tělesa (hmotnost jednotkového objemu) konstantní, lze rov. (9.9) přepsat ve tvaru

$$x_T = \frac{1}{V}\int x\,\mathrm{d}V,\ y_T = \frac{1}{V}\int y\,\mathrm{d}V,\ z_T = \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}V, \tag{9.11}$$

kde V je objem tělesa o hmotnosti M.

Věta o hybnosti pro soustavu částic

Pohyb těžiště libovolné soustavy částic se řídí **větou o hybnosti**:

$$M\boldsymbol{a}_T = \sum \boldsymbol{F}_{ext}. \tag{9.16}$$

Symbolem $\sum \boldsymbol{F}_{ext}$ jsme označili výslednici *vnějších* sil působících na soustavu, M je celková hmotnost soustavy a $\boldsymbol{a}_T$ zrychlení jejího těžiště.

Hybnost a věta o hybnosti

Hybnost jedné částice $\boldsymbol{p}$ je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \tag{9.22}$$

Druhý Newtonův zákon pak můžeme pomocí hybnosti přepsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}. \tag{9.23}$$

Pro soustavu částic mají předchozí vztahy tvar

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T \tag{9.26}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_{ext}. \tag{9.28}$$

Relativistická hybnost

Relativistická definice hybnosti má tvar

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{9.24}$$

Tuto definici, jejíž platnost je obecná, je třeba použít pro částice pohybující se rychlostmi blízkými rychlosti světla c. Pro $v \ll c$ přejde rov. (9.24) v (9.22).

Zákon zachování hybnosti

Je-li soustava izolovaná, tj. nepůsobí-li na ni žádné *vnější* síly, je její hybnost $\boldsymbol{P}$ trvale konstantní:

$$\boldsymbol{P} = \text{konst}, \tag{9.30}$$

tj.

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f}. \tag{9.31}$$

Indexy (i) a (f) označují hybnost soustavy $\boldsymbol{P}$ v počátečním a koncovém okamžiku časového intervalu, v němž soustavu sledujeme. Vztahy (9.30) a (9.31) představují ekvivalentní formulace **zákona zachování hybnosti**.

Soustavy s proměnnou hmotností

Při popisu pohybu soustavy s proměnnou hmotností postupujeme obvykle tak, že zkoumanou soustavu považujeme za součást rozšířené soustavy, vymezené tak, aby byla uzavřená (tj. *měla konstantní hmotnost*) a izolovaná. Pro ni pak použijeme zákon zachování hybnosti. V případě rakety bude rozšířená soustava obsahovat jak raketu, tak i zplodiny vzniklé spalováním pohonných hmot, které raketu opouštějí. Je-li takto zvolená rozšířená soustava izolovaná, lze ukázat, že se okamžité zrychlení rakety řídí rovnicí Meščerského

$$Ma = Ru, \tag{9.46}$$

kde M je okamžitá hmotnost rakety (včetně zbytku pohonných hmot), R je rychlost spotřeby paliva (v kg/s) a u představuje rychlost uvolňovaných zplodin vzhledem k raketě. Člen Ru se nazývá **tah** raketového **motoru**. Předpokládejme, že rychlost rakety (složka ve směru pohybu) se změnila z v_i na v_f při odpovídající změně její hmotnosti z hodnoty M_i na hodnotu M_f. V případě raketového motoru s konstantní rychlostí spotřeby paliva R a konstantní rychlostí u platí vzorec Ciolkovského

$$v_\mathrm{f} - v_\mathrm{i} = u \ln \frac{M_\mathrm{i}}{M_\mathrm{f}}. \tag{9.47}$$

Vnější síly a změny vnitřní energie

Vnější síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$ působící na těleso může být vyvolána působením vnitřních sil, které konají práci a způsobují odpovídající změnu vnitřní energie tělesa ΔE_int:

$$\Delta E_\mathrm{int} = -\boldsymbol{F}_\mathrm{ext} \cdot \boldsymbol{d}_T = -F_\mathrm{ext} d_T \cos\varphi. \tag{9.52}$$

Symbolem $\boldsymbol{d}_T$ jsme označili posunutí těžiště tělesa, φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{d}_T$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$. Mění-li se na úkor vnitřní energie pouze kinetická energie tělesa, platí

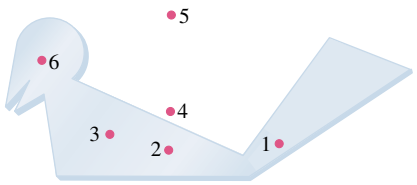
$$\Delta E_{\mathrm{k},T} = F_\mathrm{ext} d_T \cos\varphi. \tag{9.50}$$

Dochází-li i ke změnám potenciální energie tělesa, je změna mechanické energie dána vztahem

$$\Delta E = \Delta E_{\mathrm{k},T} + \Delta E_{\mathrm{p},T} = (\boldsymbol{F}_\mathrm{ext} + \boldsymbol{N}) \cdot \boldsymbol{d}_T. \tag{9.54}$$

OTÁZKY

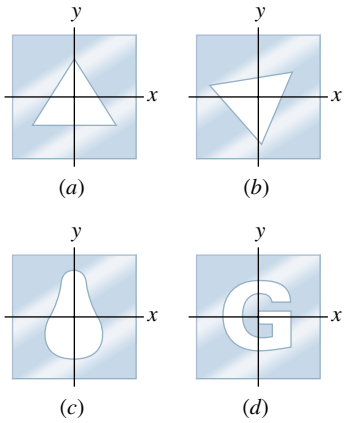
1. Chlapec vyrobil z kusu kovového plechu konstantní tloušťky c ptáka (obr. 9.19). Který z očíslovaných bodů je s největší pravděpodobností těžištěm modelu?



Obr. 9.19 Otázka 1

2. Na obr. 9.20 jsou zakresleny čtyři čtvercové kovové desky s vyříznutými otvory různých tvarů. Počátek soustavy souřadnic v rovině xy splývá ve všech případech se středem čtvercové desky, tj. s jejím těžištěm před vyříznutím otvoru. Odhadněte polohu těžiště každé desky s otvorem (je-li to možné, rozhodněte, v kterém leží kvadrantu, případně na které ose, nebo dokonce ve kterém bodě).

3. Na obr. 9.21 je zachycen tučňák stojící na levém konci homogenních sáněk délky L, které leží na dokonale hladkém ledovém povrchu. Hmotnosti obou těles jsou shodné. (a) Určete polohu těžiště sáněk. (b) Určete polohu těžiště sáněk (vzdálenost a směr) vzhledem k těžišti soustavy tučňák + sáňky. Tučňák přechází k pravému konci sáněk. Sáňky přitom kloužou po ledě. (c) Jak se pohybuje těžiště soustavy tučňák + sáňky? Doleva, doprava, nebo zůstává v klidu? (d) Určete polohu těžiště sáněk (vzdálenost a směr) vzhledem k těžišti soustavy tučňák + sáňky poté, co tučňák přešel k pravému konci sáněk. (e) Jakou dráhu tučňák urazil vzhledem k sáňkám? (f) Jakou dráhu urazilo těžiště sáněk vzhledem k těžišti soustavy tučňák + sáňky? (g) Jakou dráhu urazil vzhledem k němu tučňák? (Přípravná otázka k úloze 23.)



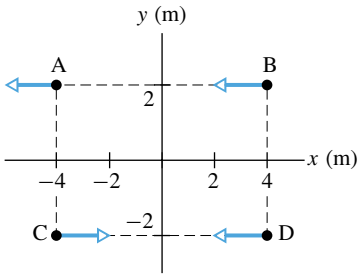
Obr. 9.20 Otázka 2



Obr. 9.21 Otázky 3 a 4

4. Předpokládejme, že se tučňák i sáňky z otázky 3 na obr. 9.21 zpočátku pohybují vpravo rychlostí v_0. (a) Rozhodněte, zda je rychlost v, kterou se pohybují sáňky vzhledem k ledu během přesunu tučňáka k jejich pravému konci, větší, menší, nebo stejná jako v_0. (b) Zodpovězte tutéž otázku, přechází-li tučňák zpět k levému konci sáněk.

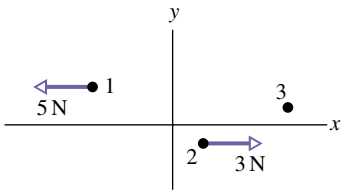
5. Na obr. 9.22 jsou zakresleny čtyři částice stejné hmotnosti, které se pohybují po dokonale hladké vodorovné rovině stálými rychlostmi (pohled shora). Směry rychlostí jsou v obrázku vyznačeny, velikosti jsou shodné. Která dvojice částic tvoří soustavu, jejíž těžiště (a) je v klidu, (b) je v klidu v počátku soustavy souřadnic, (c) projde při svém pohybu počátkem soustavy souřadnic?



Obr. 9.22 Otázka 5

6. (a) Představme si poněkud absurdní situaci: dva melouny jsme současně upustili z mostu. Jaké je zrychlení těžiště této dvoučásticové soustavy? (b) Jaké bude zrychlení těžiště soustavy dvou padajících melounů, upustíme-li jeden z nich o něco později?

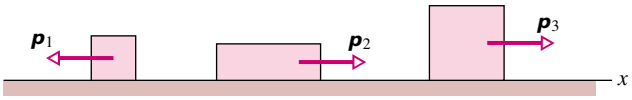
7. Obr. 9.23 představuje pohled shora na soustavu tří částic, na něž působí vnější síly. Směry a velikosti sil působících na dvě z těchto částic jsou v obrázku vyznačeny. Jaká je velikost a směr síly působící na třetí částici, jestliže (a) je těžiště soustavy v klidu, (b) pohybuje se konstantní rychlostí vpravo, (c) urychluje se směrem vpravo?



Obr. 9.23 Otázka 7

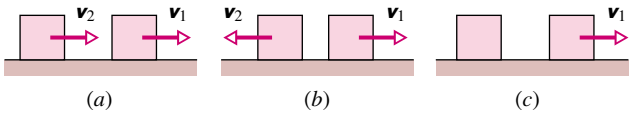
8. Těleso, které se pohybuje podél osy x po dokonale hladké vodorovné podložce, se náhle rozpadne na tři části. Každá z nich se dále pohybuje podél osy x ve směru vyznačeném v obr. 9.24. Následující tabulka obsahuje čtyři soubory hodnot velikostí hybností $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ a $\boldsymbol{p}_3$ jednotlivých částí tělesa v jednotkách kg·m·s^{-1}. Seřaďte tyto soubory sestupně podle velikosti počáteční rychlosti tělesa.

	p_1	p_2	p_3
(a)	10	2	6
(b)	10	6	2
(c)	2	10	6
(d)	6	2	10



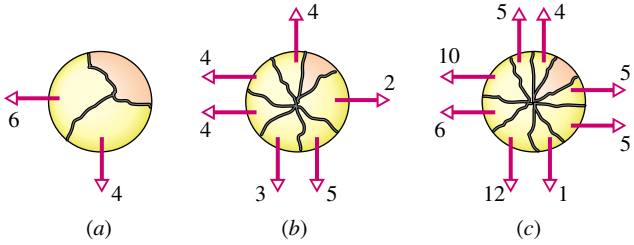
Obr. 9.24 Otázka 8

9. Podobně jako v př. 9.7 uvažujme těleso, které se pohybuje konstantní rychlostí ve směru kladné osy x a náhle se rozpadne na dvě části. Jedna z nich, o hmotnosti m_1, pokračuje v pohybu ve směru kladné osy x. Její rychlost je $\boldsymbol{v}_1$. Druhá část tělesa má hmotnost m_2 a pohybuje se rychlostí $\boldsymbol{v}_2$ (a) podél kladné osy x (obr. 9.25a), (b) podél záporné osy x (obr. 9.25b), (c) je v klidu (obr. 9.25c). Seřaďte tyto tři situace sestupně podle velikosti rychlosti $\boldsymbol{v}_1$.



Obr. 9.25 Otázka 9

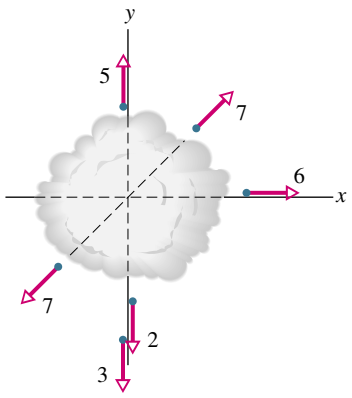
10. Obr. 9.26 ukazuje pohled shora na těleso, které se při výbuchu rozbušky rozpadlo (a) na tři části (obrázek (a)), (b) sedm částí, (c) devět částí. Díly tělesa se po výbuchu pohybovaly po dokonale hladké vodorovné podlaze. Pro každou situaci jsou v obr. 9.26 vyznačeny vektory hybnosti všech částí tělesa s výjimkou jedné, jejíž hybnost označíme $\boldsymbol{P}'$. Čísla uvedená u jednotlivých vektorů udávají jejich velikosti v jednotkách kg·m·s^{-1}. Seřaďte situace na obrázcích sestupně podle velikosti (a) složky P'_x, (b) složky P'_y a (c) vektoru $\boldsymbol{P}'$.



Obr. 9.26 Otázka 10

11. Obr. 9.27 znázorňuje pohled shora na šest částic, které vznikly „dvojrozměrným“ výbuchem tělesa. Před výbuchem spočívalo těleso v klidu na dokonale hladké vodorovné podložce. Směry hybností částic jsou na obrázku vyznačeny vektory, čísla

znamenají jejich velikosti v jednotkách kg·m·s^{-1}. (a) Vzniklo při explozi více částic, než je znázorněno? (b) Jestliže ano, najděte jejich výslednou hybnost a (c) směr jejich pohybu.



Obr. 9.27 Otázka 11

12. V tabulce jsou uvedeny hmotnosti a vzdálenosti pro tři různé dvojice částic:

	m_1	m_2	POČÁTEČNÍ VZDÁLENOST d
dvojice 1	$2m$	$8m$	1,0 m
dvojice 2	$3m$	$6m$	2,0 m
dvojice 3	$4m$	$9m$	0,5 m

Částice ve dvojicích na sebe působí přitažlivými silami. Zpočátku jsou obě částice každé dvojice udržovány vnějšími silami v klidu ve vzdálenosti d a v určité chvíli jsou uvolněny. V okamžiku, kdy jejich vzdálenost klesne na hodnotu $d/2$, má částice o hmotnosti m_1 rychlost v_1 a částice o hmotnosti m_2 rychlost v_2. Bez písemných výpočtů seřaďte dvojice částic sestupně podle hodnoty poměru v_1/v_2. (*Tip*: Př. 9.10.)

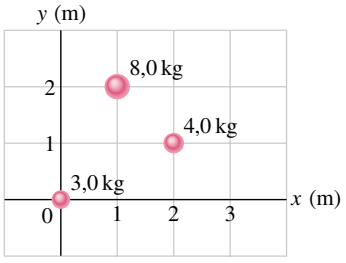
CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 9.2 Těžiště

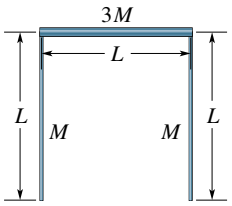
1C. (a) Jaká je vzdálenost těžiště soustavy Země + Měsíc od středu Země? (V dod. C jsou uvedeny hmotnosti Země a Měsíce i jejich vzdálenost). (b) Vyjádřete výsledek získaný v části (a) v jednotkách poloměru Země.

2C. Vzdálenost středů atomů uhlíku (C) a kyslíku (O) v molekule oxidu uhelnatého (CO) je $1{,}131\cdot10^{-10}$ m. Najděte polohu těžiště molekuly CO vzhledem ke středu atomu uhlíku. (Hmotnosti atomů C a O jsou uvedeny v dod. D.)

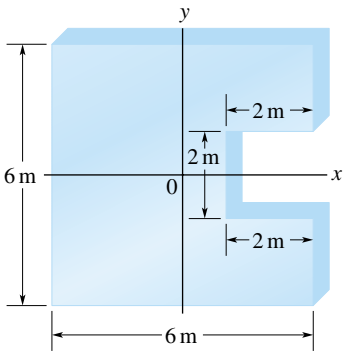
3C. (a) Určete souřadnice těžiště soustavy tří částic na obr. 9.28. (b) Co se bude dít s těžištěm, bude-li se hmotnost nejvýše položené částice postupně zvětšovat?



Obr. 9.28 Cvičení 3



Obr. 9.29 Cvičení 4



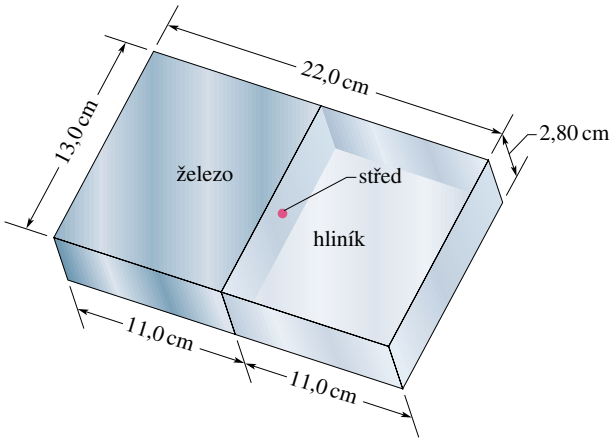
Obr. 9.30 Cvičení 5

4C. Tři tenké tyče o stejné délce L vytvořily těleso ve tvaru obráceného U (obr. 9.29). Dvě boční tyče mají hmotnost M, hmotnost třetí tyče je $3M$. Určete polohu těžiště tělesa.

5C. V homogenní čtvercové desce o straně 6 m byl vyříznut čtvercový otvor o straně 2 m podle obr. 9.30. Střed otvoru má souřadnice $x = 2$ m a $y = 0$. Určete polohu těžiště zbytku desky. Těžiště původní desky leželo v počátku soustavy souřadnic.

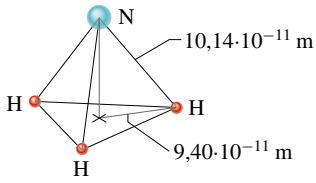
6Ú. Dokažte, že poměr vzdáleností částic dvoučásticové soustavy od jejího těžiště je roven převrácenému poměru hmotností částic.

7Ú. Na obr. 9.31 jsou uvedeny rozměry desky složené ze dvou částí. Polovina desky je vyrobena z hliníku s hustotou 2,70 g/cm^3 a polovina je ze železa o hustotě 7,85 g/cm^3. Najděte polohu těžiště desky.



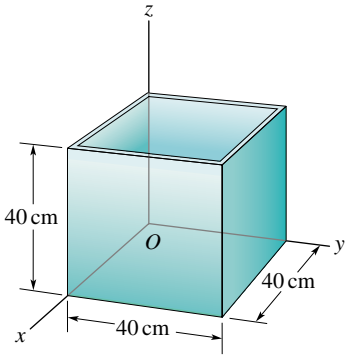
Obr. 9.31 Úloha 7

8Ú. Tři atomy vodíku (H) v molekule čpavku NH_3 (obr. 9.32) tvoří rovnostranný trojúhelník. Jeho těžiště leží ve vzdálenosti $9{,}40{\cdot}10^{-11}$ m od každého atomu vodíku. Atom dusíku (N) je vrcholem čtyřstěnu o podstavě tvořené atomy vodíku. Vzdálenost N-H je $10{,}14{\cdot}10^{-11}$ m, hmotnosti atomů N a H jsou v poměru 13,9 : 1,0. Určete polohu těžiště molekuly vůči atomu dusíku.



Obr. 9.32 Úloha 8

9Ú. Krychlová krabice bez horní stěny má délku hrany 40 cm. Je vyrobena z homogenního kovového plechu zanedbatelné tloušťky (obr. 9.33). Určete souřadnice jejího těžiště.

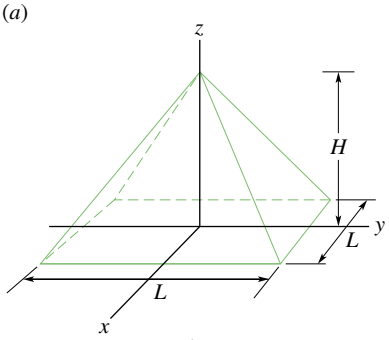


Obr. 9.33 Úloha 9

10Ú. Velká (Cheopsova) pyramida v egyptské Gíze (obr. 9.34a) měla kdysi výšku $H = 147$ m. Později z jejího vrcholu vypadl vrcholový kámen. Základnou pyramidy je čtverec o straně $L = 230$ m (obr. 9.34b), její objem je $L^2H/3$. Předpokládejme, že pyramida je homogenní těleso o hustotě $\varrho = 1{,}8{\cdot}10^3$ kg·m^{-3}. Určete (a) původní výšku těžiště pyramidy nad základnou, (b) práci potřebnou k vyzdvižení vypadlého kvádru z úrovně základny na původní místo.



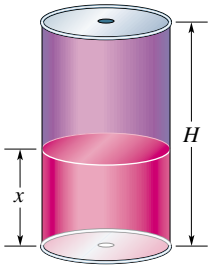
(*a*)



(*b*)

Obr. 9.34 Úloha 10

11Ú⋆. Válcová plechovka o hmotnosti M a výšce H je vyrobena z homogenního materiálu a naplněna limonádou o hmotnosti m (obr. 9.35). Do dna a horní podstavy plechovky vyvrtáme malé otvory, aby nápoj mohl vytékat. Okamžitou výšku těžiště plechovky nad jejím dnem označíme h. Určete hodnotu h (a) pro plnou plechovku a (b) v okamžiku, kdy již všechen nápoj vytekl. (c) Jak se mění hodnota h během vytékání nápoje? (d) Okamžitou výšku zbývajícího sloupce kapaliny v plechovce označme x. Vyjádřete hodnotu x pomocí M, H a m v okamžiku, kdy je těžiště plechovky se zbytkem nápoje v nejnižší možné poloze.



Obr. 9.35 Úloha 11

ODST. 9.3 Věta o hybnosti

12C. Dva bruslaři o hmotnostech 65 kg a 40 kg drží tyč o délce 10 m těsně u jejích konců. Tyč má zanedbatelnou hmotnost.

Bruslaři k sobě ručkují až do okamžiku setkání. Jak daleko se podél tyče posune bruslař o hmotnosti 40 kg?

13C. Dva automobily o hmotnostech 2 400 kg a 1 600 kg jedou stejným směrem po přímé silnici rychlostmi 80 km/h a 60 km/h. Jakou rychlostí se pohybuje těžiště jejich soustavy?

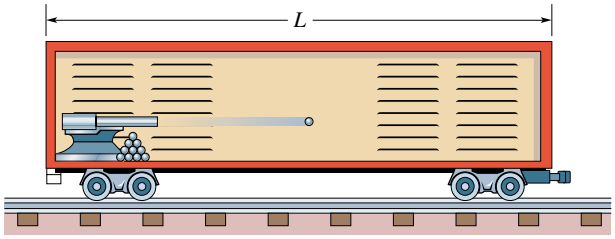
14C. Člověk o hmotnosti m stojí na provazovém žebříku spuštěném z balonu o hmotnosti M (obr. 9.36). Balon je vzhledem k zemi v klidu. (a) Člověk začne stoupat rychlostí v vzhledem k žebříku. Určete rychlost balonu vzhledem k zemi (velikost a směr). (b) Popište pohybový stav soustavy od okamžiku, kdy člověk přestane šplhat.



Obr. 9.36 Cvičení 14

15C. Dvě částice P a Q o hmotnostech 0,10 kg a 0,30 kg jsou zpočátku v klidu ve vzdálenosti 1,0 m a přitahují se konstantní silou o velikosti $1{,}0\cdot10^{-2}$ N. Vnější síly na soustavu nepůsobí. (a) Popište pohyb těžiště soustavy. (b) V jaké vzdálenosti od původní polohy částice P se obě částice setkají?

16C. Dělo a munice jsou naloženy v uzavřeném železničním voze délky L (obr. 9.37). Dělo střílí směrem vpravo, vůz se při zpětném rázu pohybuje vlevo. Vypálené dělové koule se odrážejí od vzdálenější stěny vozu a padají na podlahu. (a) Do jaké největší vzdálenosti od své původní polohy se může vůz dostat, než dělo vystřílí všechny koule? (b) Za jakých podmínek vůz tuto vzdálenost skutečně urazí? (c) Jaká je rychlost vozu v okamžiku, kdy dělo vystřílí všechny koule?



Obr. 9.37 Cvičení 16

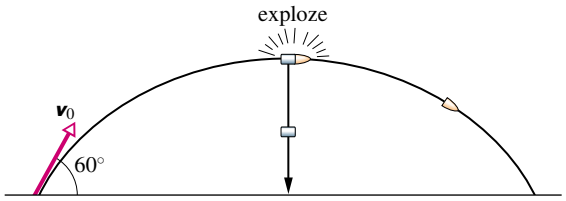
17Ú. Soustava je složena ze dvou částic o hmotnostech 3,0 kg a 4,0 kg. V jistém okamžiku má první částice rychlost 6,0 m·s^{-1} ve směru záporné osy y a druhá se pohybuje rychlostí 7,0 m·s^{-1} ve směru kladné osy x. Jaká je v tomto okamžiku rychlost těžiště soustavy?

18Ú. Kámen byl uvolněn v okamžiku $t = 0$ a padá volným pádem. Jiný kámen o dvojnásobné hmotnosti je uvolněn z téhož místa o 100 ms později. Najděte (a) polohu a (b) rychlost těžiště soustavy těchto dvou kamenů v okamžiku $t = 300$ ms. (Předpokládejte, že do tohoto okamžiku žádný z nich ještě nedopadl na zem.)

19Ú. Osobní automobil o hmotnosti 1 000 kg stojí před semaforem. Rozsvítí se zelená a automobil se rozjíždí s konstantním zrychlením 4,0 m·s^{-2}. V tom okamžiku jej předjede nákladní dodávka o hmotnosti 2 000 kg, která jede stálou rychlostí 8,0 m·s^{-1}. (a) Jaká je vzdálenost těžiště soustavy automobil + dodávka od semaforu v okamžiku $t = 3{,}0$ s? (b) Jaká je v tomto okamžiku rychlost těžiště soustavy?

20Ú. Richard a Kamila sedí v kánoi na jezeře. Richard má hmotnost 80 kg a Kamila o něco menší. Hmotnost kánoe je 30 kg. Chlapec a dívka sedí ve vzdálenosti 3,0 m od sebe, symetricky vzhledem k těžišti prázdné kánoe. Voda je klidná a kánoe je vůči ní rovněž v klidu. Richard s Kamilou se rozhodli, že si vymění místa. Richard si všiml, že se kánoe při výměně posunula o 40 cm vzhledem ke kůlu ponořenému ve vodě. Na základě tohoto údaje se mu podařilo vypočítat hmotnost Kamily. Kolik mu vyšlo?

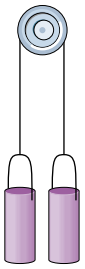
21Ú. Náboj je vystřelen s počáteční rychlostí 20 m·s^{-1} pod elevačním úhlem 60°. Ve vrcholu své trajektorie se roztrhne na dvě části o stejné hmotnosti (obr. 9.38). Jedna část, jejíž rychlost je bezprostředně po výbuchu nulová, padá svisle dolů. Jak daleko od děla dopadne druhá část, stojí-li dělo na vodorovném terénu a zanedbáme-li odpor vzduchu?



Obr. 9.38 Úloha 21

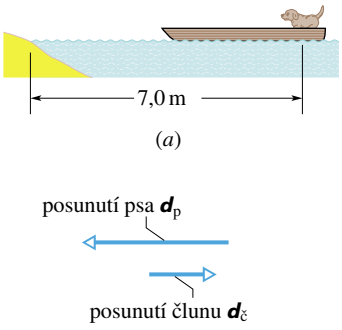
22Ú. Dvě stejné nádoby s cukrem jsou spojeny nehmotným vláknem vedeným přes kladku zanedbatelné hmotnosti o poloměru 50 mm. Kladka se může otáčet bez tření (obr. 9.39). Obě nádoby jsou ve stejné výši a původní hmotnost každé z nich je 500 g. (a) Určete polohu těžiště soustavy nádob. (b) Přidržíme nádoby, aby se nepohybovaly, a přemístíme 20 g cukru z jedné z nich do druhé. Určete polohu těžiště soustavy nyní. (c) Nádoby uvolníme. Jakým směrem se bude těžiště pohybovat? (d) Určete jeho zrychlení.

23Ú. Pes o hmotnosti 5,0 kg stojí na člunu ve vzdálenosti 7,0 m od břehu (obr. 9.40a). Rozběhne se ke břehu a zastaví se poté, co vzhledem k palubě člunu urazí dráhu 3,0 m. Člun má hmotnost 20,0 kg. Odporovou sílu, jíž působí voda proti pohybu člunu, můžeme zanedbat. Jak daleko je pes od břehu v okamžiku, kdy



Obr. 9.39 Úloha 22

se zastaví? (*Tip*: Na obr. 9.40b vidíme, že se pes pohybuje vlevo, zatímco člun ujíždí vpravo. Kterým směrem se bude pohybovat těžiště soustavy pes + člun?)



Obr. 9.40 Úloha 23

ODST. 9.5 Hybnost soustavy částic

24C. Jakou rychlostí by musel běžet člověk o hmotnosti 80 kg, aby měl stejnou hybnost jako automobil o hmotnosti 1 600 kg jedoucí rychlostí 1,2 km/h?

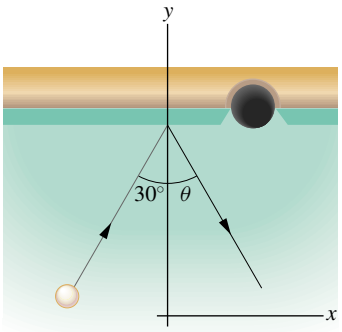
25C. Jakou rychlostí se musí pohybovat automobil o hmotnosti 816 kg, aby měl (a) stejnou hybnost, (b) stejnou kinetickou energii jako automobil o hmotnosti 2 650 kg, který jede rychlostí 16 km/h?

26C. Vypočtěte hybnost elektronu o rychlosti $0{,}99c$ ($c \doteq$ $\doteq 3{,}00{\cdot}10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je rychlost světla).

27C. Měřením byla určena velikost hybnosti částice pohybující se rychlostí $1{,}5 \cdot 10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Naměřená hodnota činila $2{,}9{\cdot}10^{-19}\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Vypočtěte hmotnost částice a zjistěte tak, zda šlo o elektron, nebo proton.

28C. Těleso o hmotnosti 0,70 kg se pohybuje vodorovně rychlostí $5{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Po kolmém nárazu na svislou stěnu se odrazí rychlostí $2{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete velikost změny jeho hybnosti.

29Ú. Kulečníková koule o hmotnosti 0,165 kg narazila do okraje kulečníkového stolu rychlostí o velikosti $2{,}00\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a odrazila se podle obr. 9.41. Obrázek zachycuje i volbu soustavy souřadnic. Při srážce se změnilo znaménko y-ové složky vektoru rychlosti koule, x-ová složka se nezměnila. (a) Určete úhel θ vyznačený v obr. 9.41. (b) Vyjádřete změnu hybnosti koule při srážce pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic. (Kutálení koule neovlivní odpověď (a) ani (b).)



Obr. 9.41 Úloha 29

30Ú. Nákladní automobil o hmotnosti 2 100 kg jel nejprve na sever rychlostí 41 km/h. Pak zabočil k východu a zvýšil svou rychlost na 51 km/h. (a) Jak se změnila kinetická energie automobilu? (b) Určete i změnu jeho hybnosti (velikost a směr).

31Ú. Radiolokátor zaregistroval objekt v poloze určené vektorem $\boldsymbol{r} = (3\,500 - 160t)\boldsymbol{i} + 2\,700\boldsymbol{j} + 300\boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{r}$ je v metrech a t v sekundách. Soustava souřadnic radiolokátoru je zvolena tak, že osa x směřuje na východ, osa y na sever a osa z svisle vzhůru. Objektem byla meteorologická raketa o hmotnosti 250 kg. Určete její (a) hybnost, (b) směr pohybu a (c) výslednou sílu, která na ni působila.

32Ú. Míč o hmotnosti 50 g je vyhozen počáteční rychlostí $16\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 30°. (a) Určete jeho (a) kinetickou energii a (b) hybnost na počátku pohybu a těsně před dopadem na zem. (c) Dokažte, že velikost změny hybnosti míče je rovna součinu velikosti tíhové síly působící na míč a doby letu. Předpokládáme, že terén je vodorovný.

33Ú. Částice o hmotnosti m má hybnost $\boldsymbol{p}$ o velikosti mc. Vyjádřete její rychlost v jednotkách rychlosti světla c.

ODST. 9.6 Zákon zachování hybnosti

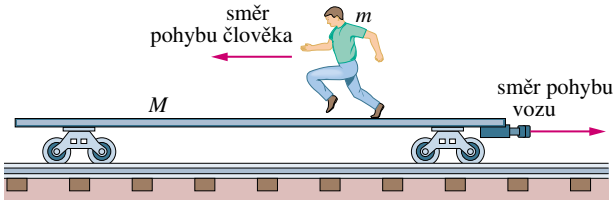
34C. Muž o hmotnosti 100 kg stojící na dokonale hladké vodorovné podlaze kopl do kamene o hmotnosti 0,08 kg, který ležel u jeho nohou. Kámen se po výkopu pohyboval vodorovně rychlostí $4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete rychlost pohybu člověka.

35C. Dvě tělesa o hmotnostech 1,0 kg a 3,0 kg jsou spojena pružinou a spočívají na dokonale hladké vodorovné podložce. Tělesa jsou uvedena do pohybu tak, že těžiště soustavy je v klidu a těleso o hmotnosti 1,0 kg se pohybuje směrem k němu počáteční rychlostí $1{,}7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je počáteční rychlost druhého tělesa?

36C. Vesmírná loď se vzdaluje od Země rychlostí 4 300 km/h. Z lodi je vymrštěn vyhořelý raketový motor směrem zpět. Jeho rychlost vzhledem k lodi má velikost 82 km/h. Hmotnost raketového motoru je čtyřikrát větší než hmotnost zbytku lodi. Jaká je rychlost lodi vzhledem k Zemi po oddělení motoru?

37C. Muž o hmotnosti 75 kg jede na vozíku o hmotnosti 39 kg. Rychlost vozíku je $2{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Muž náhle vyskočí vzhůru tak, že vodorovná složka jeho rychlosti vzhledem k *pevné podložce* je nulová. Určete změnu rychlosti vozíku.

38C. Plošinový železniční vůz o hmotnosti M se může pohybovat bez tření po přímé vodorovné trati. Na voze stojí člověk o hmotnosti m. Soustava se pohybuje vpravo rychlostí v_0 podle obr. 9.42. Jak se změní rychlost vozu, poběží-li člověk vlevo rychlostí v_{rel} vzhledem k vozu?



Obr. 9.42 Cvičení 38

39Ú. Poslední stupeň rakety se pohybuje rychlostí 7 600 m·s^{-1}. Skládá se ze dvou spojených částí: modulu s užitečným zatížením o hmotnosti 150,0 kg a raketového motoru, jehož hmotnost po vyčerpání pohonných hmot je 290,0 kg. V okamžiku, kdy je palivo spotřebováno, uvolní se spojovací mechanismus a části rakety se začnou od sebe vzdalovat díky působení stlačených pružin, které jsou mezi nimi umístěny. Vzájemná rychlost má velikost 910,0 m·s^{-1}. (a) Určete rychlost každé z obou částí rakety vzhledem k Zemi. Předpokládáme, že všechny vektory rychlosti leží v téže přímce. (b) Určete celkovou kinetickou energii rakety před a po oddělení částí a vysvětlete případný rozdíl.

40Ú. Radioaktivní jádro je zpočátku v klidu. Rozpadá se a emituje elektron a neutrino v navzájem kolmých směrech. (*Neutrino* je jedna z elementárních částic.) Hybnost elektronu je $1{,}2\cdot10^{-22}$ kg·m·s^{-1}, hybnost neutrina $6{,}4\cdot10^{-23}$ kg·m·s^{-1}. (a) Určete směr a velikost hybnosti zbytku jádra po rozpadu. (b) Hmotnost zbytku jádra je $5{,}8\cdot10^{-26}$ kg. Jaká je jeho kinetická energie?

41C. Elektron (hmotnost $m_1 = 9{,}11\cdot10^{-31}$ kg) a proton (hmotnost $m_2 = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg) se přitahují elektrickou silou. Předpokládejme, že byly uvolněny z klidu a že jejich počáteční vzdálenost byla $d = 3{,}0\cdot10^{-6}$ m. Určete poměr (a) velikostí hybností elektronu a protonu, (b) jejich rychlostí a (c) kinetických energií v okamžiku, kdy jsou od sebe vzdáleny $1{,}0\cdot10^{-6}$ m. (d) Jak se budou měnit odpovědi na otázky (a), (b) a (c) během dalšího přibližování částic?

42Ú. Těleso o hmotnosti 4,0 kg klouže po dokonale hladké vodorovné podložce. Náhle se roztrhne na dvě části o stejných hmotnostech. Rychlosti jednotlivých částí po výbuchu jsou 3,0 m·s^{-1} směrem na sever (azimut 0°) a 5,0 m·s^{-1} s azimutem 30° (odchylka 30° východním směrem). Určete rychlost tělesa před výbuchem.

43Ú. Těleso, které bylo zpočátku v klidu, vybuchlo a rozpadlo se na tři části. Dvě z nich, o stejné hmotnosti, se rozletěly stejně velkými rychlostmi 30 m·s^{-1} do kolmých směrů. Třetí část měla třikrát větší hmotnost než každá z předchozích dvou. Určete rychlost (velikost a směr) třetí části po výbuchu.

44Ú. Plošinový železniční vůz o hmotnosti 2 140 kg, který se může pohybovat po kolejích tak, že energiové ztráty vzniklé třením jsou zanedbatelné, stojí v klidu u nástupiště. Zápasník o hmotnosti 242 kg běží rychlostí 5,3 m·s^{-1} po nástupišti souběžně s tratí a vyskočí na vůz. Určete rychlost vozu v těchto případech: (a) Zápasník zůstane na voze stát. (b) Běží vzhledem k vozu rychlostí 5,3 m·s^{-1} původním směrem. (c) Otočí se a běží vzhledem k vozu rychlostí 5,3 m·s^{-1} opačným směrem.

45Ú. Raketové sáně o hmotnosti 2 900 kg jedou po zamrzlém jezeře rychlostí 250 m·s^{-1}. Když projíždí kolem koryta, které je v ledu vysekáno pro možnost přístupu k vodě, spustí jezdec do vody nádobu a nabere do ní 920 kg vody. Pomocí zákona zachování hybnosti určete výslednou rychlost saní. Všechny brzdicí síly zanedbejte.

46Ú. Izolované těleso o hmotnosti 8 kg se pohybuje rychlostí 2 m·s^{-1}. Náhle exploduje a rozpadne se na dvě části o hmotnostech 4 kg. Kinetická energie každé z nich bezprostředně po výbuchu je 16 J. Obě části se pohybují po původní přímkové trajektorii tělesa. Určete rychlost (velikost a směr) každé z nich.

47Ú. Sáně s jezdcem o celkové hmotnosti M spočívají v klidu na dokonale hladké hladině zamrzlého jezera. Jezdec naložil na sáně ještě dva kameny o hmotnostech m_1 a m_2, pro něž platí $M = 6{,}00m_1 = 12{,}0m_2$. Člověk hodlá uvést sáně do pohybu tak, že kameny vyhodí dozadu (současně nebo jeden po druhém) vodorovnou rychlostí v_{rel} vzhledem k saním. Určete výslednou rychlost saní, vymrští-li člověk kameny (a) současně, (b) nejprve m_1 a pak m_2 a (c) v opačném pořadí?

48Ú. Dělo o hmotnosti 1 400 kg vystřelilo náboj o hmotnosti 70,0 kg rychlostí o velikosti 556 m·s^{-1} vzhledem k hlavni děla. Hlaveň svírá s vodorovnou rovinou úhel 39,0°. Dělo je umístěno na vozíku, který se pohybuje bez tření. (a) Jaká je rychlost náboje vzhledem k zemi? (b) Pod jakým úhlem vzhledem k zemi je náboj vystřelen? (*Tip*: Vodorovná složka hybnosti soustavy se během výstřelu nemění.)

ODST. 9.7 Soustavy s proměnnou hmotností: raketa

49C. Raketa je v klidu v meziplanetárním prostoru, kde na ni nepůsobí gravitační síla. Její hmotnost je $2{,}55\cdot10^5$ kg, z toho $1{,}81\cdot10^5$ kg paliva. Raketový motor spotřebovává palivo rychlostí 480 kg/s, rychlost zplodin vzhledem k raketě je 3,27 km/s. Zážeh motoru trvá 250 s. (a) Určete tah motoru. (b) Jaká je hmotnost rakety po vypnutí motoru? (c) Jaká je její výsledná rychlost?

50C. Posádka rakety hodlá opustit sluneční soustavu. V okamžiku, kdy se raketa pohybuje rychlostí $6{,}0\cdot10^3$ m·s^{-1}, zažehne se motor. Rychlost zplodin vzniklých spalováním pohonných hmot je $3{,}0\cdot10^3$ m·s^{-1} vzhledem k raketě. V okamžiku zážehu má raketa hmotnost $4{,}0\cdot10^4$ kg a její zrychlení je 2,0 m·s^{-2}. (a) Určete tah motoru a (b) rychlost spotřeby paliva.

51C. Vesmírná sonda o hmotnosti 6 090 kg letí přídí směrem k Jupiteru a má vzhledem ke Slunci rychlost 105 m·s^{-1}. Během krátkodobého zážehu motoru vznikne 80,0 kg zplodin, které opustí sondu relativní rychlostí 253 m·s^{-1}. Jaká je rychlost sondy po skončení zážehu?

52C. Raketa je v klidu ve vesmírném prostoru. Zjistěte, jaký musí být poměr počáteční a výsledné hmotnosti rakety, má-li

být po vyhoření paliva rychlost rakety (a) shodná s relativní rychlostí zplodin, (b) dvakrát větší než tato rychlost.

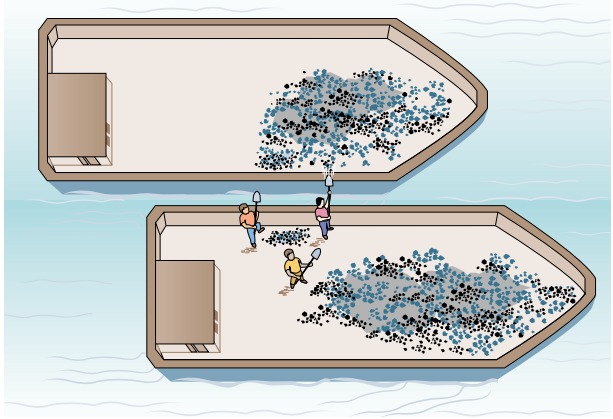
53C. Posádka lodi směřující k Měsíci je nucena provést korekci letu. Velikost rychlosti lodi je třeba zvýšit z počáteční hodnoty 400 $m \cdot s^{-1}$ o 2,2 $m \cdot s^{-1}$ při zachování směru letu. Relativní rychlost, s níž zplodiny vyhořelého paliva tryskají z raketového motoru, je 1 000 $m \cdot s^{-1}$. Jakou část původní hmotnosti lodi tvoří spálené palivo v okamžiku, kdy je korekce letu ukončena?

54C. Nákladní železniční vůz jede pod dopravníkem zrní stálou rychlostí 3,20 $m \cdot s^{-1}$. Za jednu minutu se z dopravníku vysype na vůz 540 kg zrní. Jakou silou musíme na vůz působit, aby se jeho rychlost neměnila? (Tření zanedbáváme.)

55Ú. Jednostupňová raketa o hmotnosti M je v klidu vzhledem k jisté inerciální vztažné soustavě $\mathscr{S}$. V okamžiku $t = 0$ dojde k zážehu motoru. Dokažte, že spálené plyny opouštějící trysku motoru budou vzhledem k soustavě $\mathscr{S}$ v klidu v okamžiku, kdy se hmotnost rakety sníží na hodnotu $0{,}368M$.

56Ú. Raketa o hmotnosti 6 100 kg startuje svisle z povrchu Země. Relativní rychlost zplodin vzhledem k raketě je 1 200 $m \cdot s^{-1}$. Určete hmotnost zplodin opouštějících raketu za jednu sekundu ve dvou různých případech: (a) Tah motoru je roven váze rakety. (b) Velikost počátečního zrychlení rakety má hodnotu 21 $m \cdot s^{-2}$.

57Ú. Dva dlouhé nákladní čluny plují po klidné hladině stejným směrem, stálými rychlostmi 10 km/h a 20 km/h. (Tažná síla každého motoru právě kompenzuje odporovou sílu vody.) Během míjení člunů se z pomalejšího na rychlejší překládá uhlí. Za jednu minutu přeloží dělníci 1 000 kg uhlí (obr. 9.43). Poněvadž je třeba, aby se rychlosti člunů během překládky neměnily, musí posádky změnit výkon motorů. Určete dodatečnou tažnou sílu každého z nich za předpokladu, že dělníci uhlí volně přesypávají přesně kolmo k bočnímu okraji pomalejšího člunu (rychlost, kterou kusům uhlí udělují vzhledem k pomalejšímu člunu, je zanedbatelně malá). Odporovou sílu vody považujeme za nezávislou na zátěži člunů.



Obr. 9.43 Úloha 57

58Ú. Tryskové letadlo letí rychlostí 180 $m \cdot s^{-1}$. Každou sekundu nasaje jeho motor 68 m^3 vzduchu (hmotnost 70 kg). Vzduch se spotřebuje ke spálení 2,9 kg paliva za sekundu. Produkty hoření proudí z tryskového motoru rychlostí 490 $m \cdot s^{-1}$ vzhledem k letadlu. Určete (a) tah tryskového motoru a (b) jeho výkon ve wattech.

ODST. 9.8 Vnější síly a změny vnitřní energie

59C. Horolezec o hmotnosti 90 kg vystupuje z tábora ve výšce 4 425 m n. m. na vrchol Mount Everestu (8 850 m n. m.). (a) Určete výslednou změnu potenciální energie soustavy horolezec + Země při tomto výstupu. (b) Kolik čokoládových tyčinek je potřeba k dodání této energie, je-li kalorická hodnota každé z nich 300 kcal? Odpověď na tuto otázku ukáže, že práce potřebná k překonání gravitační síly tvoří zcela jistě jen mizivou část energie, kterou horolezec vydá při takovém náročném výstupu.

60C. Chlapec o hmotnosti 51 kg vyšplhal za 10 s po laně délky 6,0 m. (a) Určete odpovídající změnu potenciální energie soustavy chlapec + Země a (b) průměrný výkon chlapce.

61C. Žena o hmotnosti 55 kg vyběhla po schodišti vysokém 4,5 m za 3,5 s. Určete odpovídající průměrný výkon.

62C. Sprinter o váze 670 N uběhl prvních 7,0 m závodu za 1,6 s. Startoval z klidu a pohyboval se s konstantním zrychlením. Určete jeho (a) rychlost a (b) kinetickou energii na konci tohoto časového intervalu a (c) odpovídající průměrný výkon.

63C. Luxusní parník *Queen Elizabeth 2* má dieselelektrický pohon o maximálním výkonu 92 MW. Maximální cestovní rychlost je 32,5 uzlů (1 uzel = 1,853 km/h). Jak velká je tažná síla motoru, pluje-li loď maximální rychlostí?

64C. Automobil o hmotnosti 1 600 kg jede rovnoměrně rychlostí 25,1 $m \cdot s^{-1}$. Tažná síla motoru kompenzuje třecí sílu o velikosti 703 N. Určete výkon motoru v jednotkách HP.

65C. Průměrná rychlost plavce je 0,22 $m \cdot s^{-1}$ při průměrné velikosti odporové síly prostředí 110 N. Určete jeho výkon.

66C. Energie, kterou musí vydat běžec bez ohledu na dosaženou rychlost, je asi 335 J/m. Určete průměrný výkon (a) sprintera při závodu na 100 m (čas $t = 10$ s), (b) maratonce (trať maratonu = = 42,2 km, doba = 2 h 10 min).

67C. Automobil i s cestujícími váží 16 400 N a jede rychlostí 113 km/h. Řidič začne brzdit. Určete brzdnou dráhu automobilu, je-li celková brzdná síla 8 230 N.

68C. Volejbalista trénuje výskoky. Ze vzpřímeného postoje poklesne v kolenou a sníží tak polohu těžiště o 18 cm. Poté vyskočí svisle vzhůru. Průměrná síla, kterou působí podlaha na chodidla sportovce, je asi třikrát větší než jeho váha. Určete rychlost jeho těžiště v okamžiku, kdy prochází původní polohou.

69C. Žena o hmotnosti 55 kg vyskočí z podřepu svisle vzhůru. V podřepu je její těžiště 40 cm nad úrovní podlahy. V okamžiku, kdy její chodidla ztrácejí s podlahou kontakt, je výška těžiště nad podlahou 90 cm, zatímco jeho největší výška nad podlahou činí 120 cm. (a) Jak velká průměrná síla působí na chodidla sportovkyně při odrazu? (b) Jak velká je největší rychlost jejího těžiště?

70Ú. Hokejista o hmotnosti 110 kg bruslí rychlostí 3,0 $m \cdot s^{-1}$ směrem ke hrazení a zabrzdí se o ně rukama. Během brzdění se jeho těžiště posune o 30 cm ke hrazení. (a) Určete výslednou

změnu kinetické energie jeho těžiště. (b) Jak velká je průměrná síla, kterou hokejista působí na hrazení?

71Ú. Automobil o hmotnosti 1 500 kg se rozjíždí z klidu po vodorovné silnici. Za 30 s dosáhne rychlosti je 72 km/h. (a) Jaká je kinetická energie automobilu na konci 30. sekundy? (b) Jaký je jeho průměrný výkon při rozjezdu? (c) Jaký je okamžitý výkon automobilu na konci 30. sekundy za předpokladu, že zrychlení je konstantní?

72Ú. Automobil o hmotnosti 1 710 kg jede stálou rychlostí o velikosti 15,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Tažná síla motoru, jehož výkon je 16,0 kW, kompenzuje síly tření a odporu prostředí. (a) Určete výslednici třecích a odporových sil. (b) Jaký by byl výkon motoru, kdyby automobil jel po silnici se stoupáním 8 % (tj. 8,00 m převýšení na každých 100 m měřených ve vodorovném směru) rychlostí 15,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? (c) Automobil sjíždí z kopce bez motoru stálou rychlostí 15,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete sklon vozovky v procentech.

73Ú. Lokomotiva s maximálním výkonem 1,5 MW může urychlit vlak z rychlosti 10 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na rychlost 25 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ za dobu 6,0 min. (a) Vypočtěte hmotnost vlaku. V uvedeném časovém intervalu zapište (b) rychlost vlaku a (c) urychlující sílu jako funkce času (měřeného v sekundách). (d) Určete vzdálenost, kterou vlak za tuto dobu urazil.

74Ú. Celková odporová síla, která působí proti pohybu automobilu, je výslednicí třecí síly, jíž působí silnice na kola automobilu a která je takřka nezávislá na rychlosti, a odporové síly vzduchu, jejíž velikost je úměrná čtverci rychlosti. Pro automobil o váze 12 000 N je velikost celkové odporové síly dána vztahem $F = 300 + 1{,}8v^2$, kde F je v newtonech a v v metrech za sekundu. Vypočtěte výkon motoru, jestliže automobil zvyšuje svou rychlost z počáteční hodnoty 80 km/h se zrychlením 0,92 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

75Ú⋆. Závodní automobil o hmotnosti m se rozjíždí z klidu. Jeho motor má stálý výkon P. Za jakou dobu urazí automobil dráhu d?

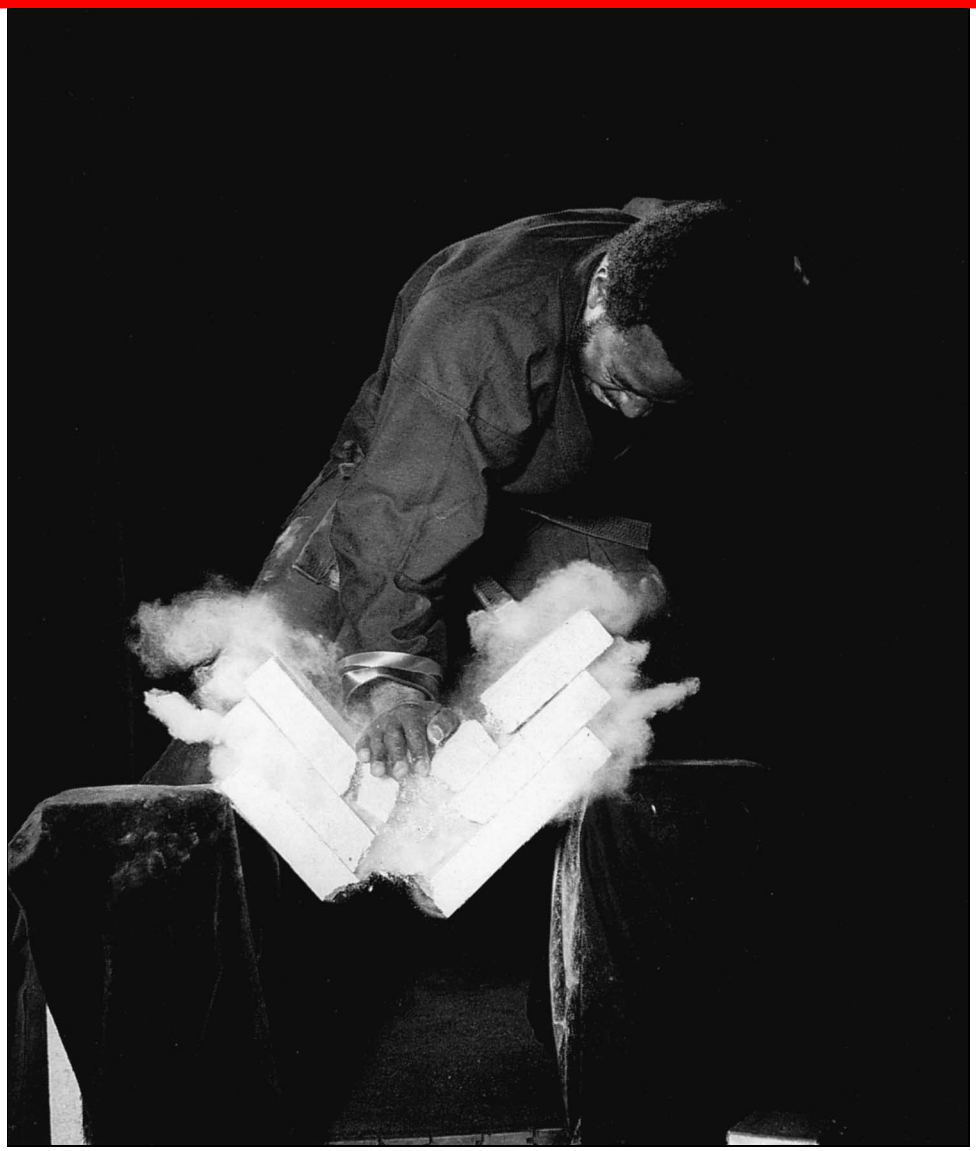
PRO POČÍTAČ

76Ú. Následující tabulka udává polohu tří částic v souřadnicové rovině (xy) a jejich rychlost v určitém okamžiku. Hmotnosti částic jsou různé a jsou v tabulce rovněž uvedeny. Určete (a) polohu a (b) rychlost těžiště soustavy tří částic v tomto okamžiku. (c) Vypočtěte jejich celkovou hybnost.

ČÁSTICE	HMOTNOST (kg)	SOUŘADNICE (m)	RYCHLOST ($\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$)
1	4,00	(0, 0)	$1{,}50\boldsymbol{i} - 2{,}50\boldsymbol{j}$
2	3,00	(7,00; 3,00)	0
3	5,00	(3,00; 2,00)	$2{,}00\boldsymbol{i} - 1{,}00\boldsymbol{j}$

77Ú. Těleso o hmotnosti 2,00 kg je v okamžiku $t = 0$ upuštěno ze střechy vysoké budovy a volně padá podél její stěny. V okamžiku $t = 1{,}00$ s je z téhož místa na střeše upuštěno těleso o hmotnosti 3,00 kg. První těleso dopadne na zem v okamžiku $t = 5{,}00$ s. Sestrojte graf časové závislosti (a) polohy a (b) rychlosti těžiště soustavy těchto dvou těles v intervalu od $t = 0$ do $t = 6{,}00$ s. Počátek svislé osy y zvolte na střeše budovy a její kladný směr orientujte dolů.

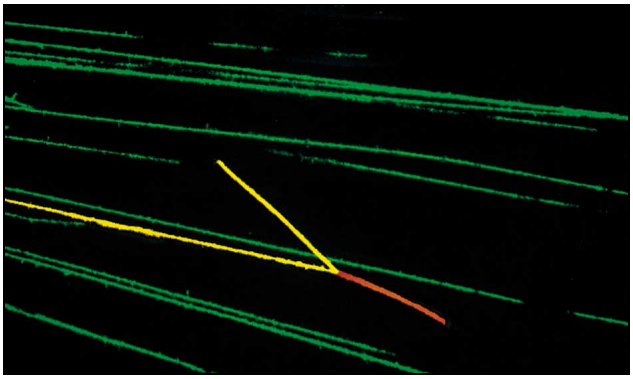
10
Srážky



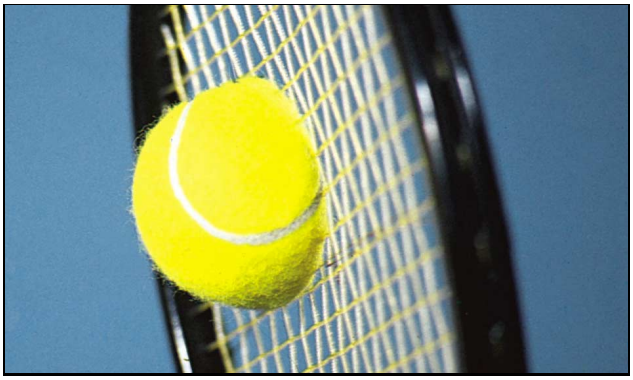
Fyzik Ronald McNair byl jedním z astronautů, kteří zahynuli při havárii raketoplánu ***Challenger****. Byl také nositelem černého pásku v karate a jediným úderem dokázal zlomit několik betonových tabulek. Při podobných ukázkách umění karate se nejčastěji používají borové desky nebo betonové dlaždice. Při úderu se prohýbají a akumulují pružnou energii do chvíle, kdy dosáhne jisté mezní hodnoty. Pak se zlomí. Je překvapivé, že energie nutná ke zlomení dlaždice je v porovnání s mezní energií dřevěné desky zhruba třetinová. Přesto je snažší zlomit desku. Čím to je?*



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Obr. 10.1 Pojem srážky je velmi široký. (a) Meteorický kráter v Arizoně má šířku asi 1 200 metrů a je 200 metrů hluboký. (b) Alfa-částice, která se pohybuje zleva doprava (v kolorovaném obrázku je její trajektorie vyznačena žlutě) narazí do jádra dusíku, které bylo zpočátku v klidu. Po srážce se dusíkové jádro pohybuje směrem vpravo (červená trajektorie). (c) Náraz míčku do rakety při tenisovém zápasu trvá zhruba 4 ms. (Po tuto dobu je míček s raketou v kontaktu). Celková doba trvání všech srážek v průběhu jednoho setu průměrného zápasu činí pouhou sekundu.

10.1 CO JE TO SRÁŽKA?

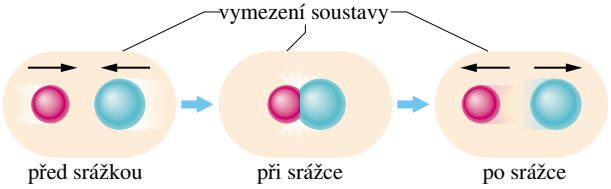
V hovorové řeči rozumíme *srážkou** událost, při níž do sebe narazí nebo o sebe udeří dvě či více různých těles. I když tuto „definici“ budeme muset později poněkud zpřesnit, je celkem výstižná a pro běžné situace, k nimž patří například srážky kulečníkových koulí, údery kladiva na hřebík nebo havárie automobilů, docela dobře použitelná.

Obr. 10.1a zachycuje následky jedné obrovské srážky, k níž došlo před 20 000 let. Ke srážkám dochází prakticky v celém myslitelném rozsahu velikostí objektů. Můžeme je sledovat od oblasti světa subatomárních částic (obr. 10.1b) až po kolize doslova „astronomických rozměrů“ u hvězd a galaxií. Srážky jsou většinou velmi krátké, takže je obtížné jejich průběh pozorovat, i když se třeba týkají objektů běžných rozměrů. Pozorování neusnadní ani skutečnost, že se tělesa při srážkách často výrazně deformují (obr. 10.1c).

V dalším textu budeme používat poněkud přesnější definici srážky:

Srážka je krátkodobý děj, při němž na sebe dvě nebo i více těles vzájemně působí poměrně značnými silami.

Uvažujeme-li o soustavě těles, mezi nimiž dojde ke srážce, je třeba umět dobře vymezit dobu *před* srážkou, dobu, po kterou srážka *probíhá*, a dobu *po* srážce (obr. 10.2). Pro ilustraci je v obrázku zakresleno ohraničení soustavy těles, která se účastní srážky. Síly vzájemného působení těles v průběhu srážky jsou samozřejmě vnitřními silami soustavy.



Obr. 10.2 Momentky zachycující soustavu těles při srážce.

Všimněme si, že nová definice srážky, na rozdíl od vstupní intuitivní charakteristiky, neobsahuje požadavek, aby tělesa byla v přímém kontaktu, tj. aby do sebe skutečně udeřila. Za srážku pak můžeme považovat třeba i situaci, kdy kosmická sonda míjí pohybující se velkou planetu a získává tak vyšší rychlost (tzv. gravitační prak). Sonda se přitom planety vůbec nedotkne. To však není pro průběh srážky podstatné. Není nutné, aby interakční síly těles při srážce souvisely výhradně s jejich přímým dotykem. Mohou to být docela dobře i síly gravitační jako v případě zmíněné kosmické sondy.

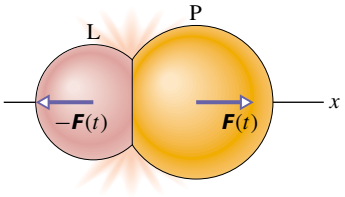
* Dříve se pro srážku užíval termín **ráz**.

Mnoho současných fyziků se intenzivně zabývá „hrou na srážky“. Jejím cílem je získat co nejvíce informací o silách působících *během* srážky na základě znalosti stavu částic *před* srážkou a *po* ní. Všechny naše dosavadní znalosti o světě subatomárních částic jsme získali ze srážkových experimentů. Základními pravidly „hry na srážky“ jsou zákony zachování hybnosti a energie.

10.2 IMPULZ SÍLY A HYBNOST

Jednoduchá srážka

Na obr. 10.3 jsou zakresleny dvě stejně velké opačně orientované síly $\boldsymbol{F}(t)$ a $-\boldsymbol{F}(t)$, jimiž na sebe působí dva různé bodové objekty při jednoduché přímé srážce.



Obr. 10.3 Srážka dvou bodových objektů L a P. Při srážce působí těleso L silou $\boldsymbol{F}(t)$ na těleso P a naopak, P působí na L silou $-\boldsymbol{F}(t)$. Síly $\boldsymbol{F}(t)$ a $-\boldsymbol{F}(t)$ představují akci a reakci. Jejich velikosti se v průběhu srážky mění, v každém okamžiku jsou si však rovny.

Vlivem vzájemného silového působení částic dojde ke změně hybnosti každé z nich. Tato změna závisí nejen na velikosti sil, ale také na době jejich působení Δt. Odpovídající vztah získáme pomocí druhého Newtonova zákona například pro těleso P v obr. 10.3, zapíšeme-li jej ve tvaru $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{10.1}$$

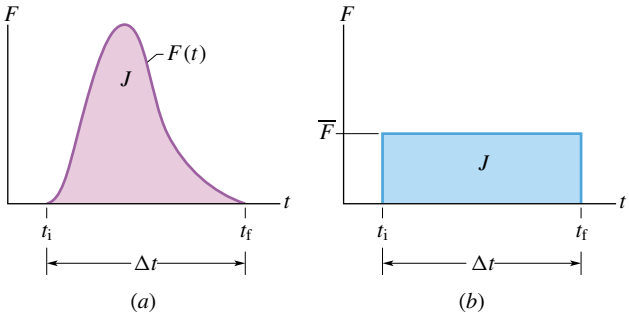
kde $\boldsymbol{F}(t)$ je časově proměnná síla. Její možný průběh je znázorněn na obr. 10.4a. Integrací rov. (10.1) v mezích t_i (okamžik bezprostředně před srážkou) a t_f (okamžik bezprostředně po srážce), určujících časový interval délky Δt, v němž srážka proběhla, dostáváme

$$\int_{\boldsymbol{p}_\mathrm{i}}^{\boldsymbol{p}_\mathrm{f}} \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{10.2}$$

Integrací levé strany předchozí rovnice dostáváme změnu hybnosti $\boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i}$ tělesa P, k níž při srážce došlo. Výraz na pravé straně závisí na časovém průběhu interakčních sil během srážky a nazýváme jej **impulzem síly**. Značíme

$$\boldsymbol{J} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(impulz síly)}. \tag{10.3}$$

Připomeneme-li si interpretaci určitého integrálu z kap. 7 (bod 7.1), vidíme, že velikost impulzu síly je číselně rovna velikosti plochy pod grafem funkce $F(t)$ (obr. 10.4a).



Obr. 10.4 (a) Časová závislost velikosti proměnné síly $F(t)$, která působí na těleso P při srážce znázorněné na obr. 10.3. Obsah plochy pod grafem funkce $F(t)$ určuje velikost impulzu $\boldsymbol{J}$ této síly. (b) Výška obdélníka představuje velikost $\overline{F}$ průměrné síly v časovém intervalu Δt. Obsah obdélníka je shodný s obsahem plochy pod křivkou $F(t)$ na obr. (a), a tedy i s velikostí impulzu $\boldsymbol{J}$.

Ze vztahů (10.2) a (10.3) je zřejmé, že změna hybnosti tělesa při srážce je dána impulzem výslednice sil, které na toto těleso během srážky působí.

$$\boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i} = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{J} \qquad \text{(vztah mezi změnou hybnosti a impulzem síly)}. \tag{10.4}$$

Tyto síly jsou vnitřními silami soustavy těles L a P. Vnější síly na soustavu nepůsobí. Podle zákona zachování hybnosti je tedy změna celkové hybnosti soustavy nulová. Změnu hybnosti tělesa P, vystupující ve vztahu (10.4), jsme označili symbolem $\Delta\boldsymbol{p}$. Změna hybnosti tělesa L je proto $-\Delta\boldsymbol{p}$. Vztah (10.4) můžeme také rozepsat do složek:

$$p_{\mathrm{f},x} - p_{\mathrm{i},x} = \Delta p_x = J_x, \tag{10.5}$$

$$p_{\mathrm{f},y} - p_{\mathrm{i},y} = \Delta p_y = J_y, \tag{10.6}$$

a

$$p_{\mathrm{f},z} - p_{\mathrm{i},z} = \Delta p_z = J_z. \tag{10.7}$$

Impulz síly i hybnost jsou vektorové veličiny a mají stejný fyzikální rozměr. Uvědomme si, že vztah (10.4) není nějakým novým fyzikálním zákonem či nezávislým tvrzením, nýbrž přímým důsledkem druhého Newtonova zákona, z něhož jsme jej odvodili. Je však velmi užitečný při řešení určitého typu fyzikálních úloh, podobně jako třeba zákon zachování mechanické energie.

Označíme-li $\overline{F}$ velikost průměrné síly určenou z grafu na obr. 10.4a, můžeme velikost impulzu síly zapsat ve tvaru

$$J = \overline{F}\,\Delta t, \tag{10.8}$$

kde Δt je doba trvání srážky. Hodnotu $\overline{F}$ najdeme jako výšku obdélníka o základně tvořené časovým intervalem od t_i do t_f (obr. 10.4b), jehož obsah je shodný s obsahem plochy pod křivkou na obr. 10.4a.

KONTROLA 1: Výsadkář, jemuž se při seskoku neotevřel padák, měl štěstí. Dopadl na hustě zasněženou pláň, a tak utrpěl jen drobná poranění. Kdyby dopadl na holou zem, byla by doba nárazu 10krát kratší a jeho zranění by mohla být i smrtelná. Jak ovlivní silná sněhová pokrývka (a) změnu hybnosti výsadkáře, (b) impulz brzdící síly a (c) její velikost?

Opakované srážky

Předpokládejme, že na těleso R pevně spojené s podlahou dopadá ve směru osy x ustálený tok částic o stejné hybnosti mv (obr. 10.5). Impulz J síly, jíž každá z dopadajících částic na těleso R působí, má stejnou velikost jako změna hybnosti částice Δp, avšak opačný směr. Je tedy $J = -\Delta p$. Předpokládejme, že za dobu Δt narazí na těleso n částic. Celkový silový impulz za tuto dobu určuje podle vztahu (10.4) celkovou změnu hybnosti tělesa, tj.

$$J = -n\Delta p. \qquad (10.9)$$

Po dosazení tohoto výsledku do rovnice (10.8) a malé úpravě získáme průměrnou sílu $\overline{F}$ působící při srážce na těleso R:

$$\overline{F} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m\Delta v. \qquad (10.10)$$

Získaný vztah vyjadřuje $\overline{F}$ jako funkci frekvence dopadu částic $n/\Delta t$ na těleso R a změny jejich rychlosti Δv.

Pokud se dopadající částice po nárazu zastaví, je třeba do vztahu (10.10) dosadit

$$\Delta v = v_f - v_i = 0 - v = -v, \qquad (10.11)$$

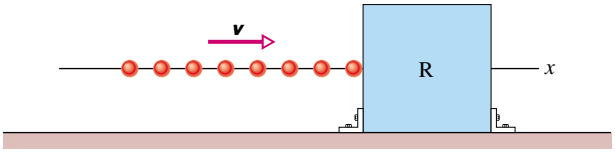
kde $v_i = v$ a $v_f = 0$ jsou rychlosti částic před srážkou a po srážce. Pokud se však částice při srážce odrazí zpět se stejně velkou rychlostí, je $v_f = -v$. Pak dostaneme

$$\Delta v = v_f - v_i = -v - v = -2v. \qquad (10.12)$$

Celková hmotnost částic, které za dobu Δt narazí do tělesa R, je $\Delta m = nm$. S ohledem na tuto skutečnost můžeme vztah (10.10) přepsat do tvaru

$$\overline{F} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v. \qquad (10.13)$$

Síla $\overline{F}$ je tak vyjádřena pomocí **hmotnostního toku** částic $\Delta m/\Delta t$ dopadajícího na těleso R. V závislosti na charakteru srážky můžeme do posledního vztahu dosadit za Δv buď $-v$ (podle vztahu (10.11)), nebo $-2v$ (podle vztahu (10.12)).



Obr. 10.5 Na pevné těleso R dopadají částice o stejné hybnosti. Jejich tok je ustálený. Průměrná síla $\overline{F}$ působící na těleso směřuje vpravo a její velikost závisí na hmotnostním toku dopadajících částic.

PŘÍKLAD 10.1

Baseballový míč o hmotnosti 140 g letí těsně před odpálením vodorovně rychlostí $\mathbf{v}_i$ o velikosti 39 m·s^{-1}. Po úderu letí míč opačným směrem stejně velkou rychlostí $\mathbf{v}_f$.

(a) Určete impulz síly, která na míč při úderu působila.

ŘEŠENÍ: Impulz síly vypočteme ze známé změny hybnosti míče vztahem (10.4), upraveným pro jednorozměrný případ. Za kladný směr osy x zvolíme směr pohybu pálky. Ze vztahu (10.4) dostaneme

$$\begin{aligned} J &= p_f - p_i = mv_f - mv_i = \\ &= (0{,}14\,\text{kg})(39\,\text{m·s}^{-1}) - (0{,}14\,\text{kg})(-39\,\text{m·s}^{-1}) = \\ &= 10{,}9\,\text{kg·m·s}^{-1} \doteq 11\,\text{kg·m·s}^{-1}. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

Ve shodě s naší volbou orientace souřadnicové osy x je počáteční rychlost míče (x-ová složka) záporná a výsledná rychlost kladná. Vypočtený impulz síly je kladný, vektor $\mathbf{J}$ má tedy, podle očekávání, stejný směr jako pohyb pálky při úderu.

(b) Srážka míče a pálky proběhla za dobu $\Delta t = 1{,}2$ ms. Určete průměrnou sílu, která při srážce působila na míč.

ŘEŠENÍ: Z rovnice (10.8) dostaneme

$$\begin{aligned} \overline{F} = \frac{J}{\Delta t} &= \frac{(10{,}9\,\text{kg·m·s}^{-1})}{(0{,}001\,2\,\text{s})} = \\ &= 9\,100\,\text{N}. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

Uvědomme si, jak je tato síla obrovská. Její velikost je přibližně rovna váze tělesa o hmotnosti jedné tuny. *Největší* síla, která na míč v jistém okamžiku v průběhu srážky působila, musí být dokonce ještě větší. Průměrná síla má směr kladné osy x. Je tedy souhlasně rovnoběžná s vektorem impulzu síly.

(c) Určete průměrné zrychlení míče.

ŘEŠENÍ: Průměrné zrychlení určíme ze vztahu

$$\overline{a} = \frac{\overline{F}}{m} = \frac{(9\,100\,\mathrm{N})}{(0{,}14\,\mathrm{kg})} = 6{,}5{\cdot}10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}, \quad \text{(Odpověď)}$$

tj. $a = 6\,600g$.

V dosavadních úvahách jsme předpokládali, že na tělesa nepůsobí při srážce žádné vnější síly. Tento předpoklad však při baseballové hře není splněn. Na míč totiž stále působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ (během letu i při srážce s pálkou). Velikost tíhové síly však je pouhých 1,4 N, tedy zcela zanedbatelná ve srovnání s průměrnou silou o velikosti 9 100 N, jíž na míč při úderu působí pálka. Zcela oprávněně tedy můžeme soustavu míč + pálka považovat *během srážky* za izolovanou. Chyba, které se touto idealizací dopustíme, je jen velmi malá.

PŘÍKLAD 10.2

Baseballový míč letí stejně jako v př. 10.1 vodorovně, rychlostí o velikosti $v_\mathrm{i} = 39\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Nenarazí však na pálku kolmo, nýbrž se od ní odrazí pod elevačním úhlem 30° rychlostí o velikosti $v_\mathrm{f} = 45\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (obr. 10.6). Určete průměrnou sílu $\overline{\boldsymbol{F}}$, kterou pálka na míč působila, proběhla-li srážka za 1,2 ms?

ŘEŠENÍ: Z rovnic (10.5) a (10.6) určíme složky J_x a J_y impulzu síly:

$$\begin{aligned} J_x &= p_{\mathrm{f},x} - p_{\mathrm{i},x} = m(v_{\mathrm{f},x} - v_{\mathrm{i},x}) = \\ &= (0{,}14\,\mathrm{kg})[(45\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\cos 30^\circ) - (-39\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})] = \\ &= 10{,}92\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} J_y &= p_{\mathrm{f},y} - p_{\mathrm{i},y} = m(v_{\mathrm{f},y} - v_{\mathrm{i},y}) = \\ &= (0{,}14\,\mathrm{kg})[(45\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\sin 30^\circ) - 0] = \\ &= 3{,}150\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}. \end{aligned}$$

Velikost impulzu síly $\boldsymbol{J}$ je rovna

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \\ &= \sqrt{(10{,}92\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})^2 + (3{,}150\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})^2} = \\ &= 11{,}37\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}. \end{aligned}$$

Z rovnice (10.8) určíme velikost průměrné síly $\overline{F}$ působící na míč při srážce:

$$\overline{F} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{(11{,}37\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})}{(0{,}001\,2\,\mathrm{s})} = \\ = 9\,475\,\mathrm{N} \doteq 9\,500\,\mathrm{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

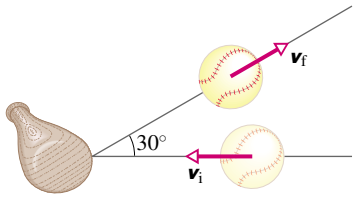
Vektor impulzu síly $\boldsymbol{J}$ směřuje šikmo vzhůru a svírá s vodorovnou rovinou úhel θ:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{J_y}{J_x} = \frac{(3{,}150\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})}{(10{,}92\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})} = 0{,}288,$$

tj.

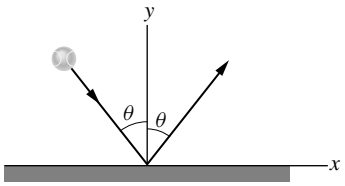
$$\theta = 16^\circ. \quad \text{(Odpověď)}$$

Průměrná síla $\overline{\boldsymbol{F}}$ má stejný směr jako impulz síly $\boldsymbol{J}$. Na rozdíl od př. 10.1 mají vektory $\overline{\boldsymbol{F}}$ a $\boldsymbol{J}$ jiný směr než rychlost míče po srážce.



Obr. 10.6 Příklad 10.2. Míč se odráží od pálky. Počáteční rychlost je vodorovná, výsledná rychlost svírá s vodorovnou rovinou úhel 30°.

KONTROLA 2: Následující obrázek ukazuje pohled shora na míč, který se odráží od zdi s nezměněnou velikostí rychlosti. Změnu hybnosti míče označme $\Delta\boldsymbol{p}$. (a) Rozhodněte, zda složka (a) Δp_x, resp. (b) Δp_y je kladná, záporná, nebo nulová. (c) Jaký směr má vektor $\Delta\boldsymbol{p}$?



10.3 PRUŽNÉ PŘÍMÉ SRÁŽKY

Nejjednodušším případem je přímá srážka (v některých případech zvaná také čelní nebo středová). Při ní leží počáteční rychlosti částic v téže přímce. Mají tedy směr jejich spojnice, u homogenních koulí pak směr spojnice jejich středů.

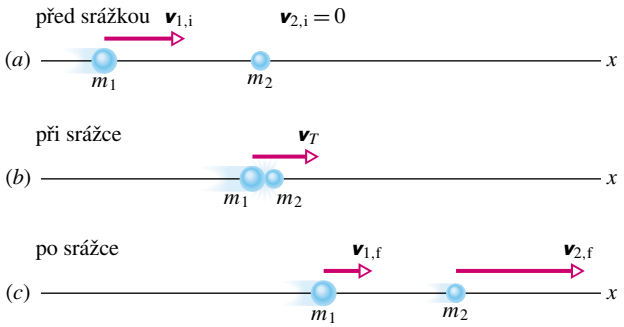
Pevný terč

Uvažujme přímou srážku dvou těles o hmotnostech m_1 a m_2 (obr. 10.7) a pro jednoduchost předpokládejme, že jedno z nich je před srážkou v klidu (například m_2, tj. $v_{2,\mathrm{f}} = 0$). Toto těleso budeme nazývat „terčem“. Druhé těleso, s počáteční rychlostí $v_{1,\mathrm{i}}$, bude představovat „střelu“.* Dále předpokládejme, že soustava tvořená uvažovanými dvěma tělesy je uzavřená (žádné další částice do soustavy nepřibudou, ani ji neopustí) a izolovaná (na soustavu nepůsobí

* Pokud by se terč vzhledem k laboratorní vztažné soustavě pohyboval stálou rychlostí, zvolíme pro popis srážky jinou inerciální vztažnou soustavu, v níž bude v klidu. Taková volba je vždy možná.

vnější síly). K oběma těmto přirozeným požadavkům přidejme ještě jeden, poněkud speciální: předpokládejme, že srážka nezměnila celkovou kinetickou energii soustavy. Taková srážka se nazývá **pružná** neboli **elastická**.

Při pružné srážce se obecně mění kinetická energie jednotlivých těles, která se srážky účastní. Celková kinetická energie soustavy před srážkou i po srážce je však stejná.



Obr. 10.7 Pružná srážka dvou těles. Jedno z nich (terč o hmotnosti m_2) je před srážkou v klidu. V obrázcích jsou zakresleny tyto rychlosti: (a) rychlosti obou těles před srážkou, (b) rychlost těžiště soustavy v jistém okamžiku probíhající srážky, (c) rychlosti obou těles po srážce. Velikosti vektorů odpovídají případu $m_1 = 3m_2$.

Je důležité si uvědomit, že hybnost uzavřené izolované soustavy se při srážce zachovává vždy, bez ohledu na to, je-li srážka pružná či nikoliv. Interakční síly působící při srážce jsou totiž vnitřními silami soustavy.

Při srážce těles v uzavřené izolované soustavě se hybnost každého z nich může obecně měnit. Celková hybnost soustavy je však v každém okamžiku probíhající srážky stejná, a to bez ohledu na charakter srážky.

Ze zákonů zachování hybnosti a kinetické energie dostáváme pro srážku dvou těles z obr. 10.7

$$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \qquad (10.14)$$

a

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2. \qquad (10.15)$$

V obou rovnicích jsme indexem (i) označili počáteční rychlosti a indexem (f) výsledné rychlosti těles. Známe-li hmotnosti těles a počáteční rychlost $v_{1,i}$ tělesa 1, zbývá vyřešit soustavu předchozích dvou rovnic a určit z ní neznámé rychlosti obou těles po srážce, tj. $v_{1,f}$ a $v_{2,f}$.

Přepišme rov. (10.14) do tvaru

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f}) = m_2 v_{2,f} \qquad (10.16)$$

a rov. (10.15) do tvaru*

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f})(v_{1,i} + v_{1,f}) = m_2 v_{2,f}^2. \qquad (10.17)$$

Po vydělení rov. (10.17) rov. (10.16) a dalších úpravách dostaneme

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} \qquad (10.18)$$

a

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}. \qquad (10.19)$$

Z rov. (10.19) je zřejmé, že hodnota $v_{2,f}$ je vždy kladná (terč o hmotnosti m_2 se po srážce pohybuje ve směru nárazu střely). Hodnota $v_{1,f}$ může být jak kladná, tak záporná (je-li $m_1 > m_2$, pohybuje se střela po srážce původním směrem, při $m_1 < m_2$ se odrazí zpět).

KONTROLA 3: Určete výslednou hybnost terče na obr. 10.7, má-li střela počáteční hybnost $6\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a její výsledná hybnost je (a) $2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, resp. (b) $-2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je výsledná kinetická energie terče, má-li střela před srážkou kinetickou energii 5 J a po srážce 2 J?

Věnujme se nyní několika speciálním případům:

1. *Shodné hmotnosti.* Je-li $m_1 = m_2$, redukují se rovnice (10.18) a (10.19) na tvar

$$v_{1,f} = 0 \quad \text{a} \quad v_{2,f} = v_{1,i}.$$

Při přímé srážce těles stejné hmotnosti se střela zastaví a terč získá stejnou rychlost, jakou měla střela před srážkou. Střela a terč si své rychlosti jednoduše „vymění“. Tento výsledek je platný i v případě pohyblivého terče (těleso 2 se před srážkou pohybuje).

2. *Těžký terč.* V případě těžkého terče je $m_2 \gg m_1$. Příkladem takové srážky může být třeba náraz golfového míčku do dělové koule. Rov. (10.18) a (10.19) přejdou do tvaru

$$v_{1,f} \doteq -v_{1,i} \quad \text{a} \quad v_{2,f} \doteq \left(\frac{2m_1}{m_2}\right) v_{1,i}. \qquad (10.20)$$

Je vidět, že střela (golfový míček) se prostě odrazí zpět opačným směrem. Velikost její rychlosti se prakticky nezmění. Terč (dělová koule) se bude pohybovat v kladném směru velmi malou rychlostí, neboť výraz $(2m_1/m_2)$ v rov. (10.20) je mnohem menší než jedna. Tyto závěry zcela jistě nejsou neočekávané.

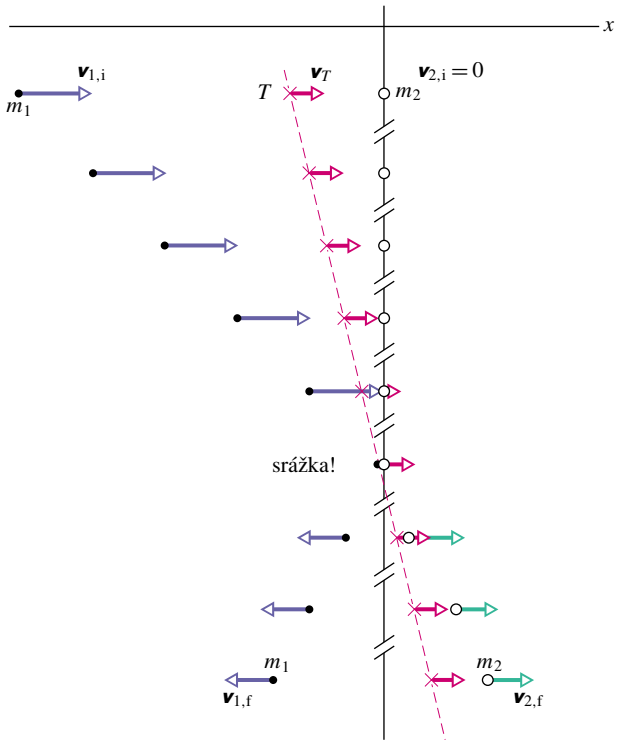
* Při těchto úpravách využíváme identity $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Řešení soustavy rovnic se tím značně zjednoduší.

3. *Těžká střela.* Nyní střílíme dělovou koulí proti golfovému míčku, tj. $m_1 \gg m_2$. Rov. (10.18) a (10.19) přejdou na tvar

$$v_{1,\mathrm{f}} \doteq v_{1,\mathrm{i}} \quad \text{a} \quad v_{2,\mathrm{f}} \doteq 2v_{1,\mathrm{i}}. \tag{10.21}$$

Střela (dělová koule) se tedy pohybuje dále původním směrem a jen nepatrně se zpomalí. Terč (golfový míček) se odrazí zpět (v kladném směru) dvojnásobnou rychlostí než měla původně dělová koule.

Skutečnost, že je rychlost terče po srážce právě dvojnásobná, lze poměrně jednoduše vysvětlit: vraťme se ke vztahům (10.20), které popisují případ těžkého terče. Rychlost lehkého tělesa (střely) se změnila z hodnoty $+v$ na $-v$. Její *změna* byla tedy $2v$. Také v případě těžké střely je *změna* rychlosti lehkého tělesa (terče) rovna $2v$.



Obr. 10.8 Série obrázků znázorňujících průběh pružné srážky střely s pevným terčem. Pro hmotnosti střely (těleso 1) a terče (těleso 2) platí $m_2 = 3m_1$. V obrázcích je vyznačena i rychlost těžiště soustavy. Všimněte si, že není srážkou vůbec ovlivněna.

4. *Pohyb těžiště.* Pohyb těžiště soustavy dvou těles není jejich srážkou nijak ovlivněn. Tato skutečnost je důsledkem zákona zachování hybnosti a vztahu (9.26). Tento vztah

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_T, \tag{10.22}$$

vyjadřuje souvislost celkové hybnosti soustavy a rychlosti pohybu těžiště $\boldsymbol{v}_T$. Jelikož se celková hybnost $\boldsymbol{P}$ nemění, musí se zachovávat i rychlost těžiště. Těžiště se tedy pohybuje rovnoměrně přímočaře. Pro případ srážky střely s pevným terčem (obr. 10.7) má těžiště soustavy rychlost (vztah (10.22))

$$v_T = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, v_{1,\mathrm{i}}. \tag{10.23}$$

Na obr. 10.8 je posloupnost obrázků znázorňujících typický průběh pružné srážky. Je vidět, že těžiště se skutečně pohybuje konstantní rychlostí, která není srážkou nijak ovlivněna.

Pohyblivý terč

Vraťme se nyní k obecným úvahám o pružných srážkách a připusťme, že se obě tělesa před srážkou pohybují.



Obr. 10.9 Pružná srážka dvou těles

Pro soustavu těles na obr. 10.9 můžeme zapsat zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie takto:

$$m_1 v_{1,\mathrm{i}} + m_2 v_{2,\mathrm{i}} = m_1 v_{1,\mathrm{f}} + m_2 v_{2,\mathrm{f}} \tag{10.24}$$

a

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1,\mathrm{i}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2,\mathrm{i}}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1,\mathrm{f}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2,\mathrm{f}}^2. \tag{10.25}$$

Získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $v_{1,\mathrm{f}}$ a $v_{2,\mathrm{f}}$, kterou nyní budeme řešit. Nejprve přepíšeme rov. (10.24) do tvaru

$$m_1(v_{1,\mathrm{i}} - v_{1,\mathrm{f}}) = -m_2(v_{2,\mathrm{i}} - v_{2,\mathrm{f}}) \tag{10.26}$$

a rov. (10.25) do tvaru

$$m_1(v_{1,\mathrm{i}} - v_{1,\mathrm{f}})(v_{1,\mathrm{i}} + v_{1,\mathrm{f}}) = -m_2(v_{2,\mathrm{i}} - v_{2,\mathrm{f}})(v_{2,\mathrm{i}} + v_{2,\mathrm{f}}). \tag{10.27}$$

Rov. (10.27) vydělíme rov. (10.26) a po malých úpravách dostaneme

$$v_{1,\mathrm{f}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_{1,\mathrm{i}} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\, v_{2,\mathrm{i}} \tag{10.28}$$

a

$$v_{2,\mathrm{f}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\, v_{1,\mathrm{i}} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, v_{2,\mathrm{i}}. \tag{10.29}$$

Připomeňme, že jsme indexy 1 a 2 přiřadili tělesům zcela libovolně. Záměnou indexů na obr. 10.9 a v rov. (10.28) a (10.29) získáme zcela identickou soustavu. Položíme-li

navíc $v_{2,\mathrm{i}} = 0$, přejdou rov. (10.28) a (10.29) na tvar (10.18) a (10.19), který odpovídá situaci s pevným terčem 2.

Z rov. (10.22) určíme ještě rychlost těžiště v_T soustavy těles na obr. 10.9:

$$v_T = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_{1,\mathrm{i}} + m_2 v_{2,\mathrm{i}}}{m_1 + m_2}. \qquad (10.30)$$

Naše soustava je uzavřená a izolovaná. Její hybnost P se proto při srážce zachovává a její těžiště se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí v_T.

KONTROLA 4: Počáteční hybnosti těles 1 a 2 na obr. 10.9 jsou $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a $-8\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je hybnost tělesa 2 po srážce, je-li výsledná hybnost tělesa 1 (a) $2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, resp. (b) $-2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$?

PŘÍKLAD 10.3

Dvě kovové koule jsou zavěšeny na svislých závěsech tak, aby se právě dotýkaly (obr. 10.10). Koule 1 má hmotnost $m_1 = 30\,\mathrm{g}$, hmotnost koule 2 je $m_2 = 75\,\mathrm{g}$. Kouli 1 vychýlíme vlevo do výšky $h_1 = 8{,}0\,\mathrm{cm}$ a uvolníme.

(a) Určete rychlost $v_{1,\mathrm{f}}$ koule 1 těsně po srážce s koulí 2.

ŘEŠENÍ: Označme $v_{1,\mathrm{i}}$ rychlost koule 1 těsně před srážkou. Bezprostředně po uvolnění je její kinetická energie nulová a tíhová potenciální energie má hodnotu $m_1 g h_1$. Těsně před srážkou je kinetická energie rovna $\frac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{i}}^2$ a potenciální energie je nulová. Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{i}}^2 = m_1 g h_1.$$

Rychlost koule 1 těsně před srážkou je tedy

$$v_{1,\mathrm{i}} = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(0{,}080\,\mathrm{m})} = 1{,}252\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Koule 1 se sice pohybuje po oblouku, avšak v okamžiku srážky je její rychlost vodorovná. Úlohu tedy můžeme řešit podle pravidel pro jednorozměrnou srážku.

Rychlost koule 1 těsně po srážce je $v_{1,\mathrm{f}}$. Určíme ji z rov. (10.18):

$$v_{1,\mathrm{f}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,\mathrm{i}} = \frac{(0{,}030\,\mathrm{kg} - 0{,}075\,\mathrm{kg})}{(0{,}030\,\mathrm{kg} + 0{,}075\,\mathrm{kg})}(1{,}252\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = -0{,}537\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq -0{,}54\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Záporné znaménko výsledku signalizuje, že se koule 1 pohybuje po srážce vlevo.

(b) Do jaké výšky h_1' vystoupí koule 1 po srážce?

ŘEŠENÍ: Na počátku zpětného pohybu má koule 1 kinetickou energii $\frac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{f}}^2$ a tíhová potenciální energie je nulová. Pohyb koule se obrací v nejvyšším bodě trajektorie, tj. ve výšce h_1'. Zde je její kinetická energie nulová a potenciální energie má hodnotu $m_1 g h_1'$. Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$m_1 g h_1' = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{f}}^2,$$

tj.

$$h_1' = \frac{v_{1,\mathrm{f}}^2}{2g} = \frac{(-0{,}537\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = 0{,}014\,7\,\mathrm{m} \doteq 1{,}5\,\mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaká je rychlost koule 2 těsně po srážce?

ŘEŠENÍ: Z rov. (10.19) dostaneme

$$v_{2,\mathrm{f}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,\mathrm{i}} = \frac{2(0{,}030\,\mathrm{kg})}{(0{,}030\,\mathrm{kg} + 0{,}075\,\mathrm{kg})}(1{,}252\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = 0{,}715\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 0{,}72\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

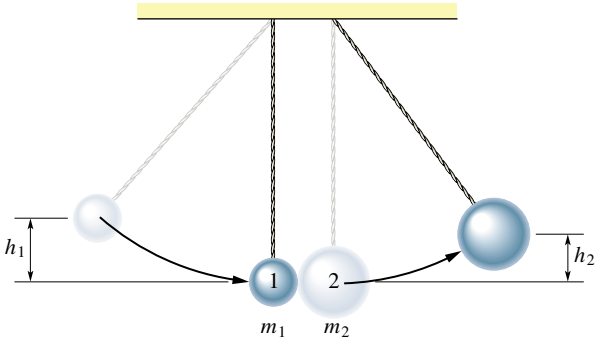
(d) Do jaké výšky h_2 vystoupí koule 2 po srážce?

ŘEŠENÍ: Koule 2 má těsně po srážce kinetickou energii $\frac{1}{2} m_2 v_{2,\mathrm{f}}^2$. V bodě obratu ve výšce h_2 má tíhová potenciální energie hodnotu $m_2 g h_2$. Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$m_2 g h_2 = \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,\mathrm{f}}^2,$$

tj.

$$h_2 = \frac{v_{2,\mathrm{f}}^2}{2g} = \frac{(0{,}715\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = 0{,}026\,1\,\mathrm{m} \doteq 2{,}6\,\mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 10.10 Příklad 10.3. Dvě kovové koule zavěšené na vláknech se v klidu právě dotýkají. Kouli 1 o hmotnosti m_1 odchýlíme vlevo do výšky h_1 a uvolníme. Po srážce vystoupí koule 2 do výšky h_2.

PŘÍKLAD 10.4

Rychlé neutrony vznikající v jaderném reaktoru je třeba nejprve zpomalit, aby se mohly efektivně účastnit řetězové reakce. Děje se tak prostřednictvím jejich srážek s jádry atomů v tzv. *moderátoru*.

(a) Určete, kolikrát se zmenší kinetická energie neutronu (hmotnost m_1) při jeho přímé srážce s jádrem atomu o hmotnosti m_2. Předpokládáme, že srážka je pružná a jádro je zpočátku v klidu.

ŘEŠENÍ: Kinetická energie neutronu před srážkou a po ní je dána vztahy

$$E_{\mathrm{k,i}} = \tfrac{1}{2} m v_{1,\mathrm{i}}^2 \quad \text{a} \quad E_{\mathrm{k,f}} = \tfrac{1}{2} m v_{1,\mathrm{f}}^2 .$$

Hledaný poměr označme α. Platí

$$\alpha = \frac{E_{\mathrm{k,i}} - E_{\mathrm{k,f}}}{E_{\mathrm{k,i}}} = \frac{v_{1,\mathrm{i}}^2 - v_{1,\mathrm{f}}^2}{v_{1,\mathrm{i}}^2} = 1 - \frac{v_{1,\mathrm{f}}^2}{v_{1,\mathrm{i}}^2} . \qquad (10.31)$$

Ze vztahu (10.18) dostáváme

$$\frac{v_{1,\mathrm{f}}}{v_{1,\mathrm{i}}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} . \qquad (10.32)$$

Dosazením rov. (10.32) do (10.31) získáme po malých úpravách výsledek:

$$\alpha = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} . \quad \text{(Odpověď)} \qquad (10.33)$$

(b) Vypočtěte hodnotu poměru α pro jádra olova, uhlíku a vodíku. Poměr hmotností jádra a neutronu ($= \frac{m_2}{m_1}$) pro olovo je 206, pro uhlík 12 a pro vodík přibližně 1.

ŘEŠENÍ: Dosazením $m_2 = k m_1$ do rov. (10.33) dostaneme pro olovo ($m_2 = 206 m_1$)

$$\alpha = \frac{4(206)}{(1+206)^2} = 0{,}019, \quad \text{tj. } 1{,}9\,\%, \quad \text{(Odpověď)}$$

pro uhlík ($m_2 = 12 m_1$)

$$\alpha = \frac{4(12)}{(1+12)^2} = 0{,}28, \quad \text{tj. } 28\,\% \quad \text{(Odpověď)}$$

a pro vodík ($m_2 = m_1$)

$$\alpha = \frac{4(1)}{(1+1)^2} = 1, \quad \text{tj. } 100\,\%. \quad \text{(Odpověď)}$$

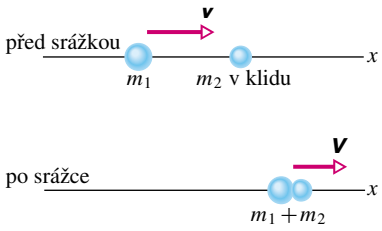
Tyto výsledky naznačují, proč je například voda podstatně lepším moderátorem neutronů než olovo.

10.4 NEPRUŽNÉ PŘÍMÉ SRÁŽKY

Srážku nazýváme **nepružnou**, jestliže se při ní nezachovává celková kinetická energie soustavy zúčastněných těles. Gumová kulička, kterou jsme upustili na tvrdou podlahu, doskočí po odrazu *téměř* do původní výšky. Její kinetická energie během srážky s podlahou nepatrně klesla. Tento malý úbytek způsobil, že po odrazu již kulička nedostoupila přesně do té výšky, ze které spadla. Kdyby byla srážka pružná, ke ztrátě kinetické energie kuličky by při ní nedošlo a kulička by vyskočila *přesně* do původní výšky. Ve skutečnosti je srážka gumové kuličky s podlahou vždy nepružná.

Golfový míček ztrácí při dopadu na zem větší část své kinetické energie a odrazí se jen do 60 % původní výšky. Odraz je tedy výrazně nepružný. Upustíme-li na zem hroudu sklenářského tmelu, přilepí se k zemi a neodrazí se vůbec. Srážku tohoto typu budeme nazývat **dokonale nepružnou**.

Na úkor úbytku kinetické energie soustavy při srážce samozřejmě vzrostou hodnoty energií některých jiných typů, např. se těleso zahřeje. Hybnost uzavřené izolované soustavy se však zachovává vždy, ať již je srážka pružná či nepružná. Hybnost i kinetická energie soustavy ovšem souvisejí s rychlostmi těles. Zákon zachování hybnosti vede proto k určitému omezení možných hodnot ztráty kinetické energie. K největší ztrátě dochází při dokonale nepružné srážce. Při ní se dokonce může stát, že soustava ztratí veškerou kinetickou energii.



Obr. 10.11 Dokonale nepružná srážka dvou těles. Před srážkou je těleso o hmotnosti m_2 v klidu. Po srážce se obě tělesa pohybují společně. Společný pohyb je znakem *dokonale* nepružné srážky. Velikosti vyznačených vektorů rychlosti odpovídají případu $m_1 = 3 m_2$.

Omezíme se zatím pouze na úvahy o dokonale nepružných srážkách. Na obr. 10.11 je znázorněna nepružná srážka dvou těles. Před srážkou bylo jedno z nich v klidu. Podle zákona zachování hybnosti je

$$m_1 v = (m_1 + m_2) V , \qquad (10.34)$$

tj.

$$V = v \frac{m_1}{m_1 + m_2} . \qquad (10.35)$$

Společnou rychlost obou objektů, které při srážce splynuly, jsme označili V. Z rov. (10.35) plyne, že tato rychlost je vždy menší než rychlost pohybujícího se tělesa před srážkou.

Obr. 10.12 dokumentuje skutečnost, že pohyb těžiště soustavy není dokonale nepružnou srážkou ovlivněn (porovnejte tento obrázek s obr. 10.8). I když při nepružné srážce dochází ke ztrátě kinetické energie *soustavy*, zůstává kinetická energie *těžiště* nedotčena. Je tedy vůbec možné, aby při nějaké dokonale nepružné srážce došlo ke ztrátě veškeré kinetické energie soustavy? Vzhledem k tomu, že kinetickou energii soustavy po takové srážce lze vyjádřit jako kinetickou energii jejího těžiště, stačí spojit vztažnou soustavu, v níž sledujeme pohyb částic, právě s těžištěm. Zákon zachování hybnosti zaručuje, že tato těžišťová soustava je inerciální. V případě srážky střely s těžkým terčem ($m_2 \gg m_1$) těžiště soustavy prakticky splývá s polohou terče. Příkladem takové situace je třeba pád hroudy tmelu na zem. Terčem je v tomto případě sama Země. Veškerá kinetická energie hroudy tak „zmizí“ ve prospěch jiných druhů energie.

Jsou-li před srážkou obě tělesa v pohybu, nahradíme vztah (10.34) rovnicí

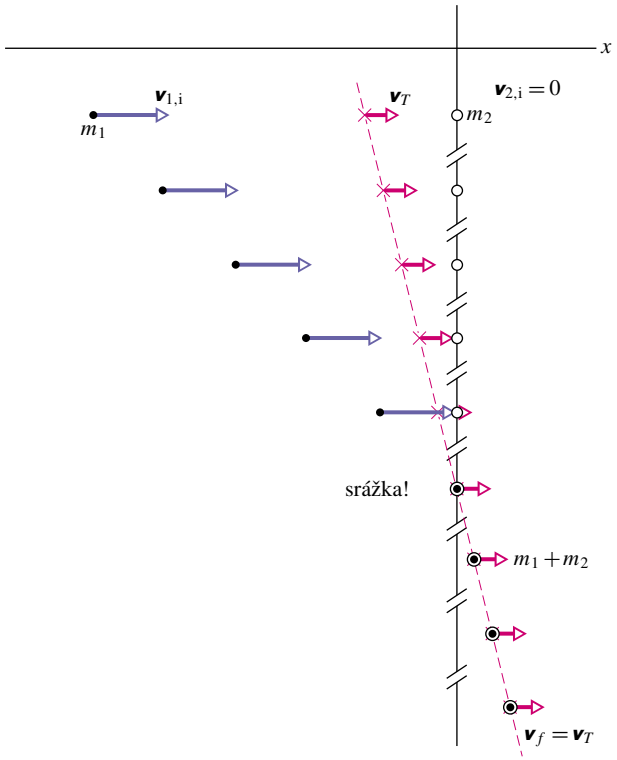
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V, \qquad (10.36)$$

kde $m_1 v_1$ a $m_2 v_2$ jsou počáteční hybnosti těles 1 a 2. Také v tomto případě je vztažná soustava spojená s těžištěm dvojice těles inerciální a výsledná kinetická energie soustavy po srážce je vzhledem k ní nulová. Příkladem může být situace na obr. 10.13, zachycujícím výsledek téměř čelní nepružné srážky dvou stejných automobilů, které jely stejnou rychlostí. Před srážkou bylo těžiště soustavy vzhledem k Zemi v klidu. Vzhledem k pozorovateli na chodníku se tedy oba automobily bezprostředně po srážce zcela zastavily.

KONTROLA 5: Určete výslednou hybnost soustavy dvou těles po dokonale nepružné přímé srážce. Počáteční hybnosti těles jsou (a) $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a 0, (b) $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a $4\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, (c) $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a $-4\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$?

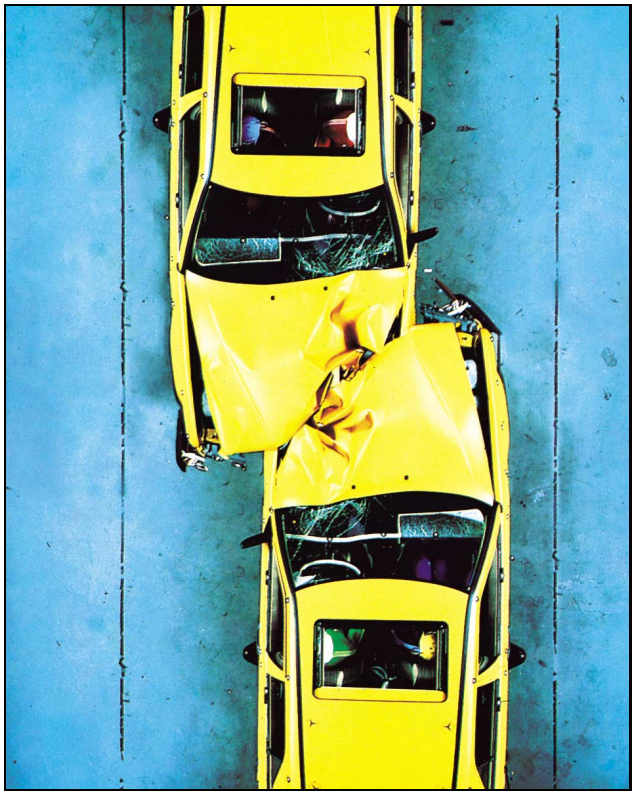
PŘÍKLAD 10.5

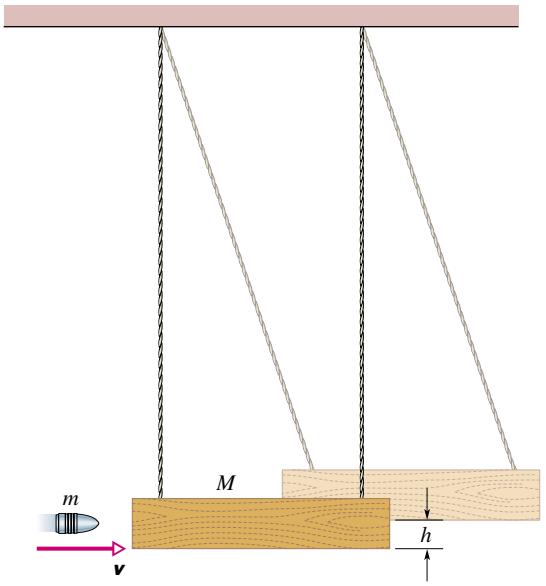
Dokud nebyla k dispozici zařízení pro elektronické měření času, užívalo se k měření rychlosti projektilů střelných zbraní tzv. *balistické kyvadlo*. Jedna z možností, jak takové kyvadlo zkonstruovat, je znázorněna na obr. 10.14. Dřevěný hranol o hmotnosti $M = 5{,}4\,\mathrm{kg}$ je zavěšen na dvou dlouhých závěsech. Kulka o hmotnosti $m = 9{,}5\,\mathrm{g}$, vystřelená z testované zbraně, hranol zasáhne a uvázne v něm. Soustava *hranol + kulka* se vychýlí z rovnovážné polohy. Největší výška výstupu těžiště soustavy je $h = 6{,}3\,\mathrm{cm}$.



Obr. 10.12 Momentky zachycující průběh dokonale nepružné srážky dvou těles. Těleso 2 je zpočátku v klidu. Tělesa se při srážce spojí a pohybují se společně. V obrázku je vyznačena i rychlost těžiště soustavy. Všimněte si, že není srážkou nijak ovlivněna a je shodná se společnou rychlostí spojených těles. Velikosti vektorů rychlosti odpovídají případu $m_2 = 3m_1$.

Obr. 10.13 Dva automobily po dokonale nepružné, téměř čelní srážce.





Obr. 10.14 Příklad 10.5. Balistické kyvadlo k měření rychlosti střel.

(a) Jakou rychlost měla kulka těsně před srážkou s hranolem?

ŘEŠENÍ: Označme symbolem V rychlost soustavy *hranol+kulka* těsně po srážce. Podle zákona zachování hybnosti je

$$mv = (m + M)V.$$

Protože kulka uvázne v hranolu, jedná se o dokonale nepružnou srážku. Kinetická energie se při ní změní. *Po srážce* se však již mechanická energie soustavy kyvadlo+Země *zachovává*, pokud zanedbáme odpor prostředí. Kinetická energie kyvadla v rovnovážné poloze je tedy shodná s tíhovou potenciální energií soustavy v okamžiku, kdy je kyvadlo v bodě obratu:

$$\tfrac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh.$$

Vyloučíme-li z posledních dvou rovnic rychlost V, dostaneme

$$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh} =$$
$$= \left(\frac{5{,}4\,\mathrm{kg} + 0{,}009\,5\,\mathrm{kg}}{0{,}009\,5\,\mathrm{kg}}\right)\sqrt{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(0{,}063\,\mathrm{m})} =$$
$$= 630\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Balistické kyvadlo můžeme chápat jako zařízení, které „převede“ velkou rychlost lehké střely na malou, a tedy mnohem lépe měřitelnou, rychlost těžkého hranolu.

(b) Určete počáteční kinetickou energii střely. Jak velkou její část představuje mechanická energie balistického kyvadla po srážce?

ŘEŠENÍ: Kinetická energie kulky před srážkou je

$$E_{k,b} = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}009\,5\,\mathrm{kg})(630\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 =$$
$$= 1\,900\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

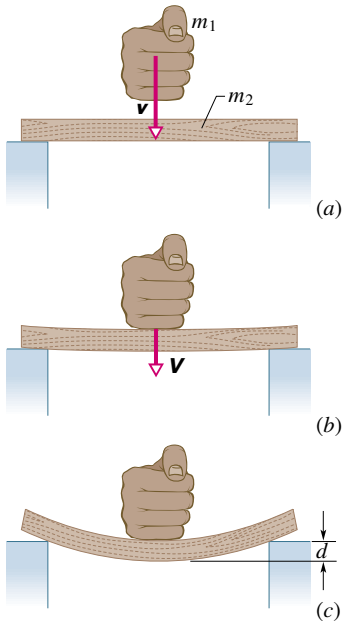
Mechanická energie soustavy kyvadlo+Země je stálá a shodná s její potenciální energií v okamžiku, kdy je kyvadlo v bodě obratu

$$E = (M + m)gh =$$
$$= (5{,}4\,\mathrm{kg} + 0{,}009\,5\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(0{,}063\,\mathrm{m}) =$$
$$= 3{,}3\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při srážce se tedy kyvadlu předá pouhý zlomek (3,3/1 900, tj. 0,2 %) počáteční kinetické energie kulky. Zbytek přispěje k zahřátí soustavy, příp. se spotřebuje k deformaci a destrukci vláken dřeva.

PŘÍKLAD 10.6

Mistr karate zlomil jediným úderem ruky (hmotnost ruky je asi $m_1 = 0{,}70\,\mathrm{kg}$) dřevěnou desku hmotnosti 0,14 kg (obr. 10.15a). Totéž provedl s betonovou dlaždicí o hmotnosti 3,2 kg. Tuhost k pro pružný ohyb desky má hodnotu $4{,}1{\cdot}10^4$ N/m a pro dlaždici $2{,}6{\cdot}10^6$ N/m. Deska praskne v okamžiku, kdy je prohnuta o $d = 16\,\mathrm{mm}$, u dlaždice stačí prohnutí o pouhý 1,1 mm (obr. 10.15c).*



Obr. 10.15 Příklad 10.6. (a) Mistr karate udeřil do ploché desky. Rychlost ruky těsně před úderem je $\boldsymbol{v}$. (b) Srážka ruky s deskou je dokonale nepružná. Po celou dobu trvání fáze ohybu mají ruka i deska společnou rychlost $\boldsymbol{V}$. (c) Deska praskne v okamžiku, kdy je její střed vychýlen o vzdálenost d.

(a) Určete pružnou energii při deformace desky a dlaždice bezprostředně před zlomením.

* Hodnoty jsou převzaty z S. R. Wilk, R. E. McNair a M. S. Feld: „The Physics of Karate“, American Joural of Physics, September 1983.

ŘEŠENÍ: Pružný průhyb nosníku je popsán Hookovým zákonem. Podle vztahu (8.11) má tedy jeho deformační energie hodnotu $E_p = \frac{1}{2}kd^2$. Pro desku pak platí

$$E_p = \tfrac{1}{2}(4{,}1\cdot 10^4\ \mathrm{N\cdot m^{-1}})(0{,}016\ \mathrm{m})^2 = \\ = 5{,}248\ \mathrm{J} \doteq 5{,}2\ \mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pro dlaždici je

$$E_p = \tfrac{1}{2}(2{,}6\cdot 10^6\ \mathrm{N\cdot m^{-1}})(0{,}001\,1\ \mathrm{m})^2 = \\ = 1{,}573\ \mathrm{J} \doteq 1{,}6\ \mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká musí být nejmenší rychlost ruky před úderem, aby se deska, resp. dlaždice zlomila? Srážku považujeme za dokonale nepružnou (obr. 10.15b). Dále předpokládáme, že se mechanická energie soustavy ruka + deska během pružného ohybu desky zachovává a že společná rychlost ruky i desky je bezprostředně před prasknutím desky nulová (obr. 10.15b).

ŘEŠENÍ: Ze zákona zachování mechanické energie při ohybu desky je zřejmé, že kinetická energie soustavy ruka + + deska na samém počátku ohybu je shodná s její elastickou energií E_p těsně před zlomením. Tato hodnota činí 5,2 J pro dřevěnou desku a 1,6 J pro betonovou dlaždici. Rychlost dopadající ruky musí být dostatečná k tomu, aby soustava ruka + deska měla po dokonale nepružné srážce potřebnou kinetickou energii E_k. Nejprve vypočteme společnou rychlost V soustavy ruka + deska na počátku ohybu. Vyjdeme z rovnosti kinetické energie a elastické energie a dostaneme

$$E_k = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = E_p,$$

tj.

$$V = \sqrt{\frac{2E_p}{m_1 + m_2}}.$$

Dosazením hodnot $m_1 = 0{,}70\ \mathrm{kg}$ a $m_2 = 0{,}14\ \mathrm{kg}$ pro desku a 3,2 kg pro dlaždici dostaneme pro desku

$$V = \sqrt{\frac{2(5{,}248\ \mathrm{J})}{(0{,}70\ \mathrm{kg} + 0{,}14\ \mathrm{kg})}} = 3{,}534\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Pro dlaždici je

$$V = \sqrt{\frac{2(1{,}573\ \mathrm{J})}{(0{,}70\ \mathrm{kg} + 3{,}2\ \mathrm{kg})}} = 0{,}898\,1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Označme písmenem v rychlost ruky těsně před dopadem na desku či dlaždici. Srážka je popsána vztahem (10.35), ze kterého malou úpravou dostaneme

$$v = \frac{m_1 + m_2}{m_1} V.$$

Pro desku dostáváme

$$v = \left(\frac{0{,}70\ \mathrm{kg} + 0{,}14\ \mathrm{kg}}{0{,}70\ \mathrm{kg}}\right)(3{,}534\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}) \doteq \\ \doteq 4{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

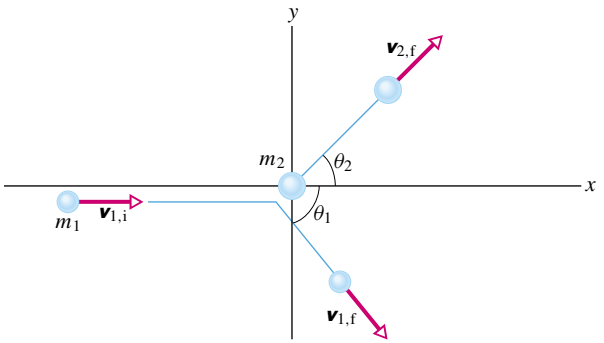
a pro dlaždici

$$v = \left(\frac{0{,}70\ \mathrm{kg} + 3{,}2\ \mathrm{kg}}{0{,}70\ \mathrm{kg}}\right)(0{,}898\,1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}) \doteq \\ \doteq 5{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

Aby se zlomila dlaždice, musí být úder ruky asi o 20 % rychlejší než u dřevěné desky. Vlivem větší hmotnosti dlaždice se na zvýšení vnitřní energie soustavy spotřebuje větší část původní kinetické energie ruky než v případě dřevěné desky.

10.5 ŠIKMÉ SRÁŽKY

Doposud jsme se zabývali velmi speciálním případem srážek, tzv. přímými srážkami. Počáteční rychlosti obou srážejících se částic při nich ležely v jedné přímce. Od tohoto požadavku nyní ustoupíme a budeme se věnovat obecnějšímu případu, srážkám **šikmým**. Při nich mohou být počáteční rychlosti obou částic zcela obecné. I nejobecnější situaci však můžeme převést na případ srážky střely s pevným terčem. Stačí, abychom vztažnou soustavu pro popis srážky spojili s kteroukoli z obou částic, která se tak stane terčem. (Pokud částice tvoří izolovanou soustavu a mají stálé hmotnosti, bude tato vztažná soustava inerciální.) Typická ukázka takové situace je znázorněna na obr. 10.16: po srážce se tělesa pohybují v různých směrech, které s původním směrem střely svírají úhly θ_1 a θ_2.



Obr. 10.16 Pružná *šikmá* srážka dvou částic, z nichž jedna je před srážkou v klidu.

Ze zákona zachování hybnosti dostaneme pro situaci na obr. 10.16 dvě skalární rovnice, pro x-ovou a y-ovou

složku celkové hybnosti soustavy:

$$m_1 v_{1,\mathrm{i}} = m_1 v_{1,\mathrm{f}} \cos\theta_1 + m_2 v_{2,\mathrm{f}} \cos\theta_2 \qquad (10.37)$$

(x-ová složka)

a

$$0 = -m_1 v_{1,\mathrm{f}} \sin\theta_1 + m_2 v_{2,\mathrm{f}} \sin\theta_2 \qquad (10.38)$$

(y-ová složka).

Při pružné srážce se navíc zachovává i kinetická energie, tj.

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{i}}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{f}}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,\mathrm{f}}^2 \qquad (10.39)$$

(kinetická energie).

Tyto tři rovnice obsahují sedm veličin: dvě hmotnosti m_1 a m_2, tři rychlosti $v_{1,\mathrm{i}}$, $v_{1,\mathrm{f}}$ a $v_{2,\mathrm{f}}$ a konečně dva úhly θ_1 a θ_2. Budeme-li znát kterékoliv čtyři z nich, určíme zbývající tři řešením soustavy rovnic (10.37) až (10.39). Velmi častá je situace, kdy jsou zadány obě hmotnosti, počáteční rychlost střely a jeden z úhlů. Výpočtem pak najdeme velikosti dvou výsledných rychlostí a zbývající úhel.

KONTROLA 6: Počáteční hybnost střely při srážce na obr. 10.16 má velikost $6\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, x-ová složka výsledné hybnosti střely je $4\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a y-ová má hodnotu $-3\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Určete (a) x-ovou a (b) y-ovou složku výsledné hybnosti terče.

PŘÍKLAD 10.7

Dvě částice stejných hmotností, z nichž jedna je v klidu, se pružně srazí. Ukažte, že po šikmé srážce se částice pohybují v navzájem kolmých směrech.

ŘEŠENÍ: Problém samozřejmě můžeme řešit přímo pomocí rov. (10.37), (10.38) a (10.39). Všimneme si však ještě jiného, elegantnějšího, postupu:

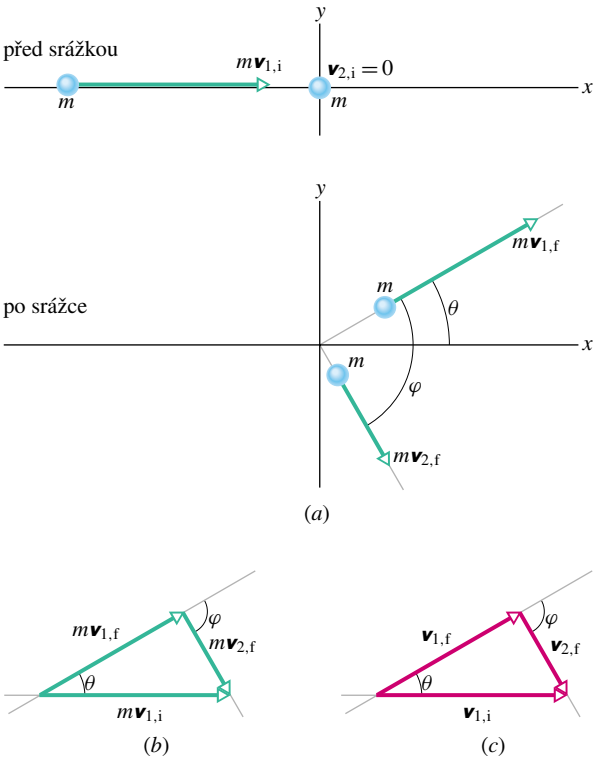
Obr. 10.17a ukazuje situaci před srážkou i po ní, s vyznačením vektorů hybností obou částic. Protože platí zákon zachování hybnosti, musí tyto tři vektory tvořit trojúhelník, zakreslený na obr. 10.17b. (Vektor $m\boldsymbol{v}_{1,\mathrm{i}}$ je součtem vektorů $m\boldsymbol{v}_{1,\mathrm{f}}$ a $m\boldsymbol{v}_{2,\mathrm{f}}$.) Hmotnosti obou částic jsou stejné, takže trojúhelník sestrojený stejným způsobem z vektorů rychlosti (obr. 10.17c) musí být podobný trojúhelníku na obr. 10.17b. Platí tedy

$$\boldsymbol{v}_{1,\mathrm{i}} = \boldsymbol{v}_{1,\mathrm{f}} + \boldsymbol{v}_{2,\mathrm{f}}. \qquad (10.40)$$

Navíc platí rov. (10.39), která vyplývá ze zákona zachování kinetické energie soustavy. Členy $\frac{1}{2}m$ můžeme v této rovnici vykrátit a dostaneme

$$v_{1,\mathrm{i}}^2 = v_{1,\mathrm{f}}^2 + v_{2,\mathrm{f}}^2. \qquad (10.41)$$

Poslední rovnice ovšem představuje také vztah pro délky stran trojúhelníka na obr. 10.17c. Tento trojúhelník je nutně pravoúhlý (rov. (10.41) je vlastně zápisem Pythagorovy věty). Úhel φ mezi vektory $\boldsymbol{v}_{1,\mathrm{f}}$ a $\boldsymbol{v}_{2,\mathrm{f}}$ na obr. 10.17 je tedy 90°. Ověřili jsme tak hypotézu vyslovenou v zadání úlohy.



Obr. 10.17 Příklad 10.7. Názorný důkaz tvrzení, že při pružné *šikmé* srážce dvou částic stejných hmotností, z nichž jedna je před srážkou v klidu, jsou jejich výsledné rychlosti kolmé.

PŘÍKLAD 10.8

Dva krasobruslaři směřující ke společnému místu kluziště se při setkání obejmou a realizují tak dokonale nepružnou srážku. Situace před srážkou a po ní je znázorněna na obr. 10.18. Aleš (hmotnost $m_\mathrm{A} = 83\,\mathrm{kg}$) se před srážkou pohyboval východním směrem rychlostí $v_\mathrm{A} = 6{,}2\,\mathrm{km/h}$. Barbora (hmotnost $m_\mathrm{B} = 55\,\mathrm{kg}$) směřovala na sever rychlostí $v_\mathrm{B} = 7{,}8\,\mathrm{km/h}$. Počátek soustavy souřadnic jsme zvolili v místě, kde došlo ke srážce, volba souřadnicových os je zřejmá z obrázku.

(a) Jakou rychlostí $\boldsymbol{V}$ se dvojice pohybuje po srážce?

ŘEŠENÍ: Při srážce platí zákon zachování hybnosti. Jeho rozepsáním do složek dostaneme

$$m_\mathrm{A} v_\mathrm{A} = MV\cos\theta \qquad (x\text{-ová složka}) \qquad (10.42)$$

a

$$m_\mathrm{B} v_\mathrm{B} = MV\sin\theta \qquad (y\text{-ová složka}). \qquad (10.43)$$

Platí $M = m_A + m_B$. Vydělíme-li rov. (10.43) rov. (10.42), pak

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{(55\,\mathrm{kg})(7{,}8\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})}{(83\,\mathrm{kg})(6{,}2\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})} = 0{,}834.$$

Odtud

$$\theta = 39{,}8^\circ \doteq 40^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

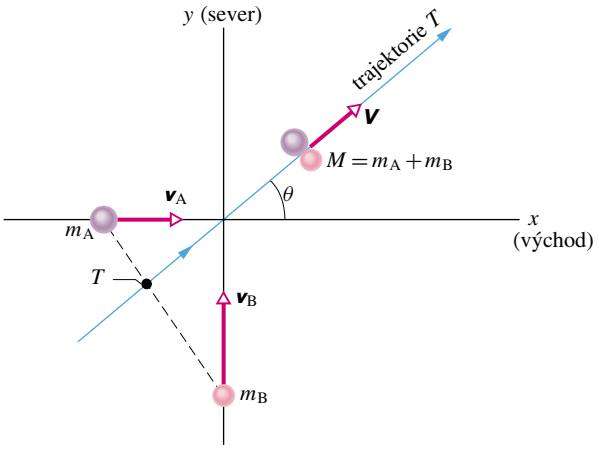
Z rov. (10.43) dostaneme

$$V = \frac{m_B v_B}{M \sin\theta} = \frac{(55\,\mathrm{kg})(7{,}8\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})}{(83\,\mathrm{kg}+55\,\mathrm{kg})\sin 39{,}8^\circ} = \\ = 4{,}86\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \doteq 4{,}9\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou rychlostí se pohybuje těžiště soustavy před srážkou a po srážce?

ŘEŠENÍ: Tuto otázku můžeme zodpovědět, aniž bychom cokoli počítali. Po srážce je rychlost těžiště stejná jako rychlost V, vypočtená v části (a), tj. 4, 9 $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ na severovýchod, pod úhlem 40° vzhledem k místní rovnoběžce. Rychlost pohybu těžiště není srážkou ovlivněna.

(c) Kolikrát se při srážce zmenší kinetická energie soustavy obou krasobruslařů?



Obr. 10.18 Příklad 10.8. Dva bruslaři, Aleš (A) a Barbora (B) (v obrázku, představujícím pohled shora, jsou pro jednoduchost znázorněni kuličkami) se setkají a pevně se spojí. Realizují tak dokonale nepružnou srážku, po které se pohybují společnou rychlostí $\boldsymbol{V}$, která svírá se směrem počáteční rychlosti Aleše úhel θ. V obrázku je také vyznačen pohyb těžiště soustavy bruslařů a poloha těžiště ve výchozí situaci.

ŘEŠENÍ: Kinetická energie před srážkou je

$$E_{k,i} = \tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 = \\ = \tfrac{1}{2}(83\,\mathrm{kg})(6{,}2\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2 + (\tfrac{1}{2})(55\,\mathrm{kg})(7{,}8\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2 = \\ = 3\,270\,\mathrm{kg{\cdot}km^2{\cdot}h^{-2}}.$$

Kinetická energie po srážce je

$$\tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2}(83\,\mathrm{kg}+55\,\mathrm{kg})(4{,}86\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2 = \\ = 1\,630\,\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2.$$

Hledaný poměr α je tedy

$$\alpha = \frac{E_{k,f} - E_{k,i}}{E_{k,i}} = \\ = \left(\frac{1\,630\,\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2 - 3\,270\,\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2}{3\,270\,\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2}\right) = \\ = -0{,}50. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při srážce bruslaři ztratí 50 % kinetické energie.

KONTROLA 7: Jak by se změnil úhel θ v příkladu 10.8 (obr. 10.18), kdyby Barbora byla (a) rychlejší, (b) hmotnější?

RADY A NÁMĚTY

Bod 10.1: *Jsou převody jednotek vždy nutné?*

Položme si otázku, zda je za všech okolností nutné převádět hodnoty veličin do soustavy jednotek SI.

Většinou je obvyklé vyjadřovat hodnoty fyzikálních veličin v jednotkách SI: například rychlost v metrech za sekundu, hmotnost v kilogramech apod. Někdy však není tento přepočet nutný. Při výpočtu úhlu θ v příkladu 10.8a jsme si mohli všimnout, že se jednotky vykrátily. Podobně se v příkladu 10.8c vykrátily jednotky ve výrazu pro poměr α. Nebylo tedy třeba převádět kinetickou energii na jouly. Poněvadž jsme si včas uvědomili, že se jednotky při výpočtu tak jako tak vykrátí, zůstali jsme u jednotek $\mathrm{kg{\cdot}km^2{\cdot}h^{-2}}$.



10.6 JADERNÉ REAKCE A RADIOAKTIVNÍ ROZPAD

Zvláštním druhem srážek jsou **jaderné reakce**. Může se při nich měnit jak identita, tak i počet interagujících částic. Všimneme si také *radioaktivního rozpadu*, při kterém se jedna částice rozpadne na dvě jiné. Při obou těchto jevech je sice stav soustavy „před událostí“ velice odlišný od stavu „po události“, hybnost soustavy a její *celková* energie se zachovávají. Při studiu problematiky jaderných reakcí či radioaktivního rozpadu tedy můžeme používat stejných metod jako u srážek.

PŘÍKLAD 10.9

Radioaktivní jádro uranu ^{235}U se samovolně rozpadne na thorium ^{231}Th a α-částici (jádro atomu helia, označované jako α nebo $^4_2$He):

$$^{235}\mathrm{U} \rightarrow \alpha + {}^{231}\mathrm{Th}.$$

Částice alfa ($m_\alpha = 4{,}00\,\mathrm{u}$) získá při rozpadu kinetickou energii $E_{\mathrm{k},\alpha} = 4{,}60\,\mathrm{MeV}$. Jaká je kinetická energie jádra ^{231}Th ($m_{\mathrm{Th}} = 231\,\mathrm{u}$)?

ŘEŠENÍ: Jádro ^{235}U bylo před rozpadem v klidu vzhledem k laboratorní vztažné soustavě. Po rozpadu odletí částice α s kinetickou energií $E_{\mathrm{k},\alpha}$ a jádro ^{231}Th se začne pohybovat opačným směrem s kinetickou energií $E_{\mathrm{k,Th}}$. Ze zákona zachování hybnosti dostaneme

$$0 = m_{\mathrm{Th}} v_{\mathrm{Th}} + m_\alpha v_\alpha,$$

tj.

$$m_{\mathrm{Th}} v_{\mathrm{Th}} = -m_\alpha v_\alpha. \qquad (10.44)$$

Obě strany rov. (10.44) umocníme na druhou:

$$m_{\mathrm{Th}}^2 v_{\mathrm{Th}}^2 = m_\alpha^2 v_\alpha^2. \qquad (10.45)$$

Užitím vztahu pro kinetickou energii $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m v^2$ můžeme rov. (10.45) přepsat ve tvaru

$$m_{\mathrm{Th}} E_{\mathrm{k,Th}} = m_\alpha E_{\mathrm{k},\alpha}.$$

Je tedy

$$E_{\mathrm{k,Th}} = E_{\mathrm{k},\alpha} \frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Th}}} = (4{,}60\,\mathrm{MeV}) \left(\frac{4{,}00\,\mathrm{u}}{231\,\mathrm{u}} \right) =$$
$$= 7{,}97 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{MeV} = 79{,}7\,\mathrm{keV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kinetická energie soustavy po rozpadu je součtem hodnot 4,60 MeV (α-částice) a 0,079 7 MeV (jádro thoria), tj. 4,68 MeV. Těžké jádro atomu ^{231}Th však nese pouhých 1,7 % celkové hodnoty.

PŘÍKLAD 10.10

Nejdůležitější jadernou reakcí, při níž se uvolňuje energie během slučování (fúze) jader, je tak zvaná d-d reakce. Její schéma můžeme zapsat takto:

$$\mathrm{d} + \mathrm{d} = \mathrm{t} + \mathrm{p}. \qquad (10.46)$$

Jednotlivé symboly v této rovnici označují různé izotopy vodíku. Jejich charakteristiky jsou uvedeny v následující tabulce:

SYMBOLY		JMÉNO	HMOTNOST
p	^{1}H	proton	$m_{\mathrm{p}} = 1{,}007\,83\,\mathrm{u}$
d	^{2}H	deuteron	$m_{\mathrm{d}} = 2{,}014\,10\,\mathrm{u}$
t	^{3}H	triton	$m_{\mathrm{t}} = 3{,}016\,05\,\mathrm{u}$

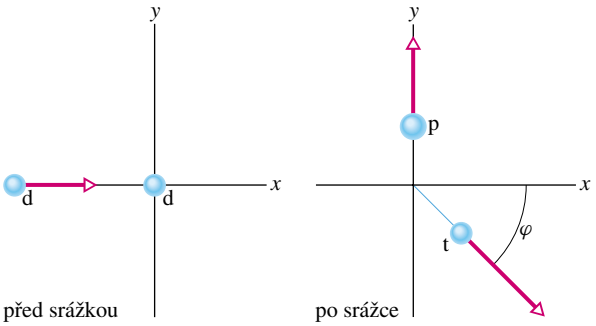
(a) Jak velká energie se uvolní v důsledku hmotnostního schodku Δm?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (8.40) je energie Q uvolněná či spotřebovaná při reakci dána vztahem $Q = -\Delta m c^2$. V našem případě je $\Delta m = m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{t}} - 2m_{\mathrm{d}}$. Je tedy

$$Q = -\Delta m c^2 = (2m_{\mathrm{d}} - m_{\mathrm{p}} - m_{\mathrm{t}})c^2 =$$
$$= (2 \cdot 2{,}014\,10\,\mathrm{u} - 1{,}007\,83\,\mathrm{u} - 3{,}016\,05\,\mathrm{u}) \cdot$$
$$\cdot (931{,}5\,\mathrm{MeV/u}) =$$
$$= (0{,}004\,32\,\mathrm{u})(931{,}5\,\mathrm{MeV/u}) =$$
$$= 4{,}02\,\mathrm{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při výpočtu jsme pro c^2 použili hodnotu 931,5 MeV/u (vztah (8.43)).

Kladná hodnota Q (jako např. v této úloze) značí, že reakce je **exotermická** a energie uvolněná díky hmotnostnímu schodku se předá vzniklým částicím v podobě energie kinetické. Tato hodnota představuje nepatrný zlomek hmotnosti výchozích částic. Činí $0{,}004\,32/(2 \cdot 2{,}014\,10) \sim 0{,}001$, tj. asi 0,1 %. Při **endotermických** reakcích je hodnota Q naopak záporná. Dochází při nich k úbytku kinetické energie interagujících částic, který přispěje ke zvýšení hmotnosti produktů reakce. Při $Q = 0$ představuje reakce *pružnou* srážku. Hmotnost ani kinetická energie soustavy se při ní nemění.



Obr. 10.19 Příklad 10.10. Letící deuteron (d) narazí do jiného deuteronu, který je v klidu. Dojde k jaderné reakci, při které vznikne proton (p) a triton (t).

(b) Uvažujme srážku dvou deuteronů, z nichž jeden má kinetickou energii $E_{\mathrm{k,d}} = 1{,}50\,\mathrm{MeV}$ a druhý je v klidu. Dojde k reakci popsané rov. (10.46). Proton vzniklý při reakci se pohybuje ve směru kolmém k počáteční rychlosti prvního deuteronu a má kinetickou energii 3,39 MeV (obr. 10.19). Určete kinetickou energii tritonu.

ŘEŠENÍ: Energie Q uvolněná při reakci díky hmotnostnímu schodku přispěje ke zvýšení kinetické energie soustavy. Platí tedy

$$Q = \Delta E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k,p}} + E_{\mathrm{k,t}} - E_{\mathrm{k,d}}.$$

Hodnotu Q jsme již určili v části (a) této úlohy. Z předchozího vztahu vyjádříme kinetickou energii tritonu $E_{\mathrm{k,t}}$:

$$E_{\mathrm{k,t}} = Q + E_{\mathrm{k,d}} - E_{\mathrm{k,p}} =$$
$$= (4{,}02\,\mathrm{MeV} + 1{,}50\,\mathrm{MeV} - 3{,}39\,\mathrm{MeV}) =$$
$$= 2{,}13\,\mathrm{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaký úhel svírá směr pohybu tritonu se směrem pohybu prvního deuteronu (obr. 10.19)?

ŘEŠENÍ: Při reakci popsané rov. (10.46) platí samozřejmě i zákon zachování hybnosti. Ten jsme však dosud nepoužili. Přivede nás ke dvěma skalárním rovnicím

$$m_\mathrm{d} v_\mathrm{d} = m_\mathrm{t} v_\mathrm{t} \cos\varphi \quad (x\text{-ová složka}), \tag{10.47}$$

$$0 = m_\mathrm{p} v_\mathrm{p} + m_\mathrm{t} v_\mathrm{t} \sin\varphi \quad (y\text{-ová složka}). \tag{10.48}$$

Z rov. (10.48) plyne

$$\sin\varphi = -\frac{m_\mathrm{p} v_\mathrm{p}}{m_\mathrm{t} v_\mathrm{t}}. \tag{10.49}$$

S použitím vztahu pro kinetickou energii ($E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v^2$) můžeme hybnost mv vyjádřit ve tvaru $\sqrt{2mE_\mathrm{k}}$ a přepsat rov. (10.49) takto:

$$\sin\varphi = -\sqrt{\frac{m_\mathrm{p} E_\mathrm{k,p}}{m_\mathrm{t} E_\mathrm{k,t}}} = -\sqrt{\frac{(1{,}01\,\mathrm{u})(3{,}39\,\mathrm{MeV})}{(3{,}02\,\mathrm{u})(2{,}13\,\mathrm{MeV})}} = -0{,}730,$$

$$\varphi = -46{,}9^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Srážky

Srážkou rozumíme děj, při němž na sebe dvě tělesa (příp. i více těles) působí po krátkou dobu značnými silami. Tyto síly jsou vnitřními silami soustavy těles, která se účastní srážky. Bývají mnohem větší než síly vnější, které mohou během srážky na soustavu rovněž působit. Zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie soustavy tvořené oběma tělesy umožňují předpovědět výsledek srážky na základě porovnání těchto veličin bezprostředně před srážkou a bezprostředně po ní. Mohou také napomoci k pochopení podstaty interakčních sil, jimiž na sebe tělesa během srážky působí.

Impulz síly a hybnost

Z druhého Newtonova zákona lze odvodit **vztah mezi změnou hybnosti** částice a **impulzem** výslednice sil, které na ni působí

$$\boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i} = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{J}, \tag{10.4}$$

kde $\boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i} = \Delta\boldsymbol{p}$ je změna hybnosti částice a $\boldsymbol{J}$ je **impulz** výslednice sil $\boldsymbol{F}(t)$

$$\boldsymbol{J} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{10.3}$$

Označíme-li pro případ srážky probíhající v ose x symbolem $\overline{F}$ průměrnou hodnotu síly $\boldsymbol{F}_x(t)$ v časovém intervalu Δt měřeném od okamžiku t_i do okamžiku t_f, dostaneme vztah

$$J = \overline{F}\,\Delta t. \tag{10.8}$$

Průměrná síla působící na pevné těleso při dopadu částic o hmotnosti m a rychlosti v, jejichž tok je ustálený, je dána vztahem

$$\overline{F} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v, \tag{10.10}$$

kde zlomek $n/\Delta t$ představuje počet částic, které na těleso dopadnou za každou sekundu, a Δv je změna rychlosti každé z těchto částic při srážce. Průměrnou sílu můžeme také vyjádřit ve tvaru

$$\overline{F} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\,\Delta v, \tag{10.13}$$

kde $\Delta m/\Delta t$ je hmotnostní tok dopadajících částic. Pokud se částice při srážce zastaví, je třeba dosadit do vztahů (10.10) a (10.13) hodnotu $\Delta v = -v$. Jestliže se pružně odrazí, je $\Delta v = -2v$.

Pružná přímá srážka

Při *pružné srážce* se zachovává celková kinetická energie soustavy těles účastnících se srážky. Při pružné přímé srážce dvou těles, při níž je některé z nich před srážkou v klidu (střela 1 narazí do tzv. pevného terče 2), vedou zákony zachování hybnosti a kinetické energie soustavy k následujícím vztahům pro výsledné rychlosti těles:

$$v_{1,\mathrm{f}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,\mathrm{i}} \tag{10.18}$$

a

$$v_{2,\mathrm{f}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,\mathrm{i}}. \tag{10.19}$$

Index (i) označuje hodnoty veličin před srážkou, index (f) odpovídá situaci po srážce. Jsou-li před srážkou v pohybu obě tělesa, jsou jejich rychlosti bezprostředně po srážce dány vztahy

$$v_{1,\mathrm{f}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,\mathrm{i}} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2,\mathrm{i}} \tag{10.28}$$

a

$$v_{2,\mathrm{f}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,\mathrm{i}} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2,\mathrm{i}}. \tag{10.29}$$

Přímá nepružná srážka

Při *nepružné srážce* se již celková kinetická energie soustavy těles nezachovává. Zákon zachování hybnosti soustavy však platí. Pokud tělesa při srážce splynou, jedná se o **dokonale nepružnou srážku**. Tento případ odpovídá největšímu přípustnému poklesu kinetické energie soustavy (ze všech možností průběhu nepružné srážky se stejnými výchozími podmínkami). (Kinetická energie soustavy nemusí však klesnout až k nulové hodnotě.) Při přímé

dokonale nepružné srážce střely o rychlosti v s pevným terčem vyplývá vztah pro společnou rychlost V obou těles po srážce přímo ze zákona zachování hybnosti:

$$m_1 v = (m_1 + m_2)V. \tag{10.34}$$

Pokud se před srážkou pohybují obě tělesa, má zákon zachování hybnosti tvar

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V. \tag{10.36}$$

Pohyb těžiště

Pohyb těžiště soustavy těles není jejich srážkou nijak ovlivněn, ať již jde o srážku pružnou, či nepružnou. V případě uzavřené izolované soustavy je rychlost jejího těžiště konstantní a platí pro ni

$$v_T = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_{1,\mathrm{i}} + m_2 v_{2,\mathrm{i}}}{m_1 + m_2} = \\ = \frac{m_1 v_{1,\mathrm{f}} + m_2 v_{2,\mathrm{f}}}{m_1 + m_2}. \tag{10.30}$$

Šikmé srážky

Při **šikmé** srážce se hybnost soustavy opět zachovává. Tentokrát však zákon zachování hybnosti vede ke dvěma skalárním rovnicím: pro x-ovou a y-ovou složku vektoru hybnosti. Jejich řešením můžeme získat rychlosti těles po srážce pouze za předpokladu, že je srážka dokonale nepružná. V tomto případě máme totiž k dispozici důležitý údaj o pohybovém stavu těles po srážce: tělesa se pohybují stejnou rychlostí. Snadno pak určíme i energiovou ztrátu, k níž při srážce došlo. V ostatních případech samozřejmě zákon zachování hybnosti a zákon zachování celkové energie soustavy (nikoli tedy jen kinetické) také platí. Neznáme-li však mechanismus srážky, nemůžeme o energiové bilanci předem říci nic bližšího. K vyřešení úlohy proto potřebujeme další údaje, například směr rychlosti některého z těles po srážce.

Jaderné reakce a radioaktivní rozpad

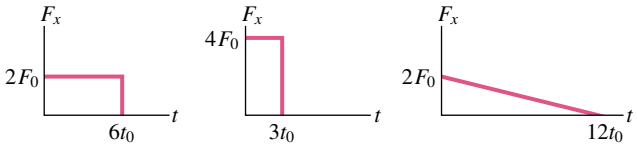
Při *jaderné reakci* nebo *radioaktivním rozpadu* jader se zachovává hybnost a *celková* energie soustavy. Proto i tyto děje řadíme do kategorie srážek. Jejich zvláštnost však spočívá v tom, že se při nich může měnit hmotnost soustavy i identita samotných částic. Změně celkové hmotnosti soustavy o hodnotu Δm odpovídá energiový ekvivalent $\Delta m c^2$. Odpovídající změna celkové energie soustavy je tedy dána vztahem

$$Q = -\Delta m\, c^2.$$

Je-li hodnota Q kladná, jedná se o tzv. **exotermickou** reakci. Energie Q, odpovídající hmotnostnímu schodku Δm, se projeví přírůstkem výsledné kinetické energie částic. Při záporné hodnotě Q jde o reakci **endotermickou**. Kinetická energie částic při ní klesá ve prospěch energie odpovídající zvýšení celkové hmotnosti soustavy.

OTÁZKY

1. Na obr. 10.20 jsou znázorněny tři grafy časové závislosti síly, která působila na jisté těleso při srážce. Seřaďte je sestupně podle velikosti impulzu síly.

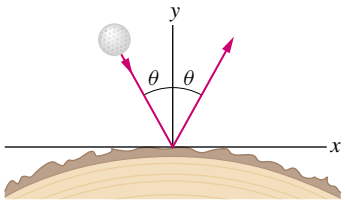


Obr. 10.20 Otázka 1

2. Obr. 10.21 ukazuje náraz golfového míčku do kmene stromu, viděný z nadhledu. Předpokládejme, že se velikost rychlosti míče při srážce nemění. Při nárazu působí kmen na míček silou $\boldsymbol{F}$, odpovídající změna hybnosti míčku je $\Delta\boldsymbol{p}$. Jak se změní následující veličiny, bude-li úhel θ větší? (Předpokládejte, že doba trvání srážky zůstane stejná.) (a) Δp_x, (b) Δp_y, (c) velikost vektoru $\Delta\boldsymbol{p}$, (d) F_x, (e) F_y a (f) velikost síly $\boldsymbol{F}$?

3. V následující tabulce jsou uvedeny hmotnosti (v kilogramech) a rychlosti (v metrech za sekundu) dvou částic z obr. 10.9. ve třech různých situacích. Ve kterých z nich je těžiště soustavy v klidu?

SITUACE	m_1	v_1	m_2	v_2
a	2	3	4	−3
b	6	2	3	−4
c	4	3	4	−3

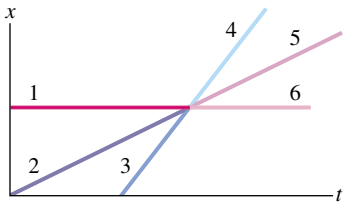


Obr. 10.21 Otázka 2

4. (a) Jak se změní výška výstupu koule 1 z př. 10.3 po odrazu, zvýší-li se hmotnost koule 2? Do jaké výšky vystoupí po odrazu (b) koule 1, resp. (c) koule 2, je-li $m_1 = m_2$?

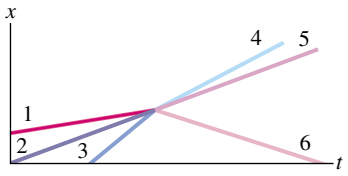
5. Dvě tělesa pohybující se podél osy x se pružně srazí. Grafy na obr. 10.22 představují časové závislosti jejich poloh a polohy

těžiště soustavy. Z grafu vyčtěte následující informace: (a) Je některé z těles před srážkou v klidu? Který z grafů přísluší poloze těžiště soustavy (b) před srážkou a (c) po srážce? (d) Rozhodněte, zda hmotnost tělesa, které bylo před srážkou rychlejší, je větší, menší, nebo stejná jako hmotnost druhého tělesa.



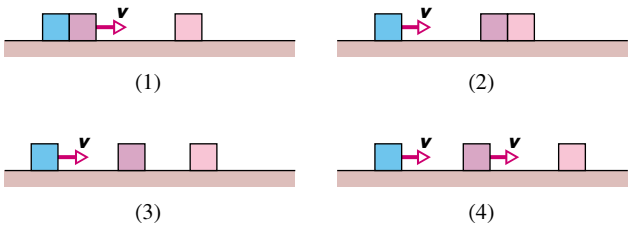
Obr. 10.22 Otázka 5

6. Na obr. 10.23 jsou grafy časové závislosti poloh dvou těles i polohy těžiště soustavy v případě přímé srážky. Zjistěte, který z nich odpovídá pohybu (a) rychlejšího tělesa před srážkou, (b) těžiště soustavy před srážkou a (c) po srážce, (d) každého z těles po srážce. (e) Rozhodněte, zda hmotnost tělesa, jehož rychlost před srážkou byla vyšší, je větší, menší, nebo stejná jako hmotnost druhého tělesa



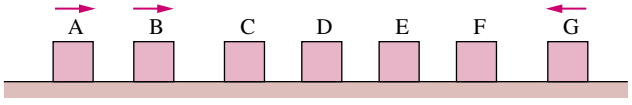
Obr. 10.23 Otázka 6

7. Na obr. 10.24 jsou čtyři různé situace při srážce tří stejných kostek, které se pohybují po dokonale hladké vodorovné podložce. Při srážkách (1) a (2) jsou dvě z kostek slepeny. Rychlost $\boldsymbol{v}$, která je v obrázku vyznačena, je ve všech případech stejná. Seřaďte jednotlivé situace sestupně podle (a) velikosti celkové hybnosti soustavy po srážce, (b) velikosti výsledné rychlosti kostky, která je nejdále vpravo.



Obr. 10.24 Otázka 7

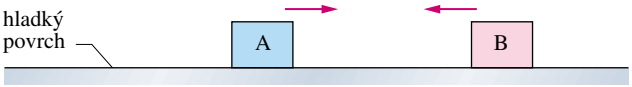
8. Obr. 10.25 zachycuje sedm kostek na dokonale hladké vodorovné podložce. Kostky A a B se zpočátku pohybují vpravo



Obr. 10.25 Otázka 8

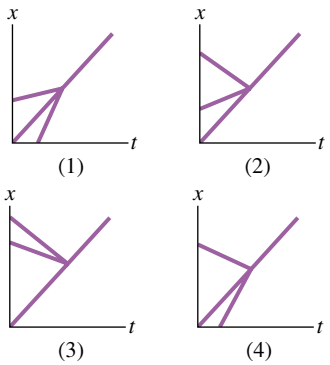
a kostka G vlevo. Velikost rychlosti každé z nich je $v = 3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Zbývající kostky jsou v klidu. Dojde k sérii pružných srážek. Určete vektory rychlosti všech kostek po poslední srážce.

9. Kostky A a B na obr. 10.26 se pohybují po dokonale hladké podložce ve vyznačených směrech. Velikosti jejich hybností jsou $9\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ (kostka A) a $4\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ (kostka B). (a) Určete směr pohybu těžiště soustavy. (b) Předpokládejme, že se obě kostky při srážce pevně spojí. Jakým směrem se bude pohybovat takto vzniklé těleso po srážce? (c) Experiment ukázal, že se těleso A pohybuje po srážce vlevo. Rozhodněte, zda je jeho hybnost větší, menší, nebo stejná jako hybnost tělesa B.

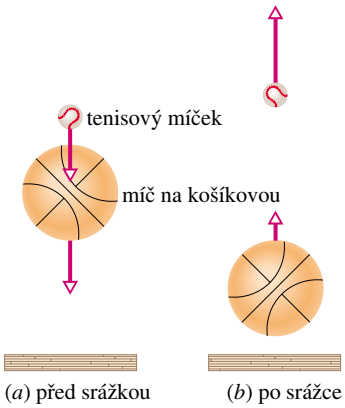


Obr. 10.26 Otázka 9

10. Na obr. 10.27 jsou čtyři grafy znázorňující časové závislosti polohy dvou těles pohybujících se podél osy x a časovou závislost polohy těžiště jejich soustavy. Tělesa se dokonale nepružně srazí. Pro případ grafu (1) zjistěte, zda se (a) obě tělesa a (b) těžiště soustavy pohybují v kladném, či záporném směru osy x. (c) Které z grafů představují fyzikálně nepřípustnou situaci?



Obr. 10.27 Otázka 10



Obr. 10.28 Otázka 12 a úloha 37

11. Těleso Q s hybností $\boldsymbol{p}_\mathrm{Q} = (2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j})\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ se dokonale

nepružně srazí s tělesem R, jehož hybnost je $\boldsymbol{p}_R = (8\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j})$ kg·m·s^{-1}. Určete směr pohybu obou těles po srážce.

12. Vyzkoušejme si následující pokus: vezmeme postupně tenisový míček a basketbalový míč a každý z nich upustíme na tvrdou podlahu přibližně z výšky ramen. Míče se odrazí a vyskočí obecně do různých výšek. Poté uspořádáme pokus tak, že tenisový míček vypustíme za basketbalovým míčem s malým časovým odstupem, avšak přesně nad ním (obr. 10.28a). Výsledek pokusu bude zcela jiný než v předchozím případě, možná na první pohled poněkud překvapivý. (a) Rozhodněte, zda výška výstupu basketbalového míče bude ve srovnání s výsledkem prvního pokusu větší, nebo menší (obr. 10.28b). (b) Rozhodněte, zda výška, do které po odrazu vystoupí tenisový míč, převýší součet výšek výstupu obou míčů po samostatných odrazech (úloha 37).

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 10.2 Impulz síly a hybnost

1C. Hybnost automobilu o hmotnosti 1 500 kg vzrostla během 12 s o 9,0·10^3 kg·m·s^{-1}. (a) Za předpokladu, že urychlující síla je konstantní, určete její velikost. (b) Určete přírůstek rychlosti automobilu.

2C. Kulečníkové tágo udeří do stojící koule průměrnou silou o velikosti 50 N. Úder trvá 10 ms. Jakou rychlost koule získá, je-li její hmotnost 0,20 kg?

3C. Výrobce automobilů testuje odolnost nových vozů při nárazu pomocí tzv. bariérových zkoušek. Při jedné z nich narazil automobil o hmotnosti 2 300 kg do mostního pilíře rychlostí 15 m·s^{-1}a zastavil se za 0,56 s. Předpokládejme, že při nárazu působila konstantní síla. Jaká byla její velikost?

4C. Míč o hmotnosti m narazil kolmo do zdi rychlostí $\boldsymbol{v}$ a odrazil se zpět stejně velkou rychlostí. (a) Určete průměrnou sílu, kterou stěna působila na míč, trval-li náraz po dobu Δt. (b) Pro číselný výpočet použijte hodnoty $m = 140$ g, $v = 7{,}8$ m·s^{-1}a $\Delta t = 3{,}8$ ms.

5C. Nadhazovač hodil baseballový míč rychlostí 40 m·s^{-1}. Pálkař jej odehrál zpět přesně v opačném směru rychlostí 60 m·s^{-1}. Určete průměrnou sílu, jíž působila pálka na míč, trval-li úder 5,0 ms.

6C. Jako sedmnáctiletý ohromoval artista Henri LaMothe diváky skoky z výšky 12 m do vody hluboké pouhých 30 cm (obr. 10.29). Za předpokladu, že se jeho pád zastavil právě u dna vodní nádrže, vypočtěte průměrnou brzdnou sílu, která na artistu o hmotnosti 73 kg ve vodě působila.

7C. V únoru 1955 byla zaznamenána pozoruhodná událost: jistému parašutistovi se po seskoku z výšky 366 m nepodařilo otevřít padák. Naštěstí spadl do sněhu, a tak byla jeho zranění jen nepatrná. Předpokládejme, že velikost jeho rychlosti měla bezprostředně před dopadem hodnotu 56 m·s^{-1}, jeho hmotnost činila 85 kg a velikost největší brzdné síly, kterou může člověk přežít, je 1,2·10^5 N. Určete nejmenší tloušťku sněhové pokrývky, v níž tehdy let parašutisty tak šťastně skončil.

8C. Při srážce trvající 27 ms působila na ocelovou kouli o hmotnosti 0,40 kg a rychlosti 14 m·s^{-1}stálá síla o velikosti 1 200 N. Určete výslednou rychlost koule, působila-li síla přímo proti směru jejího pohybu.



Obr. 10.29 Cvičení 6

9C. Medicinbal o hmotnosti 1,2 kg dopadne kolmo na podlahu rychlostí 25 m·s^{-1}a odrazí se v opačném směru rychlostí 10 m·s^{-1}. (a) Vypočtěte impulz síly, která na míč při odrazu působila. (b) Za předpokladu, že míč byl s podlahou v kontaktu 0,020 s, určete průměrnou sílu působící na míč během srážky.

10C. Hráč golfu odpálí míček rychlostí o velikosti 50 m·s^{-1} pod elevačním úhlem 30°. Předpokládejme, že míč má hmotnost 46 g a je v kontaktu s golfovou holí po dobu 1,7 ms. Určete (a) impulz síly, kterou při úderu působí hůl na míček, (b) impulz síly, která působí na golfovou hůl, (c) průměrnou sílu působící na míček a (d) práci, kterou vykonala síla působící na míček.

11Ú. Automobil o hmotnosti 1 400 kg jede na sever (kladný směr osy y) rychlostí 5,3 m·s^{-1}. Po průjezdu pravoúhlou pravotočivou zatáčkou (do kladného směru osy x), který trval 4,6 s, ztratí řidič na okamžik pozornost. Vůz narazí do stromu a zastaví

se za 350 ms. Pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic zapište vektor impulzu síly, která působila na vůz (a) při zatáčení, (b) při srážce. Jaká je velikost průměrné síly působící na vůz (c) při zatáčení a (d) při srážce? (e) Jaký úhel svírá průměrná síla vypočtená v části (c) s kladným směrem osy x?

12Ú. Velikost síly, která působí na těleso o hmotnosti 10 kg, rovnoměrně vzroste za 4,0 s z nulové hodnoty na hodnotu 50 N. Jakou rychlostí se těleso pohybuje na konci tohoto časového intervalu, bylo-li zpočátku v klidu?

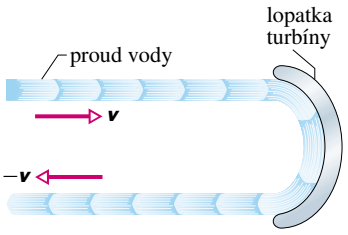
13Ú. Při střelbě z brokovnice do terče připevněného k nepohyblivé stěně dopadá na stěnu 10 broků za sekundu. Brok má hmotnost 2,0 g a do stěny narazí rychlostí 500 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Jaká je jeho hybnost a (b) kinetická energie? Určete velikost průměrné síly, jíž působí na zeď (c) jednotlivý brok, (d) proud broků. Předpokládáme, že srážka každého broku se zdí trvá 0,6 ms. Proč se hodnoty získané v částech (c) a (d) tak výrazně liší?

14Ú. Při střelbě ze samopalu používaného při natáčení filmů vyletují kulky o hmotnosti 50,0 g rychlostí 1 000 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Herec dokáže na samopal působit silou o velikosti nejvýše 180 N. Kolik ran za minutu může vypálit, aby samopal ještě udržel?

15Ú. Filmového Supermana nelze zastřelit. Všechny střely se totiž od jeho hrudi odrazí (obr. 10.30). Předpokládejme, že zločinec vystřelí na Supermana 100 ran za minutu. Každá kulka má hmotnost 3 g a letí rychlostí 500 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Od Supermana se odráží zpět stejně velkou rychlostí. Jakou průměrnou silou působí tok kulek na Supermanovu hruď?

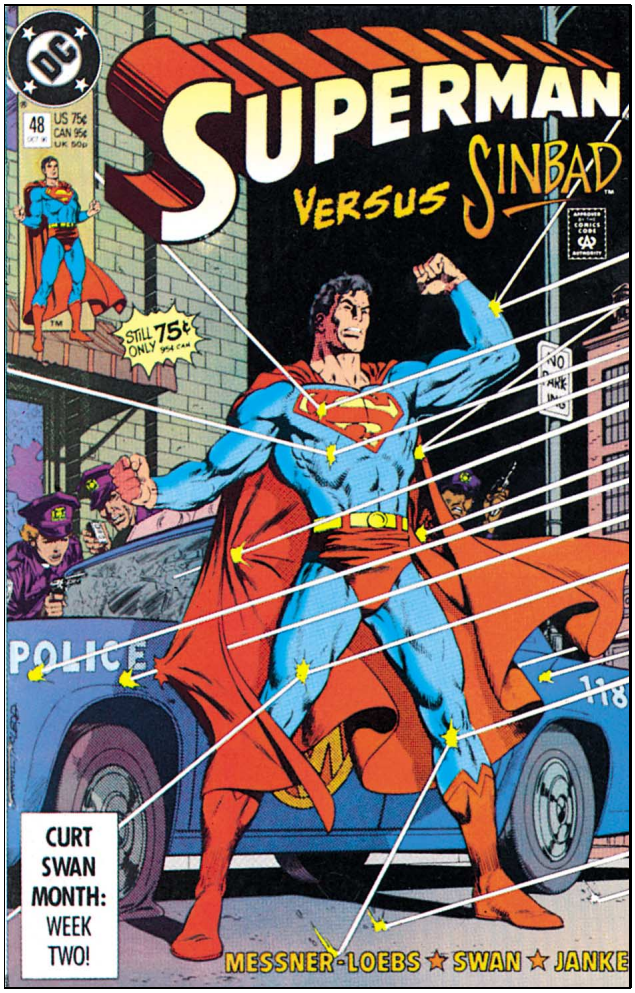
16Ú. Při mohutné bouři dopadají na zem kroupy o průměru 1,0 cm rychlostí 25 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Lze odhadnout, že v krychlovém metru vzduchu je asi 120 krup. (a) Jakou hmotnost má jedna kroupa (hustota 0,92 $\mathrm{g/cm^3}$)? (b) Jakou průměrnou silou působí krupobití na vodorovný terén o obsahu 10 m × 20 m? Předpokládáme, že se kroupy po dopadu neodrážejí.

17Ú. Voda proudí kolem nepohyblivé turbínové lopatky ve tvaru misky podle obr. 10.31. Počáteční rychlost vodního proudu je $\boldsymbol{v}$ a výsledná $-\boldsymbol{v}$ (obr. 10.31). Hmotnostní průtok vody je μ kg/min. Jakou silou působí voda na lopatku?



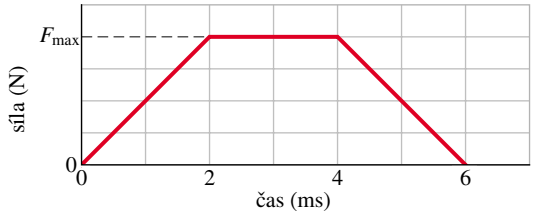
Obr. 10.31 Úloha 17

18Ú. Voda proudí z hadice přímo proti zdi. Určete průměrnou sílu, kterou působí vodní proud na zeď, vytéká-li z hadice každou sekundu 300 $\mathrm{cm^3}$ vody rychlostí 5,0 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Předpokládáme, že voda se od zdi neodráží. Jeden krychlový centimetr vody má hmotnost 1,0 g.



Obr. 10.30 Úloha 15

19Ú. Na obr. 10.32 je přibližný průběh časové závislosti síly, která působila na tenisový míček o hmotnosti 58 g při jeho nárazu do zdi. Míček dopadl na zeď kolmo rychlostí 34 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a odrazil se přesně opačným směrem se stejně velkou rychlostí. Určete největší hodnotu velikosti síly F_{max}, která při této srážce na míček působila.

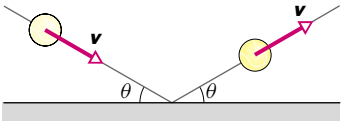


Obr. 10.32 Úloha 19

20Ú. Míček o hmotnosti 150 g narazí na stěnu rychlostí 5,2 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a odrazí se v opačném směru. Jeho kinetická energie se při odrazu zmenší na polovinu. (a) Vypočtěte rychlost míčku bezprostředně po odrazu. (b) Určete velikost impulzu síly, kterou

působil míček na stěnu. (c) Určete velikost průměrné síly, kterou působil míček na stěnu, trvala-li srážka 7,6 ms.

21Ú. Na obr. 10.33 je míček, který narazil do podlahy rychlostí o velikosti 6,0 m·s^{-1}pod úhlem $\theta = 30°$. Po odrazu měl míček stejně velkou rychlost, která svírala s podlahou úhel 30°. Srážka trvala 10 ms. (a) Vypočtěte impulz síly, která při srážce působila na míček. (b) Jakou průměrnou silou působil míček na podlahu?



Obr. 10.33 Úloha 21

22Ú. Automaticky řízená kosmická sonda o hmotnosti 2 500 kg letí stálou rychlostí o velikosti 300 m·s^{-1}. V jistém okamžiku se zažehnou raketové motory, které mají tah 3 000 N. Zážeh trvá 65,0 s. (a) Určete změnu hybnosti sondy, směřuje-li tahová síla motorů vpřed, vzad nebo kolmo k okamžitému směru pohybu. (b) Pro každý z těchto případů určete odpovídající změnu kinetické energie sondy. Předpokládáme, že hmotnost paliva spotřebovaného při tomto krátkém zážehu je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti sondy.

23Ú. Těleso o hmotnosti m se pohybuje po přímce počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}$. Vlivem síly, která na těleso po jistou dobu působí ve směru jeho pohybu, se jeho rychlost mění. Výslednou rychlost označme $\boldsymbol{u}$ a odpovídající impulz působící síly $\boldsymbol{J}$. Ukažte, že práce vykonaná touto silou za uvedenou dobu je dána vztahem $W = \frac{1}{2}J(u + v)$.

24Ú. Po řízeném výbuchu nálože ve speciálních spojovacích šroubech se kosmická loď rozdělí na dvě části o hmotnostech 1 200 kg a 1 800 kg. Obě části na sebe tedy po jistou dobu silově působí. Odpovídající velikost impulzu každé z interakčních sil je 300 N·s. Jakou vzájemnou rychlostí se od sebe oddělené části vzdalují?

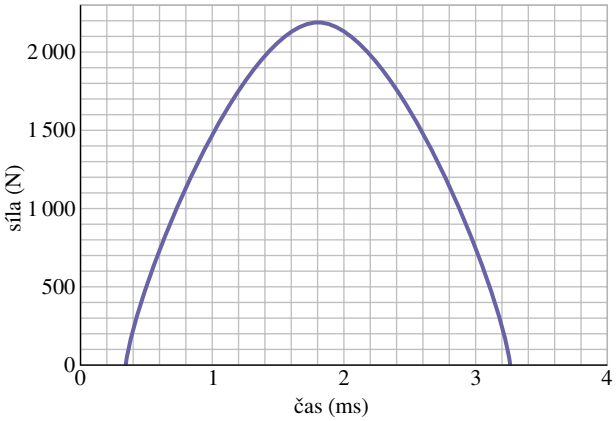
25Ú. Na obr. 10.34 je graf časové závislosti síly, která působila při odpálení kriketového míčku o hmotnosti 0,5 kg. Před úderem byl míček v klidu. Jakou měl míček rychlost bezprostředně poté, co velikost síly klesla k nulové hodnotě?

26Ú. Fotbalista odkopne míč o hmotnosti 0,45 kg, který leží na zemi. Noha fotbalisty je s míčem v kontaktu po dobu 3,0·10^{-3} s a časová závislost síly působící na míč má tvar

$$F(t) = [(6{,}0 \cdot 10^6)t - (2{,}0 \cdot 10^9)t^2]\,\mathrm{N}$$

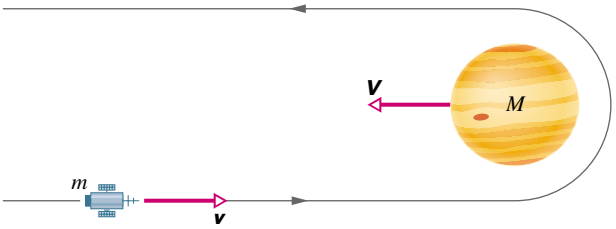
pro $0 \leqq t \leqq 3{,}0\cdot10^{-3}$ s. Čas t je měřen v sekundách. Určete velikosti následujících vektorů: (a) impulz síly, která působila na míč, (b) průměrnou a (c) maximální sílu, kterou při výkopu působila na míč noha fotbalisty, (d) rychlost míče těsně po výkopu.

27Ú. Kosmická loď *Voyager 2* (hmotnost m a rychlost $\boldsymbol{v}$ vzhledem ke Slunci) se přibližuje k planetě Jupiter (hmotnost M a rychlost $\boldsymbol{V}$ vzhledem ke Slunci), jak ukazuje obr. 10.35. Loď



Obr. 10.34 Úloha 25

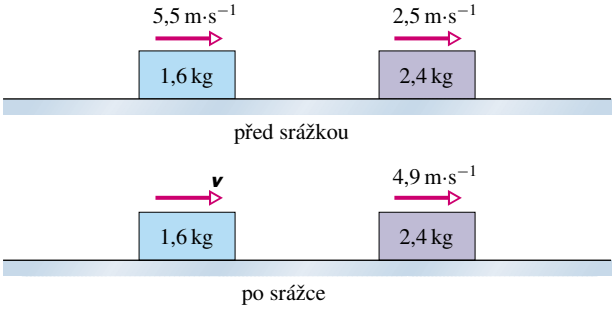
obletí planetu a vrací se zpět v protisměru (gravitační prak). Určete výslednou rychlost lodi vzhledem ke Slunci. Předpokládáme, že $v = 12\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ a $V = 13\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ (oběžná rychlost Jupitera). Hmotnost Jupitera je mnohem větší než hmotnost kosmické lodi, $M \gg m$.



Obr. 10.35 Úloha 27

ODST. 10.3 Pružné přímé srážky

28C. Kostky na obr. 10.36 kloužou po dokonale hladké podložce. (a) Určete rychlost levé kostky po srážce. (b) Je srážka pružná? (c) Předpokládejme nyní, že rychlost pravé kostky před srážkou má opačný směr než na prvním obrázku. Je možné, aby v takovém případě měla rychlost $\boldsymbol{v}$ levé kostky směr vyznačený na druhém obrázku, znázorňujícím situaci po srážce?



Obr. 10.36 Cvičení 28

29C. Do mouchy vznášející se stále nad tímtéž místem zemského povrchu narazí rozzuřený slon rychlostí 2,1 m·s^{-1}. Jakou

rychlostí se moucha odrazí, je-li srážka pružná? V tomto případě je střela (slon) mnohem těžší než terč (moucha).

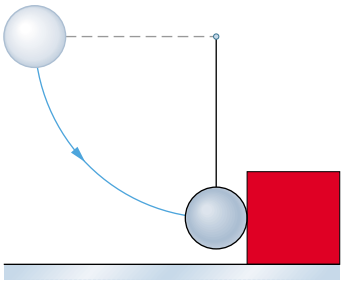
30C. Elektron se srazí s atomem vodíku, který byl zpočátku v klidu. Srážka je přímá a pružná. Kolik procent původní kinetické energie elektronu získá atom? Atom vodíku má 1840krát větší hmotnost než elektron.

31C. Vozíček o hmotnosti 340 g se pohybuje na vzduchové lavici (pohyb bez tření) rychlostí 1,2 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Pružně narazí do druhého vozíčku, který je zpočátku v klidu. Po srážce se první vozíček pohybuje původním směrem rychlostí 0,66 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Určete hmotnost druhého vozíčku a (b) jeho rychlost po srážce. (c) Jakou rychlostí se pohybuje těžiště soustavy dvou vozíčků?

32C. Částice α (hmotnost 4 u) se srazí s jádrem atomu zlata (hmotnost 197 u), které bylo před srážkou v klidu. Srážka je přímá a pružná. Určete ztrátu kinetické energie α-částice v procentech.

33C. Střela o hmotnosti 2 kg narazí do klidného terče a po pružné srážce se pohybuje v původním směru čtvrtinovou rychlostí. (a) Určete hmotnost terče. (b) Jakou rychlostí se pohybuje těžiště soustavy, má-li počáteční rychlost střely velikost 4,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

34Ú. Ocelová koule o hmotnosti 0,500 kg je upevněna na závěsu délky 70,0 cm. Kouli vychýlíme tak, aby byl napjatý závěs vodorovný, a uvolníme (obr. 10.37). V nejnižším bodě své dráhy narazí koule na ocelový hranol o hmotnosti 2,5 kg, spočívající na dokonale hladké vodorovné podložce. Srážka je pružná. Určete (a) rychlost koule i (b) rychlost hranolu těsně po srážce.



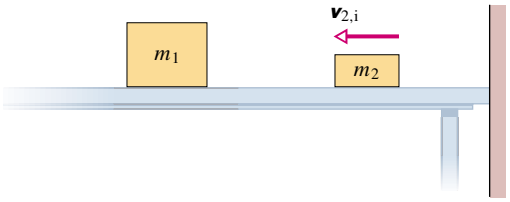
Obr. 10.37 Úloha 34

35Ú. Proud částic dopadá na misku digitální váhy z výšky 3,5 m. Srážky částic s miskou jsou pružné a každá částice se odrazí zpět se stejně velkou rychlostí. Zjistěte, jaký údaj váha ukazuje, má-li každá částice hmotnost 110 g a dopadne-li na misku za každou sekundu 42 částic. Předpokládáme, že po odrazu již částice zpět na misku nedopadají.

36Ú. Dvě titanové koule se pohybují proti sobě stejně velkými rychlostmi a srazí se. Srážka je přímá a pružná. Po srážce se jedna z koulí, jejíž hmotnost je 300 g, zastaví. (a) Jaká je hmotnost druhé koule? (b) Určete rychlost těžiště soustavy, měla-li velikost rychlosti koulí před srážkou hodnotu 2,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

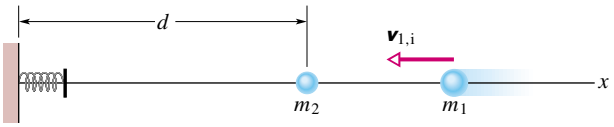
37Ú. Míček o hmotnosti m umístíme těsně nad větší míč o hmotnosti M (obr. 10.28a). Oba míče současně volně pustíme z výšky h. (Předpokládáme, že jejich poloměry jsou mnohem menší než výška h.) Velký míč se nejprve odrazí od podlahy a potom narazí do míčku. Obě srážky jsou pružné. (a) Při jakém poměru m/M se velký míč M po druhé srážce zastaví? (Řešení přibližně vyhovuje dvojici míčů z otázky 12.) (b) Do jaké výšky pak vystoupí menší míč?

38Ú. Kvádr o hmotnosti m_1 leží v klidu na dlouhém, dokonale hladkém stole, jehož jeden konec je zapřen o stěnu. Druhý kvádr o hmotnosti m_2 umístíme mezi kvádr m_1 a stěnu a udělíme mu rychlost $\boldsymbol{v}_{2,\mathrm{i}}$ směrem k m_1 (obr. 10.38). Nejprve nastane srážka obou kvádrů a pak narazí kvádr m_2 do stěny. Obě srážky jsou pružné. Při jaké hodnotě poměru m_2/m_1 budou výsledné rychlosti obou kvádrů stejné? Stěnu považujeme za těžký terč (hmotnost kvádru je ve srovnání s její hmotností zanedbatelná).



Obr. 10.38 Úloha 38

39Ú. Na vzduchové lavici stojí vozíček (terč) o hmotnosti $m_2 = 350$ g ve vzdálenosti $d = 53$ cm od konce lavice. Druhý vozíček (střela) o hmotnosti $m_1 = 590$ g narazí do terče rychlostí $v_{1,\mathrm{i}} = -75\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$ (obr. 10.39). Terč se dá do pohybu a odrazí se od krátké pružiny uchycené na konci lavice. Dožene střelu a narazí do ní. Všechny srážky jsou pružné. Určete, v jaké vzdálenosti od konce lavice dojde k druhé srážce terče se střelou.



Obr. 10.39 Úloha 39

ODST. 10.4 Nepružné přímé srážky

40C. Současná představa o vzniku kráteru v Arizoně (obr. 10.1a) je taková, že byl způsoben dopadem meteoritu asi před 20 000 lety. Hmotnost meteoritu se odhaduje na $5{\cdot}10^{10}$ kg a jeho rychlost před dopadem na 7 200 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete rychlost, kterou by Země za těchto podmínek získala při přímé srážce.

41C. Krabice o hmotnosti 6 kg klouže po ledě rychlostí 9,0 m/s. Balík o hmotnosti 12 kg padá volným pádem a spadne přímo do krabice. Určete výslednou rychlost krabice s balíkem.

42C. Kulka o hmotnosti 5,20 g letí vodorovně rychlostí 672 m/s. Narazí do dřevěného kvádru o hmotnosti 700 g, který spočívá na dokonale hladké podlaze. Po průletu kvádrem se velikost rychlosti kulky zmenší na hodnotu 428 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete (a) rychlost kvádru po srážce a (b) rychlost těžiště soustavy.

43C. Tělesa A a B o stejných hmotnostech 2,0 kg se pohybují rychlostmi $\boldsymbol{v}_\mathrm{A} = 15\boldsymbol{i} + 30\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{v}_\mathrm{B} = -10\boldsymbol{i} + 5{,}0\boldsymbol{j}$ a srazí se. Rychlost tělesa A po srážce je $\boldsymbol{v}'_\mathrm{A} = -5{,}0\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{j}$. Všechny rychlosti

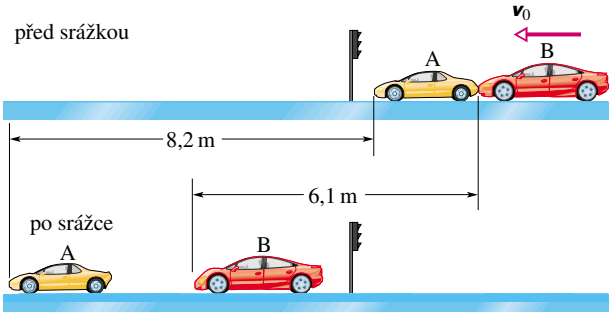
jsou zadány v metrech za sekundu. (a) Jakou rychlost má po srážce těleso B? (b) Určete změnu kinetické energie soustavy, k níž při srážce došlo.

44C. Kulka o hmotnosti 10 g narazí do balistického kyvadla o hmotnosti 2 kg a uvázne v něm. Kyvadlo vystoupí do výšky 12 cm. Vypočtěte počáteční rychlost kulky.

45C. Kulka o hmotnosti 4,5 g je vystřelena vodorovně a narazí do dřevěného kvádru o hmotnosti 2,4 kg, který leží na vodorovné podložce. Koeficient dynamického tření mezi kvádrem a podložkou je 0,20. Kulka v kvádru uvázne a ten se zastaví ve vzdálenosti 1,8 m od své původní polohy. (a) Jakou rychlostí se kvádr pohybuje v okamžiku, kdy se kulka vzhledem k němu zastaví? (b) Jaká je počáteční rychlost kulky?

46C. Dvě kostky o hmotnostech 5,0 kg a 10 kg se pohybují stejným směrem rychlostmi 3,0 $m\cdot s^{-1}$ a 2,0 $m\cdot s^{-1}$. Dojde ke srážce, po níž hmotnější kostka pokračuje v pohybu v původním směru, avšak rychlostí 2,5 $m\cdot s^{-1}$. (a) Jakou rychlostí se těsně po srážce pohybuje méně hmotná kostka? (b) Zjistěte, k jaké energiové ztrátě při srážce došlo. (c) Rozhodněte, jak by se změnila odpověď na otázku (b), kdyby se hmotnější kostka pohybovala po srážce rychlostí 4,0 $m\cdot s^{-1}$, a (d) výsledek zdůvodněte.

47Ú. Dva automobily A a B přijíždějí ke křižovatce a snaží se na zledovatělé silnici zabrzdit. Oba se dostanou do smyku se zablokovanými koly. Hmotnosti vozů jsou 1 100 kg (A) a 1 400 kg (B). Koeficient dynamického tření mezi zablokovanými koly a silnicí je v obou případech 0,13. Vozu A se těsně před křižovatkou podaří zastavit. Vůz B, který jede za ním, však již zabrzdit nestačí a dojde k nárazu. Automobil A znovu zastaví ve vzdálenosti 8,2 m od místa srážky, vůz B urazí ještě 6,1 m. (obr. 10.40). (a) Určete rychlosti automobilů bezprostředně po srážce. (b) Pomocí zákona zachování hybnosti zjistěte rychlost, kterou vůz B narazil do A. Je možné mít v tomto případě pochybnost o platnosti zákona zachování hybnosti? Zdůvodněte.

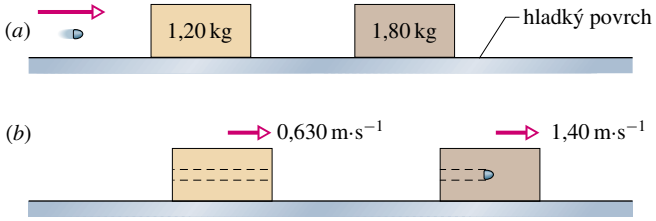


Obr. 10.40 Úloha 47

48Ú. Závaží o hmotnosti 3 000 kg dopadne z výšky 6,0 m na pilot o hmotnosti 500 kg a zarazí jej 3,0 cm do skály. Srážka je dokonale nepružná. Určete průměrnou velikost odporové síly, kterou na pilot působí skála po dobu, než se jeho pohyb zcela zastaví.

49Ú. Na dokonale hladké vodorovné podložce leží dvě kostky o hmotnostech m a $2m$. Jsou umístěny těsně vedle konců stlačené vodorovné pružiny a přidržovány zarážkami, aby se pružina nemohla uvolnit. Potenciální energie stlačené pružiny je 60 J. V určitém okamžiku zarážky odstraníme. Určete kinetickou energii každé z kostek v okamžiku, kdy ztratí kontakt s pružinou (pružina je v té chvíli v nenapjatém stavu).

50Ú. Na dokonale hladké vodorovné podlaze leží dvě kostky o hmotnostech 1,20 kg a 1,80 kg. Kulka o hmotnosti 3,50 g je vystřelena ve vodorovném směru a zasáhne první kostku. Proletí jí a teprve ve druhé kostce uvázne (obr. 10.41). První kostka se po průletu střely pohybuje rychlostí o velikosti 0,630 $m\cdot s^{-1}$, velikost výsledné rychlosti druhé kostky je 1,40 $m\cdot s^{-1}$ (obr. 10.41b). Určete (a) rychlost, kterou kulka vylétla z první kostky a (b) počáteční rychlost kulky. Zanedbejte změnu hmotnosti první kostky způsobenou průletem střely.



Obr. 10.41 Úloha 50

51Ú. Těleso o hmotnosti m se pohybuje v kosmickém prostoru stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Najednou vybuchne a rozpadne se na dvě části, z nichž jedna má třikrát větší hmotnost než druhá. Po rozpadu zůstane lehčí úlomek v klidu. Zjistěte, k jak velkému přírůstku kinetické energie soustavy došlo na úkor energie uvolněné při výbuchu. (Soustava je tvořena nejprve tělesem a po jeho rozpadu oběma úlomky.)

52Ú. Na váhu položíme krabici a vynulujeme ukazatel. Poté začneme do krabice sypat kuličky, z nichž každá má hmotnost m. Kuličky padají z výšky h s frekvencí R kuliček za sekundu. Zjistěte, jaký údaj (v kilogramech) ukáže váha po uplynutí doby t, lze-li každý dopad kuličky do krabice považovat za dokonale nepružnou srážku. Pro číselné řešení použijte hodnoty $R = 100\,s^{-1}$, $h = 7{,}60$ m, $m = 4{,}50$ g a $t = 10{,}0$ s.

53Ú. Nákladní vagon o hmotnosti 35 tun se srazí se stojícím služebním vozem. Při srážce se vagony pevně spojí. Ztráta kinetické energie soustavy, k níž při této srážce dojde (ve prospěch zahřátí, energie zvukového vlnění atd.), činí 27 %. Určete hmotnost služebního vozu.

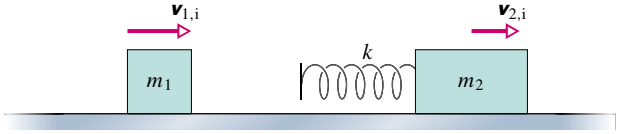


Obr. 10.42 Úloha 54

54Ú. Kulička o hmotnosti m vletí do hlavně pružinové pistole s hmotností M, která spočívá na dokonale hladké vodorovné podložce (obr. 10.42). Kulička náhle uvázne v hlavni ve chvíli, kdy je stlačení pružiny největší. Třecí síly působící proti pohybu kuličky v hlavni jsou zanedbatelné. (a) Určete rychlost pistole v okamžiku, kdy se kulička vzhledem k hlavni zastaví. (b) Jakou

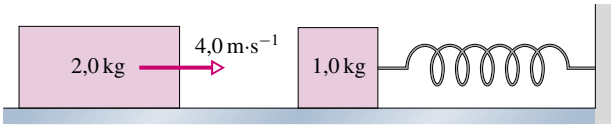
část původní kinetické energie kuličky představuje potenciální energie stlačené pružiny?

55Ú. Dva hranoly o hmotnostech $m_1 = 2{,}0\,\text{kg}$ a $m_2 = 5{,}0\,\text{kg}$ se pohybují v téže přímce po dokonale hladké vodorovné desce rychlostmi o velikostech $v_{1,\text{i}} = 10\,\text{m·s}^{-1}$ a $v_{2,\text{i}} = 3{,}0\,\text{m·s}^{-1}$. K hranolu m_2 je upevněna velmi lehká pružina o tuhosti $k = 1\,120\,\text{N/m}$ (obr. 10.43), do níž hranol m_1 narazí. Určete největší stlačení pružiny při této srážce. (*Tip*: V okamžiku největšího stlačení pružiny se obě tělesa pohybují stejnou rychlostí.)



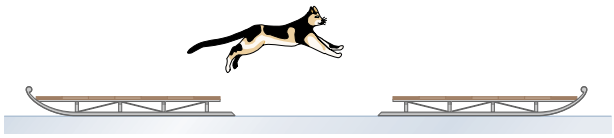
Obr. 10.43 Úloha 55

56Ú. Kostka o hmotnosti 1,0 kg leží na dokonale hladké podložce a je nenapjatou pružinou ($k = 200\,\text{N/m}$) spojena se stěnou (obr. 10.44). Hranol o hmotnosti 2,0 kg do ní narazí rychlostí $4{,}0\,\text{m·s}^{-1}$ rovnoběžně s pružinou a pevně se s ní spojí. Určete stlačení pružiny v okamžiku, kdy je společná rychlost těles nulová.



Obr. 10.44 Úloha 56

57Ú. Dvoje stejné sáně o hmotnostech 22,7 kg stojí těsně za sebou podle obr. 10.45. Kočka o hmotnosti 3,63 kg, která na jedněch sáních seděla, přeskočí najednou na druhé sáně a hned zase zpět. Při obou skocích má rychlost kočky vzhledem k zemi velikost $3{,}05\,\text{m·s}^{-1}$. Určete výsledné rychlosti sání.



Obr. 10.45 Úloha 57

58Ú. Automobil o hmotnosti 1 200 kg má nárazník konstruován tak, aby čelní náraz do zdi rychlostí 5,00 km/h byl ještě bezpečný. Vůz jede rychlostí 70 km/h a zezadu narazí do druhého automobilu, který jede rychlostí 60 km/h stejným směrem a má hmotnost 900 kg. Rychlost druhého vozu po srážce je 70 km/h. (a) Jaká je rychlost prvního automobilu bezprostředně po nárazu? (b) Určete poměr ztráty kinetické energie soustavy dvou automobilů při popsané srážce a kinetické energie, při níž je náraz prvního automobilu do zdi ještě bezpečný.

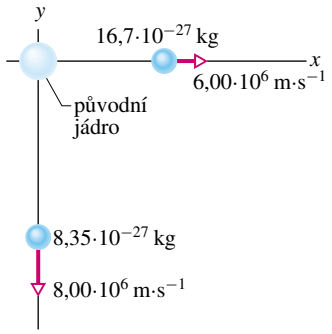
59Ú. Nákladní vagon o hmotnosti 32 tun jede rychlostí 1,5 m/s. Narazí do jiného vagonu, který má hmotnost 24 tun a jede stejným směrem rychlostí $0{,}9\,\text{m·s}^{-1}$. Oba vozy se při srážce spojí. Určete (a) společnou rychlost vozů po srážce a (b) změnu celkové kinetické energie soustavy. (c) Jaké by byly výsledné rychlosti vozů, kdyby srážka byla pružná?

ODST. 10.5 Šikmé srážky

60C. Částice α se srazí s jádrem atomu kyslíku, které bylo před srážkou v klidu. Její výsledná rychlost svírá s původním směrem jejího pohybu úhel 64,0°. Kyslíkové jádro se po srážce pohybuje rychlostí o velikosti $1{,}20\cdot10^{5}\,\text{m·s}^{-1}$, která svírá s původním směrem pohybu α-částice úhel −51,0°. Určete (a) výslednou a (b) počáteční rychlost α-částice. (Hmotnost α-částice je 4,0 u a hmotnost kyslíkového jádra 16 u.)

61C. Proton (střela) letí rychlostí $500\,\text{m·s}^{-1}$ a pružně se srazí s jiným protonem (terč), který byl zpočátku v klidu. Střela se od původního směru svého pohybu odchýlí o 60°. Určete (a) směr pohybu terče a (b) velikost rychlosti terče i střely po srážce.

62C. Atomové jádro, které je v klidu, se náhle rozpadne na tři části. Dvě z nich jsou zachyceny detekčním zařízením, které je schopno určit jejich rychlosti a hmotnosti (obr. 10.46). (a) Určete hybnost třetí částice, jejíž hmotnost je $11{,}7\cdot10^{-27}\,\text{kg}$, a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic. (b) Jaká je celková kinetická energie částic po rozpadu?



Obr. 10.46 Cvičení 62

63C. Bílá kulečníková koule narazí do červené, která je zpočátku v klidu. Rychlost bílé koule má po srážce velikost $3{,}50\,\text{m·s}^{-1}$ a svírá s původním směrem pohybu úhel 22,0°. Červená koule odletí rychlostí o velikosti $2{,}00\,\text{m·s}^{-1}$. Určete (a) směr rychlosti červené koule po srážce a (b) počáteční rychlost bílé koule. (c) Je srážka pružná?

64C. Dva automobily A a B se blíží ke stejnému místu v navzájem kolmých směrech. Při srážce se do sebe zaklíní. Vůz A (hmotnost 1 200 kg) se před srážkou pohyboval rychlostí 64 km/h a vůz B (hmotnost 1 600 kg) rychlostí 96 km/h. Určete velikost a směr společné rychlosti obou vraků po srážce.

65C. Kulečníková koule narazí rychlostí $\boldsymbol{V}$ do těsně uspořádané skupiny patnácti stojících koulí. Dojde k sérii srážek koulí mezi sebou i s obrubou stolu. Shodou okolností má velikost rychlosti všech šestnácti koulí v jistém okamžiku stejnou hodnotu v. Všechny srážky považujeme za pružné a zanedbáváme vliv rotačního pohybu koulí. Vyjádřete v pomocí V.

66Ú. Těleso o hmotnosti 20,0 kg se pohybuje v kladném směru osy x rychlostí $200\,\text{m·s}^{-1}$. Najednou vybuchne a roztrhne se

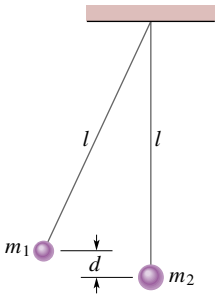
na tři části. První z nich má hmotnost 10,0 kg a odletí rychlostí 100 m·s^{-1}v kladném směru osy y. Druhý úlomek (hmotnost 4,00 kg) se vrací zpět podél záporné osy x rychlostí o velikosti 500 m·s^{-1}. (a) Určete rychlost (směr a velikost) třetího úlomku, který má hmotnost 6,00 kg. (b) Určete celkovou kinetickou energii všech úlomků po srážce. (Vliv tíhové síly zanedbejte.)

67Ú. Míč B narazí rychlostí $\boldsymbol{v}$ do míče A, který byl v klidu. Hmotnosti míčů jsou různé. Po srážce se míč B pohybuje poloviční rychlostí kolmo k původnímu směru svého pohybu. (a) Určete směr pohybu míče A po srážce. (b) Je možné zjistit ze zadaných údajů i velikost rychlosti míče A? Odpověď zdůvodněte.

68Ú. Neutron se při pružné srážce s klidným deuteronem odchýlí o 90° od původního směru svého pohybu. Ukažte, že neutron ztratil při srážce dvě třetiny své kinetické energie, kterou naopak deuteron získal. (Hmotnost neutronu je 1,0 u a hmotnost deuteronu 2,0 u.)

69Ú. Dvě stejně rychlá tělesa o stejných hmotnostech se při srážce pevně spojí (dokonale nepružná srážka). Velikost rychlosti vzniklého objektu je ve srovnání s počáteční rychlostí každého z obou těles poloviční. Určete úhel mezi vektory počátečních rychlostí těles.

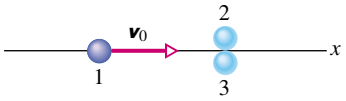
70Ú. Obr. 10.47 znázorňuje výchozí situaci před srážkou dvou kyvadel o délce l. Po uvolnění narazí kyvadlo m_1 do kyvadla m_2. Srážka je dokonale nepružná. Odpor prostředí a hmotnosti závěsů považujeme za zanedbatelné. Do jaké výšky vystoupí těžiště soustavy spojených kyvadel?



Obr. 10.47 Úloha 70

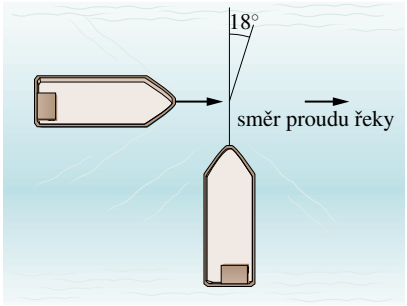
71Ú. Kulečníková koule narazí rychlostí 2,2 m·s^{-1}do jiné koule, která byla v klidu. Po srážce se jedna z koulí pohybuje rychlostí o velikosti 1,1 m·s^{-1}ve směru, který svírá s původním směrem pohybu střely úhel 60°. (a) Určete rychlost druhé koule (velikost a směr). (b) Připouštějí zadané hodnoty možnost nepružné srážky?

72Ú. Koule 1 (střela) narazí počáteční rychlostí 10 m·s^{-1}do dvojice stejných koulí, které jsou v klidu a dotýkají se. Spojnice jejich těžišť je kolmá na směr letící koule (obr. 10.48). Střela míří přesně do místa dotyku dvojice terčů. Určete rychlosti všech tří koulí po srážce. Třecí síly zanedbejte. (*Tip*: Při zanedbatelném tření mají impulzy sil, jimiž na sebe koule působí při srážce, směr spojnice jejich středů.)



Obr. 10.48 Úloha 72

73Ú. Nákladní loď o hmotnosti 1,50·10^5 kg pluje v husté mlze po proudu řeky rychlostí o velikosti 6,2 m·s^{-1}. Náhle narazí do boku druhé lodi, která přeplouvá řeku napříč (obr. 10.49). Druhá loď má hmotnost 2,78·10^5 kg a pluje rychlostí 4,3 m·s^{-1}. Těsně po srážce se kurs druhé lodi odchýlí o 18° od původního směru a velikost její rychlosti vzroste na 5,1 m·s^{-1}. Rychlost toku řeky je zanedbatelná. (a) Určete rychlost první lodi (velikost a směr) po srážce a (b) úbytek celkové kinetické energie soustavy.



Obr. 10.49 Úloha 73

ODST. 10.6 Jaderné reakce a radioaktivní rozpad

74C. Hmotnosti všech částic v jaderné reakci

$$\mathrm{p} + {}^{19}\mathrm{F} \rightarrow \alpha + {}^{16}\mathrm{O}$$

jsou známy velmi přesně:

$$m_\mathrm{p} = 1{,}007\,825\ \mathrm{u}, \qquad m_\alpha = 4{,}002\,603\ \mathrm{u},$$
$$m_\mathrm{F} = 18{,}998\,405\ \mathrm{u}, \qquad m_\mathrm{O} = 15{,}994\,915\ \mathrm{u}.$$

Vypočtěte energii Q, která se při reakci uvolnila.

75C. Elementární částice Σ^- (sigma minus) se samovolně rozpadne podle schématu

$$\Sigma^- \rightarrow \pi^- + \mathrm{n}.$$

Hmotnosti částic jsou

$$m_\Sigma = 2\,340{,}5 m_\mathrm{e}, \quad m_\pi = 273{,}2 m_\mathrm{e}, \quad m_\mathrm{n} = 1\,838{,}65 m_\mathrm{e},$$

kde $m_\mathrm{e} = 9{,}11\cdot10^{-31}$ kg je hmotnost elektronu. (a) Určete celkovou kinetickou energii částic po rozpadu. (b) Porovnejte hybnosti obou produktů rozpadu (π^- a n). (c) Která z částic získá větší část celkové kinetické energie?

76Ú★. Částice α s kinetickou energií 7,70 MeV narazí do jádra atomu $^{14}_{7}$N, které je v klidu. Vznikne jádro $^{17}_{8}$O a proton. Proton vyletí kolmo k počáteční rychlosti α-částice a má kinetickou energii 4,44 MeV. Hmotnosti jednotlivých částic jsou: α-částice — 4,002 60 u; $^{14}_{7}$N — 14,003 07 u; proton — 1,007 825 u a $^{17}_{8}$O — 16,999 14 u. (a) Určete kinetickou energii kyslíkového jádra a (b) energii Q uvolněnou při reakci.

77Ú★. α rozpad rádia (Ra) na radon (Rn) probíhá podle rovnice

$$^{226}\mathrm{Ra} \rightarrow \alpha + {}^{222}\mathrm{Rn}.$$

Hmotnosti jednotlivých částic jsou: $^{226}_{88}$Ra — 226,025 4 u; α-částice — 4,002 6 u; $^{222}_{86}$Rn — 222,017 5 u. (a) Určete energii Q uvolněnou při reakci. (b) Jakou hodnotu Q bychom získali, kdybychom při výpočtech zaokrouhlili hmotnosti částic na tři platná místa? Určete kinetickou energii (c) α-částice a (d) jádra radonu. (Pro výpočet částí (c) a (d) je možné použít zaokrouhlených hodnot. Zdůvodněte.)

PRO POČÍTAČ

78Ú. Model rakety má hmotnost 6,00 kg a letí vodorovně směrem k jihu rychlostí 20,0 m·s^{-1}. Při výbuchu se náhle rozpadne na dvě části. Rychlost prvního úlomku (hmotnost 2,00 kg) je rovna

$$\boldsymbol{v}_1 = (-12{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} + (30{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j} - (15{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{k},$$

kde jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ směřují po řadě k východu, k severu a svisle vzhůru. (a) Určete hybnost druhého úlomku a zapište ji pomocí jednotkových vektorů. (b) Jakou kinetickou energii má druhý úlomek? (c) Určete přírůstek kinetické energie soustavy při výbuchu.

11
Rotace



Sledovali jste někdy zápas v judu? Pak jste si jistě všimli, že vítězství v tomto sportu není jen záležitostí fyzické zdatnosti sportovce. Judista, který je obeznámen se základními zákony fyziky nebo jich dokáže alespoň intuitivně využívat, může totiž bez velkých problémů porazit většího a silnějšího protivníka. Např. judista při chvatu ***o goši*** *svého soupeře nadzdvihne, otočí kolem svého boku a položí ho na žíněnku. Zdálo by se, že tento chvat vyžaduje značnou sílu, a nemusel by se vůbec podařit. Opravdu může fyzika pomoci i v tomto případě? A jak?*

11.1 POSUVNÝ A OTÁČIVÝ POHYB

Jízdu krasobruslařky vnímáme samozřejmě především jako esteticky dokonale působivý celek. Přesto však v ní můžeme rozpoznat dva základní typy pohybu. Na obr. 11.1a zachytil fotograf krasobruslařku v situaci, kdy klouže po přímce takřka rovnoměrně. Takový pohyb je jedním ze speciálních případů tzv. **posuvného** (**translačního**) pohybu, zkráceně **posuvu** neboli **translace**. Obr. 11.1b naopak ukazuje bruslařku při piruetě, při níž se otáčí kolem svislé osy určitou úhlovou rychlostí. Koná tak **otáčivý** (**rotační**) pohyb, krátce nazývaný **otáčení** neboli **rotace**. V této kapitole se budeme podrobněji zabývat právě otáčivým pohybem.

Obr. 11.1 Krasobruslařka Kristi Yamaguchiová (a) při čisté translaci, (b) při čisté rotaci kolem pevné osy.



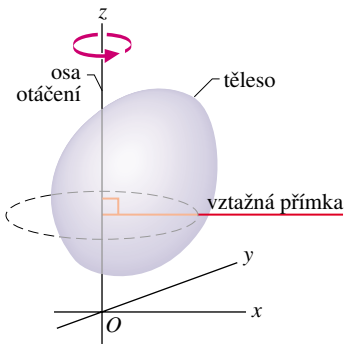
(a) (b)



Dosud jsme se převážně zabývali pohybem posuvným, často dokonce pouze přímočarým. K typickým případům otáčivého pohybu patří otáčení kol a převodových kol, pohyb částí motorů, hodinových ručiček, rotorů tryskových motorů, vrtulí vrtulníků. Rotují také tornáda, planety, hvězdy a galaxie.

11.2 VELIČINY CHARAKTERIZUJÍCÍ OTÁČIVÝ POHYB

V této kapitole se budeme zabývat rotací *tuhého* tělesa kolem *pevné* osy.* První z těchto požadavků znamená omezení výběru objektů, jejichž otáčivý pohyb budeme popisovat. Nebudeme se tedy zabývat například rotací Slunce, které si lze nejspíš představit jako plynovou kouli. Slunce modelu tuhého tělesa rozhodně nevyhovuje. Pomocí druhého omezení vyloučíme z našich úvah například valivé pohyby, neboť při nich těleso rotuje kolem osy pohyblivé v prostoru (kolo automobilu), ale také třeba pohyb závaží odstředivého regulátoru (může se vzdalovat od osy otáčení).



Obr. 11.2 Tuhé těleso obecného tvaru se otáčí kolem souřadnicové osy z. Poloha *vztažné přímky* vzhledem k tělesu je libovolná až na to, že je přímka kolmá k ose otáčení. Je spojena s tělesem a rotuje spolu s ním.

Na obr. 11.2 je tuhé těleso obecného tvaru, které se *otáčí kolem pevné osy*, zvané **osa otáčení** neboli **osa rotace**. Každý bod tělesa opisuje kružnici, jejíž střed leží na ose otáčení. V daném časovém intervalu opíší všechny body *stejný úhel*. (Naproti tomu se při posuvném pohybu pohybují všechny body tělesa po trajektoriích stejného tvaru, například po přímkách, a v daném časovém intervalu urazí *tutéž vzdálenost*. V dalším výkladu budeme posuvný a otáčivý pohyb často srovnávat.)

Zabývejme se nyní veličinami, které charakterizují rotační pohyb obdobně, jako veličiny poloha, posunutí, rych-

* Její poloha se nemění ani vůči tělesu, ani vůči okolí.

lost a zrychlení popisují translaci. Půjde o tzv. *úhlové* veličiny (*úhlovou polohu, úhlovou rychlost a úhlové zrychlení*). Místo slovního spojení „úhlové posunutí“ užijeme termínu *otočení*.

Úhlová poloha

Všimněme si, že v obr. 11.2 je vyznačena **vztažná přímka**, kolmá k ose otáčení a pevně spojená s tělesem. Otáčí se tedy spolu s ním a umožňuje tak snadno popsat jeho pohyb pomocí **úhlové polohy**. Úhlovou polohou budeme rozumět úhel, který vztažná přímka svírá s pevně zvoleným směrem ležícím v rovině kolmé k ose otáčení. Na obr. 11.3 je úhlová poloha θ měřena vzhledem ke kladnému směru osy x. Pro úhel θ platí

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(v radiánech)}. \tag{11.1}$$

Symbolem s jsme označili délku oblouku kružnice, který je ohraničen kladnou osou x a vztažnou přímkou, r je poloměr této kružnice.

Hodnoty takto definovaného úhlu vyjadřujeme obvykle v tzv. **obloukové míře**, tj. v **radiánech** (rad). Hodnoty zadané ve stupních nebo pomocí počtu otáček snadno přepočteme. Všimněme si, že úhel v obloukové míře je určen poměrem délek a je tedy bezrozměrovou veličinou.

Obvod kružnice o poloměru r je $2\pi r$, takže jedna otáčka odpovídá změně úhlové polohy o 2π radiánů:

$$1\ \text{ot} = 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ \text{rad} \tag{11.2}$$

a odtud

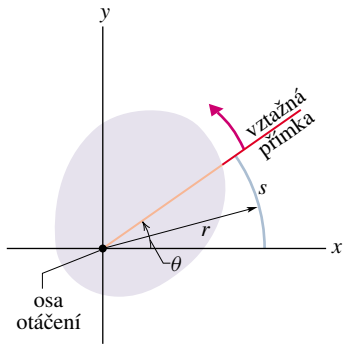
$$1\ \text{rad} = 57{,}3^\circ = 0{,}159\ \text{ot}. \tag{11.3}$$

Na rozdíl od dohody zavedené v geometrii *nebude* v našem případě úhel $\theta = 0$ ekvivalentní hodnotám 2π, 4π atd. Po ukončené otáčce vztažné přímky se tedy hodnota její úhlové polohy *nevynuluje*. Po ukončení první otáčky nabývá úhlová poloha hodnoty 2π rad, po druhé otáčce je 4π rad atd.

Úplnou informaci o posuvném pohybu tělesa například podél osy x lze získat na základě znalosti funkce $x(t)$ popisující časovou závislost polohy některého jeho bodu, zvoleného zcela libovolně. Podobně jsou všechny myslitelné údaje o otáčivém pohybu tělesa kolem pevné osy obsaženy v časové závislosti $\theta(t)$ úhlové polohy vztažné přímky.

Otočení

Dejme tomu, že se úhlová poloha vztažné přímky tělesa na obr. 11.3, rotujícího kolem pevné osy, změní v určitém



Obr. 11.3 Řez rotujícího tuhého tělesa z obr. 11.2 zobrazený v nadhledu. Osa otáčení je nyní kolmá k rovině nákresu a směřuje ke čtenáři. Rovina řezu je kolmá k ose otáčení, splývá tedy s nákresnou. Vztažná přímka svírá s osou x úhel θ.

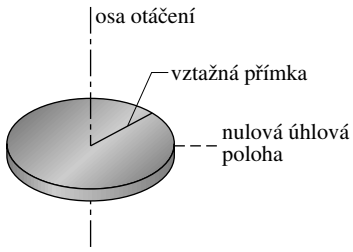
časovém intervalu z hodnoty θ_1 na hodnotu θ_2 (obr. 11.4). **Otočením** tělesa v tomto časovém intervalu rozumíme veličinu $\Delta\theta$, definovanou vztahem

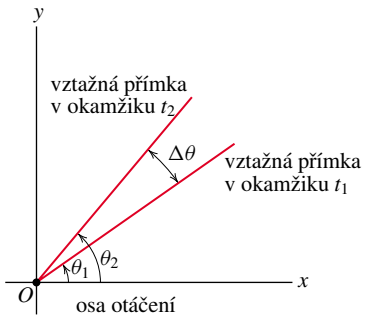
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \tag{11.4}$$

Tato definice otočení se vztahuje nejen na tuhé těleso jako celek, ale i *na každou jeho částici*.

Koná-li těleso posuvný pohyb, například podél osy x, může být jeho posunutí Δx jak kladné, tak záporné. Znaménko závisí na tom, zda se těleso pohybuje ve směru rostoucí či klesající souřadnice x. Také otočení $\Delta\theta$ rotujícího tělesa může nabývat kladných i záporných hodnot. Jeho znaménko je kladné, otáčí-li se těleso ve směru rostoucího úhlu θ (proti směru otáčení hodinových ručiček). Při otáčení tělesa ve směru klesajících hodnot úhlové polohy (po směru otáčení hodinových ručiček) je naopak otočení záporné (obr. 11.3 a 11.4).

KONTROLA 1: Kotouč na obrázku se může otáčet kolem své osy jako kolotoč. Rozhodněte, které z následujících dvojic počáteční a výsledné úhlové polohy odpovídají zápornému otočení: (a) -3 rad, $+5$ rad, (b) -3 rad, -7 rad, (c) 7 rad, -3 rad.





Obr. 11.4 Vztažná přímka tuhého tělesa znázorněného na obrázku 11.2 a 11.3 má v okamžiku t_1 úhlovou polohu θ_1 a v okamžiku t_2 úhlovou polohu θ_2. Rozdíl $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ představuje otočení tělesa v časovém intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$. (Těleso není v obrázku zakresleno.)

Úhlová rychlost

V souhlasu s obr. 11.4 označme úhlovou polohu rotujícího tělesa v okamžiku t_1 jako θ_1 a v okamžiku t_2 jako θ_2. **Průměrnou úhlovou rychlost** tělesa v časovém intervalu Δt od t_1 do t_2 definujeme vztahem

$$\overline{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \qquad (11.5)$$

kde $\Delta\theta$ je otočení tělesa v časovém intervalu Δt.

(Okamžitá) úhlová rychlost ω, se kterou budeme pracovat nejčastěji, je limitou průměrné úhlové rychlosti, vyjádřené vztahem (11.5), při poklesu veličiny Δt k nulové hodnotě, tj.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \qquad (11.6)$$

Známe-li časovou závislost úhlové polohy $\theta(t)$, můžeme úhlovou rychlost ω snadno určit jejím derivováním.

Rov. (11.5) a (11.6) platí nejen pro rotující tuhé těleso jako celek, ale také pro *každou jeho částici*. Jako jednotku úhlové rychlosti používáme nejčastěji radián za sekundu (rad/s), někdy i počet otáček za sekundu (ot/s).

Pohybuje-li se částice podél osy x, je její rychlost v_x kladná, nebo záporná podle toho, zda se pohyb děje ve směru rostoucí, nebo klesající souřadnice x. Také úhlová rychlost může mít kladné, nebo záporné znaménko. V prvním případě se těleso otáčí ve směru rostoucího úhlu θ (proti směru otáčení hodinových ručiček), v druhém případě ve směru klesajícího úhlu θ (ve směru otáčení hodinových ručiček).

Předchozí definici ještě upřesníme: úhlovou rychlost rotujícího tělesa definujeme jako vektor $\boldsymbol{\omega}$ rovnoběžný s osou otáčení, jehož složka měřená podél této osy je dána vztahem (11.6). Velikost vektoru úhlové rychlosti značíme obvykle rovněž symbolem ω. Se slovním spojením „úhlová rychlost“ se tedy můžeme setkat dokonce v trojím významu. Může představovat vektor, jeho složku do osy rotace či jeho velikost. Nemusíme však mít obavu, že bychom tyto možnosti nedokázali v textu dobře rozpoznat. Věta „Úhlová rychlost mění směr“ zcela jistě vypovídá o úhlové rychlosti jako o vektoru a věta „Úhlová rychlost činí 50 otáček za sekundu“ se nepochybně týká její velikosti.

Úhlové zrychlení

V případech, kdy úhlová rychlost rotujícího tělesa není konstantní, má těleso nenulové úhlové zrychlení. Dejme tomu, že úhlová rychlost tělesa v okamžiku t_1 je ω_1 a v okamžiku t_2 má hodnotu ω_2. **Průměrné úhlové zrychlení** tělesa v časovém intervalu od t_1 do t_2 pak definujeme vztahem

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \qquad (11.7)$$

kde $\Delta\omega$ je změna úhlové rychlosti v daném časovém intervalu délky Δt. **(Okamžité) úhlové zrychlení** ε, se kterým budeme pracovat nejčastěji, je limitou průměrného úhlového zrychlení při poklesu hodnoty Δt k nule. Platí tedy

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}. \qquad (11.8)$$

Rov. (11.7) a (11.8) platí nejen pro rotující tuhé těleso jako celek, ale i pro *každou jeho částici*. Nejužívanější jednotkou úhlového zrychlení je radián za sekundu na druhou (rad/s^2), případně počet otáček za sekundu na druhou (ot/s^2).

Podobně jako u úhlové rychlosti můžeme i zde zavést vektor úhlového zrychlení: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$. Jeho směr je dán osou a směrem otáčení. Situace je tedy obdobná jako u jednorozměrných vektorů v kap. 2.

PŘÍKLAD 11.1

Časová závislost úhlové polohy vztažné přímky rotujícího kola je dána vztahem

$$\theta = t^3 - 27t + 4,$$

kde t je v sekundách a θ v radiánech.

(a) Určete $\omega(t)$ a $\varepsilon(t)$.

ŘEŠENÍ: Úhlovou rychlost $\omega(t)$ najdeme jako derivaci funkce $\theta(t)$ podle času:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = 3t^2 - 27. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Dalším derivováním získáme úhlové zrychlení $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(3t^2 - 27)}{\mathrm{d}t} = 6t. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Zjistěte, zda se v některém okamžiku úhlová rychlost anuluje. Ve kterém?

ŘEŠENÍ: Požadavek $\omega(t) = 0$ vede k rovnici

$$0 = 3t^2 - 27,$$

jejíž řešení má tvar

$$t = \pm 3. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Okamžitá úhlová rychlost kola je nulová v okamžicích $t = 3$ s a $t = -3$ s (3 sekundy před začátkem měření).

(c) Popište pohyb kola pro $t \geqq 0$.

ŘEŠENÍ: Všimněme si podrobněji časových závislostí $\theta(t)$, $\omega(t)$ a $\varepsilon(t)$.

V okamžiku $t = 0$ (začátek měření) má vztažná přímka úhlovou polohu $\theta = 4$ rad, kolo se otáčí úhlovou rychlostí -27 rad/s (tedy *ve směru* otáčení hodinových ručiček) a jeho úhlové zrychlení je nulové.

V intervalu $0 < t < 3$ s se kolo otáčí stále ve směru otáčení hodinových ručiček. Jeho úhlové zrychlení je kladné, a proto velikost jeho úhlové rychlosti klesá (otáčení se zvolňuje). Ověřte toto tvrzení například pro okamžik $t = 2$ s.

V okamžiku $t = 3$ s je úhlová rychlost kola nulová ($\omega = 0$) a kolo je v krajní úhlové poloze (vztažná přímka má v tomto okamžiku úhlovou polohu $\theta = -50$ rad).

Pro $t > 3$ s úhlové zrychlení kola roste. Zvyšuje se i jeho úhlová rychlost, která je nyní kladná. Vzhledem k tomu, že veličiny ω a ε mají stejné (kladné) znaménko, roste i velikost úhlové rychlosti, a to poměrně rychle.

PŘÍKLAD 11.2

Dětská káča se otáčí s úhlovým zrychlením

$$\varepsilon = 5t^3 - 4t.$$

Všechny veličiny jsou vyjádřeny v odpovídajících jednotkách SI (rad, s). V čase $t = 0$ má káča úhlovou rychlost 5 rad/s a její vztažná přímka má úhlovou polohu $\theta = 2$ rad.

(a) Najděte časovou závislost úhlové rychlosti káči $\omega(t)$.

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.8) dostaneme vztah

$$\mathrm{d}\omega = \varepsilon\,\mathrm{d}t$$

a jeho integrací získáme funkci

$$\omega = \int \varepsilon\,\mathrm{d}t = \int (5t^3 - 4t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{5}{4}t^4 - \tfrac{4}{2}t^2 + C.$$

Pro výpočet integrační konstanty C použijeme podmínku $\omega(t = 0) = 5$ rad/s, jejímž dosazením do poslední rovnice dostáváme

$$5\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}} = 0 - 0 + C.$$

Je tedy $C = 5$ rad/s a

$$\omega = \tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Najděte časovou závislost úhlové polohy káči $\theta(t)$.

ŘEŠENÍ: Rov. (11.6) přepíšeme ve tvaru

$$\mathrm{d}\theta = \omega\,\mathrm{d}t$$

a integrací dostaneme hledanou časovou závislost $\theta(t)$:

$$\begin{aligned}\theta &= \int \omega\,\mathrm{d}t = \int (\tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5)\,\mathrm{d}t = \\ &= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + C' = \\ &= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + 2. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

Konstantu C' jsme určili z podmínky $\theta(t = 0) = 2$ rad.

11.3 JSOU ÚHLOVÉ VELIČINY VEKTOROVÉ?

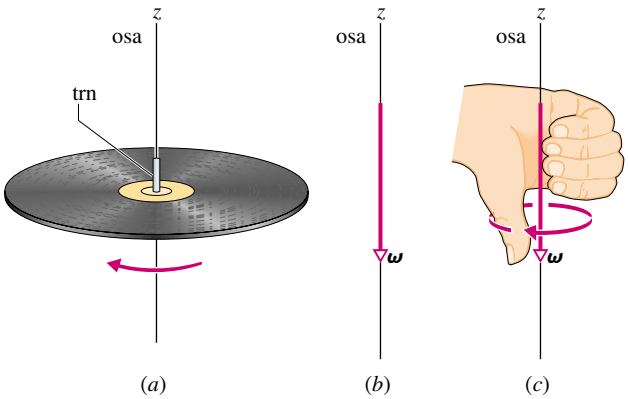
Poloha, rychlost a zrychlení částice jsou typické vektorové veličiny. Vzpomeňme si však, že při popisu přímočarého pohybu částice jsme vektorovou algebru v plném rozsahu nepotřebovali. Dva možné směry pohybu částice jsme totiž dokázali rozlišit pouze znaménkem. Polohový vektor, rychlost i zrychlení byly zadány vždy jediným číselným údajem, představujícím složku vektoru měřenou podél přímky — trajektorie částice.

V podobné situaci se ocitáme při popisu otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy. Těleso se může otáčet v některém ze dvou možných směrů, které opět odlišíme znaménky: ve směru kladném (proti směru otáčení hodinových ručiček), nebo záporném (ve směru otáčení hodinových ručiček). Znamená to, že můžeme otočení, úhlovou rychlost a úhlové zrychlení pokládat za vektorové veličiny? Odpověď na tuto otázku je pro případ úhlové rychlosti a úhlového zrychlení kladná. Otočení však vektorovou veličinou *není*. K podrobnějšímu rozboru této skutečnosti se vrátíme v závěru článku.

Uvažujme úhlovou rychlost. Na obr. 11.5a je znázorněna gramofonová deska, která se otáčí kolem pevného trnu stálou úhlovou rychlostí $\omega = 33\frac{1}{3}$ ot/min. Rovněž směr otáčení je stálý a při pohledu shora se děje ve směru otáčení

hodinových ručiček. Úhlovou rychlost tedy můžeme definovat jako vektor $\boldsymbol{\omega}$, rovnoběžný s osou otáčení (obr. 11.5). Délku tohoto vektoru znázorníme v nějakém vhodném měřítku, např. 1 cm bude odpovídat 10 ot/min.

Směr vektoru $\boldsymbol{\omega}$ definujeme pomocí **pravidla pravé ruky** podle obr. 11.5. Přiložíme pravou dlaň k rotující desce tak, aby prsty směřovaly ve směru otáčení. Natažený palec pak ukazuje směr vektoru úhlové rychlosti. Kdyby se deska otáčela opačným směrem, byl by směr vektoru úhlové rychlosti, určený pravidlem pravé ruky, opačný.



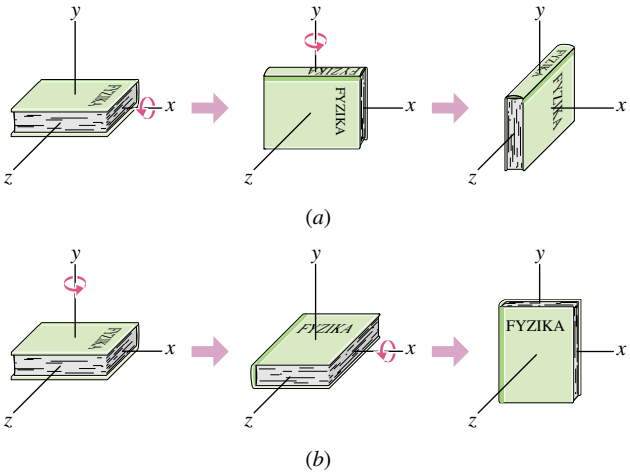
Obr. 11.5 (a) Gramofonová deska se otáčí kolem svislé osy (trnu). (b) Úhlovou rychlost rotující desky lze chápat jako vektor $\boldsymbol{\omega}$, rovnoběžný s osou otáčení a směřující dolů. (c) Směr vektoru úhlové rychlosti stanovíme pomocí pravidla pravé ruky. Prsty pravé ruky ukazují směr otáčení, palec ukazuje směr vektoru $\boldsymbol{\omega}$.

Na vektorovou povahu úhlových veličin si zřejmě budeme chvíli zvykat. Intuitivně totiž cítíme, že by vektor měl udávat směr pohybu nějakého objektu. V případě úhlových veličin by však byla taková představa nesprávná. Tuhé těleso se otáčí *kolem* směru vektoru. Při rotačním pohybu určuje vektor směr osy otáčení, nikoli směr pohybu. I takový vektor však charakterizuje pohybový stav objektu. Samozřejmě i pro něj platí pravidla vektorové algebry, shrnutá v kap. 3. Předchozí úvahy se týkají jak úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$, tak úhlového zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Poněvadž se v této kapitole zabýváme pouze otáčením tělesa kolem pevné osy, nemusíme za každou cenu pracovat s úhlovými veličinami jako s vektory. Úhlovou rychlost i úhlové zrychlení můžeme totiž v každém okamžiku zadat pouze číselnými údaji ω a ε, směr vektoru je určen znaménkem příslušné číselné hodnoty. Při řešení složitějších úloh je však vektorový zápis vhodnější.

Vraťme se nyní k možnosti popsat i otočení jako vektorovou veličinu. Pokud nejde o otočení velmi malé, není takový popis možný. Otočení *není* vektorovou veličinou. Jak jsme na to přišli? Každému otočení přece můžeme přiřadit velikost i směr, podobně jako v případě úhlové rychlosti tělesa na obr. 11.5. Možnost přisoudit veličině směr a velikost však ještě nezaručuje, že jde o veličinu vektorovou. Matematik by řekl, že je tím splněna pouze podmínka nutná, ne však postačující. Abychom totiž mohli nějakou veličinu prohlásit za vektorovou, musela by vyhovovat pravidlům vektorové algebry. Podle jednoho z nich je například součet vektorů nezávislý na pořadí sčítání. Snadno však zjistíme, že otočení tomuto pravidlu nevyhovuje.

Abychom se o tom přesvědčili, položme na stůl knihu podle obr. 11.6a. Otočme ji dvakrát po sobě o úhel 90°, *nejdříve* kolem vodorovné osy x, *potom* kolem svislé osy y. K určení kladného směru otočení použijeme pravidlo pravé ruky (obr. 11.5).



Obr. 11.6 (a) Knihu otočíme dvakrát o 90°, nejdříve kolem vodorovné osy x, potom kolem svislé osy y. (b) Táž otočení provedeme v opačném pořadí. (Výchozí poloha knihy je v případech (a) i (b) stejná.) Pokud by otočení bylo vektorovou veličinou, neovlivnilo by pořadí otočení výslednou polohu knihy. Z obrázku je však zřejmé, že výsledná poloha knihy na pořadí provedených otočení závisí. Otočení není vektorová veličina, přestože jí můžeme přiřadit velikost a směr.

Vraťme nyní knihu do původní polohy a proveďme tato dvě otočení v opačném pořadí (obr. 11.6b), tedy *nejprve* kolem osy y a teprve potom kolem osy x. Jak je vidět z obrázku, výsledná polohy knihy se v obou případech liší.

Táž dvojice operací vede k různým výsledkům, jsou-li operace provedeny v různém pořadí. Skládání otočení není komutativní a otočení tedy nemůže být vektorovou veličinou. Jednoduchým pokusem však snadno ukážeme, že odlišnost výsledných poloh knihy je nepatrná, jsou-li provedená otočení mnohem menší než 90°. Infinitezimálně (neomezeně) malé otočení (například $\mathrm{d}\theta$ v rov. (11.6)) již může být pokládáno za vektorovou veličinu.

Tabulka 11.1 **Posuvný pohyb s konstantním zrychlením a otáčivý pohyb s konstantním úhlovým zrychlením**

ROVNICE ČÍSLO	POSUVNÝ POHYB	CHYBĚJÍCÍ VELIČINA		OTÁČIVÝ POHYB	ROVNICE ČÍSLO
(2.11)	$v_x = v_{0x} + a_x t$	x	θ	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$	(11.9)
(2.15)	$x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	v_x	ω	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$	(11.10)
(2.16)	$v_x^2 = v_0^2 + 2 a_x x$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \varepsilon \theta$	(11.11)
(2.17)	$x = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x) t$	a_x	ε	$\theta = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega) t$	(11.12)
(2.18)	$x = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2$	v_{0x}	ω_0	$\theta = \omega t - \frac{1}{2} \varepsilon t^2$	(11.13)

11.4 ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ OTÁČIVÝ POHYB

Důležitým zvláštním případem posuvného pohybu po přímce je rovnoměrně zrychlený pohyb (například volný pád). Tab. 2.1 obsahuje souhrn rovnic, které se takového případu týkají.

Pohyb *s konstantním úhlovým zrychlením* je zase významným speciálním případem pohybu otáčivého a vztahy mezi veličinami, které jej popisují, se rovnicím v tab. 2.1 velmi podobají, jak je zřejmé z tab. 11.1. Snadno je můžeme získat z odpovídajících vztahů pro posuvný pohyb. Stačí, abychom v nich nahradili polohu, rychlost a zrychlení příslušnými úhlovými veličinami. Oba soubory rovnic, tj. (2.11), (2.15) až (2.18) a (11.9) až (11.13), shrnuje pro porovnání tab. 11.1. Pro jednoduchost jsme v nich položili $x_0 = 0$ a $\theta_0 = 0$. Při takových *počátečních podmínkách* je posunutí $\Delta x = x - x_0$ dáno přímo souřadnicí x a otočení $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ úhlovou polohou θ.

KONTROLA 2: Časová závislost úhlové polohy rotujícího tělesa $\theta(t)$ může být vyjádřena některým z následujících vztahů: (a) $\theta(t) = 3t - 4$, (b) $\theta(t) = -5t^3 + 4t^2 + 6$, (c) $\theta(t) = 2/t^2 - 4/t$ a (d) $\theta(t) = 5t^2 - 3$. Pro který z nich lze použít tab. 11.1?

PŘÍKLAD 11.3

Mlýnské kolo na obr. 11.7 se otáčí s konstantním úhlovým zrychlením $\varepsilon = 0{,}35\ \text{rad/s}^2$. Roztáčí se z klidové polohy (tj. $\omega_0 = 0$), v níž je jeho vztažná přímka vodorovná ($\theta_0 = 0$).

(a) Určete otočení vztažné přímky v okamžiku $t = 18$ s.

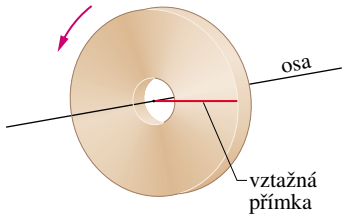
ŘEŠENÍ: Z rov. (11.10) v tab. 11.1 ($\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$) dostaneme

$$\theta = 0(18\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(0{,}35\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2})(18\ \text{s})^2 =$$
$$= 56{,}7\ \text{rad} \doteq 57\ \text{rad} \doteq 3\,200^\circ \doteq 9{,}0\ \text{ot}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je v tomto okamžiku úhlová rychlost kola?

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.9) v tab. 11.1 ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$) vyjde

$$\omega = 0 + (0{,}35\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2})(18\ \text{s}) =$$
$$= 6{,}3\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} = 360^\circ/\text{s} = 1{,}0\ \text{ot/s}. \quad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 11.7 Příklady 11.3 a 11.4. Vztažná přímka mlýnského kola je v okamžiku $t = 0$ vodorovná.

PŘÍKLAD 11.4

Předpokládejme, že počáteční úhlová rychlost mlýnského kola z př. 11.3 je nyní $\omega_0 = -4{,}6\ \text{rad/s}$. Kolo se točí opět s úhlovým zrychlením ($\varepsilon = 0{,}35\ \text{rad/s}^2$). Znaménka veličin ω_0 a ε jsou opačná, otáčivý pohyb kola je tedy zpomalený.

(a) Určete okamžik, kdy bude úhlová rychlost kola nulová.

ŘEŠENÍ: Vyřešíme rov. (11.9) ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$) pro neznámou t a dostaneme

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} = \frac{0 - (-4{,}6\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1})}{(0{,}35\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2})} = 13\ \text{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete okamžik, kdy úhlová poloha kola odpovídá pěti otáčkám v kladném směru. (V tomto okamžiku má otočení vztažné přímky hodnotu $\theta = 5$ ot.)

ŘEŠENÍ: Na počátku pohybu se kolo otáčí v záporném směru (ve směru otáčení hodinových ručiček) úhlovou rychlostí $\omega_0 = -4{,}6\ \text{rad/s}$. Jeho úhlové zrychlení je ovšem kladné (proti směru otáčení hodinových ručiček). Opačná znaménka počáteční úhlové rychlosti a úhlového zrychlení znamenají, že velikost úhlové rychlosti kola klesá. V určité chvíli se kolo na okamžik zastaví a začne se roztáčet v kladném směru. Poté, co se vztažná přímka vrátila do své počáteční úhlové polohy

$\theta = 0$, musí kolo vykonat ještě dalších pět otáček, aby jeho úhlová poloha měla předepsanou hodnotu. Popis pohybu kola se nám může zdát poměrně složitý. Všechny jeho fáze jsou však „již obsaženy“ v rov. (11.10):

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2.$$

Po vyjádření úhlu θ v radiánech ($\theta = 5\,\text{ot} = 10\pi\,\text{rad}$) a dosazení číselných údajů dostaneme

$$10\pi\,\text{rad} = (-4{,}6\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})t + \tfrac{1}{2}(0{,}35\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})t^2.$$

Je-li čas t vyjádřen v sekundách, je získaná rovnice rozměrově správná. V dalším výpočtu jednotky pro jednoduchost vynecháme. Kvadratickou rovnici pro neznámou t přepíšeme do tvaru

$$t^2 - 26{,}3t - 180 = 0 \qquad (11.14)$$

a vyřešíme ji. Řešením úlohy je její kladný kořen

$$t = 32\,\text{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

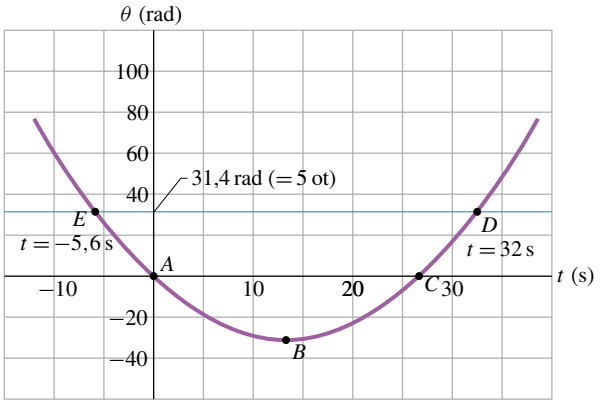
Bod 11.1: *Neočekávané výsledky*

Při posuzování fyzikálního významu kořenů kvadratické rovnice bychom neměli postupovat unáhleně. I kořen, který se nám na první pohled jeví jako nepřípustný, může mít dobrý fyzikální smysl. Právě tak je tomu i v př. 11.4.

Rov. (11.14) má kořeny $t = 32\,\text{s}$ a $t = -5{,}6\,\text{s}$. První z nich (kladný) jsme prohlásili za řešení úlohy a druhý zavrhli jako fyzikálně nevýznamný. Rozhodli jsme správně? Nikoliv! Záporná hodnota časové proměnné v tomto případě jednoduše udává jistý konkrétní okamžik předtím, než jsme začali pohyb kola sledovat, tj. než jsme stiskli vynulované stopky.

Obr. 11.8 znázorňuje časový průběh úhlové polohy θ vztažné přímky mlýnského kola (př. 11.4) pro kladné i záporné hodnoty časové proměnné. Představuje grafické vyjádření rov. (11.10) ($\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$) pro číselné hodnoty $\omega_0 = -4{,}6\,\text{rad/s}$ a $\varepsilon = +0{,}35\,\text{rad/s}^2$. Bod A odpovídá okamžiku $t = 0$, jemuž jsme přisoudili nulovou hodnotu úhlové polohy vztažné přímky. Od této chvíle se kolo točí v záporném směru až do okamžiku $t = 13\,\text{s}$, kdy jeho úhlová rychlost dosáhne nulové hodnoty (v grafu bod B). Směr otáčení se změní v opačný a vztažná přímka projde úhlovou polohou $\theta = 0$ v okamžiku, jemuž v grafu odpovídá bod C. Pak se kolo ještě pětkrát otočí ($\theta = 31{,}4\,\text{rad}$, $t = 32\,\text{s}$, bod D v grafu). Časový údaj $t = 32\,\text{s}$ jsme v př. 11.4 přijali jako správné řešení úlohy.

Všimněme si však, že vztažná přímka měla úhlovou polohu $\theta = 5\,\text{ot}$ také v okamžiku $t = -5{,}6\,\text{s}$, tj. před „oficiálně stanoveným“ začátkem měření veličin charakterizujících pohyb kola. Fyzikální význam tohoto kořene kvadratické rovnice (11.14), reprezentovaného bodem E na obrázku, není tedy o nic menší než význam kořene odpovídajícího bodu D. Kromě posouzení právoplatnosti záporného kořene rov. (11.14) jsme předchozími úvahami také podrobněji popsali časový průběh otáčení kola.



Obr. 11.8 Graf časové závislosti úhlové polohy $\theta(t)$ mlýnského kola podle př. 11.4. V grafu je znázorněna situace i pro záporné hodnoty časové proměnné (před okamžikem $t = 0$). Dva kořeny rov. (11.14) odpovídají bodům D a E.

PŘÍKLAD 11.5

Při zkoumání pohybu rotoru vrtulníku se zjistilo, že se jeho úhlová rychlost změnila během doby 1,50 min z 320 ot/min na 225 ot/min.

(a) Určete průměrné úhlové zrychlení rotoru v uvedeném intervalu.

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.7) plyne

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{(225\,\text{ot/min}) - (320\,\text{ot/min})}{(1{,}50\,\text{min})} = \\ = -63{,}3\,\text{ot/min}^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Předpokládejme, že se otáčení rotoru zpožďuje rovnoměrně, takže je okamžité úhlové zrychlení v každém okamžiku shodné s průměrným. Jak dlouho potrvá, než se rotor zastaví, je-li jeho počáteční úhlová rychlost 320 ot/min?

ŘEŠENÍ: Rov. (11.9) ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$) řešíme vzhledem k neznámé t a dostaneme

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} = \frac{0 - (320\,\text{ot/min})}{(-63{,}3\,\text{ot/min}^2)} = \\ = 5{,}1\,\text{min}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Kolik otáček vykoná rotor vrtulníku v úloze (b)?

ŘEŠENÍ: Rov. (11.11) ($\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\theta$) nyní řešíme vzhledem k neznámé θ:

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon} = \frac{0 - (320\,\text{ot/min})^2}{2(-63{,}3\,\text{ot/min}^2)} = \\ = 809\,\text{ot}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

11.5 KORESPONDENCE OBVODOVÝCH A ÚHLOVÝCH VELIČIN

Připomeňme si čl. 4.7, kde jsme studovali rovnoměrný pohyb částice po kružnici. Částice se pohybovala *obvodovou rychlostí* $\boldsymbol{v}$ se stálou velikostí v. Takový pohyb však můžeme chápat i jako rotaci částice kolem pevné osy, vedené středem kružnice kolmo k její rovině. Otáčí-li se kolem pevné osy tuhé těleso (například kolotoč), pohybuje se každá jeho částice po své vlastní kruhové trajektorii. Osa otáčení tělesa je spojnicí středů všech těchto kružnic. Protože je těleso tuhé, trvá jeden oběh všech jeho částic stejnou dobu. Částice tedy mají stejnou úhlovou rychlost ω.

Čím je však částice vzdálenější od osy otáčení, tím větší je obvod její trajektorie a tedy i její obvodová rychlost. Tuto skutečnost si snadno uvědomíme třeba při jízdě na kolotoči. Úhlová rychlost otáčení ω je nezávislá na vzdálenosti sedačky, na níž se vezeme, od osy kolotoče. Obvodová rychlost $\boldsymbol{v}$ (a nepříjemné pocity dané její změnou) je však tím větší, čím je sedačka od osy vzdálenější.

Často je třeba mít k dispozici vztahy mezi obvodovými veličinami, tj. délkou oblouku s, obvodovou rychlostí v a obvodovým zrychlením a jednotlivých částic rotujícího tuhého tělesa a úhlovými veličinami θ, ω a ε, charakterizujícími otáčivý pohyb tělesa jako celku. Vztah obvodových a úhlových veličin je pro každou částici určen její *vzdáleností* r od osy otáčení, tj. poloměrem její kruhové trajektorie.

Poloha

Sledujme pohyb vybrané částice rotujícího tuhého tělesa. Při otočení vztažné přímky o úhel θ urazí částice po oblouku své kruhové trajektorie dráhu s podle rov. (11.1)

$$s = \theta r \quad (\theta \text{ je v rad}). \tag{11.15}$$

Získáváme první vztah mezi obvodovými a úhlovými veličinami. Úhel θ je třeba měřit v radiánech, neboť rov. (11.15) představuje současně definici úhlové míry.

Rychlost

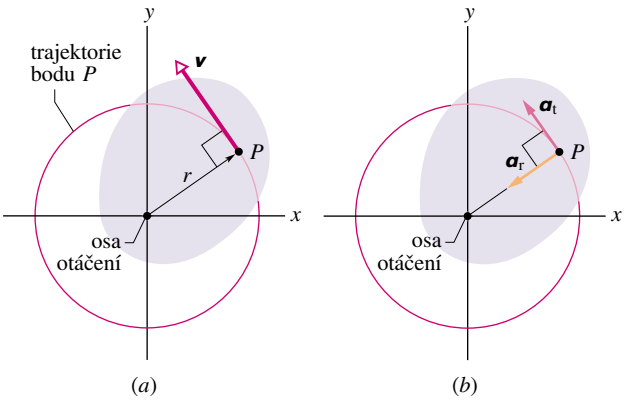
Derivujme rov. (11.15) podle času (při konstantní hodnotě r). Pak

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} r \quad (\theta \text{ je v rad}).$$

Veličina $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ představuje obvodovou rychlost uvažované částice a $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ je úhlová rychlost ω rotujícího tělesa. Je tedy

$$v = \omega r \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.16}$$

Úhlovou rychlost ω je opět nutné vyjádřit pomocí obloukové míry, tj. v jednotkách rad/s. Jak již víme, mají všechny částice tělesa stejnou úhlovou rychlost. Z rov. (11.16) pak snadno poznáme, že částice, které obíhají ve větší vzdálenosti r od osy otáčení, mají větší obvodovou rychlost v. Obr. 11.9a znázorňuje známou skutečnost, že vektor rychlosti částice je v každém okamžiku tečný k její kruhové trajektorii.



Obr. 11.9 Řez tuhým tělesem znázorněným na obr. 11.2 rovinou kolmou k ose otáčení. Každá částice tělesa (např. P) se pohybuje po kruhové trajektorii, jejíž střed leží na ose otáčení. (a) Vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ částice je tečný k její kruhové trajektorii. (b) Zrychlení $\boldsymbol{a}$ libovolné částice je součtem dvou průmětů, tečného ($\boldsymbol{a}_t$) a normálového ($\boldsymbol{a}_r$).

Při otáčení tělesa stálou úhlovou rychlostí je podle rov. (11.16) časově neproměnná i obvodová rychlost každé jeho částice. Každá částice tělesa tedy koná rovnoměrný pohyb po kružnici. Doba oběhu T je pro všechny částice stejná a samozřejmě shodná s trváním jedné otáčky celého tělesa. Je vyjádřena vztahem (4.23)

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \tag{11.17}$$

z něhož je patrné, že je podílem délky kruhové trajektorie částice ($2\pi r$) a její obvodové rychlosti (v). Po dosazení v z rov. (11.16) a malé úpravě dostaneme

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.18}$$

Tento výsledek je samozřejmě ekvivalentní s rov. (11.17). Vyjadřuje však společnou dobu oběhu všech částic pomocí veličin charakterizujících otáčivý pohyb tělesa jako celku, tj. jako podíl úhlu otočení tělesa (2π rad) během jedné otáčky a jeho úhlové rychlosti (ω).

Obvodové zrychlení

Derivací rov. (11.16) podle času (r je opět konstantní) dostáváme

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r. \qquad (11.19)$$

V tuto chvíli je na místě jistá obezřetnost: veličina dv/dt na levé straně rov. (11.19) je časovou derivací obvodové rychlosti částice. Udává tedy časovou změnu *velikosti* vektoru její rychlosti a charakterizuje tak *nerovnoměrnost* jejího pohybu. Vraťme se na okamžik k čl. 6.4, který se zabýval výhradně *rovnoměrným* pohybem po kružnici. Vzpomeňme si, že zrychlení částice směřovalo v tomto případě neustále do středu její kruhové trajektorie, takže jeho tečný průmět (*tečné zrychlení*) byl nulový. Zdá se tedy, že tečné zrychlení nutně souvisí se změnou obvodové rychlosti a při nerovnoměrném pohybu již pochopitelně nebude nulové. Skutečně, výraz dv/dt představuje *tečnou složku* a_t vektoru zrychlení částice. Platí pro ni

$$a_t = \varepsilon r \quad (\varepsilon \text{ je v rad/s}^2), \qquad (11.20)$$

kde $\varepsilon = d\omega/dt$.

(Při pohybu po kružnici nazýváme někdy tečnou složku zrychlení částice též obvodovým zrychlením.)

Celkové zrychlení částice je součtem jeho dvou průmětů, **tečného zrychlení** $\boldsymbol{a}_t$ a **normálového (radiálního) zrychlení** $\boldsymbol{a}_r$. Při pohybu po kružnici směřuje normálové zrychlení do jejího středu a vystihuje změnu směru vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$. Jeho velikost, tzv. **normálová složka** zrychlení, se řídí známým vztahem $a_r = v^2/r$ (rov. (4.22)). Dosazením v z rov. (11.16) dostaneme pro a_r vztah

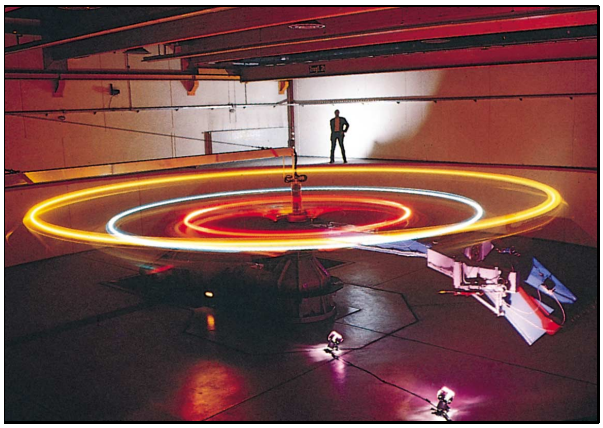
$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \qquad (11.21)$$

Předchozí úvahy názorně shrnuje obr. 11.9b: zrychlení každé částice rotujícího tuhého tělesa je součtem svých dvou průmětů, tečného a normálového zrychlení. Tečné zrychlení $\boldsymbol{a}_t$ má směr vektoru rychlosti a normálové zrychlení $\boldsymbol{a}_r$ směřuje do středu kruhové trajektorie. Normálová složka zrychlení je dána vztahem (11.21), a je tedy vždy nenulová (pokud těleso rotuje, je $\omega \neq 0$). Tečná složka a_t se řídí vztahem (11.20)) a je nenulová v případě, že je otáčivý pohyb tělesa nerovnoměrný, tj. jeho úhlové zrychlení je nenulové.

KONTROLA 3: Moucha se veze na okraji kolotoče, jehož úhlová rychlost je konstantní. Rozhodněte, zda je (a) normálová, resp. (b) tečná složka zrychlení mouchy nenulová. (c), (d) Zodpovězte předchozí otázky pro případ, že úhlová rychlost kolotoče klesá.

PŘÍKLAD 11.6

Na obr. 11.10 je vyfotografována centrifuga určená pro výcvik astronautů. Poloměr r kruhové trajektorie trénujícího astronauta je 15 m.



Obr. 11.10 Příklad 11.6. Centrifuga pro výcvik astronautů v německém Kolíně. Při tréninku si astronauti zvykají na velká zrychlení, jimž jsou vystaveni při startu rakety.

(a) Předpokládejme, že se centrifuga otáčí rovnoměrně. Jaká musí být její úhlová rychlost, má-li si astronaut zvykat na zrychlení $11g$?

ŘEŠENÍ: Protože je úhlová rychlost centrifugy stálá, je její úhlové zrychlení ε $(= d\omega/dt)$ nulové. Podle rov. (11.20) je nulová i tečná složka zrychlení astronauta. Celkové zrychlení je tedy dáno pouze zrychlením normálovým. Užitím rov. (11.21) ($a_r = \omega^2 r$) a požadavku $a_r = 11g$ dostaneme

$$\omega = \sqrt{\frac{a_r}{r}} = \sqrt{\frac{11(9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})}{(15\ \text{m})}} = \\ = 2{,}68\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 26\ \text{ot/min}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete tečné zrychlení pohybu astronauta za předpokladu, že úhlová rychlost centrifugy rovnoměrně vzroste během 120 s z počáteční nulové hodnoty na hodnotu vypočtenou v úkolu (a).

ŘEŠENÍ: Poněvadž je úhlové zrychlení centrifugy podle předpokladu stálé, můžeme pro jeho výpočet použít rovnici (11.9). Dostaneme

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{(2{,}68\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} - 0)}{(120\ \text{s})} = 0{,}022\,3\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Tečnou složku zrychlení astronauta pak již snadno určíme pomocí rov. (11.20):

$$a_t = \varepsilon r = (0{,}022\,3\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2})(15\ \text{m}) = \\ = 0{,}33\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledná hodnota normálové složky zrychlení astronauta je značná ($a_r = 11g$). Tečná složka při rozjezdu centrifugy je v porovnání s ní mnohonásobně nižší ($a_t = 0{,}034g$).

RADY A NÁMĚTY

Bod 11.2: *Jednotky úhlových veličin*

Definice úhlové polohy ve tvaru (11.1) ($\theta = s/r$) nás zavazuje k používání obloukové míry (radiány) ve všech vztazích mezi úhlovými a obvodovými veličinami. Otočení tedy musíme vyjadřovat vždy v radiánech, úhlové rychlosti v jednotkách rad/s nebo rad/min a úhlová zrychlení v jednotkách rad/s^2 nebo rad/min^2. Ve vztazích (11.15), (11.16), (11.18), (11.20) a (11.21) jsme tuto skutečnost explicitně zdůraznili. Tímto pravidlem se však nemusíme řídit ve vztazích obsahujících *výhradně* úhlové veličiny (vztahy v pravé části tab. 11.1). Můžeme v nich pracovat s libovolnými úhlovými jednotkami, tj. kromě radiánů také se stupni nebo počty otáček, pokud je užíváme konzistentně, tj. „nemícháme je".

Ve vztazích vyžadujících použití obloukové míry není třeba vypisovat jednotku „radián" (rad) během celého výpočtu. Stačí ji uvést až ve výsledku. Takového zjednodušení zápisu jsme použili v př. 11.6.

11.6 KINETICKÁ ENERGIE TĚLESA PŘI OTÁČIVÉM POHYBU

Rychle rotující kotoučová pila má určitě značnou kinetickou energii a jistě je možné ji určit. Ale jak? Známý vztah $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ platí totiž pro částici. Pro výpočet kinetické energie rotujícího tělesa však není přímo použitelný už proto, že nevíme, kterou veličinu bychom měli dosazovat za v.

Považujme kotoučovou pilu (a obecně každé rotující tuhé těleso) za soustavu částic pohybujících se různými rychlostmi. Kinetickou energii takového tělesa pak celkem přirozeně definujeme jako součet kinetických energií jednotlivých částic, tj.

$$E_k = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3v_3^2 + \ldots = \\ = \sum \tfrac{1}{2}m_iv_i^2. \qquad (11.22)$$

Hmotnost i-té částice jsme označili symbolem m_i a velikost její rychlosti v_i. Součet zahrnuje všechny částice tělesa.

Získaný vztah je ovšem pro praktický výpočet kinetické energie tělesa poněkud nepohodlný. Částice se totiž pohybují různými rychlostmi $\boldsymbol{v}_i$. Uvědomíme-li si však, že rov. (11.16) umožňuje vyjádřit velikost rychlosti každé částice pomocí její vzdálenosti od osy otáčení a úhlové rychlosti, která charakterizuje otáčivý pohyb tělesa jako celku, můžeme se tohoto „nepohodlí" snadno zbavit. Užitím rov. (11.16) dostaneme

$$E_k = \sum \tfrac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2. \qquad (11.23)$$

Hodnota ω je stejná pro všechny částice.

Veličina v závorce po poslední úpravě rov. (11.23) závisí na rozložení hmoty tělesa vzhledem k ose otáčení. Nazýváme ji **momentem setrvačnosti** tělesa vzhledem k dané ose otáčení a značíme ji I. Všimněme si, že pro případ tuhého tělesa, které se otáčí kolem pevně zvolené osy, je moment setrvačnosti konstantní. Tato jeho vlastnost je velmi podstatná a usnadňuje všechny další úvahy. Volbu osy otáčení je ovšem nutno při výpočtu momentu setrvačnosti jasně zadat, neboť jeho hodnota na ní výrazně závisí.

Pomocí momentu setrvačnosti

$$I = \sum m_i r_i^2 \qquad (11.24)$$

získáme z rov. (11.23) pro E_k velmi jednoduchý výraz

$$E_k = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \qquad (11.25)$$

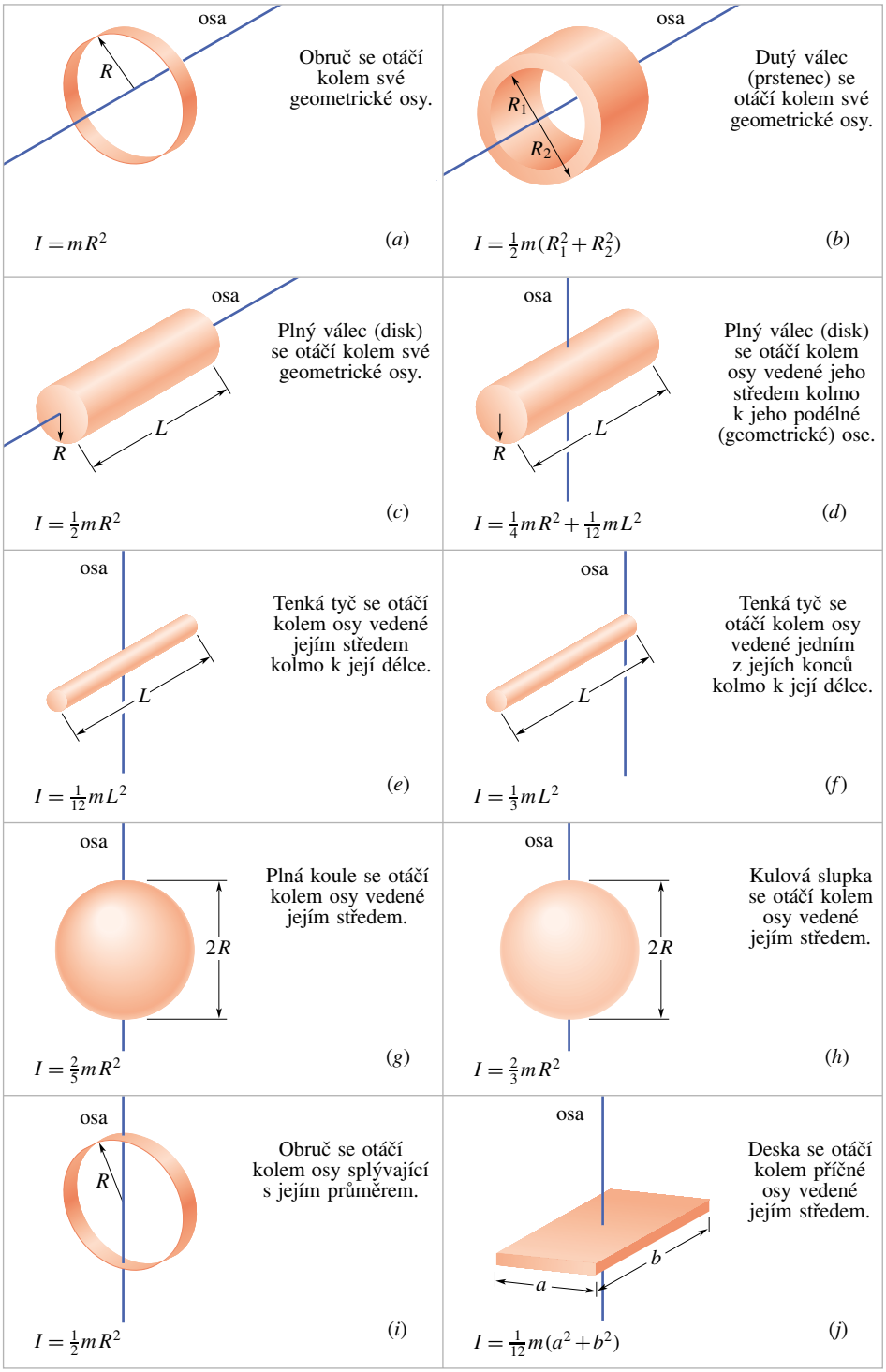
Při jeho odvození jsme použili vztah $v = \omega r$. Úhlovou rychlost ω v rov. (11.25) musíme proto zadávat v obloukové míře.

Všimněme si podobnosti rov. (11.25) pro kinetickou energii otáčejícího se tuhého tělesa se vztahem $E_k = \frac{1}{2}mv_T^2$, který vyjadřuje jeho kinetickou energii při posuvném pohybu. V obou vztazích se vyskytuje faktor $\frac{1}{2}$. Hmotnost m ve vztahu pro kinetickou energii posuvného pohybu představuje „míru setrvačnosti" tělesa. V případě otáčení se ve výrazu pro E_k objevuje moment setrvačnosti I, který tak lze chápat jako „míru setrvačnosti" tělesa při jeho otáčení. V obou vztazích vystupuje druhá mocnina příslušné rychlosti (rychlosti posuvného, resp. úhlové rychlosti otáčivého pohybu). Oba výrazy vyjadřují stejný typ energie, energii kinetickou. Liší se pouze způsobem zápisu podle typu pohybu tělesa.

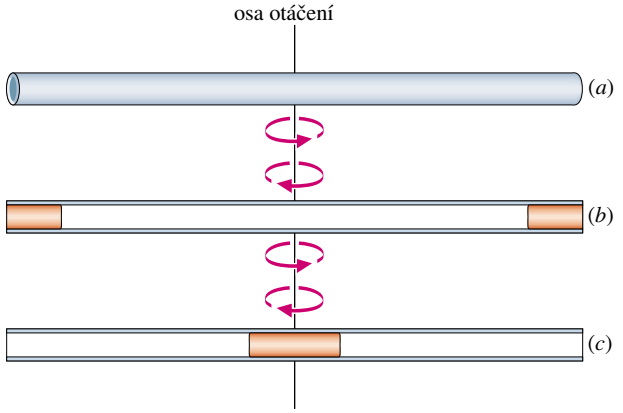
Všimli jsme si již, že moment setrvačnosti tuhého tělesa závisí nejen na jeho hmotnosti, ale i jejím rozložení vzhledem k ose otáčení. Obr. 11.11 názorně ukazuje, jak můžeme rozdíly momentu setrvačnosti pocítit takřka „na vlastní kůži". Na obr. 11.11a jsou dvě duté tyče, které na pohled vypadají úplně stejně. Jejich vnější rozměry i hmotnosti jsou shodné a obě tyče jsou v rovnováze, jsou-li podepřeny uprostřed. Žádný rozdíl nezpozorujeme ani tehdy, uchopíme-li je postupně do ruky a uvedeme do posuvného pohybu.

Zcela odlišné pocity však zaznamenáme, zkusíme-li tyče rychle roztáčet. S jednou z nich to půjde velmi snadno, druhá se „bude bránit". Obr. 11.11b, c odhalují podstatu

Tabulka 11.2 Momenty setrvačnosti některých homogenních těles

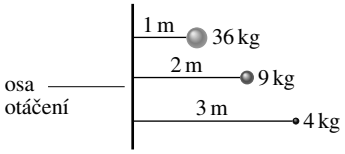


tohoto rozdílu. „Poslušná“ tyč má uvnitř dvě závaží, která jsou umístěna blízko jejího středu, zatímco druhá tyč má stejná závaží připevněna na koncích. Hmotnosti tyčí jsou sice stejné, ale jejich hmota je *jinak rozložena* vzhledem k vyznačené ose otáčení. Proto jsou výrazně odlišné i hodnoty jejich momentu setrvačnosti vzhledem k této ose.



Obr. 11.11 (a) Vnější vzhled tyčí, jejichž vnitřek je znázorněn na obrázcích (b) a (c), je totožný. Tyče se budou jevit stejné do chvíle, kdy se pokusíme je roztočit kolem osy procházející jejich středem. Tyč (c) se roztáčí snadno, tyč (b) „odolává“. I když mají obě tyče stejnou hmotnost, jsou jejich momenty setrvačnosti vzhledem k dané ose otáčení výrazně odlišné vlivem různého rozložení jejich hmoty. Moment setrvačnosti tyče (b) je podstatně větší než moment setrvačnosti tyče (c).

KONTROLA 4: Částice na obrázku obíhají kolem svislé osy v daných vzdálenostech. Seřaďte je sestupně podle velikosti jejich momentu setrvačnosti vzhledem k této ose.



11.7 VÝPOČET MOMENTU SETRVAČNOSTI

Je-li tuhé těleso složeno z jednotlivých částic, lze jeho moment setrvačnosti snadno určit pomocí součtu (11.24). Je-li však hmota tělesa rozložena spojitě, je třeba nahradit tento součet integrálem. Moment setrvačnosti je pak definován jako

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m. \qquad (11.26)$$

V úlohách této kapitoly se budeme zabývat výpočty I pro oba typy těles. Obecně lze říci, že moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k dané ose otáčení závisí (1) na jeho tvaru, (2) na vzdálenosti jeho těžiště od osy otáčení a (3) na jeho orientaci vzhledem k ose otáčení.

Tab. 11.2 shrnuje vztahy pro výpočet momentu setrvačnosti některých běžných homogenních těles vzhledem k různým osám otáčení. Všimněme si, jak rozložení hmoty vzhledem k ose otáčení ovlivní hodnotu I. Tak například u tyče na obrázku (f) je větší část hmoty dále od osy otáčení než u stejně dlouhé tyče na obrázku (e). Tyče mají stejnou hmotnost i délku, jejich momenty setrvačnosti jsou však rozdílné vlivem odlišné volby osy otáčení. Moment setrvačnosti tyče v situaci (f) je větší než v případě (e).

Steinerova věta

Známe-li moment setrvačnosti I_T tělesa vzhledem k jisté ose jdoucí jeho těžištěm, můžeme snadno vypočítat jeho moment setrvačnosti vzhledem ke každé další ose téhož směru. Vztah mezi oběma momenty setrvačnosti se nazývá **Steinerova věta**. Platí

$$I = I_T + mh^2, \qquad (11.27)$$

kde m je hmotnost tělesa a h je vzdálenost uvažovaných rovnoběžných os. Slovně lze předchozí vztah vyjádřit takto:

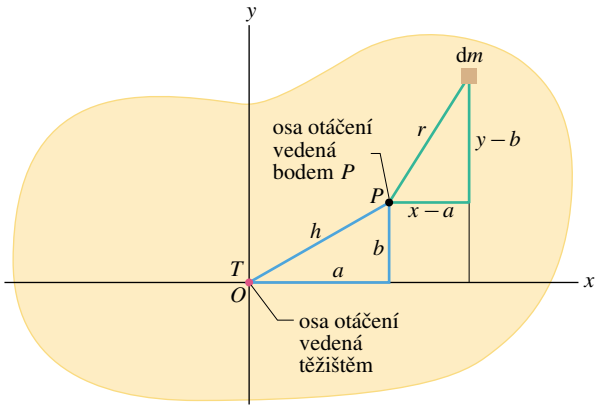
Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k libovolně zvolené ose o je *součtem* jeho momentu setrvačnosti I_T vzhledem k rovnoběžné ose o' ($o' \parallel o$), vedené jeho těžištěm, a momentu setrvačnosti mh^2 veškeré hmoty soustředěné v těžišti vzhledem k ose o, kde h je vzdálenost os o, o'.

Důkaz Steinerovy věty

Uvažujme těleso obecného tvaru, které se může otáčet kolem obecně zvolené pevné osy. Těžiště tělesa označme T a umístěme v něm počátek soustavy souřadnic ($O = T$). Řez tělesa rovinou kolmou k ose otáčení a procházející těžištěm tělesa je znázorněn obr. 11.12. Průsečík osy otáčení s rovinou řezu označme P a jeho souřadnice a a b.

Uvažujme objemový element tělesa v bodě o souřadnicích x a y a označme jeho hmotnost $\mathrm{d}m$. Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené bodem P můžeme vyjádřit pomocí rov. (11.26) takto:

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2] \, \mathrm{d}m.$$



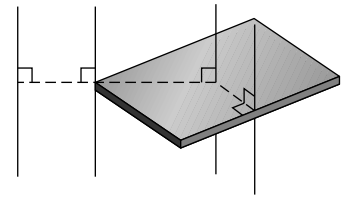
Obr. 11.12 Řez tuhým tělesem s těžištěm T v počátku O soustavy souřadnic. Steinerova věta (11.27) umožňuje vyjádřit moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené bodem P jako součet momentu setrvačnosti vzhledem k ose téhož směru, procházející však těžištěm T, a výrazu mh^2, kde h je vzdálenost obou os. Osy jsou kolmé k rovině nákresu.

Tento integrál lze přepsat ve tvaru

$$I = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m - 2a \int x\,\mathrm{d}m$$
$$-2b \int y\,\mathrm{d}m + \int (a^2 + b^2)\,\mathrm{d}m. \qquad (11.28)$$

Uvědomíme-li si definiční vztah pro polohu těžiště tělesa (rov. (9.9)), ihned vidíme, že druhý a třetí integrál v rov. (11.28) představují, až na násobení konstantou, x-ovou a y-ovou souřadnici těžiště. Jsou tedy nulové. Součet $x^2 + y^2$ můžeme označit jako R^2, kde symbolem R rozumíme vzdálenost elementu $\mathrm{d}m$ od bodu O. Je zřejmé, že první integrál má význam momentu setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm, I_T. Poslední člen v rov. (11.28) má hodnotu je mh^2 (obr. 11.12), kde m je hmotnost tělesa. Získali jsme rov. (11.27), představující matematický zápis Steinerovy věty.

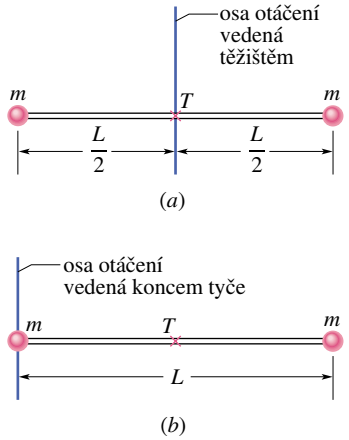
KONTROLA 5: Těleso na obrázku (například kniha) se může otáčet kolem čtyř různých os. Všechny jsou kolmé k vodorovné základně tělesa. Seřaďte je sestupně podle odpovídajících hodnot momentu setrvačnosti tělesa.



(1) (2) (3) (4)

PŘÍKLAD 11.7

Tuhé těleso na obr. 11.13 je tvořeno dvěma částicemi o hmotnosti m spojenými tyčí délky L, jejíž hmotnost je zanedbatelná.



Obr. 11.13 Příklad 11.7. Tuhé těleso je tvořeno dvěma částicemi o hmotnosti m spojenými tyčí zanedbatelné hmotnosti.

(a) Určete moment setrvačnosti tohoto tělesa vzhledem k ose vedené kolmo k tyči jejím středem (obr. 11.13a).

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.24) plyne

$$I = \sum m_i r_i^2 = m(\tfrac{1}{2}L)^2 + m(\tfrac{1}{2}L)^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené koncem tyče rovnoběžně s osou zadanou v úloze (a) (obr. 11.13b).

ŘEŠENÍ: Úlohu řešíme pomocí Steinerovy věty (11.27). Moment setrvačnosti I_T jsme určili v části (a). Víme, že vzdálenost h obou rovnoběžných os je polovinou délky tyče. Z rov. (11.27) tedy dostáváme

$$I = I_T + mh^2 = \tfrac{1}{2}mL^2 + (2m)(\tfrac{1}{2}L)^2 =$$
$$= mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek můžeme snadno ověřit přímým výpočtem podle rov. (11.24):

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)(0)^2 + (m)(L)^2 =$$
$$= mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 11.8

Na obr. 11.14 je znázorněna tenká homogenní tyč o hmotnosti m a délce L.

(a) Vypočtěte její moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené kolmo k tyči jejím hmotným středem.

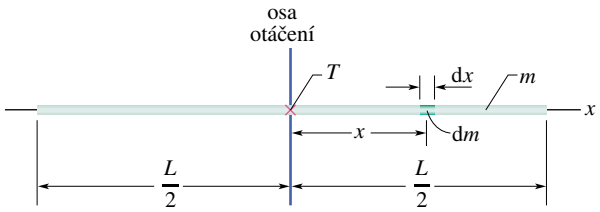
ŘEŠENÍ: Zvolme osu x rovnoběžně s tyčí tak, aby její počátek ležel v těžišti tyče. Označme $\mathrm{d}x$ element délky tyče, umístěný v bodě o souřadnici x. Hmotnost úseku tyče jednotkové délky, tzv. lineární hustota, je m/L, element $\mathrm{d}x$ má hmotnost

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{L}\,\mathrm{d}x.$$

Podle rov. (11.26) je pak

$$I = \int r^2\,\mathrm{d}m = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{m}{L}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{m}{3L}\left[x^3\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{m}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right] =$$
$$= \tfrac{1}{12}mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledek se shoduje s údajem v tab. 11.2e.



Obr. 11.14 Příklad 11.8. Homogenní tyč délky L a hmotnosti m.

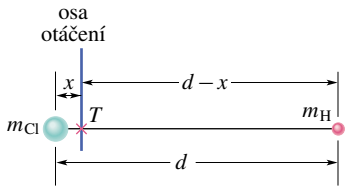
(b) Určete moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose vedené kolmo k tyči jejím koncovým bodem.

ŘEŠENÍ: Použijeme výsledek části (a) a Steinerovu větu (11.27). Dostaneme, ve shodě s tab. 11.2f,

$$I = I_T + mh^2 =$$
$$= \tfrac{1}{12}mL^2 + (m)(\tfrac{1}{2}L)^2 = \tfrac{1}{3}mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 11.9

Molekula chlorovodíku se skládá z atomu vodíku o hmotnosti $m_\mathrm{H} = 1{,}01\,\mathrm{u}$ a atomu chloru o hmotnosti $m_\mathrm{Cl} = 35{,}0\,\mathrm{u}$. Vzdálenost středů atomů je $d = 1{,}27{\cdot}10^{-10}\,\mathrm{m} = 127\,\mathrm{pm}$ (obr. 11.15). Vypočtěte polohu těžiště molekuly chlorovodíku vzhledem k ose vedené jejím těžištěm kolmo ke spojnici atomů.



Obr. 11.15 Příklad 11.9. Schematicky znázorněná molekula chlorovodíku. Osa otáčení prochází jejím těžištěm a je kolmá je spojnici atomů.

ŘEŠENÍ: Označme x vzdálenost atomu chloru od těžiště molekuly. Z obr. 11.15 a rov. (9.3) dostáváme

$$0 = \frac{-m_\mathrm{Cl}x + m_\mathrm{H}(d-x)}{m_\mathrm{Cl} + m_\mathrm{H}},$$

tj.

$$m_\mathrm{Cl}x = m_\mathrm{H}(d-x).$$

Odtud

$$x = d\,\frac{m_\mathrm{H}}{m_\mathrm{Cl} + m_\mathrm{H}}. \qquad (11.29)$$

Moment setrvačnosti molekuly vzhledem k ose jdoucí jejím těžištěm je (viz rov. (11.24))

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_\mathrm{H}(d-x)^2 + m_\mathrm{Cl}x^2.$$

Dosazením za x ze vztahu (11.29) a po úpravě dostaneme

$$I = d^2\,\frac{m_\mathrm{H}m_\mathrm{Cl}}{m_\mathrm{H} + m_\mathrm{Cl}} = (127\,\mathrm{pm})^2\,\frac{(1{,}01\,\mathrm{u})(35{,}0\,\mathrm{u})}{(1{,}01\,\mathrm{u} + 35{,}0\,\mathrm{u})} =$$
$$= 15{,}800\,\mathrm{u{\cdot}pm^2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Použité jednotky jsou pro vyjádření momentu setrvačnosti molekul přiměřené. Ještě vhodnější je délková jednotka angström ($1\,\text{Å} = 10^{-10}\,\mathrm{m}$), pomocí níž bude $I = 1{,}58\,\mathrm{u{\cdot}Å^2}$.

PŘÍKLAD 11.10

Pomocí moderní techniky je možné zkonstruovat setrvačník, který může sloužit jako pohon automobilu. Setrvačník se nejprve roztočí motorem tak, aby kinetická energie jeho otáčivého pohybu byla dostatečná. Takto „uložená“ energie je pak postupně předávána automobilu prostřednictvím převodové soustavy. Představme si takový setrvačník jako plný válec o hmotnosti $m = 75\,\mathrm{kg}$ a poloměru $R = 25\,\mathrm{cm}$. Zjistěte, jak velká energie je v něm „uložena“, je-li roztočen na úhlovou rychlost 85 000 ot/min.

ŘEŠENÍ: Moment setrvačnosti válcového setrvačníku vyjádříme podle tab. 11.2c:

$$I = \tfrac{1}{2}mR^2 = \tfrac{1}{2}(75\,\mathrm{kg})(0{,}25\,\mathrm{m})^2 = 2{,}34\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}.$$

Úhlová rychlost setrvačníku je

$$\omega = (85\,000\,\mathrm{ot/min})(2\pi\,\mathrm{rad/ot})(1\,\mathrm{min}/60\,\mathrm{s}) =$$
$$= 8\,900\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}.$$

Z rov. (11.25) získáme jeho kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2{,}34\,\mathrm{kg{\cdot}m^2})(8\,900\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})^2 =$$
$$= 9{,}3{\cdot}10^7\,\mathrm{J} = 26\,\mathrm{kW{\cdot}h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Účinnost takového pohonu nebude samozřejmě stoprocentní. Vezmeme-li však v úvahu její rozumný odhad, zjistíme,

že setrvačník by dokázal dopravit automobil do vzdálenosti 320 km.

11.8 MOMENT SÍLY

Přemýšleli jste někdy nad tím, proč je klika umístěna na protilehlé straně závěsu dveří? K otevření těžkých dveří je potřeba značné síly. Samotná síla by ovšem k otevření dveří nemusela stačit, kdybychom nevhodně zvolili její směr nebo působiště. Kdyby síla působila v některém bodě poblíž závěsu dveří nebo kdyby nebyla ke dveřím kolmá, musela by být větší než v případě, že by její směr a působiště byly vybrány optimálně.

Na obr. 11.16a vidíme řez tělesem, které se může volně otáčet kolem pevné osy kolmé k rovině nákresu. Na těleso působí v bodě P síla $\boldsymbol{F}$. Rovina řezu je vedena bodem P, její průsečík s osou otáčení je označen O. Polohový vektor bodu P vzhledem k O označíme $\boldsymbol{r}$. Vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{r}$ svírají úhel φ. Pro jednoduchost se omezíme pouze na síly ležící v některé z rovin kolmých k ose otáčení. Průmět každé takové síly do směru osy otáčení je nulový. Ve shodě s tímto předpokladem leží tedy síla $\boldsymbol{F}$ v rovině obrázku.

Abychom zjistili otáčivý účinek síly $\boldsymbol{F}$, rozložíme ji do dvou průmětů podle obr. 11.16b. První z nich určuje takzvanou *radiální složku* F_r síly $\boldsymbol{F}$. Je rovnoběžný s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$ a nemá vliv na otáčivý pohyb tělesa. Působí totiž podél spojnice bodů P a O. (Jistě si snadno představíme, nebo i vyzkoušíme, co se stane, budeme-li tahat za kliku ve směru ležícím v rovině dveří. Pravděpodobně dveřmi příliš nepohneme.) Druhý průmět síly $\boldsymbol{F}$, kolmý k vektoru $\boldsymbol{r}$, definuje její *tečnou složku* $F_\mathrm{t} = F \sin\varphi$. Právě ona *způsobí* otočení dveří. (Můžeme si vyzkoušet, že silou namířenou kolmo k rovině dveří jimi celkem snadno otočíme.)

„Schopnost“ síly $\boldsymbol{F}$ otáčet tělesem závisí však nejen na velikosti její tečné složky F_t, ale také na vzdálenosti jejího působiště od bodu O. Veličina, která bere v úvahu oba tyto vlivy, se nazývá **moment síly** $\boldsymbol{M}$ vzhledem k ose otáčení. Jeho velikost definujeme vztahem

$$M = (r)(F \sin\varphi). \tag{11.30}$$

Existují dva ekvivalentní způsoby vyjádření momentu síly:

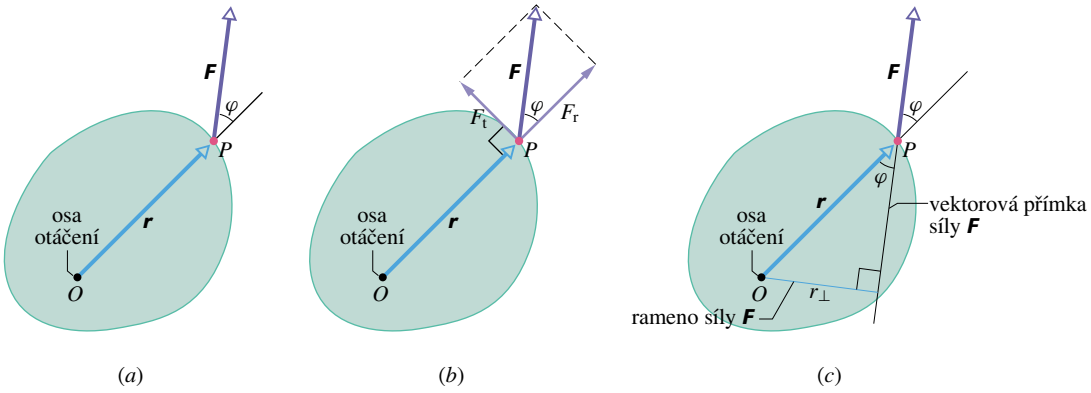
$$M = (r)(F \sin\varphi) = r F_\mathrm{t} \tag{11.31}$$

nebo

$$M = (r \sin\varphi)(F) = r_\perp F, \tag{11.32}$$

$r_\perp$ je kolmá vzdálenost bodu O od vektorové přímky síly $\boldsymbol{F}$. Je to přímka, v níž vektor síly leží (obr. 11.16c). Veličinu $r_\perp$ nazýváme **rameno síly** $\boldsymbol{F}$. Z obr. 11.16b je zřejmé, že r (tedy velikost vektoru $\boldsymbol{r}$) je současně ramenem tečného průmětu $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ síly $\boldsymbol{F}$.*

* Uvědomme si dobře souvislost definice momentu síly *vzhledem k ose otáčení* s konstrukcí na obr. 11.16. Bod O je průsečíkem roviny řezu vedené působištěm P síly $\boldsymbol{F}$ kolmo k ose otáčení. Dejme tomu, že na těleso působí ještě jiná síla $\boldsymbol{F}'$, jejíž působiště P' však *neleží* v rovině vedené kolmo k ose otáčení bodem P. Abychom určili její moment vzhledem k ose, musíme opět najít průsečík osy s příslušnou rovinou řezu. Dostaneme tak bod O'. Taková konstrukce má ovšem smysl jen tehdy, je-li osa otáčení pevná. Také definice momentu síly vzhledem k ose otáčení je na tento předpoklad vázána. V obecných situacích je nutné definovat moment síly obecněji a vztahovat jej nikoli k pevné přímce (ose), nýbrž k pevnému bodu. Nakonec si ještě povšimněme, že v případě otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy, na které působí síly ležící výhradně v rovinách kolmých k ose otáčení, jsou vektorové přímky těchto sil kolmé k ose a v obecném případě jsou s ní mimoběžné. Ramenem každé ze sil vzhledem k ose otáčení je pak vzdálenost dvou mimoběžek, vektorové přímky dotyčné síly a osy otáčení.



Obr. 11.16 (a) Síla $\boldsymbol{F}$ působí na tuhé těleso v bodě P. Těleso se může otáčet kolem osy vedené bodem O kolmo k rovině obrázku. (b) Moment této síly vzhledem k této ose má velikost $(r)(F \sin\varphi)$, kterou lze také vyjádřit ve tvaru $r F_\mathrm{t}$, kde F_t je tečná složka síly $\boldsymbol{F}$. (c) Jiný možný zápis velikosti momentu síly $\boldsymbol{F}$ má tvar $r_\perp F$, kde $r_\perp$ je rameno síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k ose otáčení.

Kroucení se též nazývá **torze** (z latiny). Přibližně lze říci, že moment síly vyjadřuje kroutivý (torzní) účinek síly.

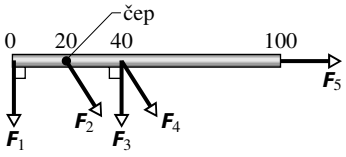
Shrňme nyní dosavadní poznatky. Působíme-li na těleso, třeba na šroubovák nebo klíč, určitou silou ve snaze tělesem *otočit*, musí být moment této síly vzhledem k ose otáčení nenulový. Někdy říkáme, že na těleso *působíme určitým momentem*. Jednotkou momentu síly v soustavě SI je N·m.* Moment M považujeme za kladný, roztáčí-li těleso proti směru otáčení hodinových ručiček, tj. ve směru rostoucí úhlové polohy θ. (Taková situace je znázorněna na obr. 11.16.) Roztáčí-li se těleso ve směru otáčení hodinových ručiček, přisuzujeme momentu síly záporné znaménko.

Definici momentu síly rov. (11.30) lze zapsat i ve vektorovém tvaru, konkrétně pomocí *vektorového součinu*

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \qquad (11.33)$$

Moment síly je tedy vektorovou veličinou. Jeho směr je podle definice (11.33) kolmý k rovině vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$. Jeho velikost je dána vztahy (11.30), (11.31) a (11.32) a orientaci určuje pravidlo pravé ruky. Vztah (11.33) budeme používat v kap. 12.

KONTROLA 6: Na obrázku je v nadhledu znázorněn tyčový metr, který se může otáčet kolem čepu umístěného u značky 20 (20 cm). Všechny síly vyznačené v obrázku jsou vodorovné a mají stejnou velikost. Seřaďte je sestupně podle velikosti jejich momentu vzhledem k ose otáčení.



11.9 VĚTA O MOMENTU HYBNOSTI

Obr. 11.17 znázorňuje jednoduchý případ otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy. Těleso je tvořeno částicí o hmotnosti m připevněnou na konci tyče délky r, jejíž hmotnost je zanedbatelná. Síla $\boldsymbol{F}$ uvádí částici do pohybu po kružnici kolem osy otáčení. Zrychlení částice je dáno druhým Newtonovým zákonem:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{T},$$

kde $\boldsymbol{T}$ je tahová síla tyče, která pro jednoduchost není v obrázku vyznačena. (Její moment vzhledem k ose otáčení je nulový). Pro tečnou složku zrychlení částice tedy platí

$$ma_t = F_t.$$

Moment síly $\boldsymbol{F}$ působící na částici lze podle rov. (11.31) vyjádřit jako

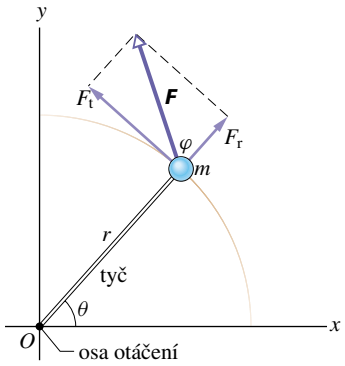
$$M = F_t r = m a_t r$$

a pomocí rov. (11.20) ($a_t = \varepsilon r$) přepsat do tvaru

$$M = m(\varepsilon r)r = (mr^2)\varepsilon. \qquad (11.34)$$

Výraz mr^2 představuje moment setrvačnosti částice vzhledem k ose otáčení (rov. (11.24)). Rov. (11.34) lze tedy zapsat velmi jednoduše:

$$I\varepsilon = M \quad (\varepsilon \text{ je v rad·s}^{-2}). \qquad (11.35)$$



Obr. 11.17 Jednoduché tuhé těleso se skládá z částice o hmotnosti m připevněné na tyči o délce r a zanedbatelné hmotnosti. Působením síly $\boldsymbol{F}$ se těleso roztáčí kolem osy vedené bodem O.

Působí-li na těleso více sil, je třeba vztah (11.35) zobecnit:

$$I\varepsilon = \sum M \quad (\varepsilon \text{ je v rad·s}^{-2}), \qquad (11.36)$$

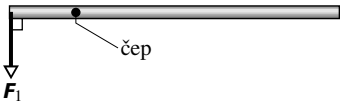
kde $\sum M$ je součet momentů všech sil působících na částici (**výsledný silový moment**). Rov. (11.36) je analogická druhému Newtonovu zákonu při použití úhlových veličin.

Vztah (11.35) a jeho obecnější verzi (11.36) jsme odvodili pro zcela speciální případ tělesa — jedinou částici obíhající kolem pevné osy. Zamysleme se nad tím, zda jej dokážeme zobecnit pro libovolné tuhé těleso, které se otáčí kolem pevné osy. Takové zobecnění je skutečně možné. Tuhé těleso není vlastně nic jiného než soustava částic,

* N·m je také jednotka práce. Moment síly a práce jsou ovšem zcela rozdílné veličiny, které nesmíme zaměňovat. Práce se často vyjadřuje také v joulech (1 J = 1 N·m), zatímco pro moment síly jednotku J nepoužíváme nikdy.

které obíhají kolem osy otáčení se stejným úhlovým zrychlením ε. Levá strana rov. (11.35) a (11.36) je tedy pro tuhé těleso vyjádřena stejně jako pro částici, s tím rozdílem, že symbolem I je třeba rozumět moment setrvačnosti *tělesa* vzhledem k ose otáčení. Jistý problém vzniká při interpretaci pravé strany těchto vztahů. Na každou částici tělesa mohou totiž určitými silami působit jak okolní objekty, tak i jeho ostatní částice. Uvědomíme-li si však, že pro síly vzájemného působení částic uvnitř tělesa platí třetí Newtonův zákon, a předpokládáme-li celkem přirozeně, že interakční síly mají pro každou dvojici částic směr jejich spojnice, zjistíme, že výsledný moment sil působících uvnitř tělesa je nulový. Zkušenost tento závěr potvrzuje: žádné těleso se ještě neroztočilo vlivem vnitřních sil, tj. samo od sebe. Předchozí úvahu můžeme uzavřít konstatováním, že platnost rov. (11.36) je mnohem obecnější než pro případ jednotlivé částice. Platí pro libovolné tuhé těleso otáčející se kolem pevné osy, jestliže I je jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení a $\sum M$ je výsledný moment *vnějších sil* působících na těleso, vztažený k této ose. Takto zobecněný vztah (11.36) představuje pohybovou rovnici pro otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy. Nazýváme ho **věta o momentu hybnosti** (soustavy částic) nebo také **druhá impulzová věta**.

KONTROLA 7: Na obrázku je v nadhledu zobrazen tyčový metr, který se může otáčet kolem vyznačeného čepu, umístěného vlevo od středu tyče. Na tyč působí dvě vodorovné síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$, pouze síla $\boldsymbol{F}_1$ je však v obrázku zakreslena. Síla $\boldsymbol{F}_2$ je k tyči kolmá a působí na její pravý konec. Předpokládejte, že se tyč neotáčí a určete (a) orientaci síly $\boldsymbol{F}_2$. (b) Rozhodněte, zda je síla $\boldsymbol{F}_2$ větší, stejně velká, nebo menší než síla $\boldsymbol{F}_1$.

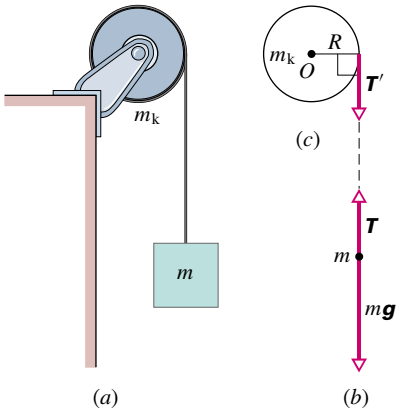


PŘÍKLAD 11.11

Obr. 11.18a znázorňuje homogenní kotouč o hmotnosti $m_k = 2{,}5\,\text{kg}$ a poloměru $R = 20\,\text{cm}$, který je připevněn na pevnou vodorovnou osu. Závaží o hmotnosti $m = 1{,}2\,\text{kg}$ visí na vlákně zanedbatelné hmotnosti navinutém na obvodu kotouče. Závaží padá svisle dolů a kotouč se roztáčí. Vypočtěte zrychlení závaží, úhlové zrychlení kotouče a tahovou sílu vlákna. Předpokládáme, že vlákno po obvodu kotouče neklouže a zanedbáváme tření v ose.

ŘEŠENÍ: Na obr. 11.18b jsou znázorněny síly působící na závaží.

Závaží se urychluje směrem dolů, takže velikost tíhové síly mg je větší než velikost tahové síly vlákna T. Podle



Obr. 11.18 Příklady 11.11 a 11.13. (a) Padající závaží roztáčí kotouč. (b) Silový diagram závaží. (c) Silový diagram kotouče.

druhého Newtonova pohybového zákona je

$$ma = T - mg. \tag{11.37}$$

Na obr. 11.18c jsou znázorněny síly působící na kotouč. Vlivem momentu síly $\boldsymbol{T}'$ se kotouč roztáčí po směru otáčení hodinových ručiček. Tento moment je tedy záporný a je roven $-T'R$. Ze vztahu (c) v tab. 11.2 víme, že moment setrvačnosti kotouče je $I = \frac{1}{2}m_k R^2$. Na kotouč působí také tíhová síla $m_k\boldsymbol{g}$ a svislá síla $\boldsymbol{N}$, kterou na kotouč působí pevná osa. Vektorové přímky obou těchto sil procházejí osou otáčení kotouče a jejich momenty vzhledem k ní jsou proto nulové. Použitím druhé impulzové věty ve tvaru $I\varepsilon = M$ dostaneme

$$\tfrac{1}{2}m_k R^2\varepsilon = -T'R.$$

Protože vlákno po obvodu kotouče neprokluzuje, je zrychlení a závaží shodné s tečným zrychlením a_t bodu na obvodu kotouče. Použitím rov. (11.20) ($\varepsilon = a/R$) můžeme poslední vztah zjednodušit do tvaru

$$-\tfrac{1}{2}m_k a = T'. \tag{11.38}$$

Z rov. (11.37) a (11.38) a s uvážením, že $T' = T$ (velikosti sil $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ jsou stejné), nakonec dostaneme

$$a = -g\frac{2m}{m_k + 2m} = -(9{,}8\,\text{m·s}^{-2})\frac{2(1{,}2\,\text{kg})}{(2{,}5\,\text{kg}) + 2(1{,}2\,\text{kg})} =$$
$$= -4{,}8\,\text{m·s}^{-2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

K určení velikosti síly T použijeme rov. (11.38):

$$T = -\tfrac{1}{2}m_k a = -\tfrac{1}{2}(2{,}5\,\text{kg})(-4{,}8\,\text{m·s}^{-2}) =$$
$$= 6{,}0\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

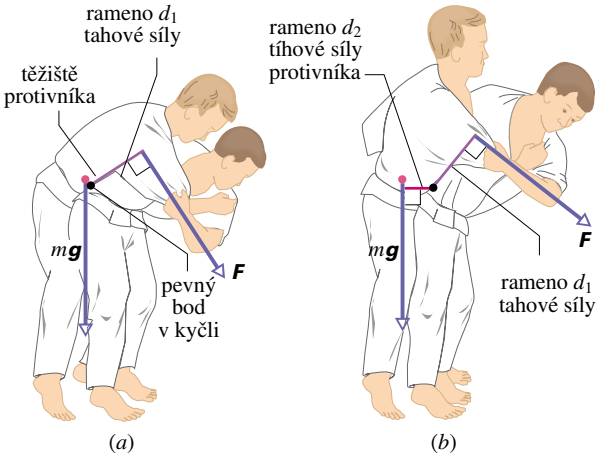
Podle očekávání je zrychlení padajícího závaží menší než g a tahová síla vlákna (6,0 N) je menší než tíhová síla působící na závaží ($mg = 11{,}8$ N). Všimněme si, že zrychlení tělesa a tahová síla vlákna nezávisí na poloměru kotouče, pouze na jeho hmotnosti. Pro kontrolu ještě dosaďme $m_k = 0$ (kotouč zanedbatelné hmotnosti). Dostáváme $a = -g$ a $T = 0$. Ani tento výsledek není nečekaný: závaží padá volným pádem a táhne s sebou nenapjaté vlákno.

Z rov. (11.20) vypočteme ještě úhlové zrychlení kotouče

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{(-4{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}{(0{,}20\ \mathrm{m})} = -24\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 11.12

Zápasník v judu se chystá položit svého osmdesátikilového soka na žíněnku. Uchopí jej za oděv na rameni a snaží se jej otočit kolem svého těla. Při tom na něj působí silou $\boldsymbol{F}$. Osou otáčení je spojnice ramenního a kyčelního kloubu zápasníka. Rameno působící síly vzhledem k této ose má v běžných situacích velikost $d_1 = 30$ cm. Předpokládejme, že zápasník udělí soupeři úhlové zrychlení $-6{,}0$ rad/s^2, roztáčí jej tedy ve směru otáčení hodinových ručiček (obr. 11.19). Moment setrvačnosti soupeře vzhledem k ose otáčení je zhruba 15 kg·m^2.



Obr. 11.19 Příklad 11.12. (a) Správně a (b) nesprávně provedený chvat v judu.

(a) Určete velikost síly $\boldsymbol{F}$ potřebné k tomuto chvatu za předpokladu, že judista těsně před jeho provedením ohne soupeře tak, aby posunul jeho těžiště nad svůj kyčelní kloub (obr. 11.19a).

ŘEŠENÍ: Leží-li těžiště soupeře na ose rotace vedené kyčelním kloubem judisty, je moment tíhové síly působící na soupeře vzhledem k ose otáčení nulový. Jediným nenulovým momentem, který má vliv na pohyb soupeře, je moment síly $\boldsymbol{F}$. Tento moment je záporný. Pomocí rov. (11.31) a (11.35) jej zapíšeme ve tvaru

$$M = -d_1 F = I\varepsilon,$$

odkud

$$F = \frac{-I\varepsilon}{d_1} = \frac{-(15\ \mathrm{kg\cdot m^2})(-6{,}0\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}})}{(0{,}30\ \mathrm{m})} = 300\ \mathrm{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Předpokládejme, že soupeř zůstane vzpřímen, takže rameno tíhové síly vzhledem k ose otáčení má velikost $d_2 = 0{,}12$ m. Jak velká musí být síla $\boldsymbol{F}$ nyní?

ŘEŠENÍ: V této situaci je moment tíhové síly působící na soupeře nenulový. Jeho směr je kladný, tedy opačný než směr momentu síly $\boldsymbol{F}$. Z rov. (11.31) a (11.36) dostáváme

$$\sum M = -d_1 F + d_2 mg = I\varepsilon,$$

a tedy

$$F = -\frac{I\varepsilon}{d_1} + \frac{d_2 mg}{d_1}.$$

V části (a) této úlohy jsme již zjistili, že první člen na pravé straně poslední rovnice činí 300 N. Dosazením této hodnoty i dalších číselných údajů do získaného vztahu pro F nakonec dostáváme

$$F = (300\ \mathrm{N}) + \frac{(0{,}12\ \mathrm{m})(80\ \mathrm{kg})(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}{(0{,}30\ \mathrm{m})} = 613{,}6\ \mathrm{N} \doteq 610\ \mathrm{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Z výsledků (a) a (b) vidíme, jak důležitá je příprava zápasníka na provedení chvatu. Pokud se mu totiž nepodaří uskutečnit přípravnou fázi tak, jak je popsáno v části (a), tj. ohnout soupeře a podsunout svou kyčel pod jeho těžiště, potřebuje k provedení chvatu mnohem větší sílu. Dobrý judista toto pravidlo zná a používá. (Rozbor fyzikální problematiky juda a aikido mohou zájemci najít v červnovém čísle časopisu Scientific American z r. 1980.)

11.10 PRÁCE A KINETICKÁ ENERGIE PŘI OTÁČIVÉM POHYBU

Připomeňme si znovu situaci na obr. 11.17: síla $\boldsymbol{F}$ roztáčí tuhé těleso tvořené jedinou částicí o hmotnosti m připevněnou na konci tyče, jejíž hmotnost je zanedbatelná. Pokus je uspořádán tak, že se mění pouze kinetická energie tělesa. Můžeme proto použít vztah mezi prací a změnou kinetické energie podle rov. (7.4)

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W. \qquad (11.39)$$

Použitím vztahu $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ a (11.16) ($v = \omega r$) můžeme přepsat rov. (11.39) do tvaru

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}mr^2\omega_i^2 = W. \qquad (11.40)$$

Moment setrvačnosti částice je $I = mr^2$ (rov. (11.24)). Jeho dosazením do rov. (11.40) dostaneme

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = W. \qquad (11.41)$$

Vidíme, že v jednoduché situaci znázorněné na na obr. 11.17 je změna kinetické energie spojené s otáčivým pohybem tělesa dána prací síly $\boldsymbol{F}$. Rov. (11.41) pro otáčivý pohyb je tedy obdobou vztahu mezi prací a změnou kinetické energie, získaného již dříve pro pohyb posuvný. Odvodili jsme ji sice pro případ jediné částice, platí však pro libovolné tuhé těleso rotující kolem pevné osy.

Pro situaci na obr. 11.17 se nyní pokusíme vyjádřit práci W pomocí momentu síly $\boldsymbol{F}$. Při elementárním otočení tělesa o úhel $\mathrm{d}\theta$ se částice posune podél své kruhové trajektorie o vzdálenost $\mathrm{d}s$. Práci síly $\boldsymbol{F}$ při tomto posunutí vyjádříme pomocí rov. (7.11):

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = F_t\,\mathrm{d}s = F_t r\,\mathrm{d}\theta. \qquad (11.42)$$

(Připomeňme, že F_t je tečná složka síly $\boldsymbol{F}$.) Součin $F_t r$ představuje podle rov. (11.31) moment M síly $\boldsymbol{F}$. Rov. (11.42) tak získává tvar

$$\mathrm{d}W = M\,\mathrm{d}\theta. \qquad (11.43)$$

Práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při celkovém otočení tělesa z úhlové polohy θ_i do polohy θ_f je pak dána integrálem

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M\,\mathrm{d}\theta. \qquad (11.44)$$

Tento vztah je „rotační“ obdobou rov. (7.27)

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,\mathrm{d}x.$$

Odvodili jsme jej opět pro jedinou částici, platí však pro libovolné tuhé těleso, podobně jako vztah mezi prací a kinetickou energií.

Z rov. (11.43) můžeme zjistit, jaký je výkon síly působící na těleso při rotačním pohybu:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega. \qquad (11.45)$$

Tento výsledek, získaný pro otáčivý pohyb, je obdobou vztahu $P = Fv$ (rov. (7.49)), platného pro pohyb posuvný.

Tab. 11.3 shrnuje základní vztahy, které jsme v této kapitole získali pro otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy a pro porovnání uvádí i odpovídající rovnice pro pohyb posuvný.

PŘÍKLAD 11.13

(a) O jaký úhel se otočí kotouč na obr. 11.18 za 2,5 s, rozbíhá-li se z klidu?

ŘEŠENÍ: Dosazením $\omega_0 = 0$ do rov. (11.10) ($\theta = \omega_0 + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$) a použitím hodnoty ε, kterou jsme získali v př. 11.11, vyjde

$$\theta = 0 + \tfrac{1}{2}(-24\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}})(2{,}5\,\mathrm{s})^2 = \\ = -75\,\mathrm{rad}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je úhlová rychlost kotouče v okamžiku $t = 2{,}5$ s?

ŘEŠENÍ: Úhlovou rychlost vypočteme z rov. (11.9) ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$). Dosadíme hodnotu úhlového zrychlení ε, vypočtenou v př. 11.11 a nulovou hodnotu počáteční úhlové rychlosti ($\omega_0 = 0$). Dostáváme

$$\omega = 0 + (-24\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}})(2{,}5\,\mathrm{s}) = \\ = -60\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jak velkou kinetickou energii má kotouč v okamžiku $t = 2{,}5$ s?

Tabulka 11.3 **Posuvný a otáčivý pohyb**

POSUVNÝ POHYB V DANÉM SMĚRU		OTÁČIVÝ POHYB KOLEM PEVNÉ OSY	
poloha	x	úhlová poloha	θ
rychlost	$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$	úhlová rychlost	$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$
zrychlení	$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$	úhlové zrychlení	$\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$
hmotnost	m	moment setrvačnosti	I
věta o hybnosti	$ma = F$	věta o momentu hybnosti	$I\varepsilon = M$
práce	$W = \int F\mathrm{d}x$	práce	$W = \int M\mathrm{d}\theta$
kinetická energie	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	kinetická energie	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
výkon	$P = Fv$	výkon	$P = M\omega$
vztah mezi prací a změnou kinetické energie	$W = \Delta E_k$	vztah mezi prací a změnou kinetické energie	$W = \Delta E_k$

ŘEŠENÍ: Kinetická energie rotujícího kotouče je dána vztahem (11.25), tj. $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$. Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k jeho geometrické ose, která je v našem případě i osou otáčení, má hodnotu $I = \frac{1}{2} mR^2$. Úhlovou rychlost ω v okamžiku $t = 2{,}5\,\text{s}$ jsme zjistili v části (b). Dosadíme číselné údaje:

$$E_k = \tfrac{1}{2} I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2} mR^2)\omega^2 = \\ = \tfrac{1}{4}(2{,}5\,\text{kg})(0{,}20\,\text{m})^2(-60\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})^2 = \\ = 90\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Jiný způsob výpočtu kinetické energie nabízí vztah mezi prací a změnou kinetické energie. Určíme práci W, kterou vykoná tahová síla vlákna, které roztáčí kotouč. Ostatní síly působící na kotouč, tj. tíhová síla a tlaková síla v jeho ose, práci nekonají, jejich momenty vzhledem k ose otáčení jsou nulové. Při výpočtu práce tahové síly vyjdeme z rov. (11.44) a využijeme skutečnosti, že velikost tahové síly T i její moment M vzhledem k ose otáčení jsou konstantní. Dostáváme

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M\,\mathrm{d}\theta = M\int_{\theta_i}^{\theta_f} \mathrm{d}\theta = M(\theta_f - \theta_i).$$

Pro moment tahové síly T platí $M = -TR$. Dosadíme hodnoty $T = -6{,}0\,\text{N}$ (př. 11.11) a $R = 0{,}20\,\text{m}$. Rozdíl $\theta_f - \theta_i$ představuje úhlové otočení kotouče od počátku pohybu do okamžiku $t = 2{,}5\,\text{s}$. Jeho hodnotu jsme již určili v části (a). S uvážením všech předchozích skutečností můžeme psát

$$W = M(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i) = \\ = -(6{,}0\,\text{N})(0{,}20\,\text{m})(-75\,\text{rad}) = \\ = 90\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Protože se kotouč roztáčí z klidu, je jeho počáteční kinetická energie $E_{k,i}$ nulová. V souladu s rov. (11.41) pak vypočtená práce určuje přímo kinetickou energii kotouče E_k v daném okamžiku.

PŘÍKLAD 11.14

Tuhá konstrukce, znázorněná na obr. 11.20, je sestavena z tuhého prstence o hmotnosti m a poloměru $R = 0{,}15\,\text{m}$ a dvou tenkých tyčí, z nichž každá má hmotnost m a délku $L = 2{,}0R$. Může se otáčet kolem vodorovné osy, která leží v rovině prstence a prochází jeho středem.

(a) Vyjádřete moment setrvačnosti konstrukce pomocí m a R.

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (i) v tab. 11.2 má prstenec vzhledem k zadané ose moment setrvačnosti $I_{\text{prstenec}} = \frac{1}{2} mR^2$.

Moment setrvačnosti tyče A vypočteme pomocí Steinerovy věty (11.27). Její moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jejím středem rovnoběžně s osou otáčení najdeme v tab. 11.2e, $I_{T,A} = mL^2/12$. Podle Steinerovy věty platí

$$I_A = I_{T,A} + mh_{T,A}^2 = \frac{mL^2}{12} + m\left(R + \frac{L}{2}\right)^2 = \\ = 4{,}33mR^2.$$

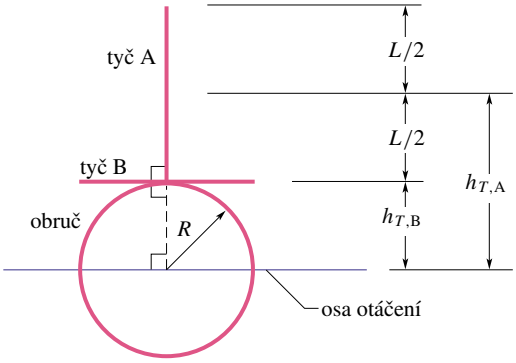
V předchozím výpočtu jsme již vzali v úvahu vztah $L = 2{,}0R$ a symbolem $h_{T,A} = R + \frac{1}{2}L$ jsme označili vzdálenost těžiště tyče A od osy otáčení.

Steinerovy věty použijeme i při výpočtu momentu setrvačnosti tyče B. Vůči své podélné ose má tyč nulový moment setrvačnosti, tj. $I_{T,B} = 0$. Její moment setrvačnosti vůči zadané ose otáčení je tedy

$$I_B = I_{T,B} + mh_{T,B}^2 = 0 + mR^2 = mR^2,$$

kde $h_{T,B} = R$ je vzdálenost tyče B od osy otáčení. Moment setrvačnosti I celé konstrukce vzhledem k zadané ose otáčení je součtem momentů setrvačnosti jejích jednotlivých částí, tj.

$$I = I_{\text{prstenec}} + I_A + I_B = \tfrac{1}{2} mR^2 + 4{,}33mR^2 + mR^2 = \\ = 5{,}83mR^2 \doteq 5{,}8mR^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 11.20 Příklad 11.14. Tuhá konstrukce tvořená prstencem a dvěma tyčemi se může otáčet kolem vodorovné osy.

(b) Předpokládejme, že konstrukce je ve výchozí klidové poloze znázorněné na obr. 11.20. Tato poloha není stabilní. Po uvolnění se tedy konstrukce začne roztáčet vlivem nenulového momentu tíhové síly. Určete její úhlovou rychlost ω v okamžiku, kdy prochází dolní rovnovážnou polohou.

ŘEŠENÍ: Ve výchozí poloze leží těžiště konstrukce ve vzdálenosti y_T nad osou otáčení. Podle rov. (9.5) je

$$y_T = \frac{m(0) + mR + m(R + \frac{1}{2}L)}{3m} = R.$$

Po uvolnění se konstrukce začne otáčet kolem zadané pevné osy a její těžiště klesá. V okamžiku, kdy konstrukce dosáhne rovnovážné polohy, je její těžiště *pod* osou otáčení, opět ve

vzdálenosti y_T. Jeho posunutí je tedy $\Delta y_T = -2R$. Odpovídající pokles tíhové potenciální energie soustavy konstrukce + Země je kompenzován přírůstkem kinetické energie otáčivého pohybu konstrukce. Změnu potenciální energie ΔE_p vypočteme jako součin velikosti tíhové síly působící na konstrukci ($3mg$, celková hmotnost konstrukce je $3m$) a svislé složky posunutí jejího těžiště Δy_T:

$$\Delta E_p = 3mg\Delta y_T = 3mg(-2R) = -6mgR.$$

Odpovídající změna kinetické energie je podle rov. (11.25)

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}I\omega^2 - 0 = \tfrac{1}{2}I\omega^2.$$

Ze zákona zachování mechanické energie, zapsaného ve tvaru

$$E_k + E_p = 0,$$

dostaneme

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 - 6mgR = 0.$$

Dosadíme $I = 5{,}83mR^2$ a vyjádříme ze získané rovnice úhlovou rychlost ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{12g}{5{,}83R}} = \sqrt{\frac{12(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}{5{,}83(0{,}15\ \mathrm{m})}} = 12\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Úhlová poloha

Pro usnadnění popisu otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy (tzv. **osy otáčení**) zavádíme **vztažnou přímku** kolmou k ose otáčení, kterou pevně spojíme s otáčejícím se tělesem. Měříme **úhlovou polohu** θ této přímky vzhledem ke zvolenému směru. Je-li veličina θ vyjádřena v radiánech, platí

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\theta \text{ je v rad}), \tag{11.1}$$

kde s je délka oblouku kruhové trajektorie s poloměrem r a středovým úhlem θ. Jednotka 1 rad souvisí s úhlovými jednotkami 1° a 1 otáčka (1 ot) vztahem

$$1\ \mathrm{ot} = 360^\circ = 2\pi\ \mathrm{rad}. \tag{11.2}$$

Otočení

Změna úhlové polohy otáčejícího se tělesa z výchozí hodnoty θ_1 na výslednou hodnotu θ_2 určuje jeho **otočení**

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \tag{11.4}$$

Hodnota $\Delta\theta$ je kladná, otáčí-li se těleso v kladném směru, tj. proti směru otáčení hodinových ručiček, záporná je v opačném případě.

Úhlová rychlost

Podíl otočení tělesa $\Delta\theta$ a délky Δt časového intervalu, během něhož k tomuto otočení došlo, představuje **průměrnou úhlovou rychlost** tělesa v daném intervalu

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \tag{11.5}$$

Okamžitá úhlová rychlost tělesa je definována vztahem

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \tag{11.6}$$

Veličiny $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ a $\boldsymbol{\omega}$ definují vektory rovnoběžné s osou otáčení, jejichž orientace je dána **pravidlem pravé ruky**, znázorněným na obr. 11.5. Vzhledem k tomu, že jejich směr je pevně zadán (směr osy otáčení), stačí k jejich vyjádření jen číselná hodnota udávající jejich velikost, opatřená kladným, resp. záporným znaménkem, otáčí-li se těleso ve směru kladném (proti směru otáčení hodinových ručiček), či záporném (ve směru otáčení hodinových ručiček).

Úhlové zrychlení

Podíl změny úhlové rychlosti tělesa z hodnoty $\boldsymbol{\omega}_1$ na hodnotu $\boldsymbol{\omega}_2$ a délky $\Delta t = t_2 - t_1$ časového intervalu, v němž tato změna proběhla, definuje **průměrné úhlové zrychlení** tělesa $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ v daném intervalu:

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}. \tag{11.7}$$

Okamžité úhlové zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$ tělesa je definováno vztahem

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}. \tag{11.8}$$

Veličiny $\boldsymbol{\varepsilon}$ a $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ jsou vektorové.

Vztahy pro otáčivý pohyb s konstantním úhlovým zrychlením

Otáčení s konstantním úhlovým zrychlením ($\boldsymbol{\varepsilon}$ = konst) je důležitým speciálním případem otáčivého pohybu. Je popsáno následujícími rovnicemi, které shrnuje také tab. 11.1:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{11.9}$$

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2, \tag{11.10}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\theta, \tag{11.11}$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t, \tag{11.12}$$

$$\theta = \omega t - \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2. \tag{11.13}$$

Vztah mezi obvodovými a úhlovými veličinami

Každá částice tuhého tělesa, které se otáčí kolem pevné osy, se pohybuje po kružnici, jejíž poloměr je roven vzdálenosti částice od osy otáčení. Při otočení tělesa o úhel θ opíše částice kruhový oblouk o délce

$$s = \theta r, \tag{11.15}$$

kde θ je v rad.

Vektor rychlosti částice $\boldsymbol{v}$ je tečný k její kruhové trajektorii. Jeho velikost (tzv. obvodová rychlost) je

$$v = \omega r, \tag{11.16}$$

kde ω je úhlová rychlost tělesa vyjádřená v rad/s.

Vektor zrychlení částice $\boldsymbol{a}$ je určen *tečnou* a *normálovou* složkou, které odpovídají jeho rozkladu do tečného a normálového směru k trajektorii. Tečnou složku lze zapsat ve tvaru

$$a_\mathrm{t} = \varepsilon r, \tag{11.20}$$

kde ε je úhlové zrychlení tělesa vyjádřené v rad/s^2. Normálová složka je dána vztahem

$$a_\mathrm{r} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.21}$$

Pohybuje-li se částice po své kruhové trajektorii rovnoměrně, je její pohyb periodický s periodou

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.17, 11.18}$$

Kinetická energie otáčivého pohybu a moment setrvačnosti

Tuhé těleso otáčející se kolem pevné osy má kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2} I \omega^2 \quad (\omega \text{ je v rad/s}), \tag{11.25}$$

kde I je **moment setrvačnosti** tělesa vzhledem k ose otáčení. Pro soustavu částic (těleso s diskrétním rozložením hmoty) je definován vztahem

$$I = \sum m_i r_i^2 \tag{11.24}$$

a pro těleso se spojitě rozloženou hmotou vztahem

$$I = \int r^2 \,\mathrm{d}m. \tag{11.26}$$

Symboly r_i, resp. r v těchto vztazích představují vzdálenost i-té částice, resp. elementu tělesa od osy otáčení.

Steinerova věta

Steinerova věta popisuje souvislost mezi momentem setrvačnosti I tělesa vzhledem k libovolné ose otáčení a momentem setrvačnosti I_T téhož tělesa vzhledem k rovnoběžné ose vedené jeho těžištěm:

$$I = I_T + mh^2, \tag{11.27}$$

kde h je vzdálenost obou os.

Moment síly

Moment síly charakterizuje rotační účinek síly $\boldsymbol{F}$, která působí na těleso při jeho otáčení kolem pevné osy. (Předpokládáme, že směr síly $\boldsymbol{F}$ leží v rovině kolmé k ose otáčení.) Označíme-li polohový vektor působiště síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k ose otáčení symbolem $\boldsymbol{r}$, můžeme moment $\boldsymbol{M}$ této síly vzhledem k uvedené ose vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \tag{11.33}$$

(Počátečním bodem vektoru $\boldsymbol{r}$ je průsečík osy otáčení s rovinou k ní kolmou a vedenou působištěm síly $\boldsymbol{F}$.) Moment síly je vektor. Pro jeho velikost platí

$$M = r F_\mathrm{t} = r_\perp F = r F \sin\varphi, \tag{11.30, 11.31, 11.32}$$

kde F_t je tečná složka síly $\boldsymbol{F}$, φ je úhel vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$. Symbol $r_\perp$ označuje **rameno síly** $\boldsymbol{F}$ vzhledem k ose otáčení, definované jako vzdálenost vektorové přímky síly $\boldsymbol{F}$ od této osy. Rameno síly F_t je označeno r.

Ve zjednodušených situacích, jež v této kapitole uvažujeme, má moment síly vždy směr osy otáčení. Proto jej stačí zadávat číselným údajem představujícím jeho velikost opatřenou vhodným znaménkem. Moment síly M je kladný, je-li podle pravidla pravé ruky orientován v kladném směru, v opačném případě je záporný. Jednotkou momentu síly v soustavě SI je newton-metr (N·m).

Věta o momentu hybnosti

Věta o momentu hybnosti, představující pohybovou rovnici pro otáčivý pohyb, má tvar

$$I\varepsilon = \sum M, \tag{11.36}$$

kde $\sum M$ je výsledný moment všech sil působících na částici nebo tuhé těleso, vztažený k ose otáčení, I je moment setrvačnosti částice nebo tuhého tělesa vzhledem k této ose a ε je úhlové zrychlení otáčivého pohybu částice nebo tuhého tělesa kolem této osy.

Práce a kinetická energie otáčivého pohybu

Vztahy pro výpočet práce a výkonu při otáčivém pohybu jsou podobné odpovídajícím vztahům pro pohyb posuvný:

$$W = \int_{\theta_\mathrm{i}}^{\theta_\mathrm{f}} M \,\mathrm{d}\theta \tag{11.44}$$

a

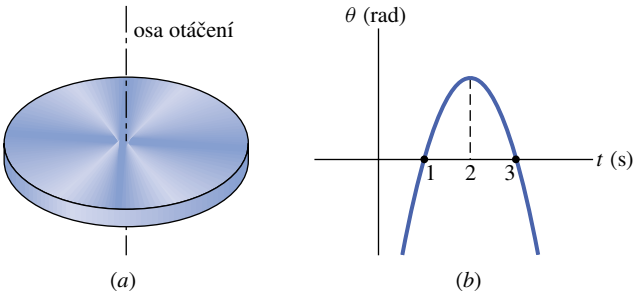
$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega. \tag{11.45}$$

Vztah mezi prací a změnou kinetické energie má pro otáčivý pohyb tvar

$$\Delta E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2} I \omega_\mathrm{f}^2 - \tfrac{1}{2} I \omega_\mathrm{i}^2 = W. \tag{11.41}$$

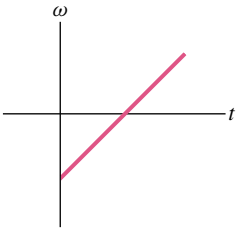
OTÁZKY

1. Na obr. 11.21b je zakreslen graf časové závislosti úhlové polohy otáčejícího se kotouče, znázorněného na obr. 11.21a. Rozhodněte, zda v okamžicích (a) $t = 1$ s, (b) $t = 2$ s a (c) $t = 3$ s je úhlová rychlost kotouče kladná, záporná, nebo nulová. (d) Je jeho úhlové zrychlení kladné, nebo záporné?



Obr. 11.21 Otázka 1

2. Obr. 11.22 představuje graf časové závislosti úhlové rychlosti kotouče na obr. 11.21a. Jaký je (a) počáteční a (b) výsledný směr otáčení kotouče? (c) Je úhlová rychlost kotouče v některém okamžiku nulová? Ve kterém? (d) Rozhodněte, zda je úhlové zrychlení kotouče kladné, nebo záporné. (e) Je konstantní, nebo proměnné?



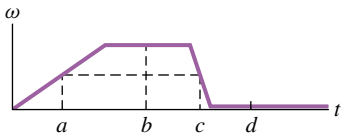
Obr. 11.22 Otázka 2

3. V okamžiku $t = 0$ má kotouč na obr. 11.21a úhlovou polohu $\theta_0 = -2$ rad. V následující tabulce jsou uvedena znaménka počáteční úhlové rychlosti kotouče a jeho stálého úhlového zrychlení ve čtyřech různých situacích: (1) $+, +$; (2) $+, -$; (3) $-, +$ a (4) $-, -$. Rozhodněte, ve kterém z uvedených čtyř případů (a) se kotouč na okamžik zastaví, (b) v některém okamžiku zcela jistě projde úhlovou polohou $\theta = 0$, (c) nikdy neprojde úhlovou polohou $\theta = 0$.

4. Následující dvojice hodnot představují počáteční a výslednou úhlovou rychlost kotouče znázorněného na obr. 11.21a ve čtyřech různých situacích: (a) 2 rad/s, 3 rad/s; (b) -2 rad/s, 3 rad/s; (c) -2 rad/s, -3 rad/s; (d) 2 rad/s, -3 rad/s. Velikost úhlového zrychlení má ve všech případech stejnou hodnotu a je stálé. Seřaďte situace sestupně podle velikosti otočení kotouče.

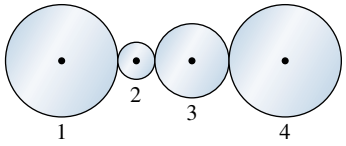
5. Rozhodněte, pro kterou z následujících funkcí, vyjadřujících možnou časovou závislost úhlové rychlosti otáčejícího se tělesa, platí rovnice shrnuté v tab. 11.1: (a) $\omega = 3$; (b) $\omega = 4t^2 + 2t - 6$; (c) $\omega = 3t - 4$; (d) $\omega = 5t^2 - 3$.

6. Obr. 11.23 představuje graf časové závislosti úhlové rychlosti otáčejícího se kotouče z obr. 11.21a. Zvolte libovolnou částici na jeho obvodu a seřaďte vyznačené okamžiky a, b, c a d podle velikosti (a) tečné složky jejího zrychlení (obvodového zrychlení), (b) normálové složky jejího zrychlení.



Obr. 11.23 Otázka 6

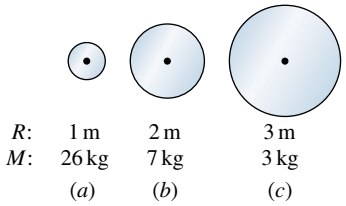
7. Obr. 11.24 znázorňuje převodovku se čtyřmi koly, která se otáčejí bez prokluzu. Poloměry kol 1, 2, 3 a 4 jsou po řadě $3R$, R, $2R$ a $3R$. Kolo 2 je poháněno motorem. Seřaďte kola sestupně (a) podle obvodových rychlostí částic a (b) podle velikosti jejich úhlových rychlostí.



Obr. 11.24 Otázka 7

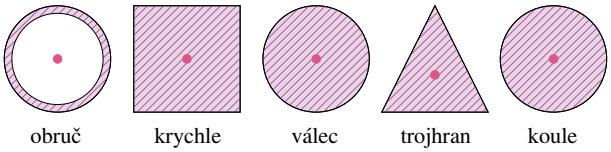
8. Kruhové kotouče A a B mají stejnou hmotnost a tloušťku. Hustota kotouče A je však větší než hustota kotouče B. Rozhodněte, zda je moment setrvačnosti kotouče A vzhledem k jeho ose symetrie (a) ležící v rovině kotouče, (b) kolmé k rovině kotouče větší, menší, nebo stejný jako moment setrvačnosti kotouče B.

9. Na obr. 11.25 jsou znázorněny tři homogenní kotouče se zadanými hmotnostmi a poloměry. Seřaďte je sestupně podle hodnot momentu setrvačnosti vzhledem k ose symetrie kolmé k rovině kotouče.



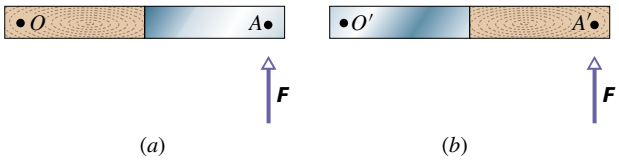
Obr. 11.25 Otázka 9

10. Na obr. 11.26 jsou zakresleny půdorysné průměty pěti těles o stejné hmotnosti. Měřítko nákresu je pro všechna tělesa stejné a také jejich výška je shodná. Tělesa však mohou být dutá a není jisté, zda jsou vyrobena z materiálu stejné tloušťky. Dokážete rozhodnout, které z nich má (a) největší, (b) nejmenší moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené těžištěm kolmo k půdorysnému průmětu?



Obr. 11.26 Otázka 10

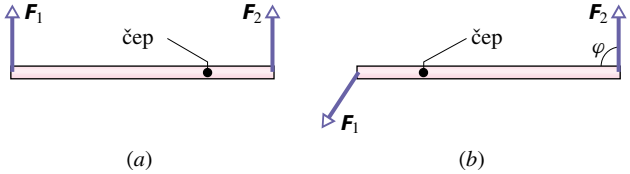
11. Na obr. 11.27a je metrová tyč vyrobená napůl ze dřeva a napůl z oceli. Tyč se může otáčet kolem čepu umístěného v bodě O na konci dřevěné části. V bodě A na konci ocelové části působí síla $\boldsymbol{F}$. Situace na obr. 11.27b je opačná: tyč se otáčí kolem bodu O' na konci ocelové části a síla $\boldsymbol{F}$ působí v bodě A' na konci dřevěné části. Rozhodněte, zda je úhlové zrychlení tyče na obr. 11.27a větší, menší, nebo stejné jako zrychlení tyče na obr. 11.27b.



Obr. 11.27 Otázka 11

12. Obr. 11.28a znázorňuje vodorovnou tyč (nadhled), která se může otáčet kolem osy vedené vyznačeným bodem (čepem) kolmo k nákresu. Na tyč působí dvě síly, avšak tyč je v klidu. Z nějakých důvodů je potřeba úhel mezi tyčí a silou $\boldsymbol{F}_2$ změnit. Jak je nutné upravit velikost síly $\boldsymbol{F}_1$, aby tyč zůstala v klidu?

13. Na obr. 11.28b je v nadhledu znázorněna vodorovná tyč, která se otáčí kolem osy vedené vyznačeným bodem (čepem) kolmo k rovině nákresu. Na opačných koncích působí na tyč vodorovné síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. Síla $\boldsymbol{F}_2$ svírá s tyčí úhel φ. Seřaďte následující hodnoty úhlu φ podle velikosti odpovídajícího úhlového zrychlení tyče: 90°, 70° a 110°.



Obr. 11.28 Otázky 12 a 13

14. Úhlová rychlost kotouče znázorněného na obr. 11.21a se mění vlivem síly, působící na obvodu kotouče. Následující dvojice údajů představují hodnoty počáteční a výsledné úhlové rychlosti kotouče ve čtyřech různých situacích: (a) −2 rad/s, 5 rad/s, (b) 2 rad/s, 5 rad/s, (c) −2 rad/s, −5 rad/s, (d) 2 rad/s, −5 rad/s. Seřaďte tyto případy podle práce, kterou síla vykonala.

15. Připažte, přiložte dlaně ke stehnům a zpevněte zápěstí. Proveďte postupně tyto cviky: (1) Předpažte. (2) Z předpažení upažte a zápěstí udržujte zpevněné. (3) Nakonec připažte. Všimněte si, že vaše dlaň je otevřena směrem dopředu. Opakujte cviky (1) až (3) v pozměněném pořadí (2), (1), (3). Vysvětlete, proč nyní dlaň *nesměřuje* dopředu.

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 11.2 Veličiny charakterizující otáčivý pohyb

1C. (a) Určete středový úhel oblouku o délce 1,80 m a poloměru 1,20 m. Výsledek vyjádřete v radiánech. (b) Vyjádřete tento úhel také ve stupních. (c) Úhel mezi dvěma poloměry kružnice je 0,620 rad. Určete délku oblouku, který je těmito poloměry vymezen, víte-li, že obvod celé kružnice je 2,40 m.

2C. Úhlová poloha setrvačníku závisí na čase vztahem $\theta = at + bt^3 - ct^4$, kde a, b, c jsou konstanty. Vyjádřete (a) úhlovou rychlost a (b) úhlové zrychlení setrvačníku jako funkce času.

3C. Určete velikost úhlové rychlosti (a) sekundové, (b) minutové a (c) hodinové ručičky hodin. Získané hodnoty vyjádřete v jednotkách rad/s.

4C. Slunce je od středu naší Galaxie vzdáleno asi $2{,}3\cdot10^4$ světelných let a obíhá kolem něj po kružnici obvodovou rychlostí 250 km/s. (a) Jak dlouho trvá Slunci jeden takový oběh? (b) Kolik oběhů již Slunce vykonalo za dobu své existence, tj. za asi $4{,}5\cdot10^9$ let?

5C. Úhlová poloha θ bodu na obvodu rotujícího kotouče závisí na čase t vztahem $\theta = 4{,}0t - 3{,}0t^2 + t^3$, kde t je v sekundách a θ v radiánech. (a) Vypočtěte úhlovou rychlost kotouče v okamžicích $t = 2{,}0$ s a $t = 4{,}0$ s. (b) Určete jeho průměrné úhlové zrychlení v časovém intervalu od $t = 2{,}0$ s do $t = 4{,}0$ s a (c) okamžité úhlové zrychlení na počátku a na konci tohoto intervalu.

6C. Časová závislost úhlové polohy bodu rotujícího kola je popsána funkcí $\theta = 2 + 4t^2 + 2t^3$, kde θ je v radiánech a t v sekundách. Jaká je (a) úhlová poloha tohoto bodu v okamžiku $t = 0$? (b) Určete úhlovou rychlost kotouče v okamžicích $t = 0$ a (c) $t = 4{,}0$ s. (d) Vypočtěte jeho úhlové zrychlení v okamžiku $t = 2{,}0$ s. (e) Rozhodněte, zda je úhlové zrychlení kotouče stálé.

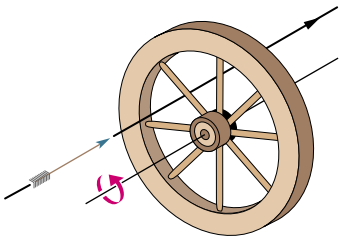
7Ú. Kolo se otáčí s úhlovým zrychlením ε, jehož časová závislost je popsána funkcí $\varepsilon = 4at^3 - 3bt^2$ (a, b jsou konstanty). Počáteční úhlová rychlost kola je ω_0. Najděte časovou závislost (a) úhlové rychlosti a (b) otočení kola.

8Ú. Dobrý hráč baseballu může hodit míč rychlostí 53 km/h. Míč přitom rotuje úhlovou rychlostí 1 800 ot/min. Kolik otáček během letu vykoná, je-li cíl vzdálen 20 m? (Pro jednoduchost předpokládáme, že let míče je přímočarý.)

9Ú. Při skoku z desetimetrové věže provedl skokan před dopadem na vodní hladinu 2,5 otáčky. Předpokládejte, že svislá složka jeho počáteční rychlosti byla nulová, a vypočtěte úhlovou rychlost jeho otáčivého pohybu.

10Ú. Kolo s osmi loukotěmi na obr. 11.29 má poloměr 30 cm. Je upevněno na pevné ose a otáčí se úhlovou rychlostí 2,5 ot/s. Hoši

střílejí z luku ve směru osy kola a snaží se, aby šíp volně prolétl mezerou. Délka šípu je 20 cm. Předpokládáme, že šíp i loukotě kola jsou zanedbatelně tenké. (a) Určete nejmenší možnou rychlost šípu. (b) Zjistěte, zda je rozhodující, do kterého místa mezi osou kola a jeho obvodem šíp míří. V kladném případě určete, kam je třeba mířit.



Obr. 11.29 Úloha 10

ODST. 11.4 Rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb

11C. Údaj na otáčkoměru automobilového motoru (ot/min) rovnoměrně vzrostl během 12 s z 1 200 ot/min na 3 000 ot/min. (a) Určete úhlové zrychlení motoru v ot/min^2. (b) Určete celkový počet otáček motoru v daném časovém intervalu.

12C. Talíř gramofonu se otáčí úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min a zastaví se za 30 s od okamžiku vypnutí motorku. (a) Určete jeho úhlové zrychlení v ot/min^2 za předpokladu, že jeho úhlová rychlost klesá rovnoměrně. (b) Kolik otáček talíř během brzdění vykoná?

13C. Kotouč, který se zpočátku otáčel úhlovou rychlostí 120 rad/s, se začal zpomalovat s konstantním úhlovým zrychlením o velikosti 4,0 rad/s^2. (a) Jak dlouho trvalo, než se kotouč zastavil? (b) O jaký úhel se za tuto dobu otočil?

14C. Na obvodu kladky o průměru 8,0 cm je navinuto lano délky 5,6 m. Kladka se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením 1,5 rad/s^2. (a) Jaké musí být otočení kladky, aby se celé lano rozvinulo? (b) Jak dlouho to bude trvat?

15C. Těžký setrvačník otáčející se kolem osy symetrie vedené jeho středem se začne zpomalovat vlivem tření v ložiscích. Na konci první minuty činí jeho úhlová rychlost 90 % původní hodnoty 250 ot/min. Předpokládáme, že třecí síla je stálá. Určete úhlovou rychlost setrvačníku na konci druhé minuty.

16C. Setrvačník motoru rotuje úhlovou rychlostí 25,0 rad/s. Po vypnutí motoru se začne zpomalovat s konstantním úhlovým zrychlením a zastaví se po uplynutí 20,0 s. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení setrvačníku v rad/s^2, (b) jeho otočení (v rad) od okamžiku vypnutí motoru, (c) celkový počet otáček od okamžiku vypnutí motoru.

17C. Kotouč, který se může otáčet kolem své osy, se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením. Za dobu 5,0 s se otočí o 25 rad. Určete jeho (a) úhlové zrychlení, (b) průměrnou úhlovou rychlost, (c) okamžitou úhlovou rychlost na konci páté sekundy, (d) otočení v intervalu od konce páté do konce desáté sekundy.

18Ú. Kolo se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením a v okamžiku $t = 2{,}0$ s má úhlovou rychlost 5,0 rad/s. Pohyb kola se dále urychluje až do okamžiku $t = 20$ s, kdy dojde k vypnutí pohonu. Určete otočení kola v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 40$ s.

19Ú. V okamžiku $t = 0$ se kolo začne roztáčet z klidu s konstantním úhlovým zrychlením 2,00 rad/s^2. V časovém intervalu délky $\Delta t = 3{,}00$ s, měřeném od okamžiku t do okamžiku $t + \Delta t$, se kolo otočilo o 90,0 rad. (a) Určete okamžik t a (b) odpovídající okamžitou úhlovou rychlost kola.

20Ú. Kolo se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením 3,0 rad/s^2. V časovém intervalu $(t, t + \Delta t)$ délky $\Delta t = 4{,}0$ s se otočilo o úhel 120 rad. Určete okamžik t.

21Ú. Rotující setrvačník se rovnoměrně zpomaluje. Od okamžiku $t = 0$, kdy je jeho úhlová rychlost 1,5 rad/s, do okamžiku zastavení vykoná 40 otáček. Určete (a) dobu brzdění a (b) úhlové zrychlení setrvačníku. (c) Za jakou dobu vykonal setrvačník prvních 20 otáček?

22Ú. V okamžiku $t = 0$ má setrvačník úhlovou rychlost 4,7 rad/s, jeho úhlové zrychlení je $-0{,}25$ rad/s^2 a jeho vztažná přímka má úhlovou polohu $\theta_0 = 0$. (a) Určete krajní úhlovou polohu $\theta_{\max}$ (v kladném směru) vztažné přímky setrvačníku. Zjistěte, v kterém okamžiku má úhlová poloha vztažné přímky hodnotu (b) $\theta = \frac{1}{2}\theta_{\max}$ a (c) $\theta = -10{,}5$ rad. (Připouštíme kladné i záporné hodnoty časové proměnné t.) (d) Nakreslete graf funkce $\theta(t)$ a vyznačte na něm hodnoty vypočtené v částech (a) až (c).

23Ú. Kotouč se roztáčí kolem své osy se stálým úhlovým zrychlením. Jeho počáteční úhlová rychlost je nulová. V jistém okamžiku t_1 je jeho úhlová rychlost $\omega_1 = 10$ ot/s. Po dalších 60 otáčkách je jeho úhlová rychlost $\omega_2 = 15$ ot/s. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení kotouče, (b) dobu $\Delta t = t_2 - t_1$, potřebnou k vykonání zmíněných šedesáti otáček, (c) dobu t_1 potřebnou k získání úhlové rychlosti 10 ot/s a (d) počet otáček kotouče za dobu t_1.

24Ú. Kolo se roztáčí s konstantním úhlovým zrychlením. V určitém okamžiku stiskneme stopky a začneme měřit čas ($t = 0$). Během prvních 15 s od počátku měření vykoná kolo 90 otáček. Jeho úhlová rychlost na konci tohoto intervalu je 10 ot/s. (a) Určete úhlovou rychlost kola v okamžiku, kdy započalo měření. (b) Jaká doba uplynula od okamžiku, kdy se kolo začalo roztáčet z klidu, do začátku měření?

ODST. 11.5 Korespondence obvodových a úhlových veličin

25C. Určete zrychlení $\boldsymbol{a}$ (tečnou i normálovou složku) bodu na obvodu gramofonové desky o průměru 30 cm, která se otáčí úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min.

26C. Gramofonová deska se otáčí úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min. (a) Vyjádřete její úhlovou rychlost v rad/s. Určete obvodovou rychlost bodu desky v místě přenosové jehly (b) na počátku a (c) na konci nahrávky. Vzdálenost jehly od osy talíře gramofonu na začátku, resp. na konci nahrávky je asi 150 mm, resp. 74 mm.

27C. Jaká je úhlová rychlost automobilu, který projíždí kruhovou zatáčku o poloměru 110 m rychlostí 50 km/h?

28C. Setrvačník o průměru 1,20 m vykoná 200 ot/min. (a) Vyjádřete jeho úhlovou rychlost v rad/s. (b) Určete rychlost bodu na jeho obvodu. (c) Při jaké (konstantní) hodnotě úhlového zrychlení (v rad/min^2) by se jeho úhlová rychlost zvýšila na 1 000 ot/min během 60 s? (d) Kolik otáček by setrvačník za tuto dobu vykonal?

29C. Úhlová rychlost bodu na obvodu brusného kotouče o průměru 0,75 m se změnila z 12 m/s na 25 m/s za dobu 6,2 s. Určete průměrné úhlové zrychlení kotouče v tomto časovém intervalu.

30C. Dráha Země kolem Slunce je přibližně kruhová. Určete (a) úhlovou rychlost, (b) rychlost a (c) zrychlení Země vzhledem ke Slunci.

31C. Dne 30. června 1908 v 7 h 14 min ráno došlo na střední Sibiři, v místě o souřadnicích 61° sev. šířky a 102° vých. délky k obrovskému výbuchu, při němž bylo možné pozorovat oslnivý záblesk. Podle náhodného svědka této *tunguzské záhady* „pokryl záblesk obrovskou část oblohy“. Jednalo se pravděpodobně o dopad *kamenného asteroidu* o velikosti asi 140 m. (a) Vezměte v úvahu pouze otáčení Země a vypočtěte, o jakou dobu později by musel asteroid vybuchnout, aby se výbuch odehrál nad Helsinkami, jejichž zeměpisná délka je 25° východně. (Takový výbuch by město úplně zničil.) (b) Kdyby se jednalo o *kovový asteroid*, mohl by dopadnout až na povrch Země. O jakou dobu později by musel asteroid přiletět, aby dopadl do Atlantického oceánu v místě se zeměpisnou délkou 20° západně? (Vzniklá vlna tsunami by v takovém případě vyhladila pobřežní osídlení na obou stranách Atlantiku.)

32C. Astronaut je testován na centrifuze. Centrifuga má poloměr 10 m a během roztáčení je časová závislost její úhlové polohy popsána funkcí $\theta(t) = 0{,}30t^2$, kde θ je v radiánech a t v sekundách. Vypočtěte (a) úhlovou rychlost, (b) obvodovou rychlost, (c) velikost tečné složky zrychlení a (d) velikost normálové složky zrychlení astronauta v okamžiku $t = 5{,}0$ s.

33C. Vypočtěte (a) úhlovou rychlost, (b) normálovou složku zrychlení a (c) tečnou složku zrychlení vesmírné lodi letící obvodovou rychlostí 29 000 km/h po kruhové dráze o poloměru 3 200 km.

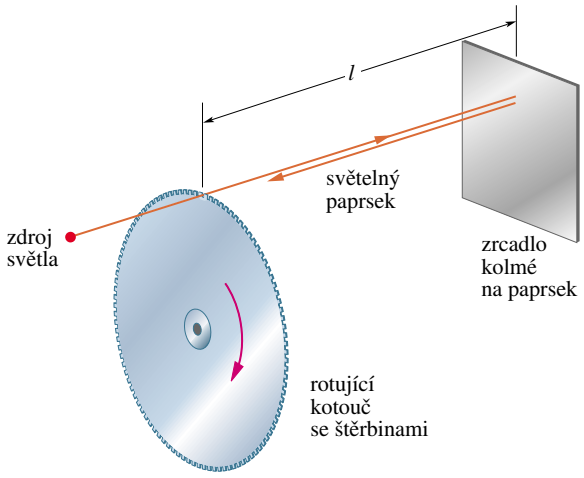
34C. Mince o hmotnosti M leží ve vzdálenosti R od středu talíře gramofonu. Koeficient statického tření mezi mincí a talířem je f_s. Úhlová rychlost talíře se pomalu zvětšuje na hodnotu ω_0, kdy mince z talíře sklouzne. (a) Vyjádřete ω_0 pomocí M, R, g a f_s. (b) Nakreslete přibližně trajektorii mince po jejím sklouznutí z talíře.

35Ú. Setrvačník parního stroje se otáčí konstantní úhlovou rychlostí 150 ot/min. Po uzavření přívodu páry se pohyb setrvačníku začne vlivem tření a odporu prostředí rovnoměrně zpomalovat a za 2,2 h se setrvačník zastaví. (a) Určete úhlové zrychlení setrvačníku v ot/min^2. (b) Kolik otáček ještě vykoná od okamžiku uzavření přívodu páry? V jistém okamžiku se setrvačník otáčí úhlovou rychlostí 75 ot/min. (c) Určete okamžitou hodnotu tečné složky zrychlení částice setrvačníku, která obíhá ve vzdálenosti 50 cm od jeho osy a (d) velikost okamžitého zrychlení této částice.

36Ú. Setrvačník gyroskopu o poloměru 2,83 cm se roztáčí z klidu s úhlovým zrychlením 14,2 rad/s^2 až do okamžiku, kdy dosáhne úhlové rychlosti 2 760 ot/min. (a) Určete tečnou složku zrychlení bodu na obvodu setrvačníku. (b) Jaká je hodnota normálové složky zrychlení v okamžiku, kdy setrvačník dosáhne největší úhlové rychlosti? (c) Jakou dráhu urazí bod na obvodu během roztáčení setrvačníku?

37Ú. Vrtule letadla se otáčí s úhlovou rychlostí 2 000 ot/min, letadlo letí rychlostí 480 km/h vzhledem k zemi. Zjistěte, jakou rychlostí se pohybuje bod na špičce listu vrtule o poloměru 1,5 m (a) vzhledem k letadlu, (b) vzhledem k zemi. Rychlost letadla je rovnoběžná s osou otáčení vrtule.

38Ú. Jedna ze starších metod měření rychlosti světla používala rovnoměrně rotující ozubené kolo (obr. 11.30). Světelný paprsek prošel mezerou mezi zuby kola, odrazil se od zrcadla a dopadl zpět na rotující kolo tak, aby právě prošel následující mezerou. Ozubené kolo o poloměru 5,0 cm mělo na obvodu 500 zubů. Pomocí zrcadla umístěného ve vzdálenosti $l = 500$ m byla naměřena hodnota rychlosti světla $3{,}0\cdot10^5$ km/s. (a) Jaká byla úhlová rychlost kola? (b) Vypočtěte velikost rychlosti bodu na jeho obvodu.



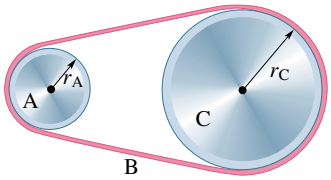
Obr. 11.30 Úloha 38

39Ú. Automobil se rozjíždí z klidu po kruhové dráze o poloměru 30,0 m. Jeho tečné zrychlení má stálou velikost 0,500 m/s^2. (a) Určete zrychlení automobilu v okamžiku $t = 15{,}0$ s po rozjezdu. (b) Jaký úhel svírá v tomto okamžiku vektor zrychlení automobilu s vektorem jeho rychlosti?

40Ú. Poloha bodu na zemském povrchu je určena zeměpisnou šířkou 40°. Určete úhlovou rychlost oběhu tohoto bodu kolem zemské osy. (b) Určete jeho obvodovou rychlost. (c) Řešte úlohy (a) a (b) pro bod na rovníku.

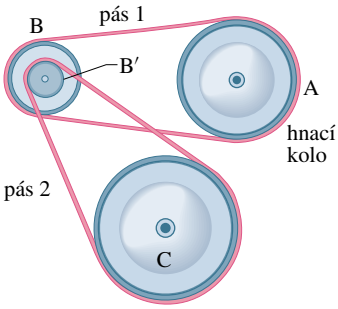
41Ú. Poloměry kol A a C na obr. 11.31 jsou $r_A = 10$ cm a $r_C = 25$ cm. Kola jsou spřažena pásem B, který po nich neklouže. Úhlová rychlost kola A se rovnoměrně zvětšuje z počáteční nulové hodnoty s úhlovým zrychlením 1,6 rad/s^2. Zjistěte,

v kterém okamžiku bude mít kolo C úhlovou rychlost 100 ot/min. (*Tip*: Jestliže pás neklouže, jsou obvodové rychlosti bodů na obvodech kol shodné.)



Obr. 11.31 Úloha 41

42Ú. Na obr. 11.32 jsou znázorněna čtyři kola spojená dvěma pásy. Hnací kolo A má poloměr 15 cm a otáčí se úhlovou rychlostí 10 rad/s. Kolo B o poloměru 10 cm je s kolem A spojeno pásem 1. Kola B′ a B mají společnou osu. Kolo C o poloměru 25 cm je s kolem B′ o poloměru 5 cm spojeno pásem 2. Vypočtěte (a) rychlost bodu na pásu 1, (b) úhlovou rychlost kola B, (c) úhlovou rychlost kola B′, (d) rychlost bodu na pásu 2, (e) úhlovou rychlost kola C. (Použijte návod k úloze 41.)



Obr. 11.32 Úloha 42

43Ú. Talíř gramofonu se otáčí s úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min. Ve vzdálenosti 6,0 cm od jeho osy leží malé tělísko. (a) Vypočtěte zrychlení tělíska za předpokladu, že je vzhledem k talíři v klidu (talíř nepodkluzuje). (b) Určete nejmenší přípustnou hodnotu koeficientu statického tření mezi talířem a tělískem. (c) Předpokládejme, že se talíř rovnoměrně urychloval po dobu 0,25 s, než získal zadanou úhlovou rychlost. Určete nejmenší možnou hodnotu koeficientu statického tření mezi tělískem a talířem, při níž ještě tělísko z talíře během urychlování nesklouzne.

44Ú. **Pulzar** je neutronová hvězda, která se velmi rychle otáčí a vysílá při tom pulzy radiových vln přesně synchronizované se svým otáčivým pohybem. Během jedné otáčky vyšle jeden pulz. Periodu otáčivého pohybu hvězdy je tedy možné snadno zjistit měřením doby mezi dvěma pulzy. Měřením se zjistilo, že perioda otáčení pulzaru v centrální oblasti Krabí mlhoviny (obr. 11.33) je v současné době $T = 0{,}033$ s a pomalu narůstá o $1{,}26\cdot10^{-5}$ s za jeden rok. (a) Vypočtěte úhlové zrychlení pulzaru v rad/s^2. (b) Za kolik let se pulzar zastaví? (c) Pulzar vznikl výbuchem supernovy v roce 1054 n. l. Jaká byla perioda jeho rotace v době vzniku? (Při řešení úlohy předpokládáme, že úhlové zrychlení pulzaru je konstantní.)



Obr. 11.33 Úloha 44. Krabí mlhovina vznikla výbuchem hvězdy, který byl pozorován v roce 1054 n. l. Na obrázku jsou patrny plynné zbytky výbuchu. Kromě nich tehdy vznikla i rotující neutronová hvězda, jejíž poloměr je pouhých 30 km.

ODST. 11.6 Kinetická energie tělesa při otáčivém pohybu

45C. Vypočtěte moment setrvačnosti kola, které se otáčí úhlovou rychlostí 602 ot/min a má kinetickou energii 24 400 J.

46Ú. Celková hmotnost molekuly kyslíku O_2 je $5{,}30\cdot10^{-26}$ kg. Její moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé ke spojnici atomů a vedené jejím středem je $1{,}94\cdot10^{-46}$ kg·m^2. Předpokládejme, že molekula plynného kyslíku má rychlost 500 m/s a kinetická energie jejího otáčivého pohybu je rovna dvěma třetinám kinetické energie pohybu posuvného. Určete úhlovou rychlost molekuly.

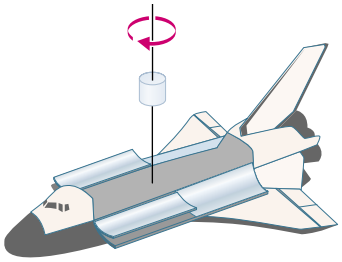
ODST. 11.7 Výpočet momentu setrvačnosti

47C. Vypočtěte hodnoty kinetické energie dvou homogenních plných válců, které rotují kolem svých os symetrie. Válce mají stejnou hmotnost 1,25 kg a otáčejí se se stejnou úhlovou rychlostí 235 rad/s. První z nich má poloměr 0,25 m a druhý 0,75 m.

48C. Molekula má moment setrvačnosti 14 000 u·pm^2 a otáčí se s úhlovou rychlostí $4{,}3\cdot10^{12}$ rad/s. (a) Vyjádřete moment setrvačnosti molekuly v kg·m^2. (b) Vypočtěte kinetickou energii jejího rotačního pohybu a vyjádřete ji v elektronvoltech.

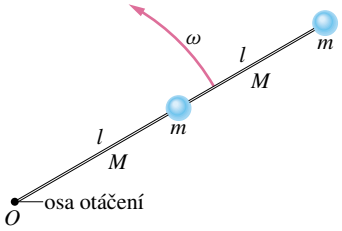
49C. Družice o hmotnosti 1 210 kg má tvar plného válce o průměru 1,21 m a délce 1,75 m. Před vypuštěním z nákladového

prostoru raketoplánu byla družice roztočena úhlovou rychlostí 1,52 ot/s kolem osy válce (obr. 11.34). Vypočtěte její moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení a (b) její kinetickou energii spojenou s otáčivým pohybem.



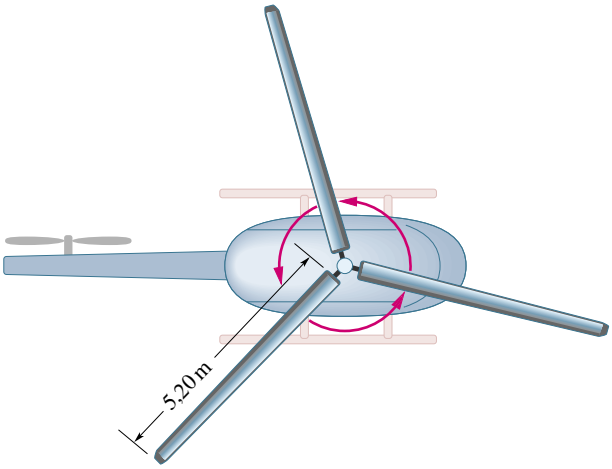
Obr. 11.34 Cvičení 49

50C. Dvě částice se stejnými hmotnostmi m jsou spolu spojeny a připevněny k ose otáčení O dvěma tenkými tyčemi o délkách l a hmotnostech M (obr. 11.35). Soustava se otáčí úhlovou rychlostí ω. Odvoďte výraz pro (a) moment setrvačnosti soustavy vzhledem k ose O a (b) kinetickou energii jejího otáčivého pohybu vzhledem k této ose.



Obr. 11.35 Cvičení 50

51C. Každý z trojice listů rotoru vrtulníku na obr. 11.36 má délku 5,20 m a hmotnost 240 kg. Rotor se otáčí úhlovou rychlostí 350 ot/min. (a) Jaký je jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení? (List lze pokládat za tenkou tyč.) (b) Jaká je kinetická energie otáčivého pohybu rotoru?



Obr. 11.36 Cvičení 51 a úloha 85

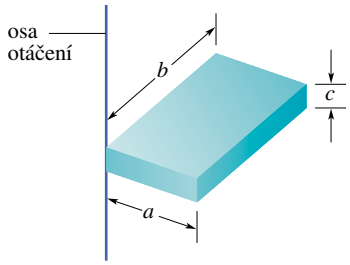
52C. Za předpokladu, že je Země homogenní koule, vypočtěte (a) její moment setrvačnosti a (b) její kinetickou energii spojenou s otáčivým pohybem. (c) Představme si, že by bylo možné tuto energii nějak využít. Jak dlouho by Země mohla dodávat výkon 1,0 kW každému člověku na planetě? (Počet lidí na Zemi je asi $6{,}4\cdot10^9$.)

53C. Vypočtěte moment setrvačnosti tyčového metru o hmotnosti 0,56 kg vzhledem k ose vedené značkou 20 cm kolmo k tyči. (Tyč lze pokládat za velmi tenkou.)

54Ú. Ukažte, že osa rotace, vůči níž má tuhé těleso nejmenší možnou hodnotu momentu setrvačnosti, musí procházet jeho těžištěm.

55Ú. Odvoďte výraz pro moment setrvačnosti prstence o hmotnosti m a poloměru R, uvedený v tab. 11.2a.

56Ú. Na obr. 11.37 je homogenní tuhý kvádr o hmotnosti m a rozměrech a, b a c. Vypočtěte jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose splývající s jeho hranou.



Obr. 11.37 Úloha 56

57Ú. Následující trojice údajů představují hmotnost a souřadnice každé ze čtyř částic v rovině xy: 50 g, $x = 2{,}0$ cm, $y = 2{,}0$ cm; 25 g, $x = 0$, $y = 4{,}0$ cm; 25 g, $x = -3{,}0$ cm, $y = -3{,}0$ cm; 30 g, $x = -2{,}0$ cm, $y = 4{,}0$ cm. Vypočtěte moment setrvačnosti této soustavy částic (a) vzhledem k ose x, (b) vzhledem k ose y, (c) vzhledem k ose z. Momenty setrvačnosti označte I_x, I_y a I_z. (d) Vyjádřete I_z pomocí I_x a I_y.

58Ú. (a) Ukažte, že moment setrvačnosti plného válce o hmotnosti m a poloměru R vzhledem k jeho rotační ose symetrie je roven momentu setrvačnosti tenkého prstence o hmotnosti m a poloměru $R/\sqrt{2}$ vzhledem k jeho rotační ose symetrie. (b) Ukažte, že moment setrvačnosti libovolného tělesa o hmotnosti m vzhledem k libovolné ose je roven momentu setrvačnosti *ekvivalentního prstence* o stejné hmotnosti vzhledem k jeho rotační ose symetrie, má-li prstenec poloměr

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}.$$

Poloměr ekvivalentního prstence se nazývá *gyrační poloměr* tělesa.

59Ú. Některé dodávkové automobily jsou poháněny setrvačníkem. Setrvačník má tvar plného homogenního válce o hmotnosti 500 kg a poloměru 1,0 m. Elektrickým motorem se setrvačník roztočí na úhlovou rychlost 200π rad/s. (a) Jak velká kinetická

energie je „uložena“ v roztočeném setrvačníku? (b) Průměrný příkon takového automobilu je 8,0 kW. Jak dlouho může automobil jezdit, než se setrvačník zastaví?

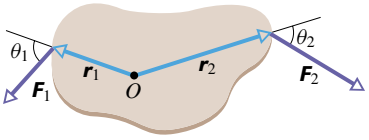
ODST. 11.8 Moment síly

60C. Délka ramene pedálu jízdního kola je 0,152 m. Chodidlo tlačí na pedál svislou silou o velikosti 111 N. Určete velikost momentu této síly vzhledem k ložisku, svírá-li rameno pedálu se svislým směrem úhel (a) 30°, (b) 90° a (c) 180°.

61C. Míč o hmotnosti 0,75 kg je připevněn k jednomu konci tyče o délce 1,25 m a zanedbatelné hmotnosti. Druhý konec tyče se může otáčet kolem vodorovného čepu. Určete velikost momentu tíhové síly vzhledem k čepu při vychýlení takto vzniklého kyvadla z rovnovážné polohy o úhel 30°.

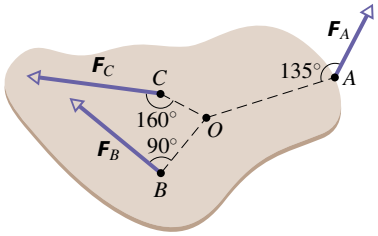
62C. Cyklista o hmotnosti 70 kg tlačí pedál celou svou vahou v okamžiku, kdy se pedál pohybuje směrem dolů. Pedál opisuje kruhovou dráhu o poloměru 0,40 m. Vypočtěte maximální velikost momentu tlakové síly, kterou cyklista na pedál působí.

63Ú. Na těleso na obr. 11.38, které se může otáčet kolem bodu O, působí dvě síly. (a) Odvoďte výraz pro velikost výsledného momentu těchto sil vzhledem k bodu O a (b) vyčíslete jej pro hodnoty $r_1 = 1{,}30\,\text{m}$, $r_2 = 2{,}15\,\text{m}$, $F_1 = 4{,}20\,\text{N}$, $F_2 = 4{,}90\,\text{N}$, $\theta_1 = 75{,}0°$ a $\theta_2 = 60{,}0°$.



Obr. 11.38 Úloha 63

64Ú. Těleso na obr. 11.39 se může otáčet kolem bodu O. Působí na ně tři síly, které jsou v obrázku rovněž vyznačeny. Síla $\boldsymbol{F}_A$ má velikost $F_A = 10\,\text{N}$ a působí v bodě A, který leží ve vzdálenosti 8,0 m od bodu O. Síla $\boldsymbol{F}_B$ má velikost $F_B = 16\,\text{N}$ a působí v bodě B vzdáleném 4,0 m od bodu O. Síla $\boldsymbol{F}_C$ má velikost $F_C = 19\,\text{N}$ a působí v bodě C, jehož vzdálenost od bodu O je 3,0 m. Vypočtěte celkový moment všech těchto sil vzhledem k bodu O.



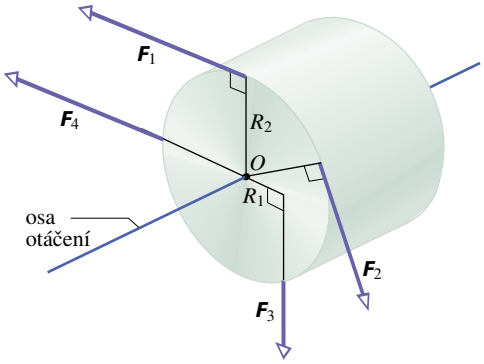
Obr. 11.39 Úloha 64

ODST. 11.9 Věta o momentu hybnosti

65C. Moment síly, která roztáčí kolo, má velikost 32 N·m. Úhlové zrychlení kola je 25,0 rad/s^2. Vypočtěte moment setrvačnosti kola.

66C. Při výskoku z prkna zvětší skokan do vody svou úhlovou rychlost z počáteční nulové hodnoty na hodnotu 6,20 rad/s. Výskok trvá 220 ms. Moment setrvačnosti skokana je 12,0 kg·m^2. (a) Vypočtěte úhlové zrychlení při výskoku a (b) výsledný moment vnějších sil, které na skokana při výskoku působily.

67C. Válec o hmotnosti 2,0 kg se může otáčet kolem osy vedené bodem O (obr. 11.40). Na válec působí síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ a $\boldsymbol{F}_4$, které jsou v obrázku rovněž vyznačeny. Jejich velikosti jsou $F_1 = 6{,}0\,\text{N}$, $F_2 = 4{,}0\,\text{N}$, $F_3 = 2{,}0\,\text{N}$ a $F_4 = 5{,}0\,\text{N}$ a jejich působiště leží ve vzdálenostech $R_1 = 5{,}0\,\text{cm}$ a $R_2 = 12\,\text{cm}$ od osy otáčení. Vypočtěte velikost úhlového zrychlení válce a určete jeho směr. (Směr působících sil *vzhledem k válci* se během jeho pohybu nemění.)



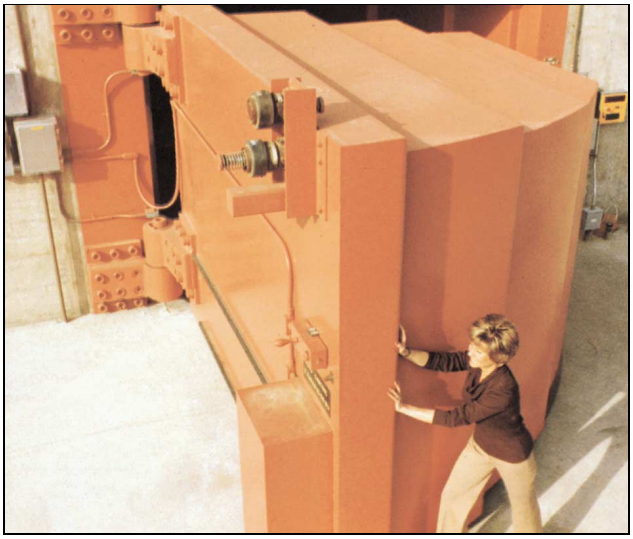
Obr. 11.40 Cvičení 67

68C. Těleso je tvořeno částicí o hmotnosti 1,30 kg, která je připevněna k jednomu konci tyče o délce 0,780 m a zanedbatelné hmotnosti. Otáčí se úhlovou rychlostí 5 010 ot/min kolem svislé osy vedené druhým koncem tyče. (a) Vypočtěte moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení. (b) Na částici působí proti směru jejího pohybu odporová síla prostředí o velikosti $2{,}30\cdot10^{-2}\,\text{N}$. Jaký musí být moment další síly, kterou musíme na těleso působit, aby jeho otáčivý pohyb byl rovnoměrný?

69C. Tenká kulová slupka má poloměr 1,90 m. Moment síly, která na ni působí, má velikost 960 N·m. Slupka se otáčí kolem osy vedené jejím středem s úhlovým zrychlením 6,20 rad/s^2. Vypočtěte (a) moment setrvačnosti a (b) hmotnost slupky.

70Ú. Na obr. 11.41 vidíme masivní stínicí dveře pokusného neutronového reaktoru v Lawrence Livermore Laboratory. (Jsou to nejtěžší zavěšené dveře na světě.) Hmotnost dveří je 44 000 kg a jejich moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jejich závěsy je $8{,}7\cdot10^4\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Šířka přední stěny dveří je 2,4 m. Jak velkou stálou silou kolmou k přední stěně dveří je třeba působit u jejich vnějšího okraje, abychom jimi dokázali za 30 s otočit o 90°? (Dveře jsou zpočátku v klidu, vliv třecích sil pokládáme za zanedbatelný.)

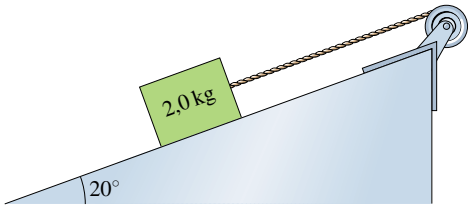
71Ú. Na kladku o poloměru 10 cm působí v bodě na jejím obvodu tečná síla, jejíž velikost je časově proměnná a je popsána funkcí $F = 0{,}50t + 0{,}30t^2$ (F je newtonech a t v sekundách). Moment setrvačnosti kladky vzhledem k její ose je



Obr. 11.41 Úloha 70

$1{,}0{\cdot}10^{-3}$ kg·m^2. Kladka je zpočátku v klidu. Vypočtěte (a) její úhlové zrychlení a (b) úhlovou rychlost v okamžiku $t = 3{,}0$ s.

72Ú. Kolo o poloměru 0,20 m se může otáčet bez tření kolem vodorovné osy. Po obvodu kola je navinuto vlákno zanedbatelné hmotnosti. Druhý konec vlákna je připevněn k tělesu o hmotnosti 2,0 kg, které může klouzat bez tření po nakloněné rovině o úhlu sklonu 20° (obr. 11.42). Těleso klesá po nakloněné rovině se zrychlením 2,0 m/s^2. Vypočtěte moment setrvačnosti kola vzhledem k jeho ose otáčení.

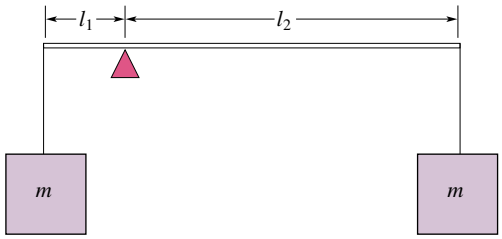


Obr. 11.42 Úloha 72

73Ú. Dvě homogenní plné koule mají stejnou hmotnost 1,65 kg s poloměry 0,226 m a 0,854 m. (a) Pro každou z nich vypočtěte moment síly, která kouli roztočí za 15,5 s z klidu na úhlovou rychlost 317 rad/s. Koule se může otáčet kolem osy vedené jejím středem. (b) Pro každou kouli zjistěte, jak velká tečná síla musí působit v bodě na rovníku, aby její moment vzhledem k ose otáčení měl požadovanou velikost.

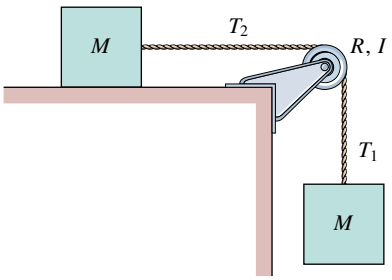
74Ú. Tělíska použitá v Atwoodově padostroji na obr. 5.23 mají hmotnosti 500 g a 460 g. Kladka o poloměru 5,00 cm se může otáčet kolem vodorovné osy bez tření. Po uvolnění soustavy pokleslo těžší těleso o 75,0 cm za dobu 5,00 s (vlákno v kladce neprokluzuje). (a) Určete zrychlení těles a tahovou sílu vlákna působící na (b) těžší a (c) lehčí těleso. (d) Vypočtěte úhlové zrychlení kladky a (e) její moment setrvačnosti.

75Ú. Na obr. 11.43 jsou znázorněna dvě tělesa o stejných hmotnostech m, zavěšená na koncích tuhé tyče o délce $l_1 + l_2$, kde $l_1 = 20$ cm a $l_2 = 80$ cm. Hmotnost tyče je zanedbatelná. Tyč je podepřena břitem podle obrázku. Držíme ji nejprve ve vodorovné poloze a pak uvolníme. Vypočtěte zrychlení těles bezprostředně po uvolnění.



Obr. 11.43 Úloha 75

76Ú. Dvě stejná tělesa o hmotnosti M jsou spojena vláknem zanedbatelné hmotnosti, které je vedeno přes kladku o poloměru R a momentu setrvačnosti I (obr. 11.44). Vlákno v kladce neprokluzuje, kladka se může otáčet bez tření. Předem nevíme, zda lze tření mezi tělesem a vodorovnou podložkou zanedbat. Po uvolnění soustavy se tělesa pohybovala se zrychlením o stálé velikosti. Za dobu t se kladka otočila o úhel θ. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení kladky, (b) zrychlení těles, (c) tahovou sílu v horní a dolní části vlákna. Výsledky vyjádřete pomocí veličin M, I, R θ, g a t.



Obr. 11.44 Úloha 76

ODST. 11.10 Práce a kinetická energie při otáčivém pohybu

77C. (a) Pro soustavu na obr. 11.18 jsou zadány tyto hodnoty: $R = 12$ cm, $M = 400$ g a $m = 50$ g. Určete rychlost tělesa v okamžiku, kdy pokleslo z počáteční klidové polohy o 50 cm. Úlohu řešte pomocí zákona zachování mechanické energie. (b) Zopakujte výpočet pro $R = 5{,}0$ cm.

78C. Kliková hřídel v automobilovém motoru přenáší při úhlové rychlosti 1 800 ot/min výkon 100 HP = 74,6 kW. Určete odpovídající silový moment.

79C. Tenký prstenec o hmotnosti 32,0 kg a poloměru 1,20 m má v jistém okamžiku $t = 0$ úhlovou rychlostí 280 ot/min. Během dalších 15,0 s se prstenec zastaví. (a) Vypočtěte práci brzdných sil a (b) odpovídající výkon.

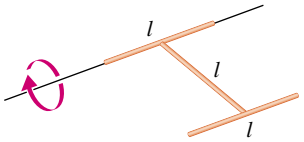
80C. Tenká tyč o délce l a hmotnosti m je na jednom konci volně zavěšena. Po vychýlení kmitá kolem rovnovážné polohy jako kyvadlo, rovnovážnou polohou prochází úhlovou rychlostí ω. (a) Vypočtěte kinetickou energii tyče při průchodu rovnovážnou

polohou. (b) Určete výšku těžiště kyvadla v bodě obratu nad jeho rovnovážnou polohou. Tření a odpor vzduchu zanedbejte.

81Ú. Představme si, že bychom měli za jeden den roztočit Zemi z klidu na její současnou úhlovou rychlost. Vypočtěte (a) potřebný moment působící síly, (b) dodanou energii, (c) průměrný výkon síly při tomto hypotetickém ději.

82Ú. Tyčový metr je spodním koncem opřen o podlahu a jeho horní konec přidržujeme. V jistém okamžiku horní konec uvolníme a tyčový metr padá. Vypočtěte rychlost jeho volného konce v okamžiku dopadu na podlahu za předpokladu, že spodní konec během pádu nepodklouzl. (*Tip*: Použijte zákon zachování mechanické energie a považujte tyč za velmi tenkou.)

83Ú. Tuhé těleso se skládá ze tří stejných tenkých tyčí o délce l spojených do tvaru písmene H (obr. 11.45). Těleso se může otáčet kolem vodorovné osy, která prochází jednou nožkou písmene H. Těleso uvolníme v poloze, kdy je rovina písmene H vodorovná. Vypočtěte jeho úhlovou rychlost v okamžiku, kdy je rovina písmene H svislá.

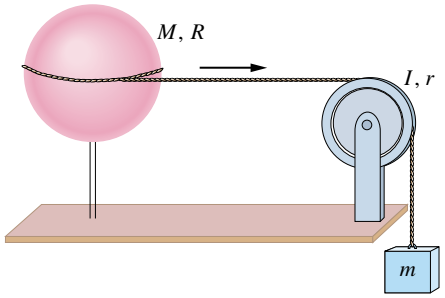


Obr. 11.45 Úloha 83

84Ú. Homogenní válec o poloměru 10 cm a hmotnosti 20 kg se může volně otáčet kolem vodorovné osy, rovnoběžné s jeho rotační osou symetrie. Vzdálenost obou os je 5,0 cm. (a) Vypočtěte moment setrvačnosti válce vzhledem k zadané ose otáčení. (b) Válec uvolníme z klidové polohy, v níž byly osa otáčení a osa symetrie válce ve stejné výšce. Jaká je úhlová rychlost válce v okamžiku, kdy prochází rovnovážnou polohou? (*Tip*: Použijte zákon zachování mechanické energie.)

85Ú. Homogenní list vrtulníkového rotoru na obr. 11.36 má délku 7,80 m a hmotnost 110 kg. (a) Jakou silou působí list na svorník, jímž je připevněn k ose rotoru, otáčí-li se úhlovou rychlostí 320 ot/min? (*Tip*: Při řešení této úlohy lze list nahradit částicí umístěnou v jeho těžišti. Přemýšlejte proč.) (b) Vypočtěte moment síly, kterou musí působit motor vrtulníku na rotor, aby získal úhlovou rychlost 320 ot/min za dobu 6,7 s při roztáčení z klidu. Zanedbejte odpor vzduchu. (V tomto případě již nelze nahradit rotorový list částicí umístěnou do jeho těžiště. Proč? List nahraďte tenkou homogenní tyčí.) (c) Jakou práci vykonal motor při roztočení rotoru vrtulníku z klidu na výslednou úhlovou rychlost?

86Ú. Homogenní kulová slupka o hmotnosti M a poloměru R se otáčí bez tření kolem svislé osy (obr. 11.46). Vlákno zanedbatelné hmotnosti je navinuto podél jejího rovníku, je vedeno přes kladku s momentem setrvačnosti I a na jeho druhém konci je připevněno malé tělísko o hmotnosti m. Tření v ose kladky zanedbáme a předpokládáme, že vlákno po povrchu kulové slupky neklouže. V určitém okamžiku soustavu uvolníme. Určete rychlost padajícího tělíska v okamžiku, kdy urazilo dráhu h. Použijte zákon zachování mechanické energie.

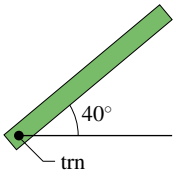


Obr. 11.46 Úloha 86

87Ú. Vysoký komín válcového tvaru padá tak, že se otáčí kolem svého konce uchyceného u země. Nahraďte komín tenkou tyčí o délce h a vyjádřete (a) normálovou a (b) tečnou složku zrychlení částice na vrcholu komína jako funkci úhlu θ, který komín svírá se svislým směrem. (c) Určete hodnotu θ, pro kterou má zrychlení této částice velikost g.

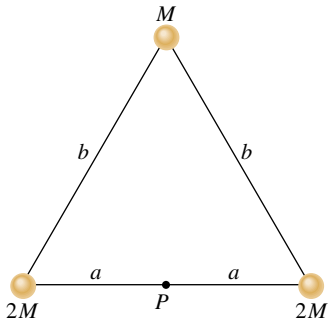
88Ú. Na obou koncích tenké ocelové tyče o délce 1,20 m a hmotnosti 6,40 kg jsou upevněny malé míčky o hmotnostech 1,06 kg. Tyč se otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím středem. V jistém okamžiku měla tyč úhlovou rychlost 39,0 ot/s. Za dalších 32,0 s se vlivem třecích sil zastavila. Předpokládejme, že moment třecích sil je konstantní. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení tyče, (b) moment třecích sil, (c) celkovou ztrátu mechanické energie vlivem sil tření a (d) počet otáček, které tyč vykonala od začátku měření do okamžiku zastavení. (e) Předpokládejme nyní, že moment třecích sil není konstantní. Kterou z veličin (a), (b), (c), nebo (d) je přesto možné vypočítat bez dodatečné informace? Uveďte její hodnotu.

89Ú. Homogenní tyč o hmotnosti 1,5 kg má délku 2,0 m (obrázek 11.47) a může se otáčet bez tření kolem vodorovného čepu umístěného na jednom jejím konci. Tyč uvedeme do výchozí klidové polohy, v níž svírá s vodorovným směrem úhel 40°, a uvolníme. (a) Určete úhlové zrychlení tyče v okamžiku jejího uvolnění. Moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose vedené čepem je 2,0 kg·m^2. (b) Pomocí zákona zachování mechanické energie určete úhlovou rychlost tyče v okamžiku, kdy prochází vodorovnou polohou.



Obr. 11.47 Úloha 89

90Ú. Tuhé těleso na obr. 11.48 se skládá ze tří částic spojených tyčemi zanedbatelné hmotnosti. Těleso se otáčí kolem osy vedené bodem P kolmo k rovině obrázku. Pro hodnoty $M = 0{,}40$ kg, $a = 30$ cm a $b = 50$ cm vypočtěte práci nutnou k roztočení tělesa z klidu na úhlovou rychlost 5,0 rad/s.



Obr. 11.48 Úloha 90

91Ú*. Automobil je vybaven setrvačníkem pro akumulaci energie ve tvaru homogenního kotouče o průměru 1,1 m. Setrvačník je spojen převody s koly automobilu tak, že jeho úhlová rychlost je 240 ot/s při rychlosti automobilu 80 km/h. Celková hmotnost automobilu je 800 kg, setrvačník váží 200 N. Automobil je zpočátku v klidu a začne sjíždět bez motoru po svahu délky 1 500 m a úhlem sklonu 5°. Třecí síly a moment setrvačnosti kol automobilu zanedbejte a vypočtěte (a) rychlost automobilu, (b) úhlové zrychlení setrvačníku a (c) výkon dodávaný setrvačníku na konci svahu.

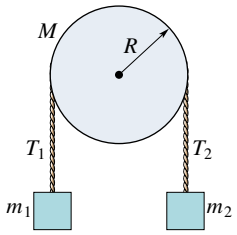
PRO POČÍTAČ

92Ú. Dva kotouče se mohou nezávisle na sobě otáčet kolem rovnoběžných os. První kotouč má poloměr 7,0 cm a moment setrvačnosti 1,5 kg·m^2, poloměr druhého je 15 cm a moment setrvačnosti 3,5 kg·m^2. První kotouč je v klidu a druhý roztočíme úhlovou rychlostí 175 rad/s. Osy kotoučů pak posuneme tak, aby se jejich obvody dotkly. Kotouče na sebe působí normálovými silami o velikostech 150 N, koeficient dynamického tření mezi kotouči je 0,25. (a) Vytvořte tabulku obsahující časové závislosti úhlových rychlostí kotoučů v časovém intervalu 80 s měřeném od okamžiku jejich dotyku. Hodnoty tabelujte s krokem 2 s. Sestrojte grafy těchto závislostí a graf časové závislosti celkové kinetické energie kotoučů. Zachovává se celková kinetická energie? (b) Jaký vliv na pohyb kotoučů má třecí síla? Výpočty zopakujte pro koeficient dynamického tření 0,50. Závisí doba potřebná k ustavení výsledné (rovnovážné) úhlové rychlosti kotoučů na koeficientu dynamického tření? Závisí výsledná úhlová rychlost kotoučů a jejich celková výsledná kinetická energie na koeficientu dynamického tření?

93Ú. V následující tabulce jsou uvedeny souřadnice pěti částic ležících v rovině xy. Částice jsou pevně spojeny a tvoří tuhé těleso. Vypočtěte moment setrvačnosti tohoto tělesa (a) vzhledem k ose x, (b) vzhledem k ose y a (c) vzhledem k ose z. (d) Najděte polohu těžiště tělesa.

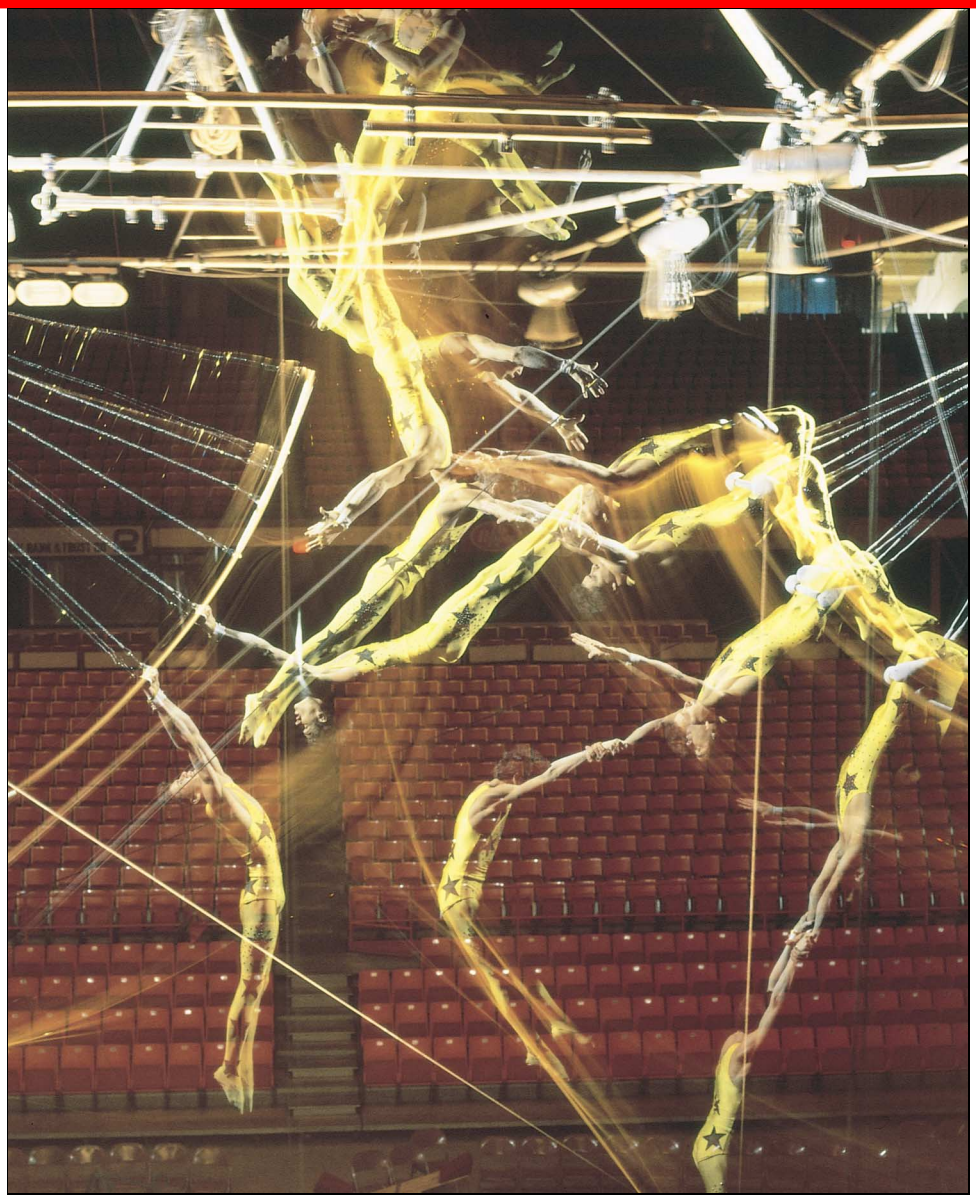
TĚLESO	1	2	3	4	5
Hmotnost (g)	500	400	300	600	450
x (cm)	15	−13	17	−4,0	−5,0
y (cm)	20	13	−6,0	−7,0	9,0

94Ú. Na obr. 11.49 jsou znázorněna dvě tělesa o hmotnostech $m_1 = 400$ g a $m_2 = 600$ g. Tělesa jsou spojená vláknem zanedbatelné hmotnosti, vedeným přes homogenní kladku o hmotnosti $M = 500$ g a poloměru $R = 12{,}0$ cm. Kladka se může otáčet bez tření kolem vodorovné osy. Vlákno po obvodu kladky neklouže. Soustavu uvolníme z klidové polohy. Vypočtěte (a) velikost zrychlení těles, (b) tahovou sílu T_1 v levé části vlákna a (c) tahovou sílu T_2 v pravé části vlákna.

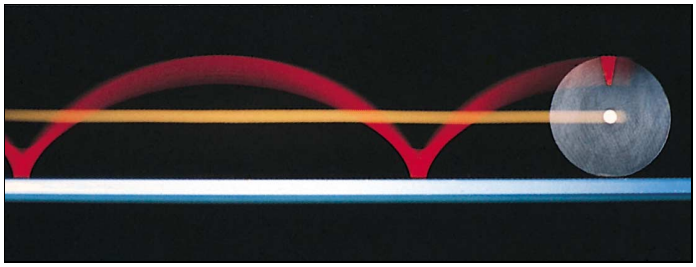


Obr. 11.49 Úloha 94

12
Valení, moment síly a moment hybnosti



K nejobtížnějším varietním číslům patří bezesporu vícenásobná salta. Trojité salto se poprvé povedlo již v roce 1897 jednomu z tehdy populárních vzdušných akrobatů při skoku z visuté hrazdy, na ***čtyřnásobné*** *si však milovníci těchto atrakcí museli počkat ještě dalších 85 let, do roku 1982. Migueli Vazquesovi se tehdy podařilo provést během letu celé čtyři otáčky, než ho zachytil jeho bratr Juan. Oba artisté byli v té chvíli svým výkonem téměř zaskočeni. Proč je vícenásobné salto tak obtížné? Může k jeho zvládnutí nějak napomoci znalost fyzikálních zákonů?*



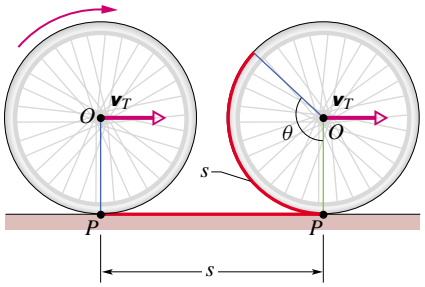
Obr. 12.1 Fotografie valícího se kotouče získaná při dlouhé expoziční době. Na kotouči jsou připevněny dva bodové zdroje světla, jeden v jeho středu a jeden na obvodu. Světélko umístěné na obvodu opisuje křivku zvanou *cykloida*.

12.1 VALENÍ

Všimněme si pohybu jednotlivých částí kola při jízdě cyklisty po přímé silnici. Středy obou kol se pohybují vpřed, jejich pohyb je posuvný. Trajektorie bodů na obvodu kol jsou však mnohem složitější (obr. 12.1). Ukážeme si, že pohyb valícího se kola lze chápat buď jako složení posuvného a otáčivého pohybu, nebo jako čistě otáčivý pohyb kolem vhodně zvolené osy.

Valení jako kombinace posuvného a otáčivého pohybu

Pozorujme bicyklové kolo, které se odvaluje stálou rychlostí po přímé dráze a neprokluzuje. Předpokládejme, že hmotnost kola je rozložena symetricky, takže jeho těžiště splývá s jeho geometrických středem O. Bod O se pohybuje vpřed stálou rychlostí $\boldsymbol{v}_T$ podle obr. 12.2. Bod P, v němž se kolo dotýká silnice, je v každém okamžiku přesně pod bodem O. Pohybuje se tedy po silnici stejnou rychlostí $\boldsymbol{v}_T$ jako těžiště kola.



Obr. 12.2 Těžiště O valícího se kola se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_T$ a za dobu t urazí dráhu s. Kolo se přitom pootočí o úhel θ. Bod dotyku P kola se zemí urazí za tuto dobu rovněž dráhu s.

Za dobu t urazí body O a P dráhu s. Z pohledu cyklisty se při tom kolo otočí kolem svého středu o úhel θ. Také délka oblouku části pneumatiky, která během doby t přišla do styku se silnicí, je s. Tuto dráhu urazil z pohledu cyklisty bod na pneumatice, který se dotýkal silnice na počátku měření. Vztah mezi délkou oblouku s a otočením θ je velmi jednoduchý. Platí totiž rov. (11.15):

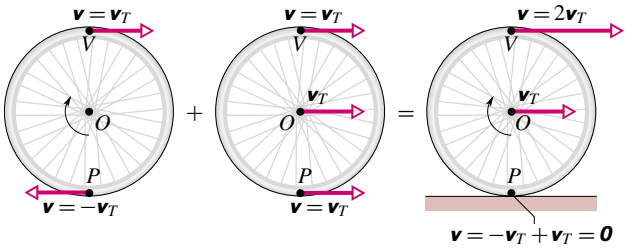
$$s = R\theta, \tag{12.1}$$

kde R je poloměr kola. Rychlost středu kola $\boldsymbol{v}_T$ má velikost $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, úhlová rychlost kola ω vzhledem k ose vedené jeho středem je $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$. Derivováním rov. (12.1) podle času dostaneme

$$v_T = \omega R. \tag{12.2}$$

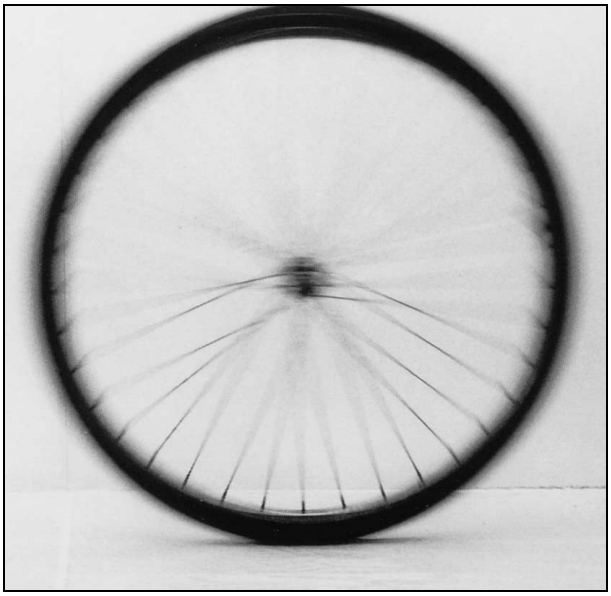
Uvědomme si, že rov. (12.2) platí pouze v případě, že se kolo valí *bez prokluzování*.

Obr. 12.3 nás přesvědčí, že valení kola můžeme chápat jako složení posuvného a otáčivého pohybu. Obr. 12.3a znázorňuje pouze otáčení kola, tj. jeho pohyb z pohledu cyklisty, který vidí osu otáčení jako nepohyblivou. (Otáčivý pohyb kolem pevné osy jsme podrobně probrali v kap. 11.) Každý bod kola rotuje kolem této osy úhlovou rychlostí ω. Libovolný bod na jeho vnějším obvodu má obvodovou rychlost v_T, danou vztahem (12.2). Obr. 12.3b zachycuje pouze posuvný pohyb kola, který bychom pozorovali, kdyby se kolo vůbec neotáčelo. Každý jeho bod by se v takovém případě pohyboval doprava rychlostí $\boldsymbol{v}_T$.



Obr. 12.3 Valení kola jako kombinace posuvného a otáčivého pohybu. (a) Otáčení kola: všechny body kola obíhají se stejnou úhlovou rychlostí ω. Body na jeho vnějším obvodu mají stejnou obvodovou rychlost $v = v_T$. V obrázku jsou vyznačeny vektory rychlosti $\boldsymbol{v}$ nejvýše a nejníže položeného bodu kola V, resp. P. (b) Posuv kola: všechny body se pohybují doprava se stejnou rychlostí $\boldsymbol{v}_T$, shodnou s rychlostí středu O. (c) Valivý pohyb kola je složením pohybů (a) a (b).

Složením pohybů na obr. 12.3a, b vznikne výsledný valivý pohyb, který vidíme na obr. 12.3c. Všimněme si, že body v bezprostřední blízkosti bodu P jsou téměř v klidu, zatímco body u vrcholu V se pohybují rychleji než kterákoli jiná část kola, rychlostí blízkou $2v_T$. Fotografie



Obr. 12.4 Fotografie valícího se bicyklového kola. Obraz kovových paprsků v dolní části fotografie je podstatně ostřejší než nahoře. Pohyb paprsků v horní části kola je tedy rychlejší, ve shodě s obr. 12.3c.

valícího se bicyklového kola na obr. 12.4 to dokumentuje velmi přesvědčivě. Obraz drátů u vrcholu kola je zcela rozmazán, zatímco dráty ve spodní části jsou zachyceny poměrně ostře.

Valení libovolného tělesa kruhového průřezu lze tedy rozložit na „čisté“ otáčení a „čistý“ posuv, přesně podle obr. 12.3a, b.

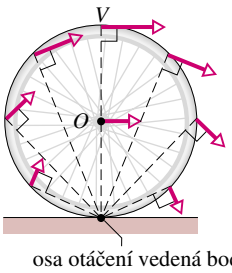
Valení jako otáčivý pohyb

Jiný způsob pohledu na valivý pohyb nabízí obr. 12.5. Můžeme jej totiž interpretovat také jako „čisté“ otáčení kolem *okamžité* osy, která je kolmá k rovině kola a právě prochází bodem jeho dotyku se silnicí (bod P na obr. 12.5). Okamžité rychlosti jednotlivých bodů valícího se kola jsou v obr. 12.5 vyznačeny šipkami.

Otázka: Jakou úhlovou rychlost přisoudí kolu pozorovatel v klidu, posuzuje-li jeho pohyb jako otáčení kolem této nové osy?

Odpověď: Úhlová rychlost otáčivého pohybu kola vzhledem ke klidnému pozorovateli je stejná jako vzhledem k cyklistovi, který pozoruje „čistou“ rotaci kola kolem osy vedené jeho středem.

Abychom se o správnosti odpovědi na předchozí otázku přesvědčili, vypočtěme rychlost bodu V na vrcholu kola ve vztažné soustavě spojené s pozorovatelem v klidu. Vzdálenost vrcholu V od osy vedené bodem P na obr. 12.5 je rovna průměru kola $2R$. Bod V se tedy podle rov. (12.2)



Obr. 12.5 Valivý pohyb může být chápán jako otáčení s úhlovou rychlostí ω kolem osy, která v každém okamžiku prochází bodem P. Šipky znázorňují vektory okamžité rychlosti vybraných bodů na obvodu kola. Lze je získat sečtením odpovídajících rychlostí posuvného a otáčivého pohybu podle obr. 12.3.

pohybuje rychlostí o velikosti

$$v_{\text{vrchol}} = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_T,$$

přesně v souhlasu s obr. 12.3c. Podobně můžeme určit rychlosti bodů O a P a ověřit tak správnost obr. 12.3c.

KONTROLA 1: Zadní kolo klaunova jízdního kola má dvakrát větší poloměr než kolo přední. (a) Rozhodněte, zda je rychlost bodu na vrcholu zadního kola větší, menší, nebo stejná jako rychlost odpovídajícího bodu předního kola. (b) Rozhodněte, zda je úhlová rychlost zadního kola větší, menší, nebo stejná jako úhlová rychlost předního kola.

Obruč na obrázku se valí bez prokluzování. Kdo jde rychleji? Pes nebo poník?



Kinetická energie

Pokusme se nyní vypočítat kinetickou energii valícího se kola vzhledem k vztažné soustavě spojené s pozorovatelem v klidu. Chápeme-li valení jako otáčení kolem osy vedené bodem P na obr. 12.5, dostaneme

$$E_k = \tfrac{1}{2} I_P \omega^2, \tag{12.3}$$

kde ω je úhlová rychlost kola a I_P jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené bodem P. Podle Steinerovy věty (11.27) je

$$I_P = I_T + mR^2, \tag{12.4}$$

kde m je hmotnost kola a I_T jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. Dosazením z rovnice (12.4) do (12.3) dostáváme

$$E_k = \tfrac{1}{2} I_T \omega^2 + \tfrac{1}{2} m R^2 \omega^2.$$

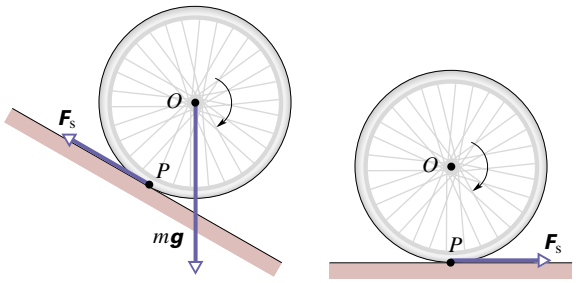
Pomocí vztahu $v_T = \omega R$ (rov. (12.2)) získáme nakonec výsledný vztah pro E_k ve tvaru

$$E_k = \tfrac{1}{2} I_T \omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_T^2. \tag{12.5}$$

První z členů na pravé straně této rovnice představuje kinetickou energii otáčivého pohybu kola kolem osy vedené jeho těžištěm (obr. 12.3a), druhý člen odpovídá pohybu posuvnému (obr. 12.3b).

Valení a třecí síly

Jakou roli vlastně hrají při valivém pohybu třecí síly? Představme si, že se kolo valí po vodorovné podložce stálou rychlostí, právě tak, jak ukazuje obr. 12.2. Mohli bychom je do takového pohybu vůbec uvést, kdyby byla podložka dokonale hladká? Pokud bychom je roztočili kolem jeho osy na úhlovou rychlost ω a udělili mu ještě vodorovnou rychlost o velikosti $v_T = \omega R$, mohlo by se to podařit. Vzhledem k přesně „nastavenému“ vztahu mezi úhlovou rychlostí kola a rychlostí jeho posuvného pohybu by kolo v bodě P samozřejmě neprokluzovalo, nesmýkalo by se po podložce. Popsaným způsobem však můžeme uvést kolo do valivého pohybu bez klouzání i v případě, že podložka *nebude* dokonale hladká. Kolo se po ní nebude smýkat ani v tomto případě. Zanedbáme-li tzv. valivý odpor podložky proti jeho pohybu, způsobený mírnými deformacemi obou objektů, snadno si uvědomíme, že jedinou silou, kterou by podložka *mohla* na kolo působit, je vodorovná síla statického tření. Posuvný pohyb kola je však podle předpokladu rovnoměrný a žádnou další vodorovnou silou na kolo nepůsobíme. Statická třecí síla je proto nulová. Jiná situace nastane, pokusíme-li se změnit postupnou (v_T) nebo úhlovou (ω) rychlost kola. V takovém případě musíme na kolo působit určitou vodorovnou silou a připustit, že se kolo může v bodě P smýknout po podložce. Podložka bude na kolo působit v bodě P třecí silou. Pokud ke smyku kola ještě nedojde, bude tato síla $\boldsymbol{F}_s$ mít povahu *statického* tření a bude směřovat *„proti snaze“* kola podklouznout. V případě smyku již půjde o tření *dynamické* a třecí síla $\boldsymbol{F}_d$ bude namířena proti směru *skutečného* skluzu.



Obr. 12.6 (a) Kolo se valí bez klouzání po nakloněné rovině. V bodě P na ně působí síla statického tření $\boldsymbol{F}_s$ proti „snaze“ kola sklouznout, tj. proti směru, ve kterém by kolo v bodě P uklouzlo, kdyby byla podložka dokonale hladká. (b) Kolo se valí vodorovně s narůstající úhlovou rychlostí. Bod P má v tomto případě snahu uklouznout směrem dozadu (představte si automobil, který se prudce rozjíždí na zledovatělém parkovišti). Síla statického tření $\boldsymbol{F}_s$ působí na kolo v bodě P opět *proti* jeho možnému skluzu. Pokud by se již kolo na obrázcích (a) a (b) smýkalo, působila by na ně podložka v bodě P silou dynamického tření $\boldsymbol{F}_d$.

Na obr. 12.6a se kolo valí po nakloněné rovině. V jeho těžišti na ně působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, jejíž rameno vzhledem k ose otáčení vedené těžištěm je nulové. Je tedy nulový i odpovídající silový moment. Tíhová síla nepřispívá k roztáčení kola, pouze se snaží kolo smýkat dolů po nakloněné rovině. V bodě P působí na kolo ještě třecí síla směřující proti jeho „tendenci ke skluzu“, tj. vzhůru podél nakloněné roviny. Její rameno vzhledem k ose otáčení kola je *nenulové* a má velikost poloměru kola. Moment třecí síly roztáčí kolo vzhledem k ose vedené jeho středem.

Na obr. 12.6b se kolo valí po vodorovné rovině s narůstající úhlovou rychlostí ω. Při tom se jeho spodní část snaží podklouznout doleva. (Abychom si tuto skutečnost lépe uvědomili, můžeme si představit automobil, jehož řidič se snaží o prudký rozjezd na zledovatělém parkovišti.) Třecí síla, jíž působí podložka na kolo v bodě P, směřuje opět proti očekávanému směru skluzu. Z hlediska soustavy cyklista+jízdní kolo je silou vnější a určuje zrychlení jejího těžiště.

PŘÍKLAD 12.1

Tuhý homogenní válcový kotouč o hmotnosti $m = 1{,}4\,\text{kg}$ a poloměru $R = 8{,}5\,\text{cm}$ se valí po vodorovném stole rychlostí $v = 15\,\text{cm/s}$.

(a) Vypočtěte rychlost bodu na jeho vrcholu.

ŘEŠENÍ: „Rychlostí valícího se tělesa“, v našem příkladu kotouče, rozumíme vždy rychlost jeho těžiště. Z obr. 12.3c je zřejmé, že rychlost bodu na vrcholu kotouče je v porovnání s rychlostí jeho těžiště dvojnásobná, tj.

$$v_{\text{vrchol}} = 2v_T = 2(15\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}) = 30\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete úhlovou rychlost kotouče ω.

ŘEŠENÍ: Z rov. (12.2) dostaneme

$$\omega = \frac{v_T}{R} = \frac{(15\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1})}{(8{,}5\,\text{cm})} = \\ = 1{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} = 0{,}28\,\text{ot/s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Výsledek je nezávislý na volbě polohy osy otáčení: můžeme ji vést bodem P podle obr. 12.5 stejně dobře jako těžištěm kotouče.

(c) Vypočtěte kinetickou energii kotouče.

ŘEŠENÍ: Užitím vztahů $I_T = \frac{1}{2}mR^2$, $v_T = \omega R$ a rovnice (12.5) dostaneme

$$E_k = \tfrac{1}{2}I_T\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv_T^2 = \\ = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mR^2)(v_T/R)^2 + \tfrac{1}{2}mv_T^2 = \tfrac{3}{4}mv_T^2 = \\ = \tfrac{3}{4}(1{,}4\,\text{kg})(0{,}15\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2 = \\ = 0{,}024\,\text{J} = 24\,\text{mJ}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jaká část celkové kinetické energie kotouče souvisí s jeho posuvným pohybem a jaká část přísluší otáčivému pohybu kolem osy vedené jeho těžištěm?

ŘEŠENÍ: Kinetická energie posuvného pohybu odpovídá druhému členu v rov. (12.5), tj. $\frac{1}{2}mv_T^2$, a podle výsledku části (c) tedy představuje

$$\frac{\frac{1}{2}mv_T^2}{\frac{3}{4}mv_T^2} = \frac{2}{3} \doteq 67\,\% \quad \text{(Odpověď)}$$

celkové kinetické energie. Zbývajících 33 % odpovídá pohybu otáčivému.

Příspěvek posuvného a otáčivého pohybu k celkové kinetické energii valícího se tělesa závisí na jeho momentu setrvačnosti. V tab. 12.1 jsou shrnuty momenty setrvačnosti tří těles, prstence, válcového kotouče a koule, vzhledem k ose největší symetrie. Prstenec má svou hmotnost rozloženou ze všech těles nejdále od této osy. Poměrně velká část kinetické energie valícího se prstence proto připadá na otáčivý pohyb. Koule, jejíž hmotnost je rozložena blízko osy otáčení, má moment setrvačnosti nejmenší. Příspěvek její rotace k celkové kinetické energii valivého pohybu je tedy malý.

Moment setrvačnosti obecného rotačně symetrického tělesa je možné zapsat jako β-násobek momentu setrvačnosti prstence stejné hmotnosti, jehož poloměr R je shodným s poloměrem největšího řezu tělesa rovinou kolmou k ose symetrie. Je-li těleso homogenní, lze pomocí parametru β vyjádřit zvlášť příspěvky posuvného a otáčivého pohybu k celkové kinetické energii valícího se tělesa. Odpovídající vztahy pro prstenec, válec a kouli jsou uvedeny v posledním řádku tab. 12.1. Pro prstenec, válec a kouli nabývá parametr β hodnot 1, $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{5}$.

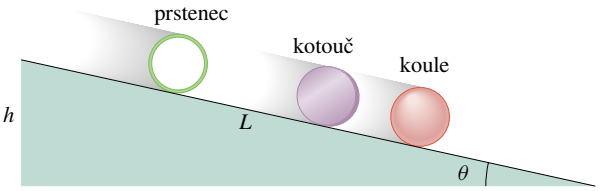
Tabulka 12.1 **Podíl kinetické energie translačního a rotačního pohybu na celkové kinetické energii valivého pohybu těles**

TĚLESO	MOMENT SETRVAČNOSTI I_T	PŘÍSP. K CELK. ENERGII TRANSLACE	PŘÍSP. K CELK. ENERGII ROTACE
Prstenec	$1mR^2$	50 %	50 %
Válec, válc. kotouč	$\frac{1}{2}mR^2$	67 %	33 %
Koule	$\frac{2}{5}mR^2$	71 %	29 %
Obecné těleso[a]	βmR^2	$100\frac{1}{1+\beta}$ %	$100\frac{\beta}{1+\beta}$ %

[a] Hodnotu β určíme jako $\beta = I_T/(mR^2)$.

PŘÍKLAD 12.2

Homogenní kuželková koule o poloměru $R = 11\,\text{cm}$ a hmotnosti $m = 7{,}2\,\text{kg}$ se valí dolů po nakloněné rovině o délce $L = 2{,}1\,\text{m}$ a úhlu sklonu $\theta = 34°$ (obr. 12.7). Jakou rychlostí se bude koule pohybovat na konci nakloněné roviny?



Obr. 12.7 Příklady 12.2 a 12.3. Prstenec, kotouč a koule se valí dolů po nakloněné rovině o úhlu sklonu θ. Přestože tělesa uvolníme ve stejném místě a stejném okamžiku, dorazí na konec nakloněné roviny v různém pořadí.

ŘEŠENÍ: Uvažujme pohyb koule od okamžiku jejího uvolnění v nejvyšším bodě nakloněné roviny až do chvíle, kdy dorazí k jejímu konci. Těžiště koule pokleslo během tohoto pohybu o svislou vzdálenost $h = L\sin\theta$. Tíhová potenciální energie soustavy koule + Země se tak snížila o hodnotu $mgL\sin\theta$. O stejnou hodnotu však vzrostla kinetická energie

koule. Podle rov. (12.5) platí

$$mgL\sin\theta = \tfrac{1}{2}I_T\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv_T^2. \qquad (12.6)$$

Podle vztahu (g) v tab. 11.2 platí pro plnou kouli $I_T = \frac{2}{5}mR^2$. Úhlovou rychlost ω můžeme nahradit výrazem v_T/R. Dosazením do rov. (12.6) dostáváme

$$mgL\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}(mR^2)\left(\frac{v_T}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_T^2.$$

Z této rovnice vyjádříme v_T:

$$v_T = \sqrt{\tfrac{10}{7}gL\sin\theta} = \\ = \sqrt{\tfrac{10}{7}(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}1\ \mathrm{m})\sin 34^\circ} = \\ = 4{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněme si, že výsledek nezávisí ani na hmotnosti, ani na poloměru koule.

PŘÍKLAD 12.3

Úvahy v př. 12.2 nyní zobecníme. Homogenní prstenec, kotouč a koule o stejné hmotnosti m a stejném poloměru R jsou současně uvolněny v nejvyšším bodě nakloněné roviny o délce $L = 2{,}5$ m a úhlu sklonu $\theta = 12^\circ$ (obr. 12.7).

(a) Které z těles dorazí na konec nakloněné roviny nejdříve?

ŘEŠENÍ: Odpověď snadno najdeme v tab. 12.1. U koule je poměrný příspěvek posuvného pohybu k celkové kinetické energii ze všech tří těles největší (71 %). Koule tedy závod vyhraje. Jako druhý skončí kotouč a poslední bude prstenec.

(b) Určete rychlost každého z těles na konci nakloněné roviny.

ŘEŠENÍ: Těžiště každého z těles poklesne během „závodu" o tutéž svislou vzdálenost h. Stejně jako při volném pádu klesne potenciální energie soustavy těleso + Země o hodnotu mgh. O stejnou hodnotu vzroste kinetická energie tělesa. Na konci nakloněné roviny mají tedy všechna tělesa stejnou kinetickou energii. Pouze část této energie, závislá na rozložení hmotnosti tělesa, však připadá na posuvný pohyb.

V rov. (12.5) položíme $\omega = v_T/R$ a dostaneme

$$mgh = \tfrac{1}{2}I_T\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv_T^2 = \\ = \tfrac{1}{2}I_T(v_T^2/R^2) + \tfrac{1}{2}mv_T^2 = \\ = \tfrac{1}{2}(I_T/R^2)v_T^2 + \tfrac{1}{2}mv_T^2. \qquad (12.7)$$

Po dosazení $h = L\sin\theta$ vyřešíme získanou rovnici vzhledem k neznámé v_T:

$$v_T = \sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{1 + I_T/mR^2}}. \qquad \text{(Odpověď)} \qquad (12.8)$$

Řešení je vyjádřeno pomocí momentu setrvačnosti tělesa I_T.

Všimněme si, že rychlost tělesa nezávisí ani na jeho hmotnosti ani na poloměru, ale pouze na rozložení hmoty kolem osy jeho rotační symetrie. Tato skutečnost je z výsledku (12.8) patrná na první pohled. Moment setrvačnosti tělesa I_T v něm totiž vystupuje pouze v podílu I_T/mR^2. Dětská hrací kulička i kuželková koule budou mít na konci nakloněné roviny stejnou rychlost. Z nakloněné roviny se tedy skutálí za stejnou dobu. Koule v tomto závodě porazí kotouč libovolné hmotnosti a poloměru. Prstenec o libovolné hmotnosti i poloměru je naopak za všech okolností odsouzen k porážce.

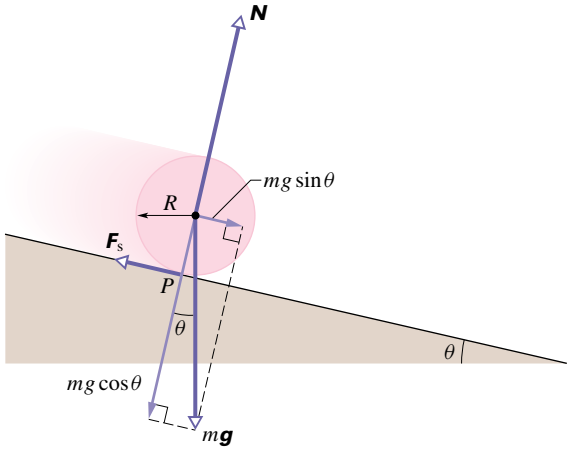
Pro prstenec (viz tab. 12.1) je $I_T/mR^2 = 1$. Jeho rychlost na konci „závodní dráhy" je podle rov. (12.8)

$$v_T = \sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{1 + I_T/mR^2}} = \\ = \sqrt{\frac{2(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}5\ \mathrm{m})\sin 12^\circ}{1+1}} = \\ = 2{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Podobně získáme $v_T = 2{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pro kotouč ($I_T/mR^2 = \frac{1}{2}$) a $2{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pro kouli ($I_T/mR^2 = \frac{2}{5}$). Tyto výsledky potvrzují náš odhad pořadí těles v části (a).

PŘÍKLAD 12.4

Uvažujme opět těleso o hmotnosti m a kruhovém průřezu o poloměru R, které se valí po nakloněné rovině o úhlu sklonu θ (obr. 12.8). Při rozboru jeho pohybu se však nyní opřeme pouze o věty o hybnosti a o momentu hybnosti soustavy. Výsledek pak porovnáme s řešením př. 12.3, kde jsme použili zákon zachování mechanické energie.



Obr. 12.8 Příklad 12.4. Homogenní těleso kruhového průřezu o poloměru R se valí dolů po nakloněné rovině. Země na ně působí tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$, podložka pak normálovou silou $\boldsymbol{N}$ a třecí silou $\boldsymbol{F}_s$. Třecí síla směřuje vzhůru podél nakloněné roviny. Působiště síly $\boldsymbol{N}$ jsme pro přehlednost přesunuli podél její vektorové přímky do středu tělesa.

(a) Vypočtěte zrychlení valícího se tělesa.

ŘEŠENÍ: Na obr. 12.8 jsou znázorněny síly, kterými na těleso působí okolní objekty: tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, normálová síla $\boldsymbol{N}$ a statická třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$. Působištěm tíhové síly je těžiště tělesa. Je-li hmotnost tělesa rozložena symetricky vzhledem k ose o jeho geometrické rotační symetrie, splývá těžiště se středem geometrickým. Normálová síla a síla tření působí na nepatrnou plošku v okolí bodu P, kde se těleso dotýká nakloněné roviny. Momenty všech sil vztahujeme k ose o. Momenty tíhové a normálové síly vzhledem k této ose jsou ovšem nulové, a nepřispívají proto k urychlování otáčivého pohybu. Roztáčení tělesa ve směru chodu hodinových ručiček je způsobeno výhradně silou tření, jejíž moment je záporný. Rameno třecí síly vzhledem k ose o má délku R.

Pro posuvný pohyb tělesa platí věta o hybnosti ($m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$). V soustavě souřadnic, jejíž osa x směřuje vzhůru podél nakloněné roviny, má zápis x-ové složky této vektorové rovnice tvar

$$ma_x = \sum F_x = F_\mathrm{s} - mg\sin\theta. \qquad (12.9)$$

Rovnice obsahuje dvě neznámé, F_s a a_x. Potřebujeme pro ně další rovnici. Získáme ji z věty o momentu hybnosti ($I\varepsilon = \sum M$) vztažené k ose o, v níž použijeme vztah $\varepsilon = a_x/R$ (rov. (11.20)):

$$\sum M = -F_\mathrm{s}R = I_T\varepsilon = \frac{I_T a_x}{R}. \qquad (12.10)$$

Z rov. (12.10) dostaneme výraz pro sílu tření

$$F_\mathrm{s} = -\frac{I_T a_x}{R^2}. \qquad (12.11)$$

Znaménko minus znamená, že vektor třecí síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$ má opačný směr než vektor zrychlení $\boldsymbol{a}$. Dosazením z rov. (12.11) do (12.9) a řešením vzhledem k neznámé veličině a_x nakonec dostáváme

$$a_x = -\frac{g\sin\theta}{1 + I_T/mR^2}. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (12.12)$$

(Větu o momentu hybnosti $I\varepsilon = \sum M$ jsme v kap. 11 odvodili pro otáčivý pohyb tělesa kolem osy, která je v klidu vzhledem ke vhodně zvolené inerciální vztažné soustavě. Poměrně elementárním výpočtem však lze ukázat, že její platnost zůstane zachována i pro případ, že osa otáčení je nepohyblivá ve vztažné soustavě spojené s těžištěm tělesa, jejíž pohyb vzhledem k soustavám inerciálním je pouze posuvný. Uvědomme si, že tato speciální *těžišťová* vztažná soustava může být i neinerciální.)

Při řešení úlohy bychom mohli vztáhnout větu o momentu hybnosti i k ose o_P vedené bodem P, v němž se těleso *dotýká* nakloněné roviny. Moment třecí síly vzhledem k této ose je nulový. V roli výsledného momentu sil $\sum M$ vystupuje nyní moment tíhové síly $m\boldsymbol{g}$, jejíž rameno vzhledem k ose o_P má hodnotu $R\sin\theta$. Dostáváme tedy

$$\sum M = -mg(R\sin\theta) = I_P\varepsilon = \frac{I_P a_x}{R}, \qquad (12.13)$$

kde I_P je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose o_P, vedené bodem P. Vypočteme jej pomocí Steinerovy věty

$$I_P = I_T + mR^2. \qquad (12.14)$$

Dosadíme za I_P z rov. (12.14) do (12.13) a vyjádříme neznámou a_x, dostaneme opět výsledek (12.12).

(b) Vypočtěte velikost třecí síly F_s.

ŘEŠENÍ: Dosazením z rov. (12.12) do (12.11) dostaneme

$$F_\mathrm{s} = mg\,\frac{\sin\theta}{1 + mR^2/I_T}. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (12.15)$$

Z tohoto výsledku vyplývá, že síla tření je menší než průmět tíhové síly do směru nakloněné roviny, jehož velikost je $mg\sin\theta$. Těleso se proto valí dolů zrychleně.

Například pro plný kotouč je podle tab. 12.1 $I_T/mR^2 = \frac{1}{2}$. Pro zrychlení a velikost třecí síly pak z rov. (12.12) a (12.15) dostáváme

$$a_x = -\frac{2}{3}g\sin\theta \qquad \text{a} \qquad F_\mathrm{s} = \frac{1}{3}mg\sin\theta.$$

(c) Určete rychlost tělesa na konci nakloněné roviny o délce L.

ŘEŠENÍ: Těleso se pohybuje podél osy x s konstantním zrychlením. Platí tedy

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x(x - x_0). \qquad (12.16)$$

Položíme-li $x - x_0 = -L$ a $v_0 = 0$ a dosadíme-li za a_x výsledek (12.12), získáme rov. (12.8), přesně ve shodě s výpočtem pomocí zákona zachování mechanické energie.

KONTROLA 2: Stejné kotouče A a B se valí po vodorovné podlaze stejnou rychlostí. Kotouč A najede na nakloněnou rovinu a valí se po ní bez prokluzu vzhůru až do bodu obratu, který leží nad úrovní podlahy ve výšce h. Kotouč B stoupá po stejné nakloněné rovině, která je však dokonale hladká. Rozhodněte, zda je výška bodu obratu kotouče B nad úrovní podlahy větší, menší, či stejná jako h.

12.2 JOJO

Oblíbená hračka zvaná **jojo**, to je fyzikální laboratoř, která se vejde do kapsy. Nevěříte? Ukážeme si, co všechno lze pomocí pohybu joja demonstrovat. Představme si, že se jojo odvaluje podél vlákna dolů a urazí vzdálenost h. Potenciální energie soustavy jojo + Země při tom poklesne o hodnotu mgh, o kterou naopak vzroste energie kinetická. Tato změna přispěje ke zvýšení kinetické energie posuvného ($\frac{1}{2}mv_T^2$) i otáčivého ($\frac{1}{2}I_T\omega^2$) pohybu joja. Při zpětném pohybu hračky je naopak pokles kinetické energie kompenzován vzrůstem energie potenciální.

V modernějším provedení není vlákno joja pevně přivázáno k osičce, ale vytváří kolem ní volnou smyčku. Jakmile tělísko joja „narazí“ na dolní konec vlákna, začne vlákno působit na osičku svislou silou směřující vzhůru. Tato síla zastaví pokles tělíska, které pak spočívá ve smyčce vlákna a otáčí se kolem své osy. Jeho celková kinetická energie bude v tuto chvíli dána pouze kinetickou energií otáčivého pohybu. Takové „spící“ jojo můžeme opět „probudit“ zatáhnutím za vlákno. Vlákno se třením zachytí za osičku a jojo po něm začne „šplhat“ nahoru. Kinetickou energii otáčivého pohybu tělíska v nejnižší poloze (tedy ve spícím stavu) lze výrazně zvýšit, nebude-li se jojo roztáčet z klidu, ale udělíme-li mu určitou počáteční rychlost v_T (směrem dolů) a určitou počáteční úhlovou rychlost ω.

Zabývejme se nyní podrobněji pohybem hračky na základě impulzových vět. Na obr. 12.9a vidíme idealizované jojo se zanedbatelnou tloušťkou vlákna. Obr. 12.9b představuje příslušný silový diagram, v němž je vyznačena pouze osička. Odvodíme vztah pro zrychlení $\boldsymbol{a}$ tělíska. Pro posuvný pohyb použijeme větu o hybnosti ($m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$). V soustavě souřadnic s osou x namířenou svisle vzhůru dostaneme

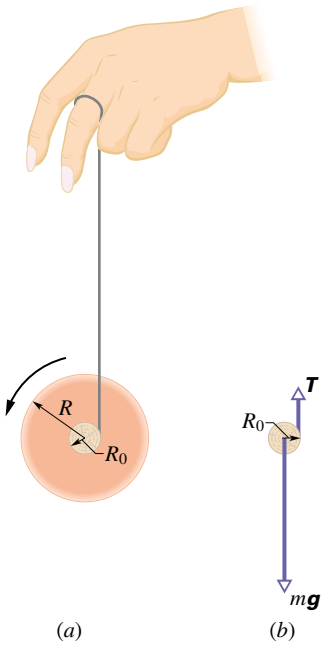
$$ma_x = \sum F_x = T - mg. \qquad (12.17)$$

Symbolem m jsme označili hmotnost tělíska a T představuje velikost tahové síly vlákna.

Pro rotační pohyb máme k dispozici větu o momentu hybnosti ($I\varepsilon = \sum M$), kterou vztáhneme k ose vedené těžištěm joja:

$$I\varepsilon = \sum M = TR_0, \qquad (12.18)$$

kde R_0 je poloměr osičky a I moment setrvačnosti joja vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. Zrychlení $\boldsymbol{a}$ směřuje dolů (složka a_x je tedy *záporná*). Síly působící na jojo jsou, včetně správné orientace, zakresleny v obr. 12.9b. Moment tíhové síly vzhledem k ose vedené těžištěm tělíska je nulový, moment síly tahové je orientován proti směru otáčení hodinových ručiček. Úhlové zrychlení ε směřuje tedy rovněž proti směru otáčení hodinových ručiček (je *kladné*).



(a) (b)

Obr. 12.9 (a) Jojo. Vlákno zanedbatelného průměru je navinuto na osičce o poloměru R_0. (b) Silový diagram tělíska při pádu. Ve skutečnosti nelze průměr vlákna zcela zanedbat, a tak je třeba počítat s efektivní změnou poloměru osičky, v závislosti na okamžité délce navinutého vlákna.

Veličiny a a ε jsou proto spjaty vztahem $a_x = -\varepsilon R_0$. Dosazením $\varepsilon = -a_x/R_0$) do rov. (12.18) dostáváme

$$TR_0 = -\frac{Ia_x}{R_0}.$$

Z tohoto vztahu vyjádříme T a dosadíme do rov. (12.17). Nakonec získáme zrychlení tělíska ve tvaru

$$a_x = -g\,\frac{1}{1 + I/mR_0^2}. \qquad (12.19)$$

Ideální jojo se tedy odvaluje podél vlákna dolů s konstantním zrychlením. Požadujeme-li, aby zrychlení bylo malé, potřebujeme lehké tělísko s velkým momentem setrvačnosti a malým poloměrem osičky.

PŘÍKLAD 12.5

Jojo je vyrobeno ze dvou mosazných kotoučů o tloušťce $b = 8{,}5\,\text{mm}$ a poloměru $R = 3{,}5\,\text{cm}$, spojených krátkou osičkou o poloměru $R_0 = 3{,}2\,\text{mm}$.

(a) Vypočtěte moment setrvačnosti joja vzhledem k jeho rotační ose symetrie. Při výpočtu zanedbejte moment setrvačnosti osičky. Hustota mosazi je $\varrho = 8\,400\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

ŘEŠENÍ: Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k jeho ose symetrie je $\frac{1}{2}mR^2$. S dvojicí souosých kotoučů můžeme

pracovat jako s jediným diskem. Jeho celková hmotnost m, vypočtená pomocí jeho objemu V a hustoty ϱ materiálu, je

$$m = V\varrho = 2\pi R^2 b\varrho = \\ = 2\pi(0{,}035\,\mathrm{m})^2(0{,}008\,5\,\mathrm{m})(8\,400\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}) = \\ = 0{,}550\,\mathrm{kg}.$$

Jeho moment setrvačnosti je pak

$$I = \tfrac{1}{2}mR^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}550\,\mathrm{kg})(0{,}035\,\mathrm{m})^2 = \\ = 3{,}4{\cdot}10^{-4}\,\mathrm{kg\cdot m^2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Vlákno navinuté na osičce má délku $l = 1{,}1\,\mathrm{m}$. Jeho tloušťka je zanedbatelná. Zjistěte, s jakým zrychlením se jojo odvaluje dolů podél vlákna.

ŘEŠENÍ: Podle rov. (12.19) je

$$a_x = -g\,\frac{1}{1 + I/mR_0^2} = \\ = -\frac{(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}{1 + \dfrac{(3{,}4{\cdot}10^{-4}\,\mathrm{kg\cdot m^2})}{(0{,}550\,\mathrm{kg})(0{,}003\,2\,\mathrm{m})^2}} = \\ = -0{,}16\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vektor zrychlení směřuje dolů a je nezávislý na tom, zda jojo právě klesá či stoupá.

Všimněme si, že v rov. (12.19) vystupuje parametr $\beta = I/mR_0^2$, definovaný v tab. 12.1. V našem příkladu má tento parametr ($\beta = 60$) hodnotu mnohem větší než pro tělesa uvedená v citované tabulce. Zrychlení joja je proto velmi malé. Odpovídá například valení prstence po nakloněné rovině s úhlem sklonu pouhých 1,9°!

(c) Jak velkou tahovou silou působí na tělísko joja jeho vlákno?

ŘEŠENÍ: Tahovou sílu snadno vypočteme z rov. (12.17). Stačí dosadit za a_x výraz (12.19). Po malé úpravě dostaneme pro T vztah

$$T = \frac{mg}{1 + mR_0^2/I}. \qquad (12.20)$$

Tahová síla vlákna je tedy menší než síla tíhová. Pro číselné údaje uvedené v zadání úlohy dostaneme

$$T = \frac{(0{,}550\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}{1 + (0{,}550\,\mathrm{kg})(0{,}003\,2\,\mathrm{m})^2/(3{,}4{\cdot}10^{-4}\,\mathrm{kg\cdot m^2})} = \\ = 5{,}3\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

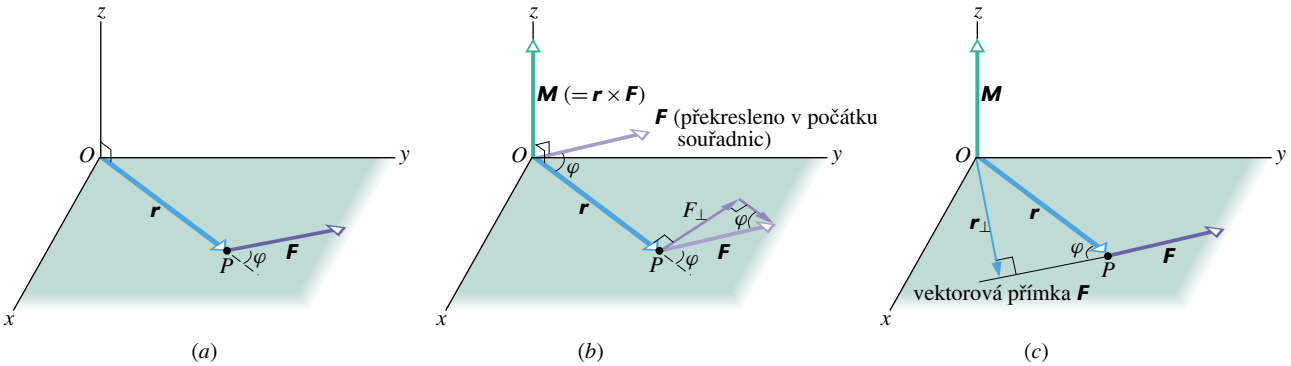
Z výsledku je patrné, že ani tahová síla vlákna nezávisí na okamžitém směru pohybu joja.

12.3 JEŠTĚ JEDNOU MOMENT SÍLY

V kap. 11 jsme definovali moment síly vzhledem k ose otáčení tuhého tělesa. Tato definice nebyla zcela obecná. Uvažovali jsme totiž výhradně o otáčivém pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy, kdy se jednotlivé částice tělesa pohybují po kružnicích se středy na ose otáčení, ležících v rovinách k této ose kolmých. Další omezení, které umožňovalo definovat moment síly *vzhledem k ose*, spočívalo v předpokladu, že vektorové přímky sil působících na těleso jsou kolmé k ose otáčení.

Definici momentu síly však dokážeme zobecnit tak, aby byla použitelná i pro takové případy pohybu tělesa, kdy tvar trajektorií jednotlivých částic není takto omezen. Moment síly budeme nyní vztahovat k pevnému *bodu*.

Obr. 12.10a znázorňuje silové působení na částici P v okamžiku, kdy je v souřadnicové rovině xy. Polohový vektor částice je $\boldsymbol{r}$. Na částici působí jediná síla $\boldsymbol{F}$, která leží



Obr. 12.10 Definice momentu síly. (a) Síla $\boldsymbol{F}$, působící na částici v bodě P, leží v souřadnicové rovině xy. (b) Moment této síly vzhledem k bodu O je $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Podle pravidel pro vektorový součin je tento vektor kolmý k rovině xy a má směr kladné osy z. Jeho velikost lze vyjádřit vztahem $rF_\perp$ (obr. b) nebo $r_\perp F$ (obr. c).

v daném okamžiku rovněž v rovině xy. Momentem této síly $\boldsymbol{M}$ vzhledem k pevnému bodu O rozumíme vektorovou veličinu definovanou vztahem

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \qquad (12.21)$$

K výpočtu vektorového součinu můžeme samozřejmě použít pravidel shrnutých v odst. 3.7. Abychom určili směr vektoru $\boldsymbol{M}$, posuneme vektor $\boldsymbol{F}$ tak, aby jeho počáteční bod splynul s bodem O. (Velikost ani směr vektoru při tomto posunutí nesmíme pochopitelně měnit.) Počáteční body vektorů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{r}$ jsou teď totožné (obr. 12.10b). Nyní již použijeme pravidlo pravé ruky pro vektorový součin (obr. 3.20a): Prsty pravé ruky směřují od vektoru $\boldsymbol{r}$ (první činitel ve vektorovém součinu) k vektoru $\boldsymbol{F}$ (druhý činitel). Natažený palec ukazuje směr vektoru $\boldsymbol{M}$. Vektor $\boldsymbol{M}$ na obr. 12.10b je rovnoběžný s kladným směrem osy z.

Pro velikost vektoru $\boldsymbol{M}$ platí obecný vztah (3.20) ($c = ab\sin\varphi$), tj.

$$M = rF\sin\varphi, \qquad (12.22)$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$. Z obr. 12.10b, c je zřejmé, že vztah (12.22) je možné zapsat ještě dvěma dalšími ekvivalentními způsoby:

$$M = rF_\perp, \qquad (12.23)$$

kde $F_\perp = F\sin\varphi$ je složka vektoru $\boldsymbol{F}$ do směru kolmého k $\boldsymbol{r}$,

$$M = r_\perp F, \qquad (12.24)$$

kde $r_\perp = r\sin\varphi$ je rameno síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k bodu O (vzdálenost bodu O od vektorové přímky síly $\boldsymbol{F}$).

PŘÍKLAD 12.6

Na částici P na obr. 12.11a působí tři síly o stejné velikosti 2,0 N. Částice je právě v souřadnicové rovině xz a její polohový vektor $\boldsymbol{r}$ je zadán svou velikostí $r = 3{,}0$ m a úhlem $\theta = 30°$. Síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ mají směr souřadnicových os x, y a z. Vypočtěte jejich momenty vzhledem k počátku O soustavy souřadnic.

ŘEŠENÍ: Obr. 12.11b, c představují pohled na rovinu xz. Aby bylo možné snadněji vyznačit úhly, které svírají síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$, jsou síly překresleny tak, aby jejich počáteční body splynuly s bodem O. Úhel mezi silou $\boldsymbol{F}_3$ a vektorem $\boldsymbol{r}$ je 90°. Pomocí rov. (12.22) vypočteme velikosti jednotlivých momentů sil:

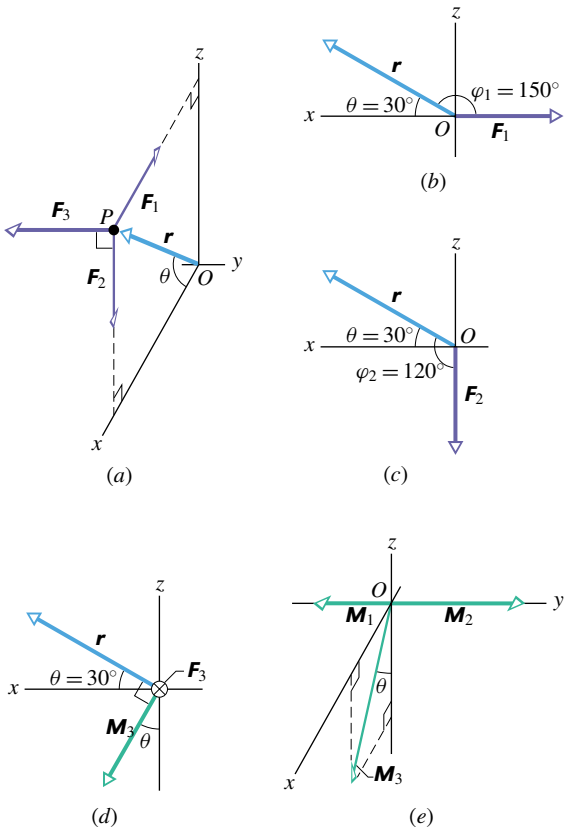
$$M_1 = rF_1\sin\varphi_1 = (3{,}0\,\mathrm{m})(2{,}0\,\mathrm{N})\sin 150° = 3{,}0\,\mathrm{N{\cdot}m},$$

$$M_2 = rF_2\sin\varphi_2 = (3{,}0\,\mathrm{m})(2{,}0\,\mathrm{N})\sin 120° = 5{,}2\,\mathrm{N{\cdot}m}$$

a

$$M_3 = rF_3\sin\varphi_3 = (3{,}0\,\mathrm{m})(2{,}0\,\mathrm{N})\sin 90° = 6{,}0\,\mathrm{N{\cdot}m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Jejich směry určíme pomocí pravidla pravé ruky: pravou ruku položíme na obrázek tak, aby její prsty směřovaly od vektoru $\boldsymbol{r}$ k vektoru $\boldsymbol{F}$ a dlaň obepínala *menší* z obou možných úhlů. Na obr. 12.11d jsme sílu $\boldsymbol{F}_3$ znázornili křížkem v kroužku ⊗. Tento symbol vyjadřuje skutečnost, že síla $\boldsymbol{F}_3$ směřuje *do obrázku*. (Symbol ⊗ připomíná pohled na šíp zezadu). Kdyby síla $\boldsymbol{F}_3$ směřovala *z obrázku* k pozorovateli, označili bychom ji symbolem ⊙ (pohled na šíp zepředu). Pomocí pravidla pravé ruky určíme směr vektoru $\boldsymbol{M}_3$. Všechny momenty sil jsou vyznačeny v obr. 12.11e.



Obr. 12.11 Příklad 12.6. (a) Na částici P působí tři síly rovnoběžné se souřadnicovými osami. Úhel φ_1 mezi polohovým vektorem částice a silou $\boldsymbol{F}_1$ je vyznačen v obrázku (b), úhel φ_2, který svírá s polohovým vektorem částice síla $\boldsymbol{F}_2$, je zadán v obr. (c). (Zadání úhlů je potřebné pro výpočet momentů sil.) (d) Moment třetí síly $\boldsymbol{M}_3$ je kolmý k vektorům $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}_3$. Síla $\boldsymbol{F}_3$ je kolmá k rovině nákresu a míří do obrázku). (e) Momenty sil působících na částici P, vztažené k bodu O.

RADY A NÁMĚTY

Bod 12.1: *Vektorové součiny a momenty sil*

Rov. (12.21) představuje první praktické použití vektorového součinu. Vraťte se k odst. 3.7, kde jsou shrnuta pravidla pro výpočet vektorového součinu, a osvěžte si je. Citovaný odstavec obsahuje i výčet chyb, kterých bychom se při určování směru vektorového součinu mohli dopustit (bod 3.5).

Nezapomeňme, že moment síly je třeba vztahovat *k danému bodu*, který musí být předem pevně zvolen. V opačném případě nemá výpočet momentu síly smysl. Změníme-li vztažný bod, může se změnit jak velikost, tak i směr momentu síly. V př. 12.6 jsme počítali momenty tří sil vzhledem k počátku O soustavy souřadnic. Pokud bychom momenty těchto sil vztáhli přímo k bodu P, byly by nulové.

KONTROLA 3: Polohový vektor částice $\boldsymbol{r}$ je rovnoběžný s kladným směrem osy z. Určete směr jediné síly působící na částici, víte-li, že její moment vzhledem k počátku soustavy souřadnic je (a) nulový, (b) míří proti směru osy x, (c) míří proti směru osy y.

12.4 MOMENT HYBNOSTI

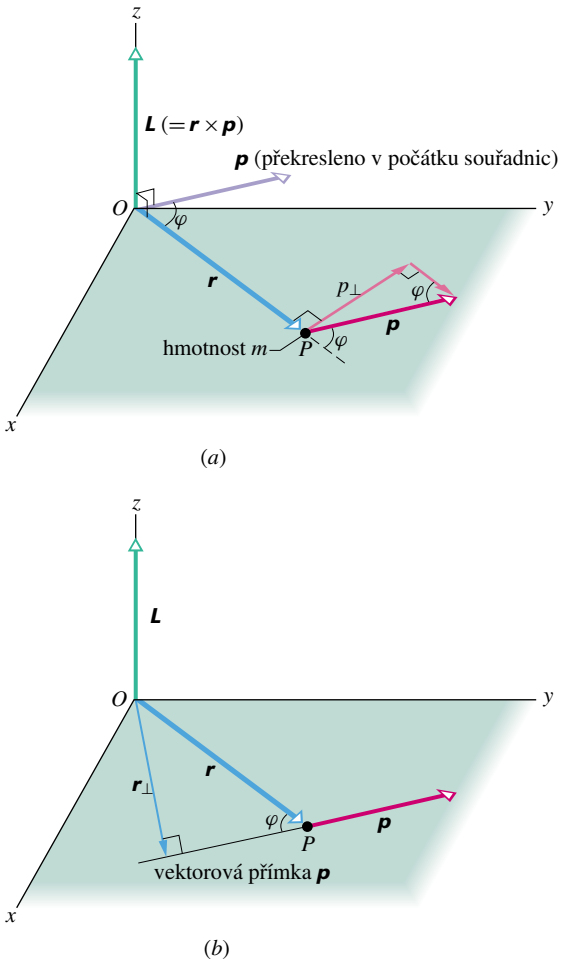
Celá řada veličin popisujících posuvný pohyb tělesa má své „partnerské protějšky“ vztahující se k pohybu otáčivému. Také hybnost má jako svůj protějšek veličinu, která má pro popis otáčivého pohybu analogický význam jako hybnost pro popis pohybu posuvného. Je jí **moment hybnosti**. Na obr. 12.12 je znázorněna částice P o hybnosti $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Částice je v daném okamžiku v souřadnicové rovině xy a její hybnost je s touto rovinou rovnoběžná. Její moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ vzhledem k počátku O je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}), \qquad (12.25)$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor částice vzhledem k bodu O.

Porovnáme-li vztahy (12.21) a (12.25), zjistíme, že vztah hybnosti a jejího momentu je stejný jako vztah síly a momentu síly. Jednotkou momentu hybnosti v soustavě SI je $\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}$, tj. J·s.

Směr vektoru momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ určíme podle obrázku 12.12. Vektor $\boldsymbol{p}$ posuneme tak, aby jeho počáteční bod splynul s bodem O. Použijeme pravidlo pravé ruky: prsty směřují od $\boldsymbol{r}$ k $\boldsymbol{p}$, napjatý palec ukazuje směr vektoru $\boldsymbol{L}$, v tomto případě je rovnoběžný s kladnou osou z. Takto určený směr odpovídá otáčení polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ kolem osy z proti směru otáčení hodinových ručiček. Kdyby vektor $\boldsymbol{L}$ směřoval proti směru osy z, otáčel by se polohový vektor $\boldsymbol{r}$ kolem ní ve směru chodu hodinových ručiček.



Obr. 12.12 Definice momentu hybnosti. Hybnost $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ částice P o hmotnosti m leží v rovině xy. Moment hybnosti částice vzhledem k počátku soustavy souřadnic O je $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. Podle pravidla pravé ruky je to vektor rovnoběžný s kladným směrem osy z. (a) Velikost momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ lze vyjádřit vztahem $L = rp_\perp = rmv_\perp$, neboli (b) $L = r_\perp p = r_\perp mv$.

Velikost vektoru $\boldsymbol{L}$ určíme pomocí obecného vztahu (3.20). Platí

$$L = rmv \sin\varphi, \qquad (12.26)$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$. Situaci lze jednoduše zakreslit a vyznačit i úhel φ, jestliže počáteční body vektorů splývají. Z obr. 12.12a, b je vidět, že pro velikost momentu hybnosti (12.26) lze použít i jiného zápisu:

$$L = rp_\perp = rmv_\perp, \qquad (12.27)$$

kde $p_\perp$ je složka vektoru $\boldsymbol{p}$ ve směru kolmém k $\boldsymbol{r}$ a $p_\perp = mv_\perp$. Další ekvivalentní vyjádření velikosti momentu

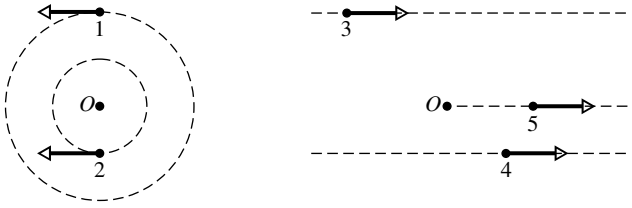
hybnosti má tvar

$$L = r_\perp p = r_\perp m v, \qquad (12.28)$$

kde $r_\perp$ je vzdálenost bodu O od vektorové přímky vektoru $\boldsymbol{p}$.

Podobně jako u momentu síly má výpočet momentu hybnosti smysl pouze v případě, že je zadán pevný vztažný bod. Uvědomme si také, že kdyby částice na obr. 12.12 neležela v rovině xy nebo kdyby vektor její hybnosti nebyl s touto rovinou rovnoběžný, nebyl by moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ rovnoběžný s osou z. Vektor momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ je vždy kolmý k rovině určené vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$.

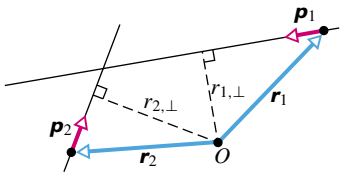
KONTROLA 4: Částice 1 a 2 na obrázku (a) obíhají kolem bodu O v opačných směrech po kružnicích s poloměry 2 m a 4 m. Částice 3 a 4 na obrázku (b) se pohybují ve stejném směru, po přímkách, jejichž vzdálenosti od bodu O jsou rovněž 2 m a 4 m. Částice 5 se pohybuje po přímce procházející bodem O. Všechny částice mají stejnou hmotnost i stejnou velikost rychlosti. Jejich pohyb je ve všech případech rovnoměrný. (a) Seřaďte je sestupně podle velikosti jejich momentů hybnosti vzhledem k bodu O. (b) Rozhodněte, pro které z nich má moment hybnosti vzhledem k bodu O souhlasný směr se směrem otáčení hodinových ručiček.



(a) (b)

PŘÍKLAD 12.7

Na obr. 12.13 je pohled shora na dvě částice pohybující se s konstantními hybnostmi po vodorovných přímkových drahách. Částice 1, jejíž hybnost má velikost $p_1 = 5{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, je právě v místě o polohovém vektoru $\boldsymbol{r}_1$ a mine bod O ve vzdálenosti 2,0 m. Velikost hybnosti částice 2 je v daném okamžiku $p_2 = 2{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a polohový vektor $\boldsymbol{r}_2$. Částice mine bod O ve vzdálenosti 4,0 m. Vypočtěte výsledný moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ této dvoučásticové soustavy vzhledem k bodu O.



Obr. 12.13 Příklad 12.7. Dvě částice míjejí bod O.

ŘEŠENÍ: Nejprve vypočtěme momenty hybnosti $\boldsymbol{L}_1$ a $\boldsymbol{L}_2$ jednotlivých částic. Pro výpočet velikosti vektoru $\boldsymbol{L}_1$ zvolíme rov. (12.28), do níž dosadíme $r_{1,\perp} = 2{,}0\,\mathrm{m}$ a $p_1 = 5{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$:

$$L_1 = r_{1,\perp} p_1 = (2{,}0\,\mathrm{m})(5{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}) = 10\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}.$$

Směr vektoru $\boldsymbol{L}_1$ je zřejmý z rov. (12.25) a pravidla pravé ruky pro vektorový součin. Vektorový součin $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}_1$ je kolmý k rovině obrázku a směřuje k pozorovateli. Tento směr označíme za kladný v souladu se směrem otáčení vektoru $\boldsymbol{r}_1$ proti směru chodu hodinových ručiček.

Podobně získáme velikost momentu hybnosti $\boldsymbol{L}_2$ částice 2:

$$L_2 = r_{2,\perp} p_2 = (4{,}0\,\mathrm{m})(2{,}0\,\mathrm{kg\,m{\cdot}s^{-1}}) = 8{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}.$$

Vektorový součin $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{p}_2$ je opět kolmý rovině obrázku, tentokrát však směřuje od pozorovatele. Tento směr je záporný, neboť odpovídá otáčení vektoru $\boldsymbol{r}_2$ ve směru hodinových ručiček.

Výsledný moment hybnosti soustavy má tedy velikost

$$L = L_1 + L_2 = (+10\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}) + (-8{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}) = +2{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kladné znaménko získané hodnoty odpovídá skutečnosti, že vektor výsledného momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$, kolmý k rovině obrázku, směřuje k pozorovateli.

12.5 VĚTA O MOMENTU HYBNOSTI

V předchozích úvahách jsme se podrobně zabývali veličinami popisujícími posuvný a otáčivý pohyb a zjistili jsme, že všechny důležité charakteristiky posuvného pohybu mají své protějšky, které odpovídají popisu pohybu otáčivého. Můžeme proto celkem přirozeně očekávat, že pro časovou změnu momentu hybnosti částice $\boldsymbol{L}$ a výsledný moment $\boldsymbol{M}$ všech sil, které na ni působí, bude platit nějaká obdoba druhého Newtonova zákona. Druhý Newtonův zákon, zapsaný pro naši částici ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}, \qquad (12.29)$$

vyjadřuje souvislost časové změny její hybnosti a výslednice těchto sil. Tušíme, že hledaný „protějšek“ druhého Newtonova zákona bude mít obdobný tvar:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}. \qquad (12.30)$$

Tento vztah představuje analogii druhého Newtonova zákona v úhlových veličinách. Slovy jej lze vyjádřit takto:

Časová změna momentu hybnosti částice je rovna vektorovému součtu momentů všech sil na ni působících.

Rov. (12.30) má smysl pouze tehdy, jsou-li silové momenty obsažené v součtu $\boldsymbol{M}$ a moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ vztaženy k témuž bodu.

Odvození věty o momentu hybnosti

Základem výpočtu je definiční vztah (12.25) pro moment hybnosti. Platí

$$\boldsymbol{L} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}),$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor částice a $\boldsymbol{v}$ je její rychlost. Derivováním* obou stran rovnice podle času dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = m\left(\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{v}\right). \qquad (12.31)$$

Ve výrazu $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ poznáváme zrychlení částice $\boldsymbol{a}$, zatímco $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ je její rychlost $\boldsymbol{v}$. Rov. (12.31) lze tedy upravit do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}).$$

Poněvadž je $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ (vektor $\boldsymbol{v}$ svírá sám se sebou nulový úhel), dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a}.$$

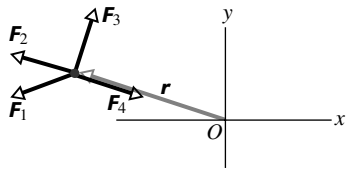
Vzhledem k platnosti druhého Newtonova zákona ($m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$) můžeme výraz $m\boldsymbol{a}$ nahradit vektorovým součtem sil působících na částici. Nakonec je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \left(\sum \boldsymbol{F}\right) = \sum(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}). \qquad (12.32)$$

Podle rov. (12.21) představuje výraz $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ moment síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k bodu O. Poslední úpravou rov. (12.32) tak dostáváme požadovanou „úhlovou“ analogii druhého Newtonova zákona

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}.$$

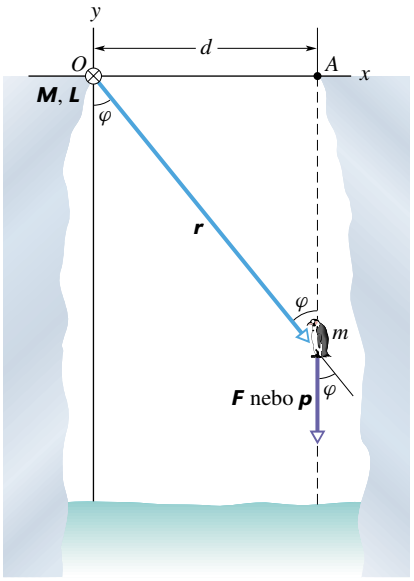
KONTROLA 5: Na obrázku je znázorněna částice, jejíž poloha je v daném okamžiku určena vektorem $\boldsymbol{r}$. Na částici působí síla, která může mít některý ze čtyř vyznačených směrů, ležících v rovině xy. Síla udílí částici zrychlení $\boldsymbol{a}$. (a) Seřaďte možné směry podle odpovídající velikosti časové derivace momentu hybnosti částice $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ vzhledem k bodu O. (b) Rozhodněte, pro které z nich je tato derivace (vektorová veličina) nesouhlasně rovnoběžná s osou z.



* Při derivování vektorového součinu nesmíme zaměnit pořadí vektorů v součinu.

PŘÍKLAD 12.8

Tučňák o hmotnosti m stál na okraji jámy v místě A a spadl dolů. Vodorovná vzdálenost bodu A od počátku O soustavy souřadnic je d (obr. 12.14).



Obr. 12.14 Příklad 12.8. Tučňák o hmotnosti m volně padá z bodu A na okraji jámy. Moment tíhové síly $\boldsymbol{M}$ i moment hybnosti tučňáka vztažené k bodu O jsou kolmé k rovině obrázku a směřují do nákresny.

(a) Vyjádřete moment hybnosti padajícího tučňáka vzhledem k bodu O v obecném okamžiku během jeho pádu.

ŘEŠENÍ: Moment hybnosti jako vektor vyjádříme pomocí rov. (12.25)) ($\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$). Jeho velikost je dána vztahem (12.26), tj.

$$L = rmv \sin\varphi.$$

Veličiny r a φ se během pádu tučňáka samozřejmě mění, výraz $r \sin\varphi$ však má v každém okamžiku stálou hodnotu d. Pro rychlost pádu platí $v = gt$. Pro velikost momentu hybnosti L tak dostáváme

$$L = mgtd. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (12.33)$$

Vektor momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ je kolmý k rovině vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$, vyznačených v obr. 12.14, a podle pravidla pravé ruky směřuje za nákresnu. Zvolme souřadnicovou osu z tak, aby byla orientována nesouhlasně s tímto směrem. V obrázku pak vyznačíme vektor $\boldsymbol{L}$ křížkem v kroužku $\otimes$, umístěným v počátku soustavy souřadnic. S časem se mění pouze velikost vektoru $\boldsymbol{L}$, jeho směr a orientace se zachovávají.

(b) Vypočtěte moment tíhové síly $m\boldsymbol{g}$, působící na tučňáka, vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

ŘEŠENÍ: Moment síly je dán vztahem (12.21) ($\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$), jeho velikost určíme pomocí rov. (12.22). Platí

$$M = rF \sin\varphi,$$

kde $F = mg$ a $r \sin\varphi = d$. Dostáváme tedy

$$M = mgd = \text{konst.} \quad \text{(Odpověď)} \qquad (12.34)$$

Vidíme, že velikost momentu síly je součinem velikosti síly mg a jejího ramene d vzhledem k bodu O. Vektor $\boldsymbol{M}$ je kolmý k rovině tvořené vektory $\boldsymbol{r}$ a $m\boldsymbol{g}$ a podle pravidla pravé ruky směřuje za nákresnu (obr. 12.14). Je tedy souhlasně rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{L}$. Vztah (12.34) lze získat také derivováním vztahu (12.33) podle času a dosazením získaného výsledku do rov. (12.30).

Všimněme si, že vektory $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{L}$ podstatným způsobem závisí na volbě vztažného bodu O. Kdyby tučňák padal z bodu O, platilo by $d = 0$ a moment síly i moment hybnosti by byly nulové.

12.6 MOMENT HYBNOSTI SOUSTAVY ČÁSTIC

Při diskusích o otáčivém pohybu jsme se prozatím omezili pouze na pohyb tuhého tělesa. Nyní rozšíříme naše úvahy na případ obecné soustavy částic a jejich pohyb budeme popisovat vzhledem k pevně zvolenému vztažnému bodu, počátku soustavy souřadnic. „Soustava částic“ je již dostatečně obecným modelem fyzikálního objektu a jako zvláštní případ zahrnuje i tuhé těleso. Celkový moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ soustavy je definován jako vektorový součet momentů hybnosti $\boldsymbol{L}_i$ jednotlivých částic:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_3 + \ldots + \boldsymbol{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i, \qquad (12.35)$$

kde index $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ probíhá jednotlivé částice.

Momenty hybnosti jednotlivých částic se mohou s časem měnit buď vlivem jejich vzájemného působení, nebo vlivem sil, jimiž na částice soustavy působí její okolí. Časovou změnu momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ vypočteme jako derivaci výrazu na pravé straně rov. (12.35):

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t}. \qquad (12.36)$$

Podle rov. (12.30) je derivace momentu hybnosti i-té částice dána vektorovým součtem momentů sil, které na ni působí, tj. $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i/\mathrm{d}t = \sum \boldsymbol{M}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$. Symbolem $\boldsymbol{r}_i$ jsme označili polohový vektor i-té částice a $\boldsymbol{F}_i$ výslednici všech sil, kterými na ni působí její okolí, tvořené jednak ostatními částicemi soustavy, jednak objekty, které náleží do okolí soustavy jako celku. Pravá strana rov. (12.36) je tedy vektorovým součtem momentů *všech sil*, působících na jednotlivé částice soustavy.

Zaměřme se nyní na výpočet tohoto součtu. Momenty sil působících na částice soustavy můžeme rozdělit do dvou skupin. První skupinu tvoří momenty sil *vnitřních*, tj. momenty sil vzájemného působení částic. Druhá skupina obsahuje momenty *vnějších* sil. Vnějšími silami působí na částice soustavy její okolí, tj. objekty, které do ní nejsou zahrnuty. Všimněme si nejprve momentů vnitřních sil. Vyberme libovolnou dvojici částic soustavy. Síly, popisující vzájemné působení částic této dvojice, představují akci a reakci. Podle třetího Newtonova zákona jsou stejně velké, avšak opačně orientované. Jejich celkový příspěvek do *výslednice sil* je tedy samozřejmě nulový. Jak je tomu však s jejich momenty? Působí-li tyto síly ve směru spojnice interagujících částic, tj. jsou-li centrální, pak mají společnou vektorovou přímku, a tedy i společné rameno vzhledem k vztažnému bodu. Jejich momenty jsou stejně velké, avšak opačně orientované. Mají nulový součet a jejich „společný“ příspěvek k součtu všech momentů na pravé straně rov. (12.36) je proto rovněž nulový. Časová derivace celkového momentu hybnosti soustavy je dána výhradně momenty *vnějších* sil působících na částice soustavy:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_{\text{ext}} \quad \text{(pro soustavu částic)}. \qquad (12.37)$$

Rov. (12.37) je matematickým zápisem **věty o momentu hybnosti** (soustavy částic) neboli **druhé impulzové věty** pro soustavu částic. Slovy ji můžeme vyjádřit velmi jednoduše: Časová změna *momentu hybnosti* soustavy částic je dána vektorovým součtem momentů *vnějších sil* působících na částice této soustavy.

Všimněme si její fyzikální interpretace: rov. (12.30), platná pro jednotlivou částici, vyplývá přímo z druhého Newtonova zákona, a má analogický tvar v úhlových veličinách. Věta o momentu hybnosti, která je důsledkem

druhého a třetího Newtonova zákona a předpokladu vnitřních centrálních sil, je analogií rov. (12.30) pro soustavu částic. Můžeme ji interpretovat jako pohybovou rovnici pro případ rotačního pohybu soustavy, a tedy jako „protějšek“ věty o hybnosti (kap. 11), popisující dynamiku pohybu translačního.

Připomeňme, že rov. (12.37) platí za předpokladu, že jsou momenty sil i moment hybnosti soustavy vztaženy k *témuž bodu*, pevnému v jisté inerciální vztažné soustavě. Jedinou výjimkou z požadavku inerciálnosti je *těžišťová* vztažná soustava, v níž je zápis věty o momentu hybnosti stejný jako v kterékoliv soustavě inerciální. Těžišťová soustava* je speciálním případem obecně neinerciální vztažné soustavy. Jejím počátkem je těžiště soustavy částic, resp. tělesa a směr jejích os je pevný vzhledem k jisté inerciální vztažné soustavě. (Těžišťová soustava je tedy spjata s *translačním pohybem* tělesa, rotační pohyb však spolu s ním nevykonává.)

12.7 MOMENT HYBNOSTI TUHÉHO TĚLESA VZHLEDEM K PEVNÉ OSE

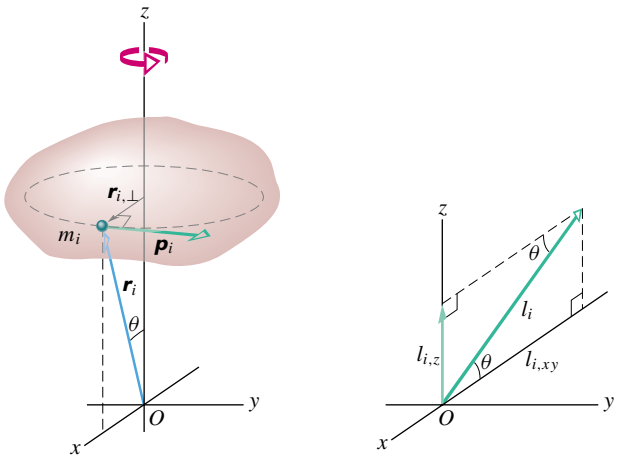
Otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy je sice speciálním, avšak v praktických úlohách velmi častým, případem pohybu obecné soustavy částic. Jistě má smysl položit si otázku, zda i věta o momentu hybnosti bude mít v tomto případě speciální tvar. Očekáváme pochopitelně, že se její zápis výrazně zjednoduší, neboť při rotaci tuhého tělesa kolem pevné osy obíhají všechny jeho částice po kružnicích stejnou úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$. To nám umožní vyjádřit pomocí veličiny $\boldsymbol{\omega}$ moment hybnosti tělesa vzhledem k ose otáčení. Tuhé těleso na obr. 12.15, složené z částic o hmotnostech m_i, se otáčí kolem osy z konstantní úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$.

Moment hybnosti tělesa je, jak již víme, součtem momentů hybnosti jeho jednotlivých částic. Na obr. 12.15 je znázorněna jedna z nich, které jsme přisoudili index i a hmotnost m_i. Při otáčení tělesa obíhá tato částice po kružnici, jejíž střed leží na ose otáčení (v obrázku osa z) a jejíž rovina je k této ose kolmá. Poloha částice je vzhledem k počátku O soustavy souřadnic určena vektorem $\boldsymbol{r}_i$. Poloměr její kruhové trajektorie $r_{i,\perp}$ je roven její vzdálenosti od osy z, která se s časem nemění.

Podle rov. (12.26) má moment hybnosti i-té částice vzhledem k bodu O velikost

$$L_i = (r_i)(p_i)(\sin 90^\circ) = (r_i)(m_i v_i),$$

kde p_i a v_i představují velikost hybnosti a rychlosti částice. Úhel mezi vektory $\boldsymbol{v}_i$ a $\boldsymbol{p}_i$ je 90°. Moment hybnosti částice $\boldsymbol{L}_i$ je kolmý k vektorům $\boldsymbol{r}_i$ a $\boldsymbol{p}_i$. Podle obr. 12.15b jej můžeme vyjádřit jako součet jeho průmětu do osy otáčení (osa z) a průmětu do roviny kolmé k ose otáčení (rovina xy). Platí $\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{L}_{i,z} + \boldsymbol{L}_{i,xy}$. Stejným způsobem lze rozložit momenty hybnosti všech částic tělesa, a tedy i celkový moment hybnosti soustavy:



Obr. 12.15 (a) Tuhé těleso se otáčí kolem osy z úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$. Jedna z jeho částic hmotnosti m_i opisuje kolem osy z kružnici o poloměru $r_{i,\perp}$. Její hybnost je $\boldsymbol{p}_i$ a polohový vektor vzhledem k počátku soustavy souřadnic O je označen jako $\boldsymbol{r}_i$. Obrázek zachycuje polohu částice v okamžiku, kdy je vektor $\boldsymbol{r}_{i,\perp}$ rovnoběžný s osou x. (b) Moment hybnosti i-té částice vzhledem k bodu O je označen symbolem $\boldsymbol{L}_i$, jeho průmět do osy z je $\boldsymbol{L}_{i,z}$.

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_z + \boldsymbol{L}_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{L}_{i,z} + \boldsymbol{L}_{i,xy}).$$

Momentem hybnosti tělesa vzhledem k ose otáčení nazveme průmět celkového momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ do této osy. V našem případě, kdy je osou otáčení osa z, je tento průmět určen z-ovou složkou celkového momentu hybnosti soustavy, tj.

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{i,z} = \sum_{i=1}^{n} L_i \sin\theta_i = \sum_{i=1}^{n} (r_i \sin\theta_i)(m_i v_i) = \\ = \sum_{i=1}^{n} r_{i,\perp} m_i v_i .$$

Vzhledem k platnosti vztahu $v_i = \omega r_{i,\perp}$, můžeme psát

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{i,z} = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_{i,\perp} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\omega r_{i,\perp}) r_{i,\perp} = \\ = \omega \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_{i,\perp}^2 \right). \qquad (12.38)$$

* Setkali jsme se s ní už v př. 9.10.

Při úpravě posledního výrazu jsme využili skutečnosti, že úhlová rychlost ω všech částic tuhého tělesa je stejná a vytkli jsme ji před součet.

Ve výrazu $\sum m_i r_{i,\perp}^2$ v rov. (12.38) poznáváme moment setrvačnosti tělesa vzhledem k pevné ose (rov. (11.24)). Rov. (12.38) můžeme tedy upravit do tvaru

$$L_z = I\omega, \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{L}_z = I\boldsymbol{\omega} \qquad \begin{matrix}\text{(moment hybnosti}\\ \text{tuhého tělesa}\\ \text{vzhledem k pevné ose).}\end{matrix} \qquad (12.39)$$

Moment hybnosti v rov. (12.39) se vztahuje *k ose otáčení tuhého tělesa*. Budeme-li mít tuto skutečnost stále na paměti, můžeme index z i vynechat. Symbol L pak ovšem nesmíme zaměnit s velikostí momentu hybnosti vztaženého k *pevnému bodu* O. Moment setrvačnosti I je samozřejmě rovněž vztažen k ose otáčení.

Promítneme-li do osy otáčení i výsledný moment vnějších sil působících na naše těleso, dostaneme odpovídající průmět rov. (12.37), vyjadřující větu o momentu hybnosti:

$$I\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_z, \quad \text{tj.} \quad I\omega = M_z.$$

Tento vztah se často nazývá **věta o momentu hybnosti** (**druhá impulzová věta**) pro otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy.

Jeho mimořádně jednoduchý tvar nás snad ani příliš nepřekvapuje. Je však možné zapsat tak prostým způsobem i průmět pohybové rovnice do roviny kolmé k ose otáčení? Abychom na tuto otázku odpověděli co nejpřesněji, pokusme se vyjádřit odpovídající průmět momentu hybnosti tělesa. Platí

$$\boldsymbol{L}_{i,xy} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_{i,xy} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{L}_i - \boldsymbol{L}_{i,z}) = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i,\perp}) \times \boldsymbol{p}_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_{i,z} \times \boldsymbol{p}_i) = \sum_{i=1}^{n} (m_i \boldsymbol{r}_{i,z} \times \boldsymbol{v}_i).$$

Průměty momentů hybnosti jednotlivých částic do roviny kolmé k ose rotace, tj. vektory $\boldsymbol{L}_{i,xy} = m_i \boldsymbol{r}_{i,z} \times \boldsymbol{v}_i$, mají velikosti $m_i r_i v_i |\cos\theta_i \sin\theta_i| = m_i r_i^2 \omega |\cos\theta_i \sin\theta_i|$. Jejich směry jsou však různé. Abychom je mohli sečíst, musíme je ještě rozložit do směrů os x a y. Označíme-li symbolem φ_i úhel, který svírá vektor $\boldsymbol{r}_{\perp,i}$ se směrem osy x, dostaneme:

$$L_x = -\sum_{i=1}^{n} \big(m_i r_i^2 |\cos\theta_i \sin\theta_i| \cos\varphi_i\big)\omega = I_x \omega,$$
$$L_y = -\sum_{i=1}^{n} \big(m_i r_i^2 |\cos\theta_i \sin\theta_i| \sin\varphi_i\big)\omega = I_y \omega.$$

Všimněme si, že hodnoty $\sin\varphi_i, \cos\varphi_i, \sin\theta_i, \cos\theta_i$ v předchozích součtech vyjadřujících veličiny I_x a I_y mohou být jak kladné, tak záporné. Při vhodném rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k ose otáčení se tedy může stát, že se veličiny I_x a I_y anulují. Veličiny I_x a I_y, v nichž je informace o symetrii či nesymetrii rozložení hmotnosti obsažena, se nazývají **deviační momenty** tělesa vzhledem k ose otáčení. Jsou-li nenulové, pak setrvačník rotující kolem upevněné osy silně namáhá svá ložiska (kolo „hází“ a „vymílá“ ložisko). Vyvažování kol automobilu olůvky má tedy za cíl vynulovat I_x a I_y.

Je-li hmotnost tělesa vzhledem k ose otáčení vhodně rozložena, průměty momentů hybnosti jednotlivých částic do roviny kolmé k ose otáčení se vyruší. Hovoříme pak o tzv. symetrickém rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k ose rotace. (Jednoduchým příkladem je těleso tvořené dvěma stejně hmotnými částicemi umístěnými souměrně vzhledem k ose otáčení, nebo těleso složené ze dvou částic různé hmotnosti, umístěných na protilehlých stranách osy rotace ve vzdálenostech, jejichž poměr je převrácenou hodnotou poměru hmotností částic.) V takovém případě je průmět momentu hybnosti tělesa do roviny kolmé k ose otáčení nulový. Moment hybnosti tělesa vzhledem k ose otáčení splývá s celkovým momentem hybnosti a platí $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$.

Tabulka 12.2 **Posuvný a otáčivý pohyb, pokračování tab. 11.3**

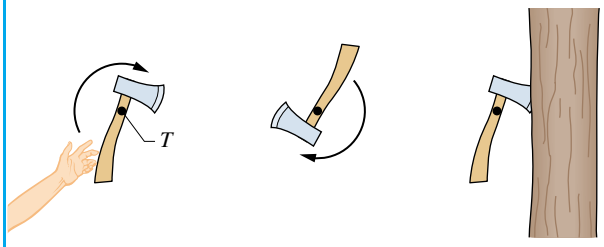
POSUVNÝ POHYB V DANÉM SMĚRU		OTÁČIVÝ POHYB KOLEM PEVNÉ OSY	
síla	$\boldsymbol{F}$	moment síly	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
hybnost	$\boldsymbol{p}$	moment hybnosti	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$
hybnost[a]	$\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{p}_i$	moment hybnosti[a]	$\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{L}_i$
hybnost[a]	$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_T$	moment hybnosti[b]	$L = I\omega$
věta o hybnosti[a]	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$	věta o momentu hybnosti[a]	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}$
zákon zachování[c]	$\boldsymbol{P} = \text{konst.}$	zákon zachování[c]	$\boldsymbol{L} = \text{konst.}$

[a] Pro soustavu částic i tuhé těleso jako její speciální případ.
[b] Pro tuhé těleso otáčející se kolem pevné osy. L je složka momentu hybnosti ve směru této osy.
[c] Pro izolovanou soustavu.

Tab. 12.2 je pokračováním soupisu veličin a vztahů, které představují analogii při popisu posuvného a otáčivého pohybu (tab. 11.3).

PŘÍKLAD 12.9

Správný dřevorubec ví, jak má vyhodit sekeru, aby během letu vykonala celý počet otáček kolem svého těžiště a zasekla se do kmene stromu (obr. 12.16). Předpokládejme, že vodorovná složka počáteční rychlosti sekery má hodnotu $v_x = 20{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, její dolet je $d = 5{,}90\,\mathrm{m}$ a sekera vykonala přesně jednu otáčku. Moment setrvačnosti I sekery vzhledem k ose vedené jejím těžištěm je $1{,}95\cdot10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.



Obr. 12.16 Příklad 12.9. Dřevorubec hodil sekeru tak, aby se během letu otáčela kolem osy vedené jejím těžištěm (parabolický tvar trajektorie těžiště není na obrázku vyznačen).

(a) Vypočtěte velikost momentu hybnosti letící sekery vzhledem k jejímu těžišti.

ŘEŠENÍ: Sekera se otáčí stálou úhlovou rychlostí ω vzhledem k ose vedené jejím těžištěm. Její moment hybnosti určíme podle rov. (12.39) ($L = I\omega$). Nejprve však vypočteme úhlovou rychlost. Podle rov. (11.5) je úhlová rychlost ω určena otočením $\Delta\theta$ v časovém intervalu Δt_1 takto:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t_1}.$$

Nahradíme-li Δt_1 výrazem d/v_x a dosadíme-li za $\Delta\theta$ hodnotu $1{,}00\,\mathrm{ot} = 2\pi\,\mathrm{rad}$, dostaneme

$$\omega = \frac{v_x\Delta\theta}{d} = \frac{(20{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(2\pi\,\mathrm{rad})}{(5{,}90\,\mathrm{m})} = 21{,}3\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}.$$

Pro získanou hodnotu ω a zadaný moment setrvačnosti I dostaneme z rov. (12.39) výsledek:

$$L = I\omega = (1{,}95\cdot10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^2})(21{,}3\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}) = \\ = 4{,}15\cdot10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Uvedení sekery do pohybu trvá dřevorubci $\Delta t_2 = 0{,}150\,\mathrm{s}$. Určete průměrnou velikost momentu síly, jíž působí dřevorubec na sekeru, vzhledem k jejímu těžišti.

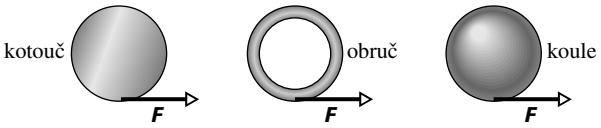
ŘEŠENÍ: Souvislost změny momentu hybnosti sekery ΔL s průměrnou hodnotou $\overline{M}$ výsledného momentu sil, které ji během časového intervalu Δt_2 uvedou do pohybu, je dána vztahem (12.37).

$$\overline{M} = \frac{\Delta L}{\Delta t_2} = \frac{L_\mathrm{f} - L_\mathrm{i}}{\Delta t_2}.$$

Počáteční moment hybnosti sekery je nulový, tj. $L_\mathrm{i} = 0$, výsledný moment hybnosti je $L_\mathrm{f} = -4{,}15\cdot10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2/s}$. Výsledná hodnota je záporná. Sekera na obr. 12.16 se totiž otáčí ve směru chodu hodinových ručiček. Dosazením těchto hodnot a zadané doby Δt_2 do poslední rovnice dostaneme

$$\overline{M} = \frac{(-4{,}15\cdot10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}})}{(0{,}150\,\mathrm{s})} = \\ = -0{,}277\,\mathrm{N\cdot m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 6: Tři tělesa znázorněná na obrázku (kotouč, obruč a plná koule) jsou tažena vlákny navinutými na jejich obvodu. Tažná síla $\boldsymbol{F}$ je ve všech případech stejná a působí po stejnou dobu t. Každé z těles se roztáčí z klidu kolem pevné osy vedené jeho středem. Hmotnosti i poloměry těles jsou shodné. Seřaďte tělesa (a) podle jejich momentu hybnosti vzhledem k ose otáčení a (b) podle jejich úhlových rychlostí v okamžiku t.



12.8 ZÁKON ZACHOVÁNÍ MOMENTU HYBNOSTI

Prozatím jsme dokázali vyslovit dva důležité zákony zachování platné při pohybu těles: zákon zachování mechanické energie a zákon zachování hybnosti. Nyní se setkáme s dalším podobným zákonem, zákonem zachování momentu hybnosti. Jestliže je studovaná soustava částic izolovaná nebo je-li výsledný moment vnějších sil, které na ni působí, nulový, je podle rov. (12.37) (druhá impulzová věta) $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t = 0$, tj.

$$\boldsymbol{L} = \text{konst.} \qquad (12.40)$$

Tento výsledek, nazývaný **zákon zachování momentu hybnosti**, lze také přepsat ve tvaru

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{i} = \boldsymbol{L}_\mathrm{f}, \qquad (12.41)$$

kde indexy (i), resp. (f) označují moment hybnosti soustavy $\boldsymbol{L}$ v počátečním, resp. koncovém okamžiku. Rovnice (12.40) a (12.41) lze vyjádřit takto:

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ se zachovává bez ohledu na případné změny probíhající uvnitř soustavy, pokud je výsledný moment vnějších sil působících na soustavu nulový.

Rov. (12.40) a (12.41) jsou vektorové. Každá z nich je tedy ekvivalentní trojici skalárních rovnic, vyjadřujících zachování tří nezávislých kartézských složek momentu hybnosti soustavy. Mohou nastat případy, kdy se některá ze složek momentu hybnosti soustavy zachovává i při nenulovém momentu sil:

Je-li některá ze složek výsledného momentu vnějších sil působících na soustavu nulová, zachovává se odpovídající složka momentu hybnosti soustavy, a to bez ohledu na změny, které uvnitř soustavy probíhají.

Použijme tento zákon pro případ izolovaného tělesa na obr. 12.15, které se otáčí kolem osy z. Předpokládejme, že těleso bylo zpočátku tuhé, později se však rozložení jeho hmotnosti vzhledem k ose otáčení změnilo. Změnil se tím i jeho moment setrvačnosti vzhledem k této ose. Podle rov. (12.40) a (12.41) se však nezměnil moment hybnosti tělesa. Dosazením z rov. (12.39) pro moment hybnosti tělesa při rotaci kolem pevné osy do rov. (12.41) dostaneme zákon zachování momentu hybnosti ve tvaru

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f. \qquad (12.42)$$

Indexy (i) a (f) jsme označili hodnoty momentu setrvačnosti I a úhlové rychlosti ω na počátku měření a po změně rozložení hmoty.

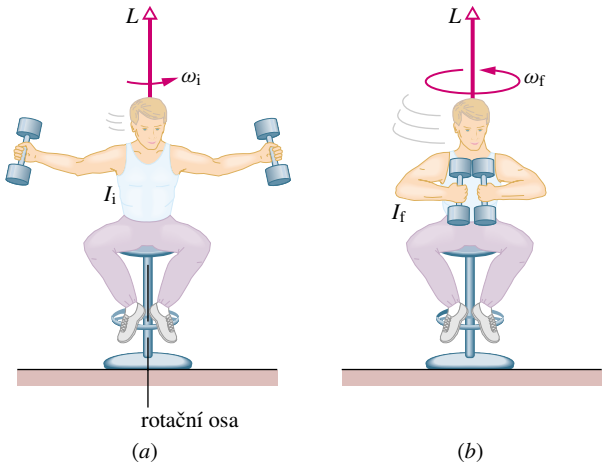
Podobně jako předchozí zákony zachování (energie a hybnosti) jsou rov. (12.40) a (12.41) platné i mimo rámec newtonovské (klasické) mechaniky. Platí totiž i pro částice pohybující se rychlostmi blízkými rychlosti světla (které se řídí relativistickou mechanikou) a dokonce pro částice subatomární, při jejichž popisu se neobejdeme bez kvantové mechaniky. Až dosud nebyl objeven žádný jev, který by platnost zákona zachování momentu hybnosti narušil.

V dalším textu se budeme věnovat rozboru čtyř typických situací, v nichž lze tento zákon uplatnit.

1. *Experimentátor na otočné stoličce.* Experimentátor na obr. 12.17 sedí na stoličce, která se pomalu otáčí kolem svislé osy úhlovou rychlostí ω_i. V upažených rukou drží dvě činky. Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ soustavy stolička + člověk je rovnoběžný s osou otáčení a směřuje vzhůru.

Náhle člověk připaží a zmenší tak moment setrvačnosti soustavy z hodnoty I_i na hodnotu I_f. Hmota soustavy je nyní rozložena blíže k ose otáčení. Úhlová rychlost otáčení se naopak zvýší z hodnoty ω_i na ω_f. Upažením docílí experimentátor opětovného zpomalení otáčivého pohybu.

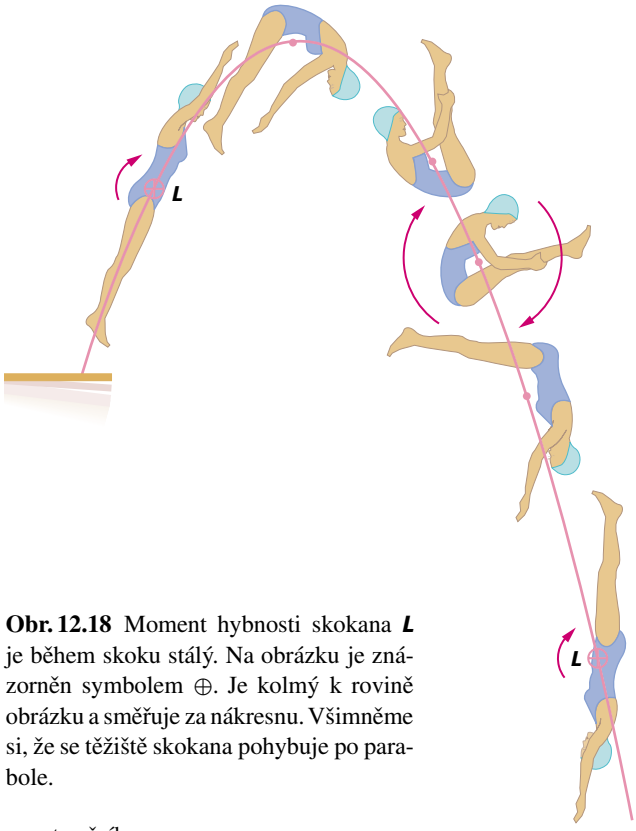
Výsledný moment vnějších sil působících na soustavu člověk s činkami + stolička je nulový (společná vektorová přímka tíhové síly a tlakové síly podložky leží v ose otáčení). Moment hybnosti soustavy vzhledem k ose otáčení se proto zachovává bez ohledu na to, jak člověk činkami pohybuje. Úhlová rychlost soustavy zachycené v situaci na obr. 12.17a je malá a moment setrvačnosti velký. Podle rov. (12.42) je úhlová rychlost soustavy na obr. 12.17b větší. Její zvýšení totiž kompenzuje pokles momentu setrvačnosti soustavy, způsobený změnou rozložení její hmoty.



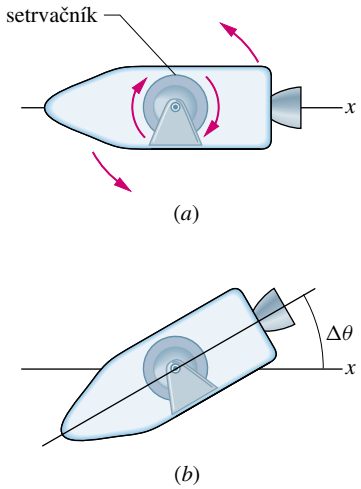
Obr. 12.17 (a) Soustava člověk + stolička má poměrně velký moment setrvačnosti a malou úhlovou rychlost. (b) Při poklesu momentu setrvačnosti se zvětší úhlová rychlost soustavy. Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ zůstává zachován.

2. *Skokan.* Obr. 12.18 ukazuje skok do vody s jedním a půl saltem vpřed. Podle očekávání se těžiště skokana pohybuje po parabole. Skokan opustí odrazový můstek s určitým momentem hybnosti $\boldsymbol{L}$ vzhledem k ose jdoucí jeho těžištěm. Vektor $\boldsymbol{L}$ je kolmý k rovině obrázku a směřuje za nákresnu. Jedinou silou, která na skokana během jeho letu působí, je síla tíhová. Její moment vzhledem k těžišti sportovce je však nulový. Moment hybnosti skokana se tedy zachovává. Pokrčením paží a nohou docílí akrobat poklesu momentu setrvačnosti vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. Podle rov. (12.42) tím urychlí rotaci svého těla (zvýší úhlovou rychlost). Natažením paží i nohou ke konci letu opět moment setrvačnosti zvýší a rotaci zpomalí natolik, že voda při doskoku téměř nevystříkne. Moment hybnosti skokana se samozřejmě zachovává co do velikosti i směru i při složitějších skocích se salty a výkruty.

3. *Orientace kosmické lodi.* Na obr. 12.19 je znázorněna kosmická loď s pevně uloženým setrvačníkem. Obrázek zachycuje změnu orientace lodi. Jestliže se loď ani setrvačník neotáčí, je celkový moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ soustavy kosmická



Obr. 12.18 Moment hybnosti skokana $\boldsymbol{L}$ je během skoku stálý. Na obrázku je znázorněn symbolem $\oplus$. Je kolmý k rovině obrázku a směřuje za nákresnu. Všimněme si, že se těžiště skokana pohybuje po parabole.



Obr. 12.19 (a) Zjednodušený náčrtek kosmické lodi se setrvačníkem. Roztočíme-li setrvačník např. ve směru otáčení hodinových ručiček, roztočí se loď směrem opačným. Celkový moment hybnosti soustavy musí totiž zůstat nulový. (b) Jestliže setrvačník uvedeme opět do klidu, zastaví se i loď. Její osa se však vůči své původní orientaci natočila o úhel $\Delta\theta$.

loď + setrvačník nulový a díky její izolovanosti se zachovává.

Roztočíme-li setrvačník podle obr. 12.19a, roztočí se loď opačným směrem, neboť celkový moment hybnosti soustavy musí zůstat nulový. Zastavíme-li setrvačník, zastaví se i rotace kosmické lodi. Loď však už zůstane ve změněné poloze (obr. 12.19b).

Nežádoucí účinky zákona zachování momentu hybnosti se projevily při letu kosmické lodi *Voyager 2* kolem planety Uran (v roce 1986). Loď se roztočila pokaždé, když se její magnetofonové záznamové zařízení přepnulo na vyšší rychlost. Řízení letu v Jet Propulsion Laboratory muselo během letu naprogramovat palubní počítač lodi tak, aby při každém zapnutí či vypnutí magnetofonové jednotky došlo k zážehu korekčních motorů.

4. *Neuvěřitelná hroutící se hvězda.* Vyhasíná-li hvězda, tj. dochází-li jí jaderné „palivo“, začne se postupně smršťovat a tlak v jejím nitru roste. Smršťování může pokračovat tak dlouho, až se původní poloměr hvězdy (srovnatelný např. s poloměrem našeho Slunce) zmenší na pouhých několik kilometrů. Hvězda se přemění v *neutronovou hvězdu*, jejíž hmota je stlačena v neuvěřitelně hustý plyn složený z neutronů.

Hvězda je izolovanou soustavou a její moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ se zachovává. Moment setrvačnosti hvězdy se během jejího smršťování podstatně zmenší. Její úhlová rychlost při tom vzroste až na hodnotu zhruba 600 až 800 otáček *za sekundu*. Pro srovnání uveďme, že naše Slunce, které můžeme považovat za typickou hvězdu, vykoná asi jednu otáčku na měsíc!

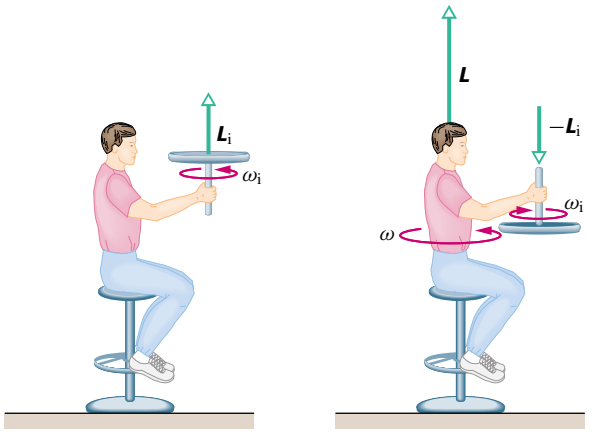
KONTROLA 7: Brouk sedící na obvodu kolotoče začne lézt k jeho středu. Rozhodněte, zda následující veličiny, vztažené k ose otáčení kolotoče, vzrostou, klesnou, nebo zůstanou zachovány: (a) moment setrvačnosti soustavy brouk + kolotoč, (b) moment hybnosti soustavy a (c) úhlová rychlost kolotoče s broukem.

PŘÍKLAD 12.10

Experimentátor na obr. 12.20 sedí na stoličce, která se může otáčet kolem svislé osy. Drží v rukou bicyklové kolo, podél jehož obvodu je ohnut olověný prut. Moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho středem je $I = 1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. Zpočátku je člověk na stoličce v klidu a kolo se otáčí úhlovou rychlostí $\omega_i = 3{,}9\,\mathrm{ot/s}$ proti směru chodu hodinových ručiček (viděno z nadhledu). Osa otáčení kola je svislá a jeho počáteční moment hybnosti $\boldsymbol{L}_i$ směřuje vzhůru. Experimentátor otočí kolo o 180° podle obr. 12.20b a stolička se s ním roztočí. Jakým směrem a jakou úhlovou rychlostí se bude člověk na stoličce otáčet? Moment setrvačnosti I_0 soustavy člověk + stolička + kolo vzhledem k ose otáčení je $6{,}8\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.

ŘEŠENÍ: Vnější síly působící na soustavu člověk + stolička + kolo (tíhová síla a tlaková síla podlahy) mají vzhledem k libovolnému vztažnému bodu ležícímu na ose otáčení nulové momenty. Další síly na soustavu nepůsobí a její moment

hybnosti se proto zachovává. Počáteční moment hybnosti soustavy $\boldsymbol{L}_\mathrm{i}$ je shodný s momentem hybnosti otáčejícího se kola. I při převrácení osy kola se zachová velikost a směr celkového momentu hybnosti soustavy.



Obr. 12.20 Příklad 12.10. (a) Experimentátor drží bicyklové kolo, které se otáčí kolem své svislé osy. (b) Člověk kolo převrátí a začne se otáčet. (c) Celkový moment hybnosti soustavy se zachovává.

Moment hybnosti kola po jeho převrácení je $-\boldsymbol{L}_\mathrm{i}$. Člověk a stolička získají moment hybnosti $\boldsymbol{L}$. Podle obr. 12.20c musí platit

$$L_\mathrm{i} = L + (-L_\mathrm{i}),$$

tedy

$$L = 2L_\mathrm{i} = I_0\omega,$$

kde ω je úhlová rychlost otáčení člověka na stoličce po převrácení osy kola. Dostáváme

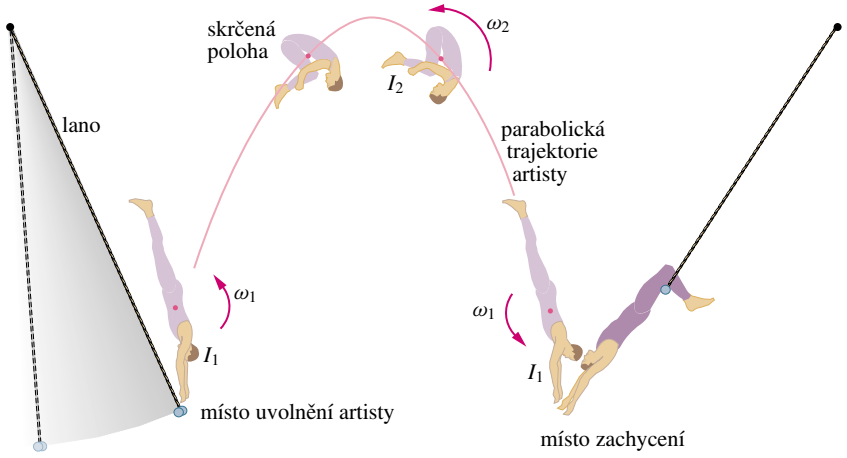
$$\omega = \frac{2L_\mathrm{i}}{I_0} = \frac{2I\omega_\mathrm{i}}{I_0} = \\ = \frac{2(1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^2})(3{,}9\,\mathrm{ot/s})}{(6{,}8\,\mathrm{kg\cdot m^2})} = \\ = 1{,}4\,\mathrm{ot/s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kladná hodnota výsledku znamená, že se člověk na stoličce otáčí proti směru chodu hodinových ručiček (viděno z nadhledu). K zastavení rotace stačí otočit kolo do původní polohy.

Při překlápění kola působí člověk na jeho osu určitou silou, jejíž moment je obecně nenulový. Stejně velkou, avšak opačně orientovanou silou působí osa kola na ruku člověka. Tyto síly jsou z hlediska soustavy člověk + stolička + kolo silami vnitřními, a neovlivní tedy její celkový moment hybnosti. K řešení úlohy můžeme zvolit i jiný přístup. Za soustavu můžeme zvolit samotného člověka na stoličce a kolo považovat za součást jejího okolí. Člověk působí na osu kola silou s nenulovým momentem. Osa působí na ruku člověka silou opačnou, která však je z hlediska soustavy člověk + stolička silou vnější. Vlivem jejího momentu se mění moment hybnosti soustavy a stolička s člověkem se roztočí. Vidíme, že třídění sil a jejich momentů na vnitřní a vnější závisí na volbě posuzované soustavy částic a že vhodnou volbou zkoumaného systému lze řešení úlohy zjednodušit.

PŘÍKLAD 12.11

Akrobat na visuté hrazdě provede během skoku trvajícího $t = 1{,}87$ s trojité salto. Během první a poslední čtvrtiny otáčky se akrobat otáčí v natažené poloze podle obr. 12.21. Jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jeho těžištěm je při tom $I_1 = 19{,}9\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. Ve střední části letu se akrobat



Obr. 12.21 Příklad 12.11. Trojité salto

skrčí a jeho moment setrvačnosti se sníží na hodnotu $I_2 = 5{,}50\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.

(a) Jakou má akrobat počáteční úhlovou rychlost ω_1, otáčí-li se kolem osy procházející jeho těžištěm?

ŘEŠENÍ: V napjaté poloze absolvuje akrobat dvě čtvrtiny otáčky za dobu t_1. Odpovídající úhel otočení je tedy $\theta_1 = 0{,}500\,\mathrm{ot}$. Úhel otočení ve skrčené poloze je $\theta_2 = 2{,}50\,\mathrm{ot}$, odpovídající dobu letu označme t_2. Pro tyto časové intervaly platí

$$t_1 = \frac{\theta_1}{\omega_1} \quad \text{a} \quad t_2 = \frac{\theta_2}{\omega_2}, \tag{12.43}$$

kde ω_2 je úhlová rychlost akrobata ve skrčené poloze. Protože se moment hybnosti akrobata během skoku zachovává, můžeme úhlovou rychlost určit pomocí rov. (12.42):

$$I_2\omega_2 = I_1\omega_1,$$

tj.

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1. \tag{12.44}$$

Celková doba letu akrobata je

$$t = t_1 + t_2.$$

Po dosazení z rov. (12.43) a (12.44) dostaneme

$$t = \frac{\theta_1}{\omega_1} + \frac{\theta_2 I_2}{\omega_1 I_1} = \frac{1}{\omega_1}\left(\theta_1 + \theta_2\frac{I_2}{I_1}\right). \tag{12.45}$$

Pro zadané číselné hodnoty je

$$(1{,}87\,\mathrm{s}) = \frac{1}{\omega_1}\left(0{,}500\,\mathrm{ot} + 2{,}50\,\mathrm{ot}\,\frac{5{,}50\,\mathrm{kg\cdot m^2}}{19{,}9\,\mathrm{kg\cdot m^2}}\right).$$

Z poslední rovnice pak získáme výsledek

$$\omega_1 = 0{,}636\,9\,\mathrm{ot/s} \doteq 0{,}637\,\mathrm{ot/s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Podaří-li se akrobatovi ještě více se skrčit, může se pokusit o čtyřnásobné salto při stejných hodnotách ω_1 a t. Jaký musí být jeho moment setrvačnosti ve skrčené poloze?

ŘEŠENÍ: Úhel otočení ve skrčené poloze je nyní $\theta_2 = 3{,}50\,\mathrm{ot}$. Podle rov. (12.45) je nyní

$$(1{,}87\,\mathrm{s}) = \frac{1}{(0{,}636\,9\,\mathrm{ot/s})}\cdot \cdot\left(0{,}500\,\mathrm{ot} + 3{,}50\,\mathrm{ot}\,\frac{I_2}{19{,}9\,\mathrm{kg\cdot m^2}}\right),$$

odkud

$$I_2 = 3{,}929\,\mathrm{kg\cdot m^2} \doteq 3{,}93\,\mathrm{kg\cdot m^2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Menší hodnota I_2 umožní rychlejší otáčení ve skrčené poloze. Nemusí však již být v silách akrobata jí docílit. Pokud by se akrobat chtěl pokusit o čtyřapůlnásobné salto, musel by buď prodloužit dobu letu nebo zvýšit svou počáteční úhlovou rychlost. Pokud by se rozhodl pro druhou možnost, riskoval by, že se jeho kolegovi nemusí podařit ho zachytit. (Víte proč?)

(c) Určete periodu otáčení akrobata během čtyřnásobného salta ve skrčené poloze.

ŘEŠENÍ: Z rov. (12.44) nejprve vypočtěme úhlovou rychlost ω_2 ve skrčené poloze:

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{(19{,}9\,\mathrm{kg\cdot m^2})}{(3{,}929\,\mathrm{kg\cdot m^2})}\,(0{,}636\,9\,\mathrm{ot/s}) = 3{,}226\,\mathrm{ot/s}.$$

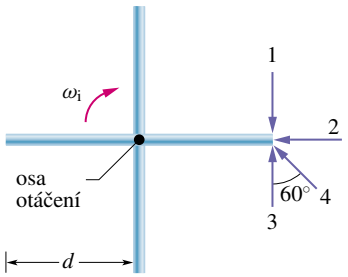
Periodu T již určíme velmi snadno:

$$T = \frac{1\,\mathrm{ot}}{\omega_2} = \frac{1\,\mathrm{ot}}{3{,}226\,\mathrm{ot/s}} = 0{,}310\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Jednou z příčin mimořádné obtížnosti čtyřnásobného salta je skutečnost, že otáčení je velmi rychlé. Artista při něm nestačí sledovat své okolí a jemně regulovat svou úhlovou rychlost vzájemnou polohou trupu a končetin — tedy změnou svého momentu setrvačnosti.

PŘÍKLAD 12.12

Čtyři tenké tyče, každá o hmotnosti m a délce $d = 1{,}0\,\mathrm{m}$ jsou pevně spojeny do tvaru rovnoramenného kříže. Soustava se volně otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím středem. Počáteční úhlová rychlost je $\omega_\mathrm{i} = -2{,}0\,\mathrm{rad/s}$, tj. ve směru otáčení hodinových ručiček (obr. 12.22). Koule z bláta o hmotnosti $m' = m/3$ a počáteční rychlosti $v_\mathrm{i} = 12\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ narazí na konec jedné tyče a přilne k ní. Jaká je výsledná úhlová rychlost soustavy kříž + koule? Uvažujme čtyři různé trajektorie koule podle obr. 12.22: trajektorie 1 — koule dopadá kolmo na tyč, trajektorie 2 — koule dopadá v radiálním směru, trajektorie 3 — koule dopadá kolmo na tyč v opačném směru než v případě 1, trajektorie 4 — koule dopadá na tyč pod úhlem 60° měřeným od kolmice k tyči.



Obr. 12.22 Příklad 12.12. Čtyři pevně spojené tyče se volně otáčejí kolem svislé osy. Blátivá koule může dopadnout na tyč čtyřmi různými způsoby a po dopadu zůstane k tyči přilepena. Obrázek představuje půdorysný průmět situace.

ŘEŠENÍ: Celkový moment hybnosti L soustavy kříž + koule vzhledem k ose otáčení se během srážky koule s rotujícím křížem zachovává, tj.

$$L_\mathrm{f} = L_\mathrm{i}. \tag{12.46}$$

Indexy (i) a (f) představují počáteční a výslednou hodnotu. Označme I_+ moment setrvačnosti kříže vzhledem k ose otáčení. Podle vztahu (f) v tab. 11.2 je

$$I_+ = 4(\tfrac{1}{3}md^2).$$

Moment setrvačnosti blátivé koule přilepené na jedné z tyčí vzhledem k ose otáčení je $I_{\mathrm{bk}} = m'd^2$. Označme jako L_i moment hybnosti koule vzhledem k ose otáčení před dopadem na tyč a ω_f výslednou úhlovou rychlost soustavy. Pomocí známého vztahu $L = I\omega$ přepíšeme rovnici (12.46) do tvaru

$$I_+\omega_\mathrm{f} + I_{\mathrm{bk}}\omega_\mathrm{f} = I_+\omega_\mathrm{i} + L_\mathrm{i},$$

a tedy

$$(\tfrac{4}{3}md^2)\omega_\mathrm{f} + (m'd^2)\omega_\mathrm{f} = (\tfrac{4}{3}md^2)\omega_\mathrm{i} + L_\mathrm{i}. \quad (12.47)$$

Dosadíme $m = 3m'$ a $\omega_\mathrm{i} = -2{,}0\,\mathrm{rad/s}$ a získanou rovnici vyřešíme vzhledem k neznámé ω_f:

$$\omega_\mathrm{f} = \frac{1}{5m'd^2}\left(4m'd^2(-2\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}) + L_\mathrm{i}\right). \quad (12.48)$$

Velikosti L_i pro trajektorie 1 a 3 vypočteme pomocí rov. (12.28), kde $r_\perp = d$ a $v = v_\mathrm{i}$. Pro případ 2 použijeme rov. (12.28) s $r_\perp = 0$. U trajektorie 4 využijeme rov. (12.27), kde položíme $r = d$ a $v_\perp = v_\mathrm{i}\cos 60°$. Znaménko veličiny L_i určíme tak, že sestrojíme polohový vektor dopadající koule a zjistíme, kterým směrem se otáčí při dopadu koule na kříž. Je-li zjištěný směr otáčení souhlasný se směrem otáčení hodinových ručiček, je hodnota L_i záporná, v opačném případě je kladná. Dostáváme:

dráha 1: $L_\mathrm{i} = -m'dv_\mathrm{i}$; dráha 2: $L_\mathrm{i} = 0$;
dráha 3: $L_\mathrm{i} = m'dv_\mathrm{i}$; dráha 4: $L_\mathrm{i} = m'dv_\mathrm{i}\cos 60°$.

Dosazením zadaných číselných hodnot vypočteme L_i pro každý z případů 1 až 4 a výsledek dosadíme do rov. (12.48). Nakonec dostáváme

dráha 1: $\omega_\mathrm{f} = -4{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$;
dráha 2: $\omega_\mathrm{f} = -1{,}6\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$;
dráha 3: $\omega_\mathrm{f} = 0{,}80\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$;
dráha 4: $\omega_\mathrm{f} = -0{,}40\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. (Odpověď)

12.9 KVANTOVANÝ MOMENT HYBNOSTI

Říkáme, že fyzikální veličina je **kvantovaná**, může-li nabývat jen určitých hodnot, jejichž množina je diskrétní. Všechny ostatní hodnoty jsou zakázány. Prozatím jsme se setkali se dvěma příklady kvantované veličiny z oblasti fyziky mikrosvěta: kvantování hmotnosti (čl. 2.9) a energie (čl. 8.9). Třetím příkladem, spadajícím rovněž do mikrosvěta, je moment hybnosti.

Elementární částice, jakými jsou například elektron nebo proton, mají vždy jistý vnitřní (**spinový**) moment hybnosti, jako by se neustále otáčely okolo své osy jako káča. (Ve skutečnosti se nejedná o žádné otáčení v mechanickém smyslu. Spinový moment hybnosti je veličina daleko abstraktnější než třeba moment hybnosti káči, který postihuje její skutečné otáčení.) Spinový moment hybnosti S je kvantován, jeho složka v libovolném směru (který označíme z) je dána vztahem

$$S_z = m_s\hbar, \quad (12.49)$$

kde $\hbar = 1{,}056{\cdot}10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$ je redukovaná Planckova konstanta a m_s je kvantové číslo. V případě elektronů, protonů, pozitronů a antiprotonů nabývá toto číslo pouze dvou hodnot: $+\frac{1}{2}$ a $-\frac{1}{2}$. Je-li $m_s = +\frac{1}{2}$, říkáme, že částice má *spin nahoru* a její spinový moment hybnosti je $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$. Je-li $m_s = -\frac{1}{2}$, má *spin dolů* a $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$.

Při srážkách a reakcích elementárních částic (zahrnujících i změny jejich identity) na jiné elementární částice se spinový moment hybnosti jejich soustavy zachovává. Například se může stát, že při srážce protonu (p) a antiprotonu ($\bar{\mathrm{p}}$) obě částice *anihilují* a vzniknou jiné elementární částice, a to 4 kladné piony (π^+) a 4 záporné piony (π^-):

$$\mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}} \rightarrow 4\pi^+ + 4\pi^-.$$

Všechny piony mají $m_s = 0$. Po anihilaci $\mathrm{p} + \overline{\mathrm{p}}$ podle této reakce je celkový spinový moment hybnosti soustavy nulový. Při anihilaci se však celkový spinový moment hybnosti zachovává. Má-li tedy uvedená reakce proběhnout, musí mít proton a antiproton spiny orientovány opačně (jeden nahoru, druhý dolů), aby jejich součet byl roven nule.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Valivý pohyb těles

Pro kolo o poloměru R valící se bez klouzání platí

$$v_T = \omega R, \tag{12.2}$$

kde v_T je rychlost středu kola a ω je úhlová rychlost kola (vzhledem k libovolnému bodu, např. k jeho středu). Valení kola lze také popsat jako otáčení kolem okamžité osy rotace procházející bodem dotyku P kola s podložkou. Úhlová rychlost otáčení kola kolem tohoto bodu je stejná jako kolem středu kola. Valící se kolo má kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2} I_T \omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_T^2, \tag{12.5}$$

kde I_T je moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho středem a m je jeho celková hmotnost.

Moment síly jako vektor

Moment síly $\boldsymbol{M}$ je vektorová veličina definovaná vzhledem k pevnému bodu (obvykle počátku soustavy souřadnic) vztahem

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}, \tag{12.21}$$

kde $\boldsymbol{F}$ je síla působící v bodě o polohovém vektoru $\boldsymbol{r}$ vzhledem k vztažnému bodu (např. počátku soustavy souřadnic). Velikost vektoru $\boldsymbol{M}$ je dána vztahem

$$M = rF\sin\varphi = rF_\perp = r_\perp F, \tag{12.22–12.24}$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{r}$, $F_\perp$ je složka vektoru $\boldsymbol{F}$ v rovině kolmé k vektoru $\boldsymbol{r}$ a $r_\perp$ je rameno síly $\boldsymbol{F}$. Směr vektoru $\boldsymbol{M}$ je určen pravidlem pravé ruky pro vektorový součin.

Moment hybnosti částice

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ částice s hybností $\boldsymbol{p}$, hmotností m a rychlostí $\boldsymbol{v}$ je vektorová veličina definovaná vzhledem k pevnému bodu (většinou počátku soustavy souřadnic) vztahem

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}). \tag{12.25}$$

Velikost vektoru $\boldsymbol{L}$ je

$$L = rmv\sin\varphi = rp_\perp = rmv_\perp = r_\perp p = r_\perp mv, \tag{12.26–12.28}$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$, $p_\perp$ a $v_\perp$ jsou složky vektorů $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{v}$ v rovině kolmé k $\boldsymbol{r}$ a $r_\perp$ je vzdálenost vztažného bodu od vektorové přímky hybnosti $\boldsymbol{p}$. Směr momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ je dán pravidlem pravé ruky.

Druhý Newtonův zákon pro úhlové veličiny

Druhý Newtonův zákon pro částici lze pomocí úhlových veličin zapsat ve vektorovém tvaru takto:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}, \tag{12.30}$$

kde $\sum \boldsymbol{M}$ je výsledný moment všech sil působících na částici a $\boldsymbol{L}$ je její moment hybnosti.

Moment hybnosti soustavy částic

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ soustavy částic je vektorovým součtem momentů hybnosti jednotlivých částic:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_2 + \ldots + \boldsymbol{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i. \tag{12.35}$$

Jeho časová změna je dána vektorovým součtem momentů všech vnějších sil působících na částice soustavy (tj. momentů sil popisujících působení objektů, které do soustavy nejsou zahrnuty, na částice soustavy):

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_\mathrm{ext}. \tag{12.37}$$

Moment hybnosti tuhého tělesa

Složka momentu hybnosti tuhého tělesa otáčejícího se kolem pevné osy do směru této osy je

$$L = I\omega. \tag{12.39}$$

Zákon zachování momentu hybnosti

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ soustavy se zachovává, je-li výsledný moment vnějších sil působících na soustavu nulový (zákon zachování momentu hybnosti):

$$\boldsymbol{L} = \text{konst.}, \tag{12.40}$$

nebo

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{i} = \boldsymbol{L}_\mathrm{f}. \tag{12.41}$$

Zákon zachování momentu hybnosti je jedním ze základních zákonů zachování. Jeho platnost byla ověřena i pro soustavy, v nichž Newtonovy zákony v klasickém tvaru neplatí (např. částice pohybující se velkými rychlostmi, subatomární částice).

Kvantovaný moment hybnosti

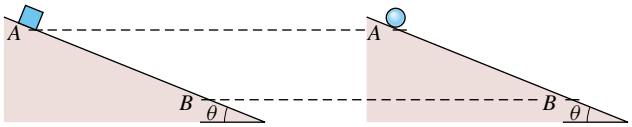
Spinový moment hybnosti S elementárních částic je kvantován. Jeho složka v libovolném směru má velikost

$$S = m_s\hbar, \tag{12.49}$$

kde $\hbar = 1{,}056{\cdot}10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}$ je redukovaná Planckova konstanta a m_s je kvantové číslo. *Orientace spinu nahoru*, resp. *dolů* odpovídají hodnotám $m_s = +\frac{1}{2}$, resp. $-\frac{1}{2}$. Spinový moment hybnosti soustavy elementárních částic se zachovává při jejich srážkách nebo reakcích.

OTÁZKY

1. Kvádr na prvním z obr. 12.23 klouže dolů po dokonale hladké nakloněné rovině s úhlem sklonu θ. Koule na vedlejším obrázku má stejnou hmotnost jako kvádr a bez klouzání se valí po nakloněné rovině se stejným úhlem sklonu. Obě tělesa byla po nakloněné rovině volně vypuštěna z bodu A a dorazila do bodu B. (a) Rozhodněte, zda tíhová síla působící na kvádr vykonala při jeho pohybu z bodu A do bodu B větší, menší, nebo stejnou práci jako tíhová síla působící na kouli. (b) Které z obou těles má v bodě B větší kinetickou energii připadající na posuvný pohyb? (c) Které z nich má v bodě B větší rychlost?



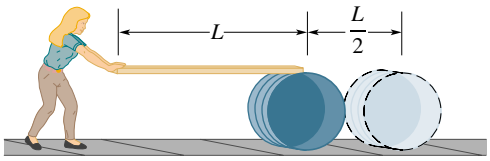
Obr. 12.23 Otázka 1

2. Dělová koule a dětská kulička se valí bez klouzání po nakloněné rovině. Obě tělesa byla zpočátku v klidu. (a) Rozhodněte, zda doba, za kterou dorazí dělová koule na konec nakloněné roviny, je větší, menší, či stejná jako v případě malé kuličky. (b) Zjistěte, zda část kinetické energie dělové koule připadající na její posuvný pohyb je větší, menší, nebo stejná jako u kuličky.

3. Dělová koule se valí bez klouzání nejprve po nakloněné rovině o úhlu sklonu θ, poté po jiné rovině stejné výšky, avšak s menším úhlem sklonu. Rozhodněte, zda (a) doba potřebná k dosažení konce nakloněné roviny a (b) kinetická energie posuvného pohybu na konci nakloněné roviny je při druhém experimentu větší, menší, nebo stejná jako v prvním případě.

4. Dva plné válce, mosazný a dřevěný, mají shodný poloměr i hmotnost (dřevěný válec je tedy delší). Oba jsou volně vypuštěny po nakloněné rovině a valí se bez klouzání. (a) Dorazí některý z nich na konec nakloněné roviny dříve? Pokud ano, který? (b) Pro další pokus byly válce upraveny tak, aby měly stejnou délku a hmotnost. Dřevěný válec byl zkrácen a v mosazném válci byl podél osy jeho rotační symetrie vyvrtán otvor vhodného průměru. Jak dopadne závod válců po nakloněné rovině nyní?

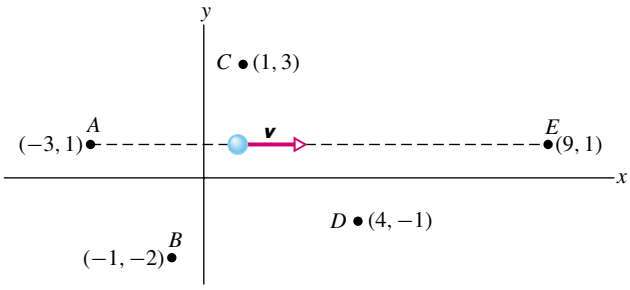
5. Skladnice na obr. 12.24 valí válcový soudek pomocí desky o délce L. Soudek se valí bez klouzání a urazí dráhu $L/2$. Deska po povrchu na soudku rovněž neklouže. (a) Jak dlouhá část desky přišla během pohybu do styku s povrchem soudku? (b) Jakou vzdálenost přitom ušla skladnice?



Obr. 12.24 Otázka 5

6. Polohový vektor částice $\boldsymbol{r}$, vztažený k bodu O, má délku 3 m. Na částici působí síla $\boldsymbol{F}$ o velikosti 4 N. Jaký úhel svírají vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$, jestliže velikost momentu síly vzhledem k bodu O (a) je nulová, (b) má hodnotu 12 N·m?

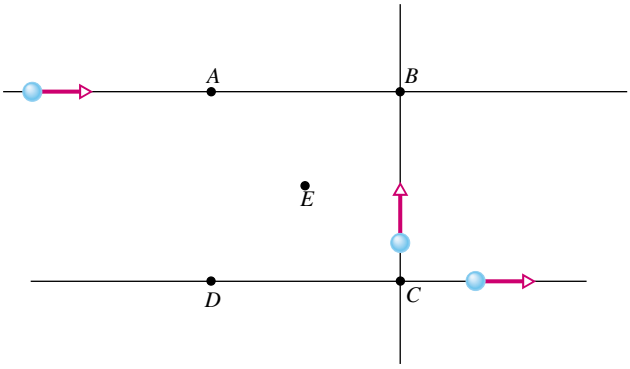
7. Na obr. 12.25 je rozmístěno pět vztažných bodů, jejichž polohy jsou určeny souřadnicemi (x, y). Částice, která je v obrázku rovněž zakreslena, se pohybuje stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Seřaďte vztažné body sestupně podle velikosti odpovídajícího momentu hybnosti částice.



Obr. 12.25 Otázka 7

8. (a) V kontrole 4 se částice 1 a 2 pohybují rovnoměrně po kružnicích. V obou případech určete moment dostředivé síly vzhledem k bodu O. (b) Částice 3, 4 a 5 se pohybují po přímkách zleva doprava. Pro každou z nich rozhodněte, zda velikost jejího momentu hybnosti vzhledem k bodu O roste, klesá, nebo zůstává stejná.

9. Na obr. 12.26 jsou znázorněny tři stejné částice pohybující se ve vyznačených směrech stejně rychle. Tyto částice tvoří soustavu. Vztažné body A, B, C a D leží ve vrcholech čtverce, bod E je v jeho středu. Seřaďte body (sestupně) podle velikosti celkového momentu hybnosti soustavy částic.

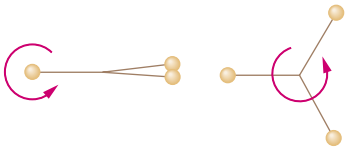


Obr. 12.26 Otázka 9

10. Následující funkce představují časovou závislost momentu hybnosti částice ve čtyřech různých situacích: (1) $L(t) = 3t + 4$, (2) $L(t) = -6t^2$, (3) $L(t) = 2$, (4) $L(t) = 4/t$. Ve které z nich je výsledný moment sil působících na částici (a) nulový,

(b) kladný a konstantní, (c) záporný s rostoucí velikostí (pro $t > 0$), (d) záporný s klesající velikostí (pro $t > 0$)?

11. Bolaso se skládá ze tří těžkých koulí spojených třemi stejně dlouhými pevnými lany (obr. 12.27). S předmětem se zachází takto: jednu kouli držíme nad hlavou a zbývající dvě roztočíme tak, aby obíhaly po kružnici (obr. 12.27a). V určitém okamžiku střední kouli uvolníme. Rozložení koulí se změní podle obr. 12.27b. Rozhodněte, zda se (a) moment hybnosti a (b) úhlová rychlost bolasa během této změny zvětší, zmenší, případně nezmění.

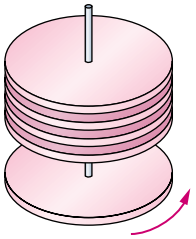


(*a*) (*b*)

Obr. 12.27 Otázka 11

12. Brouk sedí na obvodu kolotoče, který se otáčí proti směru chodu hodinových ručiček. V určitém okamžiku začne brouk lézt po obvodu ve směru otáčení. Rozhodněte, zda následující veličiny při pohybu brouka rostou, klesají, nebo se nemění: (a) moment hybnosti soustavy kolotoč + brouk, (b) moment hybnosti a úhlová rychlost brouka a (c) moment hybnosti a úhlová rychlost kolotoče? (d) Jak se změní odpovědi na předchozí otázky, poleze-li brouk proti směru otáčení kolotoče?

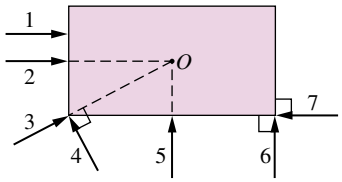
13. Spodní kotouč na obr. 12.28 se volně otáčí kolem vyznačené



Obr. 12.28 Otázka 13

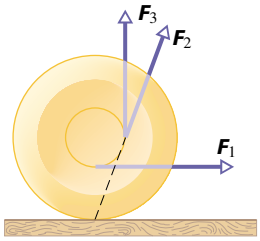
osy proti směru chodu hodinových ručiček. Jeho moment hybnosti vzhledem k jeho ose otáčení je 50 jednotek. Čtyři další rotující kotouče jsou postupně spuštěny po ose a dopadnou na spodní kotouč. Jejich momenty hybnosti před dopadem jsou (1) 20 jednotek ve směru otáčení hodinových ručiček, (2) 10 jednotek proti směru otáčení hodinových ručiček, (3) 10 jednotek ve směru otáčení hodinových ručiček a (4) 60 jednotek ve směru otáčení hodinových ručiček. Po dopadu se kotouče vlivem třecích sil spojí a celek se nakonec otáčí stejnou úhlovou rychlostí. (a) Jaký je výsledný moment hybnosti soustavy kotoučů? (b) V jakém pořadí je třeba kotouče přidávat, aby nastal okamžik, kdy je úhlová rychlost spojených kotoučů nulová?

14. Vodorovná obdélníková deska na obr. 12.29 se může otáčet kolem svislé osy procházející jejím středem O. Zpočátku je deska v klidu. Dítě hází na desku stejné kousky žvýkačky, které se s ní po dopadu spojí. V obrázku jsou vyznačeny možné trajektorie kousků dopadajících na desku ve vyznačených bodech jejího obvodu. Velikost rychlosti žvýkaček bezprostředně před dopadem je rovněž stejná. (a) Seřaďte vyznačené trajektorie podle velikosti úhlové rychlosti, kterou se budou otáčet soustava deska + žvýkačka po dopadu žvýkačky. (b) Pro kterou z nich bude moment hybnosti desky s kouskem žvýkačky záporný?



Obr. 12.29 Otázka 14

15. Jojo na obr. 12.30 je zpočátku v klidu. Promyslete, jak se bude pohybovat, bude-li na vlákno působit tažná síla (a) $\boldsymbol{F}_2$, jejíž vektorová přímka prochází bodem dotyku joja s podložkou, (b) $\boldsymbol{F}_1$ s vektorovou přímkou ležící nad bodem dotyku, (c) $\boldsymbol{F}_3$ s vektorovou přímkou procházející vpravo od bodu dotyku.



Obr. 12.30 Otázka 15

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 12.1 Valení

1C. Tenkostěnná trubice se valí po podlaze. Určete poměr kinetické energie jejího posuvného pohybu a kinetické energie otáčivého pohybu vzhledem k její podélné ose.

2C. Prstenec o hmotnosti 140 kg se valí po vodorovné podlaze. Jeho těžiště má rychlost 0,150 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jakou práci je třeba vykonat, aby se prstenec zastavil?

3C. Automobil jede rychlostí 80,0 km/h. (a) Určete úhlovou rychlost pneumatik vzhledem k jejich osám, víte-li, že průměr pneumatiky je 75,0 cm. (b) Řidič automobilu zastavil bez prokluzu kol. Od okamžiku, kdy začal rovnoměrně brzdit, vykonala kola 30,0 otáček. Určete jejich úhlové zrychlení. (c) Jakou dráhu automobil během brzdění urazil?

4C. Vůz o hmotnosti 1 000 kg má čtyři kola. Hmotnost každého z nich je 10 kg. Jaká část celkové kinetické energie vozu připadá na otáčivý pohyb jeho kol? Při výpočtu momentu setrvačnosti

považujeme kolo za homogenní kotouč. Proč nepotřebujete znát poloměr kol?

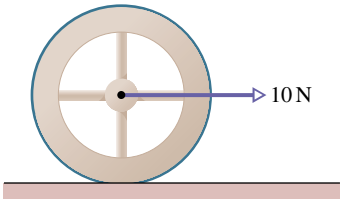
5C. Kolo o poloměru 0,250 m se valí bez klouzání s počáteční rychlostí 43,0 m·s^{-1} a zastaví se na dráze 225 m. Vypočtěte jeho (a) zrychlení a (b) úhlové zrychlení. (c) Moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho středem je 0,155 kg·m^2. Vypočtěte vzhledem k této ose moment třecích sil, které na kolo při brzdění působí.

6C. Automobil o celkové hmotnosti 1 700 kg se rozjíždí z klidu a za dobu 10 s dosáhne rychlosti 40 km/h. Každé jeho kolo považujeme za homogenní kotouč o hmotnosti 32 kg. Vypočtěte (a) kinetickou energii otáčivého pohybu každého kola vzhledem k jeho ose, (b) celkovou kinetickou energii každého kola, (c) celkovou kinetickou energii automobilu na konci desáté sekundy pohybu.

7C. Homogenní koule se valí dolů po nakloněné rovině. (a) Jak je třeba zvolit úhel sklonu roviny, aby se těžiště koule pohybovalo se zrychlením o velikosti $0,10g$? (b) Jaké by bylo zrychlení tělesa, které by po této nakloněné rovině klouzalo bez tření?

8C. Plná koule o hmotnosti 4,00 kg se valí vzhůru po nakloněné rovině se sklonem 30,0°. Počáteční rychlost jejího těžiště má velikost 5,0 m·s^{-1}. (a) Vypočtěte počáteční kinetickou energii koule. (b) Jakou dráhu koule po nakloněné rovině urazí, než vystoupí do bodu obratu? (c) Závisí odpověď na otázku (b) na hmotnosti koule?

9Ú. Na kolo o hmotnosti 10 kg a poloměru 0,30 m působí stálá vodorovná síla o velikosti 10 N (obr. 12.31). Kolo se valí bez klouzání po vodorovné rovině a zrychlení jeho těžiště je 0,60 m·s^{-2}. (a) Určete velikost a směr třecí síly působící na kolo. (b) Vypočtěte moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho těžištěm kolmo k jeho rovině.

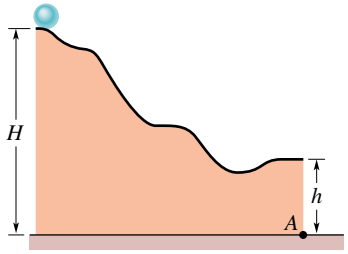


Obr. 12.31 Úloha 9

10Ú. Automobil jede rychlostí 80 km/h ve směru kladné osy x. Průměr pneumatik je 66 cm. Ve vztažné soustavě spojené s automobilem určete rychlost a zrychlení (a) středu kola, (b) bodu na vrcholu pneumatiky, (c) bodu dotyku pneumatiky se silnicí. (d) Úlohy (a), (b) a (c) řešte i ve vztažné soustavě spojené se silnicí.

11Ú. Těleso o poloměru R a hmotnosti m se valí bez klouzání po vodorovné podlaze rychlostí $\boldsymbol{v}$. V určitém okamžiku najede na nakloněnou rovinu a začne podél ní stoupat. Bod obratu leží ve výšce $h = 3v^2/(4g)$ nad úrovní podlahy. (a) Určete moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. (b) O jaké těleso se pravděpodobně jedná?

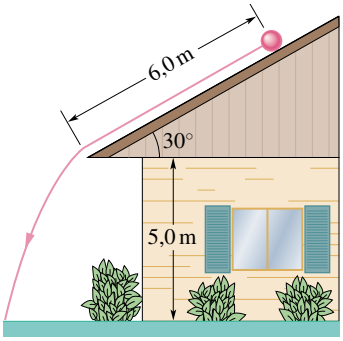
12Ú. Homogenní koule je uvolněna z klidové polohy v nejvyšším bodě dráhy znázorněné na obr. 12.32 a valí se po ní bez klouzání. Dráha končí nad bodem A, který je v obrázku vyznačen. V okamžiku, kdy koule opustí dráhu, má její rychlost vodorovný směr. Pro hodnoty $H = 6,0$ m a $h = 2,0$ m zjistěte, jak daleko od bodu A dopadne koule na podlahu.



Obr. 12.32 Úloha 12

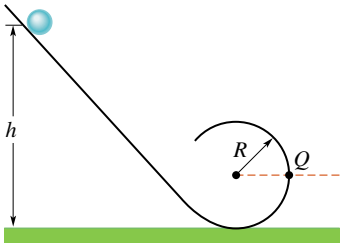
13Ú. Kulička o poloměru r a hmotnosti m se může valit bez klouzání po vnitřním povrchu nádoby polokulového tvaru o poloměru R. Kuličku uvolníme z klidové polohy na okraji nádoby. (a) Určete její kinetickou energii v nejnižším bodě trajektorie. (b) Jaká část vypočtené hodnoty odpovídá otáčivému pohybu kuličky vzhledem k ose vedené jejím těžištěm? (c) Určete tlakovou sílu, jíž působí kulička na polokouli v nejnižším bodě své trajektorie. Předpokládejte, že poloměr kuličky r je mnohem menší než poloměr nádoby R.

14Ú. Válec o poloměru 10 cm a hmotnosti 12 kg byl volně puštěn po šikmé střeše se sklonem 30° (obr. 12.33) a valí se po ní bez klouzání. Poté, co urazí dráhu 6,0 m, dospěje k okapu a spadne. (a) Určete jeho úhlovou rychlost vzhledem k ose vedené jeho těžištěm v tomto okamžiku. (b) Stěna domu je vysoká 5,0 m. Jak daleko od okapu dopadne válec na zem?



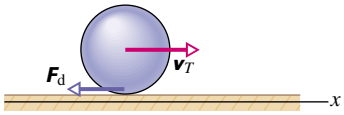
Obr. 12.33 Úloha 14

15Ú. Malá plná kulička o hmotnosti m a poloměru r se valí bez klouzání po nakloněné rovině zakončené smyčkou podle obr. 12.34. Kulička byla uvolněna ve výšce h nad úrovní vodorovné podlahy. (a) Určete nejmenší hodnotu h, při které kulička ještě projde vrcholem smyčky. Poloměr R smyčky je mnohonásobně větší než poloměr r kuličky. (b) Pro hodnotu $h = 6R$ vypočtěte vodorovnou složku síly, kterou působí dráha na kuličku v bodě Q.



Obr. 12.34 Úloha 15

16Ú. Koule o poloměru $R = 11\,\text{cm}$ byla vržena po vodorovné podlaze s počáteční rychlostí $v_0 = 8{,}5\,\text{m·s}^{-1}$ a nulovou počáteční úhlovou rychlostí $\omega_0 = 0$. Koeficient dynamického tření mezi koulí a podlahou je 0,21. Zpočátku koule po podlaze klouže. Vlivem dynamické třecí síly (obr. 12.35) $\boldsymbol{F}_\text{d}$ a jejího nenulového



Obr. 12.35 Úloha 16

momentu vzhledem k těžišti je nenulové jak zrychlení těžiště koule, tak její úhlové zrychlení. Velikost rychlosti posuvného pohybu koule v klesá a její úhlová rychlost ω naopak roste. V určitém okamžiku přestane koule po podlaze klouzat a začne se valit. Rychlost jejího těžiště v_T i úhlová rychlost ω se od té chvíle přestanou měnit. (a) Zapište vztah mezi „ustálenými" hodnotami v_T a ω. Zjistěte, (b) s jakým zrychlením se pohybovalo těžiště koule a (c) jaké bylo její úhlové zrychlení do okamžiku, než se začala valit bez klouzání. (d) Jak dlouho koule klouzala a (e) jakou dráhu přitom urazila? (f) Určete hodnotu v_T v okamžiku, kdy se koule začala valit.

ODST. 12.2 Jojo

17C. Jojo o hmotnosti 120 g má moment setrvačnosti $950\,\text{g·cm}^2$. Poloměr jeho osičky 3,2 mm a vlákno má délku 120 cm. Jojo je zpočátku v klidu a po uvolnění se odvaluje podél vlákna dolů. (a) Určete jeho zrychlení. (b) Určete okamžik, kdy jojo dospěje na konec vlákna, a zjistěte hodnoty následujících veličin v tomto okamžiku: (c) rychlost, (d) kinetickou energii posuvného pohybu, (e) kinetickou energii otáčivého pohybu, (f) úhlovou rychlost.

18Ú. Předpokládejme, že na rozdíl od předchozího cvičení nebylo jojo uvolněno z klidové polohy, ale vrženo svisle dolů počáteční rychlostí o velikosti $1{,}3\,\text{m·s}^{-1}$. (a) Za jak dlouho dorazí jojo na konec vlákna nyní? Vypočtěte v tomto okamžiku jeho (b) celkovou kinetickou energii, (c) rychlost, (d) kinetickou energii posuvného pohybu, (e) úhlovou rychlost a (f) kinetickou energii otáčivého pohybu.

ODST. 12.3 Ještě jednou moment síly

19C. Pro $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$ dokažte, že moment síly $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ je dán vztahem

$$\boldsymbol{M} = (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}.$$

20C. Dokažte následující tvrzení: Průmět momentu síly $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ do roviny vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$ je nulový.

21C. Na malý míček umístěný v bodě $(-2{,}0\,\text{m}; 0; 4{,}0\,\text{m})$ působí síla $\boldsymbol{F}$, která má nenulovou pouze jedinou složku. Určete velikost a směr momentu této síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic v následujících případech: (a) $F_x = 6{,}0\,\text{N}$, (b) $F_x = -6{,}0\,\text{N}$, (c) $F_z = 6{,}0\,\text{N}$ a (d) $F_z = -6{,}0\,\text{N}$.

22C. Na částici v bodě o souřadnicích $(0; -4{,}0\,\text{m}; 3{,}0\,\text{m})$ působí (a) síla $\boldsymbol{F}_1$ o složkách $F_{1x} = 2{,}0\,\text{N}$ a $F_{1y} = F_{1z} = 0$, (b) síla $\boldsymbol{F}_2$ o složkách $F_{2x} = 0$, $F_{2y} = 2{,}0\,\text{N}$ a $F_{2z} = 4{,}0\,\text{N}$. V obou případech vypočtěte velikost a směr momentu síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

23Ú. Síla $\boldsymbol{F} = (2{,}0\,\text{N})\boldsymbol{i} - (3{,}0\,\text{N})\boldsymbol{k}$ působí na kamínek, jehož poloha vzhledem k počátku soustavy souřadnic je dána vektorem $\boldsymbol{r} = (0{,}50\,\text{m})\boldsymbol{j} - (2{,}0\,\text{m})\boldsymbol{k}$. Vypočtěte moment této síly (a) vzhledem k počátku soustavy souřadnic, (b) vzhledem k bodu o souřadnicích $(2{,}0\,\text{m}; 0; -3{,}0\,\text{m})$.

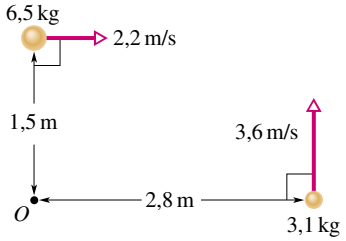
24Ú. Na částici v poloze určené souřadnicemi $(3{,}0\,\text{m}; -2{,}0\,\text{m}; 4{,}0\,\text{m})$ působí (a) síla $\boldsymbol{F}_1 = (3{,}0\,\text{N})\boldsymbol{i} - (4{,}0\,\text{N})\boldsymbol{j} + (5{,}0\,\text{N})\boldsymbol{k}$, (b) síla $\boldsymbol{F}_2 = (-3{,}0\,\text{N})\boldsymbol{i} - (4{,}0\,\text{N})\boldsymbol{j} - (5{,}0\,\text{N})\boldsymbol{k}$, (c) výslednice sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. Ve všech případech vypočtěte moment síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

25Ú. Na částici v bodě o souřadnicích $(0; -4{,}0\,\text{m}; 5{,}0\,\text{m})$ působí síly $\boldsymbol{F}_1 = (3{,}0\,\text{N})\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{F}_2 = (-2{,}0\,\text{N})\boldsymbol{j}$. Vypočtěte jejich výsledný moment vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

26Ú. Na částici o poloze $\boldsymbol{r} = (3{,}0\,\text{m})\boldsymbol{i} + (4{,}0\,\text{m})\boldsymbol{j}$ působí síla $\boldsymbol{F} = (-8{,}0\,\text{N})\boldsymbol{i} + (6{,}0\,\text{N})\boldsymbol{j}$. Vypočtěte (a) moment této síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic a (b) úhel mezi vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$.

ODST. 12.4 Moment hybnosti

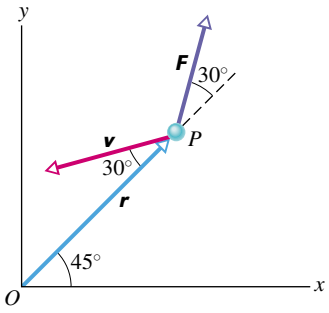
27C. Soustava na obr. 12.36 je složena ze dvou pohybujících se těles. Vypočtěte její celkový moment hybnosti vzhledem k bodu O.



Obr. 12.36 Cvičení 27

28C. Letadlo o hmotnosti 1 200 kg letí rychlostí $80\,\text{m·s}^{-1}$. Letí po přímce ve stálé výšce 1,3 km nad zemí. Vypočtěte velikost jeho momentu hybnosti vzhledem k bodu, který leží na zemském povrchu přímo pod ním.

29C. Částice o hmotnosti 2,0 kg je právě v poloze určené vektorem $\boldsymbol{r}$ ($r = 3{,}0\,\text{m}$) a má rychlost $\boldsymbol{v}$ ($v = 4{,}0\,\text{m·s}^{-1}$) (obr. 12.37). Síla $\boldsymbol{F}$ ($F = 2{,}0\,\text{N}$), která na ni působí, leží v rovině vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}$. Vypočtěte vzhledem k počátku soustavy souřadnic (a) moment hybnosti částice a (b) moment síly $\boldsymbol{F}$.



Obr. 12.37 Cvičení 29

30C. Pomocí rov. (12.26) lze ze zadaných hodnot r, p a φ určit moment hybnosti částice. V některých případech jsou však místo velikostí vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$ a úhlu mezi nimi zadány pouze jejich složky (x, y, z) a (v_x, v_y, v_z). (a) Dokažte, že složky momentu hybnosti částice $\boldsymbol{L}$ jsou dány vztahy $L_x = m(yv_z - zv_y)$, $L_y = m(zv_x - xv_z)$ a $L_z = m(xv_y - yv_x)$. (b) Dokažte, že při pohybu částice v rovině xy má její moment hybnosti nenulovou jedině z-ovou složku.

31C. Částice má v bodě o polohovém vektoru $\boldsymbol{r} = 2{,}0\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{k}$ (v metrech) rychlost $\boldsymbol{v} = -5{,}0\boldsymbol{i} + 5{,}0\boldsymbol{k}$ (v m/s) a působí na ni síla $\boldsymbol{F} = 4{,}0\boldsymbol{j}$ (v newtonech). Vypočtěte (a) moment hybnosti částice a (b) moment síly $\boldsymbol{F}$, obojí vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (*Tip*: Viz cvič. 19 a 30.)

32Ú. Člověk o hmotnosti 84 kg stojí na rovníku. Jaká je velikost jeho momentu hybnosti vzhledem ke středu Země?

33Ú. Soustava je tvořena dvěma stejně hmotnými částicemi, které se pohybují opačnými rychlostmi o velikosti v. Vzdálenost jejich přímkových trajektorií je d. (a) Vyjádřete velikost momentu hybnosti soustavy vzhledem k bodu ležícímu uprostřed mezi oběma trajektoriemi pomocí veličin m, v a d. (b) Jak se změní velikost momentu hybnosti, zvolíme-li jiný vztažný bod? (c) Jak se změní odpověď na otázky (a) a (b), budou-li se částice pohybovat po přímkách souhlasně?

34Ú. Těleso o hmotnosti 2,0 kg se pohybuje v rovině xy rychlostí $\boldsymbol{v}$ o složkách $v_x = 30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_y = 60\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. V určitém okamžiku prochází bodem o souřadnicích $(x, y) = (3{,}0\,\mathrm{m};\ -4{,}0\,\mathrm{m})$. (a) Určete v tomto okamžiku moment hybnosti tělesa vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (b) Vypočtěte moment hybnosti tělesa v tomtéž okamžiku, avšak vzhledem k bodu $(-2{,}0\,\mathrm{m};\ -2{,}0\,\mathrm{m})$.

35Ú. (a) Pomocí údajů v dodatcích vypočtěte velikost celkového momentu hybnosti soustavy planet při jejich oběhu kolem Slunce. Slunce považujte za vztažný bod. (b) Jak velký je moment hybnosti samotného Jupiteru a jakou část velikosti celkového momentu hybnosti představuje?

ODST. 12.5 Věta o momentu hybnosti

36C. Částice o hmotnosti 3,0 kg má v bodě o souřadnicích $x = 3{,}0$ m a $y = 8{,}0$ m rychlost $\boldsymbol{v} = (5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (6{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Na částici působí síla $\boldsymbol{F}$ o velikosti 7,0 N ve směru záporné osy x. (a) Vypočtěte její moment hybnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (b) Určete moment síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (c) Jak rychle se mění moment hybnosti částice? (Rychlost změny fyzikální veličiny určuje její časová derivace.)

37C. Na částici působí dvě síly. Moment první síly, označený $\boldsymbol{M}_1$ a vztažený k počátku soustavy souřadnic, má velikost 2,0 N·m a směřuje podél kladné osy x. Moment druhé síly, $\boldsymbol{M}_2$, má velikost 4,0 N·m a je rovnoběžný se záporným směrem osy y. Určete velikost a směr vektoru $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$, představujícího časovou derivaci momentu hybnosti částice, vztaženého rovněž k počátku soustavy souřadnic.

38C. V každém z následujících případů určete moment síly, která působí na částici pohybující se v rovině xy, znáte-li její moment hybnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic:

(a) $-4{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$,
(b) $-4{,}0t^2\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$,
(c) $-4{,}0\sqrt{t}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$,
(d) $-4{,}0/t^2\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$.

39C. Autíčko o hmotnosti 3,0 kg jede podél osy x. Časová závislost jeho rychlosti je dána funkcí $v_x = -2{,}0t^3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. V obecném okamžiku $t > 0$ vyjádřete (a) moment hybnosti autíčka vzhledem k počátku soustavy souřadnic a (b) moment síly, která na ně působí, vzhledem k témuž vztažnému bodu. Opakujte výpočet (a) a (b) pro vztažný bod o souřadnicích (c) (2,0 m; 5,0 m; 0), (d) (2,0 m; −5,0 m, 0).

40Ú. V okamžiku $t = 0$ je poloha částice o hmotnosti 2,0 kg dána polohovým vektorem $\boldsymbol{r} = (4{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} - (2{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{j}$. Její rychlost závisí na čase vztahem $\boldsymbol{v} = (-6{,}0t^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} + (3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Pro libovolný okamžik $t > 0$ vyjádřete (a) moment hybnosti částice, (b) výsledný moment sil, které na ni působí. Za vztažný bod pro výpočet momentů zvolte počátek soustavy souřadnic. (c) Výpočet částí (a) a (b) zopakujte pro vztažný bod $(-2{,}0\,\mathrm{m};\ -3{,}0\,\mathrm{m};\ 0\,\mathrm{m})$.

41Ú. Kulka o hmotnosti m je vystřelena ze země počáteční rychlostí o velikosti v_0 pod elevačním úhlem θ_0. (a) Vyjádřete její moment hybnosti vzhledem k místu výstřelu v závislosti na čase. (b) Jak rychle se moment hybnosti mění? (c) Vypočtěte velikost vektoru $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ přímo a porovnejte ji s výsledkem úlohy (b). Proč jsou oba výsledky shodné?

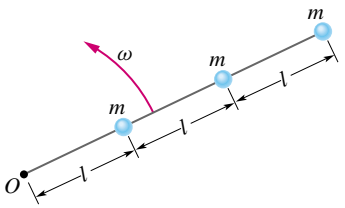
ODST. 12.7 Moment hybnosti tuhého tělesa vzhledem k pevné ose

42C. Brusný kotouč s momentem setrvačnosti $1{,}2{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$ je připojen k motoru, který na něj působí silou s momentem 16 N·m. Určete (a) moment hybnosti kotouče vzhledem k ose vedené jeho středem a (b) jeho úhlovou rychlost po uplynutí doby 33 ms od zapnutí motoru.

43C. Velikost momentu hybnosti setrvačníku vzhledem k ose vedené jeho středem se během 1,50 s zmenšila z $3{,}00\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$ na $0{,}800\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$. Těleso má vzhledem k této ose moment setrvačnosti $0{,}140\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$. (a) Určete průměrný moment sil, které na setrvačník při jeho brzdění působily, vzhledem k ose otáčení. (b) Vypočtěte celkový úhel otočení setrvačníku během brzdění

za předpokladu, že bylo rovnoměrné. (c) Jakou práci vykonaly brzdné síly? (d) Jaký byl jejich průměrný výkon?

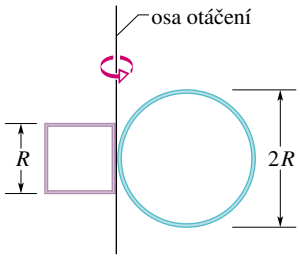
44C. Tři částice se stejnými hmotnostmi m jsou navzájem spojeny třemi vlákny délky l a připojeny k ose otáčení vedené bodem O (obr. 12.38). Hmotnost vláken je zanedbatelná. Soustava částic se otáčí kolem této osy s úhlovou rychlostí ω tak, že částice leží na přímce. Pomocí veličin m, l a ω vyjádřete (a) moment setrvačnosti soustavy vzhledem k bodu O, (b) moment hybnosti prostřední částice vzhledem k témuž bodu a (c) celkový moment hybnosti soustavy vzhledem k bodu O.



Obr. 12.38 Cvičení 44

45C. Homogenní tyč se otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím koncem. Délka tyče je 6,00 m, tíhová síla má velikost 10,0 N. Tyč se otáčí úhlovou rychlostí 240 ot/min ve směru otáčení hodinových ručiček při pohledu shora. (a) Vypočtěte moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose otáčení a (b) její moment hybnosti vzhledem k této ose.

46Ú. Na obr. 12.39 je znázorněno tuhé těleso, které se skládá z kruhové obruče o poloměru $R = 0{,}50\,\mathrm{m}$ a hmotnosti $m = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ a ze čtverce vyrobeného ze čtyř stejných tenkých tyčí o délce R a hmotnosti m. Těleso se otáčí konstantní úhlovou rychlostí kolem svislé osy s periodou 2,5 s. Vypočtěte (a) moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení a (b) jeho moment hybnosti vzhledem k této ose.

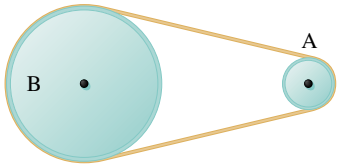


Obr. 12.39 Úloha 46

47Ú. Kola A a B na obr. 12.40 jsou spojena neprokluzujícím řemenem. Poloměr kola B je třikrát větší než poloměr kola A. Určete poměr momentů setrvačnosti kol I_A/I_B víte-li, že mají (a) stejný moment hybnosti vzhledem k osám otáčení, nebo (b) stejnou kinetickou energii otáčivého pohybu.

48Ú. Síla $F(t)$ působí po krátkou dobu Δt na rotující tuhé těleso s momentem setrvačnosti I. Ukažte, že platí

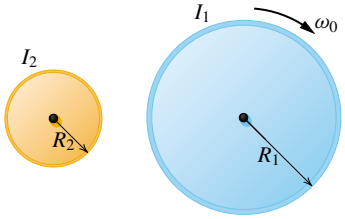
$$\int M\,\mathrm{d}t = \overline{F} R \Delta t = I(\omega_\mathrm{f} - \omega_\mathrm{i}),$$



Obr. 12.40 Úloha 47

kde R je rameno síly, $\overline{F}$ průměrná hodnota síly F v časovém intervalu Δt a ω_i, ω_f jsou úhlové rychlosti tělesa na začátku a na konci intervalu Δt. (Veličina $\int M\,\mathrm{d}t = \overline{F} R \Delta t$ se nazývá *impulz momentu síly*, v analogii s impulzem síly $\overline{F}\Delta t$.)

49Ú*. Dva válce s poloměry R_1 a R_2 se mohou volně otáčet kolem svých os (obr. 12.41). Odpovídající momenty setrvačnosti vzhledem k těmto osám jsou I_1 a I_2. Zpočátku se větší válec otáčí úhlovou rychlostí ω_0. Menší válec je v klidu a v určitém okamžiku se dotkne většího válce. Vlivem třecí síly se začne rovněž roztáčet. Po jisté době přestanou válce klouzat a od té chvíle se budou otáčet stálými úhlovými rychlostmi v opačných směrech. Vyjádřete úhlovou rychlost ω_2 menšího válce pomocí veličin I_1, I_2, R_1, R_2 a ω_0. (*Tip*: Moment hybnosti soustavy ani její kinetická energie se nezachovávají. Použijte vztah pro impulz momentu síly z úlohy 48.)



Obr. 12.41 Úloha 49

ODST. 12.8 Zákon zachování momentu hybnosti

50C. Rotor elektrického motoru má vzhledem k ose své rotační symetrie moment setrvačnosti $I_\mathrm{m} = 2{,}0\cdot10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. Motor je umístěn na palubě vesmírné sondy a slouží ke změně její orientace. Moment setrvačnosti sondy vzhledem k její ose, rovnoběžné s osou motoru, je $I_\mathrm{s} = 12\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. Vypočtěte, kolik otáček musí rotor vykonat, aby se sonda pootočila kolem své osy o úhel 30°.

51C. Člověk stojí s upaženýma rukama na desce, která se otáčí bez tření úhlovou rychlostí 1,2 ot/s. V každé ruce drží závaží. Moment setrvačnosti soustavy člověk+závaží+podložka vzhledem k ose otáčení má hodnotu $6{,}0\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. Člověk připaží a zmenší tak moment setrvačnosti soustavy na hodnotu $2{,}0\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. (a) Jakou úhlovou rychlostí se potom bude deska otáčet? (b) Určete poměr výsledné a počáteční kinetické energie soustavy. (c) Odkud se vzala „přebytečná“ kinetická energie?

52C. Dva kotouče jsou připojeny k ose pomocí ložisek a mohou se volně otáčet bez tření. Posouváním kotoučů podél osy lze docílit jejich spojení v jedno těleso. (a) První kotouč, jehož moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení je $3{,}3\,\mathrm{kg\cdot m^2}$, byl roztočen úhlovou rychlostí 450 ot/min. Druhý kotouč s momen-

tem setrvačnosti 6,6 kg·m^2 má úhlovou rychlost 900 ot/min. Kotouče se otáčejí souhlasně. (a) Určete společnou úhlovou rychlost kotoučů po jejich spojení. (b) Zodpovězte otázku (a) pro případ, že se kotouče před spojením otáčejí úhlovými rychlostmi 900 ot/min v opačných směrech.

53C. Kolo se volně otáčí úhlovou rychlostí 800 ot/min. Druhé kolo má dvakrát větší moment setrvačnosti a je zpočátku v klidu. V jistém okamžiku připojíme druhé kolo k hřídeli prvního kola. Hřídel má zanedbatelný moment setrvačnosti. (a) Určete výslednou úhlovou rychlost soustavy kol na hřídeli. (b) Určete změnu kinetické energie soustavy při spojení kol.

54C. Moment setrvačnosti rotující hvězdy se zmenšil na jednu třetinu své původní hodnoty. Určete poměr výsledné a počáteční kinetické energie otáčivého pohybu hvězdy.

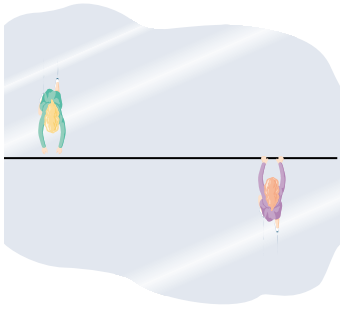
55C. Předpokládejme, že by Slunce spotřebovalo všechno jaderné palivo a náhle se smrštilo v bílého trpaslíka s poloměrem shodným s poloměrem Země. Jaká by byla nová perioda otáčení Slunce za předpokladu, že by se při smršťování neztratila žádná sluneční hmota? Současná perioda otáčení Slunce je asi 25 dní.

56C. Malý kolotoč má poloměr 1,20 m a hmotnost 180 kg. Jeho gyrační poloměr (úloha 58 v kap. 11) je 91,0 cm. Kolotoč je zpočátku v klidu. Chlapec o hmotnosti 44,0 kg běží rychlostí 3,00 m·s^{-1} po přímé dráze, která se dotýká obvodu kolotoče. V bodě dotyku hoch na kolotoč naskočí. Zanedbejte tření v ložiscích a vliv hřídele kolotoče a vypočtěte (a) moment setrvačnosti kolotoče vzhledem k ose otáčení, (b) moment hybnosti běžícího chlapce vzhledem k ose otáčení kolotoče a (c) výslednou úhlovou rychlost kolotoče a chlapce.

57C. Vodorovná kruhová deska se otáčí bez tření kolem svislé osy vedené jejím středem. Deska má hmotnost 150 kg, poloměr 2,0 m a moment hybnosti 300 kg·m^2 vzhledem k ose otáčení. Člověk o hmotnosti 60 kg pomalu kráčí od obvodu desky k jejímu středu. V okamžiku, když se nacházel na obvodu desky, byla úhlová rychlost soustavy deska + člověk 1,5 rad/s. Určete úhlovou rychlost soustavy v okamžiku, kdy je člověk vzdálen od osy otáčení o 0,50 m?

58C. Ráfek bicyklového kola má hmotnost 3,79 kg a poloměr 34,7 cm. Může se otáčet v ložisku bez tření. Člověk stojí na otočné stoličce a drží kolo nad hlavou tak, aby jeho osa byla svislá. Kolo se otáčí úhlovou rychlostí 57,7 rad/s ve směru chodu hodinových ručiček při pohledu shora. Otočná stolička je zpočátku v klidu. Moment setrvačnosti soustavy kolo + člověk + stolička vzhledem ke společné ose otáčení je 1,36 kg·m^2. Člověk volnou rukou náhle zastaví otáčení kola (vzhledem ke stoličce). Určete výslednou úhlovou rychlost (velikost a směr) soustavy. Moment setrvačnosti loukotí a středního ložiska kola zanedbejte.

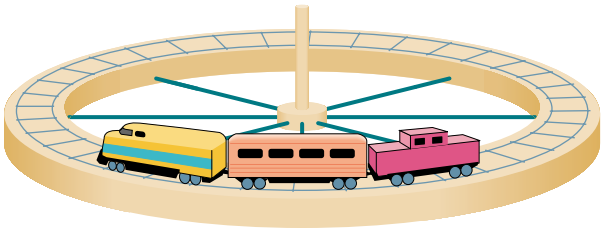
59Ú. Dva bruslaři o hmotnostech 50 kg se přibližují po rovnoběžných přímých drahách vzdálených o 3,0 m. Rychlosti bruslařů mají stejnou velikost 1,4 m·s^{-1}, jsou však opačně orientovány. První bruslař svírá v rukou konec dlouhé tyče zanedbatelné hmotnosti. Druhý bruslař uchopí tyč v okamžiku, kdy ji míjí (obr. 12.42). Tření mezi bruslemi a ledem považujeme za zanedbatelné. (a) Popište kvantitativně pohyb bruslařů po jejich spojení. (b) Ručkováním podél tyče se bruslaři přiblížili na vzdálenost 1,0 m. Určete výslednou úhlovou rychlost soustavy. (c) Vypočtěte kinetickou energii bruslařů ve stavech (a) a (b). (d) Odkud se vzala „přebytečná“ kinetická energie?



Obr. 12.42 Úloha 59

60Ú. Dvě děti o stejných hmotnostech m sedí na opačných koncích úzké desky o délce L a hmotnosti m shodné s hmotností dítěte. Deska se může otáčet bez tření kolem svislé osy vedené jejím středem. (a) Vypočtěte moment setrvačnosti desky s dětmi vzhledem k ose otáčení. (b) Určete moment hybnosti soustavy, otáčí-li se úhlovou rychlostí ω_0 ve směru otáčení hodinových ručiček při pohledu shora. Určete směr vektoru momentu hybnosti. (c) Během otáčení se děti posunuly podél desky a zmenšily svou vzdálenost od osy otáčení na polovinu původní hodnoty. Vyjádřete výslednou úhlovou rychlost soustavy pomocí ω_0. (d) Vypočtěte změnu kinetické energie soustavy. Jak vznikla „přebytečná“ kinetická energie? Při výpočtech nahraďte desku tenkou tyčí.

61Ú. Koleje dětského vláčku leží na velkém kole o hmotnosti m a poloměru R, které se může volně otáčet bez tření kolem svislé osy (obr. 12.43). Na kolejích stojí vláček o hmotnosti m'. Soustava je v klidu. Vláček uvedeme do pohybu rychlostí v vzhledem ke kolejím. Vypočtěte úhlovou rychlost ω kola. Při výpočtu nahraďte kolo obručí a zanedbejte hmotnost loukotí a středního ložiska.



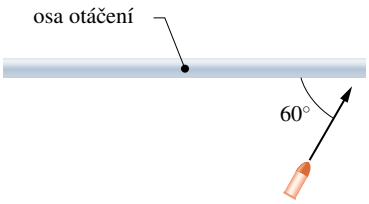
Obr. 12.43 Úloha 61

62Ú. Moucha o hmotnosti m se pohybuje proti směru chodu hodinových ručiček po obvodu kruhového talíře, který se může bez tření otáčet kolem svislé osy. Talíř má poloměr R a moment setrvačnosti I. Rychlost mouchy vzhledem k zemi je v, talíř se otáčí úhlovou rychlostí ω_0 ve směru chodu hodinových ručiček. Moucha se najednou zastaví. (a) Jaká je výsledná úhlová rychlost talíře? (b) Zachovala se mechanická energie soustavy?

63Ú. Děvče o hmotnosti m stojí na obvodu kolotoče o poloměru R a momentu setrvačnosti I. Kolotoč se může otáčet bez tření kolem svislé osy, zpočátku je však v klidu. Děvče hodí kámen o hmotnosti m' vodorovným směrem tečně k obvodu kolotoče. Rychlost kamene vzhledem k zemi je v. Vypočtěte (a) výslednou úhlovou rychlost kolotoče a (b) obvodovou rychlost děvčete na kolotoči.

64Ú. Gramofonová deska o hmotnosti 0,10 kg a poloměru 0,10 m se otáčí kolem svislé osy vedené jejím středem úhlovou rychlostí 4,7 rad/s. Moment setrvačnosti desky vzhledem k ose otáčení je $5{,}0{\cdot}10^{-4}$ kg·m^2. Na desku spadne hrudka tmelu o hmotnosti 0,020 kg a zůstane přilepena na jejím obvodu. Určete úhlovou rychlost desky po dopadu tmelu.

65Ú. Tenká homogenní tyč o délce 0,50 m a hmotnosti 4,0 kg se může otáčet ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím středem. Tyč je zpočátku v klidu. Na konec tyče narazí střela o hmotnosti 3,0 g. Dráha střely je vodorovná a svírá s osou tyče úhel 60° (obr. 12.44). Střela se do tyče zaryje a roztočí ji úhlovou rychlostí 10 rad/s. Jakou rychlostí střela do tyče narazila?



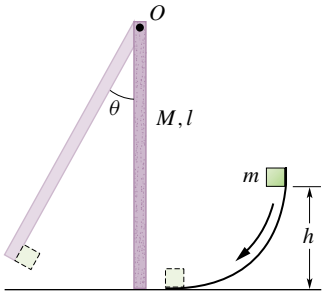
Obr. 12.44 Úloha 65

66Ú. Moucha o hmotnosti m sedí na obvodu homogenního kotouče o hmotnosti $10{,}0m$, který se může volně otáčet kolem svislé osy vedené jeho středem. Zpočátku se kotouč s mouchou otáčí úhlovou rychlostí ω_0. Moucha přejde po kotouči směrem k jeho středu a zastaví se v bodě vzdáleném od středu o polovinu poloměru kotouče. (a) Určete změnu úhlové rychlosti $\Delta\omega$ soustavy kotouč + moucha. (b) Vypočtěte poměr $E_k/E_{k,0}$ výsledné a počáteční kinetické energie soustavy. (c) Jak vznikl přírůstek kinetické energie?

67Ú. Homogenní kotouč o hmotnosti $10m$ a poloměru $3{,}0r$ se může volně otáčet kolem pevné svislé osy vedené jeho středem. Menší homogenní kotouč o hmotnosti m a poloměru r leží na povrchu většího kotouče tak, že jejich osy symetrie splývají. Zpočátku se oba kotouče otáčejí společně úhlovou rychlostí o velikosti 20 rad/s. Vlivem malé poruchy se menší kotouč vychýlí ze své původní polohy a klouže po velkém kotouči až k jeho obvodu, kde se zachytí. Poté se oba kotouče opět otáčejí společně, bez prokluzování. (a) Vypočtěte výslednou úhlovou rychlost velkého kotouče. (b) Vypočtěte poměr $E_{k,f}/E_{k,i}$ výsledné a počáteční kinetické energie soustavy kotoučů.

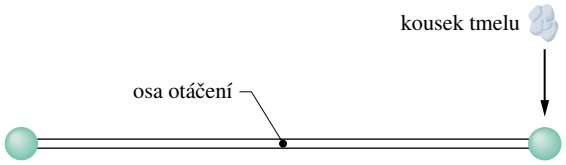
68Ú. Znečištění atmosféry prý může způsobit zvýšení průměrné teploty a roztavení polárních čepiček. Kdyby se polární ledové čepičky Země rozpustily a voda se vrátila do světového oceánu, zvětšila by se hloubka oceánu asi o 30 m. Jaký vliv by tato změna měla na otáčení Země? Odhadněte, jak by se změnila délka dne.

69Ú*. Částice o hmotnosti m klouže po dokonale hladké skluzavce na obr. 12.45. Narazí na homogenní svislou tyč a spojí se s ní. Po nárazu se tyč otočí kolem bodu O o úhel θ. Vyjádřete tento úhel pomocí veličin uvedených na obrázku.



Obr. 12.45 Úloha 69

70Ú*. Dva míče o hmotnostech 2,00 kg jsou připevněny ke koncům tenké tyče délky 50,0 cm zanedbatelné hmotnosti. Tyč se může otáčet bez tření kolem vodorovné osy vedené jejím středem. V okamžiku, kdy má tyč vodorovnou polohu, dopadne na ni hrudka tmelu o hmotnosti 50,0 g rychlostí 3,00 m·s^{-1} a zůstane s ní spojena (obr. 12.46). (a) Určete výslednou úhlovou rychlost tyče. (b) Vypočtěte poměr výsledné a počáteční kinetické energie soustavy tyč s míči + hrudka. (c) Vypočtěte úhlovou výchylku tyče z vodorovné polohy v okamžiku, kdy je její okamžitá úhlová rychlost nulová (bod obratu).



Obr. 12.46 Úloha 70

ODST. 12.9 Kvantovaný moment hybnosti

71C. Jakou hodnotu má složka spinového momentu hybnosti elektronu do libovolného pevného směru?

72C. Kladný pion (π^+) se může spontánně rozpadnout na kladný mion (μ^+) a neutrino (ν):

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu.$$

Má-li neutrino $m_s = +\frac{1}{2}$, vypočtěte (a) kvantové číslo m_s a (b) spinový moment hybnosti S kladného mionu.

73C. Dva protony, které se sráží velkými rychlostmi, se mohou přeměnit na tři protony a antiproton:

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}}.$$

Vypočtěte orientaci spinového momentu hybnosti produktů reakce (nahoru nebo dolů), víte-li, že oba protony mají spinové momenty hybnosti orientovány nahoru.

PRO POČÍTAČ

74Ú. Kuželková koule se obvykle bezprostředně po vrhu nejprve smýká a teprve pak se valí bez klouzání. Během smýkání na ni působí dynamická třecí síla, která zpomaluje její posuvný pohyb a urychluje její otáčení. Koule se přestane smýkat v okamžiku, kdy je $\omega R = v$, kde ω je úhlová rychlost, R je poloměr koule a v rychlost jejího těžiště. Na kouli působí třecí síla o velikosti $F = f_{\mathrm{d}}N$, kde f_{d} je koeficient dynamického tření a N je velikost normálové síly. Protože je dráha koule vodorovná, platí $N = mg$, kde m je hmotnost koule. Moment třecí síly je $M = FR$. Koule má hmotnost 7,25 kg a poloměr 10,9 cm, její moment setrvačnosti přibližně odpovídá momentu setrvačnosti homogenní koule. Sestavte počítačový program pro výpočet časových závislostí úhlové rychlosti a rychlosti těžiště koule a vypočtěte tyto hodnoty s krokem 0,1 s od okamžiku vrhu až do doby, kdy se koule začne valit. Za koeficient dynamického tření dosaďte 0,35 a za počáteční hodnotu rychlosti koule $20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Sestrojte grafy závislostí úhlové rychlosti a rychlosti koule na čase. Určete okamžik, kdy se koule přestane smýkat, a velikost její rychlosti v tomto okamžiku. (Touto rychlostí narazí koule do kuželek, neuvažujeme-li malý pokles rychlosti způsobený odporem vzduchu). Výpočty proveďte pro kouli, která (a) se zpočátku neotáčela, (b) byla vržena s počáteční úhlovou rychlostí 150 rad/s a otáčela se stejným směrem jako po skončení smýkání, (c) byla vržena se stejnou velikostí úhlové rychlosti jako v (b), ale směr otáčení byl opačný. (d) Jak musíme kouli hodit, aby narazila na kuželky největší možnou rychlostí?

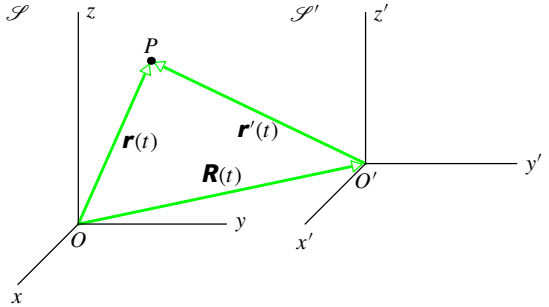
75Ú. Střela o hmotnosti 0,15 kg je vypálena počáteční rychlostí $50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 35°. Odpor vzduchu je zanedbatelný. (a) Sestavte počítačový program pro výpočet časové závislosti momentu hybnosti střely vzhledem k místu výstřelu. Použijte numerické integrace. Moment hybnosti tabelujte s krokem 0,1 s až do okamžiku, kdy střela dopadne na vodorovnou rovinu. Sestrojte graf závislosti velikosti momentu hybnosti střely na druhé mocnině času a ověřte, že je přímkový. Znázorněte závislost velikosti momentu tíhové síly na čase a ověřte, že i v tomto případě je grafem přímka. Při výpočtu použijte vztah $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor střely vzhledem k vztažnému bodu a $\boldsymbol{F}$ je tíhová síla, která na ni působí. Platí pro získané výsledky také vztah $\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$, analogický druhému Newtonovu pohybovému zákonu? (b) Započtěme nyní i vliv odporu vzduchu. Předpokládejme, že mezní rychlost střely je $v_{\mathrm{m}} = 75\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a že zrychlení střely může být vyjádřeno ve tvaru $\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{j} - bv\boldsymbol{v}$, kde $b = g/v_{\mathrm{m}}^2$. Bude i nyní velikost momentu hybnosti přímo úměrná druhé mocnině času? Je velikost momentu síly opět lineární funkcí času? Pro obecně zvolený okamžik rozhodněte, zda je velikost výsledného momentu sil působících na střelu větší, nebo menší než v případě bez odporu vzduchu. Získané numerické výsledky fyzikálně interpretujte.

76Ú. V určitém okamžiku je poloha částice vzhledem k počátku soustavy souřadnic dána vektorem $\boldsymbol{d} = (2{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (4{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} - (3{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$, její rychlost je $\boldsymbol{v} = -(6{,}00\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} + (3{,}00\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j} + (3{,}00\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{k}$. Na částici působí síla $\boldsymbol{F} = (6{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} - (8{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{j} + (4{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{k}$. Určete (a) zrychlení částice, (b) její moment hybnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic, (c) výsledný silový moment vzhledem k počátku soustavy souřadnic a (d) úhel mezi vektorem rychlosti a vektorem výslednice sil působících na částici.

PROBLÉM

77. Při odvození věty o momentu hybnosti pro soustavu částic (rov. (12.37)) jsme momenty hybnosti všech částic i momenty sil působících na tyto částice vztahovali k pevně zvolenému bodu O. Tento vztažný bod byl vždy v *klidu* vzhledem k určité *inerciální* vztažné soustavě. Na druhé straně jsme konstatovali, že věta o momentu hybnosti ve tvaru (12.37) platí i za předpokladu, že za vztažný bod zvolíme těžiště studované soustavy částic či tělesa. V příkladech a úlohách jsme pak valení těles interpretovali jako jejich otáčení kolem pevné osy vedené těžištěm. Je takový postup opravdu přípustný? Vždyť vztažná soustava spojená s těžištěm může být neinerciální! (Právě tak tomu je například u těles valících se zrychleně po nakloněné rovině.) A jestliže je možné spojit počátek vztažné soustavy s těžištěm, je třeba nějak omezit volbu souřadných os? Odpověď na poslední otázku prozradíme, zbytek dokážete pomocí návodu odvodit sami:

Označme $\mathscr{S}$ a $\mathscr{S}'$ dvě vztažné soustavy, jejichž odpovídající si souřadnicové osy jsou trvale rovnoběžné (obr. 12.47). Soustava $\mathscr{S}$ je inerciální a pohyb počátku O' soustavy $\mathscr{S}'$ je v ní popsán polohovým vektorem $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t)$. Poloha částice P je v okamžiku t zadána vektorem $\boldsymbol{r}(t)$ vzhledem k soustavě $\mathscr{S}$ a vektorem $\boldsymbol{r}'(t)$ vzhledem k soustavě $\mathscr{S}'$.



Obr. 12.47 Vztažná soustava $\mathscr{S}'$ se vzhledem k inerciální soustavě $\mathscr{S}$ pohybuje čistě posuvným pohybem se zrychlením $\boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2}$.

(a) Vyjádřete $\boldsymbol{r}(t)$ pomocí $\boldsymbol{r}'(t)$ a $\boldsymbol{R}(t)$. Označte $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{v}'(t)$, $\boldsymbol{V}(t)$ a $\boldsymbol{a}(t)$, $\boldsymbol{a}'(t)$, $\boldsymbol{A}(t)$ odpovídající rychlosti a zrychlení a ukažte, že platí následující *transformační vztahy*:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}'(t) + \boldsymbol{V}(t), \qquad \boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}'(t) + \boldsymbol{A}(t).$$

(V dalších výpočtech již nebudeme závislost veličin na čase explicitně vypisovat.) Uvědomte si, že požadavek neustálé rovnoběžnosti souřadnicových os soustav $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$ zaručuje, že vzájemný pohyb těchto soustav je čistě posuvný. Zamyslete se nad tím, zda by předchozí transformační vztahy pro rychlosti a zrychlení zůstaly v platnosti, kdybychom připustili možnost otáčení soustavy $\mathscr{S}'$ vzhledem k $\mathscr{S}$.

(b) Označme $\boldsymbol{L}$ moment hybnosti soustavy částic vzhledem ke vztažné soustavě $\mathscr{S}$. Platí (rov. (12.25) a (12.35))

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

a

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{v}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i .$$

(Výpočet $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ proveďte a zdůvodněte poslední rovnost.) Do vztahu pro $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ dosaďte $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{R}$ a $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}'_i + \boldsymbol{A}$ a vyjádřete tak výsledek pomocí čárkovaných veličin. Přesvědčte se, že platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t} + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i \right) \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{R} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}'_i + \boldsymbol{R} \times m\boldsymbol{A},$$

kde $\boldsymbol{L}' = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i$ je moment hybnosti soustavy částic vztažený k bodu O' a $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ je celková hmotnost soustavy.

(c) Obdobně postupujte při vyjádření celkového momentu vnějších sil působících na částice soustavy. Platí

$$\sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{i,\mathrm{ext}},$$

kde $\boldsymbol{F}_{i,\mathrm{ext}}$ je výslednice sil, jimiž objekty náležející do okolí soustavy působí na její i-tou částici. Použijte věty o hybnosti pro soustavu částic $\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i = \sum \boldsymbol{F}_{i,\mathrm{ext}} \right)$ a ukažte, že

$$\sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}} = \sum \boldsymbol{M}'_{\mathrm{ext}} + \boldsymbol{R} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}'_i + \boldsymbol{R} \times m\boldsymbol{A},$$

kde $M'_{\mathrm{ext}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_{i,\mathrm{ext}}$ je výsledný moment vnějších sil působících na soustavu, vztažený k bodu O'.

(d) Veličiny $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ a $\sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}$ jsou vázány větou o momentu hybnosti (rov. (12.37)). Porovnejte výrazy pro $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ a $\sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}$, získané v částech (b) a (c) a ukažte, že platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}'_{\mathrm{ext}} + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i \right) \times \boldsymbol{A}.$$

(e) V případě, že jsou všechny momenty vztaženy k bodu O' se tedy veličiny $\mathrm{d}\boldsymbol{L}'/\mathrm{d}t$ a $\sum \boldsymbol{M}'_{\mathrm{ext}}$ liší o vektor

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i \right) \times \boldsymbol{A}.$$

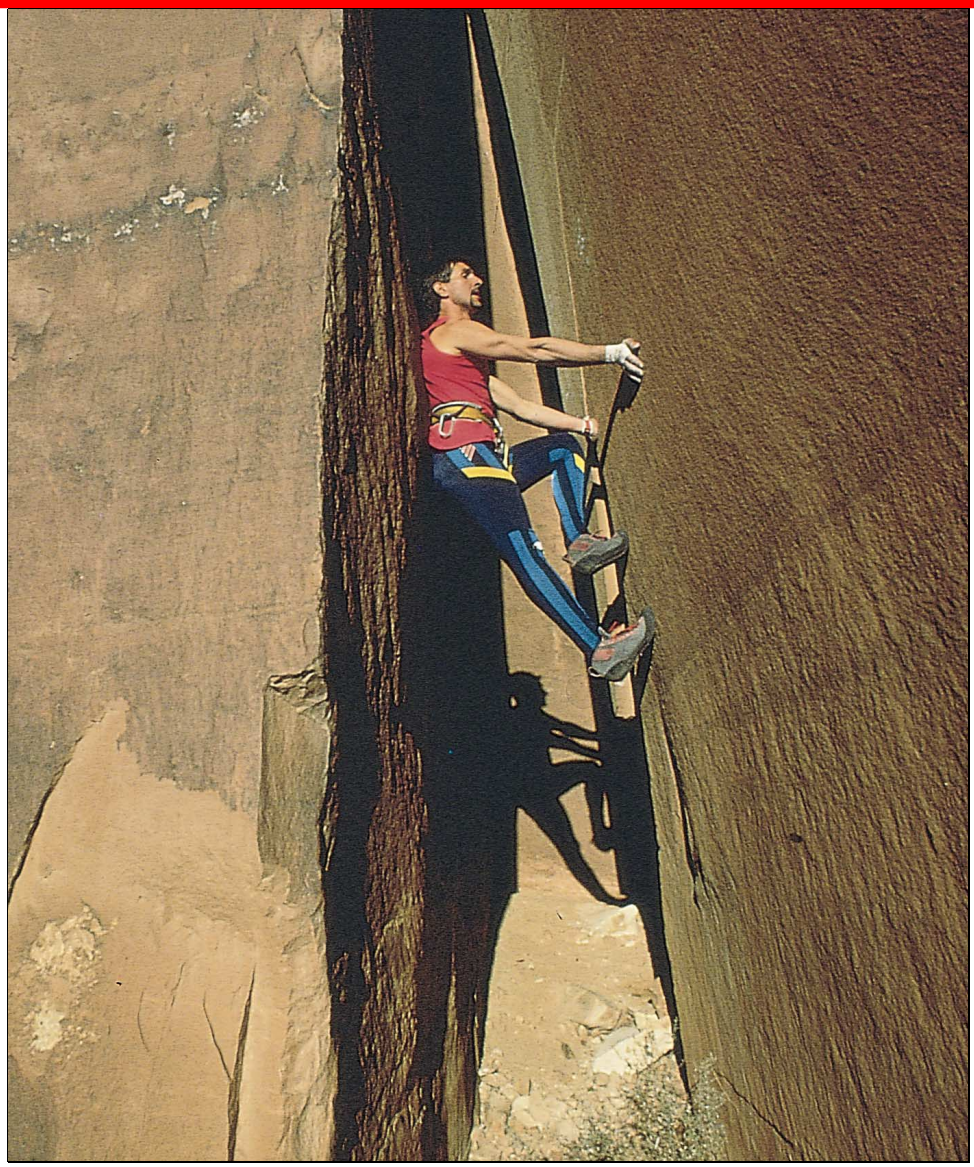
Tento vektor, představující „odchylku“ od zápisu věty o momentu hybnosti v inerciální vztažné soustavě, je nulový v každé ze tří situací (zdůvodněte použitím definice vektorového součinu):

1. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$,
2. $\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{0}$, a tedy $\boldsymbol{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i$ (ověřte zpětným dosazením $\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}$),
3. $\boldsymbol{A} \parallel \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i$ v každém okamžiku,

   $\boldsymbol{A}(t) = K \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}(t) \right)$, tj. $\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} + K\boldsymbol{R} = K\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}$.

K je jistá (neznámá) konstanta. V uvedených situacích budou formulace věty o momentu hybnosti ve vztažných soustavách $\mathscr{S}$ a $\mathscr{S}'$ formálně shodné. Fyzikálně významné jsou pouze případy 1 a 2. Interpretujte je. (Třetí případ představuje soustavu diferenciálních rovnic pro neznámý vektor $\boldsymbol{R}(t)$, s konstantou K jako parametrem.)

13
Rovnováha a pružnost



Horolezectví může být vaší — doslova — poslední praktickou zkouškou z fyziky. Pád může znamenat smrt a i mírné zaváhání může způsobit vážné zranění. Např. lezete-li dlouhým „komínem“, máte ramena zapřena o jednu stěnu široké svislé pukliny a chodidla o její druhou stěnu. Občas však musíte odpočívat, jinak spadnete vyčerpáním. Otázka zní: Jak se můžete uvolnit, abyste si odpočinuli? Budete-li odpočívat bez uvážení fyzikálních zákonů, stěny vás neudrží. Tedy — jaká je odpověď na tuto otázku života a smrti?

13.1 ROVNOVÁHA

Uvažujme několik těles: (1) kniha ležící na stole, (2) hokejový puk klouzající se zanedbatelným třením po ledě stálou rychlostí, (3) lopatky stropního větráku otáčející se stálou rychlostí a (4) kolo automobilu, jedoucího po rovné cestě stálou rychlostí. Pro každý z těchto případů platí (pozorováno ze Země, kterou v celé kapitole bereme za inerciální systém):

1. Celková hybnost $\boldsymbol{P}$ tělesa je konstantní.
2. Celkový moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ tělesa je konstantní.

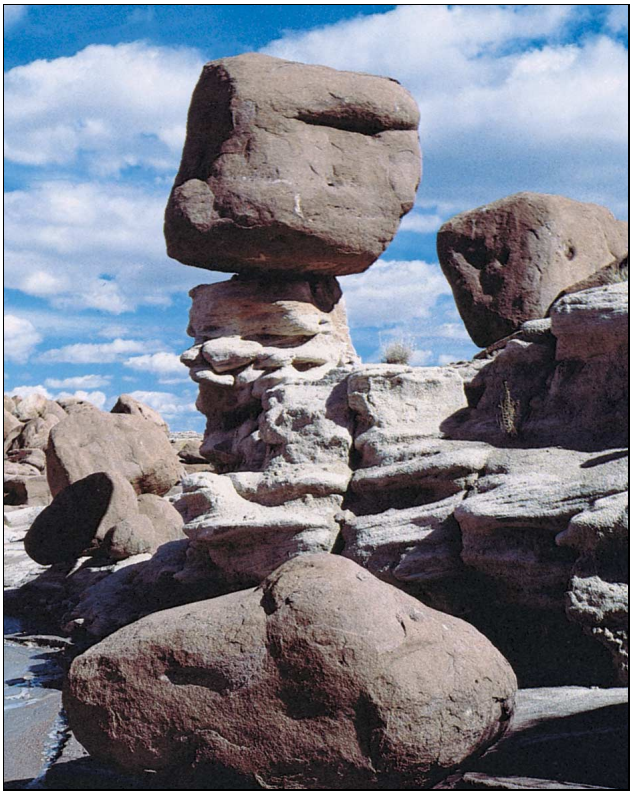
Říkáme, že taková tělesa jsou v rovnováze. Podmínky rovnováhy tedy jsou

$$\boldsymbol{P} = \text{konst.} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{L} = \text{konst.} \qquad (13.1)$$

V této kapitole se zaměříme na případy, kdy v naší inerciální soustavě jsou konstanty v rov. (13.1) nulové. To znamená, že sledovaná tělesa se vůči Zemi žádným způsobem nepohybují — neposouvají ani neotáčejí. Jsou tedy v klidu vůči zvolené inerciální soustavě, ve které je popisujeme; rovnoměrný posuv lze vždy vhodnou volbou inerciální soustavy odstranit, otáčení nikoliv. Taková tělesa jsou ve **statické rovnováze**. Ze čtyř těles uvedených na začátku tohoto odstavce je ve statické rovnováze pouze jedno — kniha ležící na stole.

Nebezpečně vyhlížející kámen — viklan — z obr. 13.1 je též příkladem tělesa, které je ve statické rovnováze — alespoň prozatím. Sdílí tuto vlastnost s nesčetnými dalšími objekty, jakými jsou katedrály, domy, čerpací stanice nebo budky v poli, které zůstávají na místě v průběhu času.

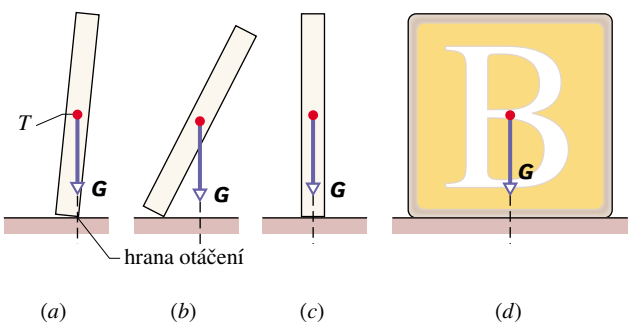
Obr. 13.1 Viklan u národního parku Zkamenělý les v Arizoně. I když jeho podložka vypadá podezřele, je kámen ve statické rovnováze.



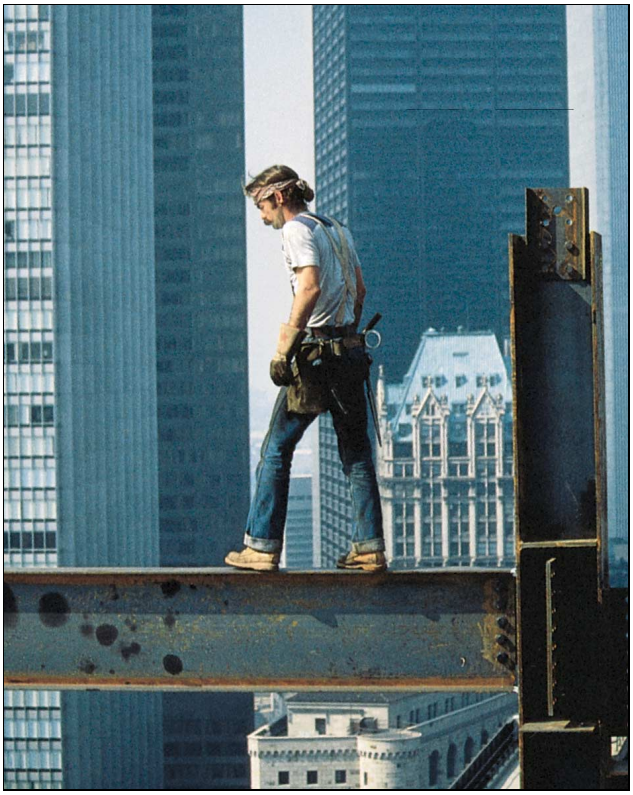
Jestliže se těleso vrátí do své rovnovážné polohy poté, co z ní bylo vychýleno, říkáme (viz čl. 8.5), že je ve **stálé** neboli stabilní rovnováze. Příkladem je kulička na dně důlku. Naopak, jestliže malá síla nevratně vychýlí těleso ze statické rovnovážné polohy, označujeme rovnováhu za **vratkou** neboli labilní. Mírou stability polohy je práce, kterou je nutno vynaložit, aby těleso nevratně změnilo svou polohu za jinou, zpravidla stabilnější. (A pro úplnost připomeňme z čl. 8.5 i rovnováhu **volnou** neboli indiferentní.)

Předpokládejme např., že vychýlíme dominovou kostku tak, jak je naznačeno v obr. 13.2a. Těžiště kostky leží přímo nad hranou, kolem které se kostka může otáčet a o kterou se opírá. Moment $\boldsymbol{M}$ její tíhové síly $\boldsymbol{G}$ vůči této hraně je zřejmě nulový, protože přímka, podél které síla $\boldsymbol{G}$ působí, prochází podpůrnou hranou. Nenutí tedy dominovou kostku konat rotační pohyb a kostka je ve statické rovnováze. Ovšem sebemenší náhodná síla rovnováhu poruší, protože posune **těžnici** (přímku, podél které síla $\boldsymbol{G}$ působí) mimo podpůrnou hranu (obr. 13.2b) a její moment pak bude otáčet dominovou kostku víc a víc. Statická rovnováha kostky znázorněná na obr. 13.2a je labilní (vratká).

Dominová kostka na obr. 13.2c již není tak nestabilní. Aby se kostka převrátila, musí na ni zapůsobit síla, která ji převalí přes rovnovážnou polohu znázorněnou na obr. 13.2a, kdy těžiště kostky leží přesně nad hranou otáčení. Slabá síla kostku nepřevrátí, ale silnější cvrnknutí prstem již ano. (Sestavíme-li z takto postavených dominových kostek řetězec, cvrnknutí na první kostku může způsobit postupný pád celého řetězce — „dominový efekt“.)



Obr. 13.2 (a) Dominová kostka vyvážená na hraně, těžiště leží přesně nad hranou. Těžnice (přímka, ve které tíhová síla $\boldsymbol{G}$ na kostku působí) prochází hranou otáčení. (b) Když je dominová kostka vychýlena i nepatrně za rovnovážnou polohu, vytvoří síla $\boldsymbol{G}$ moment, který zrychleně otáčí kostku dál. (c) Dominová kostka stojící na úzké stěně je o něco stabilnější než kostka v poloze (a). (d) Krychlová kostka je ještě stabilnější.



Obr. 13.3 Dělník balancující nad New Yorkem je ve statické rovnováze, jeho rovnováha ve směru nosníku je však stabilnější než ve směru kolmém na nosník.

Dětská kostka z obr. 13.2d je ještě stabilnější, protože její těžiště je nutno ještě více zdvihnout, aby přešlo přes hranu otáčení. Cvrnknutí prstem kostku nepřevrátí. Dělník z obr. 13.3 má vlastnosti jak dominové kostky, tak kostky čtvercového průřezu: podél nosníku je široce rozkročen a jeho postavení je stabilní, příčně na nosníku spočívá úzkou částí chodidel, takže jeho postavení je v tomto směru podstatně méně stabilní (je vydán na milost náhodnému závanu větru).

Analýza statické rovnováhy je velmi důležitá v inženýrské praxi. Konstruktér musí nalézt a určit všechny vnější síly a momenty sil, které mohou působit na navrhované dílo a zaručit vhodným konstrukčním návrhem a volbou materiálů, že jim vytvořené dílo odolá. Taková analýza je nezbytná, aby se např. zajistilo, že se most nezřítí vlivem dopravního ruchu či poryvem větru nebo že podvozek letadla vydrží prudké nárazy při tvrdých přistáních.

13.2 PODMÍNKY ROVNOVÁHY

Posuvný (translační) pohyb tělesa se řídí *větou o hybnosti* neboli *první impulzovou větou*, která vyjadřuje pro těleso totéž, co druhý Newtonův zákon pro hmotný bod. Podle rov. (9.28) platí

$$\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}. \tag{13.2}$$

Když je těleso v rovnováze pro posuvný pohyb, tj. když je $\boldsymbol{P}$ konstantní, pak je $\mathrm{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$ a platí

$$\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \boldsymbol{0} \quad \text{(rovnováha sil)}. \tag{13.3}$$

Otáčivý (rotační) pohyb tělesa se řídí *větou o momentu hybnosti* neboli *druhou impulzovou větou*, která vyjadřuje pro otáčení to, co předchozí rovnice pro posuvný pohyb. Podle rov. (12.37) platí

$$\sum \boldsymbol{M}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}. \tag{13.4}$$

Když je těleso v rovnováze pro otáčivý pohyb, tj. když je $\boldsymbol{L}$ konstantní, pak $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$ a platí

$$\sum \boldsymbol{M}_{\text{ext}} = \boldsymbol{0} \quad \text{(rovnováha momentů sil)}. \tag{13.5}$$

Z uvedeného plynou dvě **podmínky rovnováhy** tělesa, kladené na vnější síly:

V rovnováze musí být roven nule

1. vektorový součet všech vnějších sil působících na těleso,
2. vektorový součet všech momentů vnějších sil působících na těleso.

Tyto podmínky platí jak pro *statickou* rovnováhu, tak i pro obecnější případ rovnováhy, kdy $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{L}$ jsou konstantní, ale ne nulové. (Je dobré připomenout, že každý moment $\boldsymbol{M}_i$ každé síly $\boldsymbol{F}_i$ obecně závisí na poloze bodu B, vůči němuž moment počítáme. Je-li však $\sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$, pak $\sum \boldsymbol{M}_i$ na volbě B nezávisí.)

Rov. (13.3) a (13.5) jakožto vektorové rovnice odpovídají každá třem nezávislým rovnicím pro jednotlivé souřadnice:

Rovnováha sil	Rovnováha momentů sil
$\sum F_x = 0$	$\sum M_x = 0$
$\sum F_y = 0$	$\sum M_y = 0$
$\sum F_z = 0$	$\sum M_z = 0$

(13.6)

Pro jednoduchost jsme v posledních rovnicích vypustili index $_{\text{ext}}$, který v předcházejících rovnicích zdůrazňoval,

že se jedná o vnější (externí) síly a vnější momenty sil působící na těleso.

Problém si zjednodušíme tím, že budeme uvažovat pouze případy, kdy síly působící na těleso leží v rovině xy. To znamená, že momenty sil mohou vyvolávat pouze otáčení kolem osy rovnoběžné s osou z. Tímto předpokladem vyloučíme jednu rovnici pro složky sil a dvě rovnice pro složky momentů sil ze soustavy rovnic (13.6). Zbývají rovnice

$$\sum F_x = 0 \quad \text{(rovnováha sil)}, \tag{13.7}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{(rovnováha sil)}, \tag{13.8}$$

$$\sum M_z = 0 \quad \text{(rovnováha momentů sil)}. \tag{13.9}$$

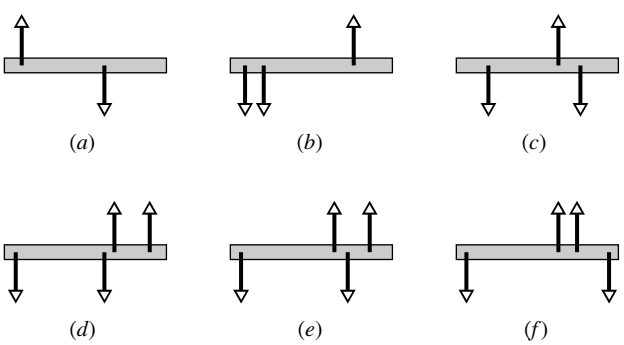
Zde F_x a F_y jsou x-ové, resp. y-ové složky vnějších sil působících na těleso a M_z je moment vnějších sil způsobující otáčení tělesa kolem osy z nebo kolem *libovolné* osy s ní rovnoběžné.

Hokejový puk klouzající stálou rychlostí po ledě splňuje rov. (13.7) až (13.9), a je tedy v rovnováze (dokonce i když rotuje), *ale nikoli ve statické*. Pro dosažení podmínek statické rovnováhy musí být hybnost puku $\boldsymbol{P}$ dokonce nulová; puk musí na ledě klidně ležet. Tak můžeme vyjádřit další podmínky statické rovnováhy kladené na okamžitý stav tělesa:

Ve statické rovnováze musí být také rovny nule

3. úhrnná hybnost $\boldsymbol{P}$ tělesa,
4. úhrnný moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ tělesa.

KONTROLA 1: Na obrázku je pohled shora na šest homogenních tyčí, na které kolmo působí různé soustavy dvou a více sil. V kterých případech lze při správně volených nenulových velikostech sil dosáhnout statické rovnováhy?

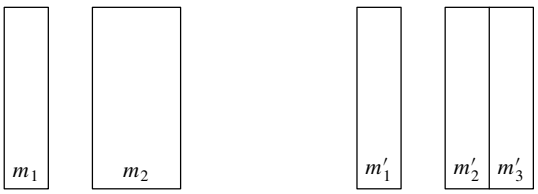


13.3 TĚŽIŠTĚ; STŘED HMOTNOSTI

Nyní rozebereme dva velmi blízké pojmy — střed hmotnosti a těžiště. Ukážeme si, v čem se liší i proč v praxi obvykle splývají. (Termín „těžiště“ je běžný i v hovorové češtině, zatímco „střed hmotnosti“ je výhradně odborný termín. V angličtině je však „center of mass“ obvyklý i v hovorovém stylu.)

Střed hmotnosti

Střed hmotnosti (SH) soustavy neboli **hmotný střed** je jednoznačně určen rozložením hmotnosti v soustavě a fakticky jsme ho již studovali v čl. 9.2. SH jediné částice splývá s její polohou: $\boldsymbol{r}_{\mathrm{SH}} = \boldsymbol{r}_1$. SH soustavy dvou *stejných* částic leží uprostřed mezi nimi: $\boldsymbol{r}_{\mathrm{SH}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)$. Analogicky je tomu u soustavy N stejných částic: $\boldsymbol{r}_{\mathrm{SH}} = \sum_i \boldsymbol{r}_i / N$, což můžeme zapsat i jako $\boldsymbol{r}_{\mathrm{SH}} = \sum_i \boldsymbol{r}_i / \sum_i 1$. Jedničky, které sčítáme ve jmenovateli, nám ukazují, že všechny částice bereme se stejnou vahou.



K odvození středu hmotnosti

A co když mají částice různé hmotnosti? Představme si nejprve soustavu dvou částic, kde druhá je dvakrát těžší než první: $m_2 = 2m_1$. S takovou soustavou je zřejmě ekvivalentní soustava tří stejných částic, kde $m'_1 = m'_2 = m'_3 = m_1$ a $\boldsymbol{r}'_1 = \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}'_2 = \boldsymbol{r}'_3 = \boldsymbol{r}_2$ podle obrázku. Snadno tedy najdeme její střed hmotnosti:

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{SH}} = \frac{\sum_i \boldsymbol{r}'_i}{\sum_i 1} = \frac{\boldsymbol{r}'_1 + \boldsymbol{r}'_2 + \boldsymbol{r}'_3}{1+1+1}.$$

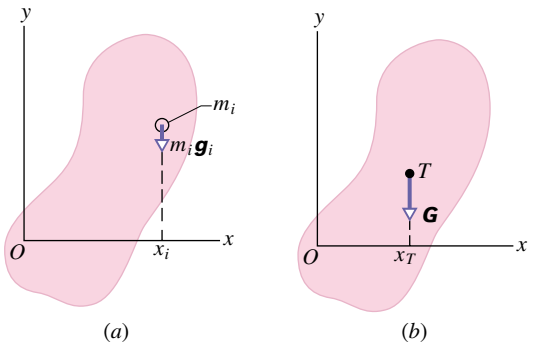
To můžeme zapsat sugestivněji:

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{SH}} = \frac{m'_1}{m'_1}\frac{\boldsymbol{r}'_1 + 2\boldsymbol{r}'_2}{1+2} = \frac{m'_1\boldsymbol{r}'_1 + 2m'_1\boldsymbol{r}'_2}{m'_1 + 2m'_1} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

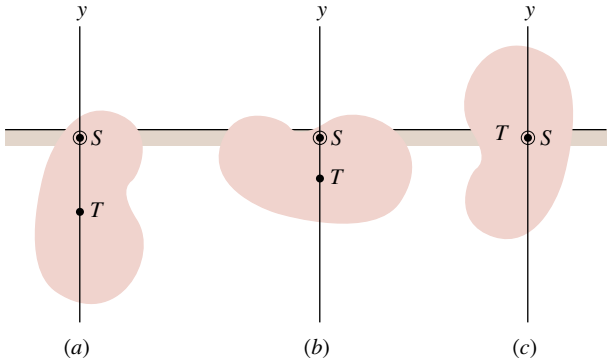
Tento vzorec lze snadno zobecnit na N *různých* částic:

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{SH}} = \frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{m}\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i, \tag{13.10}$$

kde $m = \sum_i m_i$ značí celkovou hmotnost soustavy. Dostali jsme týž vzorec, který jsme používali v rov. (9.8) pro těžiště. Nepoužili jsme přitom žádné jiné veličiny než vnitřní parametry N, m_i, m, $\boldsymbol{r}_i$ soustavy.



Obr. 13.4 (a) Na element tělesa o hmotnosti m_i působí tíhová síla $m_i\boldsymbol{g}_i$ a vytváří vůči počátku O soustavy souřadnic moment s ramenem rovným souřadnici x_i. (b) Výsledná tíhová síla $\boldsymbol{G}$ působí v těžišti T tělesa. Její rameno vzhledem k počátku O je rovno x_T.



Obr. 13.5 Těleso volně otočné kolem podpěrného bodu S se bude otáčet tak dlouho, dokud těžiště nezaujme polohu svisle pod bodem S, jako je tomu v případech (a) a (b). Výjimkou je jenom případ (c), kdy bod S leží právě v těžišti.

Těžiště

Uvažujme nyní tuhé těleso (tj. soustavu částic, které mají navzájem neproměnné vzdálenosti) nacházející se ve vnějším silovém poli $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$. Na jeho i-tou částici působí tedy síla $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{F}_i$. Příkladem může být nepravidelný kámen v tíhovém poli Země. Chceme nyní nahradit silové působení na jednotlivé částice tělesa jedinou silou $\boldsymbol{G}$ působící v jistém bodě — **těžišti** T. Nahrazení znamená, že kdybychom mohli vypnout působení tíhového pole na jednotlivé částice tělesa a místo něj zapnuli tíhovou sílu v těžišti, celkové silové a momentové působení na těleso by se nezměnilo.

Doposud jsme tvrdili, že tíhová síla $\boldsymbol{G}$ působí ve středu hmotnosti (SH) tělesa, že tedy těžiště splývá se středem hmotnosti tělesa. Ukážeme nyní, že toto tvrzení je správné, když tíhové zrychlení $\boldsymbol{g}$ je v celém tělese konstantní.

Obr. 13.4a ukazuje těleso hmotnosti m s vyznačenou i-tou částicí hmotnosti m_i. Na každou takovou částici působí tíhová síla $m_i\boldsymbol{g}_i$, kde $\boldsymbol{g}_i$ je tíhové zrychlení v místě, kde se částice nachází. Každá tíhová síla $m_i\boldsymbol{g}_i$ vytváří vůči ose, která prochází počátkem O soustavy souřadnic kolmo k obrázku, moment síly $\boldsymbol{M}_i$, který dle rov. (11.32) má velikost

$$M_i = x_i m_i g_i,$$

kde x_i je rameno $r_\perp$ síly $m_i\boldsymbol{g}_i$. Velikost výsledného momentu M_v od všech částic je pak

$$M_\mathrm{v} = \sum M_i = \sum x_i m_i g_i. \qquad (13.11)$$

Obr. 13.4b ukazuje tíhovou sílu $\boldsymbol{G}$ působící v těžišti T tělesa. Dle rov. (11.32) velikost momentu síly vyvolaného silou $\boldsymbol{G}$ vůči ose procházející počátkem je

$$M = x_T G, \qquad (13.12)$$

kde x_T je rameno síly $\boldsymbol{G}$. Síla $\boldsymbol{G}$ je rovna součtu tíhových sil $m_i\boldsymbol{g}_i$ působících na jeho elementy. Když nyní do rov. (13.12) dosadíme $\sum m_i\boldsymbol{g}_i$ za $\boldsymbol{G}$, můžeme psát

$$M = x_T \sum m_i g_i. \qquad (13.13)$$

Těžiště jsme zavedli jako bod, vůči němuž je moment $\boldsymbol{M}$ výsledné tíhové síly $\boldsymbol{G}$ stejný jako součet $\boldsymbol{M}_\mathrm{v}$ všech momentů $\boldsymbol{M}_i$ sil $\boldsymbol{G}_i$ působících na částice tělesa. Je tedy M z rov. (13.13) stejné jako M_v z rov. (13.11) a můžeme psát

$$x_T \sum m_i g_i = \sum x_i m_i g_i. \qquad (13.14)$$

Je-li tedy $\boldsymbol{g}$ konstantní, jsou všechna g_i stejná, můžeme je ze součtů na obou stranách rov. (13.14) vytknout a pak zkrátit. Dosadíme-li ještě na levé straně rov. (13.14) za $\sum m_i$ úhrnnou hmotnost tělesa m a touto hmotností vydělíme pravou stranu rovnice, dostaneme

$$x_T = \frac{1}{m} \sum x_i m_i. \qquad (13.15)$$

Porovnáním s rov. (13.10) vidíme, že pravá strana (13.15) dává souřadnici x_SH středu hmotnosti. Můžeme tedy napsat

$$x_\mathrm{SH} = x_T. \qquad (13.16)$$

Střed hmotnosti tělesa a jeho těžiště mají stejnou souřadnici x.

Tento výsledek můžeme rozšířit na všechny tři souřadnice použitím vektorového vyjádření momentů sil. Výsledek zní: Těžiště splývá se středem hmotnosti tělesa, jestliže tíhové zrychlení je stejné ve všech bodech tělesa.

Jednoslovné a stručné označení „těžiště“, umožňující pohodlné odvozeniny typu „těžišťový vztažný systém“, se

proto běžně používá též jako synonymum pro delší a dvojslovný termín „střed hmotnosti“. (V této knize tak činíme všude.)

Z rov. (13.12) plyne, že moment síly vyvolaný tíhovou silou tělesa je nulový pouze tehdy, když rameno síly x_T je nulové. Je-li těleso podepřeno v nějakém bodu S, kolem kterého se může otáčet, otáčí se (vlivem momentu síly $M = x_T G$ vzhledem k S) tak dlouho, dokud rameno síly x_T není nulové. Těžiště tělesa pak leží svisle pod bodem podepření, jak je naznačeno na obr. 13.5a, b, a těleso je ve stálé rovnováze. Když je těleso podepřeno v těžišti jako na obr. 13.5c, potom pro jakékoliv natočení tělesa je x_T nulové a těleso je v *rovnováze volné*.

„Těžiště“ v nehomogenním poli

Co se změní, když silové pole $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ není homogenní? I v takovém případě bychom mohli — při každé konkrétní poloze tělesa v poli — zavést „tíhovou sílu“ a „těžiště“ tak, aby tato tíhová síla byla součtem dílčích sil a celkový moment dílčích sil by byl roven nule. Přesněji řečeno, našli bychom takto těžnici, tj. přímku (se směrem daným výslednou silou), na níž by leželo těžiště. Problém je v tom, že pro různé polohy tělesa se těžnice v nehomogenním poli nemusejí protínat, a v tělese tedy neexistuje těžiště jakožto *univerzální* bod, do něhož bychom mohli pro zjednodušení „stáhnout“ veškerou hmotu tělesa. Pro každou konkrétní polohu tělesa je vždy nutno určit znovu jak výslednou tíhovou sílu, tak i její působiště („těžiště“).

Není pravděpodobné, že bychom kdy vyšetřovali v tíhovém poli zemském těleso tak rozlehlé, abychom museli započíst nehomogenitu tíhového pole. Nebudeme také asi nikdy měřit natolik přesně, abychom museli zahrnout nehomogennost tíhového pole v rámci běžných předmětů.

Je třeba si uvědomit, že např. *odstředivá síla*, kterou uplatníme při zkoumání v otáčejícím se systému, roste se vzdáleností od osy otáčení: $F = m\omega^2 r$, a pole odstředivé síly je tedy výrazně nehomogenní.

V nehomogenním poli, a tedy i při studiu kývání či otáčení *nemůžeme* tuhé těleso nahradit hmotným bodem v jeho středu hmotnosti.

13.4 PŘÍKLADY STATICKÉ ROVNOVÁHY

V tomto odstavci budeme řešit šest příkladů na statickou rovnováhu. V každém vybereme systém o jednom či více objektech, na které aplikujeme rovnice rovnováhy



Michel Menin kráčí po laně napjatém ve výši 3 150 m nad francouzskou zemědělskou krajinou. Svou polohu stabilizuje těžkou ohnutou tyčí, která sníží těžiště systému Menin+tyč do blízkosti lana, a umožní mu tak čelit závanům větru.

(rov. (13.7) až (13.9)). Ve všech příkladech budeme uvažovat jen síly působící v rovině xy, které vůči počátku soustavy souřadnic vytvářejí moment síly mířící ve směru osy z. Ve smyslu rov. (13.9) vyjadřující rovnováhu momentů vybereme osu rovnoběžnou s osou z, vůči které budeme počítat momenty sil. I když je rov. (13.9) splněna pro jakoukoliv volbu takové osy, ukážeme si, že vhodnou volbou osy můžeme vyloučit jednu či více neznámých sil, čímž se použití rov. (13.9) zjednoduší.

PŘÍKLAD 13.1

Homogenní nosník délky d a hmotnosti $m_n = 1{,}8$ kg spočívá svými konci na dvou digitálních siloměrech, jak je naznačeno v obr. 13.6a. Homogenní kvádr hmotnosti $m_k = 2{,}7$ kg leží na nosníku, přičemž jeho střed leží ve vzdálenosti $\frac{1}{4}d$ od levého konce nosníku. Jaké síly ukáží siloměry?

Náš systém bude tvořit nosník a kvádr. Obr. 13.6b je diagram systému, který uvažujeme jako volný, s vyznačením všech sil na něj působících. Siloměry podpírají levý a pravý konec nosníku silami $\boldsymbol{F}_l$ a $\boldsymbol{F}_p$. Velikosti těchto sil odečteme na siloměrech. Na nosník působí tíhová síla $m_n\boldsymbol{g}$ svisle dolů v jeho středu. Podobně na kvádr působí tíhová síla $m_k\boldsymbol{g}$ svisle dolů v jeho středu. V diagramu na obr. 13.6b je kvádr reprezentován pouze tečkou uvnitř schématu nosníku a vektor $m_k\boldsymbol{g}$ je znázorněn jako vycházející z této tečky. (Při překreslování obr. 13.6a do obr. 13.6b je vektor $m_k\boldsymbol{g}$ posunut podél přímky, ve které působí. Takové posunutí nezmění ani velikost síly $m_k\boldsymbol{g}$, ani velikost momentu sil, který tato síla vytváří vůči kterékoliv ose.)

Náš systém je ve statické rovnováze, takže musí být splněny jak rovnice rovnováhy sil rov. (13.7) a (13.8), tak i rov-

nice rovnováhy momentů sil (13.9). Zadaný příklad budeme řešit dvojím způsobem.

PRVNÍ ŘEŠENÍ: Síly nemají žádné x-ové složky, takže rov. (13.7) $\sum F_x = 0$ je splněna automaticky, aniž poskytne nějaké informace. Rov. (13.8) dá pro velikosti y-ových složek sil podmínku

$$\sum F_y = F_\mathrm{l} + F_\mathrm{p} - m_\mathrm{n} g - m_\mathrm{k} g = 0. \qquad (13.17)$$

V rovnici vystupují dvě neznámé síly (F_l a F_p), ale nemůžeme je obě určit z této jediné rovnice. Máme však po ruce ještě jednu rovnici, totiž rov. (13.9), která vyjadřuje rovnováhu momentů sil.

Momenty sil v rov. (13.9) můžeme vyjádřit vůči libovolné ose kolmé k rovině obr. 13.6. Zvolíme osu procházející levým koncem nosníku. Za kladné budeme pokládat ty momenty sil, které — působí-li samostatně — vyvolají kolem zvolené osy otáčení proti směru hodinových ručiček. Z rov. (13.9) potom plyne

$$\sum M_z = (F_\mathrm{l})(0) - (m_\mathrm{k} g)(\tfrac{1}{4}d) - \\ - (m_\mathrm{n} g)(\tfrac{1}{2}d) + (F_\mathrm{p})(d) = 0,$$

odkud

$$F_\mathrm{p} = (\tfrac{1}{4}g)(2m_\mathrm{n} + m_\mathrm{k}) = \\ = \tfrac{1}{4}(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(2 \cdot 1{,}8\ \mathrm{kg} + 2{,}7\ \mathrm{kg}) = \\ = 15\ \mathrm{N}. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (13.18)$$

Všimněte si: tím, že jsme zvolili osu procházející působištěm jedné z neznámých sil (F_l), jsme tuto sílu vyloučili z rov. (13.9), a tím umožnili přímo z ní vypočítat druhou z neznámých sil. *Vhodná volba osy zjednoduší řešení problému.*

Neznámou sílu F_l pak určíme z rov. (13.17), když do ní dosadíme již známé hodnoty:

$$F_\mathrm{l} = (m_\mathrm{k} + m_\mathrm{n})g - F_\mathrm{p} = \\ = (2{,}7\ \mathrm{kg} + 1{,}8\ \mathrm{kg})(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}) - (15\ \mathrm{N}) = \\ = 29\ \mathrm{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

DRUHÉ ŘEŠENÍ: Pro kontrolu vyřešíme příklad ještě pro jinou volbu osy. Když jsme zvolili osu procházející levým koncem nosníku, dostali jsme rov. (13.18) a velikost síly $F_\mathrm{p} = 15\ \mathrm{N}$.

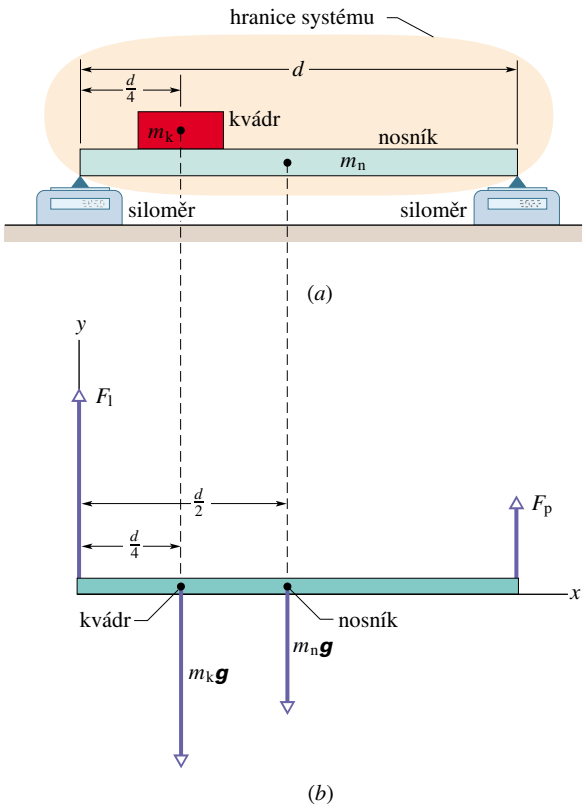
Pro osu procházející pravým koncem nosníku rov. (13.9) dává

$$\sum M_z = -(F_\mathrm{l})(d) + (m_\mathrm{k} g)(\tfrac{3}{4}d) + \\ + (m_\mathrm{n} g)(\tfrac{1}{2}d) + (F_\mathrm{p})(0) = 0.$$

Když tuto rovnici řešíme pro F_l, dostaneme

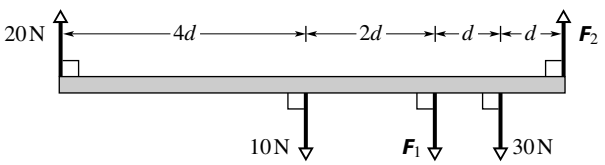
$$F_\mathrm{l} = (\tfrac{1}{4}g)(2m_\mathrm{n} + 3m_\mathrm{k}) = \\ = \tfrac{1}{4}(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(2 \cdot 1{,}8\ \mathrm{kg} + 3 \cdot 2{,}7\ \mathrm{kg}) = \\ = 29\ \mathrm{N}, \quad \text{(Odpověď)}$$

což je ve shodě s naším předcházejícím výsledkem. Všimněte si ještě, že délka nosníku nevystupuje v poslední rovnici přímo, ale jen prostřednictvím toho, jak ovlivňuje hmotnost nosníku. Všimněte si také, že podmínku rovnováhy sil nepotřebujeme, když podmínku rovnováhy momentů sil užijeme pro dvě různé osy.



Obr. 13.6 Příklad 13.1. (a) Nosník hmotnosti m_n nese kvádr o hmotnosti m_k. Hranice systému je vyznačena. (b) Diagram systému, který uvažujeme jako volný, ukazuje síly působící na systém nosník + kvádr.

KONTROLA 2: Na obrázku je pohled shora na homogenní tyč, která je ve statické rovnováze. (a) Můžete najít velikosti neznámých sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ pouze z podmínky rovnováhy sil? (b) Chcete-li určit velikost síly $\boldsymbol{F}_2$ použitím jediné rovnice, kam musíte umístit osu otáčení? (c) Ukáže se, že velikost síly $\boldsymbol{F}_2$ je 65 N. Jaká je pak velikost síly $\boldsymbol{F}_1$?



PŘÍKLAD 13.2

Kuželkář drží v ruce kouli o hmotnosti $m_k = 7{,}2\,\text{kg}$. Jak ukazuje obr. 13.7a, vrchní část jeho ruky (paže) je ve svislé, spodní část (předloktí) ve vodorovné poloze. Jakou silou v tomto případě musí působit biceps a jeho úpony na předloktí? Předloktí má hmotnost $m = 1{,}8\,\text{kg}$; předpokládané rozměry jsou vyznačeny na obr. 13.7a.

ŘEŠENÍ: Naším systémem je předloktí spolu s koulí. Na obr. 13.7b je znázorněn silový diagram systému. (Koule je znázorněna tečkou uvnitř hranic schématu předloktí; tíhová síla $m_k\boldsymbol{g}$ má své působiště umístěno do této tečky. Při překreslování obr. 13.7a do diagramu na obr. 13.7b byl vektor $m_k\boldsymbol{g}$ posunut podél přímky, ve které působí. Takové posunutí nezmění ani velikost síly $m_k\boldsymbol{g}$, ani velikost momentu sil, který tato síla vytváří vůči kterékoliv ose.) Neznámé síly jsou síla $\boldsymbol{T}$, kterou působí biceps, a síla $\boldsymbol{F}$, kterou působí kost paže v loketním kloubu na kost předloktí. Všechny síly působí svisle.

Z rov. (13.8), která říká $\sum F_y = 0$, dostáváme

$$\sum F_y = T - F - mg - m_k g = 0. \qquad (13.19)$$

Užijeme momentovou rovnici (13.9). Proložíme osu otáčení loketním kloubem (bod O) kolmo k rovině obrázku, momenty sil vyvolávající rotaci proti směru otáčení hodinových ručiček budeme pokládat za kladné a dostaneme

$$\sum M_z = (F)(0) + (T)(d) - (mg)(D) - (m_k g)(a) = 0. \qquad (13.20)$$

Volbou osy procházející bodem O jsme vyloučili neznámou F z rov. (13.20). Z rovnice vypočítáme T:

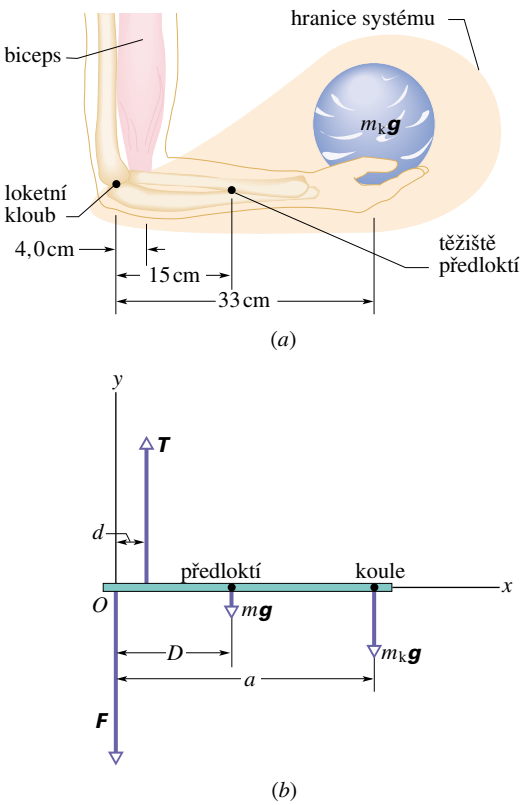
$$T = g\frac{mD + m_k a}{d} = (9{,}8\,\text{m·s}^{-2})\frac{(1{,}8\,\text{kg})(15\,\text{cm}) + (7{,}2\,\text{kg})(33\,\text{cm})}{(4{,}0\,\text{cm})} = 648\,\text{N} \doteq 650\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Biceps musí držet předloktí silou, která je přibližně devětkrát větší než tíha koule; držet těžkou kouli způsobem znázorněným na obr. 13.7a je obtížné.

Z rov. (13.19) po dosazení již známých hodnot dostaneme pro F vyjádření

$$F = T - g(m_k + m) = (648\,\text{N}) - (9{,}8\,\text{m·s}^{-2})(7{,}2\,\text{kg} + 1{,}8\,\text{kg}) = 560\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Síla F je přibližně osmkrát větší než tíha koule.

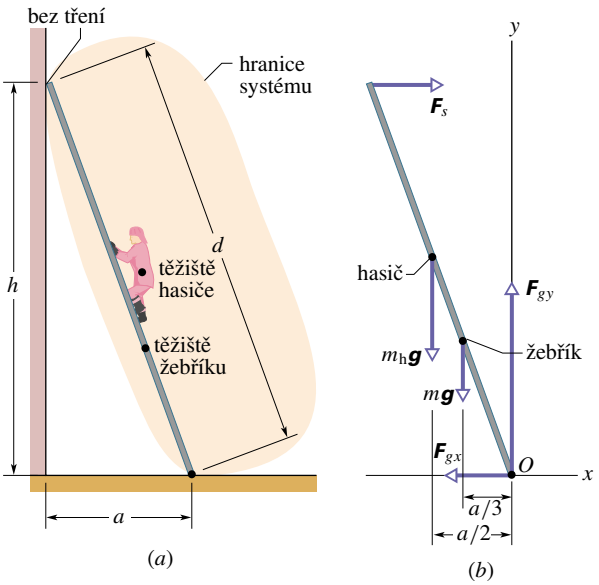


Obr. 13.7 Příklad 13.2 (a) Ruka drží kuželkovou kouli. Hranice systému je vyznačena. (b) Diagram systému předloktí + koule ukazuje působící síly, když pokládáme systém za volný. Vektory nejsou znázorněny ve stejném měřítku; síla $\boldsymbol{T}$ přenášená bicepsem a síla $\boldsymbol{F}$ působící na loketní kloub jsou mnohonásobně větší než ostatní síly.

PŘÍKLAD 13.3

Žebřík o délce $d = 12\,\text{m}$ a hmotnosti $m = 45\,\text{kg}$ je opřen o stěnu ve výšce $h = 9{,}3\,\text{m}$, jak je naznačeno na obr. 13.8a. Těžiště žebříku je v jedné třetině jeho výšky. Hasič o hmotnosti $m_h = 72\,\text{kg}$ vyšplhá po žebříku tak vysoko, že jeho těžiště leží v polovině výšky žebříku. Předpokládejte, že tření mezi žebříkem a stěnou je zanedbatelné a opření žebříku o podlahu je pevné. Jaké síly působí na žebřík od stěny a od podlahy?

ŘEŠENÍ: Na obr. 13.8b je znázorněn diagram systému *hasič + žebřík*, když jej pokládáme za volný. (Hasič je znázorněn tečkou uvnitř hranic schématu žebříku; vektor tíhové síly $m_h\boldsymbol{g}$ má počátek v místě tečky. Při překreslování obr. 13.8a do obr. 13.8b byl vektor $m_h\boldsymbol{g}$ posunut podél přímky, ve které působí. Posunutí nezmění ani velikost síly $m_h\boldsymbol{g}$, ani velikost momentu sil, který tato síla vytváří vůči kterékoliv ose.) Stěna působí na žebřík vodorovnou silou $\boldsymbol{F}_s$. Síla nemůže mít žádnou svislou složku, protože předpokládáme, že mezi stěnou a žebříkem nevzniká tření. Podlaha působí na žeb-



Obr. 13.8 Příklady 13.3 a 13.4. (a) Hasič vyšplhá do poloviny výšky žebříku, který je opřen o hladkou stěnu (mezi žebříkem a stěnou nepůsobí tření). Tření mezi podlahou a žebříkem zabrání podklouznutí žebříku. (b) Silový diagram systému, který pokládáme za volný, ukazuje síly působící na systém hasič + žebřík. Počátek O soustavy souřadnic je volen v místě, kde působí neznámá síla $\boldsymbol{F}_g$ (její složky $\boldsymbol{F}_{gx}$ a $\boldsymbol{F}_{gy}$ jsou v diagramu vyznačeny). Taková volba usnadní nalezení další neznámé síly $\boldsymbol{F}_s$.

řík silou $\boldsymbol{F}_g$, která má vodorovnou složku F_{gx} (vzhledem k pevnému opření — dostatečně velké tření mezi podlahou a žebříkem nebo zapíchnutí žebříku do země) a svislou složku F_{gy} (obvyklá normálová síla). Jak je ukázáno v diagramu, zvolíme soustavu souřadnic s počátkem O v místě, kde je žebřík opřen o podlahu. Vzdálenost a od stěny k patě žebříku vypočteme jako odvěsnu v pravoúhlém trojúhelníku:

$$a = \sqrt{d^2 - h^2} = \sqrt{(12\,\mathrm{m})^2 - (9{,}3\,\mathrm{m})^2} = 7{,}58\,\mathrm{m}.$$

Z rovnic rovnováhy složek sil (13.7) a (13.8) dostaneme pro náš systém rovnice

$$\sum F_x = F_s - F_{gx} = 0 \qquad (13.21)$$

a

$$\sum F_y = F_{gy} - m_h g - mg = 0. \qquad (13.22)$$

Rov. (13.22) dává

$$F_{gy} = g(m_h + m) = (9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(72\,\mathrm{kg} + 45\,\mathrm{kg}) = \\ = 1\,146{,}6\,\mathrm{N} \doteq 1\,100\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pro výpočet rovnováhy momentů sil zvolíme osu procházející počátkem O kolmo na rovinu obrázku. Ramena sil $\boldsymbol{F}_s$, $m_h\boldsymbol{g}$, $m\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{F}_{gx}$ a $\boldsymbol{F}_{gy}$ vůči zvolené ose jsou postupně h, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, 0 a 0. Nulová ramena sil $\boldsymbol{F}_{gx}$ a $\boldsymbol{F}_{gy}$ způsobí, že tyto síly mají nulový moment vůči zvolené ose. Z rovnice rovnováhy momentů sil (13.9) potom plyne

$$\sum M_z = -(F_s)h + (m_h g)(\tfrac{1}{2}a) + (mg)(\tfrac{1}{3}a) = 0. \qquad (13.23)$$

Řešením rov. (13.23) dostaneme pro F_s vyjádření

$$F_s = \frac{ga(\frac{1}{2}m_h + \frac{1}{3}m)}{h} = \\ = \frac{(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(7{,}58\,\mathrm{m})(36\,\mathrm{kg} + 15\,\mathrm{kg})}{(9{,}3\,\mathrm{m})} = \\ = 407\,\mathrm{N} \doteq 410\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z rov. (13.21) potom ještě dostaneme

$$F_{gx} = F_s = 410\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 13.4

Nechť v př. 13.3 má statický činitel tření f_s mezi žebříkem a podlahou hodnotu 0,53. Na jakou část $0 \leqq q \leqq 1$ žebříku může hasič vylézt, než žebřík začne podklouzávat?

ŘEŠENÍ: Síly mají stejná označení jako na obr. 13.8. Nechť qd je délka, kam může po žebříku hasič vylézt, než žebřík začne podklouzávat (jeho vodorovná vzdálenost od počátku O je pak qa). V okamžiku podklouznutí je splněna rovnice

$$F_{gx} = f_s F_{gy}, \qquad (13.24)$$

ve které je F_{gx} statická síla tření (obvykle značená F_s) a F_{gy} je normálová síla (obvykle značená N).

Použijeme-li rov. (13.9) vyjadřující rovnováhu momentů a volíme-li osu procházející počátkem O, dostaneme v okamžiku podklouznutí rovnici

$$\sum M_z = -(F_s)(h) + (m_h g)(qa) + (mg)(\tfrac{1}{3}a) = 0,$$

odkud

$$F_s = \frac{ga}{h}(\tfrac{1}{3}m + m_h q). \qquad (13.25)$$

Rovnice ukazuje toto: jak hasič stoupá po žebříku, tj. jak roste q, tak musí vzrůstat i síla F_s, kterou působí stěna na žebřík, aby byla dosažena rovnováha. Abychom našli hledanou hodnotu q v okamžiku podklouznutí, musíme nejprve nalézt, jaká bude v tomto okamžiku síla F_s.

Rov. (13.7) pro rovnováhu x-ových složek sil dává

$$\sum F_x = F_s - F_{gx} = 0.$$

Porovnáme-li tuto rovnici s rov. (13.24), dostaneme, že v okamžiku podklouznutí

$$F_s = F_{gx} = f_s F_{gy}. \qquad (13.26)$$

Z rov. (13.8) pro rovnováhu y-ových složek sil dostáváme

$$\sum F_y = F_{gy} - m_\mathrm{h} g - mg = 0,$$

odkud

$$F_{gy} = (m_\mathrm{h} + m)g. \qquad (13.27)$$

Porovnáme-li rovnice (13.26) a (13.27), dostaneme

$$F_\mathrm{s} = f_\mathrm{s} g(m_\mathrm{h} + m). \qquad (13.28)$$

Jestliže nakonec porovnáme rov. (13.25) a (13.28) a řešíme je pro q, dostaneme

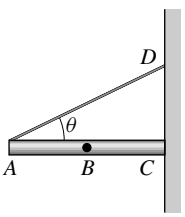
$$q = \frac{f_\mathrm{s} h}{a}\frac{(m_\mathrm{h}+m)}{m_\mathrm{h}} - \frac{m}{3m_\mathrm{h}} = \qquad (13.29)$$
$$= \frac{(0{,}53)(9{,}3\,\mathrm{m})}{(7{,}6\,\mathrm{m})}\frac{(72\,\mathrm{kg}+45\,\mathrm{kg})}{(72\,\mathrm{kg})} - \frac{(45\,\mathrm{kg})}{3(72\,\mathrm{kg})} =$$
$$= 0{,}85. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Hasič může vylézt do 85 % délky žebříku, než začne žebřík podklouzávat.

Z rov. (13.29) můžete dále vyčíst, že hasič může vylézt až na konec žebříku (tomu odpovídá $q = 1$), aniž žebřík podklouzne, pokud činitel tření $f_\mathrm{s} > 0{,}61$. Na druhé straně žebřík podklouzne už vlastní vahou ($q = 0$), když činitel tření $f_\mathrm{s} < 0{,}11$.

Příklad lze vyřešit jednodušeji, zvolíme-li za počátek souřadnic místo dotyku žebříku o stěnu.

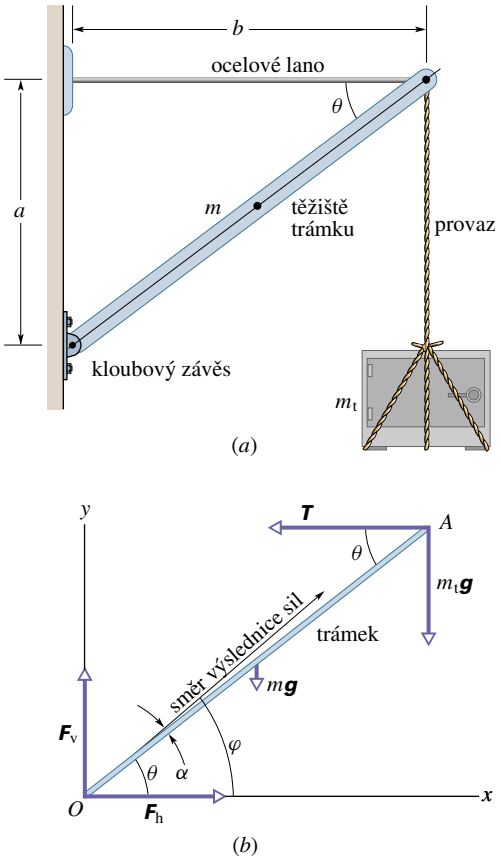
KONTROLA 3: Tyč AC o hmotnosti 5 kg, znázorněná na připojeném obrázku, je držena v klidu jednak silou $\boldsymbol{T}$ přenášenou přes provaz AD, jednak silou tření mezi stěnou a tyčí. Homogenní tyč je dlouhá 1 m a úhel, který svírá provaz s tyčí, činí $\theta = 30°$. (a) Do kterého z označených bodů musíte umístit osu, vůči níž budete počítat momenty sil, máte-li jedinou rovnicí najít sílu $\boldsymbol{T}$, kterou na tyč působí provaz? S takto zvolenou osou určete, jaká znaménka budou mít (b) moment síly M_t, způsobený tíhou tyče, a (c) moment síly M_p, kterým na tyč působí provaz, když budete pokládat momenty sil působící proti směru otáčení hodinových ručiček za kladné. (d) Je M_p větší, menší, nebo stejně velké jako M_t?



PŘÍKLAD 13.5

Obr. 13.9a zobrazuje trezor o hmotnosti $m_\mathrm{t} = 430\,\mathrm{kg}$, který je provazem přivázán k nosníku s rozměry $a = 1{,}9\,\mathrm{m}$ a $b = 2{,}5\,\mathrm{m}$. Homogenní trámek nosníku má hmotnost $m = 85\,\mathrm{kg}$, hmotnost vodorovného lana je zanedbatelná.

(a) Jak velkou silou $\boldsymbol{T}$ je napínáno lano?



Obr. 13.9 Příklad 13.5. (a) Trezor je zavěšen na nosníku, který sestává z homogenního šikmého trámku a vodorovného ocelového lana. (b) Silový diagram trámku uvažovaného jako volné těleso. Všimněte si, že výslednice sil $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{h}$ nemíří přesně ve směru osy trámku.

ŘEŠENÍ: Na obr. 13.9b je silový diagram trámku, který pokládáme za náš systém. Na trámek působí v jeho těžišti tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, v bodě A síla $\boldsymbol{T}$ od lana a síla $m_\mathrm{t}\boldsymbol{g}$ od provazu (tíha trezoru), a konečně v kloubovém závěsu O síla $\boldsymbol{F}$ od stěny s horizontální složkou $\boldsymbol{F}_\mathrm{h}$ a vertikální $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$.

Použijme rov. (13.9) vyjadřující rovnováhu momentů sil, přičemž osu otáčení necháme procházet kloubovým závěsem (bod O) kolmo k rovině obrázku. Když pokládáme za kladné ty momenty sil, které vyvolávají rotaci působící proti směru otáčení hodinových ručiček, dostáváme

$$\sum M_z = (T)(a) - (m_\mathrm{t} g)(b) - (mg)(\tfrac{1}{2}b) = 0.$$

Chytrou volbou osy jsme z rovnice vyloučili neznámé síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{h}$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ (nevytváří totiž žádný moment síly vůči zvolené ose) a zbyla nám jen jediná neznámá síla $\boldsymbol{T}$. Tu z rovnice vypočteme:

$$T = \frac{gb(m_\mathrm{t} + \frac{1}{2}m)}{a} = \\ = \frac{(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}5\,\mathrm{m})(430\,\mathrm{kg} + 42{,}5\,\mathrm{kg})}{(1{,}9\,\mathrm{m})} = \\ = 6\,090\,\mathrm{N} \doteq 6\,100\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Najděte složky $\boldsymbol{F}_\mathrm{h}$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ síly, která na trámek působí přes kloubový závěs.

ŘEŠENÍ: Použijeme rovnice rovnováhy sil. Z rov. (13.7) dostaneme

$$\sum F_x = F_\mathrm{h} - T = 0,$$

a tedy

$$F_\mathrm{h} = T = 6\,090\,\mathrm{N} \doteq 6\,100\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z rov. (13.8) dostaneme

$$\sum F_y = F_\mathrm{v} - mg - m_\mathrm{t}g = 0,$$

a tedy

$$F_\mathrm{v} = g(m + m_\mathrm{t}) = (9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(85\,\mathrm{kg} + 430\,\mathrm{kg}) = \\ = 5\,047\,\mathrm{N} \doteq 5\,000\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jakou silou působí kloubový závěs na trámek?

ŘEŠENÍ: Z obrázku vidíme, že

$$F = \sqrt{F_\mathrm{h}^2 + F_\mathrm{v}^2} = \\ = \sqrt{(6\,090\,\mathrm{N})^2 + (5\,047\,\mathrm{N})^2} \doteq 7\,900\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že síla F je podstatně větší než společná tíha trezoru a trámku (5 000 N) i než napětí ve vodorovném lanu (6 100 N).

(d) Jaký je úhel α mezi osou trámku a směrem působení výsledné síly $\boldsymbol{F}$, která působí od kloubového závěsu na trámek?

ŘEŠENÍ: Z obrázku vidíme, že

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{a}{b} = \frac{(1{,}9\,\mathrm{m})}{(2{,}5\,\mathrm{m})} = 0{,}760, \quad \text{tedy } \theta = 37{,}2^\circ,$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F_\mathrm{v}}{F_\mathrm{h}} = \frac{(5\,047\,\mathrm{N})}{(6\,090\,\mathrm{N})} = 0{,}829, \quad \text{tedy } \varphi = 39{,}6^\circ,$$

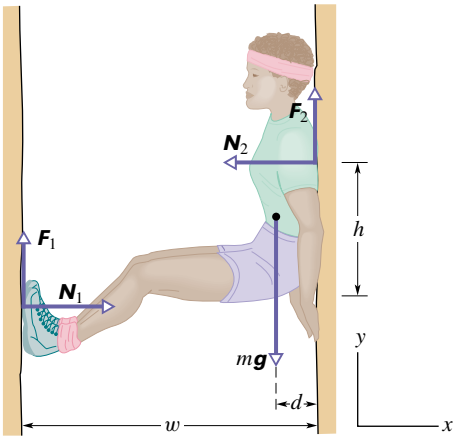
a tedy

$$\alpha = \varphi - \theta = 39{,}6^\circ - 37{,}2^\circ = 2{,}4^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kdyby tíha trámku byla tak malá, že by se dala zanedbat, úhel α by se rovnal nule. Síla od kloubového závěsu by pak působila přesně ve směru osy trámku.

PŘÍKLAD 13.6

Na obr. 13.10 je zobrazena horolezkyně o hmotnosti $m = 55\,\mathrm{kg}$, která odpočívá při lezení „komínem“. Má zapřena ramena a nohy ve spáře, jejíž šířka $w = 1{,}0\,\mathrm{m}$. Její těžiště je ve vzdálenosti $d = 0{,}2\,\mathrm{m}$ od stěny, na které má zapřena ramena. Činitel statického tření mezi botami a stěnou $f_1 = 1{,}1$ a mezi rameny a stěnou $f_2 = 0{,}70$.



Obr. 13.10 Příklad 13.6. Na obrázku jsou znázorněny síly, které působí na horolezkyni odpočívající při lezení skalním komínem. Síla, kterou horolezkyně působí na stěny komínu, vede ke zvýšení normálových sil $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$ (obě jsou stejně velké), a tím i třecích sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$.

(a) Jakou minimální silou musí horolezkyně působit na stěny, aby nespadla?

ŘEŠENÍ: Horizontální síly působící na ramena ($\boldsymbol{N}_2$) i boty ($\boldsymbol{N}_1$) mají stejnou velikost N, ale opačnou orientaci. Proto je výsledná horizontální síla nulová a rov. (13.7), tj. $\sum F_x = 0$, je splněna.

Tíhová síla působí na horolezkyni svisle dolů. Proti ní působí třecí síly $\boldsymbol{F}_1$ na chodidla a $\boldsymbol{F}_2$ na ramena. Dokud je síla působící na stěny dostatečně velká, ustaví se automaticky rovnováha a je splněna rov. (13.8) ($\sum F_y = 0$), která dává

$$F_1 + F_2 = mg. \qquad (13.30)$$

Předpokládejme, že zpočátku horolezkyně tlačí na stěny velmi silně a potom tlak uvolňuje. Jak uvolňuje tlak, klesá velikost normálové síly N, a spolu s ní klesají i hodnoty součinů f_1N a f_2N, které limitují velikosti automatického nastavení rovnováhy třecích sil působících na ramena a chodidla horolezkyně a její tíhy (viz rov. (6.1)).

Když velikost síly N klesne na hodnotu, kdy součin f_1N je právě roven třecí síle F_1 působící na chodidla horolezkyně

a součin f_2N třecí síle F_2 působící na její ramena, je horolezkyně na pokraji podklouznutí na obou místech. Kdyby ještě dále snížila tlak na stěny, bude součet zmíněných součinů menší než její tíha mg a horolezkyně spadne. Nejmenší hodnotu velikosti síly N, při které ještě nedojde k podklouznutí, tak dostaneme z rovnice

$$f_1N + f_2N = mg, \qquad (13.31)$$

která plyne z rov. (13.30). Jejím řešením dostaneme hledanou hodnotu

$$N = \frac{mg}{f_1 + f_2} = \frac{(55\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})}{(1{,}1 + 0{,}70)} = \\ = 299\,\mathrm{N} \doteq 300\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Minimální síla, kterou horolezkyně musí tlačit na stěny, aby nespadla, je přibližně 300 N.

(b) Jaká musí být při této síle vertikální vzdálenost h mezi horolezčinými rameny a chodidly, aby byla ve stabilní rovnováze?

ŘEŠENÍ: Aby byla splněna momentová rov. (13.9), tj. $\sum M_z = 0$, musí mít síly působící na horolezkyni nulový výsledný moment vůči libovolné ose otáčení kolmé k rovině obrázku. Zvolíme-li takovou osu v místě, kde působí síla mezi rameny a stěnou, dostaneme rovnici

$$\sum M_z = -F_1 w + Nh + mgd = 0. \qquad (13.32)$$

Vyřešíme-li tuto rovnici pro h, dosadíme za F_1 hodnotu f_1N, položíme $N = 299\,\mathrm{N}$ a užijeme ostatní známé hodnoty, dostaneme postupně

$$h = \frac{F_1 w - mgd}{N} = \frac{f_1 N w - mgd}{N} = f_1 w - \frac{mgd}{N} = \\ = (1{,}1)(1{,}0\,\mathrm{m}) - \frac{(55\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(0{,}20\,\mathrm{m})}{(299\,\mathrm{N})} = \\ = 0{,}739\,\mathrm{m} \doteq 0{,}74\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Stejný výsledek dostaneme, když zvolíme jakoukoliv jinou osu kolmou k rovině obrázku, např. osu procházející místem působení chodidel na stěnu.

(c) Jaké jsou hodnoty třecích sil držících horolezkyni?

ŘEŠENÍ: Ze známé hodnoty síly $N = 299\,\mathrm{N}$ dostaneme

$$F_1 = f_1 N = (1{,}1)(299\,\mathrm{N}) = \\ = 328{,}9\,\mathrm{N} \doteq 330\,\mathrm{N} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a z rov. (13.30) dále plyne

$$F_2 = mg - F_1 = (55\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) - (328{,}9\,\mathrm{N}) = \\ = 210{,}1\,\mathrm{N} \doteq 210\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Je horolezkyně ve stabilní rovnováze, když působí na stěny stejnou silou (299 N), ale její chodidla jsou výše? Uvažujte případ, kdy $h = 0{,}37\,\mathrm{m}$.

ŘEŠENÍ: Z rov. (13.32) pro stejnou volbu osy, stejnou hodnotu síly (299 N) a novou hodnotu výšky h dostáváme pro velikost síly F_1 vyjádření

$$F_1 = \frac{Nh + mgd}{w} = \\ = \frac{(299\,\mathrm{N})(0{,}37\,\mathrm{m}) + (55\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(0{,}20\,\mathrm{m})}{(1{,}0\,\mathrm{m})} = \\ = 218\,\mathrm{N}.$$

To je méně než mezní hodnota $f_1N = 329\,\mathrm{N}$, a sílu tedy lze vyvinout.

Dále užijeme rov. (13.30), abychom nalezli hodnotu F_2, která vyhoví rovnici rovnováhy sil $\sum F_y = 0$:

$$F_2 = mg - F_1 = (55\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) - (218\,\mathrm{N}) = 321\,\mathrm{N}.$$

Tato hodnota přesahuje mezní hodnotu $f_2N = 209\,\mathrm{N}$, a je tedy nemožné ji realizovat tlakem 299 N. Jediný způsob, jak zabránit pádu při hodnotě $h = 0{,}37\,\mathrm{m}$ (a též každé jiné hodnotě menší než 0,74 m), je tlačit na stěnu větší silou než 299 N, a tak zvýšit mezní hodnotu f_2N.

Podobně je nutno vyvozovat tlak na stěny větší než 299 N i v případě, kdy $h > 0{,}74\,\mathrm{m}$. Zde je právě výhoda těch, kteří se seznámí s fyzikou, než začnou lézt komínem. Když potřebujete odpočívat, vyhněte se chybě horolezeckých nováčků, kteří zapřou chodidla buď příliš vysoko nebo příliš nízko. Budete vědět, že existuje optimální svislá vzdálenost mezi rameny a chodidly, která vám dovoluje bezpečně odpočívat s nejmenší silou, kterou se musíte opírat o stěny. Tak můžete odpočívat nejpohodlněji.

RADY A NÁMĚTY

Bod 13.1: *Úlohy na statickou rovnováhu*

Takové úlohy řešte podle následujících kroků:

1. Nakreslete si *náčrtek* problému.
2. Zvolte *systém*, na který budete aplikovat rovnice rovnováhy. Hranice systému vyznačte na náčrtku uzavřenou křivkou, abyste si je dobře zapamatovali. Někdy zvolíte za systém pouze jeden objekt, který chcete mít v rovnováze (jako v př. 13.6 horolezkyni). Jindy je výhodnější zahrnout do systému více objektů. Zjednoduší se tím výpočet. Kdybyste např. v př. 13.3 a 13.4 zvolili za systém pouze žebřík, museli byste v silovém diagramu (obr. 13.8b) uvažovat i síly, kterými na žebřík působí ruce a nohy hasiče. Tyto další neznámé síly by vám zkomplikovaly výpočet. Systém byl na obr. 13.8 zvolen tak, aby zahrnoval i hasiče, a tím se zmíněné neznámé síly staly *vnitřními silami* soustavy, které není nutné pro vyřešení př. 13.3 a 13.4 znát.
3. Namalujte diagram, kde považujete systém za volné těleso, tj. nepodrobené vazbám. V diagramu vyznačte všechny

síly působící na těleso (nezapomeňte na síly nahrazující vazby, např. na reakci podložky), zřetelně je označte a ujistěte se, že jejich působiště a směry působení jsou správně vyznačeny.

4. Vyznačte v diagramu osy x a y souřadnicového systému. Volte je tak, aby nejméně jedna osa byla rovnoběžná s jednou či více neznámými silami. Síly, které neleží ve směru jedné z os rozložte na složky. Ve všech našich řešených příkladech bylo rozumné volit osu x vodorovně a osu y svisle.
5. Napište pro složky sil ve směru obou os *rovnice rovnováhy sil* se správným vyznačením symbolů.
6. Vyberte jednu nebo více os otáčení kolmých k rovině obrázku a napište pro ně *rovnici rovnováhy momentů sil*. Vyberete-li osu, která prochází působištěm některé z neznámých sil, rovnice se zjednoduší, protože zmíněná neznámá funkce v ní nebude vystupovat.
7. *Řešte* rovnice *algebraicky* pro příslušné neznámé. Někteří studenti raději již v této fázi dosazují hodnoty veličin včetně jejich jednotek. Zkušení řešitelé však dávají přednost algebraickému řešení, protože v něm lépe vynikne závislost řešení na jednotlivých proměnných.
8. Nakonec do algebraického řešení *dosaďte číselné hodnoty* s příslušnými jednotkami, abyste dostali číselné hodnoty neznámých veličin.
9. Zamyslete se nad výsledkem — má vůbec smysl? Není výsledek na první pohled příliš velký nebo příliš malý? Má správné znaménko? Odpovídají jednotky veličině, kterou určujeme?

13.5 NEÚPLNĚ URČENÉ SOUSTAVY

Pro řešení úloh této kapitoly máme k dispozici pouze tři nezávislé rovnice. Zpravidla to jsou dvě rovnice rovnováhy pro složky sil ve směru souřadnicových os a jedna rovnice rovnováhy momentů sil kolem osy kolmé k rovině dané souřadnicovými osami užitými v rovnicích rovnováhy sil. Když má úloha více než tři neznámé, nestačí soustava tří rovnic na její řešení. Takové úlohy nemůžeme jednoznačně řešit.

Je jednoduché najít takové problémy. Např. v př. 13.3 a 13.4 stačí předpokládat, že tření působí také mezi žebříkem a svislou stěnou. Musíme pak uvažovat také svislou třecí sílu mezi vrchním koncem žebříku a stěnou, čímž počet neznámých stoupne na čtyři. Tyto čtyři neznámé nemůžeme ze tří rovnic jednoznačně určit a úlohu nelze dořešit.

Dále můžeme uvažovat nesymetricky zatížené auto. Jaké síly — obecně všechny různé — působí na čtyři pneumatiky? Znovu nemůžeme tyto síly najít, protože máme k dispozici pouze tři nezávislé rovnice.

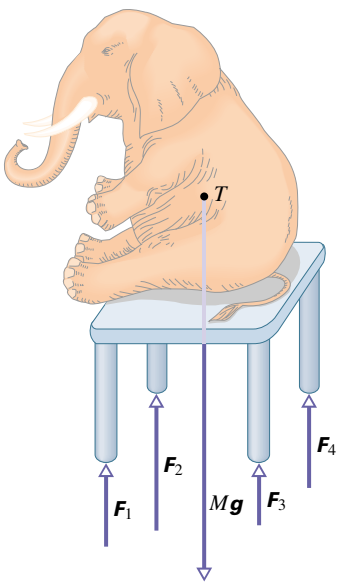
Podobně můžeme řešit problém statické rovnováhy stolu o třech nohách, ale už ne stolu o čtyřech nohách. Takové úlohy, kde je více neznámých než rovnic, označujeme jako **neúplně určené**.

V reálném světě však existují řešení i pro tyto neúplně určené úlohy. Postavíme-li kola aut na čtyři siloměry, každý ukáže nějakou hodnotu síly, přičemž součet těchto hodnot dá tíhu auta. Co nám brání v řešení problému nalézt hodnoty údajů na jednotlivých siloměrech početně?

Každý takový rozpor naznačuje, že původně zvolený model *není* dost dobrý pro úlohu, kterou právě řešíme. Zde jsme např. předpokládali — aniž jsme to zvláště zdůraznili — že tělesa, na která jsme aplikovali rovnice statické rovnováhy, jsou dokonale tuhá. To znamená, že se vůbec nedeformují, když na ně působí síly. Skutečná tělesa však tuhá nejsou. Např. pneumatiky vozu se po jeho zatížení snadno deformují, dokud nenastane statická rovnováha.

Všichni máme zkušenosti s viklajícím se restauračním stolem, jehož jednu nohu podložíme několikrát přeloženým kouskem papíru, abychom viklání odstranili. Můžeme si představit, že kdyby si dostatečně těžké slůně sedlo na takový stůl a on se pod ním nerozpadl, zdeformuje se stůl (i podlaha) tak, že se nakonec všechny čtyři nohy dotknou podlahy. Síly podpírající nohy dosáhnou zcela určitých hodnot (obecně pro každou nohu jinou hodnotu) a stůl se přestane viklat (obr. 13.11). Jak ale najdeme jejich velikosti?

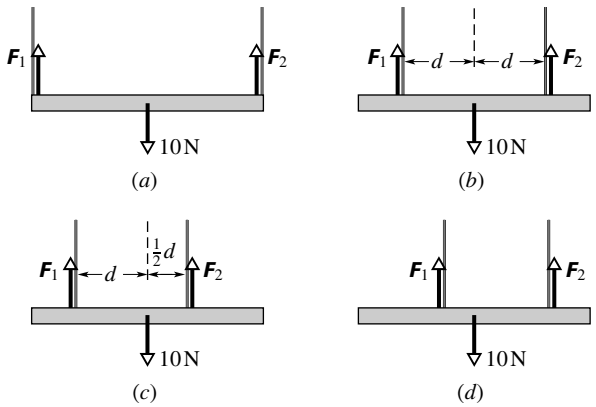
Abychom vyřešili tuto zatím neúplně určenou úlohu, musíme doplnit rovnice rovnováhy jistými poznatky z teo-



Obr. 13.11 Stůl je neúplně určená soustava. Čtyři síly působící na jeho nohy jsou různě velké a nemohou být určeny pouze z rovnic statické rovnováhy.

rie *pružnosti (elasticity)*, části fyziky a technických věd, která popisuje, jak se reálná tělesa deformují, když na ně působí síly.

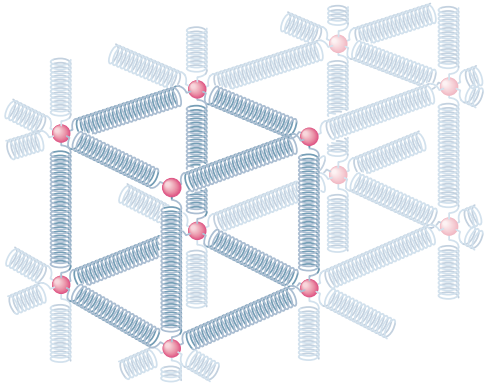
KONTROLA 4: Homogenní vodorovná tyč vážící 10 N je zavěšena na strop dvěma dráty, které ji drží dvěma silami $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. Obrázek ukazuje čtyři uspořádání drátů. Jsou mezi nimi uspořádání, která vedou na neúplně určenou soustavu (tj. takovou soustavu, že nemůžeme určit číselné hodnoty sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$)?



13.6 PRUŽNOST

Když se spojí velké množství atomů, aby vytvořilo kus kovu (např. hřebík), uspořádají se zpravidla tak, že jejich rovnovážné polohy vytvoří trojrozměrnou *mřížku*, tedy pravidelné prostorové uspořádání, ve kterém každý atom má jisté vzdálenosti od svých nejbližších sousedů*. Atomy jsou drženy pohromadě meziatomovými silami, které jsou na obr. 13.12 reprezentovány pružinkami. Mřížka je neobyčejně pevná, což jinak řečeno znamená, že meziatomové pružinky jsou velmi tuhé. Z toho důvodu pokládáme mnohé běžné předměty, jako např. kovový žebřík, stůl nebo lžíci, za dokonale tuhé. Ovšem jiné běžné předměty, např. zahradní hadice nebo gumové rukavice, se vůbec jako tuhé nejeví. Molekuly těchto předmětů *netvoří* pevné mřížky znázorněné na obr. 13.12, ale jsou uspořádány do dlouhých molekulárních řetězců, které jsou vzájemně vázány velmi volně.

* Běžné kovové předměty, např. hřebík, jsou tvořeny kovovými zrny, jejichž vnitřní struktura má podobu více méně pravidelné mřížky, jaká je znázorněna na obr. 13.12. Síly působící mezi zrny jsou však podstatně slabší než síly držící pohromadě mřížku. Proto deformace nastává přeuspořádáním zrn a lom probíhá po hranicích zrn, a to výrazně snadněji než „drcení zrn“.



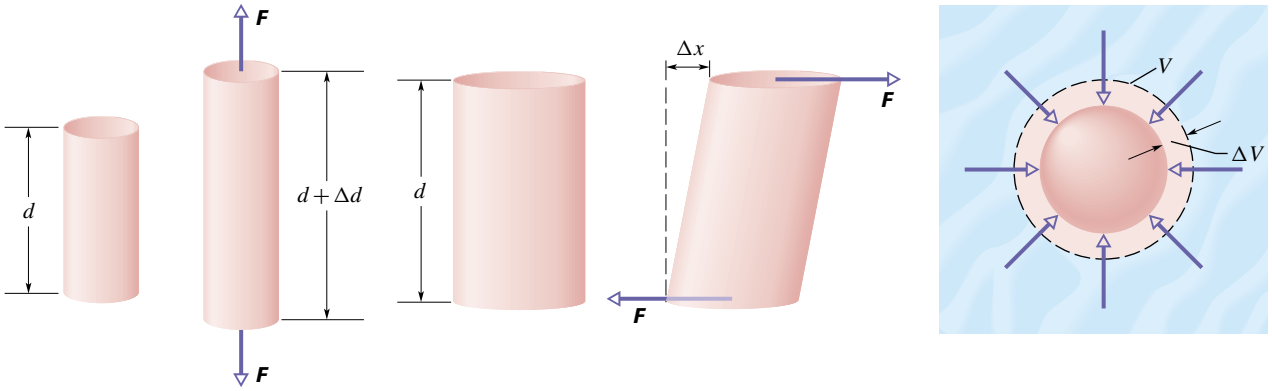
Obr. 13.12 Atomy pevných kovových materiálů jsou rozmístěny v trojrozměrné mřížce, kde motiv mřížky se opakuje až k hranicím krystalových zrn. Pružinky představují meziatomové síly.

Všechny reálné „pevné“ předměty jsou do určité míry pružné. To znamená, že můžeme do určité míry měnit jejich rozměry tahem, jednosměrným tlakem, kroucením či všestranným tlakem. Abychom odhadli řádovou velikost těchto změn, představme si ocelovou tyč délky 1 m a průměru 1 cm, na kterou zavěsíme malé osobní auto. Tyč se protáhne, ale pouze o 0,5 mm neboli o 0,05 %. Po odlehčení se opět zkrátí na svou původní délku.

Když zavěsíme na tyč dvě auta, tyč se trvale deformuje, po odlehčení se nevrátí přesně do své původní délky. Když na tyč zavěsíme tři auta, tyč se přetrhne. Těsně před přetržením bude deformace menší než 0,2 %. I když uvedené deformace vypadají jako malé, hrají důležitou roli v inženýrské praxi. (Je zřejmě důležité, zda křídlo letadla přečká náhodně zvýšené zatížení bez pohromy a neodtrhne se od letadla.)

Na obr. 13.13 jsou znázorněny tři způsoby změny rozměrů tělesa pod vlivem vnějších sil. Na obr. 13.13a je válec natahován. Na obr. 13.13b je válec namáhán silou, která působí kolmo k jeho ose. Je to podobný způsob namáhání, jakým můžeme měnit tvar balíčku karet nebo knihy. Na obr. 13.13c je znázorněno pevné těleso umístěné v kapalině, které je rovnoměrně stlačováno všestranným vysokým tlakem přenášeným kapalinou. Co mají společného uvedené tři typy namáhání těles? **Napětí**, tj. síla přepočtená na jednotkovou plochu, v nich vyvolává **deformaci**, kterou v nauce o pružnosti chápeme jako relativní změnu tvaru. Napětí zobrazené na obr. 13.13a označujeme jako **tah**, na obr. 13.13b jako **smyk** a napětí z obr. 13.13c označujeme jako **všestranný tlak** (nebo jen tlak, když nemůže dojít k záměně s případem probíraným v následujícím odstavci „Tah a tlak“).

Napětí i deformace jsou v případech znázorněných v obr. 13.13 různé, ale je jim společné, že v prvním při-

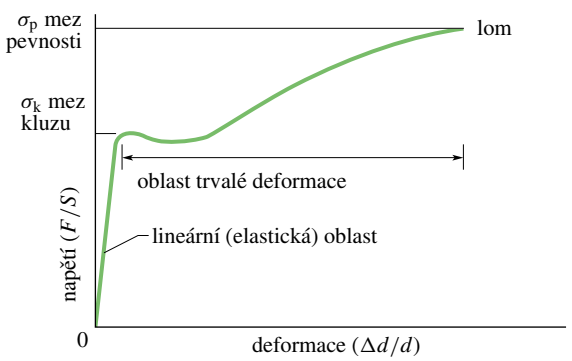


Obr. 13.13 (a) Válec podrobený *tahu* se protáhne o Δd. (b) Válec podrobený *smyku* se deformuje o Δx podobným způsobem, jako když se sesune balíček hracích karet. (c) Pevná koule podrobená *všestrannému tlaku*, který vytvoří hydrostatický tlak kapaliny, se smrští o objem ΔV. Velikost deformací je v obrázku značně zvětšena.

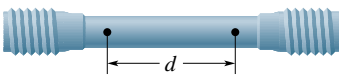
blížení, které většinou stačí k řešení praktických úloh, jsou vzájemně úměrné. Konstanta úměrnosti se nazývá **modul pružnosti**, takže můžeme psát

$$\text{napětí} = \text{modul pružnosti} \cdot \text{deformace} \qquad (13.33)$$

Na obr. 13.14 je graf závislosti napětí na deformaci pro ocelový zkušební válcový vzorek, jehož tvar je znázorněn na obr. 13.15. Při standardní zkoušce se tahové napětí působící na vzorek pomalu zvyšuje z nuly až na hodnotu, při které se zkušební vzorek přetrhne. V celém průběhu děje pečlivě měříme a zaznamenáváme deformaci a k ní příslušné napětí. Pro podstatný rozsah použitých napětí je mezi napětím a deformací přímá úměrnost. Zrušíme-li napětí, vrátí se vzorek do svých původních rozměrů; v tomto oboru platí rov. (13.33). Jestliže napětí zvýšíme nad **mez kluzu** σ_k materiálu, zůstane vzorek trvale deformován. Jestliže napětí dále zvyšujeme, vzorek se nakonec přetrhne při napětí σ_p, které se nazývá **mez pevnosti**.



Obr. 13.14 Křivka napětí-deformace pro ocelový zkušební vzorek tvaru znázorněného na obr. 13.15. Vzorek se začne trvale deformovat, jakmile napětí dosáhne *meze kluzu* oceli a přetrhne se, když napětí dosáhne její *meze pevnosti*.



Obr. 13.15 Vzorek, který se užívá ke stanovení křivky napětí-deformace zobrazené na obr. 13.14. Odpovídající hodnoty napětí a deformace tvořící křivku se měří a zobrazují.

Tah a tlak

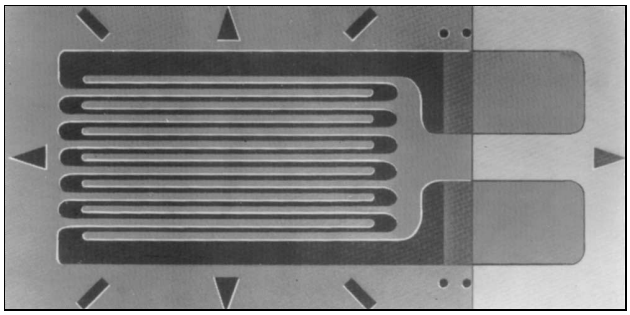
Pro případ namáhání vzorku tahem (obr. 13.13a) získáme napětí σ na ploše kolmé k působící síle jednoduše vydělením velikosti F působící síly velikostí S plochy průřezu, tedy $\sigma = F/S$. Působí-li síly protahující vzorek tak, jak je vyznačeno na obrázku, nazýváme napětí **tahem**. Jsou-li síly opačně orientované, takže vzorek zkracují, mluvíme o **tlaku** a znaménko napětí σ pokládáme za záporné. (V tahově namáhané tyči je na ploše říznuté šikmo ke směru působící síly napětí jiné než právě uvedený tlak. Tlak právě zavedený nesmíme zaměňovat se všestranným tlakem v kapalinách a plynech. Ten je stejný na všech plochách procházejících daným bodem a setkáme se s ním na str. 344.) **Deformace** e je bezrozměrová veličina, kterou pro tahové namáhání vzorku vyjádříme jako podíl prodloužení vzorku Δd k jeho délce d, tedy $e = \Delta d/d$. Deformaci v tomto případě nazýváme **relativní prodloužení**. Je dána hodnotou zlomku a často ji vyjadřujeme v procentech. Působí-li na tyč tlak, tyč se zkrátí a relativní prodloužení pokládáme za záporné. Jestliže tyč je dostatečně dlouhá a napětí v ní nepřesáhne hodnotu meze kluzu, pak deformace, kterou spočítáme pro celou tyč, platí také pro každou její část. Protože deformace je bezrozměrová, má modul pružnosti z rov. (13.33) stejný rozměr jako napětí, tj. sílu na jednotku plochy.

Modul pružnosti pro tahové (a tlakové) namáhání vzorku se nazývá **Youngův modul** neboli **modul pružnosti v tahu** a užíváme pro něj symbol E. Obecná rov. (13.33)

tak pro případ tahového namáhání dostane tvar

$$\frac{F}{S} = E\,\frac{\Delta d}{d}. \qquad (13.34)$$

Deformace vzorku $\Delta d/d$ může často být poměrně snadno změřena tenzometrem (obr. 13.16). Je to jednoduché zařízení: plátek, který se speciálním lepidlem přilepí k místu, kde chceme relativní prodloužení měřit. Činnost tenzometru znázorněného na obrázku je založena na skutečnosti, že elektrický odpor jeho vodivé cesty (značena tmavěji) se s protažením tenzometru zvětší.



Obr. 13.16 Tenzometr vnějších rozměrů 9,8 mm × 4,6 mm. Tenzometr se přilepí na místo předmětu, ve kterém potřebujeme změřit deformaci; tenzometr se deformuje spolu s předmětem v místě, kde je přilepen. Elektrický odpor tenzometru se mění s deformací a umožňuje měřit deformace asi do velikosti 3 %.

I když Youngův modul pro tah a tlak bývá téměř stejný, mez pevnosti se často pro obě namáhání velmi liší. Např. beton je velmi pevný v tlaku, ale má velmi malou mez pevnosti v tahu, a proto se jako materiál přenášející tah téměř neužívá. V tab. 13.1 jsou uvedeny hodnoty Youngových modulů a dalších elastických konstant často užívaných materiálů.

Smyk

Napětí je síla na jednotku plochy i v případě smykového namáhání vzorku, ale síla zde působí v rovině plochy a ne kolmo na ni jako v případě tahu. Smyková deformace je bezrozměrové číslo $\Delta x/d$ — význam veličin plyne z obr. 13.13b. Odpovídající modul se označuje písmenem G a nazývá se **modul pružnosti ve smyku**. Pro smyk dostane rov. (13.33) konkrétní tvar

$$\frac{F}{S} = G\frac{\Delta x}{d}. \qquad (13.35)$$

Smykové napětí hraje rozhodující úlohu při kroucení tyčí, a tedy též při lyžařům známých spirálních zlomeninách, zaviněných zkroucením končetin.

Všestranný tlak

Napětí působící na kouli z obr. 13.13c je realizováno všestranným tlakem přenášeným kapalinou (srovnej s kap. 15). Deformace je dána poměrem $\Delta V/V$, kde V je původní objem deformovaného tělesa a ΔV je absolutní hodnota změny jeho objemu způsobená tlakem. Odpovídající modul se označuje symbolem K a nazývá se **modul objemové pružnosti**. Říkáme, že takto namáhané těleso je pod hydrostatickým tlakem. Tlak přenášený kapalinou, která je v klidu, označujeme jako hydrostatický tlak p. Pro popsanou objemovou deformaci vzorku přejde obecná rov. (13.33) na tvar

$$p = K\,\frac{\Delta V}{V}. \qquad (13.36)$$

Modul objemové pružnosti vody je $2{,}2\cdot10^9$ Pa a oceli $16\cdot10^{10}$ Pa. Hydrostatický tlak v průměrné hloubce Tichého oceánu, která je 4 000 m, je $4{,}0\cdot10^7$ Pa. Relativní smrštění $\Delta V/V$ objemu vody způsobené tímto tlakem je 1,8 %, ocel se pod stejným tlakem smrští jen o 0,025 %. Obecně jsou pevné látky díky svým tuhým atomovým mřížkám podstatně méně stlačitelné než kapaliny, jejichž atomy či molekuly jsou ke svým sousedům vázány mnohem méně pevně.

Tabulka 13.1 **Elastické vlastnosti často užívaných materiálů**

MATERIÁL	ϱ / kg·m^{-3}	E / 10^9 Pa	σ_p / 10^6 Pa	σ_k / 10^6 Pa
Ocel[a]	7 860	200	400	250
Hliník	2 710	70	110	95
Sklo	2 190	65	50[b]	–
Beton[c]	2 320	30	40[b]	–
Dřevo[d]	525	13	50[b]	–
Kost	1 900	9[b]	170[b]	–
Polystyren	1 050	3	48	–

[a] konstrukční ocel (ASTM-A36) [b] v tlaku [c] vysokotlaký [d] jedle douglaska

PŘÍKLAD 13.7

Tyč kruhového průřezu z konstrukční oceli má poloměr $R = 9{,}5\,\text{mm}$ a délku $d = 81\,\text{cm}$. Síla F o velikosti $6{,}2\cdot10^4\,\text{N}$ (přibližně 6 tun) ji protahuje ve směru její délky.

(a) Jaké je napětí v tyči?

ŘEŠENÍ: Z definice plyne, že

$$\text{napětí} = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{(6{,}2\cdot10^4\,\text{N})}{\pi(9{,}5\cdot10^{-3}\,\text{m})^2} = 2{,}2\cdot10^8\,\text{Pa}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Mez kluzu pro konstrukční ocel je $2{,}5\cdot10^8\,\text{Pa}$, tyč je tedy nebezpečně blízko ke své mezní hodnotě, při které začne plasticky téci.

(b) Jaké je prodloužení tyče při tomto zatížení? Jaká je hodnota deformace?

ŘEŠENÍ: Z rov. (13.34), po dosazení právě získaných výsledků a hodnoty Youngova modulu pro ocel (tab. 13.1), plyne

$$\Delta d = \frac{(F/S)d}{E} = \frac{(2{,}2\cdot10^8\,\text{Pa})(0{,}81\,\text{m})}{(2{,}0\cdot10^{11}\,\text{Pa})} = 8{,}9\cdot10^{-4}\,\text{m} = 0{,}89\,\text{mm} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a pro deformaci dále dostaneme

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{(8{,}9\cdot10^{-4}\,\text{m})}{(0{,}81\,\text{m})} = 1{,}1\cdot10^{-3} = 0{,}11\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 13.8

Femur, základní kost stehna, má u dospělého člověka minimální průměr asi 2,8 cm, což odpovídá ploše průřezu $S = 6\cdot10^{-4}\,\text{m}^2$. Při jakém tlaku kost praskne?

ŘEŠENÍ: Z tab. 13.1 plyne, že mez pevnosti σ_p pro kost namáhanou tlakem je $170\cdot10^6\,\text{Pa}$. Síla F, která vytvoří ve femuru napětí σ_p, je tedy

$$F = \sigma_\text{p} S = (170\cdot10^6\,\text{Pa})(6\cdot10^{-4}\,\text{m}^2) = 1{,}0\cdot10^5\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

To je přibližně 10 tun. I když je to velká síla, může být dosažena např. při nešikovném přistání parašutisty. Vhodným rozložením nárazu do delšího časového intervalu je však možno sílu zmenšit hluboko pod nebezpečnou hodnotu.

PŘÍKLAD 13.9

Stůl má tři nohy, které jsou $d = 1{,}00\,\text{m}$ dlouhé, a čtvrtou, která je delší o $\Delta d = 0{,}50\,\text{mm}$, takže se stůl mírně viklá. Těžký ocelový válec o hmotnosti $m = 290\,\text{kg}$ je vzpřímeně postaven na stůl (hmotnost stolu, která je podstatně menší než hmotnost válce, při výpočtu zanedbáme), takže všechny čtyři nohy se zkrátí a stůl se přestane viklat. Nohy jsou umělohmotné válce s plochou průřezu $S = 1{,}0\,\text{cm}^2$ a mají Youngův modul $E = 1{,}3\cdot10^{10}\,\text{Pa}$. Předpokládejte, že na dokonale tuhé vrchní desce stolu je válec umístěn tak, že deska zůstane vodorovná, že nohy stolu se neohnou a že podlaha je dokonale tuhá. Jakou silou nese podlaha každou ze čtyř noh?

ŘEŠENÍ: Za systém zvolíme stůl a ocelový válec. Situace je podobná jako na obr. 13.11, pouze slona zastupuje ocelový válec. Aby zůstala deska stolu vodorovná, musí být všechny tři stejně dlouhé nohy stlačeny o stejný úsek, který označíme Δd_3. Síly, které způsobí tato stlačení také musí být stejné, jejich velikost označíme F_3. Delší noha musí být stlačena o delší úsek Δd_4 větší silou F_4. Musí platit rovnice

$$\Delta d_4 = \Delta d_3 + \Delta d. \qquad (13.37)$$

Rovnici (13.34) můžeme přepsat na tvar $\Delta d = Fd/(ES)$. Tuto rovnici užijeme, abychom dosadili za Δd_3 a Δd_4 do rov. (13.37). Přitom za d budeme pokládat původní délku všech noh, tj. 1 m. Nepatrný rozdíl jejich délek zde můžeme zanedbat. Z rov. (13.37) tak dostaneme

$$F_4 d = F_3 d + SE\Delta d. \qquad (13.38)$$

Z rov. (13.8), která udává rovnováhu y-ových složek sil, pro náš systém plyne

$$\sum F_y = 3F_3 + F_4 - mg = 0. \qquad (13.39)$$

Ze soustavy rov. (13.38) a rov. (13.39) vypočteme neznámou sílu F_3

$$F_3 = \frac{mg}{4} - \frac{SE\Delta d}{4d} = \frac{(290\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})}{4} - \frac{(1\cdot10^{-4}\,\text{m}^2)(1{,}3\cdot10^{10}\,\text{Pa})(5{,}0\cdot10^{-4}\,\text{m})}{4(1{,}00\,\text{m})} = 711\,\text{N} - 163\,\text{N} = 548\,\text{N} \doteq 550\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

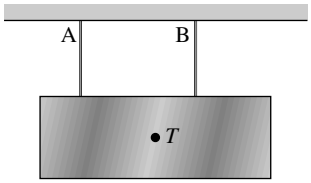
Z rov. (13.39) potom získáme

$$F_4 = mg - 3F_3 = (290\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}) - 3(548\,\text{N}) \doteq 1\,200\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Dále lze ukázat, že každá ze tří kratších noh byla stlačena o 0,42 mm a delší noha o 0,92 mm, tedy že rozdíl délek noh 0,50 mm byl vyrovnán.

KONTROLA 5: Obrázek ukazuje vodorovný homogenní blok zavěšený na dvou drátech A a B, které byly ustřiženy z téže cívky. Těžiště bloku je blíže k drátu B než

k drátu A. (a) Uvažujete-li momenty vzhledem k těžišti, udejte, zda moment vytvářený silou přenášenou drátem A je větší, menší, nebo stejně velký jako moment síly vytvářený drátem B. (b) Kterým drátem je přenášena větší síla? (c) Jestliže délky drátů jsou nyní stejné, který z drátů byl původně delší?



PŘEHLED & SHRNUTÍ

Statická rovnováha

Říkáme, že tuhé těleso, které je a zůstává v klidu, je ve *statické rovnováze*. Vektorový součet všech vnějších sil působících na takové těleso musí být nulový:

$$\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \boldsymbol{0} \quad \text{(rovnováha sil)}. \tag{13.3}$$

Když všechny síly leží v rovině xy, je právě uvedená vektorová rovnice ekvivalentní dvěma skalárním rovnicím pro složky sil:

$$\sum F_x = 0 \quad \text{(rovnováha } x\text{-ových složek sil)} \tag{13.7}$$

a

$$\sum F_y = 0 \quad \text{(rovnováha } y\text{-ových složek sil)}. \tag{13.8}$$

Je-li těleso ve statické rovnováze, musí být také součet všech vnějších momentů sil na něj působících nulový, a to *nezávisle na tom*, vůči kterému bodu moment počítáme;

$$\sum \boldsymbol{M}_{\text{ext}} = \boldsymbol{0} \quad \text{(rovnováha momentů sil)}. \tag{13.5}$$

Když všechny síly leží v rovině xy, jsou všechny vektory momentů sil rovnoběžné s osou z. Rov. (13.5) je potom ekvivalentní jedné skalární rovnici pro z-ové složky momentů sil,

$$\sum M_z = 0 \quad \text{(rovnováha } z\text{-ových složek momentů sil)}. \tag{13.9}$$

Těžiště

Tíhová síla působí na jednotlivé částice tělesa. Výsledek takového působení je stejný, jako když umístíme výslednici těchto individuálních sil — tíhovou sílu $m\boldsymbol{g}$ — do význačného bodu tělesa, který nazveme *těžiště*. Těžiště splývá se středem hmotnosti, když je tíhové zrychlení $\boldsymbol{g}$ konstantní v celém objemu tělesa, tedy stejné pro všechny jeho částice. Termíny „těžiště“ a „střed hmotnosti“ ve zbytku knihy nerozlišujeme.

Moduly pružnosti

Uvedli jsme tři *moduly pružnosti*, které se užívají k popisu pružnostního (elastického) chování těles, na která působí síly. Deformace (relativní změna tvaru tělesa) je přímo úměrná napětí (síle na jednotku plochy); jejich podíl je příslušným modulem. Obecná rovnice vztahu napětí a deformace je

$$\text{napětí} = \text{modul pružnosti} \cdot \text{deformace}. \tag{13.33}$$

Tah a tlak

Pro těleso, které je namáháno tahem nebo tlakem (obr. 13.13a), dostane obecná rov. (13.33) tvar

$$\frac{F}{S} = E\,\frac{\Delta d}{d}, \tag{13.34}$$

kde $\Delta d/d$ je relativní prodloužení (deformace) vzorku (namáhaného tělesa), F je velikost síly $\boldsymbol{F}$ působící na vzorek, S je plocha průřezu vzorku kolmého ke směru působící síly $\boldsymbol{F}$ a E je *Youngův modul* látky, ze které je vzorek zhotoven. Napětí je F/S.

Smyk

Pro objekt, který je namáhán smykovým napětím (obr. 13.13b), přejde rov. (13.33) na konkrétní tvar

$$\frac{F}{S} = G\,\frac{\Delta x}{d}, \tag{13.35}$$

kde $\Delta x/d$ je smyková deformace vzorku, Δx je posunutí vrchního konce vzorku ve směru síly $\boldsymbol{F}$ působící na vrchní konec vzorku a G je modul *pružnosti ve smyku* látky, z níž je vzorek zhotoven. Napětí je F/S.

Všestranný tlak (hydrostatický)

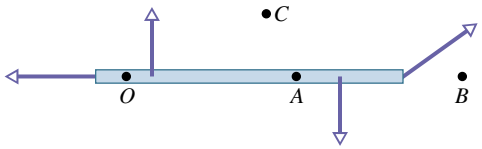
Když je vzorek vystaven *všestrannému tlaku* — nejsnadněji jej lze realizovat hydrostatickým tlakem kapaliny obklopující vzorek (obr. 13.13c) — přejde rov. (13.33) na tvar

$$p = K\,\frac{\Delta V}{V}, \tag{13.36}$$

kde p je *hydrostatický tlak* kapaliny obklopující vzorek. Deformace $\Delta V/V$ je absolutní hodnota relativní změny objemu vzorku vyvolané působícím tlakem a K je *modul objemové pružnosti* látky, z které je zhotoven vzorek.

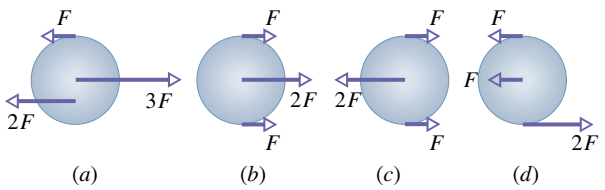
OTÁZKY

1. Na obr. 13.17 je pohled shora na tyč namáhanou čtyřmi silami. Předpokládejme, že jsme zvolili osu otáčení bodem O kolmo k rovině obrázku a zjistili, že momenty sil vůči této ose jsou v rovnováze (jejich součet je nulový). Bude rovnováha momentů sil zachována, zvolíme-li místo osy procházející bodem O osu s ní rovnoběžnou, procházející body (a) A, (b) B, (c) C? (d) Předpokládejme, že oproti předcházejícímu případu nyní zjistíme, že momenty sil vůči ose O nejsou v rovnováze. Existuje v tomto případě takový bod, aby — když jím povedeme rovnoběžnou osu — byly momenty sil vůči této ose v rovnováze?



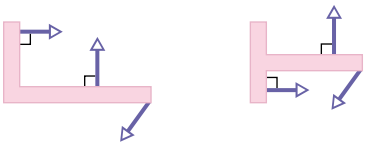
Obr. 13.17 Otázka 1

2. Obr. 13.18 ukazuje pohled shora na čtyři disky (puky), které bez tření kloužou po podložce. Tři síly o velikostech F, $2F$ nebo $3F$ působí na každý z disků, přičemž působiště sil je buď ve středu disku, na jeho okraji, nebo na půl cesty mezi okrajem a středem. Vektory sil se otáčejí spolu s diskem a v momentce znázorněné na obr. 13.18 míří přesně doprava nebo doleva. Které disky jsou v rovnováze?



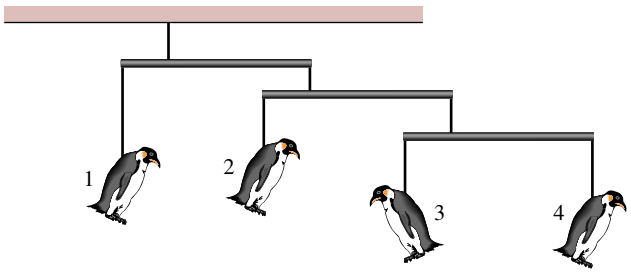
Obr. 13.18 Otázka 2

3. Na obr. 13.19 je pohled shora na dva pevné útvary, na které působí tři síly. Směry sil jsou na obrázku vyznačeny. Které útvary mohou být uvedeny do stavu statické rovnováhy vhodným nastavením velikostí působících sil (uvažujme pouze nenulové síly)?



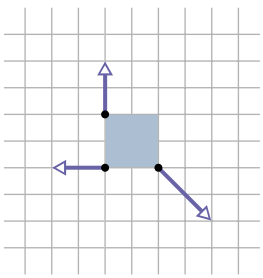
Obr. 13.19
Otázka 3

4. Na obr. 13.20 je zobrazena hračka s visícími tučňáky. Každá vodorovná tyčka (hmotnost tyček budeme v dalších úvahách zanedbávat) je zavěšena tak, že její část vpravo od závěsu je třikrát delší, než část vlevo od závěsu. Tučňák 1 má hmotnost $m_1 = 48\,\mathrm{kg}$. Jaké jsou hmotnosti ostatních tučňáků, aby mohli viset tak, jak je znázorněno na obrázku?



Obr. 13.20 Otázka 4

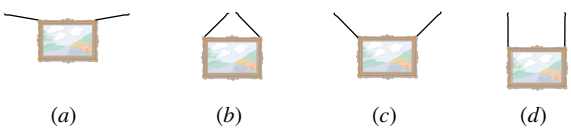
5. Na obr. 13.21 je pohled shora na kovový čtvereček ležící na dokonale hladké podložce (mezi čtverečkem a podložkou nepředpokládáme žádné tření). Tři síly, jejichž velikosti i směry jsou na obrázku přesně vyznačeny, působí na rohy čtverečku. (a) Je splněna první podmínka rovnováhy z rov. (13.1)? (b) Je splněna také druhá podmínka rovnováhy z této rovnice? (c) Jestliže některá z odpovědí na otázku (a) nebo (b) je záporná, můžeme přidáním vhodně volené čtvrté síly dosáhnout splnění obou podmínek rovnováhy?



Obr. 13.21
Otázka 5

6. (a) Kolik různých věží, které budou bez další podpory stát, můžete vytvořit ze tří malých kostek stavebnice Lego? Kostky se čtyřmi výčnělky lze postavit přímo nad sebe nebo je možné je spojit tak, že vrchní kostka je posunuta o půl své délky vpravo nebo vlevo. (Uspořádání a jeho zrcadlový obraz pokládejte za jedno uspořádání.) Kolik takových věží je (b) v stabilní rovnováze a kolik (c) v labilní rovnováze (těžiště nad hranou kostky)? (d) Které uspořádání je nejstabilnější (nejhůře se převrátí) a proč?

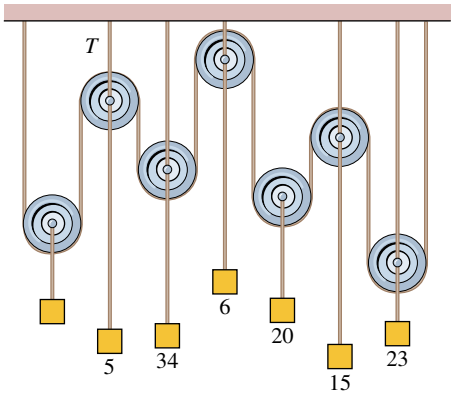
7. Na obr. 13.22 jsou znázorněny čtyři způsoby zavěšení obrazu na stěnu dvěma stejně dlouhými vlákny. Vlákna na obr. 13.22b, c svírají stejné úhly s vodorovnou přímkou. Seřaďte všechna čtyři uspořádání podle velikosti sil přenášených vlákny. Uspořádání, kde jsou síly největší, zařaďte jako první.



Obr. 13.22 Otázka 7

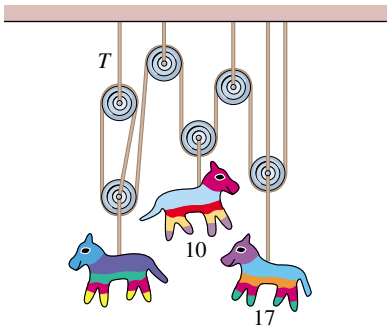
8. Žebřík je opřen o stěnu, přičemž tření mezi stěnou a žebříkem zanedbáme. Proti spadnutí je žebřík zabezpečen třením mezi ním a podlahou. Spodní konec žebříku přisuneme směrem ke stěně. Uveďte, které z následujících veličin se zvětší, zmenší, nebo zůstanou stejné: (a) síla, kterou působí podlaha na žebřík, (b) síla, kterou působí stěna na žebřík, (c) síla statického tření působící od podlahy na žebřík a (d) maximální hodnota $F_{s,max}$ statické třecí síly.

9. Jeden učitel fyziky, když se dostal do ráže, zkonstruoval statický systém kladek a lan, znázorněný na obr. 13.23. Jedno dlouhé lano vychází od stropu, obtáčí všechny kladky a končí opět na stropě. Na kratších lanech jsou od stropu zavěšeny některé kladky a také všechna závaží upevněná v ose kladek. Tíhy závaží jsou až na jednu výjimku na obrázku vyznačeny (čísla udávají tíhu v newtonech). (a) Jaká je velikost zbývající tíhy? (*Tip*: Obtáčí-li lano kladku z poloviny, jak je tomu na obrázku, je výsledná síla působící od lana na kladku dvojnásobkem síly přenášené lanem — neboli, jak se běžně ne zcela přesně říká, dvojnásobkem napětí lana.) (b) Jakou sílu T přenáší krátké lano? Při výpočtech pokládejte kladky a lana za nehmotné.



Obr. 13.23 Otázka 9

10. Tři figurky visí na statickém systému kladek a lan zobrazeném na obr. 13.24. Jedno dlouhé lano jde z místa upevnění vpravo na stropě přes všechny kladky až do osy kladky vlevo dole. Několik kratších lan slouží k zavěšení kladek na strop nebo figurek na kladky. Tíha dvou figurek (v newtonech) je vyznačena na obrázku. (a) Jaká je tíha třetí figurky? (*Tip*: Podobně jako v předcházející otázce využijte skutečnosti, že síla přenášená dlouhým lanem je poloviční než síla, kterou lano působí na kladku.) (b) Jaká je síla přenášená v krátkém laně označeném T?



Obr. 13.24
Otázka 10

11. (a) Použijete v úloze uvedené v kontrole 3 při výpočtu velikosti momentu síly M_p, který na tyč působí od síly T, funkci $\sin\theta$ nebo $\cos\theta$? (b) Jestliže zmenšíme úhel θ tak, že zkrátíme provaz a tyč ponecháme vodorovnou, bude nutno moment M_p síly pro zachování rovnováhy zvětšit, zmenšit, nebo ponechat stejný? (c) Sílu T vytvářející moment musíme v tom případě zvětšit, zmenšit, nebo ponechat stejnou?

12. Tabulka udává velikosti ploch tří povrchů a velikosti výsledných sil, které na tyto plochy působí. Síly působí kolmo k povrchům a jsou podél nich rovnoměrně rozloženy. Seřaďte povrchy podle velikostí napětí, která na ně působí.

	VELIKOST PLOCHY	SÍLA
Povrch A	$0{,}5S_0$	$2F_0$
Povrch B	$2S_0$	$4F_0$
Povrch C	$3S_0$	$6F_0$

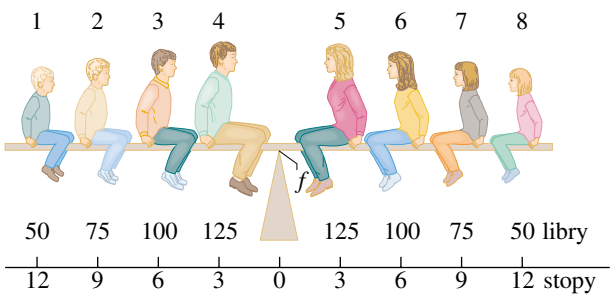
13. Dlouhá tyč byla rozřezána na tyče A, B, C. Tyče se přiloženými silami prodloužily. Seřaďte je sestupně podle velikosti napětí v nich.

	PŮVODNÍ DÉLKA	ZMĚNA DÉLKY
Tyč A	$2d_0$	Δd_0
Tyč B	$4d_0$	$2\Delta d_0$
Tyč C	$10d_0$	$4\Delta d_0$

CVIČENÍ & ÚLOHY

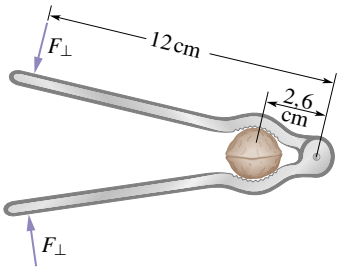
ODST. 13.4 Příklady statické rovnováhy

1C. Osmičlenná americká rodinka, jejíž váhy v librách jsou uvedeny na obr. 13.25, se houpe na prkně. Kteří z členů rodiny (udejte čísla) vytvářejí největší momenty síly vůči ose houpačky (a) mířící před rovinu stránky, (b) mířící za rovinu stránky?



Obr. 13.25 Cvičení 1

2C. Na obr. 13.26 je znázorněn ořech, který chceme rozlousknout louskáčkem. Předpokládejme, že k rozlousknutí ořechu je třeba na něj působit z obou stran silou o velikosti 40 N. Jaké velikosti $F_\perp$ musí mít síly, kterými působíme kolmo na rukojeti louskáčku, abychom ořech rozlouskli? Důležité rozměry jsou udány na obrázku.



Obr. 13.26
Cvičení 2

3C. Šikmá věž v Pise (obr. 13.27) je 55 m vysoká a její průměr je 7 m. Vršek věže je odchýlen 4,5 m od svislice. Pokládejte věž



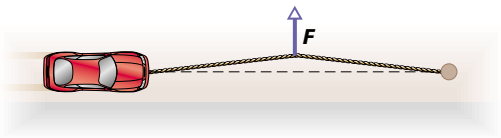
Obr. 13.27 Cvičení 3. Šikmá věž v Pise (fotografie *není* pootočena).

za homogenní kruhový válec. (a) Jak velká další odchylka vršku věže by vedla k jejímu pádu převrácením? (b) Jaký by přitom byl úhel mezi svislicí a osou věže?

4C. Na částici působí síly $\boldsymbol{F}_1 = 10\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{F}_2 = 17\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$. (a) Jaká síla $\boldsymbol{F}_3$ vyrovná tyto síly? (*Tip*: Vektorový součet všech tří sil musí být nulový.) (b) Jaký úhel svírá síla $\boldsymbol{F}_3$ s osou x? Pro číselný výpočet předpokládejte, že čísla udávají velikosti sil v newtonech.

5C. Lukostřelec napíná luk. Jaký úhel svírají dvě části tětivy, známe-li sílu, jakou ji lukostřelec natahuje?

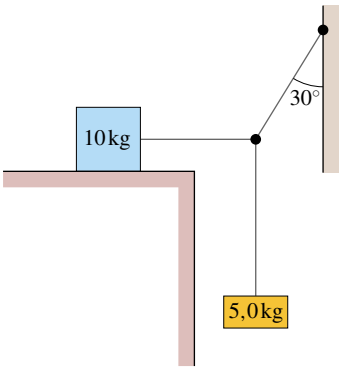
6C. Na obr. 13.28 je znázorněno, jak řidič znalý fyziky vyprošťuje svůj vůz z hlubokého bláta na krajnici silnice. Jeden konec lana uvázal pevně kolem předního nárazníku a druhý kolem patníku vzdáleného 20 m. Potom zatáhne za střed lana kolmo k jeho délce silou 600 N. Lano se protáhne, takže jeho střed se vysune ve směru síly o 30 cm, když se vůz nepatrně pohne. Jaká síla působí na vůz v tomto okamžiku?



Obr. 13.28 Cvičení 6

7C. Provaz, jehož hmotnost budeme zanedbávat, je natažen mezi dvěma úchyty vzdálenými 3,44 m. Provaz se prohne o 35 cm, když se na něj uprostřed zavěsí předmět o tíze 3 160 N. Jaká je potom síla napínající provaz?

8C. Na obr. 13.29 je znázorněn systém, který je v rovnováze, ale jehož blok spočívající na vodorovné podložce začne klouzat, když k předmětu o hmotnosti 5 kg je přidáno jakékoliv další závaží. Jaký je statický činitel tření mezi desetikilogramovým blokem a jeho podložkou?



Obr. 13.29
Cvičení 8

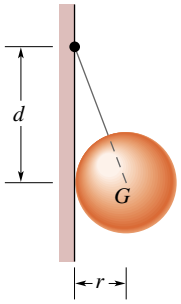
9C. Lešení o hmotnosti 60 kg a délce 5 m je drženo ve vodorovné poloze závěsnými lany na obou jeho koncích. Čistič oken o hmotnosti 80 kg stojí v místě, které je vzdáleno 1,5 m od jednoho konce. Jaká síla napínající lano je přenášena (a) lanem, které je blíže k čističi, (b) vzdálenějším lanem?

10C. Tři muži nesou trám. Jeden muž je na konci trámu a druzí dva nesou trámek mezi sebou na příčném trámku. Kde musí být umístěn příčný trámek, aby všichni muži nesli stejně? (Zanedbejte hmotnost příčného trámku.)

11C. Rovnoměrně naložená přepravka tvaru krychle o hraně 0,750 m a tíze 500 N spočívá na podlaze a je zapřena o velmi nízkou pevnou překážku. V jaké výšce nad podlahou musí působit sila 350 N, aby přepravku právě nadzvedla?

12C. Homogenní koule tíhy G a poloměru r visí na vlákně připevněném k dokonale hladké stěně ve výši d nad středem koule (obr. 13.30). Najděte (a) napěťovou sílu přenášenou vláknem, (b) sílu, kterou stěna působí na kouli.

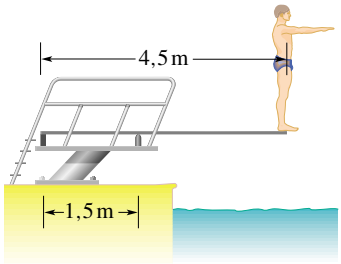
13C. Auto hmotnosti 1 360 kg má rozvor (vzdálenost mezi přední a zadní nápravou) 3,05 m. Těžiště auta je 1,78 m za přední nápravou. Určete zatížení (a) kol přední nápravy, (b) kol zadní nápravy, za předpokladu, že auto stojí na rovině a obě kola téže nápravy jsou zatížena stejně.



Obr. 13.30
Cvičení 12

14C. Muž o hmotnosti 75 kg se na vodorovné lávce zastaví, když urazil čtvrtinu vzdálenosti od jednoho jejího konce. Lávka je homogenní a její hmotnost je 300 kg. Jakou svislou silou působí lávka a muž (a) na vzdálenější pilíř, (b) na bližší pilíř? Pilíře jsou umístěny na koncích lávky.

15C. Skokan vážící 580 N stojí na konci 4,5 m dlouhého skákacího prkna. Prkno je připevněno k dvěma podpěrám vzdáleným 1,5 m, jak je ukázáno na obr. 13.31. Jaká je velikost a orientace síly působící na prkno od (a) levé podpěry, (b) pravé podpěry? (c) Která podpěra je natahována a která stlačována?

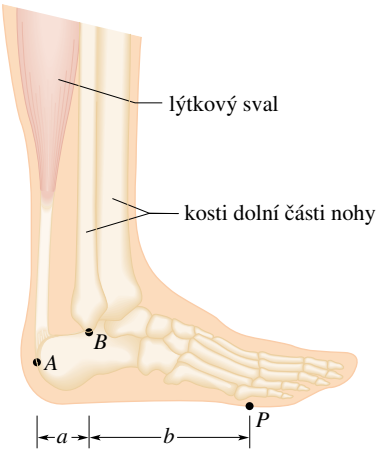


Obr. 13.31
Cvičení 15

16C. Metrové pravítko je vyváženo na břitu podloženém v místě se značkou 50,0 cm. Na značku 12,0 cm položíme na sebe dvě mince a pravítko se nám pak povede vyrovnat, když břit podložíme pod značku 45,5 cm. Jedna mince má hmotnost 5,0 g. Jaká je hmotnost pravítka?

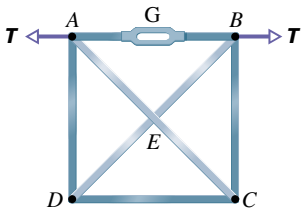
17C. Čistič oken hmotnosti 75 kg užívá žebřík, který má hmotnost 10 kg a je dlouhý 5,0 m. Spodní konec žebříku postaví na podlahu ve vzdálenosti 2,5 m od stěny a vrchní konec opře o naprasklé okno v této stěně. Když vyšplhá po žebříku 3,0 m, okno se rozbije. Vypočtěte (a) sílu, jakou žebřík působil na okno bezprostředně před jeho rozbitím, (b) velikost a směr síly, kterou podlaha působila na žebřík v tomto okamžiku. Zanedbejte tření mezi žebříkem a oknem a předpokládejte, že žebřík po podlaze neklouže.

18C. Obr. 13.32 ukazuje anatomickou stavbu spodní části nohy, která umožňuje stání na špičkách. Při něm je pata vysoko zvednutá nad podlahu a chodidlo se dotýká podlahy jen v malém okolí bodu P, které jsme na obrázku označili jako působiště síly podpírající nohu osoby stojící na špičkách. Vypočtěte síly, kterými působí na chodidlo (a) lýtkový sval v bodě A, (b) holenní a lýtková kost v bodě B, když osoba stojí na špičkách. Položte $a = 5{,}0\,\text{cm}$ a $b = 15{,}0\,\text{cm}$ a hledané síly vyjádřete v násobcích tíhy G osoby.



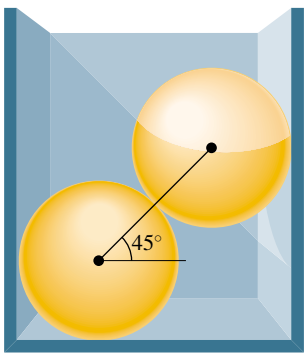
Obr. 13.32
Cvičení 18

19Ú. Stahovákem G zkrátíme tyč AB čtvercového rámu $ABCD$ znázorněného na obr. 13.33. Tím se tyč napne a na body A a B působí síly $\boldsymbol{T}$ mířící ven z rámu. Určete síly působící na ostatní tyče rámu. Najděte, které tyče jsou podrobeny tahu a které tlaku. Úhlopříčné tyče AC a BD se nedotýkají v místě E. Uvážení symetrie rámu zjednoduší řešení této a podobných úloh.



Obr. 13.33
Úloha 19

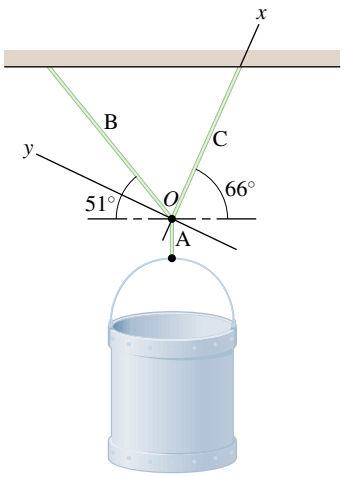
20Ú. Dvě stejné, homogenní koule jsou umístěny v pravoúhlé pevné nádobě (obr. 13.34). Najděte síly, které působí na koule (a) od stěn nádoby, (b) síly vzájemného působení koulí, jestliže spojnice těžišť koulí svírá úhel 45° s vodorovnou rovinou. Výsledky vyjádřete v násobcích tíhy jedné koule. Neuvažujte tření.



Obr. 13.34
Úloha 20

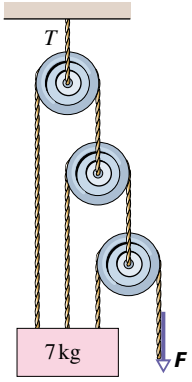
21Ú. Okov o hmotnosti 900 kg je zavěšen na svislém laně A, které je v místě O spojeno se dvěma dalšími lany B a C, která svírají s vodorovnou rovinou úhly 51° a 66° (obr. 13.35). Najděte napěťovou sílu přenášenou (a) lanem A, (b) lanem B, (c) lanem C. (*Tip*: Abyste nemuseli řešit systém dvou rovnic o dvou

neznámých, zvolte soustavu souřadnic tak, jak je naznačeno na obrázku.)



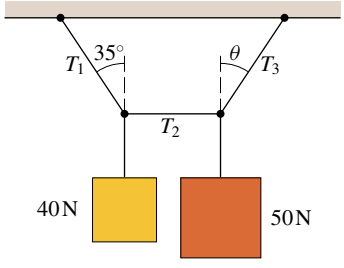
Obr. 13.35
Úloha 21

22Ú. Síla ***F*** udržuje v systému znázorněném na obr. 13.36 rovnováhu. Hmotnost bloku je 7 kg. Vypočtěte sílu T přenášenou lanem, na kterém visí systém. Hmotnost kladek a tření v systému zanedbejte.



Obr. 13.36
Úloha 22

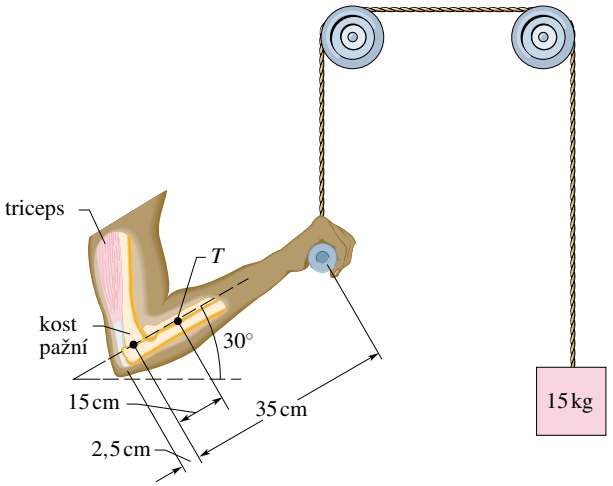
23Ú. Systém z obr. 13.37 je v rovnováze, když prostřední vlákno je přesně vodorovné. Najděte (a) sílu T_1, (b) sílu T_2, (c) sílu T_3 a úhel θ.



Obr. 13.37
Úloha 23

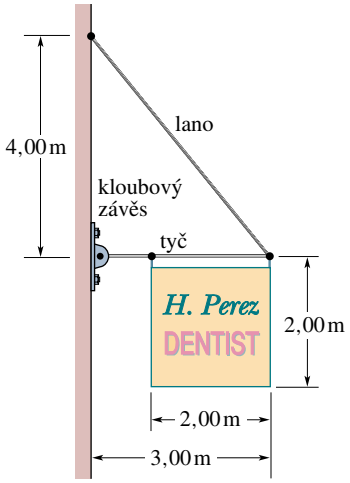
24Ú. Nerovnoramenné váhy jsou tvořeny pevnou tyčí podepřenou břitem mimo střed tyče a miskami zavěšenými na koncích tyče. Hmotnost tyče a misek budeme v dalších úvahách zanedbávat. Váhy jsou vyrovnány, když závaží hmotnosti m je na levé misce a závaží hmotnosti m_1 na pravé misce vah. Když umístíme závaží hmotnosti m na pravou misku, musíme dát k vyrovnání vah na levou misku závaží hmotnosti m_2. Ukažte, že platí $m = \sqrt{m_1 m_2}$.

25Ú. Závaží o hmotnosti 15 kg je přes dvě kladky taženo rukou, jak je ukázáno na obr. 13.38. Paže je svislá, zatímco předloktí svírá úhel 30° s vodorovnou rovinou. Jakou silou působí na předloktí (a) triceps, (b) pažní kost? Předloktí a ruka mají dohromady hmotnost 2,0 kg. Těžiště systému je 15 cm od loketního kloubu směrem k ruce, místo upnutí tricepsu 2,5 cm na druhou stranu (srovnej s obrázkem).



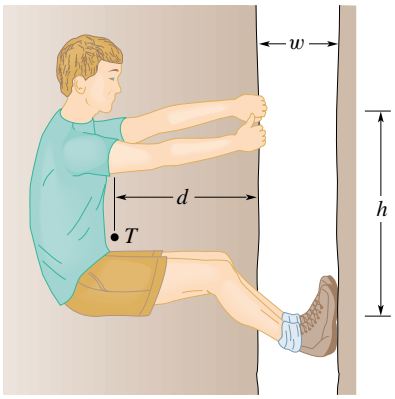
Obr. 13.38 Úloha 25

26Ú. Čtvercový vývěsní štít (hmotnost 50,0 kg, délka strany čtverce 2,0 m) je vysunut do ulice na tyči zanedbatelné hmotnosti a délky 3,00 m. Lano napnuté mezi vzdálenějším koncem tyče a místem upevnění na stěně, které je 4,00 m nad kloubovým závěsem nesoucím tyč, udržuje tyč ve vodorovné poloze (obr. 13.39). (a) Jaká je napěťová síla přenášená lanem? Jaká je (b) vodorovná a (c) svislá složka síly, kterou působí stěna přes kloubový závěs na tyč?



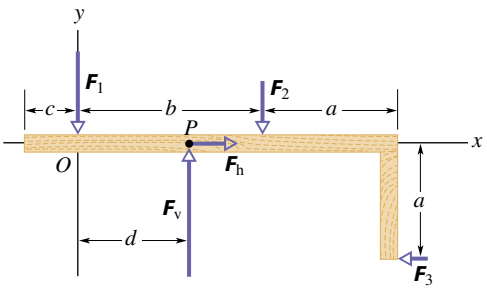
Obr. 13.39
Úloha 26

27Ú. Na obr. 13.40 je schematicky znázorněn horolezec, který leze „na sokolíka“ podél štěrbiny, přičemž rukama táhne za jednu stranu štěrbiny a chodidly tlačí na její druhou stranu. Štěrbina má šířku $w = 0{,}20\,\text{m}$. Těžiště horolezce je ve vodorovné vzdálenosti $d = 0{,}40\,\text{m}$ od bližší stěny štěrbiny. Statický činitel tření mezi rukama horolezce a skálou je $f_1 = 0{,}40$ a mezi botami horolezce a skálou $f_2 = 1{,}2$. (a) Jaký nejmenší tah rukama a tlak nohama ve vodorovném směru udrží horolezce na skále? (b) Jaká musí být při tomto tahu svislá vzdálenost h mezi rukama a nohama, aby horolezec byl v rovnováze? (c) Když se horolezec setká s mokrou skálou, takže hodnoty f_1 a f_2 se zmenší, jak se změní odpovědi na otázky (a) a (b)?



Obr. 13.40 Úloha 27

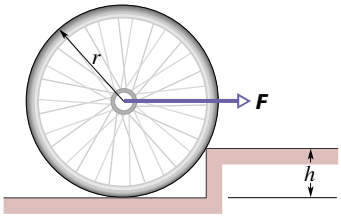
28Ú. Síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ působí na systém znázorněný na obr. 13.41 při pohledu shora. Chceme dostat systém do rovnováhy tím, že do bodu P s vhodně zvolenou vzdáleností d umístíme sílu s vektorovými složkami $\boldsymbol{F}_\text{h}$ a $\boldsymbol{F}_\text{v}$. Zadané jsou hodnoty $a = 2{,}0\,\text{m}$, $b = 3{,}0\,\text{m}$, $c = 1{,}0\,\text{m}$, $F_1 = 20\,\text{N}$, $F_2 = 10\,\text{N}$ a $F_3 = 5{,}0\,\text{N}$. Najděte hodnoty: (a) F_h, (b) F_v a (c) d.



Obr. 13.41 Úloha 28

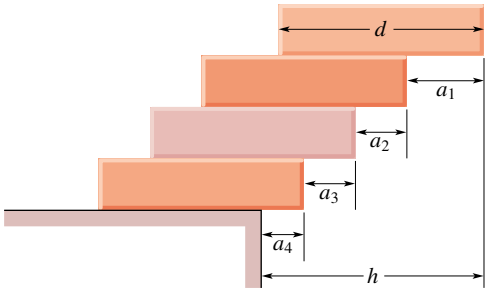
29Ú. Jak velká musí být síla F působící vodorovně na osu kola, aby kolo překonalo schod výšky h (obr. 13.42)? Kolo má poloměr r a váží G.

30Ú. Ve stropě je čtvercový poklop o straně 0,91 m a hmotnosti 11 kg. Na jedné straně jsou panty, na druhé držadlo. Těžiště poklopu je posunuto o 10 cm směrem k pantům od jeho geometrického středu. Jak velkou sílu musí být schopno přenést (a) držadlo, (b) panty?



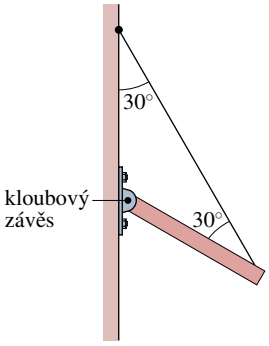
Obr. 13.42 Úloha 29

31Ú. Čtyři stejné cihly délky d jsou naskládány na sebe tak, že každá vyšší o něco přesahuje tu nižší (obr. 13.43). Nalezněte a vyjádřete v násobcích délky d maximální délky přesahů (a) a_1, (b) a_2, (c) a_3, (d) a_4 a (e) h, při kterých ještě stavba zůstane v rovnováze, tedy nespadne.



Obr. 13.43 Úloha 31

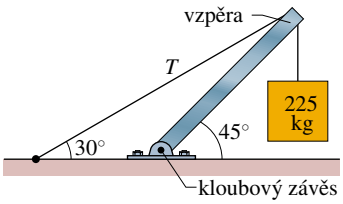
32Ú. Jeden konec tyče hmotnosti 20 kg a délky 1 m je připevněn ke stěně kloubovým závěsem. Druhý konec je zavěšen na vlákně způsobem vyznačeným na obr. 13.44. (a) Najděte napěťovou sílu přenášenou vláknem. Jaká je (b) vodorovná a (c) svislá složka síly, kterou kloubový závěs působí na tyč?



Obr. 13.44 Úloha 32

33Ú. Systém na obr. 13.45 je v rovnováze. Závaží o hmotnosti 225 kg je zavěšeno na konci homogenní vzpěry, jejíž hmotnost je 45 kg. Stanovte: (a) sílu přenášenou vláknem T, (b) vodorovnou a (c) svislou složku síly, kterou vzpěra působí na kloubový závěs.

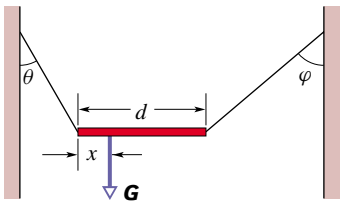
34Ú. Dveře vysoké 2,1 m a široké 0,91 m mají hmotnost 27 kg. Jeden pant je umístěn 0,30 m od vršku dveří, druhý ve stejné vzdálenosti od spodku dveří. Každý z pantů nese polovinu tíhy dveří. Předpokládejte, že těžiště dveří leží v jejich geometrickém



Obr. 13.45
Úloha 33

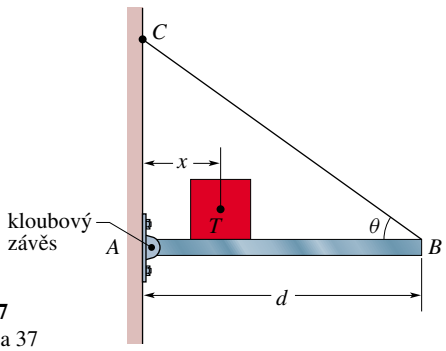
středu. Stanovte: (a) svislé a (b) vodorovné složky sil, kterými panty působí na dveře.

35Ú. Nehomogenní tyč tíhy $\boldsymbol{G}$ je zavěšena na dvou lanech tak, že je v rovnováze vodorovná (obr. 13.46). Jedno lano svírá se svislicí úhel $\theta = 36{,}9°$, druhé úhel $\varphi = 53{,}1°$. Délka tyče d je 6,1 m. Vypočtěte vzdálenost x těžiště tyče od jejího levého konce.



Obr. 13.46
Úloha 35

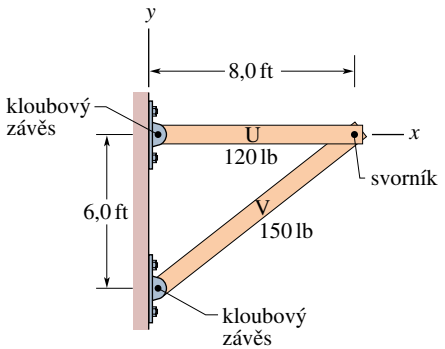
36Ú. Na obr. 13.47 je znázorněna vodorovná tyč AB připojená kloubovým závěsem ke svislé stěně a na opačném konci tenkým drátem BC, který se stěnou svírá úhel θ. Závaží se může volně pohybovat podél tyče; jeho polohu určíme udáním vzdálenosti x těžiště závaží od stěny. Zjistěte, jak závisí na x (a) síla přenášená drátem, (b) vodorovná a (c) svislá složka síly, kterou kloub působí na tyč. Hmotnost tyče zanedbejte.



Obr. 13.47
Úlohy 36 a 37

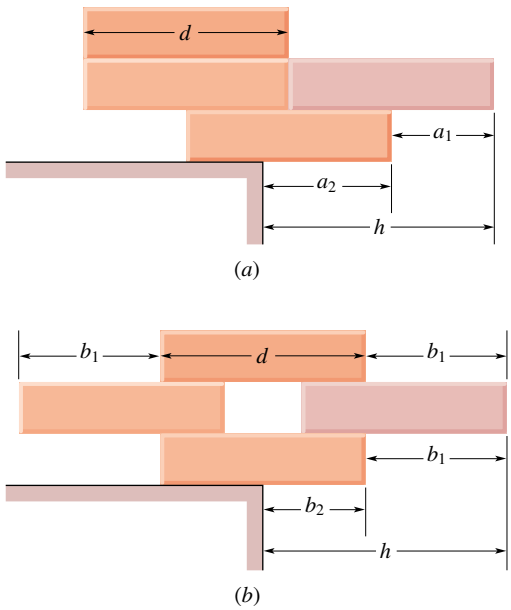
37Ú. V uspořádání stejném jako v úloze 36 (obr. 13.47) předpokládejte, že délka tyče d je 3,0 m a její váha 200 N. Váha závaží je 300 N a úhel $\theta = 30°$. Drát vydrží maximální zatížení 500 N. (a) Do jaké největší vzdálenosti x můžeme vysunout závaží, než drát praskne? Jaká je přitom velikost (b) vodorovné a (c) svislé složky síly, kterou kloub působí na tyč?

38Ú. Dva homogenní trámy U a V jsou přes kloub připojeny ke stěně a spolu volně spojeny svorníkem (obr. 13.48). Najděte vodorovnou a svislou složku síly působící (a) na trám U od jeho kloubového upevnění, (b) na trám U od svorníku, (c) na trám V od jeho kloubového upevnění a (d) na trám V od svorníku.



Obr. 13.48
Úloha 38

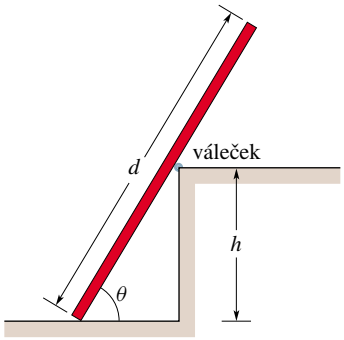
39Ú. Čtyři stejné cihly délky d jsou naskládány na stůl dvěma způsoby, jak je ukázáno na obr. 13.49 (srovnejte s úlohou 31). Snažte se v obou případech najít maximální vzdálenost h, o kterou může stavba přesáhnout stůl, aniž by spadla. Vypočtěte (v násobcích d) příslušné vzdálenosti h a nalezněte hodnoty přesahů a_1, a_2, b_1 a b_2, které k dosažení maximálních hodnot h musíte použít. (Podívejte se do The Amateur Scientist, *Scientific American*, June 1985, na podrobnější diskusi příkladu a ještě lepší uspořádání cihel typu (b).)



Obr. 13.49 Úloha 39

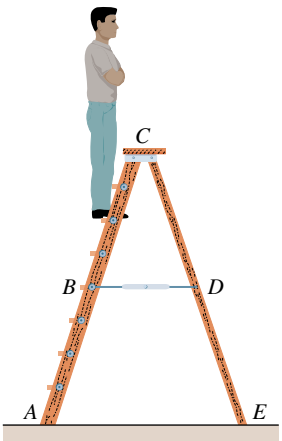
40Ú. Homogenní fošna délky $d = 14$ m a hmotnosti $m = 50$ kg spočívá na podlaze a kluzném válečku (nulové tření) umístěném na vršku zdi vysoké 3 m (obr. 13.50). Fošna je v rovnováze, když $\theta \geqq 70°$, ale podklouzne, když $\theta < 70°$. Určete činitel statického tření mezi fošnou a podlahou.

41Ú. Na obr. 13.51 jsou zobrazeny schůdky spojené osou v místě C s rameny AC a CE dlouhými 2,8 m. Zabezpečovací tyč dlouhá 0,75 m je umístěna v polovině výšky schůdků. Muž hmotnosti 85 kg stojí na schůdku, který je vzdálen 2,1 m od paty schůdků. Najděte: (a) napěťovou sílu v zabezpečovací tyči a síly, kterými podlaha působí na schůdky v místě (b) A a (c) E.



Obr. 13.50
Úloha 40

Zanedbejte hmotnost schůdků a tření mezi schůdky a podlahou. (*Tip*: Použijte rovnice rovnováhy na jednotlivé části schůdků.)



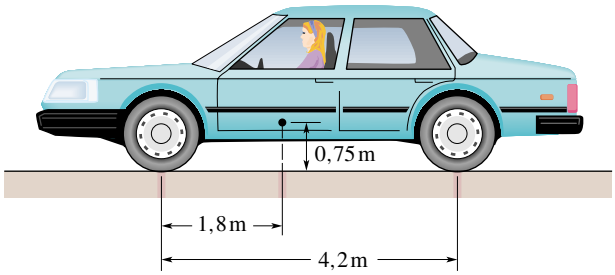
Obr. 13.51 Úloha 41

42Ú. Homogenní krychle o straně a spočívá na vodorovné podlaze. Činitel statického tření mezi krychlí a podlahou je f. Vodorovnou silou $\boldsymbol{F}$ tlačíme na jednu stranu krychle v její svislé ose symetrie ve výši h nad podlahou. Když pomalu zvyšujeme velikost síly F, krychle začne po podlaze buď (a) klouzat, nebo se začne (b) převracet. Pro jaká f nastane případ (a) a pro jaká případ (b)? (*Tip*: Uvažte, kde je umístěna normálová síla v případě převracení krychle.)

43Ú. Krychlová krabice naplněná pískem váží 890 N. Chceme krabici uvést do valivého pohybu tím, že začneme ve vodorovném směru tlačit na jednu z jejích vrchních hran. (a) Jakou minimální velikost síly k tomu potřebujeme? (b) Jaký minimální činitel statického tření mezi krabicí a podlahou musí působit? (c) Existuje efektivnější způsob, jak rozkutálet krabici? Jestliže ano, udejte minimální velikost síly, kterou to lze učinit. (*Tip*: Podívejte se na návod k úloze 42.)

44Ú. Bedna tvaru krychle s délkou hrany 1,2 m obsahuje část stroje, jehož tvar je takový, že se těžiště krychle nachází o 0,3 m výše, než je její geometrický střed. Bedna stojí na rampě, která svírá s vodorovnou rovinou malý úhel θ. Když zvyšujeme úhel θ, dosáhneme hodnoty, při které bedna začne po rampě klouzat, nebo se začne převracet. Jaký případ nastane: (a) když činitel statického tření mezi rampou a bednou je 0,60, (b) když jeho hodnota je 0,70? Pro oba případy udejte úhel, kdy zjištěný případ nastane. (*Tip*: Podívejte se na návod k úloze 42.)

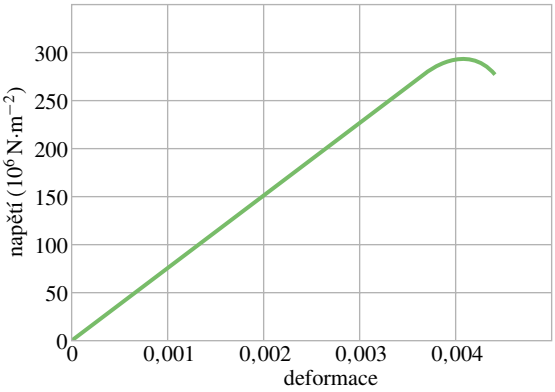
45Ú*. Auto jedoucí po vodorovné silnici prudce zabrzdí, takže všechna čtyři kola se zablokují a smýkají se po silnici. Dynamický činitel tření mezi koly a silnicí je 0,4. **Rozvor**, tj. vzdálenost mezi osou předních a zadních kol, je 4,2 m a těžiště auta je umístěno 1,8 m za osou předních kol ve výšce 0,75 m nad vozovkou (obr. 13.52). Auto váží 11 kN. Vypočtěte: (a) brzdné zrychlení auta, (b) normálovou sílu působící na každé kolo a (c) brzdnou sílu působící na každé kolo. (*Tip*: Auto při brzdění není sice v rovnováze pro posuvný pohyb, ale dokud se nezačne otáčet, je v rovnováze pro rotační pohyb. Zachování rovnováhy pro rotační pohyb předpokládejte.)



Obr. 13.52 Úloha 45

ODST. 13.6 Pružnost

46C. Na obr. 13.53 je graf závislosti napětí na deformaci (křivka napětí – deformace) pro křemen. Jaký je (a) jeho Youngův modul a jaká je (b) hodnota meze kluzu?



Obr. 13.53 Cvičení 46

47C. Po pádu zjistil horolezec hmotnosti 95 kg, že visí na konci lana. Lano délky 15 m a průměru 9,6 mm se vratně prodloužilo o 2,8 cm. Vypočtěte: (a) relativní prodloužení (deformaci) lana, (b) napětí lana a jeho (c) Youngův modul.

48C. Důlní výtah visí na jediném ocelovém laně o průměru 2,5 cm. Celková hmotnost kabiny výtahu a přepravovaných osob je 670 kg. Jaké bude prodloužení lana, (a) když je výtah na povrchu 12 m pod těžním strojem (motorem výtahu) a (b) když je

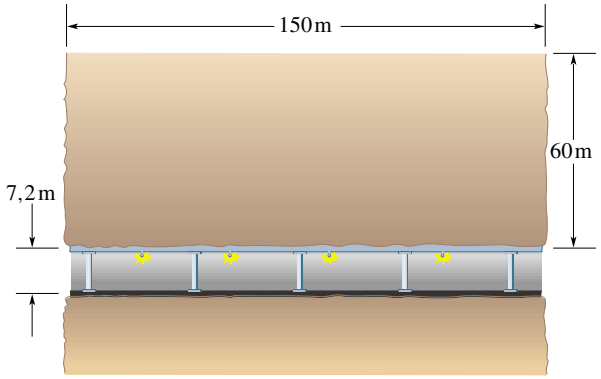
na dně šachty hluboké 350 m? (Při výpočtu zanedbejte hmotnost lana.)

49C. Předpokládejte, že trám na obr. 13.9a je z jedle douglasky a má čtvercový průřez. Jak musí být trám tlustý, aby tlak v něm nepřesáhl 1/6 jeho meze pevnosti v tlaku? (K řešení použijte výsledku př. 13.5.)

50C. Vodorovná hliníková tyč průměru 4,8 cm vyčnívá 5,3 cm ze zdi. Závaží hmotnosti 1 200 kg je zavěšeno na samý konec tyče. Modul pružnosti ve smyku hliníku je $3{,}0\cdot10^{10}$ Pa. Vypočtěte (a) smykové napětí v tyči a (b) svislou odchylku konce tyče, když zanedbáte tíhu tyče.

51C. Jak velký všestranný tlak musí působit na měděnou krychli o hraně 85,5 cm, aby se její hrany zkrátily na 85,0 cm? Objemový modul pružnosti mědi je $1{,}4\cdot10^{11}$ Pa.

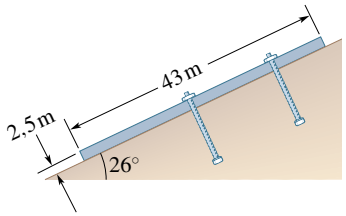
52Ú. Navrhujeme tunel s rovnou střechou dlouhý 150 m, vysoký 7,2 m, široký 5,8 m, který povede 60 m pod zemí (obr. 13.54). Střecha bude držena výlučně ocelovými sloupy, jejichž čtvercový průřez má plochu 960 cm^2. Zemina v nadloží (nad tunelem) má hustotu 2,8 $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$. (a) Jaká je celková síla, kterou sloupy musí unést? (b) Kolik musí být v tunelu sloupů, aby tlak ve sloupech nepřesáhl hodnotu rovnou polovině meze pevnosti v tlaku?



Obr. 13.54 Úloha 52

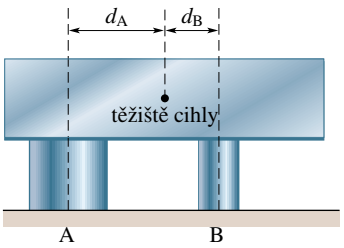
53Ú. Pravoúhlá břidlicová deska spočívá na nakloněné skalní podložce se sklonem 26° (obr. 13.55). Deska je 43 m dlouhá, 2,5 m tlustá a 12 m široká. Hustota desky je 3,2 $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Činitel statického tření mezi deskou a podložní skálou je 0,39. (a) Vypočítejte složku tíhy desky působící podél nakloněné podložky. (b) Vypočtěte celkovou sílu statického tření působící na desku. Porovnáním výsledků (a) a (b) zjistíte, že desce hrozí sklouznutí z podložky a brání jí v tom pouze náhodné výčnělky vytvářející slabé přechodné záchyty. (c) Aby se deska upevnila, je kolmo provrtána i s podložní skálou a do otvorů jsou zasazeny svorníky. Jestliže plocha průřezu každého svorníku je 6,4 cm^2 a mez pevnosti ve smyku materiálu, z kterého je svorník vyroben, je $3{,}6\cdot10^8$ Pa, kolik svorníků musíme užít k upevnění desky? Předpokládejte, že svorníky jsou přitaženy tak mírně, že neovlivní velikost normálové síly (tlak desky na podložku).

54Ú. Olověná deska spočívá vodorovně na válcích A a B, jak



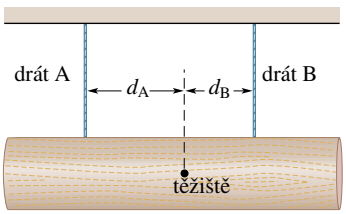
Obr. 13.55
Úloha 53

je ukázáno na obr. 13.56. Válec A má dvakrát větší Youngův modul a dvakrát větší průřez než válec B. Než byly válce deformovány cihlou, měly stejnou délku. Jaká část tíhy cihly je podepřena (a) válcem A a (b) válcem B? Vodorovné vzdálenosti mezi těžištěm cihly a osami válců jsou d_A pro válec A a d_B pro válec B. (c) Jaký je poměr d_A/d_B?



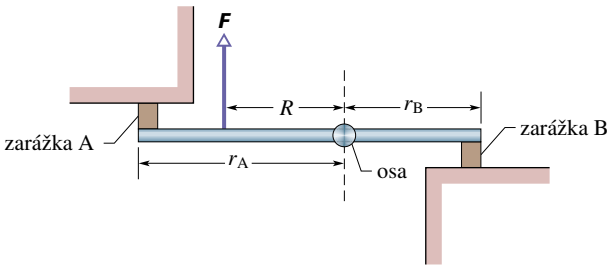
Obr. 13.56
Úloha 54

55Ú. Homogenní kláda hmotnosti 103 kg visí na dvou ocelových drátech A a B, které mají poloměr 1,2 mm. Původně byl drát A 2,50 m dlouhý a byl o 2 mm kratší než drát B. Po zavěšení znázorněném na obr. 13.57 je kláda vodorovně. Jakou silou ji drží (a) drát A, (b) drát B? Jaký je poměr délek d_A/d_B?



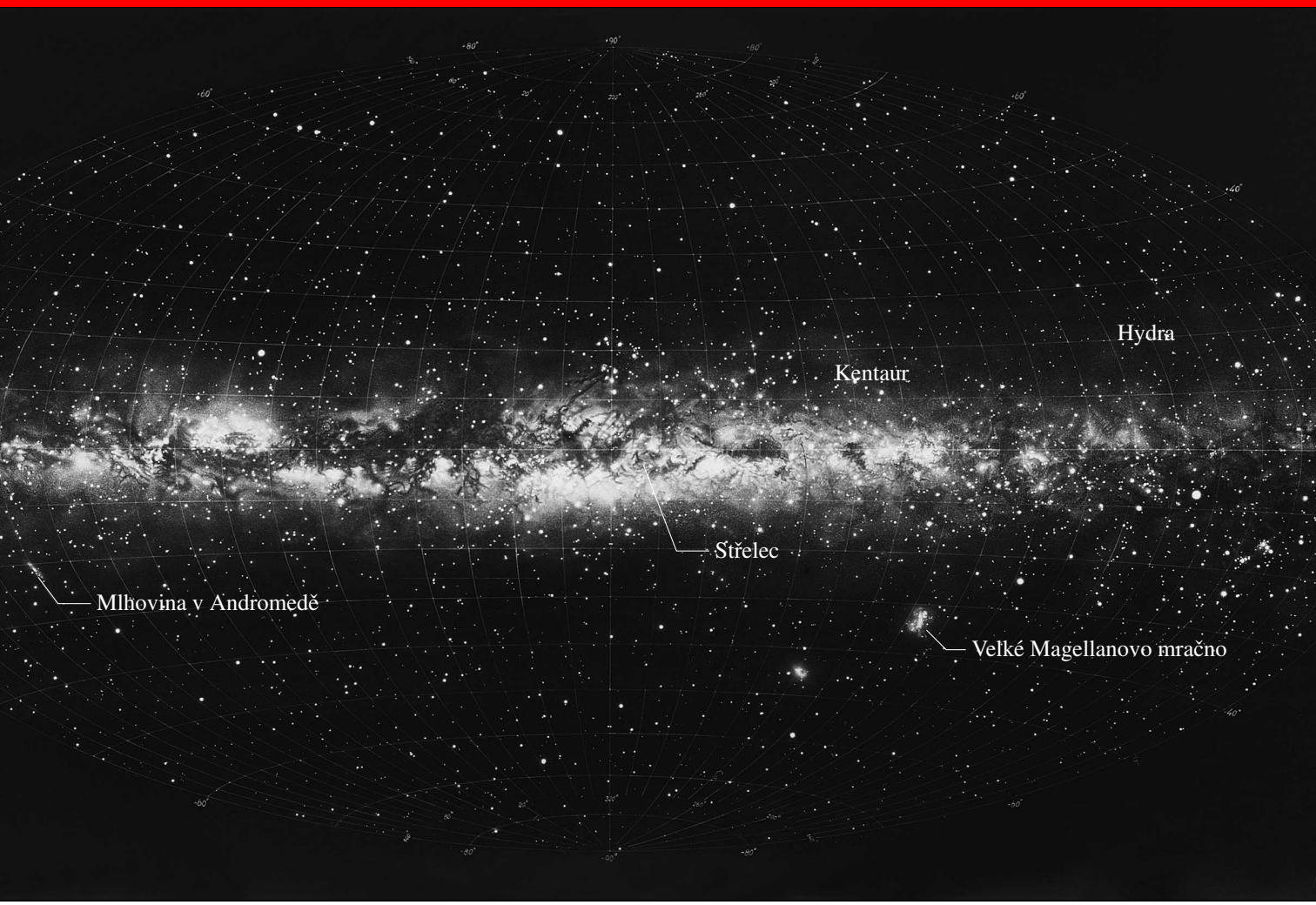
Obr. 13.57
Úloha 55

56Ú. Na obr. 13.58 je pohled shora na pevnou tyč, která se může otáčet kolem svislé osy, dokud ji nezastaví dvě stejné gumové zarážky A a B umístěné na tyči ve vzdálenosti r_A a r_B od osy. Nejprve zarážky po zastavení tyče zůstanou ve stavu, kdy nejsou stlačeny. Potom začne na tyč působit síla $\boldsymbol{F}$ ve vzdálenosti R od osy otáčení. Najděte síly, které stlačují (a) zarážku A, (b) zarážku B.



Obr. 13.58 Úloha 56

14
Gravitace



Naše Galaxie, kterou vidíme na obloze jako Mléčnou dráhu, má tvar disku. Je složena z miliard hvězd, jejich planet a z prachu. Síla, která váže dohromady všechny složky naší Galaxie nebo kterékoliv jiné galaxie, je tatáž jako síla, která drží Měsíc na jeho oběžné dráze a vás na Zemi — gravitace. Ta je také odpovědná za jeden z nejzvláštnějších objektů ve vesmíru, černou díru — hvězdu, která se úplně zhroutila (zkolabovala) dovnitř sebe samé. Gravitační síla poblíž černé díry je tak silná, že ji nepřekoná ani světlo. Ale je-li tomu tak, jak můžeme černou díru zjistit?

14.1 SVĚT A GRAVITAČNÍ SÍLA

Úvodní obrázek ukazuje, jak vidíme Mléčnou dráhu; my se nacházíme poblíž okraje galaktického disku, asi 26 000 světelných let ($2{,}5\cdot10^{20}$ m) od jejího středu, který na obrázku leží v souhvězdí Střelce. Naše Galaxie je členem skupiny galaxií, která zahrnuje galaxii v souhvězdí Andromedy (obr. 14.1) ve vzdálenosti $2{,}3\cdot10^{6}$ světelných let a jiné trpasličí galaxie, jako Velké Magellanovo mračno na úvodním obrázku.



Obr. 14.1 Galaxie v Andromedě. Je od nás vzdálena $2{,}3\cdot10^{6}$ světelných let, je slabě viditelná i prostým okem a je velmi podobná naší rodné Galaxii — Mléčné dráze.

Místní skupina galaxií je částí místní kupy galaxií. Měření provedená v osmdesátých létech ukazují, že místní kupa galaxií a kupy galaxií v souhvězdích Hydry a Kentaura se všechny řítí na výjimečně hmotný objekt zvaný Velký atraktor nebo též Velký poutač. Ten je vzdálen od nás přibližně 150 milionů světelných let, na opačnou stranu, než kde vidíme Mléčnou dráhu, mezi souhvězdími Hydry a Kentaura.

Síla, která váže dohromady tyto tak dalece rozsáhlé objekty, od hvězd přes galaxie ke skupinám, kupám a nadkupám galaxií, a která je patrně všechny přitahuje k Velkému poutači, je **gravitační síla**. Nejenom že vás přidržuje na Zemi, ale vládne i hlubinám mezigalaktického prostoru.

14.2 NEWTONŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON

Fyziky vždycky zajímá, zda by se při podrobnějším zkoumání nenašel mezi zdánlivě nesouvisejícími jevy nějaký vzájemný vztah. Tato snaha po sjednocování fyzikálních teorií panuje již po staletí. V roce 1665 učinil mladý, třiadvacetiletý Isaac Newton základní přínos pro fyziku, když ukázal, že síla držící Měsíc na jeho oběžné dráze je táž jako síla, která nutí padat jablko na Zem. My to nyní pokládáme za takovou samozřejmost, že si těžko představujeme starověké pojetí, podle kterého byly pohyby pozemských a nebeských těles zcela různých druhů a řídily se různými zákony.

Newton dospěl k názoru, že nejenom Země přitahuje jablko i Měsíc, ale že každé těleso ve vesmíru přitahuje každé jiné těleso; tuto tendenci všech těles přitahovat se navzájem nazýváme **gravitace**. Na tento závěr nejsme příliš zvyklí, protože na povrchu zemském je ona důvěrně známá přitažlivost zemská tak veliká, že zdaleka překrývá vzájemnou přitažlivou sílu ostatních těles mezi sebou. Tak například Země přitahuje jablko jistou silou (totiž jeho váhou). Také vy přitahujete jablko (a ono přitahuje vás), ale tato přitažlivá síla je menší než váha nejjemnějšího prášku.

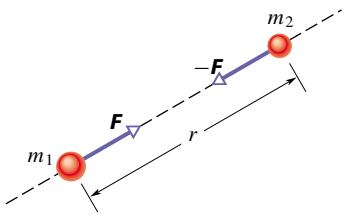
Zákon o síle, který nyní nazýváme **Newtonův gravitační zákon**, formuloval Newton kvantitativně: každá částice přitahuje každou jinou částici **gravitační silou**, jejíž velikost je

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{(Newtonův gravitační zákon).} \qquad (14.1)$$

Zde m_1, m_2 značí hmotnosti obou částic, r vzdálenost mezi nimi a G je* **gravitační konstanta**, jejíž hodnota činí

$$G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}} = \\ = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}. \qquad (14.2)$$

Obr. 14.2 ilustruje ověřenou skutečnost, že se částice vždy přitahují „k sobě“ a nikdy se neodpuzují „od sebe“; částice m_2 přitahuje částici m_1 gravitační silou $\boldsymbol{F}$, která směřuje k částici m_2.



Obr. 14.2 Dvě částice o hmotnostech m_1 a m_2 ve vzdálenosti r se navzájem přitahují podle Newtonova gravitačního zákona, rov. (14.1). Přitažlivé síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ jsou stejné co do velikosti a mají opačné směry.

* Symbol G je předepsán normou a užívá se v celém světě. U nás se někdy užívá symbol $\varkappa$.

Podobně částice m_1 přitahuje částici m_2 gravitační silou, která je orientována k částici m_1. Síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ jsou ve vztahu akce a reakce; mají stejné velikosti a opačné směry. Závisejí na vzdálenosti obou částic, ale nikoli na jejich umístění; částice by stejně dobře mohly být v nějaké dutině nebo přemístěny do hlubin vesmíru. Síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ nejsou ovlivněny přítomností jiných těles, dokonce ani kdyby tato tělesa ležela mezi uvažovanými přitahujícími se částicemi.

Velikost gravitační síly, tj. to, jak silně se dvě částice daných hmotností na danou vzdálenost přitahují, závisí na velikosti gravitační konstanty G. Kdyby nějakým kouzlem vzrostlo G desetkrát, leželi bychom na podlaze rozdrceni zemskou přitažlivostí. A kdyby se naopak G desetkrát zmenšilo, zeslábla by zemská přitažlivost natolik, že bychom mohli skákat přes domy. (Ale spíš bychom zahynuli, protože by si Země neudržela svou atmosféru.)

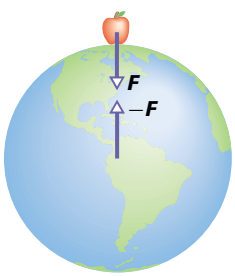
Ačkoliv Newtonův zákon platí přesně jen pro částice (tedy hmotné body), můžeme ho použít i na reálné předměty, pokud jsou jejich vlastní rozměry zanedbatelné vůči jejich vzdálenosti. Měsíc a Země jsou od sebe dostatečně daleko na to, abychom je mohli v dobrém přiblížení považovat za hmotné body. Ale co jablko na Zemi? Z hlediska jablka se veliká a široká Země, rozprostírající se od obzoru k obzoru, jistě nejeví jako hmotný bod.

Newton vyřešil problém jablko + Země tím, že formuloval tzv. „**slupkový teorém**“:

> Homogenní hmotná kulová slupka přitahuje vně ležící částici stejně, jako kdyby veškerá hmota slupky byla soustředěna v jejím středu.

Zemi můžeme považovat za složenou z takových kulových slupek asi jako cibuli — jedna slupka uvnitř druhé. (Říkáme, že Země je **po vrstvách homogenní** neboli má hmotu rozloženu **sféricky symetricky**.) Každá z těchto slupek přitahuje vně ležící předmět tak, jako by její hmota byla soustředěna do jejího středu — tedy do středu Země. Z hlediska jablka se tedy (překvapivě) Země chová jako hmotný bod — jako částice umístěná ve středu Země, v níž je soustředěna veškerá hmota Země.

Předpokládejme tak jako na obr. 14.3, že Země přitahuje dolů jablko silou 0,8 N. Potom jablko musí přitahovat Zemi nahoru silou 0,8 N; tuto sílu si umístíme do středu Země. Ačkoliv obě síly mají stejnou velikost, udělí při uvolnění jablka různá zrychlení jablku a Zemi. Jablko získá zrychlení kolem 9,8 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, dobře známé zrychlení těles padajících nedaleko zemského povrchu. Země by však (v těžišťovém systému soustavy jablko + Země) získala zrychlení pouze asi $1\cdot10^{-25}$ $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.



Obr. 14.3 Jablko přitahuje nahoru Zemi stejně silně jako Země dolů jablko.

KONTROLA 1: Částici postupně umístíme vně čtyř objektů, z nichž každý má hmotnost m; jsou to
(1) velká homogenní plná koule;
(2) velká homogenní kulová slupka;
(3) malá homogenní plná koule;
(4) malá homogenní kulová slupka.
Ve všech případech má částice stejnou vzdálenost d od středu objektu. Uspořádejte objekty podle velikosti gravitační síly, jakou působí na částici, od největší síly k nejmenší.

14.3 GRAVITACE A PRINCIP SUPERPOZICE

Pro skupinu částic nalezneme výslednou gravitační sílu (výslednici sil) působící na kteroukoliv z nich pomocí **principu superpozice**, což je obecný princip, předpokládající, že výsledný jev je součtem všech dílčích jevů. V tomto případě princip říká, že pro výpočet gravitační síly působící na konkrétní částici můžeme nejprve postupně vypočítat dílčí síly od každé z ostatních částic. Poté vypočteme výslednou sílu jako vektorový součet všech těchto sil — jako obvykle.

Pro n interagujících částic můžeme zapsat princip superpozice takto:

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{14} + \boldsymbol{F}_{15} + \ldots + \boldsymbol{F}_{1n}. \quad (14.3)$$

Zde je $\boldsymbol{F}_1$ výsledná síla působící na částici 1 a např. $\boldsymbol{F}_{13}$ je síla, kterou působí částice 3 na částici 1. Tento vektorový součet můžeme zapsat kompaktněji:

$$\boldsymbol{F}_1 = \sum_{i=2}^{n} \boldsymbol{F}_{1i}. \quad (14.4)$$

Jak je tomu se silou, kterou na částici působí reálné těleso, zaujímající jistý prostor? Najdeme ji tak, že těleso rozložíme na kousíčky tak malé, abychom je mohli pokládat za hmotné body, a potom použijeme rov. (14.4) k nalezení vektorového součtu všech sil působících na částici ode všech kousíčků tělesa. V limitním případě můžeme těleso rozdělit na infinitezimální kousíčky o hmotnostech dm, z nichž

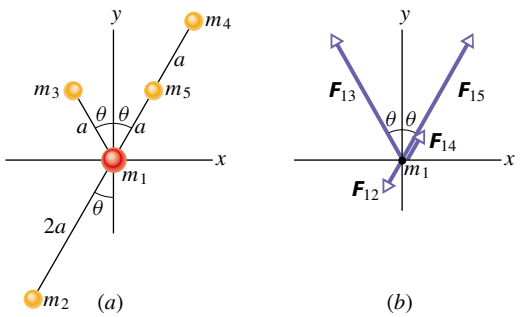
každý působí na uvažovanou částici jen infinitezimální silou d$\boldsymbol{F}$. V limitě přejde suma z rov. (14.4) na integrál:

$$\boldsymbol{F}_1 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{F}, \qquad (14.5)$$

kde integrujeme přes celý objem zaujímaný tělesem. Jde-li však o homogenní kouli nebo kulovou slupku, můžeme namísto integrace v rov. (14.5) postupovat, tak jako by celá hmota tělesa byla soustředěna v jeho středu, a použít rov. (14.1).

PŘÍKLAD 14.1

Na obr. 14.4a je uspořádáno pět částic s hmotnostmi $m_1 = 8{,}0\,\mathrm{kg}, m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 2{,}0\,\mathrm{kg}$, délka $a = 2{,}0\,\mathrm{cm}$, úhel $\theta = 30°$. Jaká je výsledná gravitační síla $\boldsymbol{F}_1$, působící na částici m_1 od ostatních čtyř částic?



Obr. 14.4 Příklad 14.1. Uspořádání pěti částic. Síly, kterými působí ostatní čtyři částice na částici m_1.

ŘEŠENÍ: Z rov. (14.4) víme, že výslednice $\boldsymbol{F}_1$ je vektorovým součtem sil $\boldsymbol{F}_{12}$, $\boldsymbol{F}_{13}$, $\boldsymbol{F}_{14}$, $\boldsymbol{F}_{15}$, což jsou gravitační síly působící na částici m_1 od ostatních částic. Protože hmotnosti m_2 a m_4 jsou si rovny a protože obě částice jsou ve stejných vzdálenostech $r = 2a$ od první, plyne z rov. (14.1)

$$F_{12} = F_{14} = \frac{Gm_1m_2}{(2a)^2}. \qquad (14.6)$$

Podobně hmotnosti m_3 a m_5 jsou si rovny a obě částice jsou ve stejných vzdálenostech $r = a$ od m_1, takže platí

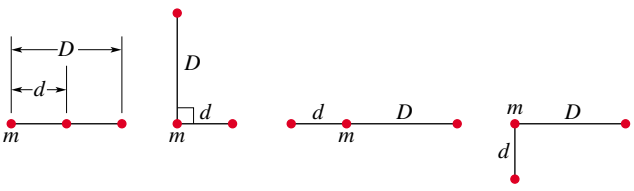
$$F_{13} = F_{15} = \frac{Gm_1m_3}{a^2}. \qquad (14.7)$$

Na obr. 14.4b je silový diagram pro m_1. Odtud a z rov. (14.6) je zřejmé, že $\boldsymbol{F}_{12}$ a $\boldsymbol{F}_{14}$ mají stejné velikosti, ale opačné směry; tyto síly se proto vyruší. Z obr. 14.4b a rov. (14.7) vidíme, že x-ové složky sil $\boldsymbol{F}_{13}$ a $\boldsymbol{F}_{15}$ se také zruší, zatímco jejich y-ové složky mají stejnou velikost, ale směr tentokrát stejný — ve směru osy y. Výsledná síla $\boldsymbol{F}_1$ tedy směřuje podél osy y a její velikost je dvojnásobkem velikosti y-ové složky $\boldsymbol{F}_{13}$:

$$F_1 = 2F_{13}\cos\theta = 2\frac{Gm_1m_3}{a^2}\cos\theta =$$
$$= 2\frac{(6{,}67{\cdot}10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}})(8{,}0\,\mathrm{kg})(2{,}0\,\mathrm{kg})}{(0{,}020\,\mathrm{m})^2}\cos 30° =$$
$$= 4{,}6{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

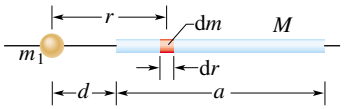
Všimněme si, že přítomnost částice m_5 mezi částicemi m_1 a m_4 neměla vliv na jejich gravitační působení: síla mezi m_1 a m_4 zůstává táž.

KONTROLA 2: Obrázek ukazuje čtyři konfigurace tří částic se stejnými hmotnostmi. (a) Uspořádejte konfigurace sestupně podle velikostí výsledné gravitační síly působící na částici m. (b) Je v konfiguraci (2) směr výsledné síly blíže k úsečce délky d, nebo k úsečce délky D?



PŘÍKLAD 14.2

Na obr. 14.5 je částice o hmotnosti $m_1 = 0{,}67\,\mathrm{kg}$ vzdálena $d = 23\,\mathrm{cm}$ od konce homogenní tyče délky $a = 3\,\mathrm{m}$ a hmotnosti $M = 5\,\mathrm{kg}$. Jak velkou gravitační silou $\boldsymbol{F}_1$ přitahuje tyč částici?



Obr. 14.5 Příklad 14.2. Částice o hmotnosti m_1 leží na ose tyčky délky a ve vzdálenosti d od jejího konce. Infinitezimální kousek tyčky dm leží ve vzdálenosti r od m_1.

ŘEŠENÍ: Uvažujme infinitezimálně malý kousek tyče o hmotnosti dm a délce dr, vzdálený r od m_1. Z rov. (14.1) vyjádříme velikost gravitační síly d$\boldsymbol{F}_1$, kterou dm působí na m_1:

$$\mathrm{d}F_1 = \frac{Gm_1}{r^2}\,\mathrm{d}m. \qquad (14.8)$$

Na obr. 14.5 směřuje tato síla doprava. Protože m_1 leží na ose tyče, směřuje doprava také každá z částečných sil d$\boldsymbol{F}_1$, kterými působí kousek dm tyče na m_1. Velikost úhrnné síly F_1 působící na m_1 můžeme tedy najít prostým sečtením velikostí dílčích sil. Provedeme to integrací rov. (14.8) podél tyče.

(Kdyby bod m_1 neležel na ose tyče, směřovaly by dílčí síly do různých směrů a bylo by nutno získat výslednou sílu jako vektorový součet dílčích sil.)

Pravá strana rov. (14.8) obsahuje dvě proměnné, r a m, resp. dm. Před integrací musíme z integrálu odstranit výraz dm. Protože je tyčka homogenní (má konstantní hustotu), můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = \frac{M}{a}. \qquad (14.9)$$

To nám umožňuje nahradit $\mathrm{d}m = (M/a)\,\mathrm{d}r$ v rov. (14.8). Potom integrujeme rov. (14.5) a dostaneme

$$\begin{aligned} F_1 &= \int dF_1 = \int_d^{a+d} \frac{Gm_1}{r^2}\frac{M}{a}\,\mathrm{d}r = \frac{Gm_1M}{a}\int_d^{a+d}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \\ &= -\frac{Gm_1M}{a}\left[\frac{1}{r}\right]_d^{a+d} = -\frac{Gm_1M}{a}\left(\frac{1}{a+d}-\frac{1}{d}\right) = \\ &= \frac{Gm_1M}{d(a+d)} = \\ &= \frac{(6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}})(0{,}67\ \mathrm{kg})(5{,}0\ \mathrm{kg})}{(0{,}23\ \mathrm{m})(3{,}0\ \mathrm{m}+0{,}23\ \mathrm{m})} = \\ &= 3{,}0\cdot10^{-10}\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

RADY A NÁMĚTY

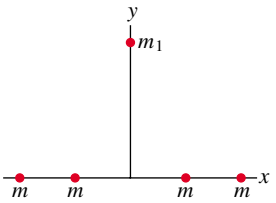
Bod 14.1: *Znázornění vektorů gravitační síly*

Máme dáno rozložení částic (např. na obr. 14.4a) a chceme najít celkovou gravitační sílu působící na jednu z nich. Pak doporučujeme nakreslit silový diagram, který obsahuje jen zkoumanou částici (nikoli ostatní) a jen ty síly, které na ni působí, jako je to v obr. 14.4b. Pokud byste se rozhodli skládat vektory sil v původním diagramu, umísťujte je vždy *do té částice, na kterou příslušná síla působí* (a to raději „patičkou" vektoru než jeho „šipkou"). Pokud nakreslíte vektory sil jinak, vnesete si do diagramu zmatek. A ten bude zaručený, pokud budete umísťovat vektory sil do těch částic, které na zkoumanou částici působí.

Bod 14.2: *Zjednodušení součtu sil využitím symetrie*

V př. 14.1 jsme použili symetrii systému k úspoře času a zjednodušení výpočtů vedoucích k řešení. Uvědomíme-li si, že m_2 a m_4 jsou umístěny symetricky vzhledem k m_1, a tedy $\boldsymbol{F}_{12}$ a $\boldsymbol{F}_{14}$ se vyruší, nemusíme tyto síly počítat. A pokud si uvědomíme, že x-ové složky sil $\boldsymbol{F}_{13}$ a $\boldsymbol{F}_{15}$ se vzájemně vyruší a jejich y-ové složky jsou shodné a sečtou se, ušetříme si další námahu.

KONTROLA 3: Určete, jaký směr má výslednice gravitační síly působící na částici o hmotnosti m_1 od jiných částic o hmotnostech m, které jsou umístěny na ose x symetricky vůči ose y podle obrázku.



14.4 GRAVITACE V BLÍZKOSTI POVRCHU ZEMĚ

Zanedbejme prozatím rotaci Země a předpokládejme, že Země je stojící homogenní koule o hmotnosti M a poloměru $R = 6\,371$ km, odpovídajícímu objemu skutečné Země. Velikost gravitační síly působící na částici o hmotnosti m stojící ve vzdálenosti $r > R$ od středu Země je podle rov. (14.1)

$$F = G\frac{Mm}{r^2}. \qquad (14.10)$$

Pokud na částici nepůsobí jiné síly, bude působením gravitační síly $\boldsymbol{F}$ padat ke středu Země. Síle $\boldsymbol{F}$ odpovídá zrychlení, které nazýváme **gravitační zrychlení** a_g. Newtonův druhý pohybový zákon nám říká, že pro F a a_g platí

$$F = ma_g. \qquad (14.11)$$

Dosadíme-li nyní F z rov. (14.10) do rov. (14.11) a vyjádříme-li a_g, dostaneme

$$a_g = \frac{GM}{r^2}. \qquad (14.12)$$

Tab. 14.1 ukazuje hodnoty a_g vypočítané pro různé výšky nad zemským povrchem.

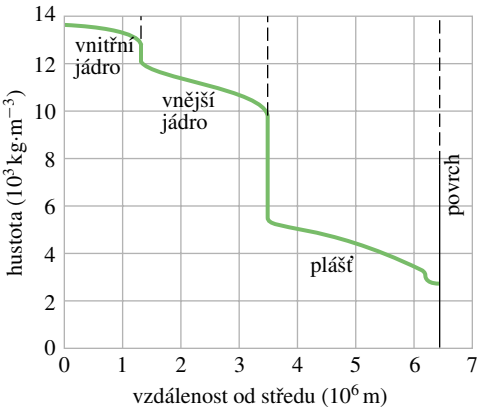
Tabulka 14.1 **Změna gravitačního zrychlení a_g s výškou h**

PŘÍKLAD VÝŠKY	h / km	a_g / m·s^{-2}
mořská hladina	0	9,83
Mount Everest	8,8	9,80
nejvyšší výška dosažená balonem s lidskou posádkou	36,6	9,71
oběžná dráha raketoplánu	400	8,70
komunikační satelit	35 700	0,225

Gravitační zrychlení a_g vyjádřené z rov. (14.12) není úplně stejné jako **tíhové zrychlení** g, které opravdu naměříme na volně padajících tělesech (a které je přibližně 9,81 m·s^{-2} u povrchu Země). Tato dvě zrychlení se liší ze tří důvodů. Země totiž (1) není homogenní, (2) není dokonalá

koule, (3) rotuje, tj. otáčí se kolem vlastní osy. Protože je g různé od a_g, je také tíhová síla mg různá od gravitační síly podle rov. (14.10), a to ze stejných důvodů. Rozeberme si nyní tyto důvody.

1. *Země není homogenní.* Hustota Země se mění radiálně dosti výrazně, jak ukazuje obr. 14.6. To by podle slupkového teorému gravitační sílu vně Země neovlivnilo. Jenomže hustota zemské kůry (či vnější části) se mění v jednotlivých oblastech pod povrchem Země. Proto se také g mění od oblasti k oblasti.



Obr. 14.6 Hustota Země jako funkce vzdálenosti od středu. Hranice pevného vnitřního jádra, převážně tekutého vnějšího jádra a pevného pláště jsou v grafu vyneseny, ale zemská kůra je příliš tenká, než aby mohla být v tomto grafu zachycena v odpovídajícím měřítku.

2. *Země není koule.* Země je přibližně elipsoid, zploštělý na pólech a vypuklý na rovníku. Jeho rovníkový poloměr je 6 378 km, polární 6 357 km. Proto jsou body na pólech blíž hustému jádru Země než body na rovníku. To je jeden z důvodů, proč tíhové zrychlení g roste na úrovni mořské hladiny ve směru od rovníku k pólům.

3. *Země rotuje kolem své osy.* Osa rotace prochází severním a jižním pólem Země. Každý předmět umístěný na povrchu Země kdekoli kromě těchto pólů obíhá po kružnici kolem osy rotace, a proto musí mít dostředivé zrychlení, které míří do středu této kružnice. Toto dostředivé zrychlení lze popsat dostředivou silou, která také míří do středu této kružnice.

Ukážeme si, jak rotace Země způsobuje rozdíl mezi tíhovým zrychlením g a gravitačním zrychlením a_g, a tím i mezi tíhovou a gravitační silou podle rov. (14.10). Rozebereme za tím účelem jednoduchou situaci, v níž bedna o hmotnosti m leží na číslicové váze na rovníku. Obr. 14.7a názorně ukazuje tuto situaci z pohledu shora nad severním pólem.

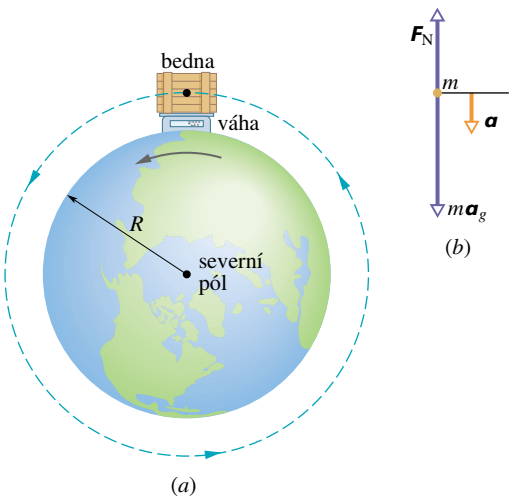
Obr. 14.7b je silový diagram pro bednu. Dostředivé zrychlení $\boldsymbol{a}$ bedny míří do středu kružnice, po níž se bedna pohybuje, a tento střed je totožný se středem Země (předpokládáme-li kouli). Země působí na bednu gravitační silou o velikosti ma_g podle rov. (14.11). Číslicová váha působí na bednu normálovou silou $\boldsymbol{F}_N$. Užijeme druhý Newtonův zákon na bednu, kladný směr osy orientujeme ke středu Země a dostáváme

$$\sum F = ma_g - F_N = ma. \qquad (14.13)$$

Velikost F_N síly čteme na stupnici váhy; bedna váží mg. Dosadíme-li mg za F_N do rov. (14.13), dostaneme

$$ma_g - mg = ma, \qquad (14.14)$$

což ukazuje, že velikost tíhové síly bedny (její váha) mg se liší od velikosti gravitační síly ma_g působící na bednu. Vydělíme-li rov. (14.14) m, vidíme, že také g se liší od a_g, a to o dostředivé zrychlení a.



Obr. 14.7 (a) Bedna ležící na váze na zemském rovníku. Pohled je podél osy zemské rotace, shora od severního pólu. (b) Silový diagram pro bednu. Bedna koná rovnoměrný kruhový pohyb, a má proto zrychlení orientované do středu Země. Gravitační síla na ni působící má velikost ma_g. Normálová síla $\boldsymbol{F}_N$ působící na váhu má velikost mg, kde g je tíhové zrychlení.

Dostředivé zrychlení $\boldsymbol{a}$ má velikost $\omega^2 R$, kde ω je úhlová rychlost rotující Země a R je poloměr kruhové dráhy, kterou opisuje bedna. (R je přibližně poloměr Země.) Za ω můžeme dosadit $2\pi/T$, kde $T = 24$ h je přibližně doba jednoho oběhu Země. Po dosazení do rov. (14.14) a vydělení m dostaneme

$$a_g - g = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \\ = 0{,}034\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}. \qquad (14.15)$$

Odtud plyne, že tíhové zrychlení $g \doteq 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ měřené na rovníku skutečné, rotující planety je o něco menší než gravitační zrychlení a_g způsobené pouze gravitační silou.

Umístíme-li bednu kamkoli mezi rovník a pól, budou mít $\boldsymbol{a}_g$ a $\boldsymbol{g}$ různé směry, neboť dostředivá síla na rozdíl od síly gravitační nemíří do středu Země, nýbrž kolmo k ose otáčení. Rov. (14.15) by proto bylo nutno upravit. Přesto ale můžeme odhadnout, že se rozdíl mezi $\boldsymbol{a}_g$ a $\boldsymbol{g}$ směrem k pólům zmenšuje, protože bedna opisuje menší a menší kružnice při stejné úhlové rychlosti ω. Na pólu je pak tíha bedny rovna gravitační síle, neboť se bedna pouze otáčí, ale nepohybuje se po kružnici.

Rozdíl tíhových zrychlení na rovníku a na pólu není velký (na rovníku je $g \doteq 9{,}78\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, na pólu $g \doteq$ $\doteq 9{,}83\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$), a proto ho obvykle zanedbáváme. Také tíhovou sílu mg můžeme aproximovat gravitační silou podle rov. (14.10).

PŘÍKLAD 14.3

Uvažujme pulzar, extrémně hustou zkolabovanou hvězdu, s hmotností Slunce $M = 1{,}98{\cdot}10^{30}\,\mathrm{kg}$, ale s poloměrem pouze $R = 12\,\mathrm{km}$ a s rotační periodou $T = 0{,}041\,\mathrm{s}$. Jak se procentuálně liší na jeho rovníku tíhové zrychlení g od gravitačního a_g?

ŘEŠENÍ: Hodnotu a_g na povrchu pulzaru najdeme podle rov. (14.12), kde R nahradí r a M bude hmotnost pulzaru. Dosazením daných hodnot dostaneme

$$a_g = \frac{GM}{R^2} = \frac{(6{,}67{\cdot}10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}})(1{,}98{\cdot}10^{30}\,\mathrm{kg})}{(12\,000\,\mathrm{m})^2} = 9{,}2{\cdot}10^{11}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Dosazením daných hodnot do rov. (14.15) a vydělením a_g dostaneme

$$\frac{a_g - g}{a_g} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R}{a_g} = \left(\frac{2\pi}{0{,}041\,\mathrm{s}}\right)^2 \frac{(12\,000\,\mathrm{m})}{(9{,}2{\cdot}10^{11}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = 3{,}1{\cdot}10^{-4} = 0{,}031\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Přestože pulzar rotuje velmi rychle, ovlivní jeho rotace tíhové zrychlení jen málo, protože poloměr pulzaru je velmi malý.

PŘÍKLAD 14.4

(a) Astronaut vysoký $h = 1{,}70\,\mathrm{m}$ se vznáší nohama dolů v raketoplánu na oběžné dráze ve vzdálenosti $r = 6{,}77{\cdot}10^6\,\mathrm{m}$ od středu Země. Jaký je rozdíl v gravitačním zrychlení jeho chodidel a hlavy?

ŘEŠENÍ: Rov. (14.12) nám říká, že gravitační zrychlení ve vzdálenosti r od středu Země je

$$a_g = \frac{GM_Z}{r^2}, \qquad (14.16)$$

kde M_Z je hmotnost Země. Nemůžeme dost dobře použít dvakrát rov. (14.16), jednou s $r = 6{,}77{\cdot}10^6\,\mathrm{m}$ pro chodidla a potom s $r = 6{,}77{\cdot}10^6\,\mathrm{m} + 1{,}70\,\mathrm{m}$ pro hlavu. Pokud bychom to udělali, kalkulačka by nám dala stejný výsledek pro obě hodnoty a rozdíl by byl nulový; h je totiž příliš malé v porovnání s r. Místo toho zderivujeme rov. (14.16) podle r a získáme

$$\mathrm{d}a_g = -2\,\frac{GM_Z}{r^3}\,\mathrm{d}r, \qquad (14.17)$$

kde $\mathrm{d}a_g$ je infinitezimální změna gravitačního zrychlení způsobená infinitezimální změnou $\mathrm{d}r$. Pro astronauta je $\mathrm{d}r = h$ a $r = 6{,}77{\cdot}10^6\,\mathrm{m}$. Nahradíme-li veličiny v rov. (14.17), dostaneme

$$\mathrm{d}a_g = -2\,\frac{(6{,}67{\cdot}10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}})(5{,}98{\cdot}10^{24}\,\mathrm{kg})}{(6{,}77{\cdot}10^6\,\mathrm{m})^3} \cdot (1{,}70\,\mathrm{m}) = -4{,}37{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek znamená, že gravitační zrychlení, a tím i síla působící směrem k Zemi na astronautova chodidla, je větší než na jeho hlavu. Tento rozdíl mezi silami, kterými působí nehomogenní pole na různé části téhož (dostatečně rozlehlého) tělesa, se nazývá **slapová síla**; způsobuje, že se astronautovo tělo protahuje. V tomto případě je ovšem tak malá, že je prakticky neměřitelná.

(b) Pokud by astronaut ve stejné poloze obíhal na stejné dráze o poloměru $r = 6{,}77{\cdot}10^6\,\mathrm{m}$, ale tentokrát kolem černé díry o hmotnosti $M_č = 1{,}99{\cdot}10^{31}\,\mathrm{kg}$ (což je desetinásobek hmotnosti Slunce), jaký by byl rozdíl gravitačního zrychlení jeho chodidel a hlavy? Černá díra má povrch (zvaný **horizont** černé díry) o poloměru $R_č = 2{,}95{\cdot}10^4\,\mathrm{m}$. Nic, ani světlo, neunikne z této hranice, natož z vnitřního prostoru černé díry. Povšimněme si, že astronaut je (moudře) dost daleko od této hranice ($r = 229R_č$).

ŘEŠENÍ: Opět použijeme rov. (14.17), kde dosadíme $M_č = 1{,}99{\cdot}10^{31}\,\mathrm{kg}$ za M_Z. Dostaneme

$$\mathrm{d}a_g = -2\,\frac{(6{,}67{\cdot}10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}})(1{,}99{\cdot}10^{31}\,\mathrm{kg})}{(6{,}77{\cdot}10^6\,\mathrm{m})^3} \cdot (1{,}70\,\mathrm{m}) = -14{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tentokrát je gravitační zrychlení astronautových chodidel směrem k černé díře značně větší než to, které působí na jeho hlavu. Slapová síla, natahující jeho tělo, by byla sice snesitelná, ale dosti bolestivá. Pokud by se přiblížil k černé díře ještě více, natahování by drasticky stouplo.

14.5 GRAVITAČNÍ POLE UVNITŘ ZEMĚ

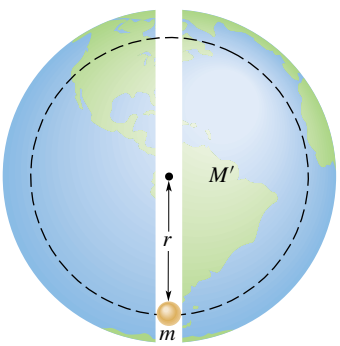
Newtonův slupkový teorém můžeme použít také na situaci, v níž je částice umístěna *uvnitř* homogenní kulové slupky, a to v tomto tvaru:

Homogenní kulová hmotná slupka *nepůsobí žádnou výslednou gravitační silou* na částici umístěnou uvnitř této slupky.

Kdyby byla hustota Země konstantní (tj. kdyby byla Země homogenní), pak by gravitační síla působící na částici byla maximální na povrchu Země. S klesající vzdáleností od středu Země by lineárně klesala k nule; hmotná slupka ležící nad částicí totiž nepřispívá k celkové síle působící na částici. Hustota Země však konstantní není a její jádro je podstatně hustší než její plášť. Začne-li tedy částice klesat pod povrch, převažuje nejprve vliv hustšího jádra a celková gravitační síla působící na částici roste. V určité hloubce dosáhne maxima a teprve při dalším pohybu směrem ke středu Země se opět začne zmenšovat, prakticky až k nule.

PŘÍKLAD 14.5

Představme si tunel procházející skrz Zemi od pólu k pólu (obr. 14.8). Předpokládejme, že Země je nerotující homogenní koule. Najděte gravitační sílu působící na částici o hmotnosti m, která je puštěna do tunelu, když dosáhne vzdálenosti r od středu Země.



Obr. 14.8 Příklad 14.5. Částice je puštěna do tunelu vyvrtaného skrz zeměkouli.

ŘEŠENÍ: Síla působící na částici je vyvolána jen tou hmotou Země, která leží uvnitř koule o poloměru r. Část Země, která leží vně této koule, nepůsobí na částici žádnou výslednou silou. Hmotnost M' vnitřní části je dána vztahem

$$M' = \varrho V' = \varrho \frac{4\pi r^3}{3}, \qquad (14.18)$$

kde V' je objem (který je ohraničen přerušovanou čarou v obr. 14.8), M' je hmotnost části Země uvnitř tohoto objemu a ϱ je předpokládaná hustota homogenní Země.

Síla působící na částici je po užití rov. (14.1) a (14.18) určena vzorcem

$$F = -\frac{GmM'}{r^2} = -\frac{Gm\varrho\,4\pi r^3}{3r^2} = -\left(\frac{4\pi m G\varrho}{3}\right)\cdot r =$$
$$= -K\cdot r, \qquad \text{(Odpověď)} \qquad (14.19)$$

kde K je konstanta rovná $4\pi mG\varrho/3$. Znaménko minus jsme ponechali proto, abychom zdůraznili, že síla $\boldsymbol{F}$ a polohový vektor $\boldsymbol{r}$ mají opačný směr. Síla směřuje do středu Země, zatímco polohový vektor směřuje od středu Země ven. Rov. (14.19) nám tedy říká, že síla působící na částici je přímo úměrná výchylce částice od středu Země, ale má opačný směr. Chová se tedy podobně jako síla pružnosti v Hookově zákonu.

14.6 GRAVITAČNÍ POTENCIÁLNÍ ENERGIE

V čl. 8.3 jsme probírali gravitační potenciální energii E_p soustavy částice + Země. Zabývali jsme se případem, kdy částice byla poměrně blízko zemského povrchu a gravitační sílu jsme mohli pokládat za konstantní. Zvolili jsme vhodnou referenční konfiguraci pro nulovou potenciální energii čili konfiguraci, k níž budeme potenciální energii vztahovat. Často bývá takovou konfigurací částice ležící na povrchu Země. Neleží-li částice na povrchu Země, pak E_p klesá, když se zmenšuje vzdálenost mezi částicí a Zemí.

V této kapitole rozšíříme dosavadní pojetí a budeme uvažovat gravitační potenciální energii E_p soustavy dvou částic o hmotnostech m a M, které jsou od sebe vzdáleny r. Znovu si zvolíme konfiguraci, při níž bude $E_p = 0$. Abychom si však zjednodušili rovnice, bude to tentokrát ve vzdálenosti r natolik velké, abychom ji mohli nahradit *nekonečnou* vzdáleností. Stejně jako předtím se potenciální energie zmenšuje, když se zmenšuje vzdálenost částic. Zavedeme-li tedy $E_p = 0$ pro $r \to \infty$, bude potenciální energie pro každou konečnou vzdálenost záporná a bude mít tím větší absolutní hodnotu $|E_p|$, čím blíže budou částice u sebe.

Jak dále dokážeme, bude **gravitační potenciální energie** systému dvou částic rovna

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \qquad \text{(gravitační potenciální energie).} \qquad (14.20)$$

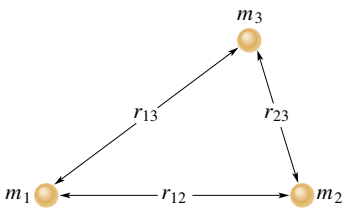
Všimněme si, že se $E_p(r)$ skutečně blíží k nule, když se r blíží k nekonečnu, a že pro každou konečnou hodnotu r je $E_p(r)$ záporné.

Energie daná rov. (14.20) je vlastností *soustavy dvou částic*, nikoli jedné osamocené částice. Tuto energii nelze

rozdělit a říci, že tolik a tolik přísluší jedné částici a zbytek té druhé. Je-li však $M \gg m$, jako třeba pro Zemi a míč, hovoříme často o „potenciální energii míče“. Můžeme to tak říci proto, že když se míč pohybuje v blízkosti zemského povrchu, projevují se změny v potenciální energii soustavy míč+Země jen jako změny kinetické energie míče, zatímco změny kinetické energie Země jsou příliš malé na to, aby byly měřitelné. (Naproti tomu změna hybnosti je stejně velká pro Zemi i pro malý míček; proč?) Podobně budeme v čl. 14.8 mluvit o „potenciální energii umělé družice“, která obíhá kolem Země, protože hmotnost družice je také mnohem menší než hmotnost Země. Budeme-li však mluvit o potenciální energii těles se srovnatelnými hmotnostmi, musíme s nimi zacházet zase jako s celkem — se soustavou.

Pokud náš systém obsahuje více než dvě částice, uvažujeme postupně každou dvojici částic a počítáme energii každé dvojice podle rov. (14.20), jako by tam ostatní částice nebyly. Nakonec všechny tyto příspěvky algebraicky sečteme. Použijeme-li rov. (14.20) na každou ze tří dvojic z obr. 14.9, dostaneme potenciální energii tohoto systému jako

$$E_p = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right). \qquad (14.21)$$

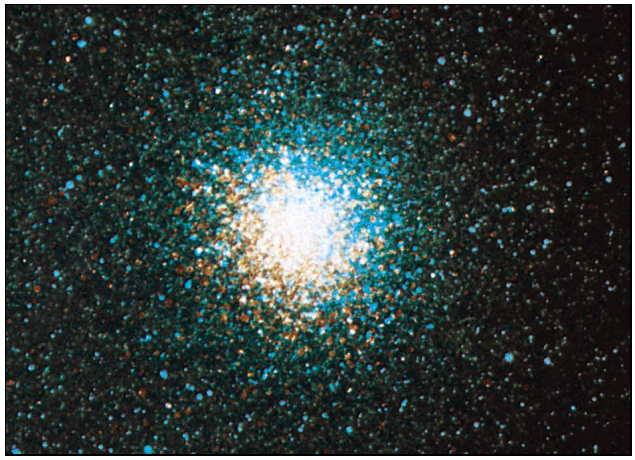


Obr. 14.9 Tři částice působící na sebe vzájemnými gravitačními silami. Gravitační potenciální energie tohoto systému je součtem dílčích energií každé ze tří možných dvojic.

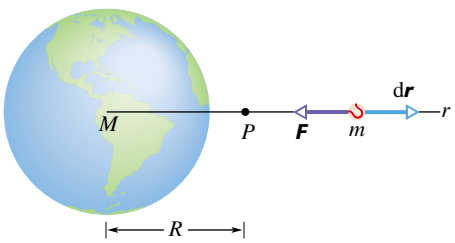
Kulová hvězdokupa (obr. 14.10) v souhvězdí Střelce je dobrým příkladem systému částic, který se vyskytuje v přírodě. Obsahuje kolem 70 000 hvězd, které lze spárovat $2{,}5\cdot10^9$ různými způsoby. Zamyslíme-li se nad touto strukturou, uvědomíme si, jak obrovské množství gravitační potenciální energie je ve vesmíru nahromaděno.

Odvození rov. (14.20)

Nechť míček, pohybující se z klidu ve velké (nekonečné) vzdálenosti od Země, padá do bodu P, jak je znázorněno na obr. 14.11. Potenciální energie soustavy míček + Země je na počátku nulová. Když míček dosáhne bodu P, bude potenciální energie rovna záporně vzaté práci W vykonané



Obr. 14.10 Kulová hvězdokupa, jako např. tato v souhvězdí Střelce, obsahuje desítky tisíc hvězd uspořádaných ve výsledném kulovitém útvaru. V naší Galaxii, kterou vidíme jako Mléčnou dráhu, je mnoho takových hvězdokup a některé z nich jsou viditelné již malým dalekohledem.



Obr. 14.11 Míček o hmotnosti m padá k Zemi z nekonečna podél radiální přímky a prochází bodem P, který je ve vzdálenosti R od středu Země.

gravitační silou působící na míček, která ho přesunula do bodu P z jeho vzdálené polohy. Z rov. (8.5) plyne

$$E_p = -W = -\int_{\infty}^{R} \boldsymbol{F}(r)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \qquad (14.22)$$

Meze integrálu jsou dány počáteční vzdáleností míčku, kterou bereme jako nekonečnou, a jeho koncovou vzdáleností R.

Vektor $\boldsymbol{F}(r)$ v rov. (14.22) směřuje radiálně do středu Země v obr. 14.11 a vektor d$\boldsymbol{r}$ míří radiálně od něj, takže úhel φ mezi těmito vektory je 180°. Je tedy

$$\boldsymbol{F}(r)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = F(r)(\cos 180^\circ)(\mathrm{d}r) = \\ = -F(r)\,\mathrm{d}r. \qquad (14.23)$$

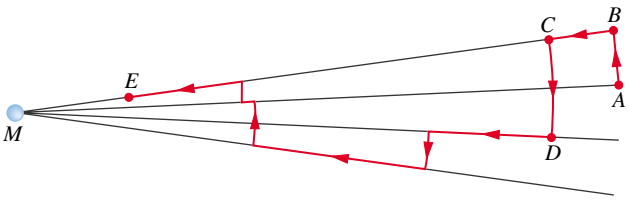
Za $F(r)$ v rov. (14.23) nyní dosadíme z Newtonova gravitačního zákona (rov. (14.1)) a dostáváme

$$\boldsymbol{F}(r)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{GMm}{r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Dosadíme-li ještě tento výraz do rov. (14.22), získáme výsledek

$$E_\mathrm{p} = \int_\infty^R \left(\frac{GMm}{r^2}\right) \mathrm{d}r = -\left[\frac{GMm}{r}\right]_\infty^R = -\frac{GMm}{R},$$

což odpovídá přímo rov. (14.20).



Obr. 14.12 Práce vykonaná gravitační silou při přesunu míčku z A do E je nezávislá na cestě, po níž se míček pohybuje.

V rov. (14.22) nezáleží na trajektorii, po které se míček k Zemi pohybuje. Uvažujme cestu vytvořenou z malých kroků, jako na obr. 14.12. Podél kroků, jako je AB nebo CD, kdy se nemění vzdálenost od Země, se nekoná žádná práce, protože gravitační síla je při nich kolmá na posunutí. Celková práce vykonaná při radiálních krocích, jako třeba BC, je tedy stejná jako práce vykonaná při pohybu podél jedné radiální přímky, což je vidět na obr. 14.12. Výsledná práce vykonaná gravitační silou působící na částici při jejím pohybu mezi libovolnými dvěma body je tedy nezávislá na cestě, po které se částice pohybuje, ale závisí pouze na počáteční a koncové poloze dané částice. Tuto práci můžeme jednoduše spočítat jako záporně vzatý rozdíl potenciální energie v těchto dvou bodech

$$W = -\Delta E_\mathrm{p} = -(E_{\mathrm{p,f}} - E_{\mathrm{p,i}}), \qquad (14.24)$$

kde $E_{\mathrm{p,f}}$ je potenciální energie v koncovém a $E_{\mathrm{p,i}}$ v počátečním bodě. A právě to jsme chtěli říci v kap. 8 slovy, že gravitační síla je **konzervativní**. A jak jsme už výše rozebrali, pokud by práce na cestě *závisela* (jako např. u třecí síly), pak taková síla není potenciálová a potenciální energii nelze zavést.

Potenciální energie a síla

V důkazu rov. (14.20) jsme odvodili potenciální energii E_p ze síly $\boldsymbol{F}$. Měli bychom být také schopni postupovat obráceně, tedy začít od potenciální energie a dojít k síle. Se znalostí rov. (8.19) můžeme zapsat její radiální složku

$$F_r = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = \\ = -\frac{GMm}{r^2}. \qquad (14.25)$$

To je právě Newtonův gravitační zákon (rov. (14.1)). Znaménko minus udává, že síla působící na hmotu m směřuje radiálně dovnitř, směrem k hmotě M.

Úniková rychlost

Když vypálíme střelu svisle vzhůru, začne se zpomalovat, až se obvykle v jisté výšce na okamžik zastaví a pak se zase vrací k Zemi. Existuje však jistá počáteční rychlost, při které se částice bude pohybovat vzhůru navždy a zastaví se teoreticky až v nekonečnu. Tato počáteční rychlost se nazývá **úniková rychlost**.

Uvažujme střelu o hmotnosti m, která opouští povrch planety (nebo nějakého astronomického tělesa či systému) s únikovou rychlostí v. Její kinetická energie je rovna $\frac{1}{2}mv^2$ a potenciální energie E_p je dána podle rov. (14.20):

$$E_\mathrm{p} = -\frac{GMm}{R},$$

kde M je hmotnost planety a R její poloměr.

Když střela dosáhne nekonečna, zastaví se a nemá tedy žádnou kinetickou energii. Nemá ani žádnou potenciální energii, protože polohu v nekonečnu jsme zvolili za konfiguraci s nulovou potenciální energií. Celková energie střely v nekonečnu je proto nulová. Ze zákona zachování energie plyne, že její celková energie na povrchu planety musela být také nulová, takže platí

$$E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = \tfrac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0.$$

Z toho plyne

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \qquad (14.26)$$

Úniková rychlost nezávisí na směru, kterým je střela vypuštěna. Uvážíme-li však rotaci Země kolem vlastní osy, je získání této rychlosti snadnější, pokud je střela vypuštěna ve směru pohybu Země. Například rakety startující na východ od mysu Canaveral mají navíc rychlost 1 500 km/h, kterou se mys pohybuje na východ díky rotaci Země.

Tabulka 14.2 **Příklady únikových rychlostí**

TĚLESO	M / kg	R / m	v / km·s^{-1}
Ceres[a]	$1{,}17\cdot10^{21}$	$3{,}8\cdot10^{5}$	0,64
Měsíc	$7{,}36\cdot10^{22}$	$1{,}74\cdot10^{6}$	2,38
Země	$5{,}98\cdot10^{24}$	$6{,}37\cdot10^{6}$	11,2
Jupiter	$1{,}90\cdot10^{27}$	$7{,}15\cdot10^{7}$	59,5
Slunce	$1{,}99\cdot10^{30}$	$6{,}96\cdot10^{8}$	618
Sirius B[b]	$2\cdot10^{30}$	$1\cdot10^{7}$	5 200
neutronová hvězda[c]	$2\cdot10^{30}$	$1\cdot10^{4}$	$2\cdot10^{5}$

[a] nejhmotnější asteroid (planetka)
[b] *bílý trpaslík* (hvězda v koncovém stádiu vývoje), který je souputníkem jasné hvězdy Siria
[c] zhroucené jádro hvězdy, které zbylo po jejím výbuchu v *supernovu*.

Rov. (14.26) můžeme použít k určení únikové rychlosti střely z jakéhokoli astronomického objektu, dosadíme-li za M hmotnost tohoto objektu a za R jeho poloměr. Tab. 14.2 udává únikové rychlosti z vybraných astronomických těles.

KONTROLA 4: Míč o hmotnosti m vzdalujeme z povrchu koule o hmotnosti M. (a) Roste, nebo klesá gravitační potenciální energie soustavy míč+koule? (b) Je práce konaná gravitační silou mezi míčem a koulí kladná, nebo záporná?

PŘÍKLAD 14.6

Asteroid letící přímo na Zem má ve vzdálenosti deseti poloměrů Země od jejího středu rychlost 12 km/s vůči Zemi. Pokud pomineme vliv zemské atmosféry na jeho pohyb, určete, jakou rychlostí na Zemi dopadne.

ŘEŠENÍ: Jelikož je hmotnost asteroidu mnohem menší než hmotnost Země, můžeme gravitační potenciální energii systému Země + asteroid připsat jen samotnému asteroidu. Můžeme také zanedbat změnu relativní rychlosti Země vzhledem k asteroidu během jeho letu. Protože zanedbáváme vliv atmosféry na asteroid, zachovává se mechanická energie asteroidu během letu, tedy

$$E_{k,f} + E_{p,f} = E_{k,i} + E_{p,i},$$

kde E_k a E_p jsou kinetická a potenciální energie asteroidu a indexy f a i označují stav koncový (ve vzdálenosti 1 poloměru Země) a počáteční (ve vzdálenosti 10 poloměrů Země).

Označme m hmotnost asteroidu, $M = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg hmotnost Země a $R = 6\,378$ km poloměr Země. Použijeme-li rov. (14.20) pro potenciální energii a $\frac{1}{2}mv^2$ pro kinetickou energii, dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{10R}.$$

Úpravou rovnice a dosazením známých hodnot získáme

$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{2GM}{R}\left(1 - \frac{1}{10}\right) =$$
$$= (12\cdot10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 + \frac{2(6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}})(5{,}98\cdot10^{24}\ \mathrm{kg})}{(6{,}37\cdot10^6\ \mathrm{m})}\,0{,}9 =$$
$$= 2{,}567\cdot10^8\ \mathrm{m^2\cdot s^{-2}}$$

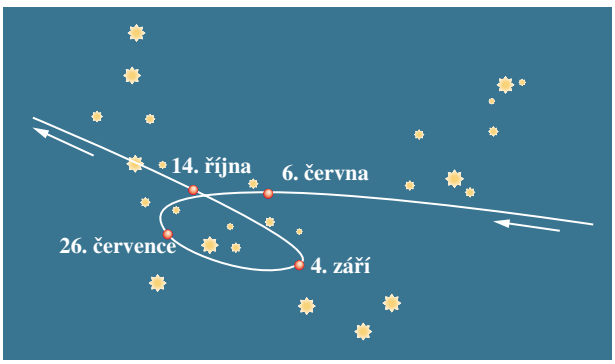
a odtud plyne

$$v_f = 1{,}60\cdot10^4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 16\ \mathrm{km/s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Při této rychlosti by asteroid nemusel být nijak zvlášť veliký k tomu, aby způsobil na Zemi vážné škody. I kdyby měl například průměr pouhých 5 m, uvolnil by jeho dopad tolik energie jako výbuch jaderné bomby v Hirošimě. Varovné je, že v blízkosti oběžné dráhy Země se nachází 500 milionů podobných asteroidů. V roce 1944 jeden z nich zřejmě pronikl zemskou atmosférou a explodoval ve výšce 20 km nedaleko osamělého ostrova v jižním Pacifiku. Tím způsobil, že se na šesti válečných satelitech spustil varovný signál před jadernou explozí. Asteroid o průměru 500 m (a takových může být poblíž zemské oběžné dráhy milion) by mohl zničit celou moderní civilizaci a téměř vyhladit celé lidstvo. Víme-li však o něm včas, umíme ho už (výbuchem) vhodně vychýlit z dráhy. (Jak je vidět, fyzika, astronomie i technika mohou lidstvu opravdu prospět.)

14.7 PLANETY A DRUŽICE: KEPLEROVY ZÁKONY

Pohyby planet, které po obloze putují na pozadí hvězd, byly hádankou již od dávných časů. Smyčkovitý pohyb Marsu, znázorněný na obr. 14.13, byl obzvláště matoucí. Johannes Kepler (1571–1630) formuloval po celoživotním studiu empirické zákony, kterými se tyto pohyby řídí. Tycho Brahe (1546–1601), který jako poslední z velkých astronomů prováděl pozorování bez pomoci dalekohledu, nashromáždil rozsáhlé množství poznatků a údajů, které umožnily Keplerovi odvodit tři zákony o pohybech planet, nesoucí dnes Keplerovo jméno. Později ukázal Newton (1642–1727), že z jeho gravitačního zákona lze Keplerovy empirické zákony odvodit i teoreticky.



Obr. 14.13 Dráha planety Mars, po níž se pohybovala na pozadí souhvězdí Kozoroha během roku 1971. Na obrázku je znázorněna jeho poloha ve čtyřech různých dnech. Planety Mars i Země se obě pohybují po oběžných drahách kolem Slunce; zde vidíme polohu Marsu vzhledem k Zemi. Díky tomu pozorujeme na dráze Marsu zdánlivé smyčky.

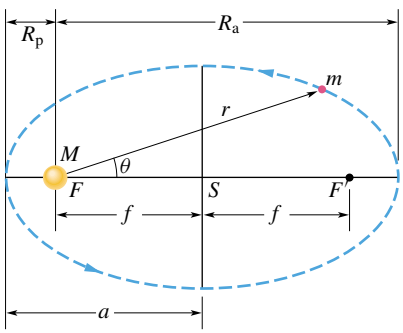
Probereme si postupně každý z Keplerových zákonů. Nejprve formulace pro skutečné planety naší sluneční soustavy:

1. Keplerův zákon (**zákon oběžných drah**): Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách (jen málo odlišných od kružnic), v jejichž společném ohnisku je Slunce.

Ačkoli jsou zde zákony formulovány pro planety, které se pohybují kolem Slunce, platí stejně dobře pro družice (satelity), ať už přírodní nebo umělé, které obíhají kolem Země nebo jakéhokoli jiného objektu, v tomto trochu obecnějším znění:

Obecná formulace 1. Keplerova zákona: Částice se pod vlivem centrální síly pohybuje po kuželosečce (kružnici, elipse, parabole nebo hyperbole), která má ohnisko v centru síly.

Obr. 14.14 představuje planetu o hmotnosti m obíhající po jedné z oběžných drah kolem Slunce, jehož hmotnost je M. Předpokládáme, že $M \gg m$, a proto těžiště soustavy planeta + Slunce leží téměř ve středu Slunce (úloha 88).



Obr. 14.14 Planeta o hmotnosti m pohybující se po eliptické oběžné dráze kolem Slunce. Slunce o hmotnosti M se nachází v jednom ohnisku F dané elipsy; druhé, „prázdné“ ohnisko, je označeno F'. Každé z ohnisek je vzdáleno o $f = |SF| = ea$ od středu elipsy, kde e je excentricita elipsy a a je její hlavní poloosa. Perihelium (nejbližší místo ke Slunci) je ve vzdálenosti R_p a afelium (nejvzdálenější místo od Slunce) je ve vzdálenosti R_a.

Oběžná dráha na obr. 14.14 je popsána vyznačenou **hlavní poloosou** a a **excentricitou** e neboli **výstředností**, definovanou tak, že $f = ea$ je vzdálenost středu elipsy S od ohniska F nebo F'. Nulová excentricita odpovídá kružnici, v níž obě ohniska splynou do jednoho bodu — do středu kružnice. Excentricity oběžných drah planet jsou poměrně malé, takže tyto dráhy — načrtnuty na papíru — vypadají skoro jako kružnice. Excentricita elipsy na obr. 14.14, která je pro větší názornost přehnaně velká, činí 0,74. Skutečná excentricita oběžné dráhy Země je pouze 0,016 7. Jiné objekty než planety (např. komety) mohou mít excentricitu podstatně větší.

2. Keplerův zákon (**zákon ploch**): Plochy opsané průvodičem planety za jednotku času jsou stejně velké.

Z tohoto zákona plyne, že se planeta bude pohybovat nejpomaleji, když bude od Slunci nejdále, a nejrychleji, když bude k Slunci nejblíže. Druhý Keplerův zákon je ekvivalentní zákonu zachování momentu hybnosti. Dokažme to:

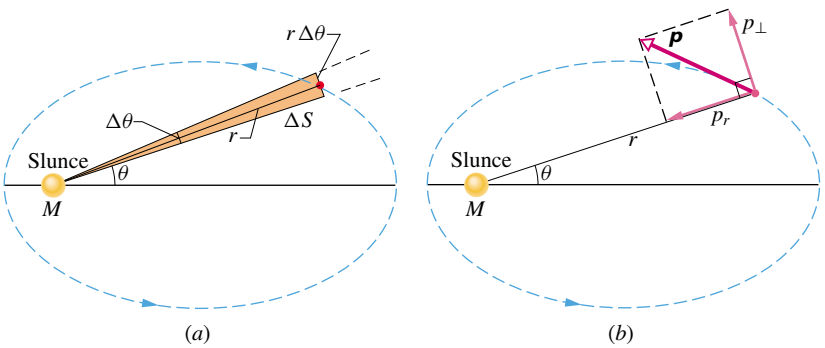
Obsah vystínovaného klínu na obr. 14.15a je přibližně roven obsahu plochy opsané průvodičem planety o délce r za čas Δt. Obsah tohoto klínu ΔS je přibližně roven obsahu trojúhelníka o základně $r\,\Delta\theta$ a výšce r, tedy $\Delta S \doteq \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$. Toto vyjádření pro ΔS bude tím přesnější, čím více se bude Δt (a také $\Delta\theta$) blížit nule. Okamžitá rychlost, s jakou přibývá plocha, je tedy

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{r^2}{2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{r^2\omega}{2}, \tag{14.27}$$

kde ω je úhlová rychlost průvodiče.

Obr. 14.15b znázorňuje hybnost planety a její jednotlivé průměty. Z rov. (12.27) je velikost momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ planety obíhající kolem Slunce dána ramenem r a složkou $p_\perp$ hybnosti $\boldsymbol{p}$ kolmou k r:

$$L = rp_\perp = (r)(mv_\perp) = (r)(m\omega r) = \\ = mr^2\omega, \tag{14.28}$$



(a) (b)

Obr. 14.15 (a) Za čas Δt opíše průvodič r úhel $\Delta\theta$ a plochu o obsahu ΔS. (b) Hybnost $\boldsymbol{p}$ dané planety a její složky.

kde jsme za $v_\perp$ dosadili ωr z rov. (11.16). Vyloučíme-li společný výraz $r^2\omega$ z rov. (14.27) a (14.28), dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{2m}. \qquad (14.29)$$

Pokud bude $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t$ konstanta, a to tvrdí 2. Keplerův zákon, pak podle rov. (14.29) musí být L také konstanta, což znamená, že se moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ bude zachovávat. Druhý Keplerův zákon je tedy skutečně ekvivalentní zákonu zachování momentu hybnosti.

3. Keplerův zákon (zákon oběžných dob): Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je roven poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich drah.

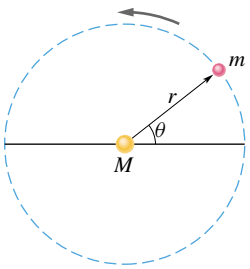
Pro ilustraci, uvažujme kruhovou oběžnou dráhu o poloměru r (poloměr u kružnice je ekvivalentem hlavní poloosy u elipsy). Užitím druhého Newtonova zákona $F = ma$ pro obíhající planetu na obr. 14.16 dostáváme

$$\frac{GMm}{r^2} = (m)(\omega^2 r). \qquad (14.30)$$

Za sílu F jsme dosadili z rov. (14.1) a dále jsme použili rov. (11.21), odkud jsme za velikost dostředivého zrychlení dosadili výraz $\omega^2 r$. Když podle rov. (11.18) dosadíme $\omega = 2\pi/T$, kde T je oběžná doba, získáme třetí Keplerův zákon:

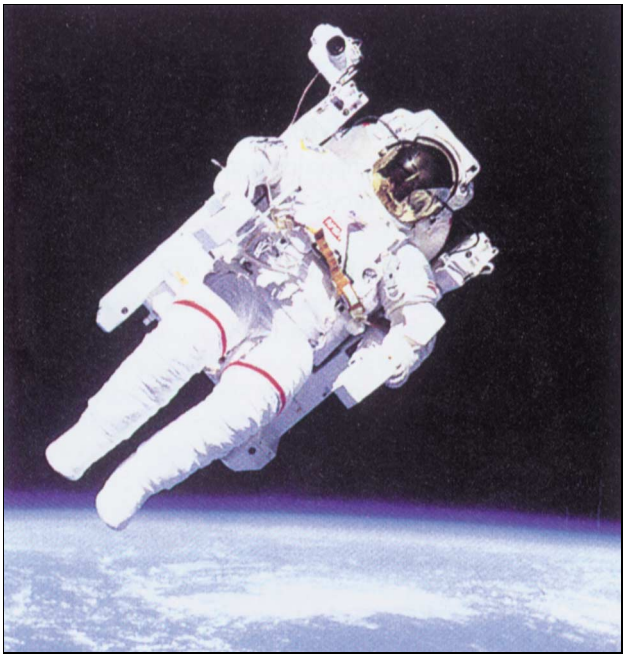
$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \quad \text{(zákon oběžných dob)}. \qquad (14.31)$$

Výraz v závorkách je konstanta, jejíž hodnota závisí pouze na hmotnosti centrálního tělesa.



Obr. 14.16 Planeta o hmotnosti m pohybující se kolem Slunce po kruhové oběžné dráze o poloměru r.

Rov. (14.31) platí také pro eliptické dráhy, zaměníme-li v ní r za a, čili hlavní poloosu elipsy. Tento zákon předpovídá, že poměr T^2/a^3 bude stejný pro oběžné dráhy všech planet obíhajících kolem daného hmotného tělesa. Tab. 14.3 ukazuje, jak dalece zákon platí pro oběžné dráhy planet naší Sluneční soustavy.



Dne 7. února 1984, ve výšce 102 km nad Havajskými ostrovy v rychlosti 29 000 km/h, vystoupil Bruce McCandless z raketoplánu (s nímž nebyl pevně spojen) do vesmíru. Tím se stal prvním lidským satelitem.

Tabulka 14.3 **Třetí Keplerův zákon pro Sluneční soustavu**

PLANETA	a / 10^{10} m	T / y	T^2/a^3 / 10^{-34} y^2/m^3
Merkur	5,79	0,241	2,99
Venuše	10,8	0,615	3,00
Země	15,0	1,00	2,96
Mars	22,8	1,88	2,98
Jupiter	77,8	11,9	3,01
Saturn	143	29,5	2,98
Uran	287	84,0	2,98
Neptun	450	165	2,99
Pluto	590	248	2,99

KONTROLA 5: Družice 1 obíhá planetu po jisté kruhové dráze, družice 2 ji obíhá po větší kruhové dráze. Která z družic má (a) delší dobu oběhu a (b) větší rychlost?

PŘÍKLAD 14.7

Družice, obíhající po kruhové dráze ve výšce $h = 230$ km nad Zemí, má dobu oběhu $T = 89$ min. Jakou hmotnost by podle těchto údajů měla mít Země?

ŘEŠENÍ: K výpočtu použijeme 3. Keplerův zákon pro soustavu družice + Země. Vyjádříme-li z rov. (14.31) hmot-

nost M, získáme vztah

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}. \qquad (14.32)$$

Poloměr r dráhy družice je

$$r = R + h = (6{,}37{\cdot}10^6\ \mathrm{m} + 230{\cdot}10^3\ \mathrm{m}) = \\ = 6{,}60{\cdot}10^6\ \mathrm{m},$$

kde R je poloměr Země. Dosazením této hodnoty poloměru a doby oběhu do rov. (14.32) dostaneme

$$M = \frac{4\pi^2 (6{,}60{\cdot}10^6\ \mathrm{m})^3}{(6{,}67{\cdot}10^{-11}\ \mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}})(89 \cdot 60\ \mathrm{s})^2} = \\ = 6{,}0{\cdot}10^{24}\ \mathrm{kg}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Stejným způsobem můžeme také určit hmotnost Slunce ze známých hodnot doby oběhu Země a poloměru její oběžné dráhy kolem Slunce (předpokládáme-li, že je kruhová) nebo třeba hmotnost Jupitera pomocí doby oběhu a poloměru oběžné dráhy některého z jeho měsíců (jehož hmotnost znát nemusíme).

PŘÍKLAD 14.8

Halleyova kometa obíhá kolem Slunce s periodou 76 let. V roce 1986 měla nejbližší vzdálenost od Slunce, tj. vzdálenost v **perihelu**, rovnu $R_\mathrm{p} = 8{,}9{\cdot}10^{10}$ m. Tab. 14.3 ukazuje, že se nacházela mezi oběžnými drahami Merkura a Venuše. (a) Jaká je největší vzdálenost této komety od Slunce, čili její vzdálenost v **aféliu*** R_a?

ŘEŠENÍ: Z rov. (14.31) můžeme určit velikost hlavní poloosy oběžné dráhy Halleovy komety. Nahradíme-li r za a a vyjádříme-li a z této rovnice, dostaneme

$$a = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}. \qquad (14.33)$$

Nyní stačí dosadit za hmotnost Slunce $M = 1{,}99{\cdot}10^{30}$ kg a dobu oběhu komety $T = 76$ let $= 2{,}4{\cdot}10^9$ s; vypočteme, že $a = 2{,}7{\cdot}10^{12}$ m. Z obr. 14.14 vidíme, že $R_\mathrm{a} + R_\mathrm{p} = 2a$ neboli

$$R_\mathrm{a} = 2a - R_\mathrm{p} = \\ = 2(2{,}7{\cdot}10^{12}\ \mathrm{m}) - (8{,}9{\cdot}10^{10}\ \mathrm{m}) = \\ = 5{,}3{\cdot}10^{12}\ \mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z tab. 14.3 je vidět, že tato vzdálenost je jen o něco málo menší než hlavní poloosa oběžné dráhy planety Pluto.

(b) Jakou excentricitu má oběžná dráha Halleovy komety?

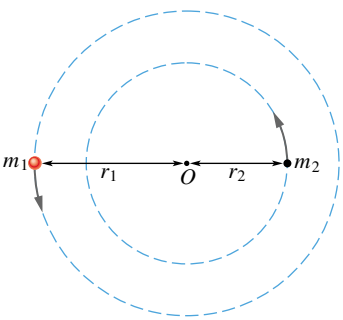
ŘEŠENÍ: Na obr. 14.14 vidíme, že $ea = a - R_\mathrm{p}$ neboli

$$e = \frac{a - R_\mathrm{p}}{a} = 1 - \frac{R_\mathrm{p}}{a} = \\ = 1 - \frac{(8{,}9{\cdot}10^{10}\ \mathrm{m})}{(2{,}7{\cdot}10^{12}\ \mathrm{m})} = 0{,}97. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z toho vyplývá, že oběžná dráha Halleovy komety, jejíž excentricita je blízká jedné, má tvar velmi protáhlé úzké elipsy.

PŘÍKLAD 14.9

Pozorování světla z jisté hvězdy nám naznačuje, že tato hvězda je součástí dvojhvězdy. Viditelná hvězda má oběžnou rychlost $v = 270$ km/s (což zjistíme z Dopplerova posuvu v jejím spektru, viz čl. 18.9), dobu oběhu $T = 1{,}70$ dní a hmotnost přibližně rovnu $m_1 = 6M_\mathrm{S}$, kde $M_\mathrm{S} = 1{,}99{\cdot}10^{30}$ kg je hmotnost Slunce. Předpokládejme, že se hvězda a její společník, který je temný, a proto neviditelný, pohybují po kruhových oběžných drahách (obr. 14.17). Určete přibližnou hmotnost m_2 jejího temného společníka.



Obr. 14.17 Příklad 14.9. Viditelná hvězda o hmotnosti m_1 a tmavý, neviditelný objekt o hmotnosti m_2 obíhají kolem hmotného středu dvojhvězdy v bodě O.

ŘEŠENÍ: Stejně jako u soustavy dvou částic v čl. 9.2 leží těžiště této dvojhvězdy na spojnici středů obou hvězd. A stejně jako volně rotující tělesa a systémy v kap. 12 rotuje tato dvojhvězda kolem společného těžiště. Na obr. 14.17 je těžiště vyznačeno bodem O. Viditelná hvězda a temná hvězda obíhají kolem bodu O po oběžných drahách o poloměrech r_1 a r_2, čili mají navzájem stálou vzdálenost $r = r_1 + r_2$. Z rov. (14.1) můžeme určit velikost gravitační síly, jakou působí temný objekt na viditelnou hvězdu,

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}.$$

Použitím Newtonova zákona síly, $F = ma$, pro viditelnou hvězdu platí

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_1a = (m_1)(\omega^2 r_1), \qquad (14.34)$$

kde ω je úhlová rychlost viditelné hvězdy a $\omega^2 r_1$ velikost jejího dostředivého zrychlení mířícího do bodu O.

* Při oběhu kolem Slunce se užívají tvary perihelium i perihel, a afélium (stažené z apo-helium). Při oběhu kolem Země jde o **perigeum** a **apogeum**.

Pro tytéž veličiny však můžeme získat ještě další vztah, totiž vzorec pro polohu těžiště O

$$r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2}.$$

Z toho plyne

$$r = r_1 \frac{m_1 + m_2}{m_2}. \tag{14.35}$$

Když teď dosadíme r z rov. (14.35) do rov. (14.34) a nahradíme ω výrazem $2\pi/T$, pak po jednoduché úpravě dostaneme

$$\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4\pi^2}{GT^2} r_1^3. \tag{14.36}$$

Stále zůstávají dvě neznámé, m_2 a r_1. Hodnotu r_1 však můžeme určit z kruhového pohybu viditelné hvězdy: doba oběhu T je rovna podílu obvodu oběžné dráhy $(2\pi r_1)$ a rychlosti v hvězdy. Tedy

$$T = \frac{2\pi r_1}{v}$$

neboli

$$r_1 = \frac{vT}{2\pi}. \tag{14.37}$$

Dosadíme-li $m_1 = 6M_S$ a r_1 z rov. (14.37), pak rov. (14.36) nabude tvaru

$$\frac{m_2^3}{(6M_S + m_2)^2} = \frac{v^3 T}{2\pi G} =$$
$$= \frac{(2{,}7\cdot 10^5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^3 (1{,}70\ \mathrm{d})(86\,400\ \mathrm{s/d})}{2\pi(6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}})} =$$
$$= 6{,}90\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$$

neboli

$$\frac{m_2^3}{(6M_S + m_2)^2} = 3{,}47 M_S. \tag{14.38}$$

Mohli bychom řešit tuto kubickou rovnici pro m_2. Pokud nám však stačí jen odhad (stejně počítáme jen s přibližnými hodnotami hmotností), stačí zkoušet postupně dosazovat za m_2 celočíselné násobky M_S. Hodnota, která nejlépe vyhovuje dané rovnici, je

$$m_2 \doteq 9M_S. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tyto hodnoty přibližně odpovídají systému LMC X-3 ve Velkém Magellanově mračnu (viz obrázek na začátku této kapitoly). Z dalších údajů zjistíme, že temný objekt je obzvláště hustý: mohla by to být vlastní gravitací zhroucená hvězda, ze které se stala buď neutronová hvězda, nebo černá díra. Vzhledem k tomu, že neutronová hvězda nemůže mít hmotnost větší než $2M_S$, utvrzuje nás výsledek $m_2 \doteq 9M_S$ v přesvědčení, že se jedná o černou díru.

O přítomnosti černé díry se tedy můžeme přesvědčit např. tehdy, pokud je součástí binárního systému s viditelnou hvězdou, jejíž hmotnost, oběžnou rychlost a oběžnou dobu můžeme měřit.



14.8 DRUŽICE: OBĚŽNÉ DRÁHY A ENERGIE

S pohybem družice kolem Země se mění jak její rychlost, která určuje její kinetickou energii, tak vzdálenost od středu Země, která určuje její gravitační potenciální energii, a to ve stejných časových intervalech. Přesto však její celková mechanická energie E zůstává stejná. Vzhledem k tomu, že hmotnost družice je mnohem menší než hmotnost Země, připisujeme tyto energie E_p a E soustavy družice + Země jen samotné družici.

Potenciální energie je dána rov. (14.20) a je rovna

$$E_p = -\frac{GMm}{r},$$

kde $E_p = 0$ pro $r \to \infty$. Zde je r poloměr oběžné dráhy; předpokládejme zatím, že je kruhová.

Abychom určili kinetickou energii družice na kruhové oběžné dráze, použijeme druhý Newtonův zákon $F = ma$ a napíšeme ho ve tvaru

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}, \tag{14.39}$$

kde v^2/r je velikost dostředivého zrychlení družice. Potom z rovnice (14.39) plyne vztah pro kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}, \tag{14.40}$$

který nám ukazuje, že pro družici obíhající po kruhové dráze platí

$$E_k = -\frac{E_p}{2}. \tag{14.41}$$

Celková mechanická energie pohybující se družice je

$$E = E_k + E_p = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

neboli

$$E = -\frac{GMm}{2r}. \tag{14.42}$$

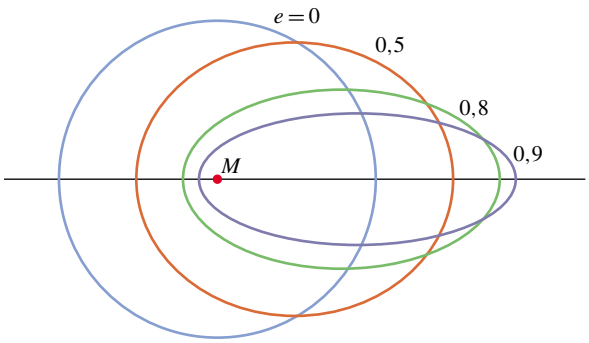
To nám říká, že celková energie E družice je záporně vzatá kinetická energie E_k:

$$E = -E_k \quad \text{(pro kruhovou dráhu)}. \tag{14.43}$$

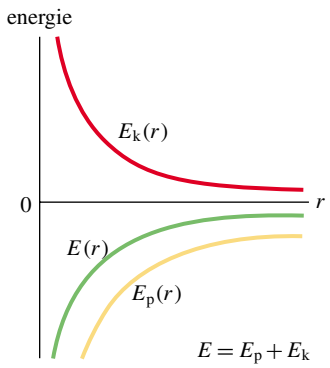
Pro družici pohybující se po eliptické oběžné dráze s hlavní poloosou a můžeme dosadit $r = a$ v rov. (14.42) a určit celkovou mechanickou energii vztahem

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad \text{(pro eliptickou dráhu).} \qquad (14.44)$$

Rov. (14.44) ukazuje, že celková mechanická energie obíhající družice závisí pouze na velikosti hlavní poloosy její oběžné dráhy a nezávisí na její excentricitě e. Např. na obr. 14.18 jsou nakresleny čtyři oběžné dráhy o stejně dlouhé poloose a. Družice pohybující se po těchto čtyřech odlišných drahách by však měly stejné celkové mechanické energie E. Obr. 14.19 ukazuje závislosti veličin E_k, E_p a E na poloměru r u družice, která se pohybuje po kruhové dráze kolem těžkého centrálního tělesa.

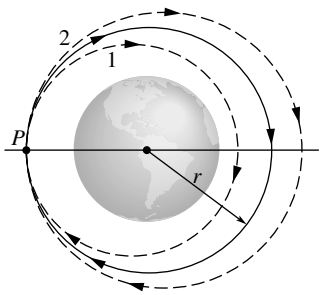


Obr. 14.18 Čtyři oběžné dráhy kolem centrálního tělesa o hmotnosti M. Všechny tyto dráhy mají stejně velkou hlavní poloosu a, a proto jim odpovídá stejná celková energie E. Excentricity e jednotlivých drah jsou na obrázku vyznačeny.



Obr. 14.19 Kinetická energie E_k, potenciální energie E_p a celková mechanická energie E v závislosti na poloměru r kruhové oběžné dráhy družice. Hodnoty E_p a E jsou záporné pro každé r, hodnoty E_k jsou naopak pouze kladné a platí $E = -E_k$. Blíží-li se r nekonečnu, klesají hodnoty všech tří energií k nule.

KONTROLA 6: Uvažujme situaci na obrázku. Raketoplán se na počátku pohybuje po kruhové dráze o poloměru r kolem Země. V bodě P vystřelil pilot dopředu pomocnou raketu, a tím zmenšil kinetickou energii E_k raketoplánu i jeho celkovou mechanickou energii E. (a) Po které z eliptických drah, vyznačených na obrázku přerušovanou čarou, se bude poté raketoplán pohybovat? (b) Bude nová oběžná doba T raketoplánu (tj. čas, za který se vrátí zpět do bodu P) větší, menší, nebo stejná jako při pohybu po kruhové oběžné dráze?



PŘÍKLAD 14.10

Rozverný astronaut vypustil ve výšce $h = 350\,\text{km}$ nad Zemí velký medicinbal o hmotnosti $m = 7{,}20\,\text{kg}$ na kruhovou oběžnou dráhu kolem Země.

(a) Jaká je mechanická energie E míče na této dráze?

ŘEŠENÍ: Poloměr její oběžné dráhy r je roven

$$r = R + h = (6\,378\,\text{km}) + (350\,\text{km}) = 6{,}73\cdot10^6\,\text{m},$$

kde R je poloměr Země. Z rov. (14.42) pak snadno určíme mechanickou energii koule

$$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{(6{,}67\cdot10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2})(5{,}98\cdot10^{24}\,\text{kg})(7{,}20\,\text{kg})}{2(6{,}73\cdot10^6\,\text{m})} =$$
$$= -2{,}134\cdot10^8\,\text{J} \doteq -213\,\text{MJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká byla mechanická energie E_0 medicinbalu na startovací rampě v Mysu Canaveral? Spočítejte přírůstek ΔE energie při přemístění z odpalovací rampy na oběžnou dráhu kolem Země.

ŘEŠENÍ: Na startovací rampě měl míč, díky rotaci Země, také jistou kinetickou energii, ale její hodnota je oproti výsledné energii natolik malá, že ji můžeme zanedbat. Celková energie E_0 je tedy rovna potenciální energii $E_{p,0}$, která je dána vztahem (14.20)

$$E_0 = E_{p,0} = -\frac{GMm}{R} = -\frac{(6{,}67\cdot10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2})(5{,}98\cdot10^{24}\,\text{kg})(7{,}20\,\text{kg})}{(6{,}38\cdot10^6\,\text{m})} =$$
$$= -4{,}501\cdot10^8\,\text{J} = -450\,\text{MJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Mohli byste namítnout, že potenciální energie koule na povrchu Země je nulová. Připomeňme si však, že hladinu nulové potenciální energie jsme zvolili v nekonečnu. Také byste možná chtěli k výpočtu E_0 použít rov. (14.42), ale pozor — tato rovnice platí jen pro družici *obíhající* kolem Země. *Přírůstek* mechanické energie koule od startu až na oběžnou dráhu je roven

$$\Delta E = E - E_0 = (-213\,\mathrm{MJ}) - (-450\,\mathrm{MJ}) = \\ = 237\,\mathrm{MJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Toto množství energie ve formě elektřiny by vás (bez započtení pravidelných měsíčních poplatků) při domácí sazbě N, tj. 0,91 Kč/(kW·h), stálo ani ne 60 Kč.

14.9 EINSTEIN A GRAVITACE

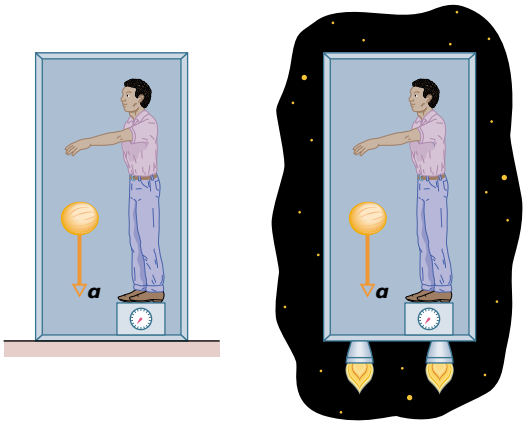
Princip ekvivalence

Albert Einstein jednou vyprávěl: „Byl jsem… na patentovém úřadě v Bernu a najednou mě napadla myšlenka: »Bude-li osoba padat volným pádem, nebude pociťovat vlastní váhu.« Bylo to překvapení. Tato jednoduchá myšlenka na mě hluboce zapůsobila. A to mě dovedlo až k teorii gravitace.“

Einstein nám zde popsal, jak vlastně začala vznikat jeho známá **obecná teorie relativity**. Základní postulát této teorie, zabývající se gravitací (vzájemným gravitačním působením předmětů), se nazývá **princip ekvivalence** a říká, že gravitace a zrychlení si jsou navzájem ekvivalentní. Bude-li fyzik uzavřen v nějaké skříni jako na obr. 14.20a, nebude schopen určit, je-li skříň v klidu na Zemi (a je vystavena působení gravitační síly Země), nebo se pohybuje v mezihvězdném prostoru se zrychlením $9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ (a je tedy vystavena působení síly, která toto zrychlení vyvolala) jako na obr. 14.20b. V obou případech se fyzik bude cítit úplně stejně a na váze si bude moci přečíst stejný údaj. Navíc, bude-li vedle něj volně padat nějaký předmět, bude mít vůči němu v obou případech stejné zrychlení.

Zakřivení prostoru

Doposud jsme vysvětlovali gravitaci jako působení vzájemných přitažlivých sil mezi hmotnými tělesy. Einstein však ukázal, že gravitaci lze také popsat zakřivením prostoru, které je vyvoláno přítomností hmoty. (Jak bude v této knize zmíněno později, prostor a čas jsou spolu provázány, takže zakřivení, o kterém Einstein mluvil, je ve skutečnosti zakřivení **prostoročasu**, čtyřrozměrného útvaru složeného z trojrozměrného prostoru a jednorozměrného času, v němž popisujeme náš vesmír.)



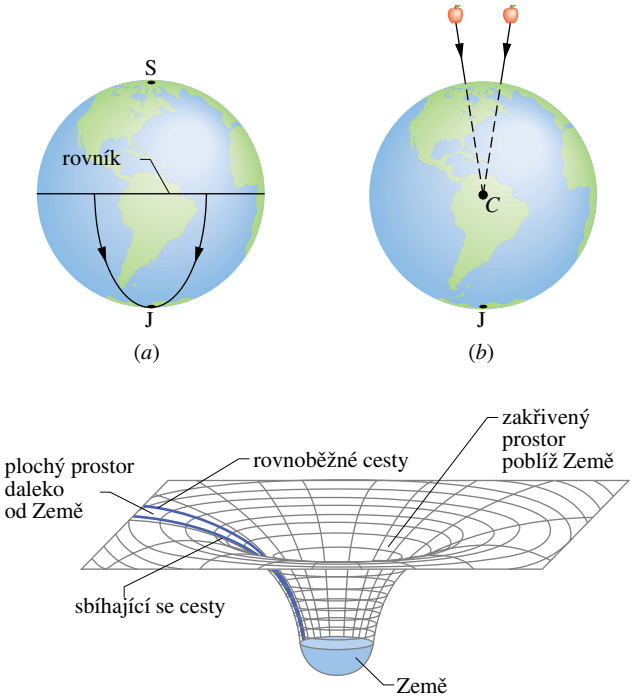
(*a*) (*b*)

Obr. 14.20 (a) Fyzik zavřený ve skříni, která stojí v klidu na Zemi, vidí padat meloun se zrychlením $a = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (b) Pokud bude skříň i s ním urychlována v hlubinách vesmíru se zrychlením $9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, bude mít meloun vzhledem k němu stejné zrychlení jako v případě (a). Není tedy možné, aby jen na základě takovýchto experimentů prováděných uvnitř skříně mohl fyzik říci, v jaké situaci se nachází. Například váha, na které stojí, ukazuje v obou případech stejný údaj.

Znázornění toho, jak může být prostor (stejně jako vakuum) zakřivený, je složité. Analogie nám však může pomoci: Představme si, že se díváme z oběžné dráhy na závod dvou lodí, které startují na rovníku ve vzdálenosti 20 km a míří na jih (obr. 14.21a). Námořníkům na těchto lodích se jejich cesty zdají být přímé* a rovnoběžné. Přesto však se po čase začnou lodě k sobě přibližovat a těsně u jižního pólu se spolu setkají. Námořníci si to mohou vysvětlit tak, že na lodě působila nějaká síla. My však vidíme, že se lodě spolu setkaly díky zakřivení zemského povrchu. Máme možnost to vidět proto, že jsme závod pozorovali zvenčí, mimo tento povrch.

Obr. 14.21b ukazuje podobné závody: dvě jablka v jisté horizontální vzdálenosti jsou puštěna ze stejné výšky nad Zemí. Ačkoli se může zdát, že se jablka pohybují po rovnoběžných drahách, ve skutečnosti se k sobě přibližují, protože obě padají do středu Země. Jejich pohyb můžeme vysvětlit tak, že na jablka působí Země svou gravitační silou. Také to však můžeme vysvětlit tím, že v blízkosti Země je prostor zakřiven (díky přítomnosti zemské hmoty). Tentokrát nemůžeme toto zakřivení vidět, protože nemáme možnost dostat se „vně“ zakřiveného prostoru jako v předešlém příkladu s loděmi. Můžeme ho však popsat třeba pomocí obr. 14.21c. Tady by se jablka pohybovala po po-

* „Přímkou“ je na kouli s poloměrem R každá **hlavní kružnice**, tj. kružnice s poloměrem také rovným R.

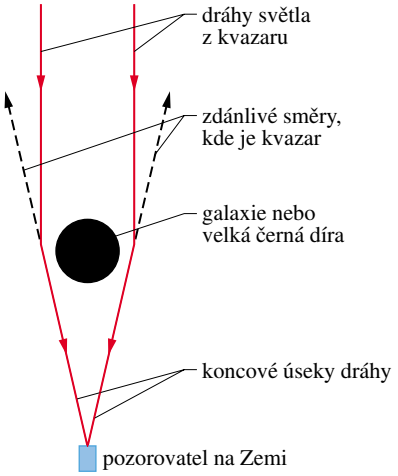


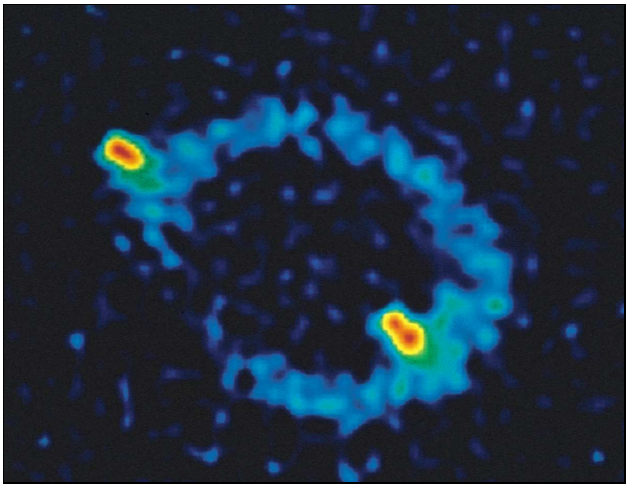
Obr. 14.21 (a) Dva předměty pohybující se podél poledníků směrem k jižnímu pólu se přibližují, protože zemský povrch je zakřiven. (b) Dva předměty padající volným pádem v blízkosti Země se pohybují po přímých čarách, které se sbíhají ke středu Země, a to díky zakřivení prostoru v okolí Země. (c) Daleko od Země (a jiných hmotných objektů) je prostor plochý a rovnoběžné dráhy zůstávají rovnoběžné a stejně vzdálené od sebe. V blízkosti Země se však rovnoběžné dráhy začínají sbíhat, protože prostor je zde zakřiven hmotou Země.

vrchu, který se směrem k Zemi stále více zakřivuje právě vlivem hmoty Země.

Když kolem nějakého hmotného předmětu prochází světlo, je i dráha světla lehce ohnuta díky zakřivení prostoru v okolí tohoto předmětu. Tento jev se nazývá **gravitační čočka**. Bude-li světlo míjet nějaký hodně hmotný objekt, třeba galaxii nebo černou díru o velké hmotnosti, bude dráha paprsku ohnuta víc. Pokud se tento hmotný objekt nachází mezi námi a kvazarem (kvazar je extrémně jasný a extrémně vzdálený zdroj světla), bude paprsek přicházející z kvazaru ohnut kolem této struktury k nám na Zemi (obr. 14.22a). Jelikož se díky tomuto ohybu zdá, že světlo přichází z trochu jiného směru, vidíme v těchto různých směrech na obloze naprosto stejné kvazary. V některých případech jsou kvazary, které vidíme, ohnuty k sobě a vytvářejí obrovský světelný oblouk, který nazýváme **Einsteinův prstenec** (obr. 14.22b).

Je lepší přisuzovat gravitaci síle působící mezi hmotnými objekty, anebo zakřivení prostoročasu, způsobenému přítomností hmoty? A bylo by ji možno popsat jistým druhem elementárních částic zvaných **gravitony**, jak se uvažuje v některých moderních fyzikálních teoriích? To zatím nevíme.





(b)

Obr. 14.22 (a) Světlo ze vzdáleného kvazaru se kolem galaxie nebo velké černé díry pohybuje po zakřivené dráze, protože hmota této galaxie nebo černé díry zakřivuje okolní prostor. Když světlo dopadá na Zemi, zdá se nám, že se jeho zdroj nachází v prodloužení koncové dráhy světelného paprsku (přerušovaná čára). (b) Einsteinův prstenec, známý jako MG 1 131+0 456, na počítačovém snímku z dalekohledu. Zdroj světla (vlastně rádiových vln, které jsou druhem neviditelného světla) je daleko za velkou, nespatřitelnou galaxií, která vytváří tento prstenec. Část tohoto zdroje vystupuje jako dvě jasné skvrny, které vidíme podél prstence.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Gravitační zákon

Libovolné dvě částice ve vesmíru se navzájem přitahují *gravitační silou* o velikosti

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{14.1}$$

kde m_1 a m_2 jsou hmotnosti částic a r je vzdálenost mezi nimi. *Gravitační konstanta* G je univerzální konstantou a její hodnota je $6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$.

Gravitační chování homogenní kulové slupky

Rov. (14.1) platí pouze pro částice. Gravitační síla mezi rozměrnými tělesy se musí obecně určit ze součtu (integrací) jednotlivých sil působících na všechny částice uvnitř těchto těles. Pokud však každé toto těleso je kulově symetrické (neboli po vrstvách homogenní), lze výslednou gravitační sílu, která působí na *vnější* předměty, spočítat tak, jako by veškerá hmota každého tělesa byla soustředěna v jeho středu.

Skládání sil

Gravitační síly se řídí *principem superpozice*, který říká, že výsledná síla $\boldsymbol{F}_1$ působící na částici označenou číslem 1 je dána součtem sil, kterými na ni působí ostatní částice:

$$\boldsymbol{F}_1 = \sum_{i=2}^{n} \boldsymbol{F}_{1i}. \tag{14.4}$$

Jedná se o vektorový součet sil $\boldsymbol{F}_{1i}$, kterými na zvolenou částici 1 působí částice 2, 3, … , n. Gravitační síla $\boldsymbol{F}_1$, kterou působí na částici nějaký větší hmotný předmět, se určí tak, že tento předmět rozdělíme na infinitezimální dílky o hmotnosti dm. Každý z nich působí infinitezimální silou d$\boldsymbol{F}$ a po integraci těchto příspěvků dostaneme

$$\boldsymbol{F}_1 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{F}. \tag{14.5}$$

Připomeňme, že příspěvky uvažujeme v tomtéž okamžiku, tedy jako by se gravitace šířila nekonečně rychle. To je v souladu s klasickou fyzikou, nikoli ovšem s teorií relativity. Relativistickou teorii gravitace rozvíjí až obecná teorie relativity.

Gravitační zrychlení

Gravitační zrychlení $\boldsymbol{a}_\mathrm{g}$ částice (o hmotnosti m) je způsobeno výhradně gravitační silou, která na částici působí. Je-li částice ve vzdálenosti r od středu homogenního kulového tělesa o hmotnosti M, pak velikost gravitační síly na ni působící je dána rov. (14.1). Navíc, podle druhého Newtonova zákona platí

$$F = ma_\mathrm{g} \tag{14.11}$$

a odtud pro a_g plyne vztah

$$a_\mathrm{g} = \frac{GM}{r^2}. \tag{14.12}$$

Tíhové zrychlení a tíhová síla

Tíhové zrychlení $\boldsymbol{g}$ částice v blízkosti Země se trochu (méně než o $\frac{1}{2}$ %) liší od gravitačního zrychlení $\boldsymbol{a}_\mathrm{g}$. Proto i tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ se liší od gravitační síly (rov. (14.1)) působící na částici. Země totiž není ani homogenní, ani dokonale kulová a navíc rotuje.

Gravitace uvnitř kulové slupky

Homogenní kulová hmotná slupka nepůsobí žádnou výslednou gravitační silou na částice, které se nacházejí uvnitř. To znamená, že pokud je částice umístěna uvnitř homogenní pevné koule ve vzdálenosti r od jejího středu, bude výsledná gravitační síla působící na částici vyvolána pouze tou hmotou, která se nachází uvnitř koule o poloměru r. Její hmotnost je dána vztahem

$$M' = \varrho\frac{4\pi r^3}{3}, \tag{14.18}$$

kde ϱ je hustota dané koule.

Gravitační potenciální energie

Gravitační potenciální energie $E_\mathrm{p}(r)$ soustavy dvou částic o hmotnostech M a m vzájemně vzdálených r je rovna záporně vzaté práci, kterou by vykonala gravitační síla jedné z částic působící na druhou částici při jejím přesunu z nekonečna (z velké vzdálenosti) na vzdálenost r. Tato energie je rovna

$$E_\mathrm{p} = -\frac{GMm}{r}. \tag{14.20}$$

Potenciální energie systému

Pokud systém obsahuje více než dvě částice, je výsledná gravitační potenciální energie součtem příspěvků od všech dvojic částic. V textu jsme uvažovali systém tří částic o hmotnostech m_1, m_2 a m_3; v tom případě je

$$E_\mathrm{p} = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right). \tag{14.21}$$

Úniková rychlost

Předmět může uniknout z gravitačního vlivu vesmírného tělesa o hmotnosti M a poloměru R, pokud z povrchu tělesa odlétá alespoň *únikovou rychlostí* o velikosti

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{14.26}$$

Keplerovy zákony

Gravitační přitažlivost drží pohromadě sluneční soustavu. Díky ní např. také obíhají družice (přírodní i umělé) kolem Země. Jejich pohyby se řídí třemi Keplerovými zákony, které jsou přímým

důsledkem Newtonových pohybových zákonů a Newtonova gravitačního zákona.

1. ***Zákon oběžných drah***: Planety se pohybují po elipsách jen málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce. Obecně: Částice se v centrálním gravitačním poli pohybuje po kuželosečce, mající ohnisko v centru pole.

2. ***Zákon ploch***: Plochy opsané průvodičem planety za jednotku času jsou stejně velké. (Toto tvrzení je ekvivalentní zákonu zachování momentu hybnosti.)

3. ***Zákon oběžných dob***: Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je roven poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich drah.

Pro kruhovou oběžnou dráhu o poloměru r dostává tento zákon tvar

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3, \qquad (14.31)$$

kde M je hmotnost centrálního tělesa — ve sluneční soustavě tedy hmotnost Slunce. Tento závěr je platný i pro eliptické oběžné dráhy planet, pokud v tomto vztahu nahradíme poloměr r hlavní poloosou a.

Energie pohybu planet

Pohybuje-li se planeta nebo družice o hmotnosti m po kruhové oběžné dráze o poloměru r, pak její energie potenciální E_p a kinetická E_k jsou

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \quad \text{a} \quad E_k = \frac{GMm}{2r}. \qquad (14.20, 14.40)$$

Mechanická energie $E = E_k + E_p$ se rovná

$$E = -\frac{GMm}{2r}. \qquad (14.42)$$

Pro eliptickou dráhu s hlavní poloosou a platí

$$E = -\frac{GMm}{2a}. \qquad (14.44)$$

Einsteinův pohled na gravitaci

Einstein ukázal, že gravitace a zrychlení jsou ekvivalentní. Tento *princip ekvivalence* jej dovedl k teorii gravitace (k *obecné teorii relativity*), která vysvětluje gravitační jevy pomocí zakřivení prostoru.

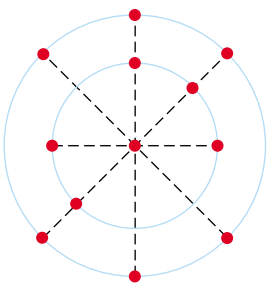
OTÁZKY

1. Mějme dvě částice o hmotnostech m a $2m$ připevněny k ose (obr. 14.23). (a) Kde můžeme na ose umístit třetí částici s hmotností $3m$ (jinde než v nekonečnu), aby celková gravitační síla, která by na ni od prvních dvou částic působila, byla nulová? Je to vlevo od obou částic, vpravo, anebo mezi nimi — blíže k hmotnější, nebo k lehčí? (b) Změní se odpověď, pokud by třetí částice měla hmotnost $16m$? (c) Existuje pro třetí částici bod mimo osu, ve kterém by celková na ni působící síla byla nulová?



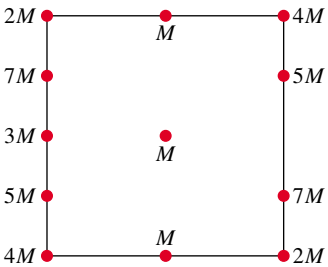
Obr. 14.23 Otázka 1

2. Na obr. 14.24 je centrální částice obklopena dvěma kruhovými prstýnky částic s poloměry r a R, $R > r$. Všechny částice mají hmotnost m. Jaká je velikost a směr výsledné gravitační síly, kterou působí částice v prstýncích na centrální částici?



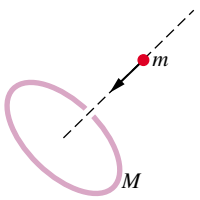
Obr. 14.24 Otázka 2

3. Na obr. 14.25 je centrální částice s hmotností M obklopena čtvercovým uspořádáním jiných částic. Vzdálenosti mezi těmito částicemi jsou buď d, nebo $\frac{1}{2}d$ podél obvodu čtverce. Jaká je velikost a směr výsledné gravitační síly působící díky těmto částicím na centrální částici?



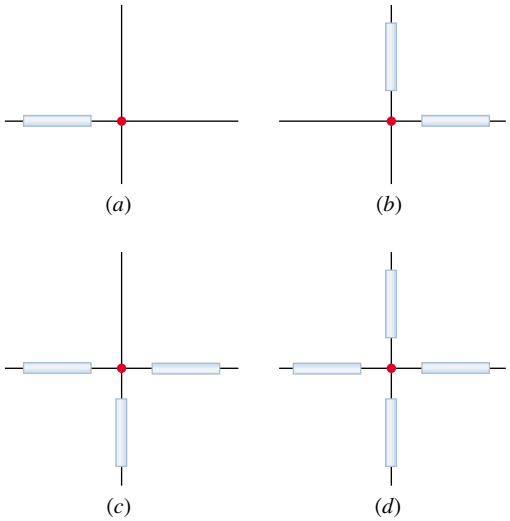
Obr. 14.25 Otázka 3

4. Obr. 14.26 ukazuje částici s hmotností m, která se pohybuje z nekonečna do středu kroužku s hmotností M podél jeho osy. Jak se během tohoto přenosu mění velikost gravitační síly působící na částici?



Obr. 14.26 Otázka 4

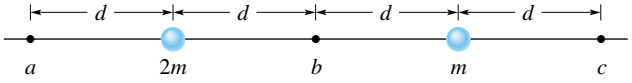
5. Na obr. 14.27 jsou zobrazeny čtyři uspořádání částice s hmotností m a jedné nebo více homogenních tyčí, každé s hmotností M, délkou L a vždy umístěné ve vzdálenosti d od částice. Seřaďte sestupně uspořádání podle velikosti celkové gravitační síly, kterou působí tyče na částici.



Obr. 14.27 Otázka 5

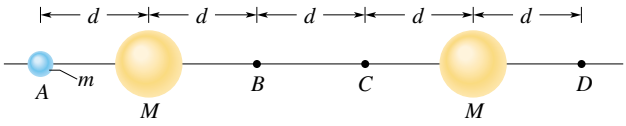
6. Seřaďte sestupně čtyři systémy stejně hmotných částic z kontroly 2 podle absolutní hodnoty gravitační potenciální energie.

7. Na obr. 14.28 má být částice s hmotností m (nezakreslena) přenesena z nekonečna na jedno ze tří míst a, b, nebo c. Dvě další částice, s hmotnostmi m a $2m$, jsou pevně umístěny. Seřaďte sestupně možnosti a, b, c podle celkové práce vykonané gravitačními silami pevných částic.



Obr. 14.28 Otázka 7

8. Na obr. 14.29 je částice s hmotností m nejprve v místě A ve vzdálenosti d od středu jedné homogenní koule a ve vzdálenosti $4d$ od středu druhé homogenní koule. Obě koule mají hmotnost $M \gg m$. Pokud byste částici přenesli do bodu D, řekněte, zda následující veličiny by byly kladné, záporné, nebo nulové: (a) změna gravitační potenciální energie částice, (b) práce vykonaná celkovou gravitační silou na částici, (c) práce vykonaná vámi. (d) Jaké by byly odpovědi, kdybychom přemístili částici z bodu B do C?

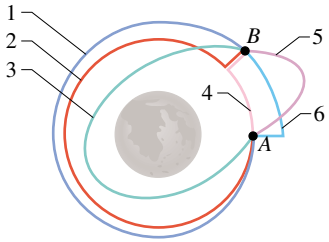


Obr. 14.29 Otázka 8

9. Vyjděme ze situace v otázce 8. Byla by práce vámi vykonaná kladná, záporná, nebo nulová, kdybyste přemístili částici (a) z A do B, (b) z A do C, (c) z B do D? Seřaďte sestupně tyto přesuny podle absolutní hodnoty vámi vykonané práce.

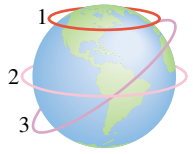
10. Mějme tři planety o následujících hmotnostech a poloměrech: planeta A: $2M$ a R; planeta B: $3M$ a $2R$; planeta C: $4M$ a $2R$. Seřaďte sestupně tyto planety podle velikosti únikové rychlosti z jejich povrchů.

11. Obr. 14.30 nabízí šest drah, po kterých se raketa oblétající Měsíc může pohybovat z bodu A do bodu B. Seřaďte sestupně dráhy podle (a) příslušné změny gravitační potenciální energie systému raketa + Měsíc a (b) celkové práce vykonané na raketě gravitační silou Měsíce.



Obr. 14.30 Otázka 11

12. Které z oběžných drah (řekněme pro špionážní družici) na obr. 14.31 nevyžadují stálé opravy korekčními motorky? Dráha 1 je na 60° s.š.; dráha 2 leží v rovníkové rovině; dráha 3 je kolem středu Země, mezi 60° s.š a 60° j.š.



Obr. 14.31 Otázka 12

13. Družice s rychlostí v_1 a hmotností m je na kruhové oběžné dráze kolem planety s hmotností M_1. Jiná družice, s rychlostí v_2 a hmotností $2m$, obíhá po kruhové dráze o stejném poloměru kolem planety s hmotností M_2. Je M_2 větší, menší, nebo rovné M_1, (a) pokud družice mají stejnou oběžnou dobu, (b) pokud $v_2 > v_1$?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 14.2 Newtonův gravitační zákon

1C. Jaká musí být vzdálenost mezi částicemi o hmotnostech 5,2 kg a 2,4 kg, aby se gravitačně přitahovaly silou $2{,}3\cdot10^{-12}$ N?

2C. Někteří lidé věří, že pozice planet v okamžiku narození ovlivňuje narozeného. Jiní tento názor nesdílejí a tvrdí, že gravitační síla, kterou na dítě působí porodník, je větší než od planet. Abychom posoudili toto tvrzení, spočtěte a porovnejte gravitační sílu působící na 3 kg dítě (a) od 70 kg lékaře, který je 1 m daleko a zhruba aproximovaný hmotným bodem, (b) od Jupiteru ($m = 2\cdot10^{27}$ kg) v okamžiku, kdy je nejblíže Zemi ($= 6\cdot10^{11}$ m) a (c) když je od Země nejdále ($= 9\cdot10^{11}$ m). (d) Je tvrzení skeptiků správné?

3C. Slunce i Země gravitačně působí na Měsíc. Jaký je poměr F_S/F_Z velikostí těchto sil? (Průměrná vzdálenost Slunce – Měsíc je rovna vzdálenosti Slunce – Země).

4C. Jeden ze satelitů *Echo* tvořil nafouknutý kulový hliníkový balon s průměrem 30 m a hmotností 20 kg. Předpokládejme, že by ve vzdálenosti 3 m od povrchu satelitu prolétl meteoroid s hmotností 7 kg. Jaká by byla největší gravitační síla, která by působila díky satelitu na meteoroid?

5Ú. Objekt s hmotností M byl rozdělen na dvě části, m a $M-m$, které byly od sebe poté oddáleny na jistou vzdálenost. Jaký by měl být poměr m/M, aby byla gravitační síla mezi částmi co největší?

ODST. 14.3 Gravitace a princip superpozice

6C. Jak daleko od Země ve směru ke Slunci musíme umístit sondu, aby se právě vyrovnala přitažlivá síla Slunce a Země?

7C. Kosmická loď je na přímé dráze mezi Zemí a Měsícem. V jaké vzdálenosti od Země je celková gravitační síla na loď nulová?

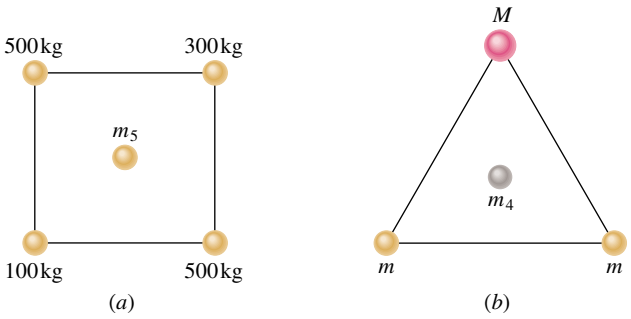
8Ú. Jaká je procentuální změna zrychlení Země směrem ke Slunci, když se postavení Země, Slunce a Měsíce změní ze zatmění Slunce (Měsíc je mezi Zemí a Sluncem) na zatmění Měsíce (Země je mezi Měsícem a Sluncem)?

9Ú. Čtyři koule s hmotnostmi $m_1 = 400$ kg, $m_2 = 350$ kg, $m_3 = 2\,000$ kg a $m_4 = 500$ kg mají souřadnice (x, y) po řadě $(0; 50)$, $(0; 0)$, $(-80; 0)$, $(40; 0)$, vše v centimetrech. Jaká je celková gravitační síla $\boldsymbol{F}_2$ působící na m_2?

10Ú. Na obr. 14.32a leží čtyři koule ve vrcholech čtverce se stranou 2,0 cm. Jaká je velikost a směr celkové gravitační síly, kterou působí na centrální kouli s hmotností $m_5 = 250$ kg?

11Ú. Na obr. 14.32b tvoří dvě koule s hmotnostmi m a třetí s hmotností M rovnostranný trojúhelník. Čtvrtá koule s hmotností m_4 je v jeho těžišti. Celková gravitační síla působící na m_4 od ostatních koulí je nulová; čemu je rovno M vyjádřeno v m?

12Ú. Dvě koule s hmotnostmi $m_1 = 800$ kg a $m_2 = 600$ kg jsou od sebe vzdáleny 0,25 m. Jaká je celková gravitační síla

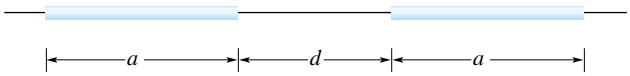


Obr. 14.32 Úlohy 10 a 11

(velikost i směr) působící díky nim na kouli s hmotností 2,0 kg, vzdálenou 0,20 m od m_1 a 0,15 m od m_2?

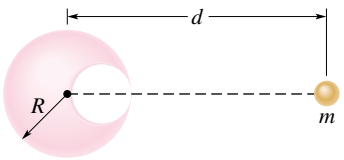
13Ú. Tři koule mají tyto hmotnosti a souřadnice: 20 kg, $x = 0{,}50$ m, $y = 1{,}0$ m; 40 kg, $x = -1{,}0$ m, $y = -1{,}0$ m; 60 kg, $x = 0$, $y = -0{,}5$ m. Jaká gravitační síla vyvolaná těmito koulemi působí na kouli s hmotností 20 kg umístěnou v počátku?

14Ú. Obr. 14.33 zobrazuje dvě homogenní tyče délky a a hmotnosti M, ležící na přímce ve vzdálenosti d od sebe. S použitím výsledku př. 14.2 napište určitý integrál určující gravitační přitažlivou sílu mezi nimi.



Obr. 14.33 Úloha 14

15Ú. Na obr. 14.34 je kulová dutina uvnitř olověné koule s poloměrem R; povrch dutiny prochází středem koule a dotýká se pravé strany koule. Hmotnost koule před vytvořením dutiny byla M. S jakou gravitační silou přitahuje olověná koule s dutinou malou kouli s hmotností m, která je umístěna ve vzdálenosti d od středu olověné koule na přímce spojující středy koulí a střed otvoru?



Obr. 14.34 Úloha 15

ODST. 14.4 Gravitace v blízkosti povrchu Země

16C. Vypočítejte gravitační zrychlení na povrchu Měsíce, znáte-li jeho hmotnost a poloměr (dodatek C).

17C. V jaké výšce nad zemským povrchem má gravitační zrychlení velikost $4{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$?

18C. Vážíte 120 lb a stojíte na chodníku vedle Světového obchodního centra v New Yorku. Předpokládejte, že se odtud přemístíte na vrchol jedné z jeho budov vysoké 1 350 ft. O kolik

byste tam byli lehčí (díky tomu, že se nacházíte o trochu dále od středu Země)? Rotaci Země zanedbejte.

19C. Typická hmotnost neutronové hvězdy je srovnatelná s hmotností Slunce, její poloměr je však pouze 10 km. (a) Jaké gravitační zrychlení je na povrchu takové hvězdy? (b) Jak rychle dopadne předmět, který spadne z výšky 1 m nad povrchem (zanedbejte rotaci hvězdy)?

20C. Předmět ležící na rovníku je urychlován (a) do středu Země kvůli její rotaci, (b) směrem ke Slunci, protože Země kolem něho obíhá téměř po kruhové dráze, a (c) směrem ke středu naší Galaxie, protože Slunce obíhá kolem galaktického středu. Perioda oběhu Slunce je $2{,}5{\cdot}10^8$ y a jeho poloměr $2{,}2{\cdot}10^{20}$ m. Vypočítejte tato tři zrychlení a vyjádřete je v násobcích $g = 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

21C. (a) Jaká bude tíha předmětu na povrchu Měsíce, je-li na zemském povrchu rovna 100 N? (b) V jaké vzdálenosti od Země se musí předmět nacházet, aby měl stejnou tíhu jako na Měsíci? Vzdálenost vyjádřete v násobcích poloměru Země.

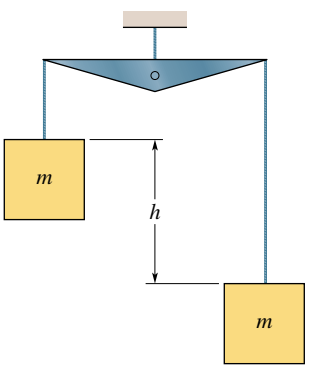
22Ú. Určujete g tak, že pustíte předmět z výšky přesně 10 m. Jaká relativní chyba v měření doby pádu by způsobila výslednou chybu 0,1 % pro g?

23Ú. Největší možná rychlost rotace planety je ta, pro kterou je gravitační síla na rovníku právě rovna dostředivé síle potřebné k této rotaci. (Proč?) (a) Ukažte, že příslušná nejkratší perioda rotace je

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\varrho}},$$

kde ϱ hustota homogenní sférické planety. (b) Vypočítejte periodu T pro hustotu $3{,}0\ \mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$, která odpovídá mnoha planetám, satelitům a asteroidům. U žádného astronomického objektu nebyla zaznamenána kratší perioda rotace, než jsme určili na základě této analýzy.

24Ú. Předměty stejné hmotnosti m jsou zavěšeny na závěsech nad zemským povrchem a jsou v rovnováze (obr. 14.35). Závěsy mají zanedbatelnou hmotnost a rozdíl jejich délek je h. Předpokládejte, že je Země kulatá a má hustotu $\varrho = 5{,}5\ \mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. (a) Ukažte, že rozdíl jejich tíh $m\Delta g$, způsobený odlišnou vzdáleností od Země, je roven $8\pi G\varrho mh/3$. (b) Rozhodněte, jaký musí být rozdíl délek závěsů, aby byl poměr $\Delta g/g = 1{\cdot}10^{-6}$.



Obr. 14.35 Úloha 24

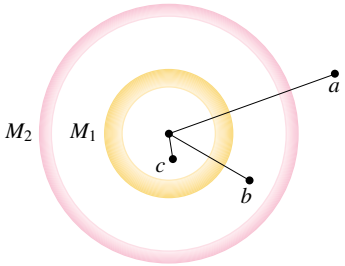
25Ú. Těleso je zavěšeno na pružinové váze v lodi jedoucí podél rovníku rychlostí v. (a) Ukažte, že hodnota odečítaná na stupnici bude blízká hodnotě $G_0(1 \pm 2\omega v/g)$, kde ω je úhlová rychlost Země a G_0 je údaj váhy, je-li rychlost lodi nulová. (b) Zdůvodněte znaménko $\pm$.

26Ú. Velice hmotné neutronové hvězdy rotují rychlostí cca 1 ot. za sekundu. Jaká by musela být minimální hmotnost takové hvězdy s poloměrem 20 km, aby se povrchová vrstva hmoty od hvězdy neodtrhla?

27Ú. Poloměr černé díry $R_\check{c}$ a její hmotnost $M_\check{c}$ jsou spojeny vztahem $R_\check{c} = 2GM_\check{c}/c^2$, kde c je rychlost světla. Označme a_{g0} gravitační zrychlení ve vzdálenosti $r_0 = 1{,}001R_\check{c}$ od středu černé díry a předpokládejme, že ho lze určit z rov. (14.12) (platné pro velké černé díry). (a) Vyjádřete a_{g0} ve vzdálenosti r_0 jen pomocí $M_\check{c}$ (a univerzálních konstant). (b) Je a_{g0} rostoucí, nebo klesající funkcí proměnné $M_\check{c}$? (c) Čemu se rovná a_{g0} pro velmi velkou černou díru, jejíž hmotnost je $1{,}55{\cdot}10^{12}$ hmotností Slunce? (d) Jaký by byl rozdíl gravitačního zrychlení mezi hlavou a nohama astronauta z př. 14.4, kdyby se nacházel v místě r_0, nohama směrem k černé díře? (e) Byly by slapové síly natahující astronauta výrazné?

ODST. 14.5 Gravitační pole uvnitř Země

28C. Dvě soustředné slupky s konstantní hustotou mají hmotnosti M_1 a M_2 (obr. 14.36). Jaká síla působí na bod o hmotnosti m, leží-li ve vzdálenosti (a) $r = a$, (b) $r = b$, (c) $r = c$? Vzdálenost r měříme od středu slupek.



Obr. 14.36 Cvičení 28

29C. S jakou rychlostí by proletěl předmět středem Země, kdyby byl upuštěn u ústí tunelu z př. 14.5?

30C. Uvažujte Zemi jako homogenní kouli o poloměru R. Ukažte, že na dně svislé šachty o hloubce D bude naměřena hodnota a_g

$$a_g = a_{g0}\left(1 - \frac{D}{R}\right),$$

kde a_{g0} je hodnota zrychlení na povrchu.

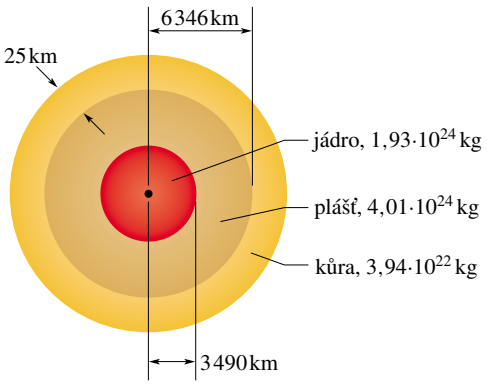
31Ú. Pevná homogenní koule má hustotu $1{,}0{\cdot}10^4$ kg a poloměr 1,0 m. Jaká gravitační síla působí na bod o hmotnosti m ve vzdálenosti (a) 1,5 m, (b) 0,5 m od středu koule? (c) Napište obecný vztah pro gravitační sílu působící na bod ve vzdálenosti $r \leqq 1{,}0$ m od středu koule.

32Ú. Homogenní koule s poloměrem R má na povrchu gravitační zrychlení a_g. Pro jaké dvě vzdálenosti od středu koule

bude gravitační zrychlení rovno $a_g/3$? (*Tip*: Vezměte v úvahu vzdálenosti vně i uvnitř koule.)

33Ú. Řez Zemí. Země není homogenní a lze ji zhruba rozdělit na tři slupky: kůru, plášť a jádro. Rozměry slupek a jejich hmotnosti jsou uvedeny na obr. 14.37. Celková hmotnost Země je $5{,}98{\cdot}10^{24}$ kg a její poloměr bereme 6 371 km. Zanedbejte rotaci a předpokládejte, že Země je kulová.

(a) Určete a_g na povrchu. (b) Jaké a_g bude v hloubce 25 km na dně vrtu, který má být v rámci projektu Mohole proveden k rozhraní kůry a pláště? (Moho vrstva, kterou předpověděl geolog Mohorovičić, leží v hloubce 5 km až 70 km.) (c) Předpokládejte, že Země má známou hmotnost i rozměr, ale je to ideální koule s konstantní hustotou. Jaké bude a_g v hloubce 25 km? (Viz cvič. 30.) (Přesná měření a_g jsou citlivým indikátorem vnitřního uspořádání Země, mohou být ovšem ovlivněna i místními odchylkami hustoty.)



Obr. 14.37 Úloha 33. Měřítko není zachováno

ODST. 14.6 Gravitační potenciální energie

34C. (a) Jaká je energie systému v cvič. 1, složeného ze dvou hmotných bodů? (b) Jakou práci vykonají gravitační síly, ztrojnásobíte-li vzdálenost mezi hmotnými body? (c) Jakou práci vykonáte vy?

35C. (a) Vyjměte m_1 v úloze 9 a vypočítejte pro zbývající tři hmotné body gravitační potenciální energii. (b) Nyní vraťte m_1 na původní místo. Bude potenciální energie celého systému vyšší, nebo nižší? (c) Konáte kladnou, nebo zápornou práci při vyjmutí m_1 ze systému čtyř hmotných bodů? (d) Jaká práce je nutná pro navrácení m_1?

36C. Udává poměr m/M z úlohy 5 nejmenší možnou gravitační potenciální energii systému?

37C. Střední průměry Země a Marsu jsou $6{,}9{\cdot}10^3$ km a $1{,}3{\cdot}10^4$ km. Hmotnost Marsu je 0,11násobek hmotnosti Země. (a) Stanovte poměr průměrné hustoty Marsu a Země. (b) Jaká je hodnota g na Marsu? (c) Jaká je úniková rychlost pro Mars?

38C. Vesmírná loď se nachází na okraji naší Galaxie ve vzdálenosti 80 000 světelných let od jejího středu. Stanovte únikovou rychlost z naší Galaxie. Hmotnost Galaxie je $1{,}4{\cdot}10^{11}$ Sluncí, pro jednoduchost předpokládejte, že je v ní hmota rozprostřena rovnoměrně.

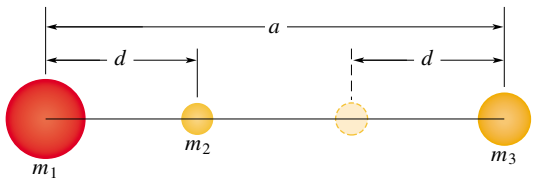
39C. Vypočítejte energii potřebnou k úniku od (a) Měsíce a (b) Jupiteru a vyjádřete ji v násobcích únikové rychlosti ze Země.

40C. Ukažte, že úniková rychlost $v_{\text{únik}}$ od Slunce v místě Země je $\sqrt{2}$násobkem posuvné oběžné rychlosti v_{ob} Země; předpokládejte, že její dráha kolem Slunce je kružnice. (Jde o speciální případ obecně platného vztahu: $v_{\text{únik}} = \sqrt{2}v_{\text{ob}}$.)

41C. Částice prachu komety o hmotnosti m se nachází ve vzdálenosti R od středu Země a ve vzdálenosti r od středu Měsíce. Jaká je potenciální energie systému částice + Země a jaká systému částice + Měsíc, je-li hmotnost Země M_Z a Měsíce M_M?

42C. Velké hvězdy mohou po spálení svého paliva zkolabovat v černou díru působením vlastních gravitačních sil. Jejich poloměr R_S je pak takový, že k přenesení tělesa o hmotnosti m z povrchu do nekonečna je třeba veškerá energie tělesa mc^2. Je-li hmotnost hvězdy M_S, ukažte pomocí Newtonova gravitačního zákona, že její poloměr je $R = GM_S/c^2$. (Správná hodnota R_S je ve skutečnosti dvojnásobná. K získání správného výsledku je totiž nutno využít Einsteinovy gravitační teorie namísto Newtonovy.)

43Ú. Středy tří koulí o hmotnostech $m_1 = 800$ g, $m_2 = 100$ g a $m_3 = 200$ g leží na jedné přímce ve vzdálenostech $a = 12$ cm a $d = 4$ cm (obr. 14.38). Nyní přemístíte střední kouli m_2 směrem k m_3 tak, že vzdálenost jejich středů bude $d = 4$ cm. Jakou práci na m_2 (a) jste vykonali vy a (b) jakou gravitační síly vyvolané m_1 a m_3?



Obr. 14.38 Úloha 43

44Ú. Raketa je urychlena při povrchu Země na rychlost $v = 2\sqrt{gR_Z}$ (kde R_Z je poloměr Země) a pak vzlétne směrem vzhůru. (a) Ukažte, že unikne ze Země. (b) Ukažte, že ve velké vzdálenosti od Země bude mít rychlost $v = \sqrt{gR_Z}$.

45Ú. (a) Jaká je úniková rychlost z kulového asteroidu, jehož poloměr je 500 km a jehož gravitační zrychlení na povrchu je $3{,}0\ \text{m}{\cdot}\text{s}^{-2}$? (b) Jak daleko od povrchu se dostane částice, jestliže opustí povrch asteroidu s radiální rychlostí $1\,000\ \text{m}{\cdot}\text{s}^{-1}$? (c) Jakou rychlostí dopadne předmět na asteroid, jestliže byl puštěn z výšky 1 000 km nad povrchem?

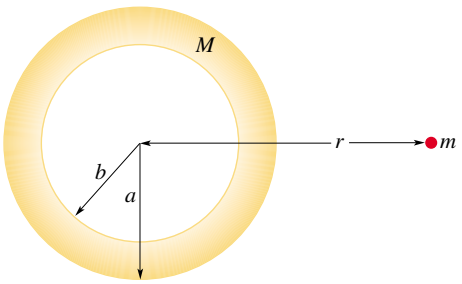
46Ú. Hypotetická planeta Deli podobná Marsu má hmotnost $5{,}0{\cdot}10^{23}$ kg, poloměr $3{,}0{\cdot}10^6$ m a nemá žádnou atmosféru. Vesmírná sonda o hmotnosti 10 kg je vystřelena vertikálně z jejího povrchu. (a) Jaká bude kinetická energie sondy ve vzdálenosti $4{,}0{\cdot}10^6$ m od středu Deli, jestliže sonda byla vystřelena s počáteční energií $5{,}0{\cdot}10^7$ J? (b) S jakou počáteční kinetickou energií musí být sonda vystřelena z povrchu Deli, jestliže má dosáhnout maximální vzdálenost $8{,}0{\cdot}10^6$ m od středu Deli? Předpokládejte, že Deli nerotuje.

47Ú. Dvojhvězdu tvoří dvě hvězdy o hmotnosti $3{,}0\cdot10^{30}$ kg obíhající okolo společného těžiště ve vzdálenosti $1{,}0\cdot10^{11}$ m. (a) Jakou úhlovou rychlostí obíhají? (b) Jestliže meteor prolétne těžištěm dvojhvězdy kolmo k rovině oběhu hvězd, jakou rychlost musí v tomto těžišti mít, aby unikl z dvojhvězdy „do nekonečna“?

48Ú. Dvě neutronové hvězdy jsou od sebe vzdáleny $1\cdot10^{10}$ m. Obě dvě mají hmotnost $1\cdot10^{30}$ kg a poloměr $1\cdot10^{5}$ m. Na začátku jsou obě hvězdy navzájem v klidu. (a) Jak rychle se budou hvězdy pohybovat, až se jejich vzdálenost zmenší na polovinu původní hodnoty? (b) S jakou rychlostí se srazí?

49Ú. Náboj je vystřelen svisle z povrchu Země s počáteční rychlostí 10 km/s. Jak vysoko nad povrch Země dolétne, jestliže zanedbáme odpor vzduchu?

50Ú. Koule o hmotnosti M a poloměru a má soustřednou dutinu o poloměru b (obr. 14.39). (a) Vyneste do grafu velikost F gravitační síly, kterou působí koule na částici o hmotnosti m ve vzdálenosti r od středu koule, jako funkci r v intervalu $0 \leqq r \leqq \infty$. Uvažujte zejména hodnoty r rovné 0, a, b a ∞. (b) Nakreslete odpovídající křivku pro potenciální energii $E_p(r)$ systému.

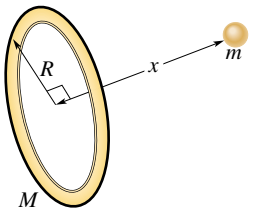


Obr. 14.39 Úloha 50

51Ú. Těleso o hmotnosti 20 kg udržujeme v počátku vztažné soustavy. Druhé těleso o hmotnosti 10 kg držíme na začátku pokusu na ose x ve vzdálenosti $x = 0{,}80$ m; poté ho pustíme. (a) Jaká je potenciální energie tohoto systému těsně po uvolnění? (b) Jaká je kinetická energie desetikilogramové hmoty poté, co se posunula o 0,20 m?

52Ú*. Některé planety (Jupiter, Saturn, Uran) jsou obklopeny skoro kruhovými prstenci; ty jsou pravděpodobně tvořeny materiálem, který se nedokázal zformovat do obíhajících měsíců. Dokonce i některé galaxie obsahují takovéto prstencové útvary. Uvažujme homogenní prstenec o hmotnosti M a poloměru R. (a) Jakou gravitační silou působí tento prstenec na částici o hmotnosti m, která leží na ose prstence ve vzdálenosti x od jeho středu (obr. 14.40)? (b) Předpokládejme, že se částice vlivem přitažlivosti prstence začne pohybovat. Najděte výraz pro rychlost, s jakou částice prolétne středem prstence.

53Ú*. Gravitační síla přitahuje k sobě dvě částice o hmotnostech M a m, které se zpočátku nalézaly v klidu ve velké vzdálenosti. Ukažte, že v každém okamžiku je rychlost jedné částice vůči druhé rovna $\sqrt{2G(M+m)/d}$, kde d je jejich okamžitá vzdálenost. (*Tip*: Použijte zákon zachování energie a zákon zachování hybnosti.)



Obr. 14.40 Úloha 52

ODST. 14.7 Planety a družice: Keplerovy zákony

54C. Průměrná vzdálenost Marsu od Slunce je 1,52krát větší než vzdálenost Země od Slunce. Z Keplerova zákona o dobách oběhu planet spočítejte, kolik roků potřebuje Mars k jednomu oběhu kolem Slunce. Porovnejte váš výsledek s hodnotou uvedenou v dodatku C.

55C. Planeta Mars má měsíc Phobos, který obíhá po oběžné dráze o poloměru $9{,}4\cdot10^{6}$ m s periodou 7 h 39 min. Z těchto informací vypočítejte hmotnost Marsu.

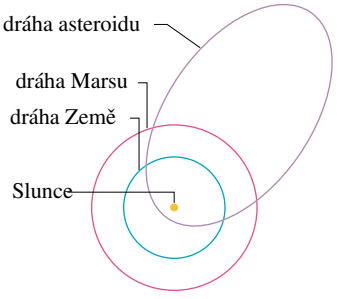
56C. Vypočítejte hmotnost Země z periody T a poloměru r oběžné dráhy Měsíce kolem Země: $T = 27{,}3$ dní a $r = 3{,}82\cdot10^{5}$ km. Předpokládejte zjednodušeně, že Měsíc obíhá okolo středu Země (a nikoli okolo společného těžiště).

57C. Naše Slunce o hmotnosti $2{,}0\cdot10^{30}$ kg obíhá okolo středu naší Galaxie, který je vzdálen $2{,}2\cdot10^{20}$ m, jeden oběh za $2{,}5\cdot10^{8}$ roků. Předpokládejme, že každá hvězda naší Galaxie má stejnou hmotnost jako naše Slunce, že všechny hvězdy jsou stejnoměrně rozloženy v kouli okolo středu Galaxie a že naše Slunce se nachází na okraji této koule. Odhadněte počet hvězd v naší Galaxii.

58C. Satelit byl umístěn na kruhovou oběžnou dráhu v poloviční vzdálenosti k Měsíci. Jakou má periodu oběhu v lunárních měsících? (Lunární měsíc je perioda otáčení Měsíce.)

59C. (a) Jakou posuvnou rychlost musí mít satelit na kruhové oběžné dráze ve výšce 160 km nad Zemí? (b) Jakou má periodu oběhu?

60C. Většina asteroidů obíhá okolo Slunce mezi Marsem a Jupiterem. Přesto některé asteroidy typu Apollo, s poloměrem okolo 30 km, obíhají po drahách, které kříží dráhu Země. Oběžná dráha jednoho takového asteroidu je znázorněna v obr. 14.41. Odečtěte hodnoty přímo z obrázku a vypočítejte v rocích dobu oběhu, s jakou asteroid obíhá.



Obr. 14.41 Cvičení 60

61C. Satelit, který se pohybuje po eliptické oběžné dráze, je v nejvyšším bodě 360 km nad povrchem Země a 180 km v nejnižším bodě. Vypočítejte (a) hlavní poloosu a (b) excentricitu trajektorie. (*Tip*: Viz př. 14.8.)

62C. Slunce leží zhruba v jednom z ohnisek oběžné dráhy Země. Jak daleko od něj leží druhé ohnisko? Vyjádřete svůj výsledek v násobcích slunečního poloměru $6{,}96\cdot10^8$ m. Excentricita oběžné dráhy Země je 0,016 7 a hlavní poloosu lze vzít rovnu $1{,}50\cdot10^{11}$ m. Viz obr. 14.14.

63C. (a) Použijte třetí Keplerův zákon (rov. (14.31)) k vyjádření gravitační konstanty G v těchto jednotkách: astronomická jednotka pro délku (ly), hmotnost Slunce (M_S) pro hmotnost a rok (y) pro jednotku času. (b) Jaký tvar má třetí Keplerův zákon v těchto jednotkách?

64C. Satelit visí nehybně nad jedním místem zemského rovníku. Jaká je výška jeho oběžné dráhy? (Jde o tzv. **geocentrickou oběžnou dráhu**.)

65C. Kometa zpozorovaná v dubnu roku 547 čínskými astronomy v den, který nazývali Woo Woo, byla opět spatřena v květnu roku 1994. Předpokládejte, že doba mezi oběma pozorováními je perioda oběhu komety, a předpokládejte její výstřednost rovnu 0,11. Jaká je (a) velikost hlavní poloosy oběžné dráhy komety a (b) její největší vzdálenost od Slunce v násobcích průměrného poloměru R_P oběžné dráhy Pluta?

66C. V roce 1993 nám vesmírná sonda Galileo poslala fotografii (obr. 14.42) asteroidu 243 Ida spolu s jeho malým měsícem. Jedná se o první potvrzený případ systému asteroid+jeho měsíc. Měsíc na fotografii má šířku 1,5 km a je vzdálen 100 km od středu 55 km dlouhého asteroidu. Tvar oběžné dráhy měsíce není přesně znám; předpokládáme, že je kruhová s periodou 27 hodin. (a) Jaká je hmotnost asteroidu? (b) Objem asteroidu, měřený z fotografií Galilea, je 14 100 km^3. Jaká je hustota asteroidu?



Obr. 14.42 Cvičení 66. Na fotografii z družice *Galileo* je asteroid 243 Ida se svým maličkým měsícem.

67Ú. Uvažujme, že satelit z cvič. 64 je na oběžné dráze na brněnském poledníku. Vy jste v budově VUT v Brně (zeměpisná šířka je 49,2°) a chcete zachytit signál ze satelitního vysílání. Jakým směrem musíte natočit anténu?

68Ú. V roce 1610 objevil Galileo Galilei pomocí svého teleskopu čtyři největší měsíce Jupiteru. Průměrné poloměry a jejich oběžné dráhy a periody T oběhu ve dnech jsou uvedeny v tabulce.

JMÉNO	$\frac{a}{10^8\ \mathrm{m}}$	$\frac{T}{\mathrm{d}}$
Io	4,22	1,77
Europa	6,71	3,55
Ganymedes	10,7	7,16
Callisto	18,8	16,7

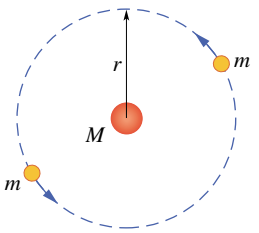
(a) Vyneste do grafu závislost $\log a$ (osa y) na $\log T$ (osa x) a ukažte, že je lineární. (b) Změřte sklon přímky a výsledek porovnejte s hodnotou, kterou lze předpovědět z Keplerova třetího zákona. (c) Z průsečíku přímky s osou y zjistěte hmotnost Jupiteru.

69Ú. Ukažte s pomocí Keplerova třetího zákona (rov. (14.31)), jak mohl Newton odvodit, že síla udržující Měsíc na jeho oběžné dráze (uvažujme kruhovou), je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti od středu Země.

70Ú. Jistá dvojhvězda je tvořena hvězdami se stejnými hmotnostmi jako naše Slunce. Hvězdy obíhají okolo společného těžiště. Vzdálenost mezi nimi je stejná, jako je vzdálenost mezi Sluncem a Zemí. Jaká je perioda jejich oběhu?

71Ú. Speciální trojhvězda se skládá ze dvou hvězd o hmotnostech m, které obíhají po stejné kruhové oběžné dráze o poloměru r okolo centrální hvězdy o hmotnosti M (obr. 14.43). Obě menší hvězdy jsou vždy na protilehlé straně oběžné dráhy. Odvoďte vztah pro periodu oběhu těchto hvězd.

72Ú. (a) Jaká je úniková rychlost ze Sluneční soustavy pro těleso, které je na oběžné dráze Země (dráha s poloměrem R), ale je daleko od Země? (b) Jestliže těleso již má rychlost stejně velkou, jako je rychlost oběhu Země, jakou rychlost je mu ještě třeba dodat, aby mohlo uniknout jako v (a)? (c) Předpokládejme, že těleso je vystřeleno ze Země ve směru oběhu Země okolo Slunce. Jakou počáteční rychlost musí mít, aby poté, co se vzdálí od Země, ale má stále zhruba stejnou vzdálenost od Slunce, se vzdálilo ze sluneční soustavy? (Je to rychlost potřebná pro jakoukoliv pozemskou raketu, aby mohla opustit sluneční soustavu.)



Obr. 14.43 Úloha 71

73Ú*. Tři identické hvězdy o hmotnostech M jsou umístěny na vrcholech rovnostranného trojúhelníku se stranou délky a.

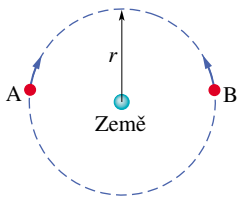
Jakou rychlostí se musejí pohybovat, jestliže všechny obíhají pod vlivem gravitačních sil ostatních hvězd po opsané kružnici a zároveň zachovávají svou vzájemnou polohu?

74Ú*. Družice na kruhové oběžné dráze byla navržena tak, aby se vznášela nad určitým místem zemského povrchu. Omylem se stalo, že poloměr obíhání družice byl o 1,0 km větší, než měl být. Jak rychle a v jakém směru se bude pohybovat bod přímo pod satelitem po zemském povrchu?

ODST. 14.8 Družice: Oběžné dráhy a energie

75C. Asteroid, jehož hmotnost je $2{,}0\cdot10^{-4}$násobkem hmotnosti Země, obíhá po kruhové dráze okolo Slunce ve vzdálenosti rovné dvojnásobku vzdálenosti Země–Slunce. (a) Spočtěte periodu obíhání asteroidu v rocích. (b) Jaký je poměr kinetické energie asteroidu a Země?

76C. Uvažujte dvě stejné družice A a B o stejných hmotnostech m pohybující se po stejné kruhové dráze o poloměru r kolem Země (hmotnost M_Z), ale v opačných směrech, tzn. na kolizní dráze (obr. 14.44). (a) Pomocí G, M_Z, m a r vyjádřete celkovou mechanickou energii $E_A + E_B$ soustavy obou družic + Země před srážkou. (b) Jestliže je srážka dokonale nepružná, tzn. vznikne-li jediná troska o hmotnosti $2m$, určete celkovou mechanickou energii bezprostředně po kolizi. (c) Popište další pohyb trosky.



Obr. 14.44 Cvičení 76

77Ú. Dvě družice (A a B), každá o hmotnosti m, jsou vypuštěny na oběžné kruhové dráhy kolem Země. Údaje jsme si přečetli v mílích: družice A obíhá ve výšce 4 000 mi, družice B ve výšce 12 000 mi. Poloměr Země R_Z je 4 000 mi. (a) Jaký je poměr potenciálních energií družic B a A? (b) Jaký je poměr kinetických energií družic B a A? (c) Která družice má větší celkovou energii, jestliže hmotnost každé z nich je 14,6 kg? O kolik?

78Ú. Použitím zákona zachování mechanické energie a rovnice (14.44) ukažte, že pokud těleso obíhá planetu po eliptické dráze, pak je vzdálenost r od planety a rychlost tělesa v svázána vztahem

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

79Ú. Využijte výsledku úlohy 78 a dat v př. 14.8 k výpočtu (a) rychlosti v_p Halleyovy komety v perihéliu a (b) její rychlosti v_a v aféliu. (c) Použitím zákona zachování momentu hybnosti vzhledem ke Slunci najděte poměr vzdáleností komety v perihéliu R_p a v aféliu R_a, vyjádřený pomocí v_p a v_a.

80Ú. Z kvizu v americkém časopise (údaje v mílích): (a) Je potřeba více energie k vynesení družice do výšky 1 000 mi nad Zemí nebo k urychlení na kruhovou oběžnou dráhu, jakmile se družice v této výšce nachází? (Uvažujte poloměr Země 4 000 mi.) (b) Jaký výsledek dostaneme pro 2 000 mi a (c) pro 3 000 mi?

81Ú. Jednou z možností, jak zaútočit na družici obíhající Zemi, je vypustit roj kuliček na stejné dráze jako družice, ale v opačném směru. Uvažujte družici obíhající 500 km nad povrchem Země, která se srazí s kuličkou o hmotnosti 4,0 g. (a) Jaká je kinetická energie kuličky ve vztažné soustavě spojené s družicí? (b) Jaký je poměr této kinetické energie ke kinetické energii čtyřgramového náboje vystřeleného z moderní pušky počáteční rychlostí $950\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$?

82Ú. Uvažujte družici obíhající Zemi po kruhové dráze. Určete, jak závisejí následující veličiny na poloměru r dráhy družice: (a) perioda, (b) kinetická energie, (c) moment hybnosti a (d) rychlost družice.

83Ú. Jaká je (a) rychlost a (b) perioda 220 kg družice na téměř kruhové dráze 640 km nad povrchem Země? Předpokládejte dále, že družice ztrácí svoji mechanickou energii s průměrnou rychlostí $1{,}4\cdot10^5$ J na jeden oběh. Přijmeme-li jako dobrou aproximaci, že výslednou trajektorií je „kružnice s pomalu se zmenšujícím poloměrem“, určete na konci 1 500. oběhu (c) výšku dráhy družice, (d) její rychlost a (e) periodu. (f) Jaká je velikost průměrné brzdné síly? (g) Zachovává se moment hybnosti okolo zemského středu pro družici nebo pro soustavu družice + Země?

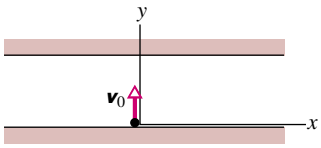
84Ú. Oběžná dráha Země kolem Slunce je téměř kruhová: nejmenší vzdálenost je $1{,}47\cdot10^8$ km, největší $1{,}52\cdot10^8$ km. Určete odpovídající změny (a) celkové energie, (b) potenciální energie, (c) kinetické energie a (d) oběžnou rychlost. (*Tip*: Využijte zákonů zachování energie a momentu hybnosti.)

85Ú. V raketoplánu o hmotnosti $m = 2\,000$ kg obíhá kapitán Janeway planetu o hmotnosti $M = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg na dráze o poloměru $r = 6{,}80\cdot10^6$ m. Jaká je (a) perioda obíhání a (b) rychlost raketoplánu? Janeway odpálí dopředu mířící pomocnou raketu, takže se rychlost raketoplánu zmenší o 1,00 %. Jaká je bezprostředně poté (c) rychlost, (d) kinetická energie, (e) gravitační potenciální energie a (f) mechanická energie raketoplánu? (g) Jaká je nyní hlavní poloosa oběžné dráhy raketoplánu? (h) Jaký je rozdíl mezi periodou původní a nové, eliptické oběžné dráhy a která z nich je menší?

ODST. 14.9 Einstein a gravitace

86C. Na obr. 14.20b ukazuje váha, na které stojí šedesátikilový student, hodnotu 220 N. Jak dlouho bude trvat melounu, než dopadne na zem, jestliže mu vyklouzne z výšky 2,1 m nad zemí?

87Ú. Na obr. 14.45 jsou znázorněny stěny trubice v kosmické lodi v kosmickém prostoru; loď má zrychlení $\boldsymbol{a} = (2{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\boldsymbol{i}$. Elektron je vyslán ze znázorněného počátku přes šířku trubice 3,0 cm s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0 = (0{,}40\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Popište pomocí jednotkových vektorů vzhledem k lodi, jaké je (a) posunutí elektronu na konci jeho letu a (b) jeho rychlost těsně před dopadem na protější zeď.



Obr. 14.45 Úloha 87

88Ú. Spočtěte s užitím dodatku C pro každou planetu vzdálenost těžiště soustavy Slunce + planeta od středu Slunce. Srovnejte ji s rozměry Slunce.

Již samotný Jupiter způsobuje, že těžiště sluneční soustavy leží poblíž slunečního okraje; společné působení Jupiteru, Saturnu, Neptunu a Pluta „v zákrytu“ by vzdálilo těžiště sluneční soustavy až na 2,17násobek slunečního poloměru od středu Slunce. Kvůli různě dlouhým oběžným dobám těchto planet koná Slunce kolem těžiště sluneční soustavy „lístkový“ pohyb s periodou cca 178,7 let, sestávající z cca padesátileté části pravidelné (trojlístkové) a z části chaotické. To se projevuje i v našem životě, viz např. I. Charvátová: Solar-Terestrial and Climatic Phenomena…, Surveys in Geophysics, 1997, **18**, pp. 131–146.

PRO POČÍTAČ

89Ú. Sonda o hmotnosti 6 000 kg obíhá Slunce na kruhové dráze o poloměru $108{\cdot}10^6$ km (poloměr oběžné dráhy Venuše). Kosmická agentura chce dostat sondu na dráhu o stejném poloměru jako Země, tzn. na kružnici o poloměru $150{\cdot}10^6$ km. Prvním krokem je zvýšení rychlosti sondy tak, aby vzniklá eliptická trajektorie měla vzdálenost v perihéliu rovnou poloměru požadované kruhové dráhy. (a) Spočítejte požadovaný přírůstek rychlosti a energie. Nakreslete eliptickou dráhu (rovnice elipsy v polárních souřadnicích se středem v počátku souřadnic je

$$r^2 = \frac{r_\mathrm{p} r_\mathrm{a} (r_\mathrm{p} + r_\mathrm{a})^2}{(r_\mathrm{p} + r_\mathrm{a})^2 \sin^2\theta + 4 r_\mathrm{p} r_\mathrm{a} \cos^2\theta},$$

kde r_p je vzdálenost perihélia a r_a vzdálenost afélia). (b) Když je dosaženo afélia, je rychlost sondy opět změněna tak, aby se dostala na výslednou kruhovou dráhu. Jaké změny rychlosti a energie jsou k tomu nutné?

90Ú. Sestavte v počítači seznam period T a hlavních poloos a pro planety uvedené v tab. 14.3. Vynásobte všechna T takovým faktorem, aby T bylo v sekundách. (a) Uložte hodnoty T^2 a a^3 do nových seznamů. Nechte počítač provést lineární regresi T^2 vůči a^3. Z parametrů regrese a s použitím známé hodnoty G určete hmotnost Slunce. (b) Vypočtěte hodnoty $\log T$ a $\log a$. Nechte počítač nakreslit závislost $\log T$ na $\log a$ a proveďte lineární regresi. Z jejích parametrů a ze známé hodnoty G určete opět hmotnost Slunce.

15
Tekutiny



Síla, kterou voda působí na tělo potápěče, dosáhne značné hodnoty již při potopení do poměrně malé hloubky na dno bazénu. Přesto William Rhodes po opuštění ponorky, která byla v Mexickém zálivu spuštěna do hloubky 1 000 stop (305 m), doplaval v roce 1975 do rekordní hloubky 1 148 stop (350 m), když užil vybavení sportovního potápěče a speciální směs plynů pro dýchání. Nováček sportovního potápění, který trénuje v bazénu, může však paradoxně být ve větším nebezpečí než Rhodes. Při potápění občas přijdou lidé i o život. Jaké nebezpečí jim vlastně hrozí?

15.1 TEKUTINY A SVĚT KOLEM NÁS

Tekutiny — pod tento společný název zahrnujeme **kapaliny** a **plyny**, případně i **plazma** (žhavý ionizovaný plyn) — mají základní význam pro náš život. Dýcháme je a pijeme, základní životní tekutina — krev — obíhá v našich tepnách a žilách. Moře i ovzduší je tekuté.

V autě se tekutiny vyskytují v pneumatikách, v palivové nádrži, v chladiči, ve válcích motoru, ve výfukovém potrubí, v elektrické baterii, v topném a případně chladicím systému, v nádržce ostřikovače, v mazacích systémech, v hydraulickém rozvodu (hydraulický znamená pracující prostřednictvím kapaliny). Až tedy uvidíte obrovské zemní stroje, vzpomeňte si, kolik je v nich hydraulických válců, které umožňují jejich činnost. Velmi mnoho hydraulických zařízení je ve velkých tryskových letadlech.

Energii proudící tekutiny využíváme ve větrných mlýnech a potenciální energii jiné tekutiny ve vodních elektrárnách. V průběhu věků tekutiny vytvarovaly krajinu. Často podnikáme daleké cesty, jen abychom viděli pohybující se tekutiny. Myslím, že nastal čas, abychom si řekli, co o tekutinách vypovídá fyzika.

15.2 CO JE TEKUTINA?

Jak již název napovídá, **tekutina** — na rozdíl od pevných těles — může téci. Přizpůsobí se tvaru nádob, do kterých ji umístíme. Je to proto, že tekutiny neudrží dlouhodobě síly rovnoběžné se svým povrchem. (V přesnějším vyjádření čl. 13.6 je ideální tekutina látka, která teče, protože není schopna přenášet smyková napětí. Působí jen silou kolmou ke svému povrchu.) Některým látkám, např. asfaltu, trvá dlouhou dobu, než se jejich tvar přizpůsobí rozměrům nádoby. Nakonec však k přizpůsobení dojde, a proto i takové látky se chovají (z dlouhodobého pohledu) jako tekutiny*.

Možná se divíte, proč dáváme dohromady kapaliny a plyny a společně je nazýváme tekutinami. Konec konců můžete říci, že voda a pára se liší stejně jako voda a led. Je tu ale principiální rozdíl. Molekuly ledu (stejně jako ostatních krystalických látek) jsou uspořádány do pevných trojrozměrných útvarů — krystalových mřížek — a v nich je „pořádek" i na vzdálenosti dosti dlouhé oproti vzdálenostem mezimolekulárním. Ve vodě ani v páře žádné takové pravidelné uspořádání na dlouhou vzdálenost neexistuje.

* Chování takové tekutiny je však velmi vzdálené od chování ideální tekutiny, viskózní síly jsou velké. Podrobněji se takovými tekutinami, které jsou na pomezí tekutin a pevných látek, zabývá obecná nauka o deformačním chování látek zvaná **reologie**.

15.3 HUSTOTA A TLAK

Když popisujeme chování tuhých těles, zabýváme se různými předměty, jakými jsou např. dřevěné kvádry, míče nebo kovové tyče. Fyzikální veličiny vhodné pro popis takových útvarů jsou především *hmotnost* a *síla*, které se vyskytují v Newtonových zákonech. Můžeme např. mluvit o dřevěném kvádru, který má hmotnost 3 kg a působí na něj síla 25 N.

Na tekutinách nás více zajímají ty vlastnosti, které se mohou měnit bod od bodu, než vlastnosti nějakých v ní pevně vymezených kousků. Je užitečnější hovořit o **hustotě** a **tlaku** (rozumí se všestranném tlaku — srovnej s čl. 13.6) než o hmotnosti a síle.

Hustota

Abychom určili hustotu ϱ tekutiny v daném místě, vymezíme kolem tohoto místa malý objem ΔV, ve kterém se nachází hmotnost tekutiny Δm. **Hustota** elementu je pak

$$\varrho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{15.1}$$

Hustota v libovolném bodě tekutiny se zavádí jako limita tohoto poměru, když objem elementu obklopujícího zvolený bod se stále zmenšuje. V mechanice tekutin (a i obecněji při popisu spojitých neboli kontinuálních prostředí) ovšem předpokládáme, že zmenšování zastavíme, když se objem elementu přiblíží molekulovým rozměrům. Hustota se tak mezi jednotlivými body tekutiny mění pozvolna a prostředí se popisuje jako spojité a ne jako „rozkouskované" na molekuly. Máme-li vzorek větších rozměrů, zavádíme jeho průměrnou hustotu jako $\varrho = m/V$, kde m je celková hmotnost vzorku a V jeho objem.

Hustota je skalární veličina. Její jednotkou v SI je kilogram na metr krychlový. V tab. 15.1 jsou uvedeny hustoty některých látek a průměrné hodnoty hustot některých objektů. Všimněte si, že hustoty plynů (v tabulce je uveden vzduch) se výrazně mění s tlakem, ale hustoty kapalin (v tabulce je údaj pro vodu) nikoliv. Plyny jsou snadno *stlačitelné*, kapaliny ne.

Tlak

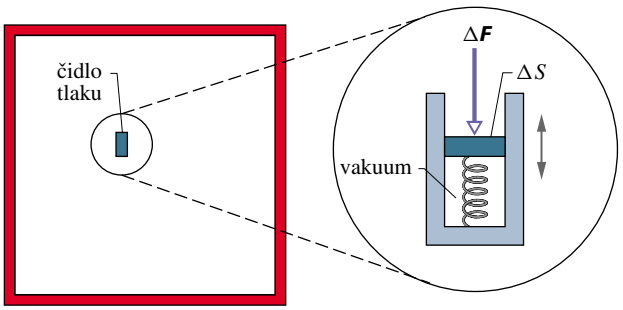
V nádobě naplněné tekutinou je umístěn malý přístroj měřící **tlak**, jak je naznačeno na obr. 15.1a. Přístroj (obr. 15.1b) se skládá z pístu plochy ΔS, který je na jedné straně vystaven působení tekutiny a na druhé, kde je vakuum, je opřen o pružinu. Odečteme-li stlačení okalibrované pružiny, zjistíme, jakou silou ΔF působí okolní tekutina na píst. Tlak, jakým tekutina působí na píst, vypočteme jako poměr

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \tag{15.2}$$

Tabulka 15.1 **Hustoty ϱ některých látek a objektů**

LÁTKA NEBO OBJEKT	ϱ / kg·m^{-3}
mezihvězdný prostor	10^{-20}
nejlepší vakuum dosažené v laboratoři	10^{-17}
vzduch: 20 °C, 1 atm[a]	1,21
20 °C, 50 atm[a]	60,5
pěněný polystyren	$1{\cdot}10^{2}$
voda: 20 °C, 1 atm[a]	$0{,}998{\cdot}10^{3}$
20 °C, 50 atm[a]	$1{,}000{\cdot}10^{3}$
mořská voda 20 °C, 1 atm[a]	$1{,}024{\cdot}10^{3}$
krev	$1{,}060{\cdot}10^{3}$
led	$0{,}917{\cdot}10^{3}$
železo	$7{,}9{\cdot}10^{3}$
rtuť	$13{,}6{\cdot}10^{3}$
Země: průměrná hodnota	$5{,}5{\cdot}10^{3}$
jádro	$9{,}5{\cdot}10^{3}$
kůra	$2{,}8{\cdot}10^{3}$
Slunce: průměr	$1{,}4{\cdot}10^{3}$
jádro	$1{,}6{\cdot}10^{5}$
bílý trpaslík — hvězda (jádro)	10^{10}
jádro uranu	$3{,}0{\cdot}10^{17}$
neutronová hvězda (jádro)	10^{18}
černá díra (s hmotností našeho Slunce)	10^{19}

[a] atm je fyzikální atmosféra (normální atmosféra), dříve často užívaná jednotka tlaku 1 atm = 101 325 Pa je rovna normálnímu atmosférickému tlaku.



Obr. 15.1 (a) Nádoba s tekutinou, ve které se nachází malý měřič tlaku — tlakové čidlo, podrobněji ukázané v části (b) obrázku. Čidlo měří tlak podle zasunutí dobře utěsněného pístu opřeného ve vzduchoprázdném prostoru o pružinu.

Tlak v bodě tekutiny zavádíme jako limitu tohoto poměru, když plochu ΔS (o obsahu ΔS) kolem bodu zmenšujeme způsobem stejným, jaký byl popsán v minulém odstavci pro hustotu. Když je tlak ve všech bodech určité oblasti stejný, říkáme, že je v této oblasti homogenní, a zjistíme jej dělením síly F obsahem S rovinné plošky, na kterou tato síla působí. Rov. (15.2) tak přejde na často užívaný jednoduchý tvar $p = F/S$.

Pokusy zjistíme, že v daném bodě tekutiny, která je v klidu, má tlak p definovaný rov. (15.2) stejnou hodnotu pro všechny orientace měřiče tlaku. Tlak je skalár, jeho hodnota nezávisí na směru. Síla působící na naše měřicí zařízení je sice vektor, ale v rov. (15.2) se uvažuje pouze její *velikost*, která je skalární veličinou.

V SI je jednotkou tlaku newton na čtverečný metr, N·m^{-2}, jednotka se nazývá **pascal** (Pa). U nás i v jiných zemích důsledně užívajících metrickou soustavu jsou i měřiče tlaku v pneumatikách kalibrovány v kilopascalech. (Jedině krevní tlak se tradičně uvádí v milimetrech rtuťového sloupce neboli v torrech.) Vztah mezi pascalem a jinými dříve běžně užívanými jednotkami nepatřícími do SI je dán vztahy:

$$1\,\text{atm} = 1{,}013\,25{\cdot}10^{5}\,\text{Pa} = 760\,\text{torr} = 14{,}7\,\text{lb·in}^{-2},$$
$$1\,\text{at} = 1\,\text{kp·cm}^{-2} = 9{,}806\,65{\cdot}10^{4}\,\text{Pa}.$$

Atmosféra, jak jméno naznačuje, byla jednotka tlaku přibližně rovná atmosférickému (barometrickému) tlaku. Jednotka značená atm a nazývaná *fyzikální* nebo též *normální atmosféra* je rovna *normálnímu atmosférickému tlaku*, který odpovídá průměrnému atmosférickému tlaku při hladině moře při teplotě 0 °C. Je mu definitoricky přisouzena hodnota 101 325 Pa. Jednotka značená at a nazývaná *technická atmosféra* je rovna tlaku, kterým působí síla jednoho kilopondu (kp) na čtverečný centimetr. (Kilopond je starší jednotka síly nespadající do soustavy SI; je roven velikosti tíhové síly působící na těleso hmotnosti 1 kg (resp. váze tohoto tělesa) při standardním tíhovém zrychlení g). Fyzikální atmosféra je tedy přibližně o tři procenta větší než technická atmosféra. Jednotka *torr* (pojmenovaná po Evangelistovi Torricelliovi, který v roce 1674 objevil rtuťový barometr) odpovídá tlaku, kterým na podložku působí *milimetr rtuťového sloupce*. Proto bývá *torr* označován též jako mm Hg. Typicky britská jednotka tlaku, libra na čtverečný palec (lb·in^{-2}), bývá zkráceně označována jako psi (pound per square inch). Hodnoty některých typických tlaků jsou uvedeny v tab. 15.2.

PŘÍKLAD 15.1

Pokoj má plochu podlahy 3,5 m × 4,2 m a výšku 2,4 m.

(a) Kolik váží vzduch v místnosti — jakou tíhou působí na podlahu?

ŘEŠENÍ: Je-li V je objem místnosti a ϱ je hustota vzduchu při tlaku 1 atm (tab. 15.1), potom hmotnost m vzduchu je

$$m = \varrho V =$$
$$= (1{,}21\,\text{kg·m}^{-3})(3{,}5\,\text{m} \cdot 4{,}2\,\text{m} \cdot 2{,}4\,\text{m}) =$$
$$= 42{,}7\,\text{kg} \doteq 43\,\text{kg}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tabulka 15.2 **Tlaky ve vybraných systémech**

SYSTÉM	$\frac{p}{\text{Pa}}$
střed Slunce	$2{\cdot}10^{16}$
střed Země	$4{\cdot}10^{11}$
nejvyšší tlak dosažený v laboratoři	$1{,}5{\cdot}10^{10}$
tlak v největší hloubce oceánu	$1{,}1{\cdot}10^{8}$
tlak jehlového podpatku na taneční parket	$1{\cdot}10^{6}$
tlak v pneumatice[a]	$2{\cdot}10^{5}$
atmosférický tlak u hladiny moře	$1{,}0{\cdot}10^{5}$
normální krevní tlak[a,b]	$1{,}6{\cdot}10^{4}$
nejvyšší vakuum dosažené v laboratoři	10^{-12}

[a] Jedná se o přetlak, tj. zvýšení tlaku proti tlaku atmosférickému.
[b] Systolický tlak 120 torr, tj. 120 mm rtuťového sloupce, změřený na lékařském manometru.

Jeho tíha G je

$$G = mg = (42{,}7\,\text{kg})(9{,}81\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2}) = \\ = 419\,\text{N} \doteq 420\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou silou působí atmosféra na podlahu místnosti?

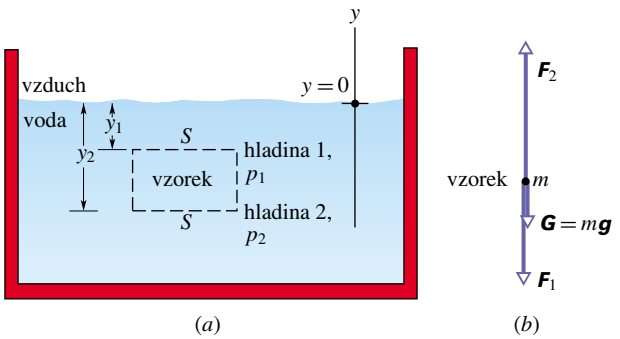
ŘEŠENÍ: Síla je rovna

$$F = pS = (1{,}0\,\text{atm})\left(\frac{1{,}01{\cdot}10^{5}\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-2}}{1\,\text{atm}}\right)(3{,}5\,\text{m})(4{,}2\,\text{m}) = \\ = 1{,}5{\cdot}10^{6}\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato síla, která je přibližně rovna síle, kterou je k Zemi přitahováno 150 tun, je tíhou sloupce vzduchu o základně rovné ploše podlahy a výšce rovné výšce atmosféry. Je rovna síle, kterou by na podlahu působila rtuť nalitá do místnosti do výšky přibližně $\frac{3}{4}$ m. Proč tato obrovská síla nerozboří podlahu?

15.4 TEKUTINY V KLIDU — STATIKA

Na obr. 15.2 je otevřená nádoba s vodou (nebo jinou kapalinou). Jak ví každý, kdo se někdy potápěl pod vodu, tlak *stoupá*, když se potápíme hlouběji pod hladinu, tj. pod rozhraní vzduch – voda. Potápěčův měřič hloubky je tlakoměr podobný tomu, který je znázorněn na obr. 15.1b. Obdobně každý horolezec ví, že tlak *klesá*, když stoupáme do výšin. Tlak, se kterým se setkává potápěč i horolezec, se nazývá **hydrostatický tlak**, protože je to tlak, kterým působí tekutiny, jsou-li v klidu, tj. při statických podmínkách. Tlak *plynu* někdy nazýváme **aerostatický tlak**. (Řec. hydór = voda; řec. i lat. aér = vzduch.)



Obr. 15.2 (a) Nádoba s vodou, ve které si představíme vzorek vody ve válci (na obrázku vyčárkován) se základnou o obsahu S. (b) Silový diagram pro vzorek vody. Vzorek je ve statické rovnováze, tíhová síla je vyvážena vztlakovou.

Nejprve probereme vzrůst tlaku s hloubkou v kapalině. Zvolíme svislou osu y s počátkem na hladině kapaliny a s kladnou orientací mířící vzhůru. Uvažujme vzorek vody, který vyplňuje myšlený válec s vodorovnou základnou o obsahu S, ležící v hloubce y_2, a vrchní plochou v hloubce y_1. Vzhledem k naší volbě osy y jsou obě souřadnice y_1 i y_2 *záporné*.

Na obr. 15.2b je znázorněn silový diagram pro zvolený válcový vzorek vody. Vzorek je v rovnováze, protože tíhová síla G na něj působící je přesně vyvážena rozdílem síly mířící vzhůru o velikosti $F_2 = p_2 S$ působící na základnu a síly o velikosti $F_1 = p_1 S$ mířící dolů, která působí na vrchní plochu válce. Tedy

$$F_2 = F_1 + G. \qquad (15.3)$$

Objem V válce je $S(y_1 - y_2)$. Hmotnost vody m v něm obsažené je tedy $\varrho S(y_1 - y_2)$, kde ϱ je stálá hustota vody. Tíha G vzorku vody je potom $mg = \varrho g S(y_1 - y_2)$. Po dosazení za G, F_1 a F_2 dostane rov. (15.3) tvar

$$p_2 S = p_1 S + \varrho S g(y_1 - y_2)$$

neboli

$$p_2 = p_1 + \varrho g(y_1 - y_2). \qquad (15.4)$$

Tuto rovnici můžeme použít k určení tlaku jak v kapalině, tak i v atmosféře, pokud můžeme mezi výškami y_1 až y_2 předpokládat neproměnnou hustotu ϱ vzduchu.

V kapalině obvykle vyjadřujeme tlak v závislosti na hloubce h (obr. 15.3). Rov. (15.4) pro toto vyjádření upravíme tak, že hladinu 1 položíme do povrchu kapaliny a tlak v ní označíme p_0. Potom bude

$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0 \quad \text{a} \quad y_2 = -h.$$

Označíme-li ještě p_2 jako p, můžeme přepsat rov. (15.4) na tvar, který se pro kapaliny běžně užívá:

$$p = p_0 + \varrho g h \quad \text{(tlak v hloubce } h\text{)}. \qquad (15.5)$$

Všimněte si, že tlak v dané hloubce závisí pouze na této hloubce a nezávisí na libovolném vodorovném posunutí. Rov. (15.5) platí v nádobě libovolného tvaru. Když dno nádoby je v hloubce h, pak rov. (15.5) pro něj udá tlak p.

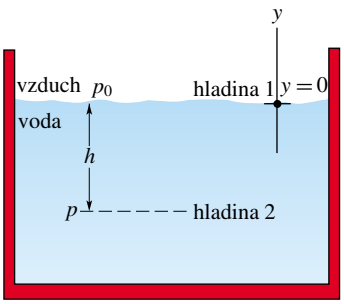
Tlak p v rov. (15.5) se označuje jako **absolutní tlak** v hladině 2. Abychom pochopili proč, všimněme si na obr. 15.3, že tlak p se skládá ze dvou příspěvků: (1) z atmosférického tlaku p_0, který působí již na vrchní hladinu 1, a (2) z tlaku $\varrho g h$, který vzniká působením kapaliny mezi hladinami 1 a 2. Obecně se rozdíl mezi absolutním a atmosférickým tlakem označuje jako **přetlak**. V našem případě, znázorněném na obr. 15.3, je tedy přetlakem výraz $\varrho g h$. Rov. (15.4) lze užít též pro vyjádření tlaku v plynu nad hladinou kapaliny pro vzdálenosti, ve kterých můžeme předpokládat, že se hustota plynu podstatně nezmění. Např. pro vyjádření tlaku plynu ve vzdálenosti d nad vrchní hladinou 1 (obr. 15.3) můžeme po dosazení

$$y_1 = 0,\ p_1 = p_0 \quad \text{a} \quad y_2 = d,\ p_2 = p$$

psát

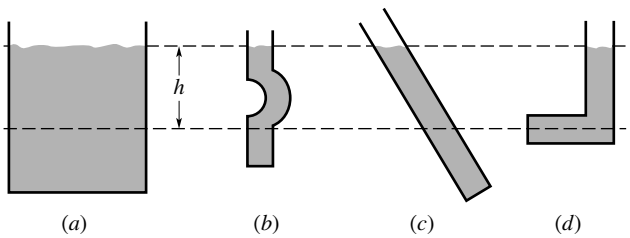
$$p = p_0 - \varrho_{\text{vzd}}\, g d,$$

když hustotu vzduchu označíme ϱ_{vzd}.



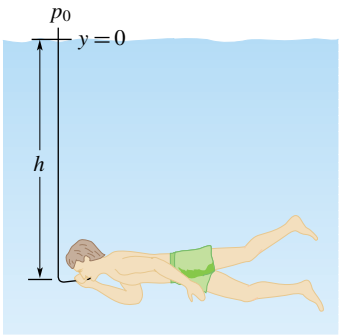
Obr. 15.3 Tlak p roste s hloubkou h, jak odpovídá rov. (15.5).

KONTROLA 1: Na obrázku jsou čtyři nádoby s olivovým olejem. Seřaďte je podle velikosti tlaku v hloubce h.



PŘÍKLAD 15.2

(a) Podnikavý potápěč-kutil předpokládá, že když sací trubice dlouhá 20 cm dobře funguje, bude dobře fungovat i trubice dlouhá 6 m. Jaký je rozdíl Δp mezi tlakem, kterým na něj působí okolní voda (obr. 15.4), a tlakem v jeho plících, když trubici nerozvážně užije pro potápění do hloubky $h = 6$ m? Co mu hrozí?



Obr. 15.4 Příklad 15.2. **TOTO NEZKOUŠEJTE** s delší trubicí, než je standardní krátká sací trubice užívaná při sportovním potápění. Takový pokus by vás mohl stát život. Ve větší hloubce může být tlak vody působící na hrudník tak velký, že jej nedokážete rozevřít, abyste skrz sací trubici nadýchli vzduch, jehož tlak je podstatně menší.

ŘEŠENÍ: Nejprve si představte potápěče v hloubce $h = 6$ m bez sací trubice. Tlak vody, který na něj působí, je podle rov. (15.5) roven

$$p = p_0 + \varrho g h.$$

Tělo potápěče se pod působením tohoto vnějšího tlaku mírně smršťí tak, aby vnitřní tlaky v těle vyrovnávaly vnější tlak. Jmenovitě jeho krevní tlak a průměrný tlak v plicích se zvýší tak, aby vyrovnaly zvýšený vnější tlak p.

Jestliže však potápěč nerozvážně použije sací trubici k dýchání v hloubce 6 m, stlačený vzduch bude z jeho plic vytlačen a tlak v nich rychle klesne na hodnotu atmosférického tlaku p_0. Předpokládáme-li, že se potápí ve sladké vodě hustoty $1\,000\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, rozdíl tlaku Δp mezi vyšším tlakem působícím na jeho hrudník a nižším tlakem v jeho plicích bude

$$\begin{aligned}\Delta p = p - p_0 = \varrho g h = \\ = (1\,000\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3})(9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})(6{,}0\ \text{m}) = \\ = 5{,}9\cdot 10^4\ \text{Pa}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

Tento tlakový rozdíl, přibližně 0,6 atm, stačí vyvolat selhání plic způsobené tím, že do nich vnikne krev, jejíž tlak má stále ještě hodnotu okolního vyššího tlaku. Jev se nazývá **stlačení plic** (lung squeeze).

(b) Nováček ve sportovním potápění se plně nadýchl ze svého zásobníku, než zásobník odpojil v hloubce h a plaval k povrchu. Nedbal pokynů, že při výstupu z hloubky se má vydechovat. Při vynoření na povrchu rozdíl tlaku mezi tlakem

v jeho plicích a okolím činil 70 torrů. V jaké hloubce h začal výstup? Jakému smrtelnému nebezpečí se vystavoval?

ŘEŠENÍ: Když plnil plíce v hloubce h, působil na něj dle rov. (15.5) opět vnější tlak

$$p = p_0 + \varrho g h,$$

který se ustavil i v jeho plících. Jak stoupal, vnější tlak na něj slábl, až na povrchu dosáhl hodnoty atmosférického tlaku p_0. Jeho krevní tlak také poklesl až na normální hodnotu. Ale protože nevydechoval, tlak v jeho plících zůstal na hodnotě, kterou měl v hloubce h. Rozdíl tlaků mezi vyšší hodnotou v jeho plících a nižší hodnotou působící na jeho hrudník dosáhl po jeho vynoření hodnoty

$$\Delta p = p - p_0 = \varrho g h,$$

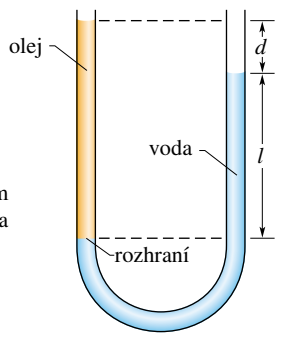
odkud dostaneme

$$h = \frac{\Delta p}{\varrho g} = \\ = \frac{(70\,\text{torr})}{(1\,000\,\text{kg·m}^{-3})(9{,}8\,\text{m·s}^{-2})}\left(\frac{1{,}01{\cdot}10^5\,\text{Pa}}{760\,\text{torr}}\right) = \\ = 0{,}95\,\text{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tlakový rozdíl 70 torr (přibližně 9 % atmosférického tlaku) může stačit k poškození potápěčových plic. Těmi se vzduch dostane do krve, a krví do srdce, kde může způsobit smrt potápěče. Když potápěč poslechne pokyn, že má při výstupu z hloubky postupně vydechovat, umožní tlaku v plicích vyrovnávat se s okolním tlakem a zdravotní nebezpečí pomine.

PŘÍKLAD 15.3

V U-trubici znázorněné na obr. 15.5 se nacházejí dvě kapaliny ve statické rovnováze: voda s hustotou ϱ_v se nachází v pravém rameni, olej s neznámou hustotou ϱ_x v levém rameni. Měřením zjistíme, že $l = 135\,\text{mm}$ a $d = 12{,}3\,\text{mm}$. Jaká je hustota oleje?



Obr. 15.5 Příklad 15.3. Olej v levém rameni U-trubice stojí výše než voda v pravém rameni, protože olej má menší hustotu než voda. Obě kapaliny vytváří stejný tlak p_r na svém rozhraní.

ŘEŠENÍ: Jestliže v levé trubici je na rozhraní olej – voda tlak p_r, pak tlak v pravé trubici ve stejné výšce musí být také p_r, protože obě místa jsou spojena pouze vodou. Uvažované rozhraní v pravém rameni leží ve vzdálenosti l pod povrchem (volnou hladinou) *vody* a dle rov. (15.5) máme

$$p_r = p_0 + \varrho_v g l \quad \text{(pravé rameno).}$$

V levém rameni je rozhraní v hloubce $l + d$ pod volnou hladinou *oleje* a dle rov. (15.5) máme nyní

$$p_r = p_0 + \varrho_x g (l + d) \quad \text{(levé rameno).}$$

Porovnáním těchto dvou rovnic a řešením pro neznámou ϱ_x dostaneme

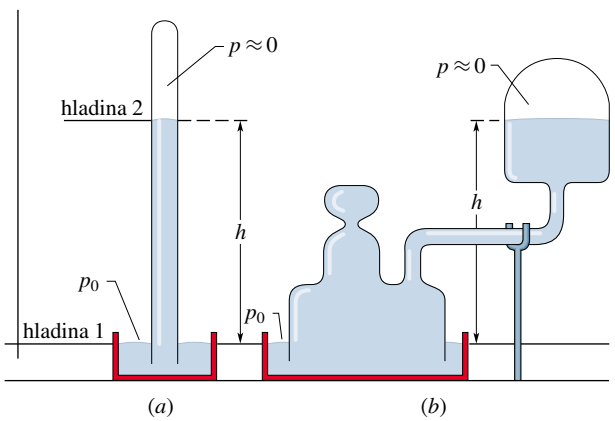
$$\varrho_x = \varrho_v \frac{l}{l + d} = \\ = (1\,000\,\text{kg·m}^{-3})\frac{(135\,\text{mm})}{(135\,\text{mm}) + (12{,}3\,\text{mm})} = \\ = 916\,\text{kg·m}^{-3}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že výsledek nezávisí ani na atmosférickém tlaku p_0, ani na tíhovém zrychlení g.

15.5 MĚŘENÍ TLAKU

Rtuťový barometr

Na obr. 15.6a je obyčejný *rtuťový barometr*, přístroj k měření atmosférického (barometrického) tlaku. Je to dlouhá skleněná z jedné strany uzavřená trubice, kterou po naplnění rtutí obrátíme otevřeným koncem do nádobky s rtutí. Tím se mezi hladinou rtuti a zavřeným koncem trubice vytvoří vakuovaný prostor, ve kterém se nacházejí pouze páry rtuti. Jejich tlak je při běžných teplotách tak malý, že jej můžeme zanedbat.



Obr. 15.6 (a) Rtuťový barometr. (b) Rtuťový barometr v jiném provedení. Vzdálenost h je pro oba barometry stejná.

Podle rov. (15.4) nalezneme atmosférický tlak p_0 ze změřené výšky h rtuťového sloupce. Za hladinu 1 z obr. 15.2 zvolíme rozhraní vzduch-rtuť, tj. volnou hladinu rtuti v nádobce, a za hladinu 2 vršek rtuťového sloupce, jak je naznačeno v obr. 15.6a. Dosadíme tedy do rov. (15.4)

$$y_1 = 0,\ p_1 = p_0 \quad \text{a} \quad y_2 = h,\ p_2 = 0$$

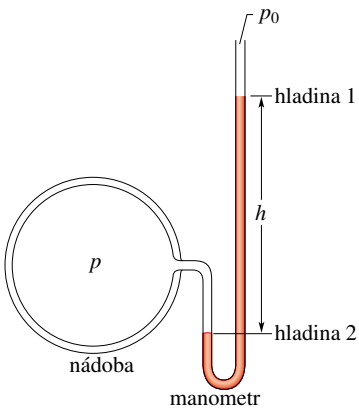
a pro hledaný atmosférický tlak dostaneme vyjádření

$$p_0 = \varrho g h, \tag{15.6}$$

kde ϱ je hustota rtuti.

Pro daný tlak nezávisí výška h na průřezu trubice se rtutí. Bizarní rtuťový barometr z obr. 15.6b měří stejně jako jednoduchý barometr z obr. 15.6a; záleží pouze na svislé vzdálenosti h mezi hladinami rtuti.

Dle rov. (15.6) závisí pro daný tlak výška sloupce rtuti na hodnotě tíhového zrychlení g v místě, kde se nachází barometr, a na hustotě ϱ rtuti, která závisí na teplotě. Výška sloupce v milimetrech je číselně rovna tlaku v torrech *pouze* tehdy, když je barometr v místě, kde má tíhové zrychlení g svou standardní hodnotu 9,806 65 m·s^{-2} a teplota rtuti je 0 °C. Jestliže tyto podmínky nejsou splněny (což je téměř vždy), musíme provést malé korekce, kterými převedeme výšku rtuťového sloupce na údaj o místním tlaku.



Obr. 15.7 Otevřený manometr, jehož levé rameno je připojeno k nádobě s plynem, jehož přetlak $p - p_0$ má být měřen. Pravé rameno U-trubice je otevřeno do atmosféry.

Otevřený kapalinový manometr

Otevřený kapalinový manometr (tlakoměr) znázorněný na obr. 15.7 měří přetlak plynu v nádobě. Je to trubice tvaru písmene U (U-trubice) naplněná kapalinou, jejíž jeden otevřený konec je spojen s nádobou, v níž chceme změřit přetlak (rozdíl tlaku oproti tlaku v okolní atmosféře), a druhý otevřený konec je spojen s okolní atmosférou. Z rov. (15.4) vyjádříme přetlak dle změřené výšky h znázorněné na obr. 15.7. Zvolíme hladiny 1 a 2 tak, jak je naznačeno na obr. 15.7. Potom dosadíme

$$y_1 = 0,\ p_1 = p_0 \quad \text{a} \quad y_2 = -h,\ p_2 = p$$

do rov. (15.4) a dostaneme

$$p_\text{p} = p - p_0 = \varrho g h. \tag{15.7}$$

Přetlak p_p je přímo úměrný výšce h.

Přetlak může být kladný, resp. záporný dle toho, zda $p > p_0$, resp. $p < p_0$. V nahuštěných pneumatikách nebo v lidském krevním oběhu je celkový tlak vyšší než atmosférický tlak, proto má přetlak kladnou hodnotu. Sajete-li šťávu stéblem, máte celkový tlak ve svých plicích nižší než atmosférický; přetlak ve vašich plicích je záporný. V češtině užíváme pro záporný přetlak lépe znějící termín **podtlak**.

PŘÍKLAD 15.4

V barometru jsme naměřili výšku $h = 740{,}35$ mm sloupce rtuti. Teplota byla -5 °C; hustota rtuti při této teplotě je $1{,}360\,8 \cdot 10^4$ kg·m^{-3}. Tíhové zrychlení v místě měření je 9,783 5 m·s^{-2}. Jaký byl v místě měření atmosférický tlak? Vyjádřete jej v pascalech i torrech.

ŘEŠENÍ: Z rov. (15.6) plyne

$$\begin{aligned} p_0 = \varrho g h = \\ = (1{,}360\,8 \cdot 10^4\ \text{kg·m}^{-3})(9{,}783\,5\ \text{m·s}^{-2})(0{,}740\,35\ \text{m}) = \\ = 9{,}856\,6 \cdot 10^4\ \text{Pa}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

Údaje na barometru se někdy uvádějí v jednotkách torr. Tlak 1 torr je tlak, kterým působí 1 mm rtuťového sloupce v místě, kde tíhové zrychlení g má svou mezinárodně přijatou standardní hodnotu 9,806 65 m·s^{-2} a kde teplota je 0 °C. Při této teplotě má rtuť hustotu $1{,}359\,55 \cdot 10^4$ kg·m^{-3}. Z rov. (15.6) tak pro jeden torr dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned} 1\ \text{torr} = (1{,}359\,55 \cdot 10^4\ \text{kg·m}^{-3})(9{,}806\,65\ \text{m·s}^{-2}) \cdot \\ \cdot (1 \cdot 10^{-3}\ \text{m}) = 133{,}326\ \text{Pa}. \end{aligned}$$

Použijeme-li tento přepočtový faktor pro vyjádření hodnoty tlaku přečtené na barometru, dostaneme

$$p_0 = 9{,}856\,6 \cdot 10^4\ \text{Pa} = 739{,}29\ \text{torr}.$$ (Odpověď)

Všimněte si, že tlak vyjádřený v torrech (739,29 torr) je číselně blízký, ale není totožný se změřenou výškou h rtuťového sloupce barometru udanou v milimetrech (740,35 mm).

15.6 PASCALŮV ZÁKON

Když stlačíte jeden konec tuby s pastou na zuby, abyste na druhém konci vytlačili pastu na kartáček, používáte **Pascalův zákon** v praxi. Podobně je na něm založena dobrá rada, jak se zbavit kousku jídla, který vám zaskočil v krku: dát herdu do zad. Tím se prudce zvýší tlak v plicích, který vyhodí zaskočený kousek. Zákon poprvé vyslovil v roce 1652 Blaise Pascal (je po něm nazvána jednotka tlaku) ve tvaru:

Změníme-li tlak v jednom místě tekutiny, objeví se táž změna prakticky ihned v každé části této tekutiny i na stěnách nádoby, ve které je tekutina uzavřena.

Demonstrace Pascalova zákona

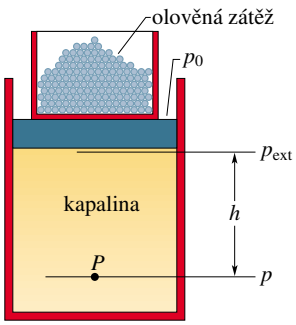
Představme si, že tekutinou je nestlačitelná kapalina ve velkém válci, jak je nakresleno v obr. 15.8. Válec je uzavřen pístem, na kterém spočívá nádoba se zátěží tvořenou olověnými broky. Atmosféra, nádoba a zátěž (spolu s hmotností pístu) vytvářejí na píst a tím i na kapalinu tlak p_{ext}. Tlak p v libovolném bodě P kapaliny je potom

$$p = p_{\text{ext}} + \varrho g h. \tag{15.8}$$

Přidáme nyní trochu broků do nádoby, čímž zvýšíme p_{ext} o hodnotu Δp_{ext}. Hodnoty ϱ, g a h v rov. (15.8) zůstanou nezměněny, takže přidáním zátěže se v každém bodě kapaliny P tlak zvýší o

$$\Delta p = \Delta p_{\text{ext}}. \tag{15.9}$$

Tato změna tlaku nezávisí na hloubce h. Je tedy stejná v každém bodě kapaliny, jak odpovídá Pascalovu zákonu.



Obr. 15.8 Závaží položená na píst vytvoří tlak p_{ext} na vrchní hladině uzavřené kapaliny. Když tlak p_{ext} zvýšíme přidáním dalších závaží, zvýší se tlak ve všech bodech kapaliny o stejnou hodnotu p_{ext}.

Pascalův zákon a hydraulický převod sil

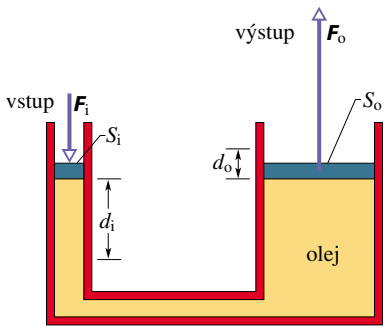
Na obr. 15.9 je znázorněno, jak se Pascalův zákon používá k násobení silového účinku, neboli jak na jeho principu může být zkonstruována jakási hydraulická páka — převodník sil. Nechť na levý (vstupní) píst o obsahu S_{i} působí síla velikosti F_{i} směrem dolů. Nestlačitelná kapalina potom v zobrazeném převodním zařízení působí na pravý (výstupní) píst o obsahu S_{o} silou o velikosti F_{o} směrem vzhůru. Aby systém byl v rovnováze, musí na pravý píst působit odshora síla stejné velikosti F_{o} (ta není na obrázku znázorněna). Síla F_{i} působící na levý píst a síla velikosti F_{o} působící odshora na pravý píst zvýší v kapalině tlak o hodnotu

$$\Delta p = \frac{F_{\text{i}}}{S_{\text{i}}} = \frac{F_{\text{o}}}{S_{\text{o}}},$$

odkud pro převod velikosti sil dostáváme rovnici

$$F_{\text{o}} = F_{\text{i}} \frac{S_{\text{o}}}{S_{\text{i}}}. \tag{15.10}$$

Rov. (15.10) ukazuje, že výstupní síla F_{o} je větší než vstupní síla F_{i}, když $S_{\text{o}} > S_{\text{i}}$, jak odpovídá případu znázorněnému na obr. 15.9.



Obr. 15.9 Hydraulické zařízení, které se užívá k převodu síly F_{i} na vyšší hodnotu F_{o}. Vykonaná práce se však zvětšit nedá a je stejná pro obě síly, vstupní i výstupní.

Jestliže posuneme vstupní píst o vzdálenost d_{i}, posune se výstupní píst o vzdálenost d_{o}. Přitom se musí v okolí obou pístů přesunout stejný objem V nestlačitelné kapaliny. Platí tedy rovnice

$$V = S_{\text{i}} d_{\text{i}} = S_{\text{o}} d_{\text{o}},$$

odkud dále plyne

$$d_{\text{o}} = d_{\text{i}} \frac{S_{\text{i}}}{S_{\text{o}}}. \tag{15.11}$$

Poslední rovnice ukazuje, že když $S_{\text{o}} > S_{\text{i}}$, jako je tomu na obr. 15.9, je posunutí výstupního pístu menší než posunutí pístu vstupního.

Užitím rov. (15.10) a (15.11) můžeme pro výstupní práci psát

$$W = F_{\text{o}} d_{\text{o}} = \left(F_{\text{i}} \frac{S_{\text{o}}}{S_{\text{i}}}\right)\left(d_{\text{i}} \frac{S_{\text{i}}}{S_{\text{o}}}\right) = F_{\text{i}} d_{\text{i}}, \tag{15.12}$$

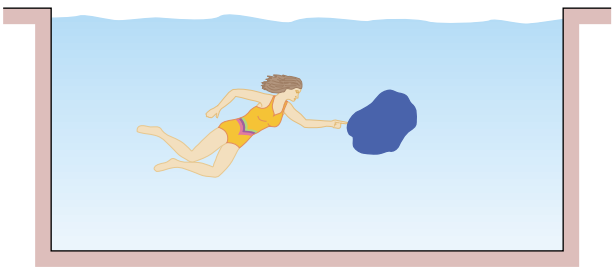
odkud plyne, že práce vykonaná vstupním pístem je stejně velká jako práce vykonaná výstupním pístem.

Z toho vidíme, že **hydraulickým převodem** můžeme převést menší sílu pracující na delší dráze na větší sílu pracující na kratší dráze. Přitom součiny síly a uražené dráhy, a tedy i vykonané práce, jsou v obou případech stejné. Možnost znásobit sílu bývá často velmi výhodná. Např. většina z nás není schopna zvednout automobil, a proto uvítá službu *hydraulického zvedáku*. Při pumpování koncem ramena zvedáku ovšem urazí podstatně větší vzdálenost, než je ta, o kterou se zvedne podložená část auta. Zvedák pracuje na

právě popsaném principu hydraulického převodu. Celková uražená vzdálenost d_i pístu v užším válci je však pumpováním rozdělena na sérii kratších posuvů. (Při pumpování je při každém dalším posuvu do zařízení přičerpávána ze zásobníku další kapalina — zde olej — a stav dosažený při předcházejícím posuvu je zabezpečen ventilem.)

15.7 ARCHIMEDŮV ZÁKON

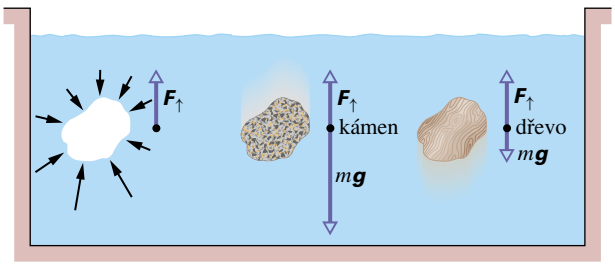
Na obr. 15.10 je v bazénu zobrazena studentka, která hýbe velmi tenkým pytlíkem z plastické hmoty plným vody. Zjišťuje, že pytlík je ve stavu statické rovnováhy: ani nestoupá, ani neklesá. Ovšem voda v pytlíku má jistou váhu, a proto by měla klesat. Zřejmě tedy na pytlík musí působit směrem vzhůru síla, která váhu pytlíku vody vyváží.



Obr. 15.10 Tenkostěnný pytlík z plastické hmoty plný vody, který se vznáší v bazénu, je ve statické rovnováze. Váha pytlíku je vyvážena výslednicí sil, kterými na pytlík působí okolní voda.

Tuto vzhůru působící sílu nazýváme **vztlaková síla**, stručně **vztlak**, a označíme ji $\boldsymbol{F}_{\uparrow}$. Vztlakovou silou působí na pytlík okolní voda. Vztlaková síla vzniká jako důsledek toho, že tlak v kapalině roste s hloubkou, jak jsme si již ukázali. Tlak na spodní části pytlíku je větší než na jeho vrchní části a výsledkem je vzhůru působící vztlaková síla. Představme si, že nyní odstraníme pytlík s vodou. Na obr. 15.11a jsou znázorněny síly, které působí na dutinu, která vznikla odstraněním pytlíku. Vzhůru působící vztlaková síla $\boldsymbol{F}_{\uparrow}$ je vektorovým součtem všech na dutinu působících sil.

Vyplňme nyní dutinu kamenem, který bude mít přesně stejné rozměry jako dutina (obr. 15.11b). *Stejný vztlak, který působil na pytlík s vodou, bude nyní působit na kámen.* Je však příliš malý na to, aby vyvážil váhu kamene, takže kámen klesne ke dnu. Přestože kámen klesá, vztlak vody jej nadlehčuje a usnadní manipulaci s kamenem.



Obr. 15.11 (a) Voda obklopující dutinu v kapalině na ni působí vztlakovou silou, jejíž velikost ani směr nezávisí na tom, čím je dutina vyplněna. (b) Je-li v dutině kámen, je velikost tíhové síly větší, než je velikost vztlakové síly. (c) Je-li v dutině dřevo, je velikost tíhové síly menší, než je velikost vztlakové síly.

Pozdě večer 21. srpna 1986 byla (pravděpodobně vulkanickým působením) narušena rozpouštěcí rovnováha oxidu uhličitého, kterého kamerunské horské jezero Nyos obsahuje velké množství. Oxid vytvořil bubliny, které byly vytlačeny nad hladinu, protože byly lehčí než obklopující tekutina — v tomto případě voda. Tam vytvořily oblak oxidu uhličitého. Tento oblak, který byl tentokrát těžší než obklopující tekutina — vzduch, začal téci po svazích hor jako řeka, přičemž zadusil 1 700 lidí a velké množství zvířat, z nichž některá vidíme na pravém obrázku.





Když vyplníme dutinu z obr. 15.11a kusem dřeva stejných rozměrů, jak je naznačeno v obr. 15.11c, bude nyní působit na dřevo stejná vztlaková síla jako dříve na kámen. Teď však bude vztlak větší, než je tíha dřeva, takže dřevo vypluje na volnou hladinu. Shrneme naše pozorování a vyslovíme **Archimedův zákon**:

Těleso ponořené do tekutiny je nadlehčováno silou, která je stejně velká jako váha tekutiny tělesem vytlačené.

Právě tento zákon vysvětluje plování těles. Jestliže např. kus dřeva z obr. 15.11c vypluje byť jen částečně nad hladinu, vytlačí méně vody, než když je plně ponořen. Podle Archimedova zákona se úměrně zmenší vztlak, který na něj působí.

Dřevo se vynoří z kapaliny právě tolik, aby vztlak, který na něj působí, přesně vyrovnal jeho tíhu. Dřevo je pak ve statické rovnováze, plove.

Připomeňme si, že tíhovou sílu tělesa umísťujeme do těžiště. Podobně výslednou vztlakovou sílu umístíme do jejího působiště, které nazveme **vztlakový střed**. Vztlakový střed se nachází v místě, kde bylo těžiště tekutiny, než byla vytlačena. Jestliže *homogenní* těleso je plně ponořeno, splývá jeho těžiště se vztlakovým středem. Je-li však těleso ponořeno jen částečně (když plove) anebo není-li homogenní, budou oba body různé; vztlak ve vztlakovém středu a tíhová síla v těžišti pak mohou vytvořit nenulový moment silové dvojice. Ten pak rozhoduje o tom, zda je plavba lodi stabilní (moment při náhodném pootočení navrací loď zpátky) nebo ne (v opačném případě).

KONTROLA 2: Tučňák plave nejprve v kapalině hustoty ϱ_0, potom v kapalině hustoty $0{,}95\varrho_0$ a nakonec v kapalině hustoty $1{,}1\varrho_0$. (a) Seřaďte hustoty kapalin podle velikosti vztlaku, jakým působí na tučňáka. (b) Seřaďte je podle množství kapaliny vytlačené tučňákem.

PŘÍKLAD 15.5

Výraz „špička ledovce“ se v hovorové řeči užívá k označení jevu, jehož malá část je zjevná a zbytek je skryt. Jaká je vynořená část skutečného ledovce?

ŘEŠENÍ: Tíhová síla ledovce o celkovém objemu V_l je

$$G_\mathrm{l} = \varrho_\mathrm{l} V_\mathrm{l} g,$$

kde $\varrho_\mathrm{l} = 917\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ je hustota ledovce.

Tíhová síla vytlačené vody, která je rovna velikosti vztlakové síly $F_\uparrow$, je

$$G_\mathrm{v} = F_\uparrow = \varrho_\mathrm{v} V_\mathrm{v} g,$$

kde $\varrho_\mathrm{v} = 1\,024\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ je hustota mořské vody a V_v je objem vody vytlačené ledovcem, tedy i objem ponořené části ledovce. Pro plovoucí ledovec jsou obě tíhové síly stejné:

$$\varrho_\mathrm{l} V_\mathrm{l} g = \varrho_\mathrm{v} V_\mathrm{v} g.$$

Z poslední rovnice pro podíl d, který hledáme, plyne

$$d = \frac{V_\mathrm{l} - V_\mathrm{v}}{V_\mathrm{l}} = 1 - \frac{V_\mathrm{v}}{V_\mathrm{l}} = 1 - \frac{\varrho_\mathrm{l}}{\varrho_\mathrm{v}} =$$
$$= 1 - \frac{(917\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}})}{(1\,024\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}})} =$$
$$= 0{,}1 \text{ neboli } 10\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 15.6

Kulový balon plněný heliem má poloměr $R = 12\,\mathrm{m}$. Balon nese lana a koš o hmotnosti $m = 196\,\mathrm{kg}$. Jakou největší hmotnost M užitečného zatížení je balon schopný nést? Hustota helia je $\varrho_\mathrm{He} = 0{,}160\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a hustota vzduchu $\varrho_\mathrm{vzd} = 1{,}25\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$; objem vzduchu vytlačený zátěží balonu zanedbejte.

ŘEŠENÍ: Tíhová síla vzduchu vytlačeného balonem, která udává velikost vztlaku, a tíhová síla helia obsaženého v balonu jsou

$$G_\mathrm{vzd} = \varrho_\mathrm{vzd} V g \quad \text{a} \quad G_\mathrm{He} = \varrho_\mathrm{He} V g,$$

kde V $(= \frac{4}{3}\pi R^3)$ je objem balonu. Při rovnováze z Archimedova zákona plyne

$$G_\mathrm{vzd} = G_\mathrm{He} + mg + Mg$$

neboli

$$M = \tfrac{4}{3}\pi R^3(\varrho_\mathrm{vzd} - \varrho_\mathrm{He}) - m =$$
$$= \tfrac{4}{3}\pi(12{,}0\,\mathrm{m})^3(1{,}25\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}} - 0{,}160\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}) -$$
$$- (196\,\mathrm{kg}) = 7\,690\,\mathrm{kg}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tíhová síla objektu s touto hmotností je asi 75 400 N.

15.8 TEKUTINY V POHYBU — DYNAMIKA

Pohyb *reálných tekutin* je velmi komplikovaný, řada problémů je jen obtížně numericky řešitelných a některé problémy dosud vyřešeny nejsou. Problém si podstatně zjednodušíme. Zavedeme pojem **ideální kapalina** pro modelovou tekutinu, o které předpokládáme, že je dokonale *nestlačitelná* a *neviskózní*. Při popisu jejího proudění se omezíme na případy, kdy proudění je *laminární*, *ustálené* (*stacionární*)

a *nevírové*. Tak se nám podaří jednoduchými matematickými prostředky získat velmi užitečné výsledky, které nám umožní pochopit základní rysy chování proudící tekutiny. Objasníme si blíže předpoklady, které jsme učinili:

Ideální kapalina je

1. ***nestlačitelná:*** Předpoklad je stejný, jaký jsme již učinili pro tekutinu v klidu. Ideální tekutina má konstantní, všude stejnou hustotu.

2. ***neviskózní:*** **Viskozita (vazkost)** tekutiny je míra toho, jak se tekutina brání tečení. Např. tlustá vrstva medu se podstatně více brání roztékání než stejně tlustá vrstva vody. Proto říkáme, že med je viskóznější než voda. Asfalt, který jsme zmínili na začátku kapitoly, má velmi vysokou viskozitu. Viskozita tekutin je analogická smykovému tření mezi pevnými tělesy; při viskózním proudění se kinetická energie přeměňuje na teplo podobně jako při vzájemném pohybu těles za působení tření. Vymizí-li tření, kvádr může po vodorovné rovině klouzat stálou rychlostí. Podobně na těleso, které se pohybuje neviskózní tekutinou, nepůsobí žádná *smyková viskózní síla*, tj. brzdicí síla viskózního charakteru. Britský vědec lord Rayleigh poznamenal, že v ideální tekutině lodní šroub nebude pracovat, na druhé straně však loď jednou uvedená do pohybu nebude šroub potřebovat.

Omezujeme se na proudění

3. ***laminární:*** Při laminárním proudění je rozumně definována rychlost proudění v každém bodě tekutiny; může se od místa k místu měnit, ale ne příliš prudce. Pomalé proudění vody ve středu klidného toku je blízké laminárnímu, v peřejích je laminárnímu rozhodně vzdálené. Na obr. 15.12 je ukázán přechod z laminárního na **turbulentní proudění** pro stoupající cigaretový kouř. Rychlost částeček kouře roste, jak stoupají, a při jisté kritické rychlosti přejde laminární proudění v turbulentní.

4. ***ustálené (stacionární):*** Při *ustáleném* proudění se rychlost proudící tekutiny v kterémkoliv místě nemění s časem ani co do velikosti, ani co do směru. Laminární proudění může, ale nemusí být ustálené. Turbulentní proudění ustálené být nemůže, je vždy **nestacionární**.

5. ***nevírové:*** Tuto vlastnost proudění si objasníme na chování malého zrnka prachu unášeného tekutinou. Zrnko se může při nevírovém proudění pohybovat i po kruhové dráze, ale nikdy nesmí rotovat okolo osy jím procházející. Příklad: ruské kolo na pouti koná jako celek rotační pohyb, ale jeho pasažéři v zavěšených kabinkách konají pouze translační pohyb, okolo vodorovné osy se neotáčejí. I když se problematikou nebudeme dále podrobněji zabývat, vymezíme si, že námi sledované proudění bude *nevírové*. Dále

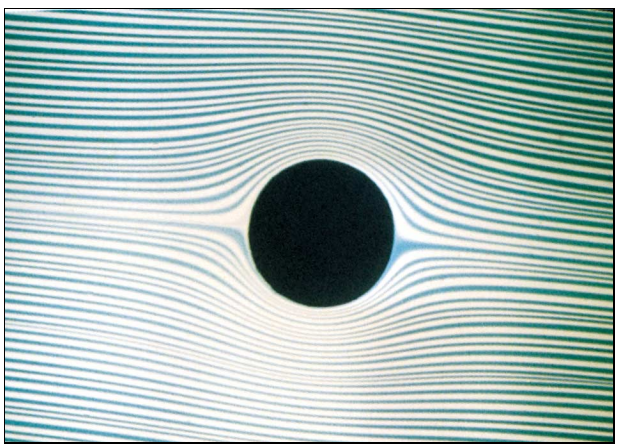


Obr. 15.12 V určitém bodě změní stoupající proud kouře a ohřátého vzduchu charakter proudění z laminárního na turbulentní.

budeme ve výkladové části vždy předpokládat, že ve všech bodech daného průřezu trubice je stejná rychlost. Takové proudění je nevírové. V příkladech se však setkáme i s případy, kdy proudění v sousedních vrstvách kapaliny se děje s různou rychlostí. Takové proudění je vírové. I ve vírovém proudění však lze odvozené rovnice (rovnici kontinuity a Bernoulliovu rovnici) vhodným způsobem aplikovat.

15.9 PROUDNICE A ROVNICE KONTINUITY

Na obr. 15.13 jsou zobrazeny proudnice vzniklé tím, že na řadě nesousedících míst je do proudící tekutiny vpraveno

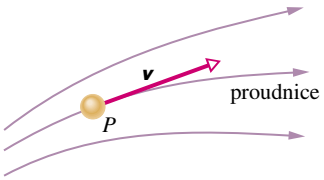


Obr. 15.13 Laminární obtékání válce. Proudnice jsou zviditelněny barevnými částicemi, které zanechávají stopu.

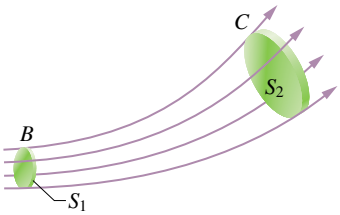
barvivo. Na obr. 15.14 jsou zachyceny proudnice podobně vytvořené kouřem. **Proudnice** je trajektorie, po níž se pohybuje drobný kousek tekutiny, který můžeme nazvat „částicí tekutiny“. Když se částice tekutiny pohybuje, může se měnit směr i velikost její rychlosti. Vektor rychlosti částice je vždy tečný k proudnici (obr. 15.15). Proudnice se nikdy nekříží, protože jinak by částice, která dospěla do bodu křížení, měla současně dvě různé rychlosti, a to je nemožné.*



Obr. 15.14 Kouřem zviditelněné proudnice, které obtékají automobil umístěný v aerodynamickém tunelu.



Obr. 15.15 Stopa pohybu částice tekutiny P vytváří proudnici. Vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ částice má v každém bodě směr tečny k proudnici.



Obr. 15.16 Proudová trubice je vytvořena proudnicemi, které tvoří její hranici. Stejný objemový tok musí procházet všemi průřezy proudové trubice.

Při tečeních, jaká jsou znázorněna na obr. 15.13 a 15.14, můžeme vymezit **proudové trubice**, jejichž stěny jsou tvořeny proudnicemi. Proudová trubice se chová jako reálná trubice v tom smyslu, že žádná částice tekutiny, která se nachází v trubici, ji nemůže opustit skrz její stěny. Kdyby částice unikla, měli bychom případ křížení proudnic, který jsme již vyloučili. Na obr. 15.16 jsou znázorněny dva příčné průřezy tenké proudové trubice o obsazích S_1 a S_2. Budeme sledovat tekutinu procházející průřezem u bodu B. Tekutina jím prochází rychlostí v_1, za krátký časový interval Δt urazí vzdálenost $v_1 \Delta t$ a průřezem S_1 projde objem tekutiny

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t.$$

Předpokládáme, že tekutina je nestlačitelná a že nemůže být ani vytvořena ani zničena. Proto za stejný časový interval musí projít stejný objem tekutiny i průřezem S_2 v okolí bodu C dále po proudu. Jestliže rychlost zde má velikost v_2, musí platit

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$$

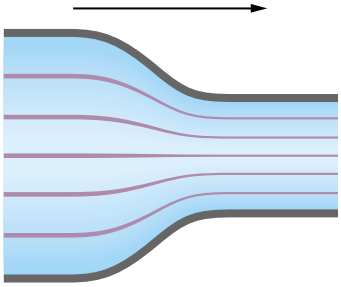
neboli

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Podél proudové trubice tedy platí rovnice

$$R = Sv = \text{konst.}, \qquad (15.13)$$

kde veličina R, jejíž jednotka v SI je $\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$, se nazývá **objemový tok**. Rov. (15.13) vyjadřující stálost objemového toku tekutiny proudovou trubicí se nazývá **rovnice kontinuity** proudění. Z rovnice plyne, že tečení je rychlejší v užších částech trubice, kde proudnice jsou blíže u sebe, než v jejích širších částech (obr. 15.17).

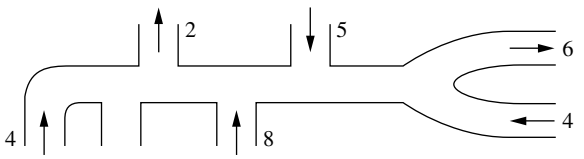


Obr. 15.17 V místě zúžení trubice se proudnice dostanou blíže k sobě a proud se zrychlí. Šipka nad obrázkem ukazuje směr proudění.

Rov. (15.13) vyjadřuje zachování hmotnosti ve tvaru vhodném pro mechaniku tekutin. Násobíme-li R hustotou tekutiny, o které předpokládáme, že je konstantní, dostaneme výraz $Sv\varrho$. Ten se nazývá **hmotnostní tok** a jeho jednotkou v SI je $\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$. Vyjádříme-li rovnici kontinuity v hmotnostním a nikoliv v objemovém toku, říká nám např. pro případ znázorněný na obr. 15.16, že hmotnost, která proteče každou sekundu průřezem trubice v okolí bodu B, musí být stejná jako hmotnost, která proteče každou sekundu průřezem trubice v okolí bodu C.

* S výjimkou míst, kde kapalina stojí. Tam je $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ a směr rychlosti není určen.

KONTROLA 3: Na připojeném obrázku je znázorněno rozvětvené potrubí. Šipkami je označen směr toku v jednotlivých větvích a čísla udávají velikost objemového toku (v $\mathrm{cm^3 \cdot s^{-1}}$) těmito větvemi. U jedné větve údaje chybí. Jaký je směr a velikost toku touto větví?



PŘÍKLAD 15.7

Obsah S_0 průřezu aorty (hlavní cévy vycházející ze srdce) normálního odpočívajícího člověka je 3 $\mathrm{cm^2}$ a rychlost, jakou jí prochází krev, je 30 $\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$. Typická vlásečnice (nejtenčí céva na periferii krevního oběhu) má průměr přibližně 6 μm a obsah průřezu je tedy asi $S = 3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{cm^2}$; rychlost proudění krve v ní je $v = 0{,}05\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$. Kolik přibližně má člověk vlásečnic?

ŘEŠENÍ: Veškerá krev, která za určitou dobu proteče vlásečnicemi, musí za stejnou dobu protéci aortou. Tuto skutečnost vystihuje rov. (15.13), takže

$$S_0 v_0 = n S v,$$

kde n značí hledaný počet vlásečnic. Vypočteme jej z poslední rovnice:

$$n = \frac{S_0 v_0}{S v} = \frac{(3\ \mathrm{cm^2})(30\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}})}{(3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{cm^2})(0{,}05\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}})} =$$
$$= 6 \cdot 10^9; \quad \text{tedy 6 miliard.} \qquad \text{(Odpověď)}$$

Můžete lehce ukázat, že úhrnný průřez všech vlásečnic je asi 600krát větší než průřez aorty.

PŘÍKLAD 15.8

Na obr. 15.18 je zobrazeno, jak se zužuje proud vody vytékající laminárně z vodovodního kohoutku. Obsah průřezu $S_0 = 1{,}2\ \mathrm{cm^2}$ a $S = 0{,}35\ \mathrm{cm^2}$. Průřezy jsou vodorovně vzdáleny o $h = 45$ mm. Jaký je objemový tok R proudu vytékajícího z kohoutku?

ŘEŠENÍ: Z rovnice kontinuity (15.13) plyne

$$S_0 v_0 = S v, \qquad (15.14)$$

kde v_0 a v jsou rychlosti v odpovídajících průřezech. Protože voda mezi oběma průřezy se pohybuje volným pádem se zrychlením g, můžeme dle rov. (2.23) psát

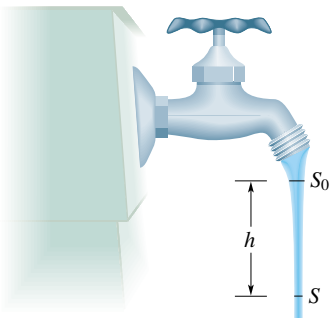
$$v^2 = v_0^2 + 2gh. \qquad (15.15)$$

Řešením soustavy posledních dvou rovnic dostaneme pro v_0 vyjádření

$$v_0 = \sqrt{\frac{2ghS^2}{S_0^2 - S^2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{2(9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}})(0{,}045\ \mathrm{m})(0{,}35\ \mathrm{cm^2})^2}{(1{,}2\ \mathrm{cm^2})^2 - (0{,}35\ \mathrm{cm^2})^2}} =$$
$$= 0{,}286\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 28{,}6\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}.$$

Hledaný objemový tok R je tedy

$$R = S_0 v_0 = (1{,}2\ \mathrm{cm^2})(28{,}6\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}) =$$
$$= 34\ \mathrm{cm^3 \cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 15.18 Příklad 15.8. Když proud vody opustí kohoutek, roste jeho rychlost. Protože množství vody proteklé každým průřezem musí být stejné, bude se proud po výtoku z kohoutku zužovat, „zaškrcuje se".

15.10 BERNOULLIOVA ROVNICE

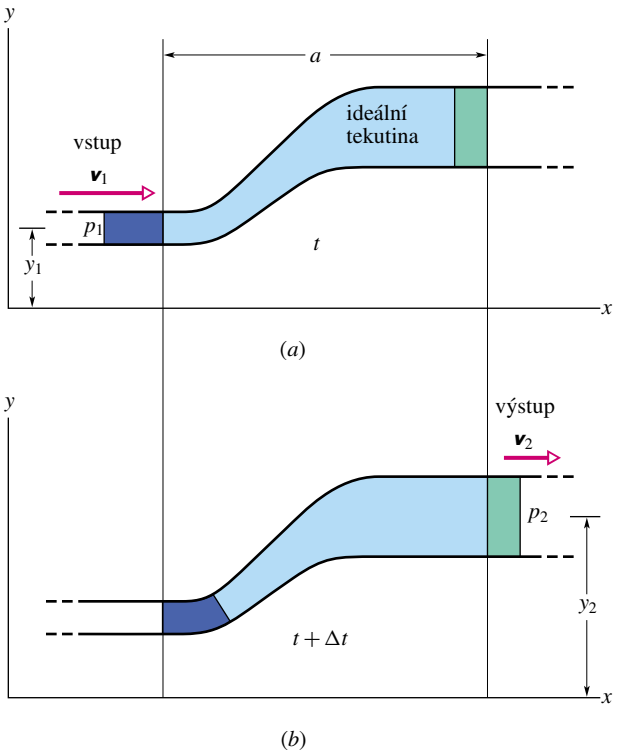
Na obr. 15.19 je znázorněna proudová trubice (může to však být i reálná trubice), kterou stacionárně proudí tekutina. Za časový interval Δt vstoupí do trubice na levé (vstupní) straně objem tekutiny ΔV, který je na obr. 15.19 vybarven purpurově, a stejný objem, vybarvený zeleně na obr. 15.19, na pravé (výstupní) straně trubici opustí. Výstupní objem musí být stejný jako vstupní, protože předpokládáme, že tekutina je nestlačitelná, že tedy má konstantní hustotu ϱ.

Nechť y_1, v_1 a p_1 jsou výška v tíhovém poli, rychlost a tlak tekutiny v místě, kde vstupuje do trubice a y_2, v_2 a p_2 tytéž veličiny v místě, kde tekutina trubici opustí. Tyto hodnoty jsou vázány vztahem

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\varrho {v_1}^2 + \varrho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\varrho {v_2}^2 + \varrho g y_2, \qquad (15.16)$$

jak dále dokážeme na základě energetických úvah. Rovnici (15.16) můžeme též zapsat jako

$$p + \tfrac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g y = \text{konst.}, \qquad (15.17)$$



Obr. 15.19 Tekutina teče stacionárně trubicí mezi vstupním průřezem na levé straně a výstupním průřezem na pravé straně. Průřezy jsou horizontálně vzdáleny o délku a. V době mezi okamžikem t (stav znázorněn v části (a) obrázku) a okamžikem $t + \Delta t$ (stav znázorněn v části (b) obrázku) množství tekutiny vybarvené purpurově projde vstupním průřezem do trubice a stejné množství vybarvené zeleně projde výstupním průřezem.

čímž rozumíme, že výraz má stejnou hodnotu pro libovolný průřez trubice.

Rov. (15.16) a (15.17) jsou ekvivalentní formy **Bernoulliovy rovnice** nazvané po Danielu Bernoulliovi, který studoval proudění tekutin v 18. století.* Podobně jako rovnice kontinuity (rov. (15.13)), ani Bernoulliova rovnice není úplně novým principem, ale je pouze přeformulováním známých rovnic do tvaru vhodného pro mechaniku tekutin. Abychom si rovnici ověřili, aplikujeme ji na tekutinu v klidu. Položíme tedy v rov. (15.16) $v_1 = v_2 = 0$ a dostaneme

$$p_2 = p_1 + \varrho g(y_1 - y_2),$$

což je ze statiky tekutin známá rov. (15.4).

* V nevírovém (potenciálovém) proudění má konstanta v rov. (15.17) stejnou hodnotu ve všech bodech uvažovaného proudícího systému; body 1 a 2 srovnávané při formulaci Bernoulliovy rovnice dané rov. (15.16) mohou být kdekoliv v proudícím systému. Předpoklad, že proudění je nevírové, je však velmi silný a často (např. v řadě dále řešených příkladů) nebývá splněn. I ve vírovém proudění však Bernoulliova rovnice platí, ale pouze podél proudnice.

Základní tvrzení Bernoulliovy rovnice se ukáže, když položíme y rovno konstantě (např. $y = 0$), tedy když předpokládáme, že tekutina teče vodorovně. Rov. (15.16) pak přejde na tvar

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\varrho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\varrho v_2^2, \qquad (15.18)$$

který říká:

Když při proudění po vodorovné proudnici vzrůstá rychlost částic tekutiny, pak klesá tlak tekutiny, a obráceně.

Jinými slovy, když se při proudění dostanou proudnice blízko k sobě (známka toho, že rychlost proudění vzrostla), tlak poklesne, a naopak.

Vztah mezi změnou rychlosti a změnou tlaku se objasní, sledujeme-li chování částice tekutiny. Když se částice přiblíží úzkému místu trubice, zrychlí ji větší tlak za ní, takže má v úžině větší rychlost. Když se přiblíží širšímu místu trubice, zbrzdí ji vyšší tlak před ní a širším místem pak prochází menší rychlostí.

Zatím jsme se zabývali jen ideální tekutinou. Je-li tekutina viskózní, zahřívá se. S touto energetickou ztrátou při následujícím odvození rovnice nepočítáme.

Odvození Bernoulliovy rovnice

Za systém zvolíme celý objem (ideální) tekutiny barevně vyznačený na obr. 15.19. Aplikujeme energetické úvahy na přechod tohoto systému z výchozí polohy (obr. 15.19a) do polohy koncové (obr. 15.19b). Stav tekutiny mezi dvěma svislými rovinami vzdálenými o a, znázorněnými na obr. 15.19, se v průběhu děje nemění. Proto se soustředíme pouze na průběh vstupu tekutiny do trubice a výstupu z ní.

Vlastní důkaz provedeme tak, že na systém aplikujeme obecnou větu

$$W = \Delta E_k, \qquad (15.19)$$

která říká, že práce W vykonaná na systém se rovná přírůstku kinetické energie systému ΔE_k. Přírůstek kinetické energie našeho systému mezi dvěma stavy znázorněnými na obr. 15.19 je dán rozdílem rychlosti tekutiny mezi oběma konci uvažované trubice:

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}\Delta m\, v_2^2 - \tfrac{1}{2}\Delta m\, v_1^2 = \\ = \tfrac{1}{2}\varrho \Delta V (v_2^2 - v_1^2). \qquad (15.20)$$

V poslední rovnici Δm $(= \varrho \Delta V)$ je hmotnost stejných objemů ΔV tekutiny, které za krátký časový interval Δt vstoupí do trubice u jejího levého konce a vystoupí z ní u pravého konce.

Práce vykonaná na systému je dvojího druhu. Jednak je to práce W_g tíhové síly $\Delta m\,\boldsymbol{g}$, která se musí vynaložit na přemístění hmotnosti Δm ze vstupní hladiny na výstupní hladinu, tedy práce

$$W_g = -\Delta m\, g(y_2 - y_1) = \\ = -\varrho g \Delta V (y_2 - y_1). \qquad (15.21)$$

Záporné znaménko před pravou stranou rovnice plyne ze skutečnosti, že tíhové zrychlení míří na opačnou stranu než kladná orientace osy y.

Vedle práce W_g se však koná i práce W_p na to, aby se tekutina u levého konce zatlačila do trubice a u pravého konce vystoupila z trubice. Obecně je práce vykonaná silou o velikosti F, která posune tekutinu v trubici o Δx ve směru svého působení, dána výrazem

$$F\Delta x = (pS)(\Delta x) = p(S\Delta x) = p\Delta V.$$

U vstupu do trubice směřuje síla ve směru pohybu a příspěvek $p_1\Delta V$ k práci W_p je kladný. U výstupu z trubice je posunutí Δx orientováno proti směru působící síly, a proto příspěvek k práci W_p vykonané na systém je záporný: $-p_2\Delta V$. Sečtením obou příspěvků dostaneme pro práci, vykonanou na našem systému okolním tlakem, vyjádření

$$W_p = -p_2\Delta V + p_1\Delta V = \\ = -(p_2 - p_1)\Delta V. \qquad (15.22)$$

Větu o rovnosti práce vykonané na systém a přírůstku kinetické energie systému (rov. (15.19)) nyní zapíšeme již s naším vyjádřením této práce

$$W = W_g + W_p = \Delta E_k.$$

Když nyní do této rovnice dosadíme z rov. (15.20), (15.21) a (15.22), dostaneme

$$-\varrho g \Delta V (y_2 - y_1) - \Delta V (p_2 - p_1) = \tfrac{1}{2}\varrho \Delta V (v_2^2 - v_1^2).$$

Tato rovnice po vykrácení výrazem ΔV a jednoduchém přeskupení členů dá již rov. (15.16).

PŘÍKLAD 15.9

Líh hustoty $\varrho = 791\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ teče laminárně vodorovnou trubicí, která se zužuje (podobně jako na obr. 15.17) z průřezu obsahu $S_1 = 1{,}20{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m^2}$ na průřez o obsahu $S_2 = S_1/2$. Rozdíl Δp tlaku lihu mezi širokou a úzkou částí trubice je 4 120 Pa. Jaký je objemový tok lihu trubicí?

ŘEŠENÍ: Když přeskupíme Bernoulliovu rovnici pro tok vodorovnou trubicí (rov. (15.18)), dostaneme

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}\varrho v_2^2 - \tfrac{1}{2}\varrho v_1^2 = \tfrac{1}{2}\varrho(v_2^2 - v_1^2). \qquad (15.23)$$

Index 1 se vztahuje k široké a index 2 k úzké části trubice. Podle rovnice kontinuity (rov. (15.13)) tok v úzké části trubice je rychlejší, tedy $v_2 > v_1$. Z rov. (15.23) potom plyne, že $p_1 > p_2$.

Z rov. (15.13) také plyne, že objemový tok R trubicí je stejný v široké i úzké části;

$$R = v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Tyto rovnice spolu s rovnicí $S_2 = S_1/2$ dávají

$$v_1 = \frac{R}{S_1} \quad \text{a} \quad v_2 = \frac{R}{S_2} = \frac{2R}{S_1}.$$

Když tyto poslední výrazy dosadíme do rov. (15.23) a položíme $p_1 - p_2 = \Delta p$, dostaneme po drobných algebraických úpravách

$$\Delta p = \frac{1}{2}\varrho\left(\frac{4R^2}{S_1^2} - \frac{R^2}{S_1^2}\right) = \frac{3\varrho R^2}{2S_1^2}.$$

Z poslední rovnice pak vypočteme R,

$$R = S_1\sqrt{\frac{2\Delta p}{3\varrho}} = \\ = (1{,}20{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m^2})\sqrt{\frac{2(4\,120\,\mathrm{Pa})}{3(791\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}})}} = \\ = 2{,}24{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 15.10

Desperát z Divokého západu vpálil kulku do otevřené nádrže s vodou a provrtal v ní otvor v hloubce h pod volnou hladinou vody (obr. 15.20). Jakou rychlostí v začne voda vytékat z prostřelené nádrže?

ŘEŠENÍ: Případ je v podstatě stejný, jako když voda nejprve teče (dolů) rychlostí V širokou trubicí (celou nádrží) o obsahu průřezu S a potom teče (vodorovně) rychlostí v úzkou trubicí (vystřeleným otvorem) o obsahu průřezu s. Z rovnice kontinuity (15.13) víme, že

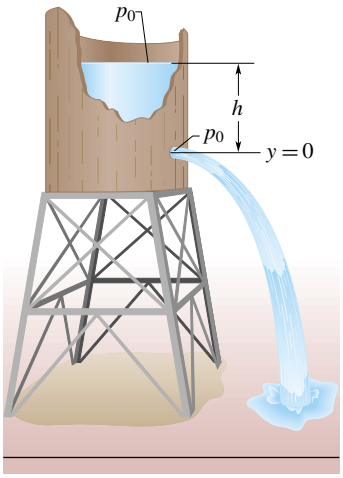
$$R = sv = SV,$$

a tedy

$$V = \frac{s}{S}v.$$

Protože $s \ll S$, vidíme, že $V \ll v$.

Vztah mezi v a V (a tedy i h) můžeme nalézt i použitím Bernoulliovy rovnice (15.16). Za nulovou hladinu pro počítání výšky (a tím i potenciální energie v tíhovém poli) zvolíme hladinu procházející prostřeleným otvorem. Když uvážíme,



Obr. 15.20 Příklad 15.10. Voda vytéká dírou v nádrži, která je v hloubce h pod povrchem (volnou hladinou) vody. Tlak vody na povrchu a v díře je roven atmosférickému tlaku p_0.

že jak tlak na volné hladině nádrže, tak i tlak v místě prostřeleného otvoru jsou rovny atmosférickému tlaku p_0 (obě místa jsou tomuto tlaku volně vystavena), dostaneme z rov. (15.16)

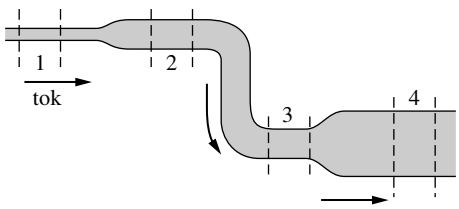
$$p_0 + \tfrac{1}{2}\varrho V^2 + \varrho g h = p_0 + \tfrac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g \cdot 0. \quad (15.24)$$

(Podmínkám na volné hladině nádrže je věnována levá strana rovnice, podmínkám v otvoru pravá strana. Nula na konci pravé strany odpovídá tomu, že otvor leží na námi zvolené nulové hladině.) Než budeme řešit rov. (15.24) pro neznámou v, použijeme pro její zjednodušení skutečnost, že $V \ll v$. Budeme předpokládat, že V^2 a tedy i člen $\frac{1}{2}\varrho V^2$ z rov. (15.24) je zanedbatelný proti ostatním členům rovnice a vypustíme jej. Řešením zbývající části rovnice pak pro hledanou rychlost dostaneme výraz

$$v = \sqrt{2gh}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Je to stejná rychlost, jakou by získalo těleso padající z výšky h, kdyby bylo vypuštěno nulovou počáteční rychlostí.

KONTROLA 4: Voda teče laminárně trubicí znázorněnou na připojeném obrázku. V průběhu tečení klesá. Seřaďte sestupně čtyři očíslované úseky trubice: (a) podle objemového toku R, který jimi prochází, (b) podle rychlosti v, jakou jimi voda teče, (c) podle tlaku p, jaký v nich je.



PŘEHLED & SHRNUTÍ

Hustota

Hustota ϱ látky je definována jako její hmotnost v jednotce objemu:

$$\varrho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (15.1)$$

Je-li těleso tvořeno látkou homogenní, můžeme rov. (15.1) přepsat na tvar $\varrho = m/V$, kde m je hmotnost tělesa a V jeho objem.

Tlak tekutiny

Tekutina je látka, která může téci: kapalina, plyn, event. i plazma. Její tvar je dán tvarem nádoby, ve které se nachází, protože nepřenáší smykové napětí (přesně to platí jen pro ideální tekutinu). Napětí tedy může působit jen silou kolmou k povrchu kapaliny. *Tlak* p v tekutině zavádíme takto:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}, \quad (15.2)$$

kde ΔF je element síly, který působí na element plochy o obsahu ΔS. Když velikost síly působící na rovinnou plochu roste úměrně s velikostí plochy, můžeme rov. (15.2) upravit na tvar $p = F/S$, kde F je síla působící na celou plochu, jejíž obsah je S. Tlak tekutiny v daném bodě vytváří stejné silové působení na všechny roviny procházející tímto bodem bez ohledu na jejich orientaci. *Přetlak* (resp. podtlak) je rozdíl skutečného tlaku (*absolutního tlaku*) v daném bodě a tlaku v okolí, nejčastěji atmosférického tlaku.

Změny tlaku s výškou a hloubkou

Tlak tekutiny, která je v klidu, se mění podél svislé souřadnice y. Když je souřadnice orientována směrem vzhůru, platí pro nestlačitelné tekutiny (ϱ = konst.)

$$p_2 = p_1 + \varrho g(y_1 - y_2). \quad (15.4)$$

Tlak je stejný pro všechny body ve stejné hloubce. Rov. (15.4) přejde na tvar

$$p = p_0 + \varrho g h, \quad (15.5)$$

když h označíme *hloubku* v tekutině měřenou od jisté referenční hladiny, v níž má tlak hodnotu p_0.

Pascalův zákon

Pascalův zákon stanoví, že změna tlaku působící v jedné části tekutiny se přenese do všech míst vyplněných touto tekutinou a to i na stěny nádoby, která tekutinu vymezuje.

Archimedův zákon

Na těleso ponořené do tekutiny působí síly vyvolané tlakem tekutiny. Vektorový součet těchto sil — říká se mu *vztlaková síla* nebo stručně *vztlak* — působí svisle vzhůru. Působištěm vztlakové síly je těžiště vytlačené tekutiny, které se nazývá *vztlakový střed*. Archimedův zákon stanoví, že vztlaková síla působící na těleso je stejně velká jako tíhová síla tekutiny tělesem vytlačené. Když těleso plove na volné hladině, je jeho tíhová síla co do velikosti rovna vztlakové síle, která na něj působí.

Proudění ideální tekutiny

Ideální kapalina je nestlačitelná a není viskózní. Předpokládáme navíc, že její proudění je stacionární a nevírové. *Proudnice* je dráha částice tekutiny. Proudová trubice obaluje svazek proudnic. Z principu zachování hmotnosti plyne, že pro proudění v proudové trubici je *hmotnostní tok* $S v \varrho$ konstantní. Je-li navíc kapalina nestlačitelná, tedy je-li hustota ϱ konstantní, platí *rovnice kontinuity*:

$$R = Sv = \text{konst.}, \tag{15.13}$$

kde R je *objemový tok*, S obsah příčného průřezu trubice v libovolném bodě a v rychlost tekutiny v tomto bodě. Předpokládáme, že tato rychlost má stejnou hodnotu v každém bodě plochy S.

Bernoulliova rovnice

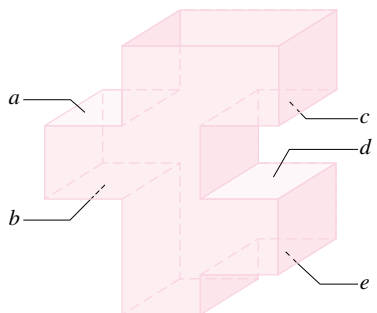
Použijeme-li zákon zachování mechanické energie na proudění ideální kapaliny, získáme *Bernoulliovu rovnici*:

$$p + \tfrac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g y = \text{konst.}, \tag{15.17}$$

která platí podél každé proudnice.

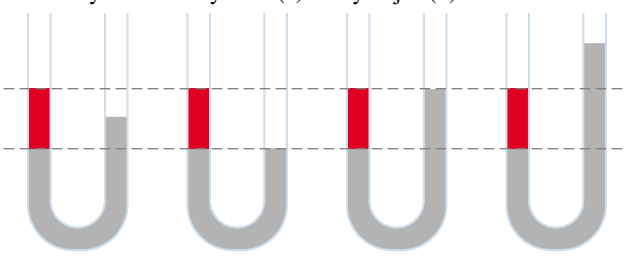
OTÁZKY

1. Na obr. 15.21 je zobrazena nádrž zvláštního tvaru zcela zaplněná vodou. Je označeno pět vodorovných spodních nebo vrchních ploch. Obsah všech je stejný a jsou umístěny v hloubkách h, $2h$ a $3h$ pod hladinou. Seřaďte plochy podle velikosti síly, která na ně působí.



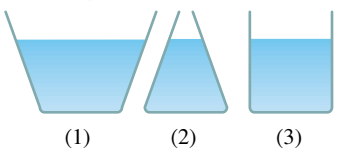
Obr. 15.21 Otázka 1

2. Na obr. 15.22 jsou znázorněny čtyři případy, jak červená a šedivá kapalina vyplňují U-trubici. V jednom případě nemůže jít o staticky rovnovážný stav. (a) Který to je? (b) O třech ostatních případech předpokládejte, že kapaliny jsou ve statické rovnováze. Je v nich vždy hustota některé z kapalin větší než té druhé?



Obr. 15.22 Otázka 2

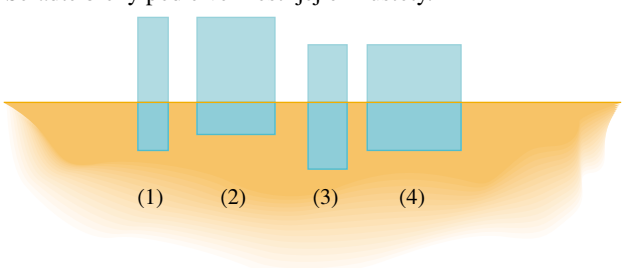
3. Nádoby z obr. 15.23 mají stejný obsah základny, jsou vyrobeny ze stejného materiálu a výška vody v nich je stejná. (a) Seřaďte nádoby s vodou podle jejich váh, nádobu s největší váhou zařaďte jako první. (b) Seřaďte nádoby podle tlaku, jakým voda působí na jejich dna. (c) Plyne z rov. (15.2), že odpovědi na otázky (a) a (b) jsou v rozporu? Tento zdánlivý rozpor se často nazývá **hydrostatický paradox**.



Obr. 15.23 Otázka 3

4. Kus materiálu o hmotnosti 3 kg zcela ponoříme do kapaliny. Kapalina stejného objemu, jako má vnořený kus, má hmotnost 2 kg. (a) Co udělá uvažovaný kus materiálu, když ho v kapalině volně vypustíme: bude klesat, stoupat, nebo zůstane v klidu? (b) Co udělá stejný kus materiálu, když jej ponoříme do kapaliny o menší hustotě?

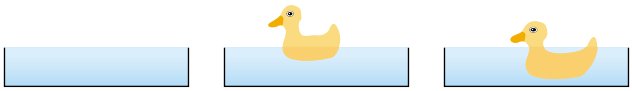
5. Obr. 15.24 zobrazuje čtyři pevné bloky plovoucí na melase. Seřaďte bloky podle velikosti jejich hustoty.



Obr. 15.24 Otázka 5

6. Na obr. 15.25 jsou znázorněny tři stejné otevřené nádoby po

okraj naplněné vodou. Ve dvou z nich plovou kačenky. Nádoby i s kačenkami zvážíme. Seřaďte je podle váhy.



(*a*) (*b*) (*c*)

Obr. 15.25 Otázka 6

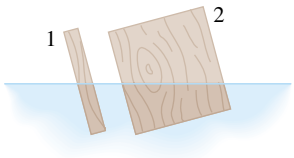
7. Člun s kotvou na palubě pluje v bazénu, který je jen trochu širší než člun. Zvedne se hladina vody v bazénu, když je kotva (a) vhozena do vody, (b) hozena ven z bazénu? (c) Hladina vody v bazénu se zvedne, klesne, nebo zůstane stejná, když místo kotvy vhodíme do vody kus korku, který jsme měli ve člunu?

8. Tři balonky stejné velikosti jsou zcela ponořeny do vody. Balonek 1 je naplněn vodíkem, balonek 2 heliem a balonek 3 oxidem uhličitým. Seřaďte balonky podle velikosti vztlaku, který na ně působí.

9. Kus dřeva pluje ve vědru vody umístěném ve výtahu. Bude plout více, méně, nebo stejně ponořen, když se výtah pohybuje (a) rovnoměrně vzhůru, (b) rovnoměrně dolů; (c) zrychleně vzhůru, (d) zrychleně dolů, se zrychlením menším, než je tíhové zrychlení 9,8 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

10. Nádoba s vodou je umístěna na pérových vahách. Bude údaj vah větší, menší, nebo stejný, když do vody (a) ponoříme zavěšený kovový předmět, (b) vložíme korkový předmět, který na ní bude plovat? (Z nádoby nepřeteče žádná voda ven.)

11. Na obr. 15.26 jsou dva pravoúhlé bloky, které jsme rukou vychýlili z rovnovážné polohy a potom pustili. Pro každý blok stanovte, zda (a) vztlaková síla vyvolá jeho otáčení z naznačené polohy ve směru, či proti směru hodinových ručiček, (b) blok se působením této síly ještě více vychýlí, nebo se narovná.



Obr. 15.26 Otázka 11

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 15.3 Hustota a tlak

1C. Kolik činí hustota 1 $\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$, vyjádříme-li ji v jednotkách $\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$?

2C. Tři kapaliny, které se nemísí, byly nality do válcové nádoby. Objemy a hustoty těchto kapalin jsou: 0,50 l, 2,6 $\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$; 0,25 l, 1,0 $\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ a 0,40 l, 0,80 $\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. Jakou silou kapaliny působí na dno nádoby? (Jeden litr = 1 l = 1 000 $\mathrm{cm^3}$.)

3C. Určete tlak v injekční stříkačce, když sestra zatlačí na kruhový píst o poloměru 1,1 cm silou 42 N.

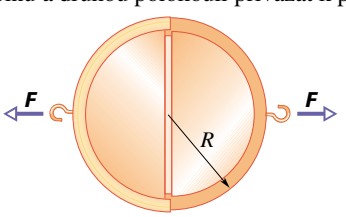
4C. Angličan řekne, že nafoukl přední pneumatiky svého auta na tlak 28 psi. Lékař řekne, že váš krevní tlak je 120/80 milimetrů rtuťového sloupce. Udejte v kilopascalech (kPa): (a) tlak, na který byly nafouknuty pneumatiky, (b) svůj systolický a diastolický tlak.

5C. Okno má rozměry 3,4 m na 2,1 m. Při závanu větru poklesl vnější tlak na 0,96 atm, zatímco tlak uvnitř místnosti zůstal na hodnotě 1 atm. Jaká byla síla, která způsobila, že okno se rozletělo směrem ven?

6C. Ryba reguluje hloubku plavání nastavením své průměrné hustoty na hodnotu stejnou, jakou má voda. Provádí to změnou objemu vzduchu v porézních kostech nebo ve vzduchovém měchýři. Předpokládejte, že s vyfouknutým měchýřem má ryba hustotu 1 $\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. O jakou část svého koncového (nafouknutého) objemu musí ryba zvětšit objem vzduchového měchýře, aby vyrovnala svou hustotu na hustotu vody?

7Ú. Vzduchotěsná nádoba má uzávěr o obsahu 100 $\mathrm{cm^2}$. Nádoba je částečně vyčerpána. Jaký je v ní tlak, je-li na její otevření potřeba síla nejméně 500 N? Okolní atmosféra má tlak $1{\cdot}10^5$ Pa.

8Ú. Magdeburské polokoule. Vynálezce vývěvy Otto von Guericke provedl v roce 1654 před císařem pokus, při kterém se dvě koňská osmispřeží marně snažila od sebe oddělit dvě mosazné polokoule, z jejichž vnitřního prostoru byl vyčerpán vzduch. (a) Ukažte, že síla F potřebná k odtržení polokoulí je rovna $F = \pi R^2 \Delta p$, kde Δp je rozdíl mezi vnějším tlakem a tlakem uvnitř polokoulí. Předpokládejte, že tloušťka mosazi je tak malá, že za poloměr R můžeme pokládat poloměr vyznačený na obr. 15.27. (b) Vypočtěte sílu, jakou by koně museli táhnout, aby polokoule odtrhli,*kdyby R bylo 30 cm a vnitřní tlak by byl 0,1 atm. (c) Proč byly užity dvě skupiny koní? Stačilo by použít jen jednu skupinu a druhou polokouli přivázat k pevné stěně?



Obr. 15.27 Úloha 8

* To se také stalo, ale až tehdy, když zapřáhli dvě koňská dvanáctispřeží.

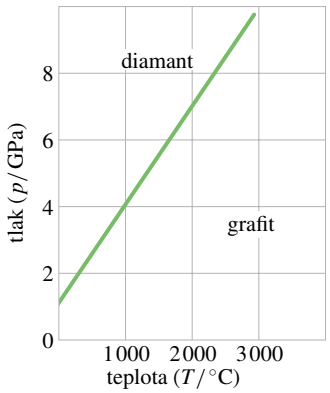
ODST. 15.4 Tekutiny v klidu — statika

9C. Vypočtěte rozdíl hydrostatického tlaku mezi mozkem a chodidlem osoby vysoké 1,83 m. Hustota krve je $1{,}06{\cdot}10^3\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

10C. Najděte absolutní tlak v pascalech v hloubce 150 m pod mořskou hladinou. Hustota mořské vody je $1{,}03\ \mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ a atmosférický tlak na hladině $1{,}01{\cdot}10^5$ Pa.

11C. Výpusť splašků domu stojícího na svahu je 8,2 m pod úrovní ulice. Stoka je 2,1 m pod úrovní ulice. Vypočtěte minimální tlakový rozdíl, který musí vyvinout kalové čerpadlo, aby odpad o průměrné hustotě $900\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ přečerpalo do stoky.

12C. Obr. 15.28 představuje část **fázového diagramu** uhlíku s křivkou fázové rovnováhy mezi diamantem a grafitem. V jaké minimální hloubce pod povrchem Země se mohou tvořit diamanty, je-li teplota v této hloubce 1 000 °C a hustota skalního nadloží je $3{,}1\ \mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$? Předpokládejte, že i v tomto případě je tlak dán tíhou hornin, které leží nad daným místem, podobně jako v tekutině.



Obr. 15.28 Cvičení 12

13C. Lidské plíce vyvinou přetlak nanejvýš dvacetinu atmosféry. Když potápěč užívá sací trubky, jak nejhlouběji pod hladinou může plavat?

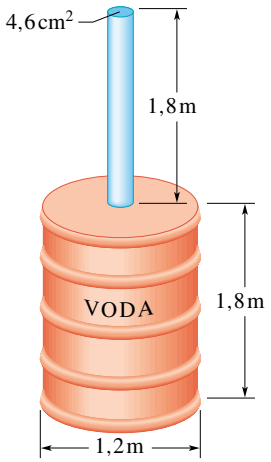
14C. Bazén má rozměry 40 m × 15 m × 4 m. (a) Jakou silou působí voda vyplňující bazén na jeho dno, na kratší boční stěny a na delší boční stěny? (b) Musí se uvažovat také atmosférický tlak působící na hladinu, když posuzujeme vliv tlaku na soudržnost betonu tvořícího dno a stěny bazénu? Proč?

15C. (a) Najděte celkovou sílu, kterou voda působí na vrchní část atomové ponorky v hloubce 200 m, když předpokládáme, že celková plocha vrchní části trupu ponorky je $3\,000\ \mathrm{m^2}$. (b) Jaký tlak vody by působil na potápěče v této hloubce? Výsledek vyjádřete v atmosférách. Myslíte si, že posádka havarované ponorky z ní může v této hloubce uniknout bez speciálního vybavení? Hustotu mořské vody pokládejte za rovnu $1{,}03\ \mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$.

16C. Členové posádky ponorky, která havarovala 100 m pod vodní hladinou, se z ní pokoušejí uniknout. Jakou silou musí tlačit na výstupní poklop, aby ho otevřeli, když jeho rozměry jsou 1,2 m × 0,60 m? Hustotu mořské vody pokládejte nyní za rovnu $1\,025\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

17C. V otevřeném kapalinovém manometru (v U-trubici) je rtuť. Jak vysoko vystoupí rtuť v levé trubici, když do pravé trubice je nalito 11,2 cm vody?

18C. Válcový kovový sud zobrazený na obr. 15.29 má ke své vrchní základně přitavenu tenkou trubku. Rozměry sudu a trubky jsou uvedeny na obrázku. Vzniklá nádoba je až po vršek trubky naplněna vodou. Vypočtěte poměr síly, kterou voda působí na dno sudu, k tíze vody obsažené v sudu. Proč vypočtený poměr není roven jedné?



Obr. 15.29 Cvičení 18

19Ú. Dvě stejné válcové nádoby jsou vedle sebe postaveny tak, že jejich dna jsou ve stejné výši. Obě obsahují stejnou kapalinu, jejíž hustota je ϱ. Obě dna mají obsah S, výšky kapalin jsou však různé: v jedné nádobě h_1, v druhé h_2. Jakou práci vykoná tíhová síla, když po propojení obou nádob se v nich výšky kapalin vyrovnají?

20Ú. (a) Kapalina v nádobě se pohybuje se zrychlením a mířícím *svisle vzhůru*. Ukažte, že v tomto případě tlak s hloubkou h v nádobě stoupá dle zákona

$$p = \varrho h(g + a),$$

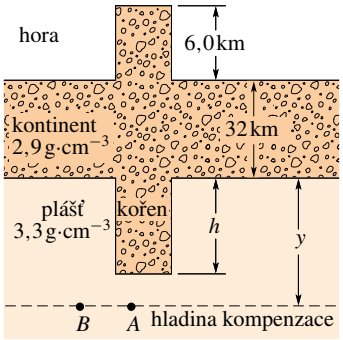
kde ϱ je hustota kapaliny. (b) Ukažte též, že když se nádoba pohybuje se zrychlením a mířícím *svisle dolů*, je závislost tlaku na hloubce dána výrazem

$$p = \varrho h(g - a).$$

(c) Jaký je tlak, když voda s nádobou padají volným pádem?

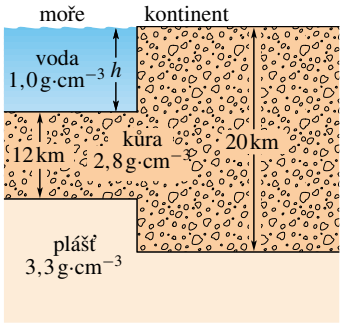
21Ú. Při geologickém rozboru Země je často účelné předpokládat, že tlak v určité vodorovné **hladině kompenzace**, která se nachází hluboko pod zemským povrchem, je ve velké oblasti stálý a rovná se tlaku vyvolanému tíhou nadložních vrstev. To znamená, že tlak v této hladině se vypočítá podle hydrostatické rovnice platné pro tekutiny. Pro splnění takového modelu musíme např. předpokládat, že hory mají své *kořeny* (obr. 15.30). Uvažujme horu vysokou 6 km. Kontinentální horniny mají hustotu $2{,}9\ \mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ a pod nimi je zemský plášť s hustotou $3{,}3\ \mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$.

Vypočtěte hloubku h kořene hory. (*Tip*: Požadujte, aby tlak v bodech A a B vyznačených na obrázku byl stejný; neznámá hloubka y hladiny kompenzace vám vypadne.)



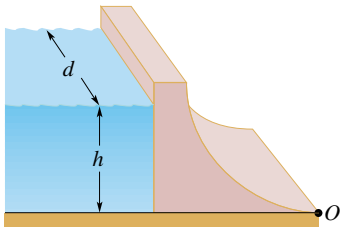
Obr. 15.30 Úloha 21

22Ú. Na obr. 15.31 je naznačeno, jak se oceán nasouvá na kontinent. Užijte metodu hladiny kompenzace vysvětlenou v úloze 21 k výpočtu hloubky h oceánu.



Obr. 15.31 Úloha 22

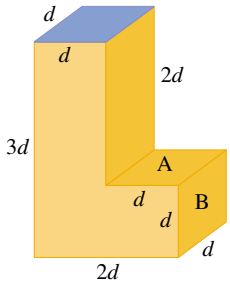
23Ú. Přehradou je zadržena masa vody, která v místě přehradní hráze má hloubku h a šířku d, jak je znázorněno na obr. 15.32. (a) Vypočtěte výslednou sílu, kterou voda působí na hráz přehrady. (b) Vypočtěte výsledný moment sil vůči ose proložené rovnoběžně se šířkou d bodem O, který leží v patě přehrady. (c) Najděte působiště výsledné síly působící na přehradní hráz, a tím i rameno této síly vůči ose procházející bodem O.



Obr. 15.32 Úloha 23

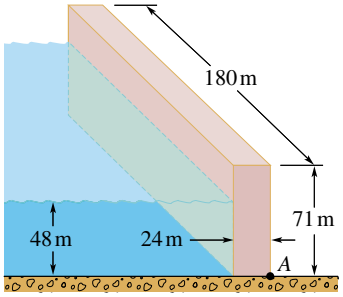
24Ú. Nahoře otevřená nádrž tvaru písmene L je naplněna vodou (obr. 15.33). Jaká je (a) síla na stěnu A a (b) síla na stěnu B, když $d = 5\,\mathrm{m}$?

25Ú. Na obr. 15.34 je znázorněna přehradní hráz a část zachycené vody, která na ni tlačí. Přehradní hráz je z betonu hustoty



Obr. 15.33 Úloha 24

$3{,}2\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ a má rozměry ukázané na obrázku. (a) Síla, kterou voda tlačí na přehradní hráz, se snaží hráz posunout vodorovným směrem. Proti posunutí působí síla statického smykového tření mezi hrází a podložím. Statický činitel tření je 0,47. Vypočtěte bezpečnostní činitel, jaký má přehrada proti posunutí. Bezpečnostní činitel je poměr uvažovaného havarijního zatížení k nejvyššímu reálně odhadnutému zatížení; v našem případě je to poměr maximální statické třecí síly (tíhy hráze × statický činitel tření) k velikosti síly, kterou na hráz působí voda. (b) Voda se též snaží otočit přehradní hráz okolo osy, která prochází bodem A a postupuje podél základny hráze (srovnej s úlohou 23). Proti tomu působí moment tíhy přehrady okolo uvažované osy. Vypočtěte bezpečnostní činitel proti otočení přehrady, tedy poměr velikosti momentu tíhy přehrady k velikosti momentu síly, kterým vůči uvažované ose působí celková síla na přehradní hráz vyvolaná vodou, umístěná ve svém působišti.



Obr. 15.34 Úloha 25

ODST. 15.5 Měření tlaku

26C. Vypočtěte výšku sloupce vody, na jehož základně bude tlak 1 atm. Tíhové zrychlení $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

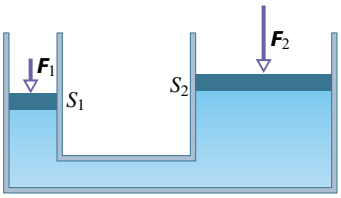
27C. Jaký minimální podtlak musíte vytvořit v plicích, abyste brčkem nasáli limonádu o hustotě $1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ do výšky 4 cm?

28Ú. Jaká by byla výška atmosféry, kdybychom předpokládali: (a) že hustota atmosféry se s výškou nemění, (b) že hustota klesá s výškou lineárně, dokud nedosáhne nulové hodnoty. Hustota atmosféry u hladiny moře $\varrho = 1{,}3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

ODST. 15.6 Pascalův zákon

29C. V hydraulickém lisu (obr. 15.35) se pístem o malé ploše s obsahem S_1 působí na kapalinu silou F_1. Spojovací trubka

vede kapalinu k pístu o podstatně větším obsahu S_2. (a) Jak velká síla F_2 působí na větší píst? (b) Jak velká síla F_1 působící na malý píst vyváží na velkém pístu tíhu předmětu o hmotnosti 2 tuny, když malý píst má průměr 4 cm a velký 56 cm?



Obr. 15.35 Cvičení 29 a 30

30C. Jak velkou dráhu musí urazit velký píst hydraulického lisu ze cvič. 29, aby se jeho malý píst posunul o 1 m?

ODST. 15.7 Archimedův zákon

31C. Plechovka má celkový objem 1 200 cm^3 a hmotnost 130 g. Kolik gramů olověných broků může plechovka nést, aniž se ve vodě potopí? Hustota olova je 11,4 $g \cdot cm^{-3}$.

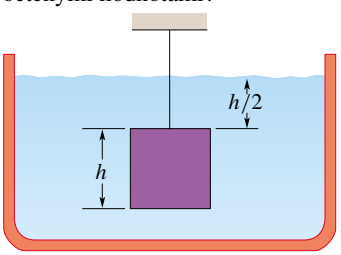
32C. Člun plující ve sladké vodě vytlačí 4 000 kg vody. (a) Jaká bude hmotnost vytlačené vody, když člun popluje ve slané vodě hustoty 1,03 $g \cdot cm^{-3}$? (b) Změní se objem vytlačené vody? Jestliže ano, tak o kolik?

33C. Přibližně jedna třetina těla fyzika, který plave v Mrtvém moři, je nad hladinou. Fyzik z tohoto údaje vypočte hustotu vody v Mrtvém moři, když předpokládá, že průměrná hustota lidského těla je 0,98 $g \cdot cm^{-3}$. K jakému výsledku došel? (Proč je hustota o tolik větší než 1,0 $g \cdot cm^{-3}$?)

34C. Železná kotva se jeví ve vodě lehčí o 200 N než ve vzduchu. (a) Jaký je její objem? (b) Kolik kotva váží na vzduchu? Hustota železa je 7,870 $g \cdot cm^{-3}$.

35C. Předmět visí na pérových vahách. Na vzduchu ukazují váhy 30 N. Když předmět plně ponoříme do vody, údaj klesne na 20 N. Když jej plně ponoříme do kapaliny neznámé hustoty, váhy ukazují 24 N. Jaká je hustota této kapaliny?

36C. Předmět tvaru krychle o hraně 60 cm působí ve vakuu na závěs silou $G = 5\,000$ N (tíha tělesa). Předmět zavěsíme do otevřené nádrže s kapalinou hustoty 0,8 $g \cdot cm^{-3}$ způsobem naznačeným na obr. 15.36. (a) Vypočtěte celkovou sílu, kterou kapalina a atmosféra působí na vrchní stěnu krychle. (b) Najděte celkovou sílu působící směrem vzhůru na spodní stěnu krychle. (c) Najděte sílu přenášenou závěsem. (d) Vypočtěte z Archimedova zákona vztlakovou sílu působící na předmět. Jaké vztahy platí mezi vypočtenými hodnotami?



Obr. 15.36 Cvičení 36

37C. Dřevěný předmět plove na vodě, přičemž dvě třetiny jeho objemu jsou ponořeny. V oleji plove předmět tak, že 90 % jeho objemu je ponořeno. Stanovte: (a) hustotu dřeva, (b) hustotu oleje.

38C. Bylo navrženo, aby byl zemní plyn ze Severního moře přepravován ve velkých vzducholodích, přičemž plyn sám by sloužil jako nosné medium. Vypočtěte sílu nutnou na stažení takové vzducholodi k zemi, aby ji bylo možno vyložit — získat převážený zemní plyn. Plně naložená vzducholoď obsahuje $1,0 \cdot 10^6$ m^3 zemního plynu hustoty 0,80 $kg \cdot m^{-3}$. Váhu konstrukčních částí vzducholodi lze zanedbat.

39C. Heliem naplněný balon pluje pomalu v nízké výšce. Jeho maximální užitečné zatížení, tj. zatížení posádkou a nákladem, je 1 280 kg. O kolik by se mohlo zvýšit toto užitečné zatížení, kdyby se místo helia pro plnění balonu užil vodík? Objem helia v balonu je 5 000 m^3. Hustota helia je 0,16 $kg \cdot m^{-3}$, hustota vodíku 0,081 $kg \cdot m^{-3}$. (Proč se přesto užívá mnohem dražší helium?)

40C. Heliový balon se užívá k vyzdvižení užitečného zatížení o hmotnosti 40 kg do výšky 27 km, kde hustota vzduchu je 0,035 $kg \cdot m^{-3}$. Konstrukce balonu má hmotnost 15 kg a helium v něm hustotu 0,005 1 $kg \cdot m^{-3}$. Jaký je objem balonu? Objem nákladu zanedbejte.

41Ú. Dutá koule o vnitřním poloměru 8,0 cm a vnějším poloměru 9,0 cm plove napůl ponořena v kapalině hustoty 800 $kg \cdot m^{-3}$. (a) Jaká je hmotnost koule? (b) Vypočtěte hustotu materiálu, z kterého je koule zhotovena.

42Ú. Dutá kulová železná skořepina plove téměř úplně ponořena ve vodě. Vnější průměr koule je 60,0 cm a hustota železa je 7,87 $g \cdot cm^{-3}$. Jaký je vnitřní průměr koule?

43Ú. Železný odlitek, který obsahuje mnoho dutinek, váží 6 000 N na vzduchu a 4 000 N ve vodě. Jaký je celkový objem dutinek v odlitku? Hustota homogenního železa je 7,87 $g \cdot cm^{-3}$.

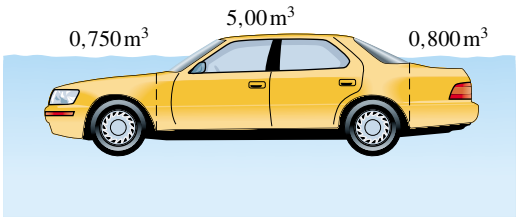
44Ú. (a) Jaká je nejmenší plocha ledové desky tlusté 30 cm plující na sladké vodě, která na sobě udrží automobil hmotnosti 1 100 kg? (b) Záleží na tom, kde na desce automobil stojí?

45Ú. Tři děti — každé o hmotnosti 40 kg — si udělaly vor svázaný z klád. Každá kláda měla průměr 30 cm a délku 6 m. Kolik klád musely děti použít, aby se s nimi vor nepotopil? Hustotu dřeva pokládejte za rovnu 940 $kg \cdot m^{-3}$.

46Ú. Předpokládejte, že hustota mosazných závaží je 8,0 g/cm^3 a hustota vzduchu 0,001 2 g/cm^3. Jaké se dopustíme chyby zanedbáním vztlaku vzduchu, když na rovnoramenných vahách vážíme předmět, který má hmotnost m a hustotu ϱ? Chybu vyjádřete v procentech.

47Ú. Automobil má celkovou hmotnost 1 800 kg. Objem vzduchu v prostoru pro cestující je 5,00 m^3. Objem motoru a předních kol je 0,750 m^3 a objem zadních kol, palivové nádrže a kufru je 0,800 m^3; předpokládejme, že do těchto prostorů voda nepronikne. Automobil parkoval na svahu, lanko ruční brzdy se přetrhlo a vůz sjel ze svahu do rybníka (obr. 15.37). (a) Nejprve žádná voda nevnikla do prostoru pro cestující. Jaký je objem potopené části vozu v této fázi děje, která je zachycena na obrázku? (b) Jak

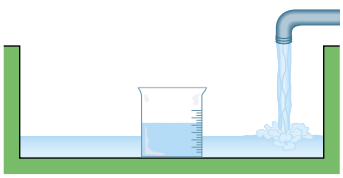
se voda postupně dostává do prostoru pro cestující, automobil klesá. Kolik do něho vnikne vody do okamžiku, kdy automobil zmizí pod hladinou? (Automobil plove vodorovně, protože v kufru má těžký náklad.)



Obr. 15.37 Úloha 47

48Ú. Kus dřeva má hmotnost 3,67 kg a hustotu 600 kg·m^{-3}. Přidáme k němu tolik olova, aby 90 % objemu dřeva bylo potopeno. Jaké množství olova je zapotřebí: (a) když olovo je přidáno na vrchní část dřeva (není potopeno), (b) když olovo je přidáno na spodní část dřeva (je potopeno)? Hustota olova je $1{,}13 \cdot 10^4$ kg·m^{-3}.

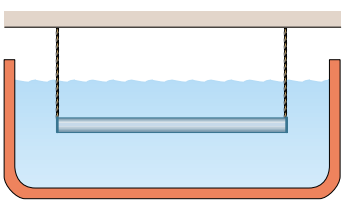
49Ú. Kádinku částečně naplněnou vodou postavíme na dno dřezu (obr. 15.38). Vlastní hmotnost kádinky je 390 g a její vnitřní objem 500 cm^3. Když plníme dřez vodou a kádinka je naplněna méně než z poloviny, začne plovat. Když je kádinka naplněna více, zůstane stát na dně dřezu, a když připouštěná voda dosáhne jejího okraje, nateče do ní. Jaká je hustota materiálu, z kterého je kádinka vyrobena?



Obr. 15.38 Úloha 49

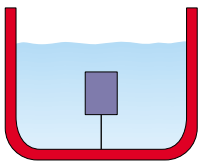
50Ú. Jaké je zrychlení stoupajícího balonu na horký vzduch, když poměr hustoty vzduchu vně balonu k hustotě vzduchu uvnitř balonu je 1,39? Hmotnosti konstrukce balonu a obsazeného koše zanedbejte.

51Ú. Válcová kovová tyč délky 80 cm a hmotnosti 1,6 kg má průřez o obsahu 6,0 cm^2. Těžiště tyče leží 20 cm od jednoho jejího konce, protože hustota tyče není konstantní. Tyč je zavěšena vodorovně na dvou vláknech a ponořena do vody, jak je ukázáno na obr. 15.39. (a) Jaká napěťová síla je přenášena vláknem, které je blíže k těžišti? (b) Jaká napěťová síla je přenášena vzdálenějším vláknem?



Obr. 15.39 Úloha 51

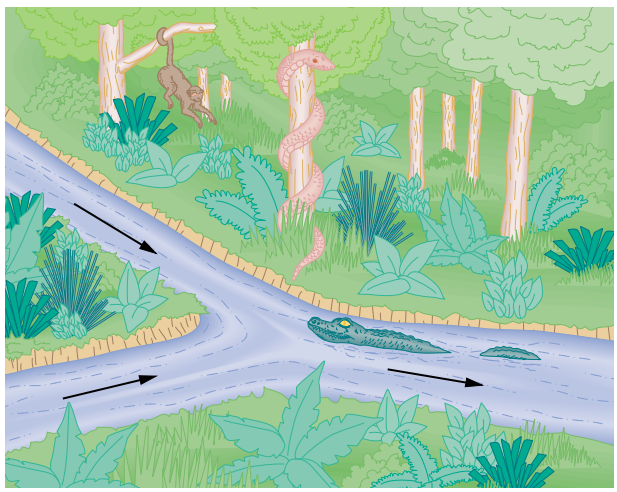
52Ú*. Napětí ve vlákně, které drží pevný předmět pod povrchem kapaliny (kapalina má větší hustotu než předmět) je T_0, když je nádoba s kapalinou v klidu (obr. 15.40). Ukažte, že když se nádoba začne pohybovat se zrychlením o velikosti a mířícím svisle vzhůru, napětí T ve vlákně stoupne na hodnotu $T_0(1 + a/g)$.



Obr. 15.40 Úloha 52

ODST. 15.9 Proudnice a rovnice kontinuity

53C. Na obr. 15.41 je znázorněn soutok dvou potoků, které vytvoří řeku. Jeden potok má šířku 8,2 m, hloubku 3,4 m a rychlost jeho proudu je 2,3 m·s^{-1}. Druhý potok je 6,8 m široký, 3,2 m hluboký a rychlost jeho proudu je 2,6 m·s^{-1}. Šířka řeky je 10,5 m, rychlost jejího proudu je 2,9 m·s^{-1}. Jaká je hloubka řeky?



Obr. 15.41 Cvičení 53

54C. Voda přitéká trubkou, jejíž vnitřní průměr je 2,1 cm, a dále teče třemi trubkami o průměru 1,4 cm. (a) Jaký je objemový tok širší trubkou, když objemové toky užšími trubkami jsou postupně 0,035 m^3·s^{-1}, 0,025 m^3·s^{-1} a 0,015 m^3·s^{-1}? (b) Jaký je poměr rychlosti proudění v širší trubici k rychlosti proudění v trubici s objemovým tokem 0,035 m^3·s^{-1}?

55C. Zahradní hadice třičtvrtěcoulka (tj. hadice s vnitřním průměrem 0,75 palce) je připojena k postřikovači trávníku, který se skládá z 24 děr o průměru 0,05 palce. Jakou rychlostí je voda vystřikována z otvorů postřikovače, jestliže v přívodní hadici je její rychlost 1 m·s^{-1}?

56Ú. Ze zatopeného sklepa je vyčerpávána voda rychlostí 5 m/s hadicí o vnitřním poloměru 1 cm. Hadice je vyvedena okénkem, které se nachází 3 m nad hladinou čerpané vody. Jaký je výkon čerpadla?

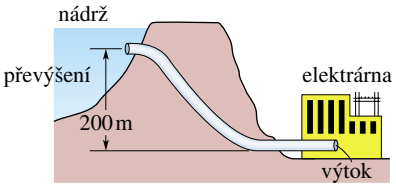
57Ú. Řeka široká 20 m a hluboká 4 m odvodňuje území o rozloze 3 000 km^2. Průměrné roční srážky na tomto území činí 505 mm/m^2. Čtvrtina srážek se vypaří a zbytek je odvodněn řekou. Jaká je průměrná rychlost proudu vody?

ODST. 15.10 Bernoulliova rovnice

58C. Voda teče rychlostí 5 m·s^{-1} trubicí, která má příčný průřez o obsahu 4 cm^2. Voda postupně klesne o 10 m a obsah průřezu trubice se rozšíří na 8 cm^2. (a) Jaká je rychlost vody po poklesu? (b) Jaký je tlak po poklesu, když předtím byl $1{,}5\cdot10^5$ Pa?

59C. Modely torpéd bývají zkoušeny ve vodorovné trubici s proudící vodou, podobně jako modely letadel v aerodynamickém tunelu. Uvažujme, že do takové trubice o vnitřním průměru 25 cm umístíme souose model torpéda, který má průměr 5 cm. Při zkoušce proudí voda kolem torpéda rychlostí 2,5 m·s^{-1}. (a) Jakou rychlostí musí voda proudit v místech, kde její proud není zúžen modelem? (b) Jaký je rozdíl tlaku vody v trubici mezi místem, kde se nachází model, a ostatními částmi trubice?

60C. Vstup do potrubí spojujícího nádrž přečerpávací elektrárny s elektrárnou (obr. 15.42) má obsah 0,75 m^2. Voda do něj vstupuje rychlostí 0,4 m·s^{-1}. V budově elektrárny, která je o 200 m níže, je výstup z trubice užší a voda z něj vytéká rychlostí 9,5 m·s^{-1}. Jaký je rozdíl tlaku mezi vstupem a výstupem?



Obr. 15.42 Cvičení 60

61C. Potrubí o vnitřním průměru 2,5 cm čerpá vodu do přízemí domu rychlostí 1 m·s^{-1} pod tlakem $1{,}7\cdot10^5$ Pa. Má-li potrubí ve druhém podlaží ve výšce 8 m průměr 1,25 cm, jaká je v něm (a) rychlost proudu a (b) jaký tlak vody?

62C. Jakou práci vykoná okolní tlak na protlačení 1,4 m^3 vody trubicí o vnitřním průměru 13 mm, když mezi konci trubice je tlakový rozdíl 1 atm?

63C. Vodorovnou trubkou konstantního průřezu teče olej. Pokles tlaku mezi dvěma místy vzdálenými 300 m je $35\cdot10^3$ Pa. Jakou energii ztratí 1 cm^3 oleje, když proteče vzdálenost 1 m?

64C. Nádrž s velkou plochou hladiny je naplněna vodou do výše 0,3 m. Otvor o obsahu 6 cm^2 ve dnu nádrže způsobí únik vody. (a) Jaký je objemový tok vytékající kapaliny? (b) V jaké hloubce pod dnem nádrže se plocha vytékajícího paprsku zúží na polovinu plochy otvoru?

65C. Máme dvě nádrže (1 a 2) s velkou plochou vrchní hladiny, ve kterých jsou dvě různé kapaliny. Ve stejné hloubce h pod vrchní hladinou jsou v obou nádržích udělány otvory, přičemž otvor v nádrži 1 má poloviční plochu ve srovnání s otvorem v nádrži 2. (a) Jaký je poměr hustot kapalin ϱ_1/ϱ_2, když hmotnostní toky oběma otvory jsou stejné? (b) Jaký je poměr objemových toků z obou nádrží? (c) Jak se musí změnit výška kapaliny nad otvorem v nádrži 2, aby se vyrovnaly objemové toky z obou nádrží?

66C. Vzduch obtéká vršek křídla letadla rychlostí v_1 a jeho spodek rychlostí v_2. Plocha křídla je S. Ukažte, že v tomto zjednodušeném modelu Bernoulliova rovnice předpovídá pro velikost F_{vz} síly, která nadnáší křídlo (říkáme jí též vztlaková síla), hodnotu

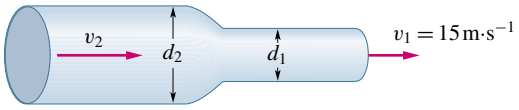
$$F_{vz} = \tfrac{1}{2}\varrho S(v_1{}^2 - v_2{}^2),$$

kde ϱ je hustota vzduchu.

67C. Je-li rychlost obtékání spodní strany křídla 110 m·s^{-1}, jaká rychlost obtékání vrchní strany křídla povede k tlakovému rozdílu 900 Pa mezi oběma stranami? Hustotu vzduchu pokládejte za rovnu $1{,}3\cdot10^{-3}$ g·cm^{-3} a použijte výsledek cvič. 66.

68C. Letadlo má plochu každého křídla rovnu 10,0 m^2. Při jisté rychlosti letadla vzduch obtéká vrchní plochu křídla rychlostí 48,0 m·s^{-1} a spodní plochu rychlostí 40,0 m·s^{-1}. Jaká je hmotnost letadla? Předpokládejte, že letadlo letí stálou rychlostí, hustota vzduchu je 1,20 kg·m^{-3} a vliv obtékání trupu a ocasních ploch na vztlak je zanedbatelný. Diskutujte velikost vztlaku, když letadlo při stejné rychlosti (a) letí vodorovně, (b) stoupá pod úhlem 15°, (c) klesá pod úhlem 15°. (Vyjděte z výsledku cvič. 66.)

69Ú. Voda teče vodorovnou trubicí a do okolního prostoru (do atmosféry) vytéká rychlostí 15 m·s^{-1}, jak je naznačeno na obr. 15.43. Průměr levé části trubice je 5,0 cm a pravé části 3,0 cm. (a) Kolik vody vyteče do okolního prostoru za 10 min? (b) Jaká je rychlost proudění v levé části trubice? (c) Jaký je přetlak nebo podtlak (rozdíl tlaku proti tlaku v okolním prostoru) v levé části trubice?



Obr. 15.43 Úloha 69

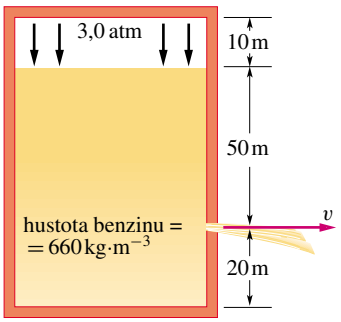
70Ú. V uzavřeném soudku je 50 cm pod povrchem nápoje pípa, ze které, když je otevřena, vytéká nápoj průřezem o obsahu 0,25 cm^2. Hustota nápoje je 1 g·cm^{-3}. Jakou rychlostí bude nápoj vytékat otevřenou pípou, když přetlak v soudku v prostoru nad nápojem je (a) nulový, (b) 0,4 atm?

71Ú. Vítr při vichřici obtéká střechu domu rychlostí 110 km/h. Hustota vzduchu je 1,2 kg·m^{-3}. (a) Jaký je rozdíl tlaků v prostoru nad střechou a pod střechou, který se snaží střechu nadzvednout a odnést? (b) Jaká bude síla nadnášející střechu o obsahu 90 m^2?

72Ú. Okna budovy úřadu mají rozměry 4 m × 5 m. Ve větrném dnu se prohnal okolo oken v nejvyšším patře budovy závan větru rychlostí 30,0 m·s^{-1}. Vypočtěte celkovou sílu, která při závanu větru působila na okno. Hustota vzduchu byla 1,23 kg·m^{-3}.

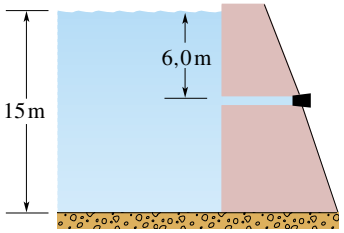
73Ú. Ostřelovač prostřelil kulkou z pušky vzduchotěsně uzavřenou benzinovou nádrž 50 m pod povrchem benzinu. Nad benzinem je absolutní tlak 3 atm, jak je naznačeno na obr. 15.44.

Skladovaný benzin má hustotu $660\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Jakou rychlostí v začal benzin stříkat prostřeleným místem?



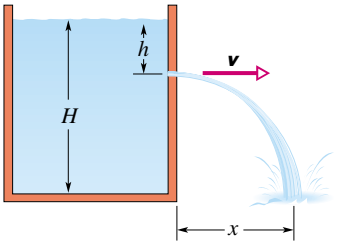
Obr. 15.44 Úloha 73

74Ú. Nádrž na pitnou vodu je za přehradní hrází 15 m hluboká. Vodorovná trubka o průměru 4,0 cm prochází hrází v hloubce 6,0 m pod vodní hladinou, jak je ukázáno na obr. 15.45. Trubka je uzavřena zátkou. (a) Najděte nejmenší nutnou velikost síly tření mezi trubkou a zátkou. (b) Zátku odstraníme. Jaký objem vody vyteče trubkou za tři hodiny?



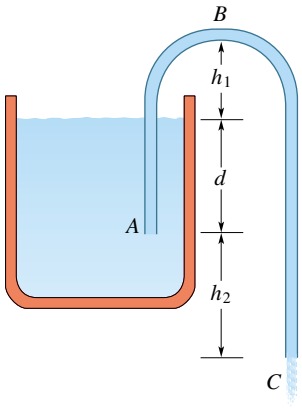
Obr. 15.45 Úloha 74

75Ú. Nádrž je naplněna vodou do výšky H. V nádrži byl provrtán otvor v hloubce h pod vodní hladinou (obr. 15.46). (a) Ukažte, že vzdálenost x od stěny nádrže do místa, kde vodní proud vytékající z nádoby dopadne na zem, je dána výrazem $x = 2\sqrt{h(H-h)}$. (b) Je možné navrtat nádrž v jiné hloubce, ze které by vytékající proud dopadl na zem ve stejné vzdálenosti x? Pokud ano, v jaké? (c) V jaké hloubce musí být otvor umístěn, aby vzdálenost x byla maximální?



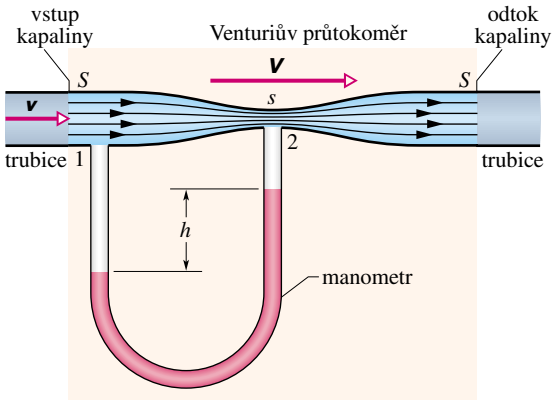
Obr. 15.46 Úloha 75

76Ú. Násoska je zařízení, které může sloužit k vyčerpání kapaliny z nádrže. Jak pracuje, je znázorněno na obr. 15.47. Trubka ABC musí nejprve být naplněna kapalinou. Jakmile je naplněna, odčerpává kapalinu z nádrže tak dlouho, dokud hladina nádrže neklesne k ústí trubky A. Kapalina má hustotu ϱ a zanedbatelnou viskozitu. (a) Jakou rychlostí vytéká kapalina z trubky v místě C? (b) Jaký tlak je v kapalině v nejvyšším bodě trubky B? (c) Jaká je největší teoretická výška h_1, přes kterou sifon může čerpat vodu?



Obr. 15.47 Úloha 76

77Ú. Venturiův průtokoměr (obr. 15.48) je přístroj, který slouží k měření rychlosti proudění trubicí, a tím i množství kapaliny, které trubicí protéká. Údaje se vypočtou ze změřeného rozdílu tlaků mezi místem, kde trubice má svůj běžný průměr (průměr před vstupem a po výstupu z přístroje), a mezi zúženým místem, tzv. krčkem. V místech, kde trubice má svůj běžný průměr (obsah průřezu S), tedy i v místě 1, kde je připojen jeden konec manometrické trubice, má kapalina rychlost v. V krčku, kde obsah průřezu je s, je v místě na obrázku označeném 2



Obr. 15.48 Úlohy 77 a 78

připojen druhý konec manometrické trubice. Kapalina zde má vyšší rychlost V. Z rozdílu rychlostí plyne rozdíl tlaku Δp, který se v U-manometru projeví rozdílem výšek h kapaliny v jeho ramenech. (a) Užitím Bernoulliovy rovnice a rovnice kontinuity pro srovnání průtokových poměrů v místech 1 a 2 (obr. 15.48) ukažte, že pro stanovení hledané rychlosti v platí rovnice

$$v = \sqrt{\frac{2s^2\Delta p}{\varrho(S^2 - s^2)}},$$

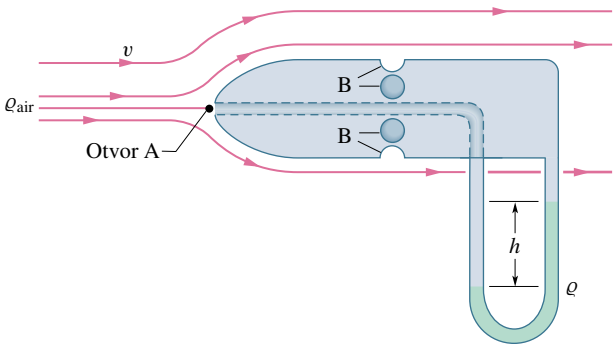
kde ϱ je hustota kapaliny. (b) Předpokládejte, že trubicí teče voda, že plochy příčných průřezů mají hodnoty $S = 60\,\mathrm{cm}^2$, $s = 30\,\mathrm{cm}^2$, tlak v širší části trubice je $8{\cdot}10^4$ Pa a v krčku $6{\cdot}10^4$ Pa. Jaký je objemový tok vody trubicí?

78Ú. Uvažujte Venturiův průtokoměr z předcházející úlohy na obr. 15.48 bez připojeného manometru. Nechť $S = 5s$ a tlak v místě 1, kde se nachází průřez S, je 2 atm. (a) Vypočtěte rychlosti v v místě průřezu S (místo 1) a V v místě průřezu s (místo 2), které způsobí, že tlak p_2 v místě 2 vymizí. (b) Vypočtěte, jaký v tom případě bude objemový tok trubicí, když průřez S má průměr 5,0 cm. Jev, který nastane v místě 2, kde tlak klesne na nulovou hodnotu, se nazývá **kavitace**; voda ztratí kontinuitu, vytvoří se v ní drobné bublinky.

79Ú. **Pitotova trubice** znázorněná na obr. 15.49 se užívá ke stanovení rychlosti letadla. Sestává z vnější trubice, na jejímž boku je větší počet malých otvorů B (na obrázku jsou vidět čtyři), která je spojena s jedním koncem manometru (na obrázku je manometrem U-trubice). Druhý konec manometru je spojen s vnitřní trubicí přístroje, do které vzduch vstupuje jejím čelním otvorem A. Přístroj se umísťuje na přední část letadla tak, aby vzduch vstupoval kolmo do vnitřní trubice, takže se v ní zastaví. Rychlost v_A je rovna nule. Otvory B jsou obtékány rychlostí v velmi blízkou rychlosti letadla. (a) Užitím Bernoulliovy rovnice ukažte, že

$$v = \sqrt{\frac{2\varrho g h}{\varrho_\mathrm{vzd}}},$$

kde ϱ je hustota kapaliny užité v U-trubici, h výšková odlehlost hladin v ramenech U-trubice a ϱ_vzd hustota vzduchu, kterým letadlo letí. (b) V U-trubici je líh a ukazuje rozdíl výšek $h = 26$ cm. Jaká je rychlost letadla vůči okolnímu vzduchu? Hustota vzduchu v dané výšce je $1{,}03\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a hustota lihu $810\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.



Obr. 15.49 Úlohy 79 a 80

80Ú. Pitotova trubice (viz úlohu 79) umístěná na letadle letícím ve velké výšce ukazuje tlakový rozdíl 180 Pa. Jaká je rychlost letadla, jestliže hustota vzduchu v této výšce je $0{,}031\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$?

16
Kmity



Stalo se to v roce 1989, v době, kdy se v okolí San Franciska připravovalo zahájení třetí části Světových her. Oblast byla zasažena seizmickými vlnami ze 100 km vzdáleného ohniska zemětřesení poblíž Loma Prieta. Zemětřesení o síle 7,1 stupňů způsobilo rozsáhlé škody a zabilo 67 lidí. Na fotografii vidíme část 1,4 km dlouhého úseku Nimitzovy dálnice, kde došlo k desítkám smrtelných zranění, když se horní betonová deska zřítila na spodní a zasáhla motoristy. Příčinou zřícení byly nepochybně prudké otřesy, vyvolané seizmickými vlnami. Avšak proč byl právě tento úsek tak vážně poškozen, jestliže ostatní úseky dálnice s téměř totožnou konstrukcí zřícení unikly?

16.1 KMITÁNÍ

Příklady kmitání, opakujícího se pohybu, nás obklopují ze všech stran. Pozorujeme kývání lustrů, houpání zakotvených člunů, pulzující písty automobilových motorů. Známe chvění kytarových strun, bubnů, zvonů, membrán v telefonních sluchátkách a v reproduktorech, křemenných krystalů v náramkových hodinkách. Méně evidentní je kmitání molekul vzduchu, které přenáší zvukové rozruchy, kmitání atomů v pevné látce, zodpovědné za vjem teploty, a kmitání elektronů v rádiových anténách a televizních vysílačích.

Kmitání není omezeno na hmotné objekty, jako jsou houslové struny a elektrony. Periodický pohyb pozorujeme také u jevů spojených s šířením světla, rádiových vln, rentgenového záření a γ-záření. Tento druh oscilací budeme studovat v následujících kapitolách. Budou nám tam velmi užitečné analogie s kmitáním mechanických systémů, na které se zaměříme v této kapitole.

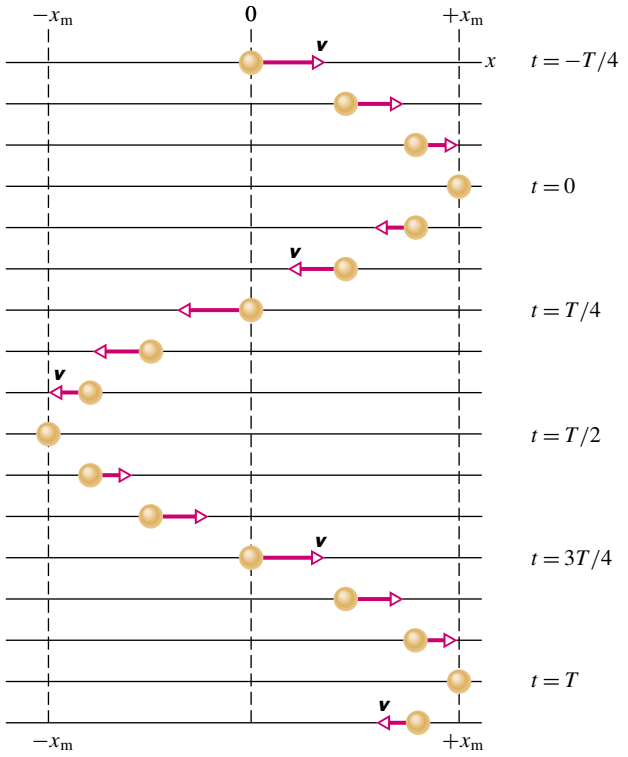
V reálném světě je kmitání obvykle *tlumené*: třecí síly postupně přeměňují mechanickou energii na teplo a pohyb ustává. Takové ztráty mechanické energie nemůžeme nikdy zcela vyloučit, energii však můžeme doplňovat z vhodného zdroje. Například děti na obr. 16.1 dovedou při houpání „pumpovat“, tj. švihnout nohama nebo se skrčit podle okamžitého pohybu houpačky, a tím kmitání udržují nebo i zvětšují. Přeměňují tak vlastně biochemickou energii na mechanickou energii kmitajícího systému.



Obr. 16.1 Dítě se brzy naučí dodávat houpačce energii a udržovat tím její pohyb.

16.2 HARMONICKÝ POHYB

Obr. 16.2 předvádí sérii „snímků“ kmitajícího systému: částice se opakovaně pohybuje tam a zpět kolem počátku osy x.



Obr. 16.2 Série „snímků“ (vytvořených po uplynutí stejných časových intervalů) ukazuje polohu částice, která se pohybuje tam a zpět kolem počátku osy x. Krajními polohami jsou body $-x_m$ a $+x_m$. Délky šipek na obrázku jsou jednotně škálovány a ukazují rychlost částice v daných bodech. V počátku má částice největší rychlost. V polohách $\pm x_m$ je její rychlost nulová. Jestliže zvolíme počátek odečítání času v poloze $+x_m$, částice se do ní vrátí poprvé v čase $t = T$, kde T je perioda pohybu. Pohyb, ke kterému došlo v průběhu právě uplynulé periody, se pak opakuje.

V tomto odstavci pohyb částice pouze popíšeme. Později budeme studovat, jak lze dané kmitání vyvolat.

Začneme zavedením důležitého parametru kmitání, jeho **frekvence** neboli **kmitočtu**. Frekvence udává počet kmitů, které jsou dokončeny v průběhu každé sekundy. Frekvenci označujeme symbolem f, její jednotkou v soustavě SI je **hertz** (zkratka Hz). Platí tedy

$$1\ \text{hertz} = 1\ \text{Hz} = 1\ \text{kmit za sekundu} = \\ = 1\ \text{s}^{-1}. \qquad (16.1)$$

S frekvencí souvisí **perioda** pohybu T. Ta udává dobu, za kterou se uskuteční jeden úplný kmit (jeden **cyklus**). To znamená

$$T = \frac{1}{f}. \qquad (16.2)$$

Jakýkoliv pohyb, který se v pravidelných intervalech opakuje, nazýváme **pohyb periodický**. My zde budeme studovat zvláštní případ periodického pohybu: opakující se úsek

bude vždy odpovídat situaci na obr. 16.2. Pro tento případ je časová závislost výchylky částice určena funkcí

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{(výchylka)}, \qquad (16.3)$$

kde x_m, ω a φ jsou dané konstanty. Tento pohyb budeme nazývat **jednoduchý harmonický pohyb** nebo prostě **harmonický pohyb**.

Veličina x_m v rov. (16.3) je kladná konstanta, jejíž hodnota závisí na počátečních podmínkách. Nazýváme ji **amplituda**; spodní index m znamená *maximum*. **Amplituda výchylky** totiž udává velikost největší možné výchylky částice v obou směrech od počátku. Funkce kosinus v rov. (16.3) se mění mezi krajními hodnotami ± 1, takže výchylka $x(t)$ se mění mezi krajními hodnotami $\pm x_m$. Vidíme to i na obr. 16.2.

Časově závislý výraz $(\omega t + \varphi)$ v rov. (16.3) se nazývá **fáze** pohybu, konstanta φ je **počáteční fáze**. Její hodnota závisí na výchylce a rychlosti částice v čase $t = 0$. Pro oba průběhy $x(t)$ na obr. 16.3a je fázová konstanta nulová (srovnejme tyto průběhy a hodnoty získané z rov. (16.3) pro $t = 0$).

Zbývá vysvětlit konstantu ω. Po uplynutí jedné periody T se musí částice navrátit do svého výchozího stavu. Z toho plyne, že pro libovolné t se musí také $x(t)$ rovnat $x(t + T)$. Položme pro jednoduchost v rov. (16.3) $\varphi = 0$. Z uvedené podmínky potom dostaneme

$$x_m \cos(\omega t) = x_m \cos\big(\omega(t + T)\big).$$

Funkce kosinus má periodu 2π rad. Předchozí rovnice tedy dává

$$\omega t + 2\pi = \omega(t + T)$$

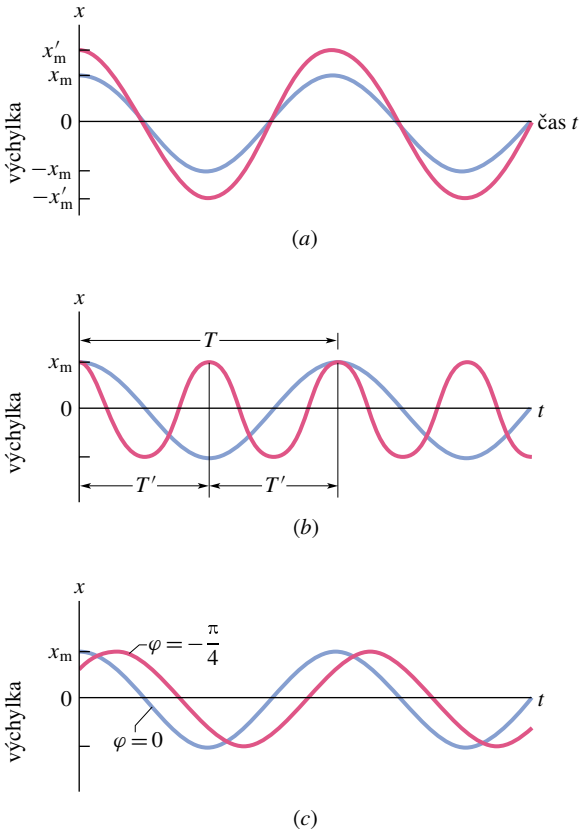
a odtud

$$\omega T = 2\pi.$$

Uvážíme-li ještě rov. (16.2), máme celkově

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \qquad (16.4)$$

Veličina ω se nazývá **úhlová frekvence** (také **kruhová frekvence** či **úhlový kmitočet**) pohybu; její jednotka v soustavě SI je radián za sekundu. (Máme-li být tedy důslední, musíme vyjadřovat fázi φ v radiánech.) Na obr. 16.3 jsou porovnány dva harmonické pohyby, které se liší buď jen svou amplitudou, nebo jen svou periodou (a tedy frekvencí a úhlovou frekvencí), anebo jen fázovou konstantou.



Obr. 16.3 Modrá křivka je ve všech třech případech zakreslena podle rov. (16.3) s $\varphi = 0$. (a) Červená křivka se liší od modré *pouze* tím, že pro ni je amplituda x'_m větší. (b) Červená křivka se liší od modré *pouze* tím, že pro ni je perioda $T' = T/2$. (c) Červená křivka se liší od modré *pouze* tím, že pro ni je $\varphi = -\pi/4$ rad a nikoliv nula.

KONTROLA 1: Částice vykonává harmonický pohyb s periodou T (podobně jako na obr. 16.2). V čase $t = 0$ se nacházela na souřadnici $-x_m$. Rozhodněte, zda ji v čase (a) $t = 2{,}00T$, (b) $t = 3{,}50T$, (c) $t = 5{,}25T$ nalezneme v bodě
o souřadnici $-x_m$,
o souřadnici x_m,
v počátku souřadnic,
mezi $-x_m$ a 0,
mezi 0 a x_m.

Rychlost harmonického pohybu

Rychlost částice dostaneme jako obvykle — derivací výrazu pro souřadnici. V případě harmonického pohybu jde

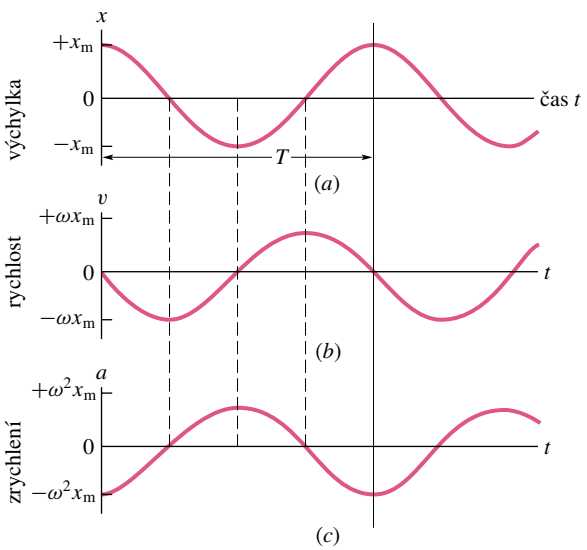
tedy o derivaci rov. (16.3):

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)\big)$$

neboli

$$v(t) = -\omega x_\mathrm{m}\sin(\omega t + \varphi) \quad \text{(rychlost)}. \qquad (16.5)$$

Na obr. 16.4a je graf funkce odpovídající rov. (16.3) s $\varphi = 0$. Obr. 16.4b ukazuje rov. (16.5), rovněž pro $\varphi = 0$. Podobně jako jsme nazvali x_m v rov. (16.3) amplitudou, nazveme nyní kladnou veličinu ωx_m v rov. (16.5) **amplitudou rychlosti** v_m. Na obr. 16.4b vidíme, jak se rychlost kmitající částice mění mezi hodnotami $\pm v_\mathrm{m}$ (tj. $\pm\omega x_\mathrm{m}$). Na tomto obrázku si také všimněme, že křivka odpovídající $v(t)$ je *posunuta* o čtvrtinu periody doleva vzhledem ke křivce $x(t)$: jestliže je velikost výchylky největší (tj. $x(t) = x_\mathrm{m}$), je velikost rychlosti nejmenší (tj. $v(t) = 0$). A v okamžiku, kdy je velikost výchylky nejmenší (tj. nulová), je velikost rychlosti největší (je rovna $v_\mathrm{m} = \omega x_\mathrm{m}$).



Obr. 16.4 (a) Výchylka částice $x(t)$ pro harmonický pohyb s fázovou konstantou φ rovnou nule. Perioda T ohraničuje jeden úplný kmit. (b) Rychlost částice $v(t)$ a (c) zrychlení částice $a(t)$ pro tento pohyb.

Zrychlení harmonického pohybu

Derivací rychlosti dostaneme zrychlení částice. V případě harmonického pohybu tedy derivujeme rov. (16.5) a dostaneme

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(-\omega x_\mathrm{m}\sin(\omega t + \varphi)\big)$$

neboli

$$a(t) = -\omega^2 x_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{(zrychlení)}. \qquad (16.6)$$

Na obr. 16.4c je graf funkce odpovídající rov. (16.6), opět pro případ $\varphi = 0$. Kladná veličina $\omega^2 x_\mathrm{m}$ v rov. (16.6) se nazývá **amplituda zrychlení** a_m. Zrychlení částice se tedy mění v rozmezí $\pm a_\mathrm{m}$ (tj. $\pm\omega^2 x_\mathrm{m}$); vidíme to také na obr. 16.4c. Navíc si všimněme, že křivka $a(t)$ je posunuta vzhledem ke křivce $v(t)$ o čtvrtinu periody doleva.

V této chvíli můžeme propojit rov. (16.3) a (16.6); dospějeme ke vztahu

$$a(t) = -\omega^2 x(t). \qquad (16.7)$$

Tato rovnice je jakýmsi „puncem“ harmonického pohybu: zrychlení částice je úměrné výchylce a má opačné znaménko, přitom konstantou úměrnosti je druhá mocnina úhlové frekvence. Největší kladná hodnota výchylky tedy odpovídá zápornému zrychlení s největší velikostí a naopak. Je-li výchylka částice nulová, je její zrychlení také nulové. Tato tvrzení ilustruje obr. 16.4.

RADY A NÁMĚTY

Bod 16.1: *Fáze*

Všimněte si, jakou roli hraje při kreslení $x(t)$ konstanta φ. Jestliže je $\varphi = 0$, graf funkce $x(t)$ bude vždy podobný křivce na obr. 16.4a, tj. typické křivce pro funkci kosinus. *Záporná* hodnota φ posune křivku podél časové osy *doprava* (jako na obr. 16.3c), zatímco *kladná* hodnota φ ji posune *doleva*.

Uvažme dva harmonické pohyby, lišící se pouze v této konstantě. Říkáme o nich, že mají *fázový rozdíl*, že jedna vůči druhé má *fázový posuv*, že jsou navzájem *fázově posunuty* neboli že jsou navzájem **rozfázovány**. Například křivky na obr. 16.3c mají fázový rozdíl $\pi/4$ rad.

Harmonický pohyb se opakuje po uplynutí každé periody T a funkce kosinus se opakuje po každých 2π rad. To znamená, že perioda T odpovídá fázovému rozdílu 2π rad. Na obr. 16.4 je křivka $x(t)$ posunuta vzhledem ke křivce $v(t)$ o čtvrtinu periody doprava neboli je vzhledem k ní fázově posunuta o $-\pi/2$ rad. Současně je tato křivka posunuta vzhledem k $a(t)$ o polovinu periody doprava neboli je vzhledem k $a(t)$ posunuta o $-\pi$ rad. Fázový posuv 2π rad způsobí, že se daný harmonický pohyb ztotožní sám se sebou — jinými slovy, vůbec se nezmění.

16.3 POHYBOVÁ ROVNICE PRO HARMONICKÝ POHYB

Nyní již víme, jak se zrychlení částice mění s časem. Druhý Newtonův zákon nám odpoví na otázku, jaká síla musí na

částici působit, aby jí bylo udělováno právě toto očekávané zrychlení. Z Newtonova zákona a z rov. (16.6) dostaneme pro harmonický pohyb

$$F = ma = -(m\omega^2)x. \qquad (16.8)$$

Síla je tedy přímo úměrná výchylce a opačně orientovaná:

$$F = ma = -kx. \qquad (16.9)$$

To odpovídá Hookovu zákonu pro pružinu, jejíž tuhost je v daném případě

$$k = m\omega^2. \qquad (16.10)$$

Rov. (16.9) tak vlastně představuje alternativní definici harmonického pohybu. Ta zní:

Částice o hmotnosti m vykonává harmonický pohyb, jestliže na ni působí síla přímo úměrná výchylce částice z rovnovážné polohy a orientovaná proti výchylce.

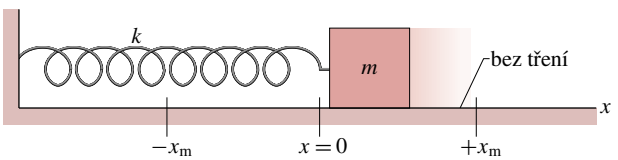
Soustava pružina + těleso na obr. 16.5 se nazývá **harmonický**, někdy též **lineární oscilátor**. Slovo „lineární“ poukazuje na skutečnost, že síla F je úměrná první (a nikoliv nějaké jiné) mocnině výchylky x. Jeho úhlová frekvence ω souvisí vztahem (16.10) s tuhostí pružiny k a s hmotností tělesa m. Dostaneme tedy

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(úhlová frekvence)}. \qquad (16.11)$$

Kombinací rov. (16.4) a (16.11) pak ihned získáme periodu harmonického oscilátoru na obr. 16.5:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(perioda)}. \qquad (16.12)$$

Rov. (16.11) říká totéž, co rov. (16.12): velkou hodnotu úhlové frekvence (a tedy malou periodu) dostaneme v případě tuhé pružiny (velké k) a lehkého tělesa (malé m).



Obr. 16.5 Harmonický oscilátor. Jakmile poněkud vychýlíme těleso na stranu a poté je uvolníme, vznikne podobně jako u částice na obr. 16.2 harmonický pohyb. Výchylka tělesa je určena rov. (16.3).

U jakéhokoliv kmitajícího systému tohoto typu, ať už je to harmonický oscilátor na obr. 16.5, skokanské prkno nebo houslová struna, najdeme vždy jednak jistou „tendenci k návratu“, jednak „setrvačnost“. V případě oscilátoru na obr. 16.5 jsou obě tyto tendence spojeny s odlišnými složkami kmitajícího systému: „tendence k návratu“ je reprezentována výhradně nehmotnou pružinou a „setrvačnost“ je vázána výhradně na hmotné těleso. V případě houslové struny, jak uvidíme v kap. 17, jsou obě zmíněné tendence vázány na samotnou strunu. Jsou ovšem i jiné mechanismy kmitů. Např. při **relaxačních kmitech** se pro pohybující se předmět vždy v okolí krajní polohy změní „pravidla hry“, podobně u třecích tónů se pravidelně odtrhují víry od překážky v proudění vzduchu. Zde je nebudeme podrobněji rozebírat.

KONTROLA 2: Který z následujících vztahů mezi silou F, působící na částici, a polohou částice x, popisuje harmonický pohyb: (a) $F = -5x$, (b) $F = -400x^2$, (c) $F = 10x$, (d) $F = 3x^2$?

PŘÍKLAD 16.1

Těleso o hmotnosti $m = 680$ g je připojeno k pružině tuhosti $k = 65\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Těleso, pohybující se na hladké podložce, vychýlíme o $x = 11$ cm z rovnovážné polohy $x = 0$. V nové poloze je těleso v klidu. Poté jej v čase $t = 0$ uvolníme.

(a) Jakou silou působí v okamžiku uvolnění pružina na těleso?

ŘEŠENÍ: Podle Hookova zákona platí

$$F = -kx = -(65\ \mathrm{N\cdot m^{-1}})(0{,}11\ \mathrm{m}) = \\ = -7{,}2\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Znaménko minus nám připomíná, že síla a výchylka mají opačnou orientaci. Skutečně, pružina působí na těleso silou, která směřuje k rovnovážné poloze, zatímco výchylka směřuje od rovnovážné polohy.

(b) Jaká je úhlová frekvence, frekvence a perioda vzniklého kmitání?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (16.11) máme

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{(65\ \mathrm{N\cdot m^{-1}})}{(0{,}68\ \mathrm{kg})}} = \\ = 9{,}78\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}} \doteq 9{,}8\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Frekvenci nyní dostaneme z rov. (16.4):

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(9{,}78\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}})}{2\pi} = \\ = 1{,}56\ \mathrm{Hz} \doteq 1{,}6\ \mathrm{Hz}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Perioda je převrácenou hodnotou frekvence:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{(1{,}56\,\mathrm{Hz})} = \\ = 0{,}64\,\mathrm{s} = 640\,\mathrm{ms}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Určete amplitudu výchylky.

ŘEŠENÍ: V čl. 8.4 jsme zkoumali mechanickou energii soustavy pružina + těleso, podobné lineárnímu oscilátoru na obr. 16.5. Pokud neuvažujeme tření, mechanická energie se během pohybu zachovává. V našem případě je těleso uvolněno s nulovou počáteční rychlostí v okamžiku, kdy je vzdáleno 11 cm od rovnovážné polohy. Má tedy v tomto okamžiku nulovou kinetickou energii a má ji také nulovou, kdykoliv se později opět nachází 11 cm od rovnovážné polohy. Jeho největší možná vzdálenost od rovnovážné polohy je tedy 11 cm, tj.

$$x_\mathrm{m} = 11\,\mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Určete maximální rychlost kmitajícího tělesa.

ŘEŠENÍ: Amplituda rychlosti je určena rov. (16.5). V našem případě

$$v_\mathrm{m} = \omega x_\mathrm{m} = (9{,}78\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})(0{,}11\,\mathrm{m}) = \\ = 1{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Těleso má tuto největší možnou rychlost v okamžiku, kdy právě míjí počátek osy x. Ukazuje to také srovnání obr. 16.4a a 16.4b; největší rychlost odpovídá $x = 0$.

(e) Určete maximální zrychlení tělesa.

ŘEŠENÍ: Amplituda zrychlení je určena rov. (16.6). V našem případě

$$a_\mathrm{m} = \omega^2 x_\mathrm{m} = (9{,}78\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})^2(0{,}11\,\mathrm{m}) = \\ = 11\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Těleso má toto (co do velikosti) největší možné zrychlení, kdykoliv se nachází v bodech obratu. V těchto bodech je také největší síla, kterou na těleso působí pružina. Ukazuje to také srovnání obr. 16.4a a 16.4c; výchylka a zrychlení nabývají svých největších i nejmenších hodnot současně.

(f) Jaká je fázová konstanta pohybu φ?

ŘEŠENÍ: V čase $t = 0$, tj. v okamžiku uvolnění tělesa, nabývala jeho výchylka x své maximální hodnoty x_m. Rychlost v tělesa byla nulová. Tyto dvě relace se nazývají **počáteční podmínky**. Jestliže je uplatníme postupně v rov. (16.3) a (16.5), dostaneme

$$1 = \cos\varphi \qquad \text{a} \qquad 0 = \sin\varphi.$$

Nejmenší úhel, který splňuje obě tyto podmínky, je

$$\varphi = 0. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Podmínky jsou splněny také pro libovolný celý násobek úhlu 2π rad.)

PŘÍKLAD 16.2

Uvažujme harmonický oscilátor na obr. 16.5. V čase $t = 0$ je výchylka $x(0)$ rovna $-8{,}5$ cm, rychlost $v(0)$ je $-0{,}920\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a zrychlení $a(0)$ je $+47{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

(a) Určete úhlovou frekvenci a frekvenci kmitání.

ŘEŠENÍ: V rov. (16.3) položme $t = 0$. Dostaneme

$$x(0) = x_\mathrm{m}\cos\varphi. \qquad (16.13)$$

Podobně po dosazení $t = 0$ do rov. (16.5) a (16.6) máme

$$v(0) = -\omega x_\mathrm{m}\sin\varphi \qquad (16.14)$$

a

$$a(0) = -\omega^2 x_\mathrm{m}\cos\varphi. \qquad (16.15)$$

Poslední tři rovnice obsahují tři neznámé, jmenovitě x_m, φ a ω. Postupně je nalezneme všechny, v této části úkolu hledáme pouze úhlovou frekvenci ω.

Sestavíme podíl rov. (16.15) a (16.13). Ze vzniklého výrazu vypočteme

$$\omega = \sqrt{-\frac{a(0)}{x(0)}} = \sqrt{-\frac{(47{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})}{(-0{,}085\,0\,\mathrm{m})}} = \\ = 23{,}5\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Frekvence f je určena vztahem (16.4). V našem případě

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(23{,}5\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})}{2\pi} = 3{,}74\,\mathrm{Hz}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete fázovou konstantu φ.

ŘEŠENÍ: Nejprve sestavíme podíl rov. (16.14) a (16.13):

$$\frac{v(0)}{x(0)} = \frac{-\omega x_\mathrm{m}\sin\varphi}{x_\mathrm{m}\cos\varphi} = -\omega\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Z tohoto vztahu nyní vypočteme $\mathrm{tg}\,\varphi$:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{v(0)}{\omega x(0)} = \frac{-(-0{,}920\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})}{(23{,}5\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})(-0{,}085\,0\,\mathrm{m})} = \\ = -0{,}461.$$

Máme tak zatím dvě možná řešení

$$\varphi = -25^\circ \qquad \text{a} \qquad \varphi = 155^\circ.$$

V následující části úlohy rozhodneme, která z obou fázových konstant je správná.

(c) Určete amplitudu kmitání x_m.

ŘEŠENÍ: Vyjdeme z rov. (16.13) a prozatímně dosadíme $\varphi = 155°$:

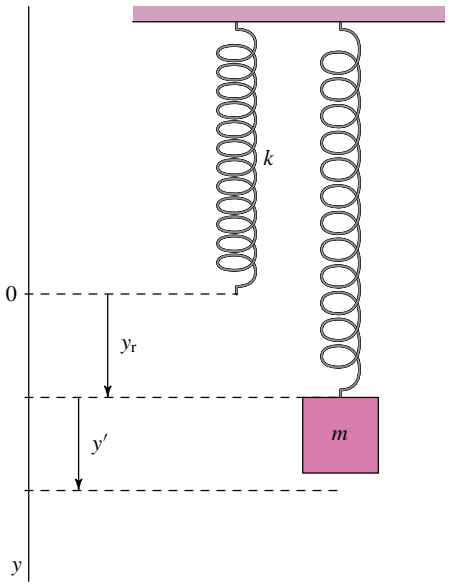
$$x_m = \frac{x(0)}{\cos\varphi} = \frac{(-0{,}085\,0\,\mathrm{m})}{\cos 155°} = \\ = 0{,}094\,\mathrm{m} = 9{,}4\,\mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Podobně hodnota $\varphi = -25°$ by vedla k $x_m = -9{,}4\,\mathrm{cm}$. Avšak amplituda výchylky musí být vždy *kladná* konstanta — úhel $\varphi = -25°$ musíme vyloučit. Správný výsledek části (b) je tedy

$$\varphi = 155°. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 16.3

Vliv konstantní síly na harmonický oscilátor. Pružinu z obrázku 16.5 zavěsíme svisle dolů podle obr. 16.6. Osu y orientujme podél ní s počátkem v poloze, kde by byl konec *nezatížené* pružiny. Poté pružinu zatížíme tělesem hmotnosti m.



Obr. 16.6 Příklad 16.3. Konec nezatížené pružiny je v počátku osy y. Rovnovážná poloha zatížené pružiny je y_r. Výchylka z této rovnovážné polohy je y'.

(a) Jaké je protažení y_r zatížené pružiny v rovnovážné poloze?

ŘEŠENÍ: V rovnovážné poloze je výslednice sil působících na těleso, tj. síly pružnosti $\boldsymbol{F}$ a síly tíhové $\boldsymbol{G}$, rovna nule. Jediné nenulové složky jsou y-ové a platí pro ně

$$F_y + G_y = -ky_r + mg = 0.$$

Odtud určíme hledanou rovnovážnou polohu

$$y_r = \frac{mg}{k}. \qquad (16.16)$$

(b) Těleso svisle vychýlíme a uvolníme. S jakou periodou bude kmitat? Porovnejte tuto situaci s obr. 16.5, kdy pružina není namáhána tíhou tělesa, a s obecným řešením v př. 16.1a, b.

ŘEŠENÍ: Při výchylce y' z rovnovážné polohy y_r působí pružina na těleso silou

$$F_y = -k(y' + y_r). \qquad (16.17)$$

Na těleso působí kromě této síly ještě konstantní tíhová síla $\boldsymbol{G}$, takže výsledná síla $\boldsymbol{F}_v$ působící na těleso je

$$\boldsymbol{F}_v = \boldsymbol{F} + m\boldsymbol{g}. \qquad (16.18)$$

Po dosazení rov. (16.16) a (16.17) do rov. (16.18) dostáváme

$$F_{v,y} = -k\left(y' + \frac{mg}{k}\right) + mg = -ky'. \qquad (16.19)$$

Odtud však plyne, že výsledná síla je opět přímo úměrná výchylce z rovnovážné polohy, je opačně orientovaná a má stejný koeficient úměrnosti — tuhost k, jaký měla nezatížená pružina. Proto naše soustava kmitá se stejnou frekvencí, s jakou kmitá soustava na obr. 16.5 řešená v př. 16.1.

RADY A NÁMĚTY

Bod 16.2: *Určení typu kmitání*

V případě libovolného harmonického pohybu jsou zrychlení a a výchylka x vázány vztahem tvaru

$$a = -(\text{kladná konstanta}) \cdot x,$$

který říká: zrychlení je úměrné výchylce z rovnovážné polohy, ale je opačně orientované. Jakmile již nalezneme v dané úloze takový vztah, můžeme jej okamžitě srovnat s rov. (16.7), tj. uvedenou kladnou konstantu můžeme identifikovat jako ω^2. Tím již vlastně máme úhlovou frekvenci pohybu. Poté nalezneme pomocí rov. (16.4) periodu T a frekvenci f.

V př. 16.8 uvidíme, že tentýž postup lze použít k určení harmonických torzních kmitů. V tomto případě jsou úhlové zrychlení ε a úhlová výchylka θ svázány relací tvaru

$$\varepsilon = -(\text{kladná konstanta}) \cdot \theta,$$

která říká: úhlové zrychlení je úměrné úhlové výchylce z rovnovážné polohy, je však orientované proti této výchylce. Podobně jako v předchozím případě můžeme ztotožnit kladnou konstantu s ω^2, a tím najít postupně veličiny ω, T a f.

V některých úkolech dospějete nejprve k závislosti síly F na výchylce x. V případě harmonického pohybu má tato závislost tvar

$$F_x = -(\text{kladná konstanta}) \cdot x.$$

To znamená, že síla je úměrná výchylce, míří však proti ní. Jakmile již nalezneme takovou závislost, můžeme ji okamžitě srovnat s rov. (16.9), tj. kladnou konstantu můžeme identifikovat jako k. Jestliže navíc známe hmotnost kmitajícího tělesa, uplatníme postupně rov. (16.11), (16.12) a (16.4) k určení úhlové frekvence ω, periody T a frekvence f.

Podobně postupujeme pro torzní harmonický pohyb. V tomto případě je vratný moment síly M vázán s úhlovou výchylkou θ vztahem typu

$$M = -(\text{kladná konstanta}) \cdot \theta,$$

který říká: moment síly je úměrný úhlové výchylce z rovnovážné polohy, má však opačný směr.

16.4 ENERGIE HARMONICKÉHO OSCILÁTORU

V kap. 8 jsme si již povšimli, jak se energie harmonického oscilátoru přelévá sem a tam mezi energií kinetickou a energií potenciální, zatímco jejich součet — celková mechanická energie oscilátoru E — zůstává konstantní. Podívejme se nyní na tuto situaci z kvantitativního hlediska.

Potenciální energie harmonického oscilátoru na obrázku 16.5 je spojena výhradně s pružinou. Její velikost závisí na tom, o kolik je pružina stlačena nebo protažena, tedy na výchylce $x(t)$. Jestliže použijeme postupně rov. (8.11) a (16.3), dostaneme

$$E_p(t) = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi). \quad (16.20)$$

Všimněme si zde pozorně výrazu $\cos^2 A$: jeho význam je $(\cos A)^2$ a nelze jej zaměňovat s výrazem $\cos A^2$, který znamená $\cos(A^2)$.

Kinetická energie systému je vázána výhradně na kmitající hmotné těleso. Její velikost závisí na tom, jak rychle se těleso pohybuje, tedy na rychlosti $v(t)$. Z rov. (16.5) dostaneme

$$E_k(t) = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (16.21)$$

Podle rov. (16.11) můžeme za ω^2 dosadit k/m, takže rov. (16.21) lze přepsat do tvaru

$$E_k(t) = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (16.22)$$

Celková mechanická energie E je součtem příspěvků získaných v rov. (16.20) a (16.22):

$$\begin{aligned} E &= E_p + E_k = \\ &= \tfrac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \tfrac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \\ &= \tfrac{1}{2}kx_m^2\big(\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)\big). \end{aligned}$$

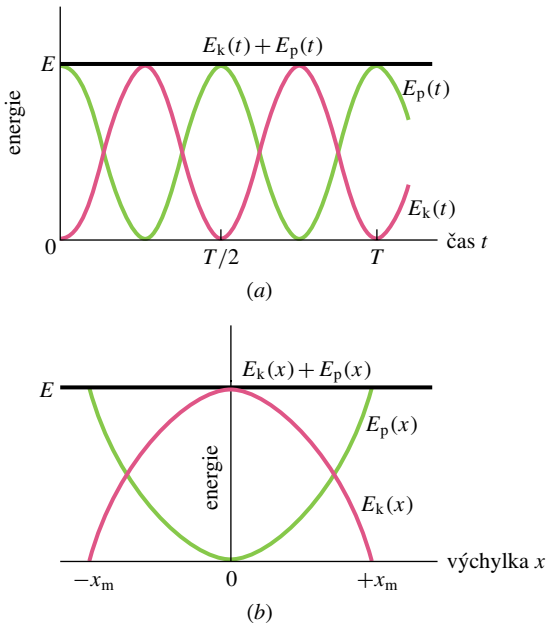
Pro libovolný úhel α však platí

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Výraz ve velkých závorkách v rovnici pro energii E je tedy roven jedné a výsledek zní

$$E = E_p + E_k = \tfrac{1}{2}kx_m^2. \quad (16.23)$$

Mechanická energie harmonického oscilátoru je tedy skutečně na čase nezávislá, je konstantní. Potenciální energie a kinetická energie lineárního oscilátoru jako funkce času jsou znázorněny na obr. 16.7a a jako funkce výchylky na obr. 16.7b.



Obr. 16.7 (a) Potenciální energie $E_p(t)$, kinetická energie $E_k(t)$ a celková mechanická energie E harmonického oscilátoru jako funkce času. Všimněte si, že všechny energie jsou nezáporné a že během jedné periody dojde dvakrát k dosažení maxima jak u kinetické, tak u potenciální energie. (b) Potenciální energie $E_p(t)$, kinetická energie $E_k(t)$ a celková mechanická energie E harmonického oscilátoru s amplitudou výchylky x_m jako funkce výchylky x. Pro $x = 0$ je veškerá mechanická energie tvořena energií kinetickou, pro $x = \pm x_m$ naopak energií potenciální.

Nyní je již patrně pochopitelné, proč obvykle zahrnuje kmitající systém jednak jistý element spojený s tendencí návratu do rovnovážné polohy, jednak jistý element setrvačnosti: první z nich na sebe váže potenciální energii a druhý energii kinetickou.

KONTROLA 3: Těleso na obr. 16.5 má v jistém okamžiku výchylku $x = +2{,}0\,\text{cm}$. V tomto okamžiku je jeho kinetická energie 3 J a pružina má potenciální energii pružnosti o velikosti 2 J. (a) Jak je velká kinetická energie tělesa při $x = 0$? Jaké jsou hodnoty potenciální energie pružnosti při (b) $x = -2{,}0\,\text{cm}$, a při (c) $x = -x_m$?

PŘÍKLAD 16.4

(a) Jaká je mechanická energie oscilátoru z příkladu 16.1?

ŘEŠENÍ: Dosadíme údaje z př. 16.1 do rov. (16.23):

$$E = \tfrac{1}{2}kx_m^2 = \tfrac{1}{2}(65\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1})(0{,}11\,\text{m})^2 = \\ = 0{,}393\,\text{J} \doteq 0{,}39\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato hodnota zůstává během pohybu konstantní.

(b) Jaká je potenciální energie tohoto oscilátoru v okamžiku, kdy se těleso nachází na polovině cesty k bodu obratu, tj. jestliže $x = \pm x_m/2$?

ŘEŠENÍ: Pro libovolnou výchylku je potenciální energie určena vztahem $E_p = \frac{1}{2}kx^2$. V našem případě

$$E_p = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}k\left(\tfrac{1}{2}x_m\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}kx_m^2\right) = \\ = \tfrac{1}{4}E = \tfrac{1}{4}(0{,}393\,\text{J}) = 0{,}098\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaká je kinetická energie oscilátoru při $x = x_m/2$?

ŘEŠENÍ: Kinetickou energii nalezneme prostým odčítáním:

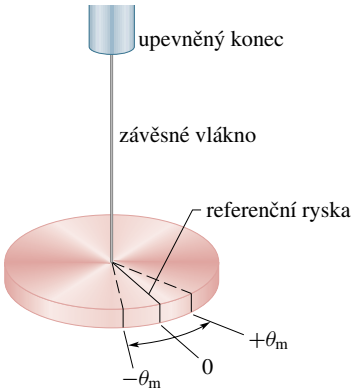
$$E_k = E - E_p = \\ = 0{,}393\,\text{J} - 0{,}098\,\text{J} \doteq 0{,}30\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Jestliže se tedy kdykoliv během kmitání těleso nachází v bodě $x = x_m/2$, má 25 % jeho mechanické energie formu energie potenciální a 75 % formu kinetické energie.

16.5 TORZNÍ KMITY

Na obr. 16.8 vidíme jinou variantu harmonického oscilátoru. Na rozdíl od předchozích příkladů, kde hybnou silou bylo protažení či stlačení pružiny, zde působí kroucení závěsného vlákna. Uvedené zařízení se nazývá **torzní kyvadlo**, slovo **torze** znamená kroucení.

Jestliže pootočíme disk na obr. 16.8 vzhledem k jeho rovnovážné poloze (v ní ukazuje ryska na značku 0) a pak uvolníme, začne ryska kmitat kolem rovnovážné polohy;



Obr. 16.8 Torzní kyvadlo je otáčivá varianta lineárního harmonického oscilátoru z obr. 16.5. Disk kmitá ve vodorovné rovině; referenční ryska se vychyluje s úhlovou amplitudou θ_m. V průběhu kroucení na sebe závěsné vlákno váže potenciální energii, podobně jako ji dříve vázala pružina. Kroucením se současně vytváří vratný točivý moment.

dojde k **torzním kmitům**. Při úhlové výchylce rysky θ v libovolném z obou směrů vzniká vratný silový moment, určený vztahem

$$M = -\varkappa\theta. \qquad (16.24)$$

Konstanta $\varkappa$ (řecké písmeno *kappa*) se jmenuje **torzní tuhost** neboli **tuhost ve zkrutu**. Její velikost závisí na délce závěsného vlákna, na jeho průměru a na materiálu, z něhož je vlákno vyrobeno.

Při srovnání rov. (16.24) a (16.9) začínáte tušit, že rov. (16.24) je vlastně torzní varianta Hookova zákona. Pokusíme se tedy transformovat rov. (16.12), udávající periodu lineárního oscilátoru, na rovnici pro periodu torzního oscilátoru. V rov. (16.12) předně nahradíme tuhost pružiny k veličinou, která nyní měří velikost vratné tendence; tou je podle rov. (16.24) torzní tuhost $\varkappa$. Dále nahradíme v rov. (16.12) hmotnost m veličinou, která *jí nyní odpovídá*, tj. která nyní vyjadřuje setrvačnou tendenci při otáčení disku; tou je moment setrvačnosti I kmitajícího disku. Tyto dvě substituce nás již přivádějí ke vztahu

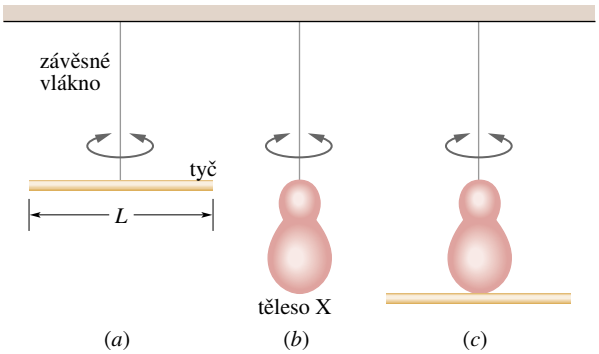
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\varkappa}} \quad \text{(torzní kyvadlo)} \qquad (16.25)$$

pro periodu torzního oscilátoru neboli torzního kyvadla.

PŘÍKLAD 16.5

Na obr. 16.9a vidíme tenkou tyč délky $L = 12{,}4\,\text{cm}$ o hmotnosti $m = 135\,\text{g}$, zavěšenou uprostřed na dlouhém vlákně. Pro tento torzní oscilátor jsme změřili periodu $T_a = 2{,}53\,\text{s}$. Na obr. 16.9b je znázorněno nepravidelné těleso X, zavěšené

na stejném vlákně. Pro tento torzní oscilátor jsme naměřili periodu $T_b = 4{,}76\,\text{s}$.



Obr. 16.9 Příklad 16.5. Tři zobrazená torzní kyvadla jsou tvořena závěsným vláknem a (a) tyčí, (b) nepravidelným tělesem a (c) tyčí pevně spojenou s nepravidelným tělesem.

(a) Jaký je moment setrvačnosti tělesa X vzhledem k ose, určené závěsným vláknem?

ŘEŠENÍ: Podle tab. 11.2e je moment setrvačnosti tenké tyče vzhledem k ose, procházející středem tyče kolmo na její osu, roven $\frac{1}{12}mL^2$. Máme tedy

$$I_a = \frac{1}{12}mL^2 = \frac{1}{12}(0{,}135\,\text{kg})(0{,}124\,\text{m})^2 = \\ = 1{,}73{\cdot}10^{-4}\,\text{kg}{\cdot}\text{m}^2.$$

Napišme nyní dvakrát rov. (16.25); jednou pro tyč a podruhé pro těleso X:

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{\varkappa}} \quad \text{a} \quad T_b = 2\pi\sqrt{\frac{I_b}{\varkappa}}.$$

Spodní indexy zde odpovídají po řadě obr. 16.9a a 16.9b. Torzní konstanta $\varkappa$ vyjadřuje vlastnosti vlákna a to je na obou obrázcích stejné. Liší se pouze momenty setrvačnosti a periody.

Nyní obě uvedené rovnice umocníme a druhou z nich vydělíme rovnicí první. Výsledný vztah představuje rovnici pro I_b. Jejím řešením dostaneme

$$I_b = I_a\frac{T_b^2}{T_a^2} = (1{,}73{\cdot}10^{-4}\,\text{kg}{\cdot}\text{m}^2)\frac{(4{,}76\,\text{s})^2}{(2{,}53\,\text{s})^2} = \\ = 6{,}12{\cdot}10^{-4}\,\text{kg}{\cdot}\text{m}^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká by byla perioda kmitů torzního oscilátoru na obr. 16.9c, vzniklého spojením obou uvažovaných těles a jejich zavěšením na uvažované vlákno?

ŘEŠENÍ: Opět napíšeme dvakrát rov. (16.25), avšak tentokrát jako

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{\varkappa}} \quad \text{a} \quad T_c = 2\pi\sqrt{\frac{I_c}{\varkappa}}.$$

Sestavíme opět podíl druhého a prvního výrazu a dosadíme $I_c = I_a + I_b$. Dostaneme tak

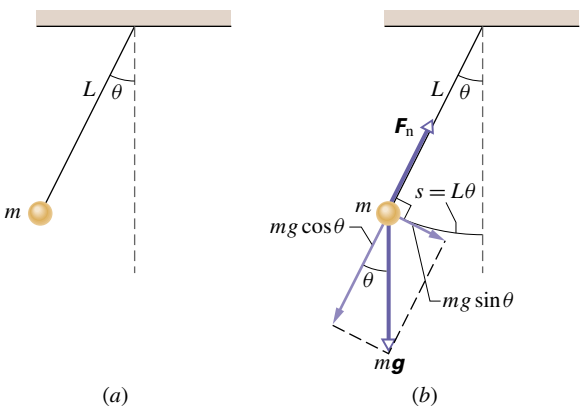
$$T_c = T_a\sqrt{\frac{I_c}{I_a}} = T_a\sqrt{\frac{I_a + I_b}{I_a}} = T_a\sqrt{1 + \frac{I_b}{I_a}} = \\ = (2{,}53\,\text{s})\sqrt{1 + \frac{(6{,}12{\cdot}10^{-4}\,\text{kg}{\cdot}\text{m}^2)}{(1{,}73{\cdot}10^{-4}\,\text{kg}{\cdot}\text{m}^2)}} = \\ = 5{,}39\,\text{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

16.6 KYVADLA

Nyní se zaměříme na jistou třídu harmonických oscilátorů, u nichž je vratný element spojen s gravitační silou, a nikoliv s elastickými vlastnostmi vlákna při jeho kroucení, popřípadě se stlačením a protažením pružiny.

Matematické kyvadlo

Upevněme dlouhé vlákno na nosník a zavěsme na jeho spodní konec jablko. Když jablko slabě vychýlíme a pak uvolníme, bude jeho další pohyb periodický. Avšak je toto kývání harmonický pohyb? V idealizované situaci budeme uvažovat **matematické kyvadlo**, abstraktní objekt, tvořený bodovou částicí o hmotnosti m (*závaží* kyvadla) a nehmotným pevným vláknem délky L. Vše je znázorněno na obr. 16.10a: závaží se volně houpe tam a zpět v rovině stránky, tj. doleva a doprava od svislé přímky vedené bodem závěsu.



Obr. 16.10 (a) Matematické kyvadlo. (b) Na závaží působí dvě síly: tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ a síla vlákna $\boldsymbol{F}_n$. Tečná složka tíhové síly $mg\sin\theta$ představuje vratnou sílu: snaží se vrátit závaží do rovnovážné polohy.

Setrvačný element tohoto kyvadla je spojen s částicí hmotnosti m. Vratný element spočívá v přitažlivém působení mezi částicí a Zemí. Změna potenciální energie je

určena změnou výšky částice nad povrchem Země; na vertikální pohyb závaží můžeme pohlížet jako na změnu délky „gravitační pružiny“.

Na závaží působí dvě síly, obě jsou zobrazeny na obr. 16.10b: tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ a síla vlákna $\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}$. Tíhovou sílu rozložíme na radiální složku $mg\cos\theta$ a na složku $mg\sin\theta$ tečnou k dráze částice, a ta právě představuje vratnou sílu. Působí totiž vždy proti výchylce částice a snaží se ji vrátit do *rovnovážné polohy* ($\theta = 0$), kde by byla, kdyby nekmitala. Napišme tedy vratnou sílu ve tvaru

$$F = -mg\sin\theta, \tag{16.26}$$

ve kterém záporné znamení upozorňuje, že síla působí proti výchylce.

Předpokládejme nyní, že úhel θ na obr. 16.10 je malý. Výraz $\sin\theta$ je tedy přibližně roven úhlu θ, vyjádřenému v radiánech. (Například pro $\theta = 5{,}00^\circ$, tj. pro $\theta = 0{,}087\,3$ rad, dostaneme $\sin\theta = 0{,}087\,2$ — odchylka činí pouze něco kolem 0,1 %.) Dále, výchylku částice s budeme měřit podél její obloukové trajektorie; je tedy rovna $L\theta$. Celkově nabývá rov. (16.26) pro malá θ tvar

$$F \approx -mg\theta. \tag{16.27}$$

Letmý pohled zpátky na rov. (16.9) nám ukazuje, že zde máme opět tvar podobný Hookovu zákonu. Roli výchylky x hraje nyní úhlová výchylka θ. Jestliže je tedy úhlová výchylka matematického kyvadla malá, můžeme jej pokládat za harmonický oscilátor, podobný soustavě pružina + těleso na obr. 16.5. Jinými slovy, kývání závaží je harmonický pohyb. Amplitudou úhlové výchylky θ je nyní **úhlová amplituda** θ_{m}, tj. největší úhel při kývání. Roli tuhosti pružiny k hraje veličina mg/L, tuhost „efektivní gravitační pružiny“ kyvadla.

Periodu kmitů matematického kyvadla získáme z rovnice (16.12), jestliže v ní za k dosadíme mg/L:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}}, \tag{16.28}$$

tedy celkově

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{(matematické kyvadlo).} \tag{16.29}$$

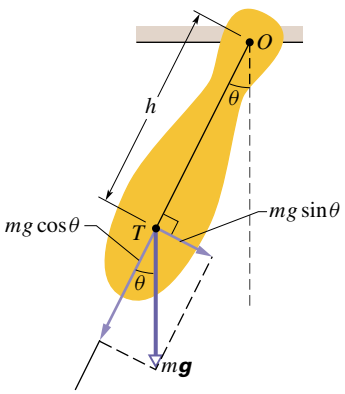
Rov. (16.29) platí pouze v případě, že úhlová amplituda kmitání θ_{m} je malá (pokud nebude řečeno jinak, považujeme tuto podmínku v úkolech této kapitoly za splněnou).

Může se zdát, že v rov. (16.29) chybí element setrvačnosti, protože perioda nám vyšla nezávislá na hmotnosti částice. Příčina je však patrná z rov. (16.28): vratná tendence, měřená tuhostí „efektivní gravitační pružiny“ mg/L, je sama o sobě úměrná hmotnosti částice. Obě hmotnosti se tedy v rov. (16.28) nakonec zkrátí.

I zde se během každého cyklu mění kinetická energie kyvadla v potenciální a naopak (obr. 8.7).

Fyzické kyvadlo

Skutečná kyvadla se většinou výrazně odlišují od kyvadla matematického. Na obr. 16.11 vidíme obecné **fyzické kyvadlo**; tak budeme nazývat skutečná kyvadla, kde hmota není soustředěna do jediného bodu. Tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ působí v těžišti T.



Obr. 16.11 Fyzické kyvadlo. Vratný silový moment je $(mg\sin\theta)(h)$. Při $\theta = 0$ se těžiště T nachází přímo pod bodem závěsu O.

Když vychýlíme kyvadlo na obr. 16.11 z rovnovážné polohy v libovolném směru o úhel θ, vznikne vratný silový moment M. Tento moment působí vzhledem k ose procházející bodem závěsu O a platí:

$$M = -(mg\sin\theta)(h). \tag{16.30}$$

Zde $mg\sin\theta$ je tečná složka tíhové síly $m\boldsymbol{g}$ a h (délka úsečky OT) je rameno síly pro tuto tečnou složku. Znaménko minus vyznačuje, že daný silový moment působí proti výchylce. Jinými slovy, silový moment se vždy snaží zmenšit úhel θ na nulu.

Nyní opět omezíme naše úvahy na případ malých výchylek, vezmeme tedy $\sin\theta \approx \theta$. Rov. (16.30) tak nabývá tvar

$$M \approx -(mgh)\theta. \tag{16.31}$$

Srovnání s rov. (16.24) ukazuje, že jde o analogický případ. V případě *malé* úhlové amplitudy θ_{m} vykonává fyzické kyvadlo harmonický pohyb. Výraz mgh v rov. (16.31) hraje nyní roli torzní konstanty $\varkappa$ z rov. (16.24). Jestliže tedy provedeme tuto substituci v rov. (16.25), dostaneme pro

periodu fyzického kyvadla vztah (stále za podmínky malé úhlové amplitudy θ_m)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad \text{(fyzické kyvadlo).} \qquad (16.32)$$

Zde I je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose, která prochází bodem závěsu kolmo k rovině kývání, a h je vzdálenost bodu závěsu od těžiště.

Intuitivně je jasné, že se fyzické kyvadlo nebude kývat, jestliže jej zavěsíme v těžišti; bude se ovšem otáčet. Náš vzorec pro dobu kmitu totiž platí jen pro malou výchylku, tj. malý úhel θ. V případě $h \to 0$ však i sebemenší podnět způsobí, že tato podmínka nebude splněna a že místo (malých) kyvů dojde prostě k otáčení kolem osy — podobně jako kdybychom do kyvadla s větším h velmi prudce vrazili. I frekvenci těchto otáček lze ovšem spočítat, ale nikoli podle vzorce (16.32) platného pro *malé* úhlové amplitudy.

Každému fyzickému kyvadlu, které kmitá kolem bodu závěsu O s periodou T, odpovídá matematické kyvadlo jisté délky L_0 kmitající se stejnou periodou T. Tuto tzv. **redukovanou délku** L_0 lze zjistit z rov. (16.29). Pro daný bod závěsu O fyzického kyvadla můžeme tak vždy určit tzv. **střed kyvu** — bod O', ležící na spojnici bodu závěsu O a těžiště ve vzdálenosti L_0 od bodu závěsu ve směru k těžišti. Necháme-li poté toto kyvadlo kývat kolem středu kyvu O' (jako tzv. **reverzní kyvadlo**), zjistíme, že se kývá se stejnou periodou T, jako když bylo zavěšeno v bodě O. Naopak, experimentálním nalezením bodů O, O' s touto vlastností lze určit L_0 a z něj a z periody T vypočítat velmi přesně hodnotu tíhového zrychlení g.

Poznamenejme ještě, že matematické kyvadlo lze pokládat za speciální případ fyzického kyvadla na obr. 16.11. Skutečně, v případě matematického kyvadla je vzdálenost h na obr. 16.11 jednoduše jeho délka L a moment setrvačnosti I je mL^2. Když tyto dvě veličiny dosadíme do rov. (16.32), vyjde nám

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

což je přesně rov. (16.29), tj. vztah pro periodu matematického kyvadla.

Měření tíhového zrychlení

Fyzickým kyvadlem lze měřit tíhové zrychlení g — tisíce takových měření bylo provedeno během geologických průzkumů.

Uvažme pro jednoduchost kyvadlo tvořené homogenní tyčí délky L, zavěšenou na jednom konci. Pro takové kyvadlo je veličina h v rov. (16.32), tj. vzdálenost mezi bodem závěsu a těžištěm, rovna $\frac{1}{2}L$. Dále potřebujeme znát moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose otáčení. Ta je kolmá k ose tyče a prochází jejím koncem; z tab. 11.2f zjistíme $I = \frac{1}{3}mL^2$. Nakonec dosadíme $h = \frac{1}{2}L$ a $I = \frac{1}{3}mL^2$ do rov. (16.32) a řešíme tuto rovnici vzhledem ke g. Výsledek je

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}. \qquad (16.33)$$

Jestliže tedy změříme délku tyče L a periodu kmitů T, můžeme vypočítat hodnotu g. (Pro zvýšení přesnosti měření se provádí celá řada vylepšení, například kyvadlo se pohybuje ve vakuové komoře).

KONTROLA 4: Tři fyzická kyvadla hmotností m_0, $2m_0$, a $3m_0$ (z různých materiálů), mají stejný tvar, velikost a bod závěsu. Seřaďte je sestupně podle jejich period kmitů.

PŘÍKLAD 16.6

Metrová tyč na obr. 16.12a, zavěšená na jednom konci, tvoří fyzické kyvadlo.

(a) Jaká je jeho perioda kmitání?

ŘEŠENÍ: Z tab. 11.2f zjistíme moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose otáčení, která je kolmá k ose tyče a prochází jejím koncem: $I = \frac{1}{3}mL^2$. Vzdálenost h bodu závěsu od těžiště, které je v bodě T na obr. 16.12a, je $\frac{1}{2}L$. Po dosazení těchto dvou veličin do rov. (16.32) dostaneme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2/3}{mg(L/2)}} =$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(1{,}00\,\mathrm{m})}{3(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}} =$$
$$= 1{,}64\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)} \qquad (16.34)$$

(b) Uvažme opět metrovou tyč na obr. 16.12a. Jaká je redukovaná délka L_0 mezi bodem závěsu O a středem kyvu?

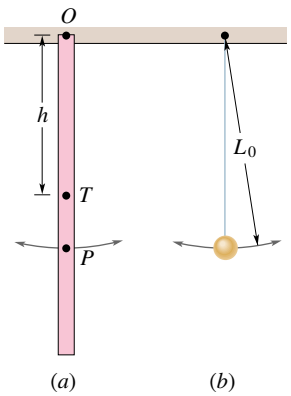
ŘEŠENÍ: K určení středu kyvu tyče potřebujeme znát délku L_0 matematického kyvadla (obr. 16.12b), jehož perioda se shoduje s periodou kmitů tyče. Musí se tedy shodovat pravé strany rov. (16.29) a (16.34):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

Tato podmínka již dává požadovanou délku

$$L_0 = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3}(100\,\mathrm{cm}) = 66{,}7\,\mathrm{cm}. \quad \text{(Odpověď)}$$

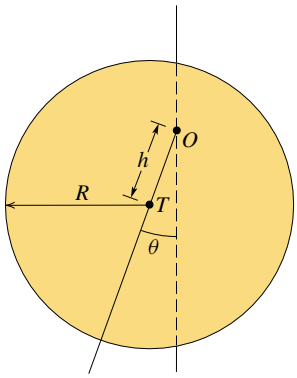
Vypočtená délka je rovna vzdálenosti bodu P na obr. 16.12a od bodu závěsu O. Bod P je tedy středem kyvu daného fyzického kyvadla vzhledem k danému bodu závěsu.



Obr. 16.12 Příklad 16.6. (a) Metrová tyč, zavěšená na jednom konci, tvoří fyzické kyvadlo. (b) Matematické kyvadlo, jehož délka L_0 je zvolena z podmínky rovnosti period obou kyvadel. Vzdálenost bodu P původního kyvadla (a) a bodu závěsu je L_0. Bod P je tedy střed kyvu původního kyvadla vzhledem k danému bodu závěsu.

PŘÍKLAD 16.7

Kotouč o poloměru $R = 12{,}5\,\text{cm}$ se otáčí kolem bodu O, umístěného ve vzdálenosti h od jeho středu T (obr. 16.13). Při $h = R/2$ má vzniklé fyzické kyvadlo periodu $T = 0{,}871\,\text{s}$. Jaké gravitační zrychlení g je v místě, ve kterém se kyvadlo nachází?



Obr. 16.13 Příklad 16.7. Fyzické kyvadlo je tvořeno homogenním diskem, volně pohyblivým kolem bodu závěsu O. Vzdálenost bodu závěsu O od těžiště T je rovna polovině poloměru disku.

ŘEŠENÍ: Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k ose, procházející jeho těžištěm ve směru kolmém k rovině disku, má hodnotu $I_T = \frac{1}{2}mR^2$. Podle Steinerovy věty je moment setrvačnosti vůči ose, procházející bodem O a rovnoběžné s popsanou těžišťovou osou

$$I = I_T + mh^2 = \tfrac{1}{2}mR^2 + m\left(\tfrac{1}{2}R\right)^2 = \tfrac{3}{4}mR^2.$$

V rov. (16.32) tedy uplatníme $I = \frac{3}{4}mR^2$ a $h = \frac{1}{2}R$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{3mR^2/4}{mg(R/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}.$$

Nakonec tuto rovnici vyřešíme vzhledem ke g:

$$g = \frac{6\pi^2 R}{T^2} = \frac{6\pi^2(0{,}125\,\text{m})}{(0{,}871\,\text{s})^2} = \\ = 9{,}76\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 16.8

Tučňák na obr. 16.14 se určitě vyzná ve vodních sportech. Právě se chystá ke skoku z homogenního skokanského prkna, které se vlevo volně otáčí kolem čepu a vpravo je pevně spojeno s pružinou. Délka prkna je $L = 2{,}0\,\text{m}$, jeho hmotnost $m = 12\,\text{kg}$, tuhost pružiny k činí $1\,300\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ a její hmotnost je zanedbatelná. Skok tučňáka vyvolá kmitání prkna a pružiny s malou amplitudou. Předpokládejme, že prkno je dostatečně pevné, takže se při kmitání neprohýbá. Nalezněte periodu kmitání T.

ŘEŠENÍ: Pružina působí na prkno proměnným momentem síly M (vzhledem k ose otáčení prkna). Prkno se proto v čepu otáčí s proměnným úhlovým zrychlením ε. Součástí úlohy je pružina a napadne nás, že vzniklé kmitání by mohl být harmonický pohyb. Ponechme však prozatím tuto otázku otevřenou. Místo toho použijeme nejprve rov. (11.30) spolu s rov. (11.35):

$$M = LF\sin 90^\circ = I\varepsilon. \qquad (16.35)$$

Zde I je moment setrvačnosti skokanského prkna při jeho otáčení kolem čepu, F je síla, kterou působí pružina na pravý konec prkna, a 90° je úhel, který svírá podélná osa prkna se směrem síly F.

Prkno představuje v podstatě tenkou tyč upevněnou na jednom konci, takže podle tab. 11.2f máme $I = mL^2/3$. Pružina vytváří sílu $F = -kx$, kde x je svislá lineární výchylka pravého konce prkna.

Tyto výrazy pro F a I dosadíme do druhého a třetího členu v rov. (16.35). Máme tedy

$$-Lkx = \frac{mL^2\varepsilon}{3}. \qquad (16.36)$$

Poslední rovnice představuje kombinaci lineární svislé výchylky x a úhlového zrychlení ε při rotaci prkna kolem čepu. Můžeme ji však přepsat do tvaru, který obsahuje pouze úhlové veličiny. Podle rov. (11.15) totiž platí

$$s = \theta r.$$

Zde θ je úhlová výchylka prkna při jeho rotaci kolem čepu, $r = L$ je poloměr této rotace a s značí délku oblouku, po kterém se pohybuje pravý konec prkna. Pro malé úhlové výchylky θ můžeme délku oblouku s aproximovat svislou výchylkou x. Napíšeme tedy $x = \theta L$ a dosadíme do rov. (16.36):

$$-Lk\theta L = \frac{mL^2\varepsilon}{3}.$$

Po jednoduché úpravě nakonec máme

$$\varepsilon = -\frac{3k}{m}\theta. \qquad (16.37)$$

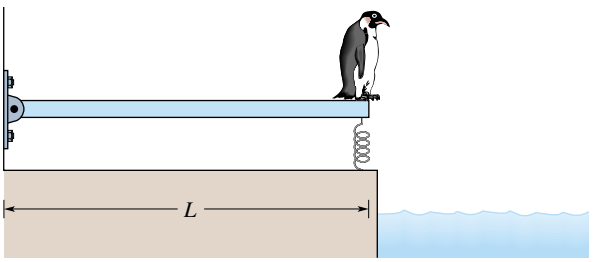
Tato rovnice je úhlová varianta základní rov. (16.7). Říká nám, že prkno skutečně vykonává harmonické kmity s úhlovým zrychlením ε a s úhlovou výchylkou θ. Srovnání rov. (16.37) a (16.7) navíc poskytuje úhlovou frekvenci pro tento oscilátor:

$$\omega^2 = \frac{3k}{m},$$

to znamená $\omega = \sqrt{3k/m}$. Nakonec uplatníme rov. (16.4), podle které $\omega = 2\pi/T$, a tedy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}} = 2\pi\sqrt{\frac{(12\,\mathrm{kg})}{3(1\,300\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}})}} = \\ = 0{,}35\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

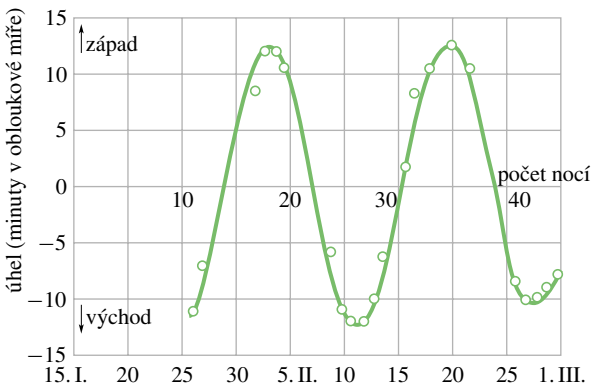
S překvapením zjišťujeme, že výsledná perioda nezávisí na délce prkna L. Kdybychom uvažovali působení tíhové síly prkna, dostali bychom stejný výsledek, avšak rovnovážná poloha by byla níž (viz příklad 16.3).



Obr. 16.14 Příklad 16.8. Skok tučňáka vyvolá kmitání pružiny a skokanského prkna. Na levém konci se prkno otáčí kolem čepu.

16.7 KMITÁNÍ A ROVNOMĚRNÝ KRUHOVÝ POHYB

V roce 1610 objevil Galileo s použitím svého nově sestrojeného dalekohledu čtyři hlavní měsíce planety Jupiter. Při pozorování, prováděném v průběhu několika týdnů, se každý z měsíců pohyboval tam a zpět v okolí planety. Dnes bychom asi řekli, že pohyb každého měsíce se jevil jako harmonický pohyb kolem disku Jupitera coby rovnovážné polohy. Záznamy těchto pozorování, psané Galileovou vlastní rukou, jsou dodnes poučné. A. P. French, pracovník MIT, sestrojil na základě Galileových záznamů časovou závislost zdánlivé polohy měsíce Callisto vzhledem k Jupiteru. Výslednou křivku vidíme na obr. 16.15: malé kroužky znázorňují přímo Galileovy hodnoty a samotná křivka představuje nejlepší aproximaci těchto hodnot, získanou vhodnými numerickými metodami. Křivka silně připomíná výchylku pro harmonický pohyb, určenou rov. (16.3). Perioda pohybu, odečtená přímo z grafu, činí přibližně 16,8 dnů.



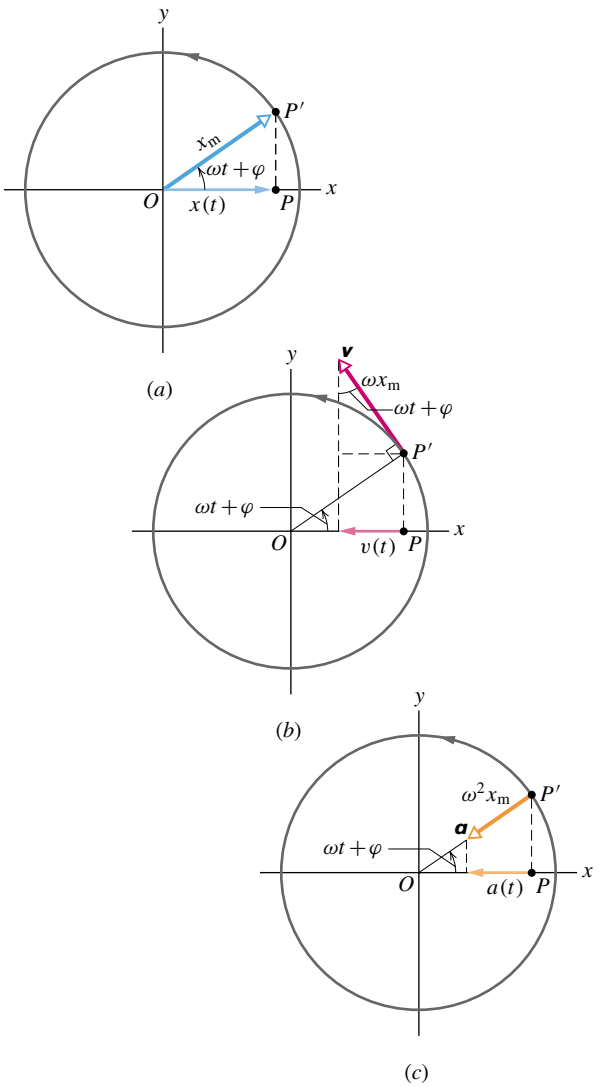
Obr. 16.15 Úhel mezi Jupiterem a jeho měsícem Callisto, měřený při pozorování ze Země. Malé kroužky odpovídají Galileově pozorování z roku 1610. Proložená křivka silně připomíná časovou závislost výchylky pro harmonický pohyb. Ze známé střední vzdálenosti Jupitera od Země spočteme, že 10 úhlových minut odpovídá oblouku délky zhruba $2{\cdot}10^6$ km. (Převzato z knihy A. P. French, *Newtonian Mechanics*, W. W. Norton & Comp., New York, 1971, p. 288.)

Ve skutečnosti však krouží Callisto kolem Jupitera s prakticky konstantní rychlostí po prakticky kruhové dráze. Jeho skutečný pohyb tedy není ani zdaleka harmonický; je to rovnoměrný kruhový pohyb. A to, co Galileo viděl, byla projekce rovnoměrného kruhového pohybu na přímku, ležící v rovině pohybu. Pozoruhodná Galileova měření nás tak přivádějí k závěru, že rovnoměrný kruhový pohyb, pozorovaný ze strany, dává harmonický pohyb. Řečeno formálněji:

Projekcí rovnoměrného kruhového pohybu na průměr kružnice, po níž kruhový pohyb probíhá, vzniká harmonický pohyb.

Na obr. 16.16a vidíme příklad takové projekce. *Referenční částice* P' vykonává rovnoměrný kruhový pohyb; pohybuje se (konstantní) úhlovou rychlostí ω po *referenční*

kružnici. Poloměr kružnice x_m udává současně velikost polohového vektoru částice. Úhel, který svírá průvodič částice s osou x v čase t, je roven $\omega t + \varphi$, kde φ je velikost tohoto úhlu v čase $t = 0$.



Obr. 16.16 (a) Referenční částice P' se rovnoměrně pohybuje po referenční kružnici o poloměru x_m. Polohu částice P získáme projekcí polohy P' na osu x. Částice P vykonává harmonický pohyb. (b) Projekcí vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$ referenční částice dostaneme rychlost harmonického pohybu. (c) Projekcí vektoru zrychlení $\boldsymbol{a}$ referenční částice dostaneme zrychlení harmonického pohybu.

Projekcí polohy částice P' na osu x dostaneme novou polohu. Řekněme, že se v ní nachází jiná částice, částice P. Jinými slovy, projekcí polohy částice P' na osu x dostaneme polohu $x(t)$ částice P. Snadno vidíme, že platí

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi).$$

To je přesně rov. (16.3). Náš závěr je tedy správný: jestliže referenční částice P' vykonává rovnoměrný kruhový pohyb, vykonává projektovaná částice P harmonický pohyb.

Tento vztah vrhá nové světlo na úhlovou frekvenci ω harmonického pohybu. Ukazuje nám, odkud se vzalo adjektivum „úhlová“. Veličina ω je jednoduše konstantní úhlová rychlost pohybu referenční částice P' po referenční kružnici; fázová konstanta φ je určena polohou referenční částice P' na referenční kružnici v čase $t = 0$.

Na obr. 16.16b vidíme rychlost referenční částice P'. Velikost vektoru rychlosti je ωx_m, jeho projekcí na osu x dostaneme

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi),$$

což je přesně rov. (16.5). Rychlost částice P na obr. 16.16*b* míří doleva, ve směru klesající výchylky x. Tomu odpovídá záporné znaménko v uvedeném vzorci pro rychlost.

Obr. 16.16c ukazuje zrychlení referenční částice P'. Velikost vektoru zrychlení $\omega^2 x_m$ a jeho projekce na osu x má tvar

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi),$$

tedy přesně tvar rov. (16.6). Ať už tedy zkoumáme výchylku, rychlost nebo zrychlení, projekcí rovnoměrného kruhového pohybu dostaneme vskutku harmonický pohyb.

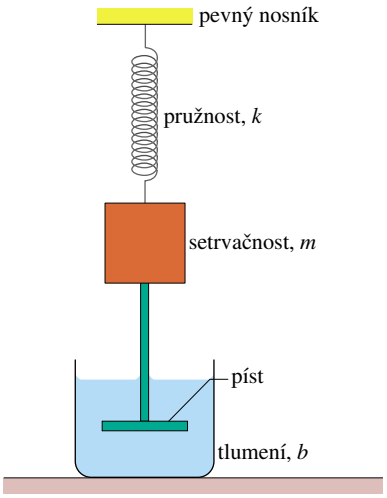
16.8 TLUMENÝ OSCILÁTOR

Kyvadlo ponořené do vody se patrně vůbec kývat nebude; bude se třít o vodu natolik, že se jeho pohyb rychle utlumí. Lepší je to u kyvadla ve vzduchu, ale i zde se pohyb po čase zastaví, protože vzduch opět působí na kyvadlo třecí silou, a tím mu odebírá mechanickou energii. Tření působí také v bodě závěsu kyvadla.

Jestliže vnější síla tlumí pohyb oscilátoru, hovoříme o **tlumeném** oscilátoru, popřípadě o **tlumeném** kmitání. Idealizovaný příklad tlumeného oscilátoru vidíme na obr. 16.17: těleso o hmotnosti m kmitá na pružině tuhosti k. Těleso je spojeno tyčí s pístem, ponořeným v kapalině (hmotu tyče i pístu zanedbáme). Při pohybu pístu nahoru a dolů působí na něj (a tedy na celý kmitající systém) kapalina brzdnou třecí silou. V průběhu času se mechanická energie soustavy pružina + těleso zmenšuje, její část se spotřebuje na zahřátí kapaliny a pístu.

Předpokládejme, že **brzdná síla** $\boldsymbol{F}_b$, kterou působí kapalina na píst, je úměrná rychlosti $\boldsymbol{v}$ pístu a tělesa (tento předpoklad splněn, pokud se píst pohybuje pomalu). Je tedy

$$F_b = -bv, \qquad (16.38)$$



Obr. 16.17 Idealizovaný příklad tlumeného harmonického oscilátoru. Píst ponořený do kapaliny působí na kmitající těleso tlumící silou.

kde b je **součinitel útlumu**. Tato konstanta závisí na vlastnostech pístu a kapaliny. Její jednotka v soustavě SI je $\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$. Záporné znaménko ukazuje, že třecí síla působí vždy proti rychlosti. Na hmotné těleso tak působí výsledná síla

$$F_\mathrm{v} = -kx - bv$$

neboli, jestliže položíme $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$,

$$F_\mathrm{v} = -kx - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \qquad (16.39)$$

Tuto celkovou sílu dosadíme do druhého Newtonova zákona. Výsledkem je diferenciální rovnice

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0,$$

jejímž řešením je funkce

$$x(t) = x_\mathrm{m}\mathrm{e}^{-bt/(2m)}\cos(\omega' t + \varphi), \qquad (16.40)$$

kde úhlová frekvence ω' tlumeného oscilátoru je dána výrazem

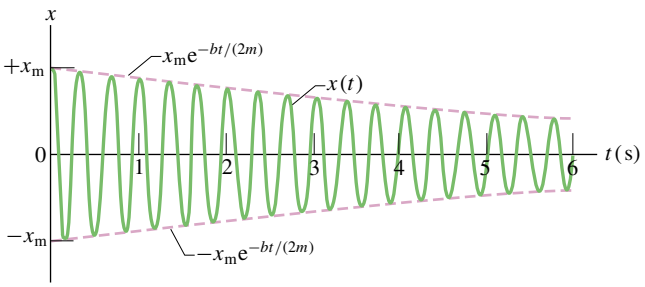
$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \qquad (16.41)$$

Jestliže tlumení úplně chybí, tj. jestliže $b = 0$, redukuje se rov. (16.41) na rov. (16.11) a dostáváme známý výraz $\omega = \sqrt{k/m}$ pro úhlovou frekvenci netlumeného oscilátoru. Podobně se v tomto případě rov. (16.40) redukuje na rov. (16.3) pro výchylku netlumeného oscilátoru. Jestliže je tlumení slabé, přesněji jestliže $b \ll \sqrt{km}$, platí $\omega' \doteq \omega$. Jestliže je naopak tlumení silné, bude při jisté kritické hodnotě součinitelu útlumu $b_\mathrm{c} = 2\sqrt{km}$ výraz pod odmocninou v rov. (16.41) nulový a při ještě větším tlumení dokonce záporný. Řešení diferenciální rovnice se pak kvalitativně mění. Rozborem tohoto **aperiodického pohybu** se nebudeme dále zabývat.

Funkce v rov. (16.40) se chová jako oscilující funkce s postupně klesající amplitudou $x_\mathrm{m}\mathrm{e}^{-bt/(2m)}$. Tento závěr je také naznačen na obr. 16.18. Jak jsme viděli dříve, v případě netlumeného oscilátoru je mechanická energie konstantní a je dána rov. (16.23): $E = \frac{1}{2}kx_\mathrm{m}^2$. U tlumeného oscilátoru mechanická energie s časem klesá. Pro slabé tlumení můžeme amplitudu x_m v rov. (16.23) nahradit výrazem $x_\mathrm{m}\mathrm{e}^{-bt/(2m)}$. Získáme tak závislost

$$E(t) \approx \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{m}^2\mathrm{e}^{-bt/m}, \qquad (16.42)$$

která nám říká, že mechanická energie tlumeného oscilátoru klesá exponenciálně s časem.



Obr. 16.18 Časová závislost výchylky tlumeného oscilátoru na obr. 16.17. Použité parametry odpovídají hodnotám v př. 16.9. Amplituda kmitání, určená výrazem $x_\mathrm{m}\mathrm{e}^{-bt/(2m)}$, klesá exponenciálně s časem.

PŘÍKLAD 16.9

Tlumený oscilátor na obr. 16.17 je popsán parametry $m = 250\,\mathrm{g}$, $k = 85\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ a $b = 70\,\mathrm{g{\cdot}s^{-1}}$.

(a) Určete periodu kmitání.

ŘEŠENÍ: Protože platí $b \ll \sqrt{km} = 4{,}6\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$, perioda je přibližně určena výrazem pro netlumený oscilátor. Z rov. (16.12) dostaneme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{(0{,}25\,\mathrm{kg})}{(85\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}})}} =$$
$$= 0{,}34\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Za jak dlouho se zmenší amplituda kmitání na polovinu své počáteční velikosti?

ŘEŠENÍ: Závislost amplitudy na čase t je určena rovnicí (16.40). Amplituda klesá podle vztahu $x_m e^{-bt/(2m)}$. Její počáteční velikost v čase $t = 0$ je x_m. Hledáme tedy takový čas t, který splňuje rovnici

$$x_m e^{-bt/(2m)} = \tfrac{1}{2} x_m.$$

Obě strany rovnice dělíme x_m a srovnáme přirozený logaritmus obou stran nové rovnice:

$$\ln \tfrac{1}{2} = \ln(e^{-bt/(2m)}) = -\frac{bt}{2m}$$

neboli

$$t = \frac{-2m \ln(1/2)}{b} = \frac{-2(0{,}25\,\mathrm{kg})(\ln(1/2))}{(0{,}070\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}})} = 5{,}0\,\mathrm{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Na základě výsledku části (a) můžeme také říci, že za vypočtenou dobu proběhne přibližně 15 kmitů.

(c) Za jak dlouho se zmenší mechanická energie oscilátoru na polovinu své počáteční velikosti?

ŘEŠENÍ: Vyjdeme z rov. (16.42): mechanická energie v čase t je rovna $\frac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}$, její velikost v čase $t = 0$ byla $\frac{1}{2}kx_m^2$. Hledáme tedy takový čas t, který splňuje rovnici

$$\tfrac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}kx_m^2\right).$$

Obě strany rovnice dělíme $\frac{1}{2}kx_m^2$ a novou rovnici řešíme vzhledem k neznámé t, podobně jako v části (b). Nakonec dostaneme

$$t = \frac{-m \ln(1/2)}{b} = \frac{-(0{,}25\,\mathrm{kg})(\ln(1/2))}{(0{,}070\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}})} = 2{,}5\,\mathrm{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Výsledkem je tedy přesně polovina doby, vypočtené v části (b) úlohy, tj. přibližně 7,5 period. Nakonec poznamenejme, že číselné hodnoty parametrů z této vzorové úlohy byly použity na obr. 16.18.

KONTROLA 5: Uvažme tři tlumené oscilátory podle obr. 16.17. Jejich parametry jsou zadány v následující tabulce. Ve druhém sloupci tabulky je tuhost pružiny, ve třetím konstanta útlumu a ve čtvrtém hmotnost tělesa.

oscilátor 1	$2k_0$	b_0	m_0
oscilátor 2	k_0	$6b_0$	$4m_0$
oscilátor 3	$3k_0$	$3b_0$	m_0

Uspořádejte oscilátory sestupně podle doby, za kterou klesne jejich mechanická energie na jednu čtvrtinu své počáteční hodnoty.

16.9 NUCENÉ KMITY A REZONANCE

Když se někdo pasivně houpá na houpačce, je to příklad *volného kmitání*. Jestliže nějaká další osoba houpačku navíc periodicky tahá nebo tlačí, jako na obr. 16.19, probíhá *nucené kmitání*. V tomto případě se musíme zabývat *dvěma* úhlovými frekvencemi. (1) *Vlastní* úhlová frekvence ω je úhlová frekvence systému náhle vyvedeného z rovnováhy a pak ponechaného volně kmitat. (2) Úhlová frekvence ω_b vnější budicí síly.



Obr. 16.19 Z fyzikálního hlediska jsou na obraze Nikolase Lancreta naznačeny dvě frekvence: (1) vlastní frekvence, tj. frekvence, s jakou by se slečna houpala, kdyby byla ponechána sama o sobě, a (2) frekvence, s jakou tahá její přítel za provaz. Rezonance nastane, jsou-li tyto frekvence shodné.

K představě nuceného kmitání harmonického oscilátoru použijeme opět obr. 16.17. Musíme ovšem předpokládat, že se „pevný nosník" nyní pohybuje harmonicky nahoru a dolů s námi určenou úhlovou frekvencí ω_b. U takového oscilátoru se nakonec ustaví nucené kmity s úhlovou frekvencí ω_b budicí síly a s výchylkou

$$x(t) = x_m \cos(\omega_b t + \varphi), \qquad (16.43)$$

kde x_m je amplituda nucených kmitů.

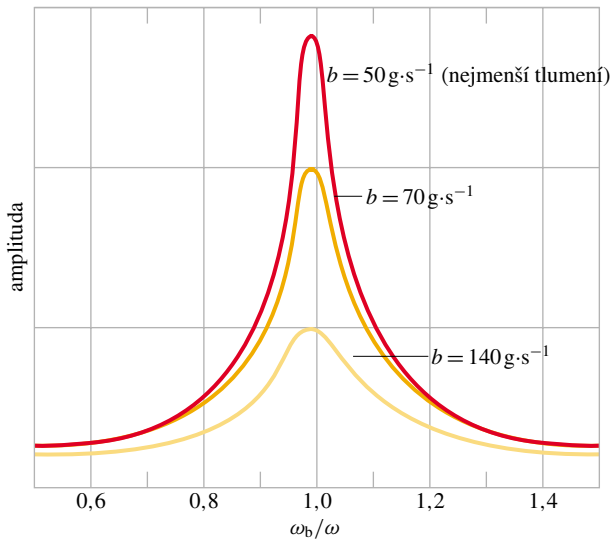
Velikost amplitudy výchylky x_m je dána poměrně komplikovanou funkcí proměnných ω a ω_b. Jednodušší je popsat amplitudu rychlosti nucených kmitů v_m: amplituda rychlosti je největší, jestliže splníme podmínku

$$\omega_b = \omega \quad \text{(rezonance)}. \qquad (16.44)$$

Tato podmínka **rezonance** je současně *přibližnou* podmínkou pro největší amplitudu nucených kmitů x_m. Jestliže strkáme houpačku s frekvencí rovnou její vlastní frekvenci, dosáhneme velké amplitudy výchylky i amplitudy rychlosti. Děti k tomu dospějí velmi rychle metodou zkoušek

a omylů. Jestliže strkáme s jinou frekvencí, buď vyšší, nebo nižší, amplitudy výchylky a rychlosti nucených kmitů budou malé.

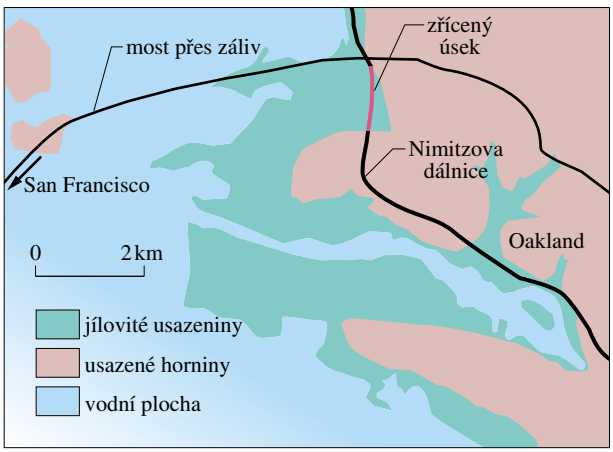
Na obr. 16.20 je zobrazena závislost amplitudy výchylky nucených kmitů na úhlové frekvenci budicí síly pro tři hodnoty konstanty útlumu b. Všimněte si, že ve všech třech případech je amplituda nucených kmitů největší přibližně pro $\omega_b/\omega = 1$, to znamená přibližně při splnění rezonanční podmínky rov. (16.44). Z křivek na obr. 16.20 je patrna i následující závislost: čím je tlumení slabší, tím je *rezonanční vrchol* vyšší a užší.



Obr. 16.20 Amplituda výchylky nucených kmitů x_m se mění v závislosti na úhlové frekvenci ω_b budicí síly. Amplituda je největší přibližně při $\omega_b/\omega = 1$, tj. přibližně při splnění rezonanční podmínky. Křivky na obrázku odpovídají třem různým hodnotám konstanty útlumu b.

Všechny mechanické soustavy vykazují jednu nebo více vlastních frekvencí. Když na ně působí velká vnější budicí síla s frekvencí, která je v blízkosti jedné z vlastních frekvencí soustavy, mohou vznikající nucené kmity způsobit mechanické porušení. Například letečtí konstruktéři musí zajistit, aby se vlastní frekvence křídel lišila od frekvence pístů při letových otáčkách motoru. Bylo by pochopitelně nebezpečné, kdyby se při určitých otáčkách motoru začalo křídlo divoce třepat.

Příkladem destruktivního působení rezonance je i zřícení 1,4 km dlouhého úseku Nimitzovy dálnice, které jsme viděli na úvodní fotografii této kapitoly. Při průchodu seizmických vln danou oblastí došlo ke kmitání podloží s největší amplitudou rychlosti na úhlové frekvenci okolo $9\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Tato frekvence odpovídá téměř přesně vlastní úhlové frekvenci horizontálních konstrukčních dílů dálnice. Příčina toho, že ke zřícení došlo právě jen v uvedeném úseku, je patrna na obr. 16.21: dálnice zde byla postavena na volně členěném jílovitém podloží, které během otřesů vykazovalo *přinejmenším pětkrát větší* amplitudu rychlosti, než tomu bylo u skalnatého podloží v ostatních úsecích dálnice.



Obr. 16.21 Geologická struktura části Oaklandu v okolí zálivu San Francisco s vyznačením zříceného úseku Nimitzovy dálnice. (Převzato z článku „Sediment-Induced Amplification and the Collapse of the Nimitz Freeway“ autorů S. E. Hougha a ostatních, uveřejněného v časopise *Nature* 26. dubna 1990).

Parametrická rezonance

Slečna z obr. 16.19, ale houpající se sama bez pomoci přítele, stejně jako samostatně se houpající děti na obr. 16.1 jsou příkladem nového jevu — není to výše popsaná rezonance při působení vnější budicí síly, ale tzv. **parametrická rezonance**. Při ní se soustava udržuje v kmitání tím, že se pravidelně mění její vhodný *vnitřní parametr*. V tomto případě se kýváním nohama vsedě anebo pokrčováním nohou vestoje mění moment setrvačnosti houpačky s pasažérem vůči ose rotace. Oproti obyčejné rezonanci jsou zde některé pozoruhodné rozdíly. Jeden úplný kmit houpačky je, řekněme, od levé krajní polohy přes nejnižší polohu, pravou krajní polohu, opět nejnižší polohu a zpět do výchozí levé krajní polohy. Během něj se ale dítě skrčí dvakrát — jde do kolen vždy, když jde houpačka dolů do nejnižší polohy! Rezonanční frekvence ω_p tohoto mechanismu houpání je tedy zřejmě dvojnásobná oproti vlastní frekvenci ω houpačky; platí $\omega_p = 2\omega$. Další zvláštní odchylkou od nucených kmitů je to, že parametrickou rezonancí lze sice zesílit už existující kmity, ale nelze se s ní rozhoupat z naprostého klidu. Matematické vyšetřování takových kmitů je však i v nejjednodušším případě mnohem náročnější.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Frekvence

Libovolný periodický pohyb (libovolné kmitání) má svou *frekvenci* f, určující počet kmitů za jednu sekundu. V systému SI je jednotkou frekvence hertz:

$$1\ \text{hertz} = 1\ \text{Hz} = 1\ \text{kmit za sekundu} = 1\ \text{s}^{-1}. \qquad (16.1)$$

Perioda

Perioda T je čas potřebný k provedení jednoho úplného kmitu (jednoho úplného cyklu pohybu). Perioda souvisí s frekvencí vztahem

$$T = \frac{1}{f}. \qquad (16.2)$$

Harmonický pohyb

V případě *harmonického pohybu* je výchylka částice z rovnovážné polohy popsána vztahem

$$x(t) = x_\text{m}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{(výchylka)}, \qquad (16.3)$$

ve kterém x_m je *amplituda* výchylky, veličina $(\omega t + \varphi)$ je *fáze* pohybu a φ je *fázová konstanta*. *Úhlová frekvence* ω souvisí s periodou a s frekvencí pohybu vztahy

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad \text{(úhlová frekvence)}. \qquad (16.4)$$

První a druhá derivace rov. (16.3) určují časovou závislost rychlosti a zrychlení částice během harmonického pohybu:

$$v(t) = -\omega x_\text{m}\sin(\omega t + \varphi) \quad \text{(rychlost)}, \qquad (16.5)$$

$$a(t) = -\omega^2 x_\text{m}\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{(zrychlení)}. \qquad (16.6)$$

Kladná veličina ωx_m v rov. (16.5) se nazývá *amplituda rychlosti* pohybu v_m. Kladná veličina $\omega^2 x_\text{m}$ v rov. (16.6) se nazývá *amplituda zrychlení* pohybu a_m.

Harmonický oscilátor

Jestliže částici o hmotnosti m vrací do rovnovážné polohy síla úměrná výchylce, tj. $F = -kx$, dojde k harmonickému kmitání s parametry ω a T, kde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(úhlová frekvence)} \qquad (16.11)$$

a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \text{(perioda)}. \qquad (16.12)$$

Takový systém se nazývá harmonický oscilátor.

Energie

Částice, která vykonává harmonický pohyb, má v libovolném čase kinetickou energii $E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2$ a polohovou energii $E_\text{p} = \frac{1}{2}kx^2$. Jestliže neuvažujeme tření, zůstává celková mechanická energie $E = E_\text{k} + E_\text{p}$ během pohybu konstantní, zatímco E_k a E_p se mění.

Kyvadla

Harmonický pohyb vykazují například torzní kyvadlo na obrázku 16.8, matematické kyvadlo na obr. 16.10 a fyzické kyvadlo na obr. 16.11. V případě malých výchylek je pro tyto systémy perioda určena po řadě vztahy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\varkappa}} \qquad \text{(torzní kyvadlo)}, \qquad (16.25)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{(matematické kyvadlo)} \qquad (16.29)$$

a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \qquad \text{(fyzické kyvadlo)}. \qquad (16.32)$$

Ve všech případech se ve výrazu pro periodu objevuje podíl „setrvačného“ členu a „vratného“ členu. Vratný člen vyjadřuje velikost tendence k návratu do rovnovážné polohy.

Kmitání a rovnoměrný kruhový pohyb

Harmonický pohyb vzniká také projekcí rovnoměrného kruhového pohybu na průměr kružnice, po níž kruhový pohyb probíhá. Obr. 16.16 ukazuje, jak všechny parametry rovnoměrného kruhového pohybu (poloha, rychlost a zrychlení) přecházejí uvedenou projekcí na odpovídající hodnoty pro harmonický pohyb.

Tlumený oscilátor

U reálných kmitajících systémů se mechanická energie E během pohybu postupně zmenšuje, protože působí brzdné třecí síly, které převádějí mechanickou energii na teplo. Říkáme, že pohyb reálného oscilátoru je tlumený. V případě, kdy je brzdná síla určena vztahem $F_\text{b} = -bv$, kde v je rychlost oscilátoru a b je *konstanta útlumu*, má časová závislost výchylky oscilátoru tvar

$$x(t) = x_\text{m}\text{e}^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \varphi), \qquad (16.40)$$

kde ω' je úhlová frekvence tlumeného oscilátoru, určená vztahem

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \qquad (16.41)$$

Pro malou hodnotu konstanty útlumu ($b \ll \sqrt{km}$) tedy máme $\omega' \doteq \omega$, kde ω je úhlová frekvence netlumeného oscilátoru. Pro

malá b ubývá mechanická energie oscilátoru podle vztahu

$$E(t) \approx \tfrac{1}{2}kx_{\mathrm{m}}^2 \mathrm{e}^{-bt/m}. \qquad (16.42)$$

Nucené kmity a rezonance

Jestliže na systém s *vlastní* úhlovou frekvencí ω působí vnější budicí síla s úhlovou frekvencí ω_{b}, systém se rozkmitá s úhlovou frekvencí ω_{b}. Amplituda rychlosti nucených kmitů je přitom největší při splnění podmínky rezonance

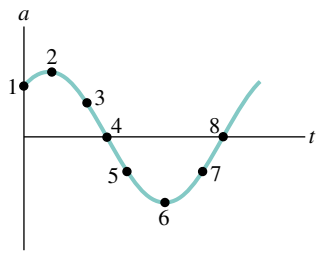
$$\omega_{\mathrm{b}} = \omega. \qquad (16.44)$$

Při malém tlumení je za téže podmínky největší amplituda výchylky x_{m}.

OTÁZKY

1. Který z následujících vztahů mezi zrychlením a a polohou částice x implikuje harmonický pohyb: (a) $a = 0{,}5x$, (b) $a = 400x^2$, (c) $a = -20x$ a (d) $a = -3x^2$?

2. Na obr. 16.22 je vynesena časová závislost zrychlení $a(t)$ pro částici, která vykonává harmonický pohyb. (a) Kterému z číslovaných bodů odpovídá poloha $-x_{\mathrm{m}}$? (b) Je rychlost částice v bodě 4 kladná, záporná, nebo nulová? (c) Odpovídá bodu 5 poloha částice $-x_{\mathrm{m}}$, $+x_{\mathrm{m}}$, 0, mezi $-x_{\mathrm{m}}$ a 0, nebo mezi 0 a $+x_{\mathrm{m}}$?



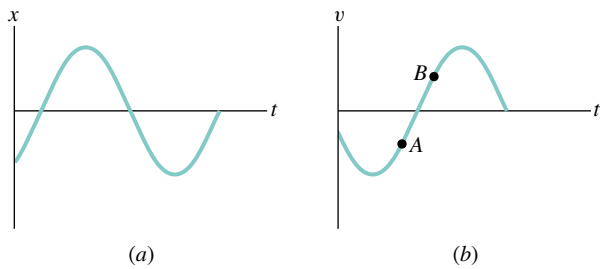
Obr. 16.22 Otázka 2

3. Výchylka kmitající částice je popsána vztahem

$$x = x_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi).$$

Určete, zda se částice v čase $t = 0$ nachází v $-x_{\mathrm{m}}$, v $+x_{\mathrm{m}}$, v počátku, mezi $-x_{\mathrm{m}}$ a 0, nebo mezi 0 a $+x_{\mathrm{m}}$, jestliže je φ rovno (a) $\pi/2$, (b) $-\pi/3$, (c) $-3\pi/4$ a (d) $3\pi/4$.

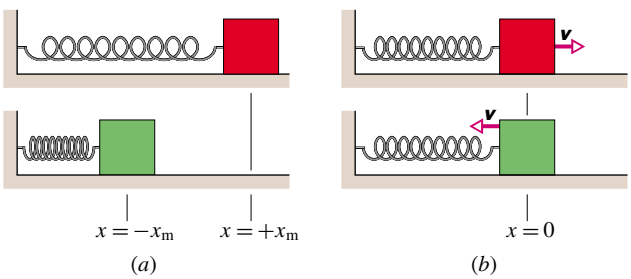
4. Která z následujících relací popisuje fázovou konstantu φ pro harmonický pohyb na obr. 16.23a: (a) $-\pi < \varphi < -\pi/2$, (b) $\pi < \varphi < 3\pi/2$, nebo (c) $-3\pi/2 < \varphi < -\pi$?



Obr. 16.23 Otázky 4 a 5

5. Na obr. 16.23b vidíme rychlost částice, která vykonává harmonický pohyb. Určete, zda částice s rychlostí odpovídající (a) bodu A na grafu a (b) bodu B na grafu je v klidu, pohybuje se směrem k bodu $-x_{\mathrm{m}}$, nebo se pohybuje směrem k bodu x_{m}. Dále určete, zda se částice s rychlostí odpovídající (c) bodu A na grafu a (d) bodu B na grafu nachází v bodě $-x_{\mathrm{m}}$, v bodě x_{m}, v bodě 0, mezi $-x_{\mathrm{m}}$ a 0, nebo mezi 0 a x_{m}. Nakonec rozhodněte, zda se rychlost odpovídající (e) bodu A na grafu a (f) bodu B zvětšuje, nebo zmenšuje.

6. Na obr. 16.24 vidíme čtyři oscilátory s vesměs stejně tuhými pružinami a stejně hmotnými tělesy. Jaký je fázový rozdíl dvou oscilátorů (a) na obr. 16.24a a (b) na obr. 16.24b? (c) Jaký je fázový rozdíl červeného oscilátoru na obr. 16.24a a zeleného oscilátoru na obr. 16.24b?



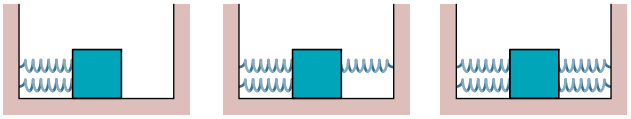
Obr. 16.24 Otázka 6

7. Pružina a těleso tvoří harmonický oscilátor umístěný (1) na vodorovné hladké podložce jako na obr. 16.5, (2) na nakloněné hladké podložce, svírající 45° s vodorovnou rovinou (těleso je připevněno ke spodnímu konci pružiny), a (3) svisle s pružinou upevněnou na stropě a tělesem zavěšeným na pružině. Uspořádejte oscilátory v sestupném smyslu podle (a) protažení pružiny v rovnovážné poloze oscilátoru, (b) frekvence kmitání.

8. Tři pružiny jsou upevněny na stropě a na jejich spodní konce jsou zavěšena tři tělesa. Hmotnosti těles jsou $m_1 > m_2 > m_3$. V klidovém stavu jsou protažení pružin vesměs stejná. U každé soustavy vyvoláme harmonický pohyb ve svislém směru. Uspořádejte soustavy v sestupném smyslu podle periody kmitů.

9. Na obr. 16.25 vidíme tři zařízení složená z tělesa a identických pružin. Centrální poloha tělesa odpovídá nezatížené délce pružin. Seřaďte zařízení sestupně podle frekvence kmitů.

10. Těleso hmotnosti m je zavěšeno na pružině tuhosti k. U soustavy vyvoláme harmonický pohyb ve svislém směru. Poté pružinu rozpůlíme a na jednu její polovinu zavěsíme totéž těleso.



(1) (2) (3)

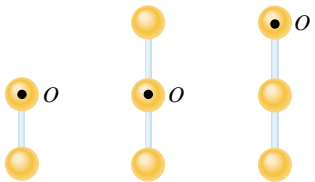
Obr. 16.25 Otázka 9

Opět vyvoláme kmitání. Vykazuje vyšší frekvenci oscilátor s původní, nebo se zkrácenou pružinou?

11. Jestliže zatížíme svisle visící pružinu A tělesem hmotnosti m_1 a svisle visící pružinu B tělesem menší hmotnosti m_2, bude protažení obou pružin stejné. Nyní vyvoláme u obou soustav (pružina + těleso) harmonický pohyb se stejnou amplitudou výchylky. Který z obou oscilátorů má větší mechanickou energii?

12. Amplituda výchylky jistého harmonického oscilátoru byla zdvojnásobena. Určete, zda se následující veličiny zvětší, zmenší, nebo zůstanou stejné: (a) perioda, (b) tuhost pružiny, (c) celková mechanická energie, (d) maximální rychlost a (e) maximální zrychlení.

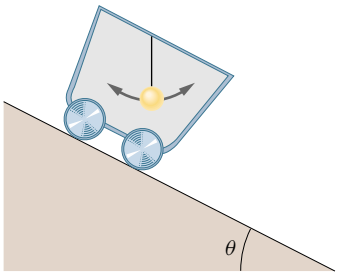
13. Na obr. 16.26 vidíme tři fyzická kyvadla tvořená identickými homogenními koulemi vesměs téže hmotnosti, pevně spojenými stejně dlouhými tyčemi zanedbatelné hmotnosti. Každé kyvadlo se otáčí kolem vyznačeného bodu závěsu O. Seřaďte kyvadla v sestupném smyslu podle period jejich kmitů.



Obr. 16.26 Otázka 13

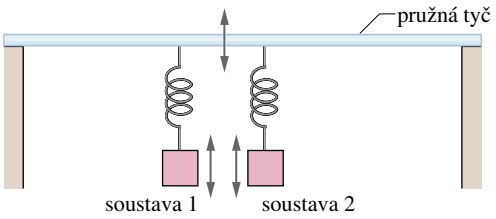
14. Na stropě kabiny stojícího výtahu je zavěšeno kyvadlo. Perioda jeho kmitů je T. Určete, zda se perioda zvětší, zmenší, nebo zůstane stejná, jestliže se kabina výtahu pohybuje (a) konstantní rychlostí směrem nahoru, (b) konstantní rychlostí směrem dolů, (c) dolů s konstantním zrychlením ve směru nahoru, (d) nahoru s konstantním zrychlením ve směru nahoru, (e) nahoru se zrychlením $a = g$ ve směru dolů a (f) dolů se zrychlením $a = g$ ve směru dolů.

15. Ve vozíku, stojícím na vodorovné ploše, je upevněno kyvadlo. Perioda jeho kmitů je T. Určete, zda se perioda zvětší, zmenší, nebo zůstane stejná, jestliže vozík umístíme na nakloněné rovině, skloněné o úhel θ vzhledem k rovině vodorovné (obr. 16.27) a jestliže se vozík (a) nepohybuje, (b) pohybuje s konstantní rychlostí po nakloněné rovině směrem dolů, (c) pohybuje s konstantní rychlostí po nakloněné rovině směrem nahoru, (d) pohybuje po nakloněné rovině směrem nahoru s konstantním zrychlením, orientovaným podél nakloněné roviny směrem nahoru, (e) pohybuje po nakloněné rovině směrem dolů s konstantním zrychlením, orientovaným podél nakloněné roviny směrem nahoru, (f) pohybuje po nakloněné rovině směrem dolů s konstantním zrychlením $a = g \sin\theta$, orientovaným podél nakloněné roviny směrem dolů, a (g) pohybuje po nakloněné rovině směrem nahoru s konstantním zrychlením $a = g \sin\theta$, orientovaným podél nakloněné roviny směrem dolů.



Obr. 16.27 Otázka 15

16. Máme sestrojit přístroj pro přenos kmitání na obr. 16.28. Přístroj je složen ze dvou soustav pružina + těleso. Obě pružiny jsou upevněny na pružné tyči. Jestliže protáhneme pružinu první soustavy a pak ji uvolníme, vznikne harmonický pohyb s frekvencí f_1. Kmitání se přenáší na tyč a ta působí budicí silou na druhou soustavu. Vynucující síla tedy osciluje s frekvencí f_1. Při konstrukci přístroje si máme vybrat ze čtyř pružin a čtyř hmotných těles: tuhosti pružin k jsou $1\,600\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, $1\,500\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, $1\,400\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ a $1\,200\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, hmotnosti těles m jsou 800 kg, 500 kg, 400 kg a 200 kg. Naším cílem je dosáhnout maximální amplitudy kmitů u druhé soustavy. Kterou pružinu a které těleso vyberete pro jednotlivé soustavy? Řešte bez provádění detailního výpočtu.



Obr. 16.28 Otázka 16

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 16.3 Pohybová rovnice pro harmonický pohyb

1C. Uvažujme harmonicky kmitající těleso. Doba mezi dvěma po sobě následujícími okamžiky, ve kterých je rychlost tělesa nulová, činí 0,25 s. Prostorová vzdálenost poloh tělesa v těchto dvou okamžicích je 36 cm. Vypočtěte (a) periodu, (b) frekvenci, a (c) amplitudu pohybu.

2C. Pohyb závaží kmitajícího na pružině se od jistého časového okamžiku začíná po 0,75 s opakovat. Nalezněte (a) periodu po-

hybu, (b) frekvenci v hertzích a (c) úhlovou frekvenci v radiánech za sekundu.

3C. Závaží o hmotnosti 4,00 kg je zavěšeno na pružinu. Pružina se tím prodlouží o 16,0 cm vzhledem ke své nezatížené délce. (a) Jaká je tuhost pružiny? (b) Dané závaží odstraníme a na tutéž pružinu zavěsíme závaží o hmotnosti 0,500 kg. Poté pružinu ještě poněkud protáhneme a uvolníme. Jaká bude perioda vzniklých kmitů?

4C. Oscilátor je tvořen závažím o hmotnosti 0,500 kg zavěšeným na pružině. Jestliže ho rozkmitáme s amplitudou 35,0 cm, pohyb se po každých 0,500 s opakuje. Nalezněte (a) periodu kmitání, (b) jeho frekvenci, (c) úhlovou frekvenci, (d) tuhost pružiny, (e) největší rychlost závaží a (f) největší sílu působící na závaží.

5C. Atomy v pevných látkách kmitají za pokojové teploty s frekvencemi řádu 10^{13} Hz. Vyjděme z představy atomů propojených pružinami. Předpokládejme, že v tělese ze stříbra kmitá jeden atom stříbra s uvedenou frekvencí a ostatní atomy se nepohybují. Vypočtěte efektivní tuhost pružiny. Jeden mol stříbra ($6{,}02\cdot10^{23}$ atomů) má hmotnost 108 g.

6C. Jaké je největší zrychlení plošiny, která kmitá s amplitudou 2,20 cm a s frekvencí 6,60 Hz?

7C. V reproduktoru se vytváří zvuk pomocí kmitající membrány. Předpokládejme, že u daného reproduktoru činí maximální možná amplituda kmitů $1{,}0\cdot10^{-3}$ mm. Určete obor frekvencí, při kterých převyšuje zrychlení membrány hodnotu g (tíhové zrychlení).

8C. Pružinová váha je na měřítku délky 4,00 in cejchována od 0 do 32,0 lb. Balík, který je zavěšen na váze, kmitá ve svislém směru s frekvencí 2,00 Hz. (a) Určete tuhost pružiny. (b) Jaká je váha balíku?

9C. Závaží 20 N zavěsíme na konec svislé pružiny; pružina se tím prodlouží o 20 cm. (a) Jaká je tuhost pružiny? (b) Pružinu nyní umístíme vodorovně na hladkou podložku. Jeden její konec upevníme ke stěně, druhý konec spojíme se závažím 5,0 N. Poté závaží poněkud posuneme (pružina se natáhne) a uvolníme s nulovou počáteční rychlostí. Jaká je perioda vzniklých kmitů?

10C. Závaží o hmotnosti 50,0 g zavěsíme na konec svislé pružiny a rozkmitáme. Největší rychlost závaží činí $15{,}0\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$, perioda kmitání je 0,500 s. Určete (a) tuhost pružiny, (b) amplitudu kmitání a (c) frekvenci kmitů.

11C. Částice hmotnosti $1{,}00\cdot10^{-20}$ kg harmonicky kmitá s periodou $1{,}00\cdot10^{-5}$ s a s maximální rychlostí $1{,}00\cdot10^{3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Vypočtěte (a) úhlovou frekvenci kmitání a (b) největší výchylku částice.

12C. Malé těleso o hmotnosti 0,12 kg harmonicky kmitá s amplitudou 8,5 cm a s periodou 0,20 s. (a) Jaká největší síla působí na částici? (b) Předpokládejme, že kmitání je vyvoláno pružinou. Jaká je tuhost pružiny?

13C. Břit elektrického holícího strojku se přesouvá sem a tam na vzdálenosti 2,00 mm. Jeho pohyb lze považovat za harmonické kmitání s frekvencí 120 Hz. Určete (a) amplitudu kmitů, (b) největší rychlost břitu a (c) největší zrychlení břitu.

14C. Membrána reproduktoru harmonicky kmitá s frekvencí 440 Hz a amplitudou 0,75 mm. Určete (a) úhlovou frekvenci kmitů, (b) největší rychlost membrány a (c) největší zrychlení membrány.

15C. Uvažme kmitání automobilu ve svislém směru. Lze uvažovat, jako by vozidlo bylo umístěno na čtyřech stejných pružinách. U jistého vozidla nastavíme tuhost těchto pružin tak, aby frekvence kmitání činila 3,00 Hz. (a) Jaká je tuhost pružin, předpokládáme-li hmotnost vozidla 1 450 kg a rovnoměrné rozložení váhy? (b) Ve vozidle jede pět osob. Jejich průměrná hmotnost je 73 kg a váha je opět rozložena rovnoměrně. Jaká je frekvence kmitání každé pružiny?

16C. Poloha harmonicky kmitajícího tělesa je popsána vztahem

$$x = (6{,}0\ \mathrm{m})\cos\left[(3\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}})t + \tfrac{1}{3}\pi\ \mathrm{rad}\right].$$

V čase $t = 2{,}0$ s stanovte (a) výchylku tělesa, (b) rychlost tělesa, (c) zrychlení tělesa a (d) fázi pohybu. Dále určete (e) frekvenci a (f) periodu kmitů.

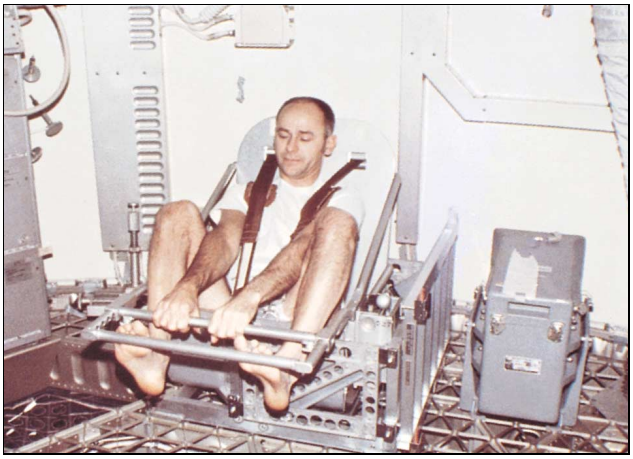
17C. Daná částice harmonicky kmitá s frekvencí 0,25 Hz kolem rovnovážné polohy $x = 0$. V čase $t = 0$ měla výchylku $x = 0{,}37$ cm a nulovou rychlost. Určete pro její kmitání (a) periodu, (b) úhlovou frekvenci, (c) amplitudu, (d) výchylku jako funkci času, (e) rychlost jako funkci času, (f) maximální rychlost, (g) maximální zrychlení, (h) výchylku v čase $t = 3{,}0$ s, a (i) rychlost v čase $t = 3{,}0$ s.

18C. Píst ve válcové hlavě parní lokomotivy má záběr (dvojnásobek amplitudy) 0,76 m. Pohyb pístu lze pokládat za harmonické kmitání s úhlovou frekvencí $180\ \mathrm{ot\cdot min^{-1}}$. Jaká je maximální rychlost pístu?

19Ú. Obr. 16.29 ukazuje astronauta sedícího na přístroji k měření tělesné hmotnosti v beztížném stavu. Přístroj byl vyvinut pro použití na vesmírných stanicích, udržovaných na oběžné dráze kolem Země. Je tvořen pohyblivou sedačkou spojenou pružinami s rámem: astronaut se usadí na sedačku a měří periodu vyvolaných kmitů. Jeho hmotnost se poté určuje ze vztahu pro periodu kmitající soustavy pružina + hmotný blok. (a) Předpokládejme, že hmotnost astronauta je M a efektivní hmotnost kmitající sedačky činí m. Ukažte, že platí

$$M = \frac{k}{4\pi^2}T^2 - m,$$

kde T je perioda kmitů a k tuhost pružiny. (b) Přístroj, který byl umístěn na vesmírné stanici SKYLAB TWO, měl tuhost pružiny $k = 605{,}6\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$ a perioda kmitů prázdné sedačky byla 0,901 49 s. Vypočtěte efektivní hmotnost sedačky. (c) Perioda kmitů sedačky s astronautem činila 2,088 32 s. Vypočtěte hmotnost astronauta.



Obr. 16.29 Úloha 19

20Ú. Na pružině visí závaží o hmotnosti 2,0 kg. Přívažek hmotnosti 300 g způsobí dodatečné protažení pružiny o 2,00 cm. (a) Jak velká je tuhost pružiny? (b) Rychlé uvolnění přívažku vyvolá harmonické kmity závaží. Určete periodu pohybu.

21Ú. Na pružině harmonicky kmitá závaží o hmotnosti m. Perioda pohybu činí 2,0 s. Jestliže zvýšíme hmotnost závaží o 2,0 kg, perioda se zvýší na 3,0 s. Určete hmotnost m.

22Ú. Koncový bod jednoho ze dvou ramen ladičky harmonicky kmitá s frekvencí 1 000 Hz a amplitudou 0,40 mm. Určete pro tento bod (a) maximální zrychlení a (b) maximální rychlost. Dále nalezněte (c) zrychlení a (d) rychlost uvažovaného bodu v okamžiku, kdy jeho výchylka činí 0,20 mm.

23Ú. Těleso o hmotnosti 0,10 kg osciluje tam a zpět v přímém směru. Jeho výchylka, měřená od počátku souřadnic, je popsána vztahem

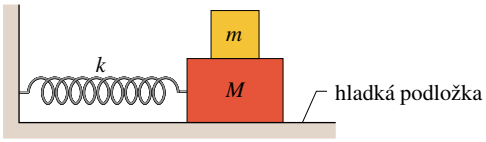
$$x = (10\,\mathrm{cm})\cos\left[(10\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}})t + \tfrac{1}{2}\pi\,\mathrm{rad}\right].$$

(a) Jaká je frekvence kmitů? (b) Jakou maximální rychlostí se těleso pohybuje? Při jaké hodnotě výchylky má těleso tuto maximální rychlost? (c) Jaké je největší zrychlení tělesa? Při jaké hodnotě výchylky je zrychlení největší? (d) Určete časovou závislost síly, která působí na těleso a vyvolává uvedené kmitání.

24Ú. Příliv a odliv vyvolává v přístavu změny výšky hladiny moře. Maximální rozdíl výšek hladiny je d. Pohyb hladiny je přitom možno považovat za harmonický s periodou 12,5 h. Za jak dlouho dojde k poklesu hladiny o vzdálenost $d/4$ od její nejvyšší úrovně?

25Ú. Dvě tělesa s hmotnostmi $m = 1{,}0$ kg, $M = 10$ kg a pružina jsou uspořádány podle obr. 16.30 na vodorovné hladké podložce. Statický činitel smykového tření mezi oběma tělesy činí 0,40. Jaká může být největší amplituda harmonických kmitů soustavy, má-li se zabránit smýkání mezi oběma tělesy?

26Ú. Hmotný blok je umístěn na vodorovný povrch (povrch vibračního stolu). Povrch harmonicky kmitá ve vodorovném směru s frekvencí 2,0 Hz. Statický činitel smykového tření mezi



Obr. 16.30 Úloha 25

blokem a povrchem stolu má velikost 0,50. Jak velká může ještě být amplituda kmitů, má-li se vyloučit možnost klouzání bloku?

27Ú. Na píst, který harmonicky kmitá ve svislém směru, položíme závaží. (a) Je-li perioda kmitů pístu 1,0 s, při jaké amplitudě se závaží oddělí od pístu? (b) Je-li amplituda kmitů pístu 5,0 cm, jaká může být největší frekvence, pro kterou zůstává závaží nepřetržitě v kontaktu s pístem?

28Ú. Oscilátor je tvořen hmotným blokem, spojeným s pružinou ($k = 400\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$). V jistém čase t byly zaznamenány následující hodnoty polohy (měřené od rovnovážné polohy soustavy), rychlosti a zrychlení hmotného bloku: $x = 0{,}100$ m, $v = -13{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $a = -123\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Vypočtěte (a) frekvenci kmitů, (b) hmotnost bloku a (c) amplitudu pohybu.

29Ú. Harmonický oscilátor je tvořen kvádrem o hmotnosti 2,00 kg spojeným s pružinou tuhosti $100\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. V čase $t = 1{,}00$ s se kvádr nachází v poloze $x = 0{,}129$ m a jeho rychlost činí $v = 3{,}415\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Jaká je amplituda oscilací? Jaká byla (b) poloha kvádru a (c) rychlost kvádru v čase $t = 0$?

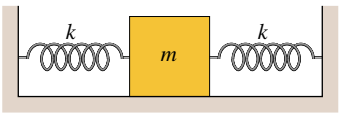
30Ú. Nehmotná pružina je zavěšena na stropě místnosti a na její spodní konec připevníme malé závaží. Závaží nejprve udržujeme v klidu v poloze o souřadnici y_p; v této poloze má pružina svoji nezatíženou délku. Poté závaží uvolníme s nulovou počáteční rychlostí. V průběhu vzniklého kmitání klesá závaží nejníže 10 cm pod souřadnicí y_p. (a) Jaká je frekvence kmitů? (b) Jaká je rychlost závaží v okamžiku, kdy se právě nachází 8 cm pod počáteční polohou y_p? (c) K závaží připevníme přívažek hmotnosti 300 g. Frekvence takto upraveného oscilátoru je rovna polovině původní frekvence. Jaká je hmotnost prvního závaží? (d) Určete rovnovážnou polohu nového oscilátoru vzhledem k výchozí souřadnici y_p.

31Ú. Dvě částice harmonicky kmitají podél přímého segmentu délky a (pohybují se na opačných stranách přímé a tenké lišty a jejich dráha pokrývá na liště úsečku délky a). Oba harmonické pohyby mají tutéž periodou 1,5 s, avšak jsou navzájem fázově posunuty o $\pi/6$ rad. (a) Jaká je vzdálenost obou částic v okamžiku, kdy se opožděná částice právě nachází v bodě obratu? Výsledek vyjádřete pomocí délky a. (b) Uvažme malý časový interval bezprostředně následující po okamžiku, popsaném v části (a). Pohybují se obě částice během tohoto intervalu ve stejném směru, v opačném směru od sebe, nebo v opačném směru k sobě?

32Ú. Dvě částice harmonicky kmitají kolem stejné rovnovážné polohy se stejnou amplitudou a stejnou frekvencí. Oba pohyby probíhají podél téhož směru. Částice se míjejí vždy tehdy, když se výchylka každé z nich rovná polovině amplitudy. Jaký je fázový rozdíl mezi oběma harmonickými pohyby?

33Ú. Dvě stejné pružiny jsou jedněmi konci připevněny ke dvěma protilehlým stěnám kvádru hmotnosti m a druhými konci vetknuty do protilehlých stěn. Kvádr je umístěn na hladké podložce. Soustava je znázorněna na obr. 16.31. Ukažte, že kvádr harmonicky kmitá s frekvencí

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}.$$



Obr. 16.31 Úlohy 33 a 34

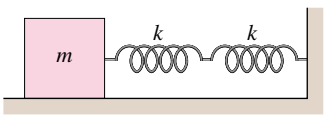
34Ú. Vyjdeme ze znění úlohy 33, avšak nyní předpokládejme, že dvě pružiny na obr. 16.31 mají obecně různé tuhosti k_1 a k_2. Ukažte, že frekvence kmitající soustavy je nyní určena vztahem

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2},$$

kde f_1, popř. f_2, jsou frekvence oscilátorů, tvořených kvádrem a pouze pružinou 1, popř. kvádrem a pouze pružinou 2.

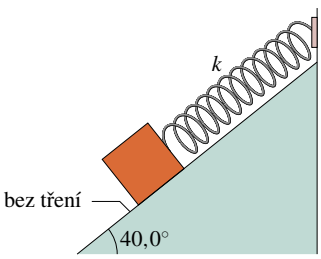
35Ú. Soustava dvou stejných, sériově propojených pružin tuhosti k je jedním svým koncem spojena s kvádrem hmotnosti m a druhým koncem připevněna ke stěně. Kvádr se pohybuje na hladké podložce. Soustava je znázorněna na obr. 16.32. Ukažte, že soustava harmonicky kmitá s frekvencí

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}.$$



Obr. 16.32 Úloha 35

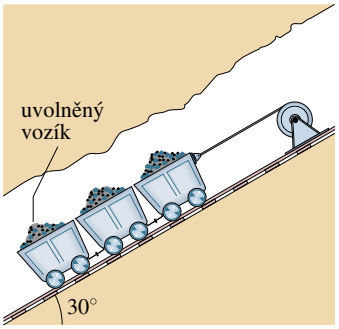
36Ú. Kvádr o váze 14,0 N klouže bez tření po nakloněné rovině se sklonem 40,0°. Ke kvádru je připojena nehmotná pružina nezatížené délky 0,450 m a tuhosti 120 N·m^{-1}. Druhý konec pružiny je upevněn na vrcholu klínu; celá soustava je znázorněna na obr. 16.33. (a) Určete vzdálenost rovnovážné polohy kvádru od vrcholu klínu. (b) Kvádr poněkud vysuneme z rovnovážné polohy podél nakloněné roviny směrem dolů a poté jej uvolníme. Jaká je perioda vzniklého harmonického pohybu?



Obr. 16.33 Úloha 36

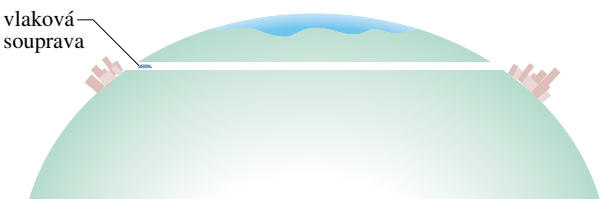
37Ú. Homogenní pružina má délku L a tuhost k. Pružinu řezem rozdělíme na dvě části délek L_1 a L_2 a označíme $n = L_1/L_2$. (a) Vyjádřete tuhosti k_1 a k_2 obou nových pružin pomocí k a n. (b) Pokud byl určitý kvádr spojen s původní pružinou, jako na obr. 16.5, kmital vzniklý harmonický oscilátor s frekvencí f. Jestliže nyní připevníme ke kvádru pružinu délky L_1, popř. pružinu délky L_2, bude mít nový oscilátor frekvenci f_1, popř. frekvenci f_2. Vyjádřete frekvence f_1 a f_2 pomocí původní frekvence f.

38Ú. Tři navzájem propojené důlní vagony, každý o hmotnosti 10 000 kg, jsou umístěny na nakloněné dráze důlní železnice. Dráha má sklon 30°. Vagony jsou udržovány v klidu závěsným lanem, vedeným rovnoběžně s nakloněným směrem důlní dráhy (obr. 16.34). Váhou vagonů je závěsné lano prodlouženo o 15 cm vzhledem ke své nezatížené délce. V jistém okamžiku se uvolnil spodní vagon; poté zbylé dva vagony harmonicky kmitají. Předpokládejte, že závěsné lano splňuje Hookův zákon a určete (a) frekvenci, (b) amplitudu harmonického pohybu.



Obr. 16.34 Úloha 38

39Ú. Ke zmírnění dopravních problémů při cestování mezi dvěma velkými městy (například mezi Bostonem a Washingtonem) navrhují dopravní konstruktéři následující řešení. Obě města budou propojena podél tětivy Země přímým vlakovým tunelem (obr. 16.35). Vlaková souprava, uvolněná ve výchozí stanici, bude samovolně klesat první polovinou tunelu a stoupat druhou polovinou až ke stanici cílové. Předpokládejme, že Země je homogenní koule. Odpor vzduchu a tření zanedbáme. (a) Ukažte, že cesta mezi městy představuje polovinu úplného harmonického kmitu. (b) Vypočtěte dobu jízdy mezi městy.



Obr. 16.35 Úloha 39

ODST. 16.4 Energie harmonického pohybu

40C. Určete mechanickou energii soustavy pružina + těleso,

jestliže pružina má tuhost $1{,}3\,\mathrm{N{\cdot}cm^{-1}}$ a amplituda kmitů činí 2,4 cm.

41C. Kmitající soustava pružina+těleso má mechanickou energii 1,00 J. Kmitání probíhá s amplitudou 10,0 cm a maximální rychlost tělesa je $1{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete (a) tuhost pružiny, (b) hmotnost tělesa a (c) frekvenci kmitání.

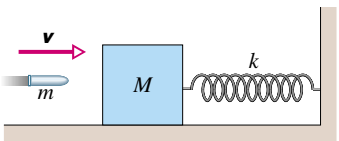
42C. Blok o hmotnosti 5,00 kg je umístěn na hladké vodorovné podložce a je spojen s pružinou tuhosti $1\,000\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Blok vychýlíme vodorovně z rovnovážné polohy o 50,0 cm a udělíme mu počáteční rychlost o velikosti $10{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ ve směru zpět k rovnovážné poloze. (a) Jaká je frekvence vzniklých kmitů? (b) Jaká je počáteční hodnota potenciální energie pružnosti pro soustavu pružina + hmotný blok? (c) Jaká je počáteční hodnota kinetické energie? (d) Jaká je amplituda kmitů?

43C. Jestliže zavěsíme na danou svislou pružinu závaží o hmotnosti 1,3 kg, pružina se protáhne o 9,6 cm. (a) Vypočtěte tuhost pružiny. Závaží přesuneme tahem o dalších 5,0 cm směrem dolů a uvolníme s nulovou počáteční rychlostí. Určete (b) periodu, (c) frekvenci a (d) amplitudu vzniklého kmitání. (e) Jaká je při kmitání maximální rychlost závaží?

44C. Gigantický (a hypotetický) prak má vystřelit kámen o hmotnosti 130 g tak, aby unikl ze sféry přitažlivosti Země (kámen musí být tedy vystřelen druhou kosmickou rychlostí $11{,}2\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$). Pružný mechanismus praku splňuje Hookův zákon. Je natažen o 1,5 m a uvolněn. Veškerá potenciální energie pružnosti se poté transformuje na energii kinetickou. (a) Určete tuhost odpalovacího přístroje. (b) Řekněme, že průměrný muž vyvine sílu 220 N. Kolik mužů musí spojit své síly k natažení praku?

45C. Výchylka harmonicky kmitající částice je v jistém okamžiku rovna jedné polovině amplitudy. Jaká část celkové mechanické energie má v tomto okamžiku formu energie (a) kinetické a (b) potenciální? (c) Při jaké výchylce má jedna polovina celkové mechanické energie formu energie kinetické? Vyjádřete hledanou výchylku pomocí amplitudy.

46C. Těleso o hmotnosti M je umístěno na vodorovné hladké podložce a spojeno s pružinou, která je na druhém konci upevněna ke stěně. Soustava je v rovnováze. V určitém okamžiku vnikne do tělesa rychlostí v projektil o hmotnosti m. Projektil zůstane zachycen v tělese. Situace je znázorněna na obr. 16.36. (a) Určete rychlost tělesa bezprostředně po zásahu. (b) Vypočtěte amplitudu vzniklého harmonického pohybu.



Obr. 16.36 Cvičení 46

47Ú. Těleso hmotnosti 3,0 kg harmonicky kmitá. Jeho výchylka z rovnovážné polohy je popsána vztahem

$$x(t) = (5{,}0\,\mathrm{m})\cos\left[(\tfrac{1}{3}\pi\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})t - \tfrac{1}{4}\pi\,\mathrm{rad}\right].$$

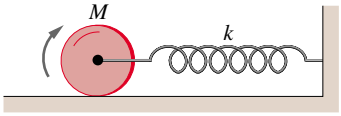
(a) Při jaké výchylce je potenciální energie částice rovna polovině celkové mechanické energie? (b) Jak dlouho trvá pohyb částice z rovnovážné polohy do polohy, kterou jste určili v části (a)?

48Ú. Částice o hmotnosti 10 g harmonicky kmitá s amplitudou $2{,}0{\cdot}10^{-3}$ m. Maximální zrychlení částice činí $8{,}0{\cdot}10^{3}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, fázová konstanta je $-\pi/3$ rad. (a) Popište sílu, která na částici působí. Napište vztah, určující časovou závislost této síly. (b) Určete periodu pohybu. (c) Stanovte největší rychlost částice. (d) Vypočtěte celkovou mechanickou energie kmitající částice.

49Ú. Nehmotná pružina tuhosti $19\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ je jedním koncem zavěšena na nosník. Na její volný konec umístíme těleso o hmotnosti 0,20 kg. Těleso uvolníme v okamžiku, kdy pružina ještě nebyla protažena. (a) O jakou největší vzdálenost vzhledem ke své počáteční poloze těleso klesne? Určete (b) frekvenci a (c) amplitudu výsledného harmonického pohybu.

50Ú. Na pružině tuhosti $500\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ visí těleso o hmotnosti 4,0 kg. Přímo zespodu je do tělesa vstřelena kulka hmotnosti 50 g. Kulka vnikne do tělesa rychlostí $150\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a uvízne v něm. (a) Určete amplitudu takto vyvolaného harmonického pohybu. (b) Jakou část mechanické energie kmitajícího systému představuje původní kinetická energie kulky?

51Ú*. Pevný válec, otáčivý kolem vodorovné osy, je umístěn na vodorovné ploše. K ose válce je připevněna pružina tuhosti $k = 3{,}0\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Válec uvolníme s nulovou počáteční rychlostí v poloze, ve které je pružina protažena o 0,25 m vzhledem k její rovnovážné délce. Poté se válec valí po ploše bez prokluzování (obr. 16.37). Určete kinetickou energii (a) translačního a (b) rotačního pohybu válce v okamžiku, kdy válec právě prochází rovnovážnou polohou. (c) Ukažte, že při splnění uvedených předpokladů uskutečňuje těžiště válce harmonický pohyb s periodou



Obr. 16.37 Úloha 51

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}},$$

kde M je hmotnost válce. (*Tip*: Vypočtěte časovou derivaci celkové mechanické energie.)

ODST. 16.5 Torzní kmity

52C. Plochý homogenní kruhový disk má hmotnost 3,00 kg a poloměr 70,0 cm. Disk je ve svém středu zavěšen na svislý drát, takže spočívá ve vodorovné rovině. Chceme-li disk vytočit o 2,50 rad vzhledem k jeho rovnovážné poloze a poté jej v této nové poloze udržet, musíme na něj působit silovým momentem 0,060 0 N·m. (a) Vypočtěte moment setrvačnosti disku při jeho otáčení kolem osy určené drátem. (b) Určete torzní konstantu. (c) Jaká je úhlová frekvence popsaného torzního oscilátoru?

53Ú. Homogenní masivní koule hmotnosti 95 kg má poloměr 15 cm. Koule visí na drátě, který je připevněn ke stropu místnosti. Silový moment velikosti 0,20 N·m uděluje kouli úhlovou výchylku 0,85 rad. Po uvolnění z uvedené polohy pozorujeme torzní kmity. Jaká je jejich perioda?

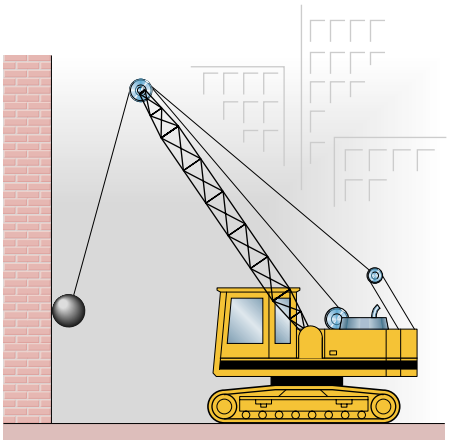
54Ú. Technik zkoumá nepravidelné těleso hmotnosti 10 kg. Má za úkol zjistit moment setrvačnosti tělesa vzhledem k jisté ose procházející těžištěm. Technik zavěsí těleso na drát takovým způsobem, aby byla předepsaná osa totožná se směrem drátu. Vzniklé torzní kyvadlo vykoná 20 úplných kmitů za dobu 50 s. Navíc je známo, že použitý drát má torzní konstantu $\varkappa = 0{,}50\,\mathrm{N{\cdot}m}$. Jaký je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k předepsané ose?

55Ú. Nepokoj hodinek torzně kmitá s úhlovou amplitudou π rad a s periodou 0,500 s. Určete (a) maximální úhlovou rychlost nepokoje, (b) jeho úhlovou rychlost při úhlové výchylce $\frac{1}{2}\pi$ rad a (c) úhlové zrychlení nepokoje při úhlové výchylce $\frac{1}{4}\pi$ rad.

ODST. 16.6 Kyvadla

56C. Matematické kyvadlo se nachází v místě, kde tíhové zrychlení g činí $32{,}2\,\mathrm{ft{\cdot}s^{-2}}$. Perioda jeho kmitů je 1,00 s. Jaká je jeho délka?

57C. Demoliční koule o hmotnosti 2 500 kg kývá na závěsném laně vedeném přes rameno jeřábu (obr. 16.38). Délka lana od vrcholu ramena ke kouli je 17 m. (a) Určete periodu pohybu za předpokladu, že soustavu lze pokládat za matematické kyvadlo. (b) Závisí perioda na hmotnosti koule?

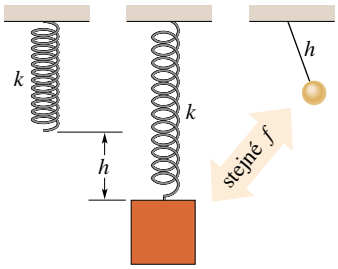


Obr. 16.38 Cvičení 57

58C. Matematické kyvadlo odpočítává sekundy: uskuteční každé dvě sekundy úplný kmit z jedné krajní polohy do druhé a zpět. Jaká je jeho délka?

59C. Matematické kyvadlo délky 1,50 m uskutečnilo 72,0 úplných kmitů za dobu 180 s. Jak velké je tíhové zrychlení v místě, kde byly uvedené hodnoty naměřeny?

60C. V této kapitole jsme studovali dvě kmitající soustavy: závaží zavěšené na pružině a matematické kyvadlo. Mezi nimi existuje zajímavý vztah. Předpokládejme, že na konec pružiny zavěsíme závaží a pokud je závaží v klidu, jako na obr. 16.39, pružina se prodlouží o délku h vzhledem ke své nezatížené délce. Na druhé straně uvažme matematické kyvadlo délky h. Dokažte, že obě soustavy kmitají se stejnou frekvencí.



Obr. 16.39 Cvičení 60

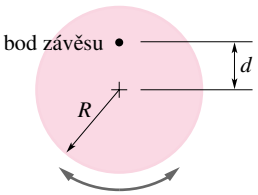
61C. Artista sedí na visuté hrazdě a houpá se tam a zpět s periodou 8,85 s. Pokud je hrazda v rovnovážné poloze a artista se na ní postaví, zvýší se těžiště soustavy o 35,0 cm. Považujte soustavu artista + visutá hrazda za matematické kyvadlo. Vypočtěte jeho periodu, jestliže artista při houpání na hrazdě stojí.

62C. Matematické kyvadlo délky L volně kmitá s malou úhlovou amplitudou. V okamžiku, kdy právě prochází rovnovážnou polohou, znehybníme vlákno kyvadla v polovině délky. Vyjádřete periodu kratšího kyvadla pomocí původní periody T.

63C. Fyzické kyvadlo je tvořeno tyčovým metrem. Ve vzdálenosti x od rysky, která označuje 50 cm, je vyvrtán malý otvor. Tímto otvorem prochází osa rotace. Kyvadlo má periodu 2,5 s. Určete vzdálenost x.

64C. Tenká tyč délky L má hmotnost m. Tyč je zavěšena nad středem tyče: vzdálenost bodu závěsu od středu tyče je d. (a) U tohoto fyzického kyvadla vyvoláme kmitání s malou úhlovou amplitudou. Vyjádřete periodu pohybu pomocí veličin d, L, m a g (tíhové zrychlení). Jak se změní perioda, jestliže (b) zmenšíme vzdálenost d, (c) zvětšíme délku tyče L a (d) zvětšíme hmotnost tyče?

65C. Fyzické kyvadlo je tvořeno pevným homogenním diskem (poloměru R a hmotnosti M), otáčivým ve svislé rovině kolem bodu závěsu, který je umístěn ve vzdálenosti d od středu disku (obr. 16.40). Disk vychýlíme o malý úhel z rovnovážné polohy a uvolníme. Určete periodu výsledného harmonického pohybu.

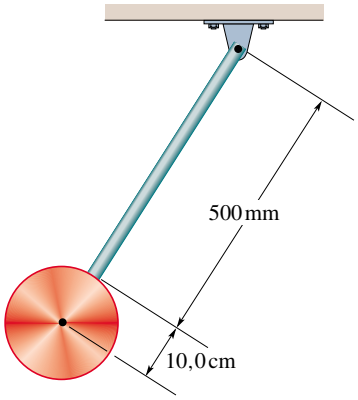


Obr. 16.40 Cvičení 65

66C. Homogenní kruhový disk poloměru $R = 12{,}5$ cm je zavěšen v bodě, který se nachází na okraji disku. (a) Určete periodu tohoto fyzického kyvadla. (b) Disk nyní zavěsíme v jiném bodě,

jehož vzdálenost od středu disku činí $r < R$. Vzniká opět fyzické kyvadlo. Jaká musí být vzdálenost r, má-li se perioda nového kyvadla rovnat periodě v části (a)?

67C. Kyvadlo je tvořeno homogenním diskem o poloměru 10,0 cm a hmotnosti 500 g, spojeným s homogenní tyčí délky 500 mm a hmotnosti 270 g (obr. 16.41). (a) Vypočtěte moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k vodorovné ose procházející bodem závěsu. (b) Jaká je vzdálenost mezi bodem závěsu a těžištěm kyvadla? (c) Vypočtěte periodu kmitů.



Obr. 16.41 Cvičení 67

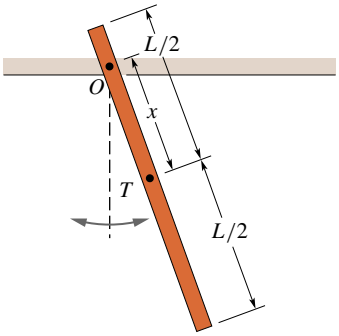
68C. (a) Fyzické kyvadlo v př. 16.6 obrátíme a zavěsíme v bodě P. Jaká bude nyní perioda pohybu? (b) Je tato nová perioda v porovnání s periodou původního kyvadla v př. 16.6 větší, menší, nebo stejná?

69C. V př. 16.6 jsme ukázali, že fyzické kyvadlo má střed kyvu P ve vzdálenosti $2L/3$ od bodu závěsu O. Dokažte tvrzení: Pro jakékoliv fyzické kyvadlo je vzdálenost středu kyvu od bodu závěsu rovna $I/(mh)$, kde veličiny I a h mají stejný význam jako v rov. (16.32) a m je hmotnost kyvadla.

70C. Tyčový metr se otáčí kolem osy umístěné na jeho jednom konci. Jak se změní frekvence tohoto fyzického kyvadla, jestliže tyčový metr zkrátíme na polovinu? Vyjádřete novou frekvenci pomocí původní frekvence f_0.

71Ú. Fyzické kyvadlo na obr. 16.42 je tvořeno tyčí délky L, zavěšenou v bodě O. (a) Vyjádřete periodu kyvadla pomocí délky tyče L a vzdálenosti x těžiště od bodu závěsu. (b) Pro kterou hodnotu podílu x/L je perioda pohybu nejkratší? (c) Ukažte, že pro $L = 1{,}00\,\text{m}$ a $g = 9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ je nejkratší perioda v části (b) rovna 1,53 s.

72Ú. Střed kyvu fyzického kyvadla má následující zajímavou vlastnost. Uvažme fyzické kyvadlo, které kývá v jisté svislé rovině kolem určitého bodu závěsu O. Předpokládejme, že právě v okamžiku průchodu kyvadla rovnovážnou polohou na něj zapůsobí krátký impulz síly. Vektorová přímka síly je vodorovná a leží v rovině kyvů. Jestliže síla navíc působí v úrovni středu kyvu P, nevyvolá její impulz v bodě závěsu O žádnou reakci. O této vlastnosti dobře vědí hráči baseballu (a rovněž hráči mnoha jiných sportů). Skutečně, když pálkař navede pálku tak, že ke styku s míčkem dojde mimo střed kyvu P, ucítí v důsledku



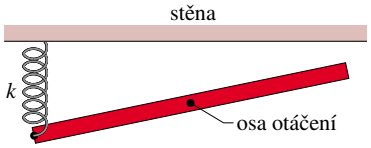
Obr. 16.42 Úloha 71

nárazu bolestivé „škubnutí“ v rukou. Proto také nazývají sportovci střed kyvu „jemný bod“ pálky. Při studiu popsané situace budeme předpokládat, že tyč na obr. 16.12a představuje baseballovou pálku. Nechť na tyč působí v bodě P vodorovně zprava síla $\boldsymbol{F}$, představující úder míčku. Pálkař drží pálku v bodě, který odpovídá bodu závěsu O na obr. 16.12a. (a) Jak velké zrychlení uděluje bodu O síla $\boldsymbol{F}$? (b) Jak velké úhlové zrychlení vytváří síla $\boldsymbol{F}$, jestliže uvažujeme rotaci kolem osy, procházející těžištěm tyče? (c) Jak velké lineární zrychlení získá bod O v důsledku úhlového zrychlení, uvažovaného v části (b)? (d) Na základě vyhodnocení velikostí a směrů zrychlení, uvažovaných v částech (a) a (c), se přesvědčte, že střed kyvu P je skutečně „jemný bod“.

73Ú. Přesně vzato, na různých místech povrchu Země má tíhové zrychlení g poněkud odlišnou hodnotu. Tato skutečnost byla objevena Jeanem Richerem, který v roce 1672 na svých cestách převezl kyvadlové hodiny z Paříže do města Cayenne ve francouzské Guyaně a zjistil, že hodiny se za den zpožďují o 2,5 minuty. Jestliže tíhové zrychlení v Paříži činí $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, jaká je jeho velikost v Cayenne?

74Ú. Vědci prováděli přesná měření tíhového zrychlení v určitém místě v Indickém oceánu. Místo bylo zvoleno na rovníku. Při měření se zjišťovala perioda kmitů precizně konstruovaného fyzického kyvadla. K zajištění přesně definovaných podmínek se měření uskutečnilo na palubě ponořené ponorky. Označme g_p přesnou hodnotu tíhového zrychlení v daném místě. Po vyhodnocení výsledků bylo zjištěno, že změřená hodnota g_m závisí na tom, zda se ponorka v průběhu měření pohybovala východním, nebo západním směrem. Velikost její rychlosti přitom v obou případech činila $16\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Objasněte pozorovanou diferenci a vypočtěte relativní chybu $(g_\text{m} - g_\text{p})/g_\text{p}$ pro oba směry plavby ponorky.

75Ú. Dlouhá homogenní tyč délky L a hmotnosti m se otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené geometrickým středem tyče. Na jednom konci tyče je k ní upevněna vodorovná pružina, druhý konec pružiny je připevněn k pevné stěně. Celá soustava je znázorněna na obr. 16.43 z nadhledu. V rovnovážné poloze je tyč rovnoběžná se stěnou. Po malém vychýlení z rovnovážné polohy tyč uvolníme. Jaká je perioda vzniklého harmonického pohybu?



Obr. 16.43 Úloha 75

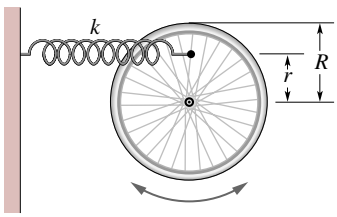
76Ú. Určete frekvenci matematického kyvadla délky 2,0 m (a) zavěšeného na stropě místnosti, (b) zavěšeného na stropě výtahu, který se pohybuje vzhůru se zrychlením 2,0 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, a (c) zavěšeného na stropě výtahu, který padá volným pádem.

77Ú. Matematické kyvadlo délky L a hmotnosti m je zavěšeno v automobilu, který se pohybuje rychlostí stálé velikosti v po kruhové dráze poloměru R. Kyvadlo se pohybuje v radiálním směru (kmitá ve svislé rovině, procházející bodem závěsu a středem kruhové dráhy). Určete frekvenci jeho pohybu.

78Ú. Nalezněte úhlovou amplitudu matematického kyvadla θ_m, pro kterou činí odchylka skutečné velikosti vratného silového momentu a silového momentu, který je předpokládán při harmonickém pohybu kyvadla, 1,0 %. (Při řešení můžete použít „Rozvoje goniometrických funkcí“ v dodatku E.)

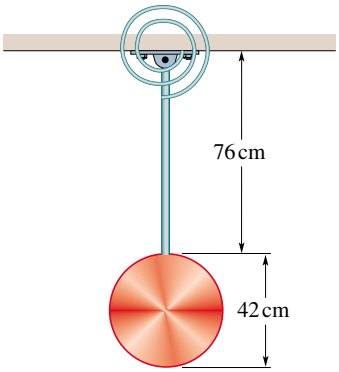
79Ú. Hmotný bod matematického kyvadla se pohybuje po oblouku kružnice o poloměru R. (a) V okamžiku, kdy hmotný bod právě prochází rovnovážnou polohou, udílí mu vlákno dostředivé zrychlení (mv^2/R), kde v je okamžitá rychlost hmotného bodu. Ukažte, že v tomto okamžiku činí napětí ve vlákně $mg(1+\theta_m^2)$, kde θ_m je úhlová amplituda pohybu. (Viz „Rozvoje goniometrických funkcí“ v dodatku E.) (b) Je při jiných úhlových výchylkách matematického kyvadla napětí ve vlákně větší, menší, nebo stejné jako v části (a)?

80Ú. Kolo bicyklu se otáčí kolem pevné osy. K jednomu z jeho drátů je připevněna ve vzdálenosti r od osy kola pružina tuhosti k. Druhý konec pružiny je uchycen v pevné stěně; uspořádání je znázorněno na obr. 16.44. (a) Předpokládejte, že kolo lze považovat za tenkou obruč poloměru R a hmotnosti m. Vyjádřete úhlovou frekvenci malých kmitů soustavy pomocí veličin m, R, r a tuhosti k. Jak se změní úhlová frekvence, jestliže (b) $r = R$ a (c) $r = 0$?



Obr. 16.44 Úloha 80

81Ú. Kruhový disk hmotnosti 2,5 kg a průměru 42 cm je pevně spojen s nehmotnou tyčí délky 76 cm. Jak je znázorněno na obr. 16.45, soustava je zavěšena na konci tyče. (a) Nehmotná torzní pružina na obrázku je nejprve odpojena. Jaká je perioda kmitů kyvadla? (b) Nyní připojíme ke kyvadlu torzní pružinu. V rovnovážné poloze nové soustavy je tyč opět svislá. Jaká musí být torzní konstanta pružiny, aby nová perioda kmitů byla o 0,50 s kratší než perioda původní?

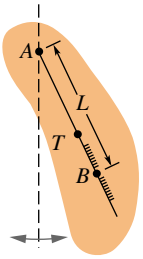


Obr. 16.45 Úloha 81

82Ú. Jisté fyzické kyvadlo má dva možné body závěsu: A a B. Bod A je umístěn pevně, poloha bodu B podél délky kyvadla je nastavitelná. Kyvadlo je znázorněno na obr. 16.46. Nejprve zavěsíme kyvadlo v bodě A; perioda pohybu činí T. Poté kyvadlo obrátíme a zavěsíme jej v bodě B. Jeho poloha je však nastavena tak, aby kyvadlo mělo nyní opět periodu T. Vzdálenost takto definované polohy bodu B od bodu A činí L. Dokažte, že pomocí veličin L a T lze vyjádřit tíhové zrychlení jako

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}.$$

(Všimněte si, že tímto způsobem můžeme měřit tíhové zrychlení g i v případě, že neznáme moment setrvačnosti kyvadla ani jeho rozměry, kromě vzdálenosti L.)



Obr. 16.46 Úloha 82

83Ú*. Homogenní tyč délky L je v jistém bodě zavěšena, takže vytváří fyzické kyvadlo. Pro jakou vzdálenost bodu závěsu od těžiště je perioda kyvadla nejmenší? Vyjádřete hledanou vzdálenost pomocí délky L.

ODST. 16.8 Tlumený oscilátor

84C. Během každého pohybového cyklu klesla amplituda slabě tlumeného oscilátoru o 3 %. Kolikrát se zmenší celková mechanická energie tohoto oscilátoru během každého úplného kmitu?

85C. Vyjděte ze zadání př. 16.9 a určete, kolikrát se zmenší amplituda tlumených kmitů po provedení 20 úplných kmitů?

86C. V uspořádání na obr. 16.17 mějme těleso o hmotnosti 1,50 kg a pružinu tuhosti 8,00 N·m^{-1}. Třecí síla je určena výrazem $-b(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)$, kde $b = 230\ \mathrm{g\cdot s^{-1}}$. Předpokládejme, že těleso je nejprve vysunuto ze své rovnovážné polohy směrem dolů o 12,0 cm a poté uvolněno. (a) Vypočtěte, za jakou dobu se amplituda kmitání zmenší na jednu třetinu své počáteční hodnoty. (b) Kolik úplných pohybových cyklů uskuteční kmitající těleso během této doby?

87Ú. Těleso o hmotnosti $m = 2{,}00$ kg kmitá na pružině tuhosti $k = 10{,}0\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Těleso je navíc vystaveno působení třecí síly $F = -bv$. Počáteční amplituda kmitů byla 25,0 cm; v důsledku tlumení se však po provedení čtyř úplných kmitů zmenšila na tři čtvrtiny své původní hodnoty. (a) Určete součinitel útlumu b. (b) Jak velká mechanická energie se „ztratila“ během uvedených čtyř kmitů?

88Ú. (a) V rov. (16.39) vystupuje třecí síla $-b(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)$ a síla pružnosti $-kx$. Vyjděte z údajů, uvedených v zadání př. 16.9, a určete v průběhu prvního úplného kmitu poměr největší hodnoty třecí síly k největší hodnotě síly pružnosti. (b) Dochází k citelné změně uvedeného poměru, jestliže jej vypočteme pro některý z následujících kmitů?

89Ú. Představte si, že provádíte zkoušku tlumičů u automobilu. Automobil má hmotnost 2 000 kg. Při současném zatížení tlumičů všech čtyř kol celkovou tíhou automobilu se každý z nich zkrátí o 10 cm vzhledem ke své nezatížené délce. Jestliže vyvoláte kmitání karosérie, zmenší se po vykonání jednoho kmitu amplituda o 50 % své původní hodnoty. Odhadněte hodnoty konstant k a b pro tlumící soustavu jednoho kola. Přitom předpokládejte rovnoměrné rozložení tíhy automobilu na jednotlivá kola.

ODST. 16.9 Nucené kmity a rezonance

90C. Amplituda nucených kmitů x_m v rovnici (16.43) je určena vztahem

$$x_\mathrm{m} = \frac{F_\mathrm{m}}{\sqrt{m^2(\omega_\mathrm{b}^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega_\mathrm{b}^2}},$$

kde F_m je (konstantní) amplituda oscilující vnější síly, kterou působí pevný nosník na obr. 16.17 na pružinu. Jaká je (a) amplituda výchylky a (b) amplituda rychlosti v případě rezonance?

91Ú. Ve vozidle o hmotnosti 2 200 lb se nacházejí čtyři osoby, každá o hmotnosti 180 lb. Při jízdě po nerovné silnici překonává vozidlo přibližně rovnoměrně rozmístěné nerovnosti; vzdálenost sousedních nerovností je 13 ft. Vlivem nerovností dochází ke kmitání karosérie vozidla vzhledem k podvozku. Při rychlosti vozidla 10 mi/h má houpání největší amplitudu. O kolik se zvedne karosérie auta, jestliže z něj po zastavení všechny osoby vystoupí?

PRO POČÍTAČ

92Ú. Uvažme kmitající soustavu dvou vozíků spojených pružinou. Vozíky se pohybují bez tření na vodorovné koleji. Tuhost pružiny známe: $k = 50{,}0\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Použijte druhý Newtonův zákon a dokažte, že perioda kmitání je pro oba vozíky stejná. Závislost periody na hmotnosti vozíků je určena vztahem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

Detektorem polohy byly určeny závislosti poloh vozíků na čase. Lze je vyjádřit vztahy $x_1(t) = 2{,}70(1 - \cos(18{,}0t))$ a $x_2(t) = 10{,}70 + 1{,}29\cos(18{,}0t)$, kde souřadnice jsou vyjádřeny v centimetrech a čas v sekundách. (a) Použijte zákon zachování hybnosti a nalezněte hmotnosti jednotlivých vozíků. (b) Vytvořte tabulku hodnot x_1 a x_2 v závislosti na čase. Čas zvětšujte od $t = 0$ do $t = 35$ s s krokem 0,01 s. Pro každý časový okamžik tabelujte také polohu těžiště, celkovou hybnost soustavy dvou vozíků a sílu, kterou působí pružina na jednotlivé vozíky. Ověřte, že těžiště soustavy se nepohybuje, že celková hybnost se zachovává a že obě síly, působící na jednotlivé vozíky, jsou stejně velké a opačně orientované. (c) Použijte údaje v tabulce a nalezněte klidovou (rovnovážnou) délku pružiny.

93Ú. Na těleso o hmotnosti 2,0 kg, připevněné na konec pružiny tuhosti 350 N·m^{-1}, působí vnější budicí síla $F = (15\ \mathrm{N})\sin(\omega t)$, kde $\omega = 35\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Konstanta tlumení b má velikost 15 kg·s^{-1}. V čase $t = 0$ je těleso v klidu a pružina má svou klidovou délku. (a) Použijte numerické integrace a nakreslete graf závislosti výchylky tělesa na čase během první sekundy pohybu. Použijte získaný průběh výchylky ke konci tohoto intervalu a odhadněte amplitudu, periodu a úhlovou frekvenci. Výpočet opakujte pro (b) $\omega = \sqrt{k/m}$ a (c) $\omega = 20\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

17
Vlny — I



V okruhu několika desítek centimetrů od tohoto písečného štíra se v písku pohybuje brouk. Má smůlu. Štír se k němu okamžitě natočí a uloví ho. Přitom štír nemůže brouka vidět (loví zásadně v noci), ani slyšet. Jak tedy dokáže tak přesně lokalizovat svou kořist?

17.1 VLNY A ČÁSTICE

Když se chcete domluvit se svým přítelem ve vzdáleném městě, můžete mu napsat dopis nebo zatelefonovat.

První způsob komunikace (dopis) má povahu „částice“: hmotný objekt se pohybuje z jednoho místa na druhé a přenáší přitom energii a informaci. Ve většině předchozích kapitol jsme studovali individuální částice nebo jejich soustavy.

Druhý způsob (telefonem) má povahu „vlny“; tou se budeme zabývat v této a v příští kapitole. Také vlny přenášejí informaci a energii z místa na místo. Přitom však neputují žádné hmotné objekty. Během telefonování předávají nejprve zvukové vlny vaši zprávu od hlasivek k mikrofonu. Dále přebírají štafetu elektromagnetické vlny a zpráva je jimi přenášena měděným vodičem, optickým vláknem nebo možná i atmosférou přes komunikační družici. Na druhém konci je zpráva opět transformována na zvukové vlny a putuje od sluchátka k uchu vašeho přítele. Zpráva je předána, avšak váš přítel neobdržel nic z toho, čeho jste se dotkli vy. Tuto vlastnost vln pochopil Leonardo da Vinci, když píše o vlnách na vodní hladině: „Často se stává, že vlna uniká z místa svého zrození, zatímco voda nikoliv; podobně jako větrem vytvořené vlny běží přes obilné pole, zatímco jednotlivé klasy zůstávají na místě.“

Částice a **vlna** jsou dva klíčové pojmy klasické fyziky. Tím říkáme, že se jeden nebo druhý z těchto pojmů uplatňuje téměř v každém odvětví klasické fyziky. Přitom jsou to pojmy zásadně odlišné. Slovo *částice* vyvolává představu materiálního objektu, soustředěného v malém objemu a schopného přenášet energii. Slovo *vlna* vzbuzuje představu právě opačnou. Vybavuje se nám široce rozložená energie, vyplňující celý prostor, kterým vlna putuje. Před námi je nyní kus práce, při které se dozvíme o vlnách více. Pojem částice přitom na chvíli odložíme stranou.

17.2 DRUHY VLN

Setkáváme se se třemi druhy vln:

1. ***Vlny mechanické.*** Tyto vlny jsou nejznámější, protože se s nimi téměř neustále setkáváme. Běžné příklady jsou vlny na vodní hladině, zvukové vlny a seizmické vlny. Všechny mechanické vlny mají společné základní rysy: řídí se Newtonovými zákony a mohou existovat pouze v určitém látkovém prostředí (voda, vzduch, hornina).

2. ***Vlny elektromagnetické.*** Ty jsou již známé o něco méně, avšak používáme je prakticky neustále; běžné příklady jsou viditelné a ultrafialové světlo, rádiové a televizní vlny, rentgenové záření, radarové vlny. Pro svou existenci nevyžadují látkové prostředí. Například světlo hvězd se k nám šíří vakuem v kosmu. Všechny elektromagnetické vlny se ve vakuu šíří stejnou rychlostí c:

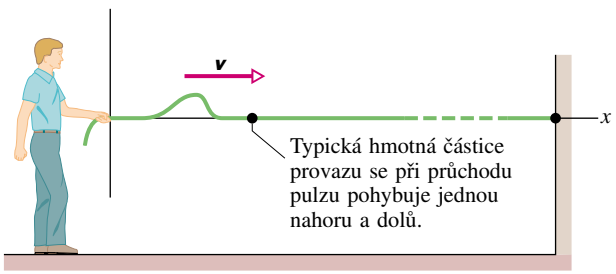
$$c = 299\,792\,458\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \quad \text{(rychlost světla)}. \qquad (17.1)$$

3. ***Vlny hmoty (de Broglieho vlny).*** I když se tyto vlny běžně vyskytují v moderních zařízeních, není tento druh vln příliš znám. Elektrony, protony, další elementární částice a dokonce atomy a molekuly se projevují jako vlny. Protože běžně předpokládáme, že uvedené objekty jsou stavebními elementy hmoty, nazýváme tyto vlny vlnami hmoty nebo častěji de Broglieho.

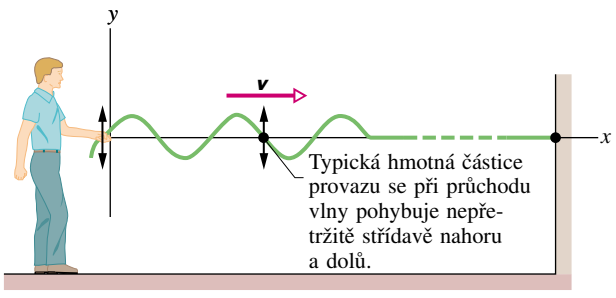
V této kapitole se výklad z velké části týká všech uvedených druhů vln. Nicméně konkrétní jevy budeme vysvětlovat na vlnách mechanických.

17.3 VLNY PŘÍČNÉ A PODÉLNÉ

Nejjednodušší mechanická vlna je vlna vyslaná podél napnutého a na jednom konci upevněného provazu (obr. 17.1). Když na druhém konci rychle trhnete provazem jednou nahoru a dolů, začne se podél něj šířit vlna ve formě *pulzu* jako na obr. 17.1a. Pulz se může šířit jen díky tomu, že



(*a*)



(*b*)

Obr. 17.1 (a) Vyslání izolovaného pulzu podél nataženého provazu. (b) Vyslání spojité sinusové vlny podél provazu. Libovolná hmotná částice provazu (na obrázku znázorněná tečkou) kmitá ve směru kolmém ke směru šíření vlny. Vlna je tedy *příčná* (*transverzální*).

v provazu lze vyvolat napětí. Když totiž přesouváme rukou nahoru první úsek provazu, je díky napětí v provazu tažen nahoru také přilehlý úsek. A když se již začne nahoru pohybovat tento přilehlý úsek, je jím opět tažen nahoru také následující úsek atd. Mezitím však již naše ruka táhne konec provazu směrem dolů. A tak každý úsek, který se pohybuje nahoru, začíná být tažen dolů sousedními úseky, které se již pohybují směrem dolů. Celkový výsledek vzájemného působení jednotlivých úseků pak spočívá v pohybu změny tvaru provazu (v pohybu pulzu) podél provazu určitou rychlostí $\boldsymbol{v}$.

Když pohybujeme rukou harmonicky nahoru a dolů, je její pohyb popsán funkcí sinus, a vlna obvykle má (při nepříliš velkých výchylkách) také v libovolném okamžiku sinusový tvar, jako na obr. 17.1b. To znamená, že tvar vlny odpovídá křivce, představující funkci sinus nebo kosinus.

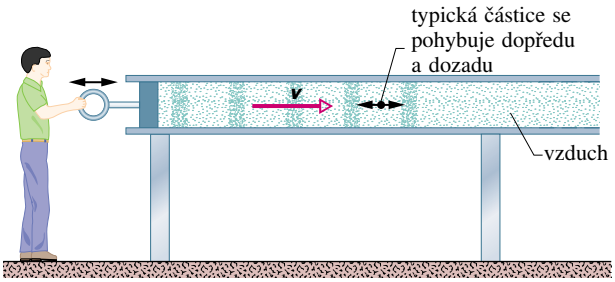
V naší úvaze vystupuje „ideální“ provaz (vlákno, struna), tj. neuvažujeme síly tření, které by šířící se vlnu nakonec utlumily. Navíc předpokládáme, že provaz je dostatečně dlouhý, a nemusíme se tedy zatím zabývat odrazem vlny na vzdáleném, upevněném konci provazu.

Dosud jsme studovali vlny na obr. 17.1 tak, že jsme vlastně sledovali **tvar vlny** při jejím pohybu směrem doprava. Na druhé straně můžeme také sledovat pohyb pevně zvolené částice provazu, tj. sledovat její kmitání nahoru a dolů při průchodu vlny. Jak je vyznačeno na obr. 17.1, výchylka každé částice provazu je *kolmá* ke směru šíření vlny. Pohyb typické částice je **příčný** (**transverzální**), samotná vlna se nazývá **vlna příčná** (**transverzální**). Zde se zabýváme jen **lineárně polarizovanou vlnou**, jejíž výchylka má stálý směr (neorientovaný). Jiné druhy polarizace zavedeme až v čl. 34.6.

Obr. 17.2 znázorňuje vznik zvukové vlny v dlouhé trubici, která je vyplněna vzduchem a na jednom konci uzavřena pístem. Jestliže rychle postrčíme píst doprava a pak hned doleva, vyšleme do trubice zvukový pulz. Pohyb pístu doprava vyvolá pohyb vzduchu těsně za pístem také směrem doprava. Těsně vpravo za pístem tak vzniká oblast vyššího tlaku vzduchu. Tato oblast vyvíjí tlak směrem doprava a stlačuje vzduch v sousedním objemovém elementu, umístěném směrem doprava podél osy trubice. Mezitím však již vznikl těsně za pístem podtlak, neboť jsme jej posunuli směrem

doleva. Pohyb libovolné částice vzduchu směrem doprava je tak následován pohybem směrem doleva. Posunutí jednotlivých částic a současně změny tlaku tak putují jako pulz směrem doprava podél osy trubice.

Jestliže nyní pohybujeme pístem střídavě doprava a doleva, uskutečňuje píst harmonický pohyb a podél osy trubice se šíří sinusová vlna. Jak je naznačeno na obr. 17.2,

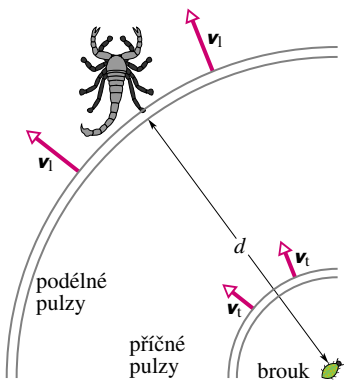


Obr. 17.2 Pohybem pístu dopředu a dozadu vyšleme do trubice naplněné vzduchem zvukovou vlnu. Částice vzduchu (na obrázku je znázorněna černou tečkou) přitom kmitá rovnoběžně se směrem postupu vlny. Vlna je tedy *podélná* (*longitudinální*).

typická částice vzduchu se přitom pohybuje ve směru rovnoběžném s osou trubice, a tedy také se směrem šíření vlny. Tento pohyb označujeme jako **podélný** (**longitudinální**), samotnou vlnu nazýváme **vlnou podélnou** (**longitudinální**). V této kapitole se zaměříme na příčné vlny a speciálně na vlny, vznikající ve strunách. V kap. 18 se budeme věnovat vlnám podélným a speciálně vlnám zvukovým.

Zatím jsme probírali **vlny postupné**; ty postupují z jednoho místa na druhé. Tak například vlna na obr. 17.1 postupuje od jednoho konce provazu směrem k druhému konci, vlna na obr. 17.2 postupuje od jednoho konce trubice směrem k druhému konci. Všimněme si, že postupuje skutečně pouze vlna a nikoliv látka (to jest částice provazu nebo částice vzduchu), kterou se vlna šíří.

Štír na úvodní fotografii této kapitoly využívá k zaměření své kořisti jak příčné, tak podélné vlny. Brouk totiž při každém svém pohybu nepatrně pohybuje zrnky písku a vysílá tak podél povrchu písku pulzy (obr. 17.3). Jsou to jednak pulzy podélné, šířící se rychlostí $v_\mathrm{l} = 150\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, jednak pulzy příčné, postupující rychlostí $v_\mathrm{t} = 50\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.



Obr. 17.3 Pohybem brouka jsou vyvolány podél povrchu písku rychlé podélné pulzy a pomalejší pulzy příčné. Štír tedy nejprve zachytí pulzy podélné. Na obrázku je znázorněno, jak jsou tyto podélné pulzy nejdříve zachyceny pravou nejzadnější (čtvrtou) končetinou.

Osm končetin štíra je při lovu rozloženo zhruba na kružnici o průměru 5 cm. Štír tedy přijímá svými končetinami nejprve rychleji postupující podélné pulzy. Azimut kořisti je určen končetinou, která zachytila pulzy jako první. Poté štír vyhodnotí časový interval Δt mezi zachycením prvního podélného pulzu a prvního pomalejšího, příčného pulzu. Označíme-li vzdálenost kořisti d, platí

$$\Delta t = \frac{d}{v_t} - \frac{d}{v_l},$$

a to tedy znamená

$$d = (75\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\Delta t.$$

Jestliže vezmeme například $\Delta t = 4{,}0\,\mathrm{ms}$, vychází $d = 30\,\mathrm{cm}$. Tím je kořist perfektně zaměřena a zbytek je již pro štíra rutinní záležitost.

17.4 POSTUPNÉ VLNY

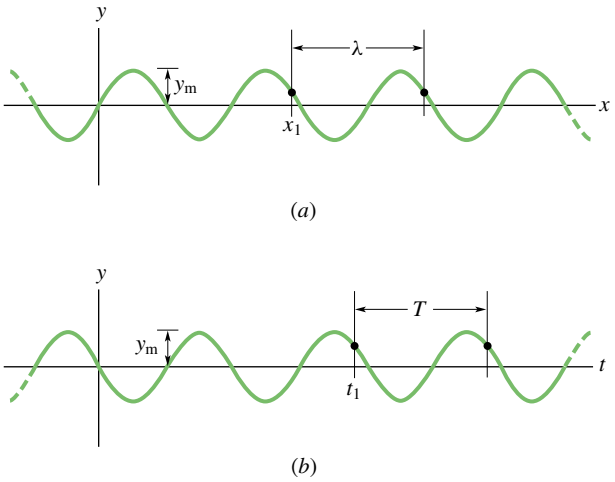
K úplnému popisu vlny ve struně (tj. k popisu pohybu její libovolné částice) potřebujeme znát funkci, která určuje tvar vlny. Formálněji řečeno, potřebujeme znát funkční závislost $y = y(x, t)$. Ta určuje příčnou výchylku určité částice struny jako funkci času t a polohy x této částice podél struny. Pro vlny sinusového tvaru (nazývané též harmonické), jako jsou vlny na obr. 17.1b, je výchylka y dána funkcí sinus (nebo kosinus).

Má-li sinusová vlna na obr. 17.1b postupovat stálou rychlostí ve směru osy x, musí být příčná výchylka y částice struny o souřadnici x v čase t určena vztahem

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t). \qquad (17.2)$$

Zde y_m je **amplituda** vlny; index m znamená *maximum*. Amplituda vlny udává velikost maximální výchylky libovolné částice struny. (Amplituda y_m je tedy vždy kladná veličina.) Veličiny k a ω jsou konstanty; jejich význam se právě chystáme diskutovat. Veličina $kx - \omega t$ se nazývá **fáze** vlny.

Patrně si kladete otázku, proč jsme si k podrobnějšímu studiu vybrali právě vlny sinusové, tj. vlny popsané rov. (17.2), když přece existuje nekonečně mnoho vln různých jiných tvarů. Náš výběr je ale moudrý. Jak uvidíme v čl. 17.8, *všechny* jiné tvary vln — počítaje v to i pulz na obr. 17.1a — lze vytvořit sčítáním sinusových vln. Stačí, když u jednotlivých sčítanců pečlivě vybereme amplitudy a konstanty k. Klíčem k pochopení vln obecného tvaru je tedy studium vln sinusových.



Obr. 17.4 (a) Snímek struny, zaznamenaný v okamžiku $t = 0$. Na struně postupuje sinusová vlna určená rov. (17.2). Na obrázku je vyznačena vlnová délka: je to podélná vzdálenost mezi dvěma nejblíže po sobě následujícími částicemi struny (jsou vyznačeny tečkami), v nichž se situace opakuje (stejná příčná výchylka ve stejné části křivky). Na obrázku je vyznačena také amplituda vlny y_m, tj. největší příčná výchylka jednotlivých částic. (b) Závislost výchylky částice se souřadnicí $x = 0$ na čase při průběhu sinusové vlny tímto místem. Na obrázku je vyznačena typická perioda T: je to doba mezi nejdříve po sobě následujícími okamžiky, ve kterých je stav částice shodný. Tyto časové okamžiky odpovídají dvěma tečkám na obrázku.

Funkce v rov. (17.2) má dvě nezávisle proměnné (souřadnici x a čas t). Úplné znázornění funkční hodnoty y jedinou křivkou v dvojrozměrném obrázku tedy není možné. Ke zviditelnění pohybu celé vlny v reálném čase bychom potřebovali videokameru. Nicméně hodně se můžeme dozvědět i studiem dvojice křivek na obr. 17.4.

Vlnová délka a úhlový vlnočet

Na obr. 17.4a vidíme změnu příčné výchylky v jednom daném okamžiku v závislosti na poloze částice x. Výchylka je určena rov. (17.2). Uvedený okamžik jsme zvolili libovolně, ale pevně; můžeme jej označit $t = 0$. Jinak řečeno, uvedená křivka představuje „snímek“ vlny v tomto okamžiku. Jestliže tedy v rov. (17.2) položíme $t = 0$, dostaneme

$$y(x, 0) = y_m \sin kx \quad (t = 0). \qquad (17.3)$$

Křivka na obr. 17.4a představuje právě tuto funkci; ukazuje tedy okamžitý tvar vlny v čase $t = 0$.

Vlnová délka λ vlny je nejmenší vzdálenost (měřená ve směru šíření vlny), na které dochází k opakování tvaru vlny. Typická vlnová délka je vyznačena na obr. 17.4a. Podle uvedené definice je příčná výchylka stejná na obou koncích

intervalu délky λ, tedy v místech $x = x_1$ a $x = x_1 + \lambda$. V čase $t = 0$ je ovšem výchylka v libovolném místě určena rov. (17.3). Dostáváme tedy

$$y_m \sin(kx_1) = y_m \sin(k(x_1 + \lambda)) = \\ = y_m \sin(kx_1 + k\lambda). \qquad (17.4)$$

Funkce sinus se začíná opakovat, jestliže zvětšíme její argument (úhel) o 2π rad; pro nejkratší vzdálenost λ vyhovující rov. (17.4) tedy platí $k\lambda = 2\pi$, tj.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{(úhlový vlnočet)}. \qquad (17.5)$$

Konstantu k nazýváme **úhlovým vlnočtem** dané vlny; její jednotkou v soustavě SI je radián na metr. (Zdůrazněme, že symbol k zde *nemá* význam tuhosti pružiny, jak tomu bylo v předchozích kapitolách.)

Perioda, úhlová frekvence a frekvence

Na obr. 17.4b vidíme časovou závislost výchylky y částice se souřadnicí x. Závislost je vyčíslena podle rov. (17.2) pro polohu $x = 0$. Kdybychom mohli nafilmovat pohyb struny, viděli bychom, jak se uvedená částice pohybuje nahoru a dolů. Přesněji: částice uskutečňuje harmonický pohyb. Pohyb částice je tedy popsán rov. (17.2), v níž položíme $x = 0$:

$$y(0, t) = y_m \sin(-\omega t) = \\ = -y_m \sin \omega t \quad (x = 0). \qquad (17.6)$$

Zde jsme použili vztahu $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, platného pro libovolný úhel α. Obr. 17.4b demonstruje právě uvedenou časovou závislost; *není* tedy zobrazením tvaru vlny.

Periodu kmitů vlny definujeme jako dobu mezi nejdříve po sobě následujícími okamžiky, ve kterých je stav (tj. výchylka i rychlost) určité částice struny stejný (poloha částice x je přitom libovolná, ale pevná). Typická perioda je vyznačena na obr. 17.4b. Když použijeme rov. (17.6) na oba časové okamžiky, ohraničující uvedený interval, musí se oba výsledky shodovat. Tak dostáváme

$$-y_m \sin \omega t_1 = -y_m \sin \omega(t_1 + T) = \\ = -y_m \sin(\omega t_1 + \omega T). \qquad (17.7)$$

Pro nejkratší dobu T vyhovující této rovnici tedy platí $\omega T = 2\pi$, tj.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{(úhlová frekvence)}. \qquad (17.8)$$

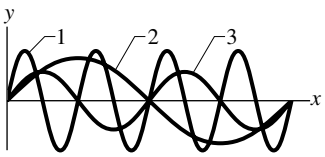
Veličina ω se nazývá **úhlová frekvence** (**úhlový kmitočet**) dané vlny; její jednotka v soustavě SI je radián za sekundu.

Frekvence vlny f je definována jako $1/T$ a s úhlovou frekvencí ω souvisí vztahem

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{(frekvence)}. \qquad (17.9)$$

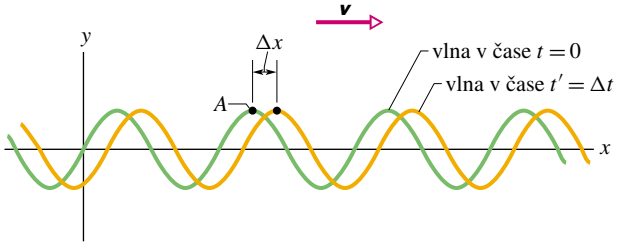
Podobně jako frekvence harmonického pohybu v kap. 16 představuje frekvence f počet kmitů za jednotku času. V nynější souvislosti kmitá částice struny při průchodu vlny místem, ve kterém je částice umístěna. Stejně jako v kap. 16 vyjadřujeme frekvenci obvykle v hertzích nebo v jejich násobcích.

KONTROLA 1: Na obrázku jsou uvedeny snímky tří vln, postupujících podél struny. Fáze těchto vln jsou určeny vztahy (a) $2x - 4t$, (b) $4x - 8t$ a (c) $8x - 16t$. Přiřaďte uvedené fáze jednotlivým vlnám na obrázku.



17.5 RYCHLOST POSTUPNÉ VLNY

Na obr. 17.5 vidíme dva snímky vlny určené rov. (17.2). Snímky byly vytvořeny v malém časovém odstupu Δt. Vlna postupuje ve směru osy x (na obr. 17.5 směrem doprava). Celá křivka, znázorňující tvar vlny, se tedy posune v uvedeném směru za dobu Δt o vzdálenost Δx. Zlomek $\Delta x/\Delta t$ představuje **rychlost vlny** (v limitě infinitezimálních přírůstků přechází zlomek na derivaci dx/dt). Jak můžeme tuto rychlost určit?



Obr. 17.5 Dva snímky postupné vlny popsané v rov. (17.2). První snímek zachycuje vlnu v čase $t = 0$, druhý v pozdějším čase $t' = \Delta t$. Během časového intervalu Δt se celá křivka posunula o vzdálenost Δx doprava.

Při postupu vlny na obr. 17.5 si zachovává každý bod na křivce (jako například bod A) svou výchylku y. (Zde

nehovoříme o částicích vlákna, jejichž výchylka se nepochybně mění s časem, ale o bodech na křivce, mající tvar vlny.) Pro každý takový bod musí být argument funkce sinus v rov. (17.2) konstantní:

$$kx - \omega t = \text{konst.} \tag{17.10}$$

Všimněte si, že ačkoliv je tento argument (zvaný fáze) konstantní, veličiny x a t se mění. Vzrůstá-li čas t, musí vzrůstat i poloha x tak, aby se fáze neměnila. Tím máme potvrzeno, že se bod A a obecněji i celá vlna pohybují ve směru osy x.

K určení rychlosti vlny v zderivujeme podle času obě strany rov. (17.10). Tak získáme

$$k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \omega = 0$$

neboli

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v = \frac{\omega}{k}. \tag{17.11}$$

Když nyní použijeme rov. (17.5) (tj. vztah $k = 2\pi/\lambda$) a rov. (17.8) (tj. vztah $\omega = 2\pi/T$), můžeme rychlost vlny vyjádřit jako

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad \text{(rychlost vlny)}. \tag{17.12}$$

Rovnice $v = \lambda/T$ nám říká, že rychlost vlny vyjadřuje posuv o jednu vlnovou délku za periodu: za dobu jedné periody postoupí vlna o jednu vlnovou délku.

Rov. (17.2) popisuje vlnu, která postupuje ve směru osy x. Jestliže nahradíme v rov. (17.2) proměnnou t výrazem $-t$, získáme rovnici vlny, která postupuje opačným směrem. To odpovídá podmínce

$$kx + \omega t = \text{konst.}, \tag{17.13}$$

kdy naopak (srovnejte s rov. (17.10)) klesá x s rostoucím t. Vlna, která postupuje proti směru osy x, je tedy popsána rovnicí

$$y(x,t) = y_\mathrm{m} \sin(kx + \omega t). \tag{17.14}$$

Kdybychom studovali vlnu určenou rov. (17.14) naprosto stejným postupem, jaký jsme před chvílí použili pro vlnu podle rov. (17.2), dostali bychom pro její rychlost

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega}{k}. \tag{17.15}$$

Záporné znaménko (v porovnání se znaménkem plus v rov. (17.11)) zde ukazuje, že vlna nyní skutečně postupuje proti směru osy x. Tím jsme zpětně ověřili správnost změny znamení u časové proměnné.

Uvažme nyní vlnu obecného tvaru postupující *ve směru* osy x stálou rychlostí v. (Vlnu postupující *proti* směru osy x lze vyjádřit záměnou $v \to -v$.) Takovou vlnu můžeme vždy popsat rovnicí

$$y(x,t) = h(x - vt), \tag{17.16}$$

kde h je libovolná funkce. Jednou z možností je právě funkce sinus, jako v rov. (17.2) zapsané ve tvaru $y(x,t) = y_\mathrm{m} \sin\left(k(x - \frac{\omega}{k}t)\right)$. Z rov. (17.16) je vidět (a dokázali bychom to jako výše), že vlna se beze změny tvaru pohybuje stálou rychlostí v podél osy x (pro $v > 0$). A také obráceně, rovnici libovolné postupné vlny s konstantní rychlostí v lze zapsat ve tvaru (17.6). Tak například rovnice $y(x,t) = \sqrt{ax + bt}$ popisuje možnou (ačkoliv fyzikálně snad poněkud bizarní) postupnou vlnu. Na druhé straně vztah $y(x,t) = \sin(ax)\cos(bt)$ *není* rovnicí postupné vlny.

PŘÍKLAD 17.1

Uvažme sinusovou vlnu popsanou rovnicí

$$y = 0{,}003\,27 \sin(72{,}1x - 2{,}72t), \tag{17.17}$$

což je stručný zápis, běžně užívaný namísto přesnějšího, ale méně přehledného zápisu

$$y(x,t) = (0{,}003\,27\ \mathrm{m}) \sin(72{,}1\ \mathrm{rad{\cdot}m^{-1}}x - 2{,}72\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}t).$$

(a) Jakou má vlna amplitudu?

ŘEŠENÍ: Při srovnání dané rovnice s rov. (17.2) vidíme, že

$$y_\mathrm{m} = 0{,}003\,27\ \mathrm{m} = 3{,}27\ \mathrm{mm}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou má vlnovou délku, periodu a frekvenci?

ŘEŠENÍ: Vyjdeme z rov. (17.17), ve které jsou zadány hodnoty úhlového vlnočtu a úhlové frekvence. Dále použijeme rov. (17.5):

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{(72{,}1\ \mathrm{rad{\cdot}m^{-1}})} = 8{,}71\ \mathrm{cm}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Periodu dostaneme z rov. (17.9):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{(2{,}72\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})} = 2{,}31\ \mathrm{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Frekvence je podle rov. (17.9)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{(2{,}31\ \mathrm{s})} = 0{,}433\ \mathrm{Hz}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jak rychle tato vlna postupuje?

ŘEŠENÍ: Použijeme rov. (17.12), podle které

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{(2{,}72\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}})}{(72{,}1\,\mathrm{rad\cdot m^{-1}})} = 0{,}037\,7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = \\ = 3{,}77\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jaká je příčná výchylka y na souřadnici $x = 22{,}5\,\mathrm{cm}$ v čase $t = 18{,}9\,\mathrm{s}$?

ŘEŠENÍ: Po dosazení za k, x, ω a t do rov. (17.17) vyjde argument funkce sinus $-35{,}185\,5$ rad. Dále probíhá vyčíslení výchylky takto:

$$y = (0{,}003\,27\,\mathrm{m})\sin(-35{,}185\,5\,\mathrm{rad}) = \\ = (0{,}003\,27\,\mathrm{m})(0{,}588) = \\ = 0{,}001\,92\,\mathrm{m} = 1{,}92\,\mathrm{mm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Příčná výchylka je tedy kladná. (Před vyčíslením funkce sinus se přesvědčte, že kalkulačku máte nastavenu do modu obloukové míry.)

PŘÍKLAD 17.2

V př. 17.1d jsme studovali vlnu určenou rov. (17.17). Vypočetli jsme příčnou výchylku y částice struny o souřadnici $x = 0{,}225\,\mathrm{m}$ v čase $t = 18{,}9\,\mathrm{s}$. Velikost výchylky vyšla $1{,}92\,\mathrm{mm}$.

(a) Jaká je příčná rychlost u téže částice struny v tomtéž čase a pro tutéž vlnu? (Příčná rychlost je spojena s příčným kmitáním uvedené částice, má tedy stejný směr jako výchylka, tj. směr osy y. Nezaměňujme ji s konstantní rychlostí vlny v, se kterou postupuje *tvar vlny* ve směru osy x.)

ŘEŠENÍ: Naše vlna je určena rov. (17.17). Je tedy jednou z vln obecně popsaných rov. (17.2):

$$y(x,t) = y_\mathrm{m}\sin(kx - \omega t). \qquad (17.18)$$

V této rovnici budeme držet proměnnou x konstantní a budeme sledovat změny výchylky v čase. Pro tuto chvíli je tedy jedinou proměnnou čas t. Vypočteme derivaci výchylky podle času. Výsledek má tvar*

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_\mathrm{m}\cos(kx - \omega t). \qquad (17.19)$$

Nyní stačí dosadit číselné hodnoty z př. 17.1:

$$u = (-2{,}72\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}})(3{,}27\,\mathrm{mm})\cos(-35{,}185\,5\,\mathrm{rad}) = \\ = 7{,}20\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V čase $t = 18{,}9\,\mathrm{s}$ se tedy částice struny o souřadnici $x = 22{,}5\,\mathrm{cm}$ pohybuje ve směru osy y rychlostí $7{,}20\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}}$.

(b) Jaké je příčné zrychlení částice struny o uvedené souřadnici x a v uvedeném čase t?

* Jestliže derivujeme funkci více proměnných podle jedné z nich a ostatní proměnné pokládáme za konstantní, používáme termínu **parciální derivace**. Parciální derivaci označujeme symbolem $\partial/\partial t$.

ŘEŠENÍ: Tentokrát vyjdeme z rov. (17.19) a budeme (v tomto výpočtu) opět pokládat x za konstantu a t za proměnnou. Parciální derivací podle času dostaneme

$$a_y = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega^2 y_\mathrm{m}\sin(kx - \omega t).$$

Avšak po srovnání s rov. (17.18) vidíme, že výsledek můžeme zapsat také takto:

$$a_y = -\omega^2 y.$$

Příčné zrychlení kmitající částice struny je tedy úměrné její příčné výchylce, má však opačné znamení. Jinými slovy, uvažovaná částice struny vykonává harmonický pohyb v příčném směru. Po dosazení číselných hodnot dostaneme

$$a_y = -(2{,}72\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}})^2(1{,}92\,\mathrm{mm}) = \\ = -14{,}2\,\mathrm{mm\cdot s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V čase $t = 18{,}9\,\mathrm{s}$ je tedy částice struny o souřadnici $x = 22{,}5\,\mathrm{cm}$ vysunuta z rovnovážné polohy $y = 0$ ve směru osy y o $1{,}92\,\mathrm{mm}$ a má zrychlení o velikosti $14{,}2\,\mathrm{mm\cdot s^{-2}}$ ve směru opačném k ose y.

KONTROLA 2: Uvažte tři vlny, popsané rovnicemi (1) $y(x,t) = 2\sin(4x - 2t)$, (2) $y(x,t) = \sin(3x - 4t)$ a (3) $y(x,t) = 2\sin(3x - 3t)$. Uspořádejte tyto vlny ve vzestupném smyslu (a) podle rychlosti vlny, (b) podle největší příčné rychlosti kmitajících částic.

RADY A NÁMĚTY

Bod 17.1: *Vyčíslení velkých fází*

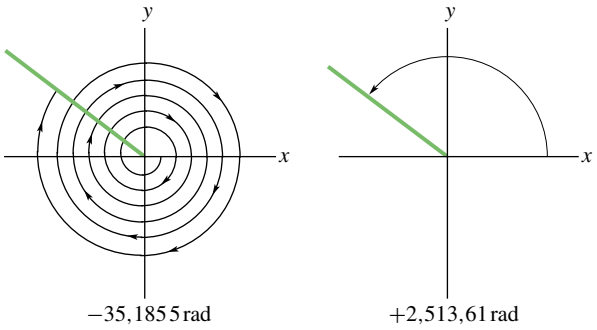
Za určitých okolností, jako třeba v př. 17.1d a 17.2, stojíme před úkolem vyčíslit funkci sinus nebo kosinus pro argument, který je mnohem větší než 2π rad (mnohem větší než 360°). Když k argumentu přidáme nebo od něj odečteme celočíselný násobek 2π rad, nezmění se funkční hodnota goniometrických funkcí. Tak třeba v př. 17.1d vystupuje úhel $-35{,}185\,5$ rad. Když k tomuto úhlu přičteme $(6)(2\pi\,\mathrm{rad})$, dostaneme

$$-35{,}185\,5\,\mathrm{rad} + (6)(2\pi\,\mathrm{rad}) = 2{,}513\,61\,\mathrm{rad}.$$

Tento úhel je již menší než 2π rad, přitom je pro něj hodnota goniometrických funkcí stejná jako pro původní úhel $-35{,}185\,5$ rad (obr. 17.6). Například sinus úhlu 2,513 61 rad i sinus úhlu $-35{,}185\,5$ rad mají stejnou hodnotu 0,588.

Kapesní kalkulátor provádí popsanou redukci velkých úhlů zcela automaticky. Ale pozor: před vyčíslením goniometrických funkcí velké argumenty nezaokrouhlujte. Když totiž počítáte sinus velkého úhlu, velkou část argumentu (příslušnou celočíselnému násobku 2π rad) odhodíte a pak počítáte sinus toho, co zbývá. Například kdybyste zaokrouhlili

−35,185 5 rad na −35 rad (to je při normálním zaokrouhlování rozumné, vzniklá změna představuje 0,5 % z původní hodnoty), změnili bychom sinus původního úhlu o 27 %. Stejně tak, když převádíte velký úhel ze stupňů na radiány, použijte přesný převodní faktor (tj. například $180^\circ = \pi$ rad). Vyhněte se přiblížení typu $57{,}3^\circ \doteq 1$ rad.



Obr. 17.6 Tyto dva úhly jsou různé, ale jejich goniometrické funkce se shodují.

17.6 RYCHLOST VLNY NA STRUNĚ

Rov. (17.12) udává souvislost rychlosti vlny s vlnovou délkou a s frekvencí. Z fyzikálního hlediska je však rychlost vlny *určena vlastnostmi látky*, ve které se vlna šíří. Má-li se totiž vlna šířit ve vodě, ve vzduchu, v oceli nebo na napnuté struně, musí se při jejím postupu částice daného prostředí rozkmitat. K tomu musí prostředí vykazovat jak setrvačnost (aby mohlo být nositelem kinetické energie), tak pružnost (aby na sebe mohlo vázat energii potenciální). Tyto dvě vlastnosti nakonec určují, jak rychle bude vlna danou látkou postupovat. Jinými slovy, rychlost vlny by mělo být možné vypočítat na základě znalosti vlastností prostředí, kterým se vlna šíří. Tento výpočet nyní provedeme pro napnutou strunu. Budeme přitom postupovat dvěma způsoby.

Rozměrová analýza

Při rozměrové analýze pečlivě zkoumáme rozměry fyzikálních veličin, které se mohou v dané situaci uplatnit (resp. jejich jednotky). V našem případě hledáme rychlost vlny v. Její fyzikální rozměr je tvořen podílem fyzikálních rozměrů délky a času, jednotkou je tedy $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Setrvačná tendence určitého úseku napnuté struny je určena hmotností tohoto úseku. Rozhodujícím parametrem je zde podíl hmotnosti struny m a její délky l. Tento podíl nazýváme **délkovou hustotou** struny a označíme jej μ. Máme tedy $\mu = m/l$ a fyzikální rozměr této veličiny je podíl fyzikálních rozměrů hmotnosti a délky, tedy jednotkou je $\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$.

Má-li se na struně šířit vlna, nestačí strunu pouze napřímit. Musíme ji navíc napnout, tj. vytvořit v ní napětí. Napětí vytváří sílu působící proti příčné výchylce jednotlivých úseků struny. Fyzikální veličinou, která představuje pružný aspekt při kmitání jednotlivých úseků struny, je tedy síla napínající strunu a její jednotkou je $\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}$ (vzpomeňte na $F = ma$).

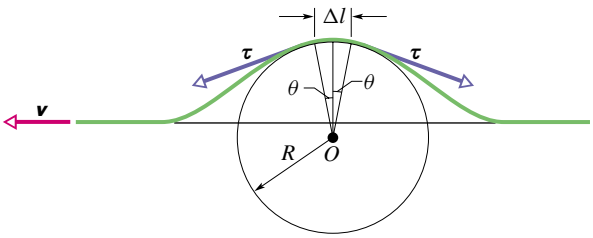
Naším úkolem je nyní zkombinovat μ (jednotka $\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$) a τ (jednotka $\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}$) takovým způsobem, abychom získali v (jednotka $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$). Když trochu probereme možné kombinace, dospějeme nakonec k výrazu

$$v = C\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}, \tag{17.20}$$

ve kterém je C bezrozměrová konstanta. Právě zde je slabé místo rozměrové analýzy: v jejím rámci zůstává konkrétní hodnota takovéto bezrozměrové konstanty neurčena. V průběhu druhého odvození vztahu pro rychlost vlny uvidíme, že rov. (17.20) je skutečně správná; navíc získáme $C = 1$.

Odvození z druhého Newtonova zákona

Místo sinusové vlny na obr. 17.1b se nyní zaměříme na jeden symetrický pulz, znázorněný na obr. 17.7. Pro větší pohodlí zvolíme vztažnou soustavu, ve které se tento pulz nepohybuje. Jinak řečeno, poběžíme společně s pulzem, a tak jej budeme mít stále před očima. V naší soustavě budeme vidět strunu ubíhající dozadu, přesněji na obr. 17.7 zprava doleva, rychlostí v.



Obr. 17.7 Symetrický pulz pozorujeme ve vztažné soustavě, která se pohybuje společně s pulzem. V této soustavě pulz stojí a struna se pohybuje zprava doleva rychlostí v. Při výpočtu vlnové rychlosti v vyjdeme z druhého Newtonova zákona. Příslušnou pohybovou rovnici aplikujeme na elementární úsek struny délky Δl, který se právě nachází na temeni pulzu.

Uvažme malý úsek struny délky Δl. V okamžiku zachyceném na obr. 17.7 vytváří tento úsek kruhový oblouk na kružnici o poloměru R. Na obou koncích úseku působí síla ve směru tečny ke křivce pulzu. Velikosti obou sil jsou rovny velikosti τ napětí ve struně. Jejich vodorovné složky se ruší, avšak svislé složky se sčítají. Celkově tak na daný

úsek působí vratná síla ***F*** o velikosti

$$F = 2\tau \sin\theta \approx \tau(2\theta) = \tau\frac{\Delta l}{R} \quad \text{(síla)}. \qquad (17.21)$$

Použili jsme zde aproximaci $\sin\theta \approx \theta$, platnou pro malý úhel θ na obr. 17.7. Z obrázku také vidíme, že platí $2\theta = \Delta l/R$.

Hmotnost uvažovaného úseku činí

$$\Delta m = \mu\,\Delta l \quad \text{(hmotnost)}. \qquad (17.22)$$

V okamžiku, který je zachycen na obr. 17.7, se úsek Δl pohybuje rychlostí v po obvodu kružnice o poloměru R. Musí mu tedy být udíleno dostředivé zrychlení. Směr zrychlení souhlasí se směrem vratné síly ***F***, jeho velikost činí

$$a = \frac{v^2}{R} \quad \text{(zrychlení)}. \qquad (17.23)$$

Rov. (17.21), (17.22) a (17.23) popisují veličiny, které jsou vázány druhým Newtonovým zákonem

$$\text{síla} = (\text{hmotnost}) \cdot (\text{zrychlení}).$$

Po dosazení tak získáváme rovnici

$$\tau\frac{\Delta l}{R} = (\mu\Delta l)\left(\frac{v^2}{R}\right).$$

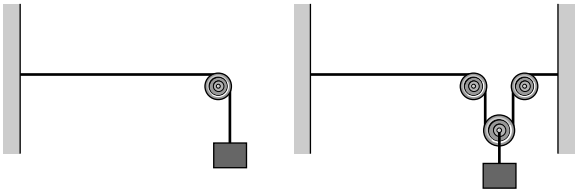
Jejím řešením pro neznámou rychlost vlny v nakonec dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad \text{(rychlost vlny na struně)}, \qquad (17.24)$$

což přesně souhlasí s rov. (17.20), pokud je konstanta C v rov. (17.20) rovna jedné. Rov. (17.24) tedy určuje rychlost pulzu na obr. 17.7, a tím ovšem i rychlost jakékoliv jiné postupné vlny na stejné struně (stejné μ), podrobené stejnému napětí (stejné τ).

V případě sinusových vln nám rov. (17.24) říká, že rychlost vlny na ideální napnuté struně závisí pouze na parametrech struny, nikoliv na frekvenci vlny. *Frekvence* vlny je určena výhradně způsobem, kterým vlnu vybudíme (například osobou na obr. 17.1b). Jak vyplývá z rov. (17.12), rychlostí vlny a frekvencí je již pevně nastavena *vlnová délka*: $\lambda = v/f$.

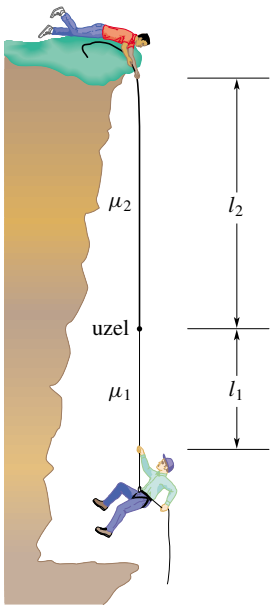
KONTROLA 3: Na obrázku jsou znázorněna dvě uspořádání, ve kterých je napětí na stejné struně vytvořeno tíhou závaží o hmotnosti 5 kg. V kterém případě bude rychlost vlny, postupující ve struně, větší?



(*a*) (*b*)

PŘÍKLAD 17.3

Na obr. 17.8 se poraněný horolezec zavěsil na vyprošťovací lano, spuštěné jeho zachráncem. Lano mezi horolezcem a zachráncem je složeno ze dvou úseků: v prvním úseku délky l_1 má lano délkovou hustotu μ_1, v druhém úseku délky $l_2 = 2l_1$ hustotu $\mu_2 = 4\mu_1$. V určitém okamžiku škubnul horolezec za spodní konec lana (chtěl vyslat signál „připraven“). V tomtéž okamžiku škubnul za horní konec lana zachránce.



Obr. 17.8 Příklad 17.3. Poraněný horolezec visí na laně, které se skládá ze dvou úseků. Horní konec lana pevně drží jeho zachránce.

(a) Vyjádřete rychlost v_1 vzniklých pulzů v úseku 1 pomocí jejich rychlosti v_2 v úseku 2.

ŘEŠENÍ: Předně budeme předpokládat, že součet hmotností obou úseků lana je zanedbatelný v porovnání s hmotností horolezce. Napětí v laně je tedy určeno pouze tíhou horolezce a je shodné v obou úsecích lana. Podle rov. (17.24) jsou vlnové rychlosti v jednotlivých úsecích lana určeny vztahy

$$v_1 = \sqrt{\frac{\tau}{\mu_1}} \quad \text{a} \quad v_2 = \sqrt{\frac{\tau}{\mu_2}}. \qquad (17.25)$$

První výraz dělíme druhým a dosadíme $\mu_2 = 4\mu_1$. Takto

získáme

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\tau}{\mu_1}}\sqrt{\frac{\mu_2}{\tau}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{4\mu_1}{\mu_1}} = 2$$

neboli

$$v_1 = 2v_2. \qquad \text{(Odpověď)} \qquad (17.26)$$

(b) V jaké vzdálenosti od zachránce se oba pulzy setkají? Vyjádřete hledanou vzdálenost pomocí délky l_2.

ŘEŠENÍ: Pro zjednodušení dalšího výpočtu nejprve rozhodneme, zda místo setkání pulzů leží nad uzlem nebo pod ním. Označme t dobu od vyslání obou pulzů k jejich setkání. Z rov. (17.26) již víme, že pulz horolezce postupuje prvním úsekem lana rychlostí dvakrát větší, než je rychlost pulzu zachránce při postupu druhým úsekem. Protože platí $l_2 = 2l_1$, víme také, že pulz horolezce musí proběhnout k uzlu dvakrát menší dráhu, než pulz zachránce. Celkově tedy pulz horolezce dospěje k uzlu jako první a místo setkání obou pulzů leží nutně nad uzlem. Označme symbolem d vzdálenost místa setkání obou pulzů od zachránce. K tomuto místu běží oba pulzy po dobu t.

Pulz zachránce tedy postupuje dolů k místu setkání rychlostí v_2 po dobu t a proběhne vzdálenost d. Platí

$$t = \frac{d}{v_2}. \qquad (17.27)$$

Pulz horolezce proběhne nahoru nejprve vzdálenost l_1 rychlostí v_1 a potom ještě vzdálenost $l_2 - d$ rychlostí v_2. Celková doba jeho pohybu k místu setkání je také t. Máme tedy

$$t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2 - d}{v_2}. \qquad (17.28)$$

Do této rovnice nyní dosadíme dobu t, vypočtenou v rovnici (17.27):

$$\frac{d}{v_2} = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2 - d}{v_2}.$$

Dále položíme $l_1 = l_2/2$ a $v_1 = 2v_2$:

$$\frac{d}{v_2} = \frac{l_2/2}{2v_2} + \frac{l_2 - d}{v_2}.$$

Po vynásobení obou stran poslední rovnice rychlostí v_2 ji nakonec snadno vyřešíme vzhledem k hledané vzdálenosti d. Výsledek je

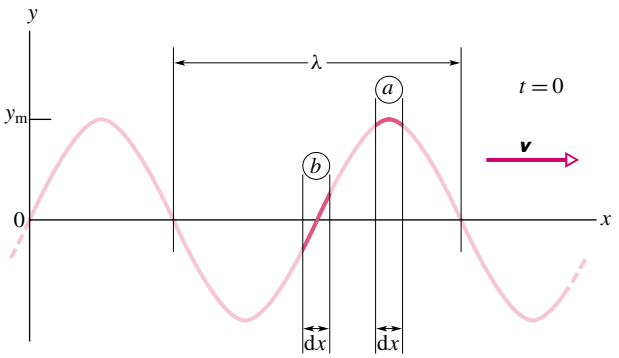
$$d = \tfrac{5}{8}l_2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

17.7 ENERGIE A VÝKON VLNY

K tomu, aby se na napnuté struně vytvořila vlna, je nutno struně dodat určitou energii, spojenou s pohybem struny. Při pohybu odnáší vlna tuto energii dále. Přenáší přitom jak energii kinetickou, tak potenciální energii pružnosti. Zaměříme se odděleně na každou z těchto dvou forem energie.

Kinetická energie

Obecný elementární úsek struny má hmotnost dm a při postupu vlny vykonává harmonický pohyb v příčném směru. Má tedy kinetickou energii, spojenou se svou příčnou rychlostí $\boldsymbol{u}$. Když tento úsek právě probíhá polohou $y = 0$ (obr. 17.9), je jeho příčná rychlost — a tedy i jeho kinetická energie — největší. Když se právě nachází v bodech obratu $y = \pm y_m$, je jeho příčná rychlost — a tedy i jeho kinetická energie — nulová.



Obr. 17.9 Snímek zachycuje postupnou vlnu na struně v čase $t = 0$. Elementární úsek struny a má v tomto okamžiku výchylku $y = y_m$, zatímco úsek b má výchylku $y = 0$. Kinetická energie jednotlivých úseků závisí na jejich příčné rychlosti. Potenciální energie úseků závisí na velikosti jejich protažení, nutného k deformaci struny do tvaru vlny.

Potenciální energie pružnosti

K tomu, abychom mohli na struně vybudit vlnu, je nutno strunu nejen napřímit, ale poté také napnout. Když potom úsek napnuté struny délky dx začne kmitat v příčném směru, je to nutně spojeno s periodickými změnami jeho délky. Střídavá prodloužení a zkrácení daného úseku jsou nutná k tomu, aby se struna zformovala do sinusoidy. Podobně jako u pružiny je právě s těmito délkovými změnami spojena potenciální energie pružnosti.

Uvažme úsek struny, který se právě nachází v okrajové poloze $y = y_m$ (obr. 17.9, úsek a). Jeho okamžitá délka je rovna původní délce, jakou měl u napnuté a nekmitající struny. Jeho potenciální energie je tedy nulová. Naopak, úsek b právě probíhá polohou $y = 0$ a jeho okamžitá délka je největší. Proto má také největší potenciální energii.

V poloze $y = 0$ má tedy kmitající úsek největší jak kinetickou, tak potenciální energii. Na obr. 17.9 je uveden snímek struny: oblasti struny s největší výchylkou mají nulovou energii, oblasti s nulovou výchylkou mají energii největší. Postupující vlna přenáší energii z těch úseků struny, kde je jí nadbytek, do oblastí bez energie.

Přenášený výkon

Kinetická energie $\mathrm{d}E_\mathrm{k}$, spojená s úsekem struny hmotnosti $\mathrm{d}m$, je určena vztahem

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,u^2, \qquad (17.29)$$

kde u je příčná rychlost při kmitání uvažovaného úseku. V rov. (17.19) jsme tuto rychlost vyjádřili ve tvaru

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_\mathrm{m}\cos(kx - \omega t). \qquad (17.30)$$

Tento výsledek použijeme nyní v rov. (17.29) a současně dosadíme $\mathrm{d}m = \mu\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2}(\mu\,\mathrm{d}x)(-\omega y_\mathrm{m})^2\cos^2(kx - \omega t). \qquad (17.31)$$

Průměrnou kinetickou energii připadající na jednotkovou délku struny vypočteme integrací:

$$\overline{E_\mathrm{k}} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{d}E_\mathrm{k}. \qquad (17.32)$$

Dosazením (17.31) do (17.32) dostaneme

$$\overline{E_\mathrm{k}} = \tfrac{1}{4}\mu v\omega^2 y_\mathrm{m}^2. \qquad (17.33)$$

Podél struny ovšem postupuje také potenciální energie pružnosti. Při jejím přenosu má průměrná potenciální energie stejnou velikost jako energie kinetická, tedy velikost určenou v rov. (17.33). Důkaz tohoto tvrzení zde neuvádíme. Avšak měli bychom si vybavit obdobnou situaci u kmitajících systémů, jako je například kyvadlo nebo závaží zavěšené na pružině. U nich jsme skutečně dokázali, že (časově) střední kinetická energie a střední potenciální energie pružnosti jsou si rovny.

Střední výkon přenášený vlnou je roven energii přenesené strunou za jednotku času (je to součet kinetické a potenciální energie připadající na takovou délku struny, která je číselně rovna rychlosti vlny v):

$$\overline{P} = (\overline{E_\mathrm{k}} + \overline{E_\mathrm{p}})v = 2\overline{E_\mathrm{k}}v. \qquad (17.34)$$

Použijeme-li výsledku v rov. (17.33), dostaneme

$$\overline{P} = \tfrac{1}{2}\mu v\omega^2 y_\mathrm{m}^2 \quad \text{(střední výkon)}. \qquad (17.35)$$

V tomto výsledném vztahu jsou konstanty μ a v určeny látkou, ze které je struna vyrobena, a napětím, které jsme v ní vyvolali. Veličiny ω a y_m jsou naopak určeny procesem, kterým jsme dané vlnění vybudili. Závislost středního výkonu vlny na čtverci její amplitudy a také na čtverci její úhlové frekvence představuje obecný závěr, platný pro všechny druhy vln.

PŘÍKLAD 17.4

Struna má délkovou hustotu $\mu = 525\,\mathrm{g\cdot m^{-1}}$ a je v ní vyvoláno napětí $\tau = 45\,\mathrm{N}$. Na struně postupuje vlna, jejíž frekvence f a amplituda y_m mají postupně hodnoty 120 Hz a 8,5 mm. Jaký je výkon přenášený vlnou?

ŘEŠENÍ: Chceme-li pro nalezení $\overline{P}$ použít rov. (17.35), musíme nejprve získat úhlovou frekvenci ω a rychlost vlny v. Z rov. (17.9) dostaneme

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(120\,\mathrm{Hz}) = 754\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}.$$

V dalším kroku získáme z rov. (17.24)

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{(45\,\mathrm{N})}{(0{,}525\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}})}} = 9{,}26\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Nyní již rov. (17.35) dává

$$\begin{aligned}\overline{P} &= \tfrac{1}{2}\mu v\omega^2 y_\mathrm{m}^2 = \\ &= \tfrac{1}{2}(0{,}525\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}})(9{,}26\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\cdot \\ &\quad\cdot(754\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}})^2(0{,}008\,5\,\mathrm{m})^2 = \\ &= 100\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

17.8 PRINCIP SUPERPOZICE

Často postupují určitou oblastí prostoru současně dvě nebo více vln. Když například posloucháme koncert, dopadají na naše ušní bubínky současně zvuky mnoha nástrojů. V anténě rádia nebo v televizní anténě je pohyb elektronů výsledkem působení celé řady signálů různých vysílačů. Na jezeře nebo v kotvišti je voda rozčeřena vlnami, běžícími od mnoha člunů.

Předpokládejme, že v téže struně postupují současně dvě vlny. Označme $y_1(x,t)$ (resp. $y_2(x,t)$) výchylky částic struny, jestliže v ní postupuje jen první (resp. jen druhá) vlna. Při současném šíření obou vln jsou výchylky částic určeny vztahem

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t), \qquad (17.36)$$

ve kterém znamení plus představuje algebraický součet. Sčítání výchylek podél struny znamená:

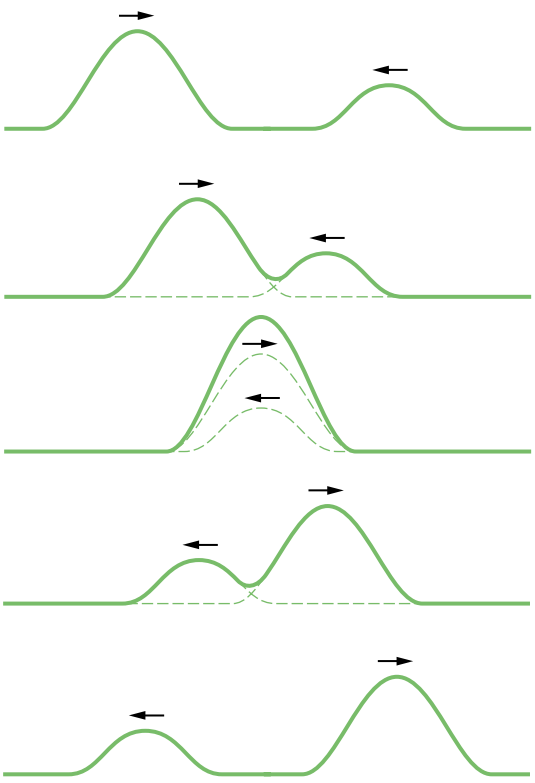
U překrývajících se vln se výchylky algebraicky sčítají a vytvářejí jednu výslednou vlnu.

Máme zde další příklad **principu superpozice**. Uplatňuje se v situacích, kdy současně působí několik vlivů

a tvrdí, že výsledný jev je součtem jevů, vyvolaných individuálně jednotlivými vlivy.*

Na obr. 17.10 vidíme sérii pěti snímků dvou pulzů, postupujících opačným směrem na téže struně. Když se překrývají (když sebou probíhají), je výsledný pulz roven součtu obou pulzů. Navíc, každý z obou výchozích pulzů probíhá druhým, jako by ten druhý vůbec neexistoval:

> Překrývající se vlny se při svém postupu navzájem neovlivňují.



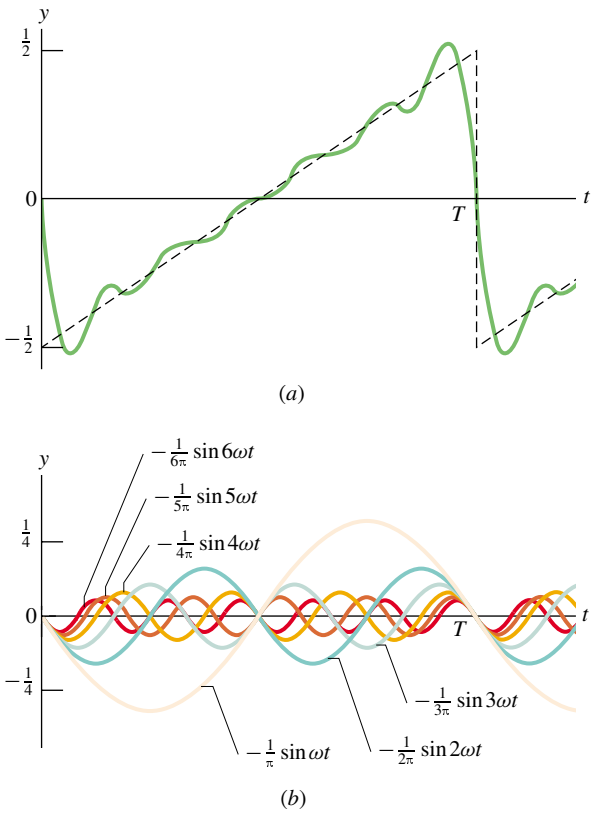
Obr. 17.10 Série pěti snímků dvou pulzů, postupujících na napnuté struně v opačném směru. Pokud sebou pulzy právě probíhají, použijeme princip superpozice.

Fourierova analýza

Francouzský matematik Jean Baptiste Fourier (1786–1830) použil princip superpozice ke studiu vln obecného tvaru. Ukázal, že vlnu libovolného tvaru lze vyjádřit ve tvaru součtu velkého počtu sinusových vln. Stačí jen pečlivě zvolit jejich frekvence, amplitudy a fázové konstanty. Dobře to vyjádřil anglický fyzik Sir James Jeans:

> (Fourierův) teorém říká, že libovolnou křivku, ať už jsou její vlastnosti jakékoliv nebo ať už byla získána jakýmkoliv způsobem, lze přesně reprodukovat tím, že složíme dostatečný počet jednoduchých harmonických (tj. sinusových) křivek — stručně řečeno, každou křivku lze postavit, když na sebe naskládáme sinusové vlny.

Součty tohoto druhu se nazývají **Fourierovy řady**; na obr. 17.11 vidíte jeden konkrétní příklad. Uvažme po částech lineární křivku na obr. 17.11a (profil pily). Řekněme, že právě tato křivka představuje časovou změnu výchylky $y(t)$



Obr. 17.11 (a) Čárkovaná zubatá křivka (profil pily) je aproximována zelenou křivkou, která vznikla součtem prvních šesti členů v rov. (17.37). (Kdybychom sečetli více prvních členů, byla by aproximace přesnější.) (b) Prvních šest členů na pravé straně v rov. (17.37) je zobrazeno jako šest jednotlivých křivek. Každá z nich je sinusová.

(v poloze $x = 0$) při postupu jisté vlny. Lze ukázat, že Fourierova řada, která reprodukuje tento průběh $y(t)$, má tvar

$$y(t) = -\frac{1}{\pi}\sin(\omega t) - \frac{1}{2\pi}\sin(2\omega t) - \frac{1}{3\pi}\sin(3\omega t) - \dots, \tag{17.37}$$

kde $\omega = 2\pi/T$ a T je perioda zubaté křivky. Zelená křivka na obr. 17.11a představuje součet prvních šesti členů na

* Neplatil by např., kdyby výchylka vlny byla příliš velká, takže bychom překročili mez pružnosti prostředí.

pravé straně rov. (17.37). Vidíme již docela dobrou shodu s průběhem $y(t)$. Obr. 17.11b ukazuje odděleně závislost uvedených šesti členů na čase. Kdybychom vzali více členů, mohli bychom profil pily reprodukovat s libovolnou přesností. Obdobně jako tento *časový* průběh lze i *prostorový* průběh složit ze sinusových vln.

Teď je pochopitelné, proč jsme věnovali tolik pozornosti právě vlnám sinusovým. Když jim totiž rozumíme, otevře nám Fourierův teorém cestu ke všem ostatním vlnám.

17.9 INTERFERENCE VLN

Předpokládejme, že v téže napnuté struně postupují v souhlasném směru dvě sinusové vlny a že obě mají stejnou amplitudu a stejnou vlnovou délku. Použijeme princip superpozice. Jaká bude výsledná vlna?

Tvar výsledné vlny závisí na tom, do jaké míry jsou obě výchozí vlny navzájem *ve fázi* (jak dalece jsou sfázovány). Jinak řečeno, citlivým parametrem je vzájemný posuv křivek, které představují jednotlivé výchozí vlny. Nejprve uvažme případ, kdy jsou obě vlny přesně ve fázi. To znamená, že vrcholy (údolí) první vlny se přesně kryjí s vrcholy (údolími) vlny druhé. Mezi oběma křivkami vln není vůbec žádný posuv. Výchylka každé částice struny je tedy dvojnásobná v porovnání s výchylkou při samostatném šíření jen jedné z vln. Dále uvažme opačný případ: obě výchozí vlny mají přesně opačnou fázi. To znamená, že polohy vrcholů (údolí) jedné vlny se přesně kryjí s polohami údolí (vrcholů) vlny druhé. Křivky vln jsou navzájem posunuty o polovinu vlnové délky. Výchylky od obou výchozích vln se navzájem ruší a struna zůstává přímá. Tento jev vzájemného zesilování a zeslabování vln nazýváme **interference**. Říkáme, že výchozí vlny spolu interferují. (Slovo „interference“ zde ovšem neznamená, že by se snad obě vlny navzájem nějak ovlivňovaly; ovlivňují se pouze výchylky částic struny, a to tak, že se sčítají.)

Nechť je pro určitost první vlna, postupující na napnuté struně, určena vztahem

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t), \qquad (17.38)$$

zatímco druhá vlna, posunutá vzhledem k první, vztahem

$$y_2(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi). \qquad (17.39)$$

Tyto dvě vlny mají stejnou úhlovou frekvenci ω (a tedy i stejnou frekvenci f), stejný úhlový vlnočet k (a tedy i stejnou vlnovou délku λ) a stejnou amplitudu y_m. Obě postupují stejnou rychlostí, určenou v rov. (17.24), stejným směrem, tj. ve směru osy x. Liší se pouze konstantním úhlem φ. Říkáme, že tyto dvě vlny jsou navzájem *fázově posunuty* o úhel φ. Jinými slovy, vlny mají *fázový rozdíl* φ.

Na základě principu superpozice, vyjádřeného v rovnici (17.36), přísluší výsledné vlně výchylka

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = \\ = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx - \omega t + \varphi). \qquad (17.40)$$

V dodatku E je uveden goniometrický vzorec pro součet dvou funkcí sinus dvou libovolných úhlů α a β:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (17.41)$$

Po jeho použití v rov. (17.40) dostaneme

$$y'(x,t) = \left(2y_m \cos\tfrac{1}{2}\varphi\right)\sin(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\varphi). \qquad (17.42)$$

Výsledná vlna je tedy opět vlna sinusová a postupuje ve směru osy x. Je to ovšem jediná vlna, kterou lze na struně skutečně pozorovat (jednotlivé komponenty, určené v rov. (17.38) a (17.39), již *nevidíme*).

Interferencí dvou sinusových vln o stejné amplitudě a stejné vlnové délce, postupujících v napnuté struně *souhlasným* směrem, vzniká opět vlna sinusová, postupující stejným směrem, jako obě výchozí vlny.

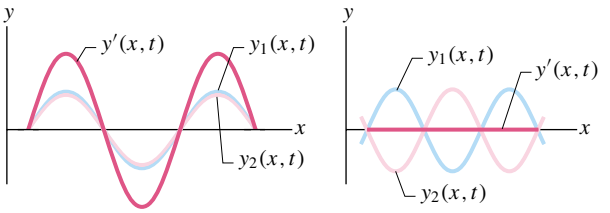
Výsledná vlna se od obou výchozích vln liší ve dvou ohledech: (1) její fáze obsahuje konstantu $\frac{1}{2}\varphi$ a (2) její amplituda je určena veličinou uvedenou v rov. (17.42) v závorkách:

$$y'_m = 2y_m \cos\tfrac{1}{2}\varphi. \qquad (17.43)$$

Je-li $\varphi = 0\,\text{rad}$ (neboli $0°$), jsou obě výchozí vlny přesně ve fázi (jako na obr. 17.12a). V tomto případě se rov. (17.42) redukuje na

$$y'(x,t) = 2y_m \sin(kx - \omega t) \quad (\varphi = 0\,\text{rad}). \qquad (17.44)$$

Všimněme si, že amplituda výsledné vlny je dvakrát větší než amplituda každé z výchozích vln. Je to také největší amplituda, kterou může výsledná vlna vůbec mít. Skutečně, člen s funkcí kosinus v rov. (17.42) a (17.43) má největší hodnotu (rovnou jedné) pro $\varphi = 0$. Interference, která vytváří největší možnou amplitudu, se nazývá **úplně konstruktivní**.



Obr. 17.12 Na struně postupují souhlasným směrem dvě identické harmonické vlny $y_1(x,t)$ a $y_2(x,t)$. Jejich interferencí vzniká výsledná vlna $y'(x,t)$. (a) Jsou-li výchozí vlny přesně ve fázi, je jejich interference úplně konstruktivní: výsledná vlna má v porovnání s výchozími vlnami dvojnásobnou amplitudu. (b) Jsou-li výchozí vlny přesně v protifázi, je jejich interference úplně destruktivní: struna přestane kmitat.

Je-li $\varphi = \pi\,\text{rad}$ (nebo 180°), jsou obě výchozí vlny přesně v protifázi (jako na obr. 17.12b). V tomto případě má $\cos\frac{1}{2}\varphi$ hodnotu $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$, tj. amplituda výsledné vlny (rov. (17.43)) je nulová. Pro všechny hodnoty proměnných x a t potom dostáváme

$$y'(x,t) = 0 \quad (\varphi = \pi\,\text{rad}). \tag{17.45}$$

Ačkoliv jsme tedy na struně vybudili dvě vlny, struna nekmitá, zůstává v klidu. Tento typ interference se nazývá **úplně destruktivní**.

Fázový rozdíl $\varphi = 2\pi\,\text{rad}$ (neboli 360°) odpovídá posuvu křivek, znázorňujících obě výchozí vlny, o vzdálenost jedné vlnové délky. Fázový rozdíl můžeme tedy také vyjádřit jako rozdíl dráhový. Přitom je výhodné vyjadřovat dráhový rozdíl ve vlnových délkách. Například vlny na obr. 17.12b mají dráhový rozdíl 0,50 vlnových délek. V tab. 17.1 jsou uvedeny některé další příklady fázových rozdílů a jim odpovídající typ interference. Když daná interference není ani úplně konstruktivní, ani úplně destruktivní, nazýváme ji **částečnou**. Amplituda výsledné vlny je v tomto případě větší než nula a menší než $2y_m$.

Dvě vlny se stejnou vlnovou délkou jsou ve fázi, je-li jejich dráhový rozdíl nulový nebo je-li roven celočíselnému násobku vlnové délky. Ve výpočtech tedy můžeme od číselné hodnoty dráhového rozdílu, *vyjádřeného ve vlnových délkách*, odečíst libovolné celé číslo. Například situace s dráhovým rozdílem 0,40 vlnových délek je ve všech směrech ekvivalentní situaci s dráhovým rozdílem 2,40 vlnových délek. Ve výpočtech tak můžeme použít menšího z obou čísel.

PŘÍKLAD 17.5

Na struně postupují souhlasným směrem dvě identické harmonické vlny a interferují spolu. Amplitudy y_m výchozích vln jsou 9,8 mm, jejich fázový rozdíl je 100°.

(a) Vypočtěte amplitudu y'_m výsledné vlny, vznikající interferencí obou výchozích vln. K jakému typu interference zde dochází?

ŘEŠENÍ: Pro výpočet amplitudy použijeme rov. (17.43):

$$\begin{aligned} y'_m &= 2y_m \cos\tfrac{1}{2}\varphi = \\ &= 2(9{,}8\,\text{mm})\cos(100^\circ/2) = \\ &= 13\,\text{mm}. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

Protože fázový rozdíl leží mezi 0° a 180°, jedná se o částečnou interferenci.

(b) Pro jaký fázový rozdíl výchozích vln by měla amplituda výsledné vlny velikost 4,9 mm? Výsledek vyjádřete v obloukové míře a poté i pomocí dráhového rozdílu ve vlnových délkách.

ŘEŠENÍ: Opět vyjdeme z rov. (17.43):

$$y'_m = 2y_m \cos\tfrac{1}{2}\varphi$$

neboli

$$4{,}9\,\text{mm} = 2(9{,}8\,\text{mm})\cos\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Pomocí kalkulátoru (přepnutého do módu obloukové míry) vypočteme

$$\begin{aligned} \cos\tfrac{1}{2}\varphi &= \frac{(4{,}9\,\text{mm})}{2(9{,}8\,\text{mm})} = 0{,}25, \\ \varphi &= \pm 2{,}636\,\text{rad} \doteq \pm 2{,}6\,\text{rad}. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tabulka 17.1 **Fázové rozdíly a jim odpovídající druh interference**[a]

FÁZOVÝ ROZDÍL VE STUPNÍCH	FÁZOVÝ ROZDÍL V RADIÁNECH	DRÁHOVÝ ROZDÍL VE VLN. DÉLKÁCH	AMPLITUDA VÝSLEDNÉ VLNY	DRUH INTERFERENCE
0	0	0	$2y_m$	úplně konstruktivní
120	$2\pi/3$	0,33	y_m	částečná
180	π	0,50	0	úplně destruktivní
240	$4\pi/3$	0,67	y_m	částečná
360	2π	1,00	$2y_m$	úplně konstruktivní
865	15,1	2,40	$0{,}60y_m$	částečná

[a] Interferují dvě identické harmonické vlny o amplitudě y_m, postupující souhlasným směrem.

Máme zde dvě řešení. První vlna může totiž buď *předbíhat* druhou vlnu (postupovat před ní), nebo se za ní *zpožďovat* (běžet za ní). V prvním případě je fázový rozdíl $+2{,}6$ rad, v druhém $-2{,}6$ rad. Vyjádřeno v dráhovém rozdílu, odstup vln činí

$$\frac{\varphi}{2\pi\,\mathrm{rad}\cdot\lambda^{-1}} = \frac{\pm 2{,}636\,\mathrm{rad}}{2\pi\,\mathrm{rad}\cdot\lambda^{-1}} = \\ = \pm 0{,}42\lambda. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 4: Vyjděte ze znění př. 17.5 a uvažte následující čtyři dráhové rozdíly mezi oběma výchozími vlnami: $0{,}20\lambda$, $0{,}45\lambda$, $0{,}60\lambda$ a $0{,}80\lambda$. Uspořádejte je sestupně podle velikosti amplitudy výsledné vlny.

17.10 FÁZORY

Vlnu na struně (a obecněji jakoukoliv harmonickou vlnu) můžeme popsat také vektorově, pomocí **fázoru**. Fázor je vektor umístěný do počátku souřadnic. Jeho velikost se rovná amplitudě vlny a úhlová rychlost jeho rotace je rovna úhlové frekvenci ω vlny. Tak např. vlnu

$$y_1(x,t) = y_{m1}\sin(kx-\omega t) \qquad (17.46)$$

reprezentuje fázor na obr. 17.13a. Velikost fázoru je amplituda vlny y_{m1}. Jak čas plyne, fázor se otáčí, a to v záporném směru (díky zápornému znaménku u časového členu ωt). Při rotaci fázoru s úhlovou rychlostí ω kolem počátku si všimněme jeho projekce na svislou osu. Ta se mění sinusově od největší hodnoty y_{m1}, přes nulu, až k nejmenší hodnotě $-y_{m1}$. Její průběh odpovídá sinusovému průběhu výchylky $y_1(x,t)$ libovolné částice struny, když přes ni postupuje vlna. Částice struny má pevnou souřadnici x. Obdobně lze znázornit průběh vlny v závislosti na x při daném čase t.

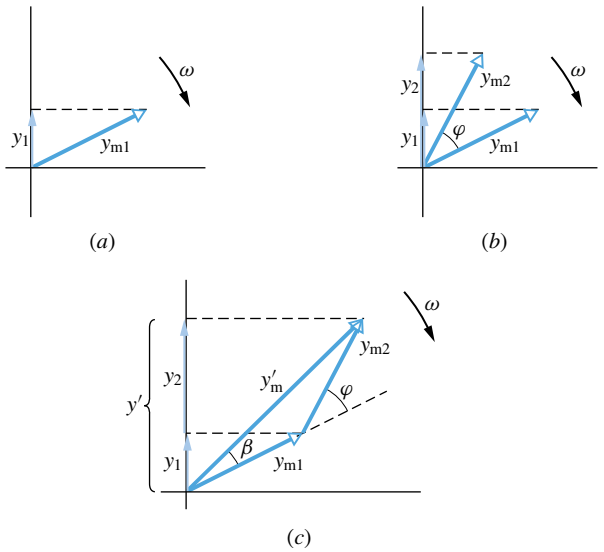
Uvažme obecněji dvě vlny postupující souhlasným směrem v téže struně. Obě tyto výchozí vlny lze společně s vlnou výslednou znázornit pomocí **fázorového diagramu**. Na obr. 17.13b vidíte dva fázory: jeden představuje vlnu v rov. (17.46), druhý odpovídá vlně

$$y_2(x,t) = y_{m2}\sin(kx-\omega t+\varphi). \qquad (17.47)$$

Úhel mezi oběma fázory na obr. 17.13b je roven fázové konstantě φ v rov. (17.47). Tento úhel se v čase nemění, protože oba fázory rotují se stejnou úhlovou rychlostí ω rovnou úhlové frekvenci obou vln.

Obě uvažované vlny mají stejný úhlový vlnočet k a stejnou úhlovou frekvenci ω. V čl. 17.9 jsme již studovali jejich interferenci. Víme, že výsledná vlna má tvar

$$y'(x,t) = y'_m\sin(kx-\omega t+\beta), \qquad (17.48)$$



Obr. 17.13 (a) Fázor velikosti y_{m1}, rotující v záporném směru kolem počátku úhlovou rychlostí ω, reprezentuje sinusovou vlnu. Jeho projekce y_1 na svislou osu popisuje výchylku částice struny, přes kterou vlna postupuje. (b) Druhý fázor velikosti y_{m2} se otáčí s konstantním úhlovým odstupem φ za prvním; představuje druhou vlnu s fázovou konstantou φ. (c) Vektorový součet obou fázorů představuje výslednou vlnu, vznikající interferencí obou výchozích vln. Jeho velikost je y'_m. Projekce y' součtu na svislou osu odpovídá výchylce kratičkého úseku struny, kterým právě prochází výsledná vlna.

kde y'_m je amplituda výslednice a β je její fázová konstanta. Kdybychom chtěli vypočítat hodnoty veličin y'_m a β, museli bychom sečíst funkci v rov. (17.46) s funkcí v rov. (17.47). To jsme však již vlastně učinili při odvození rov. (17.42).

Na druhé straně můžeme výslednou vlnu studovat ve fázorovém diagramu: v libovolném okamžiku během rotace sestrojíme vektorový součet obou fázorů. Postup je znázorněn na obr. 17.13c, kde jsme nejprve posunuli druhý fázor o velikosti y_{m2}. Velikost vektorového součtu se rovná amplitudě y'_m v rov. (17.48), úhel mezi ním a fázorem, který popisuje vlnu y_1, je roven fázové konstantě β v rov. (17.48).

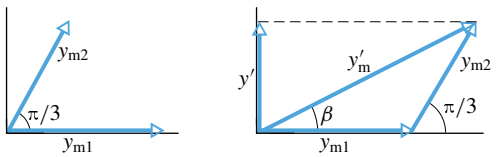
Všimněte si, že na rozdíl od postupu v čl. 17.9 umožňují fázory konstrukci výsledné vlny i v případě, *kdy jsou amplitudy výchozích vln rozdílné*.

PŘÍKLAD 17.6

Na struně postupují souhlasným směrem dvě vlny $y_1(x,t)$ a $y_2(x,t)$. Obě vlny mají stejnou vlnovou délku, jejich amplitudy jsou $y_{m1} = 4{,}0$ mm a $y_{m2} = 3{,}0$ mm, jejich fázové konstanty jsou po řadě 0 rad a $\pi/3$ rad. Určete amplitudu y'_m a fázovou konstantu β výsledné vlny.

ŘEŠENÍ: Obě vlny postupují v téže struně. Podle rovnice (17.24) tedy postupují stejnou rychlostí v. Protože mají

také stejnou vlnovou délku (a tedy i stejný úhlový vlnočet k), musí mít podle rov. (17.12) stejnou úhlovou frekvenci ω. Odpovídající fázory tedy rotují kolem počátku se stejnou úhlovou rychlostí ω, jak je znázorněno na obr. 17.13b. Úhel φ mezi oběma fázory je nyní $\pi/3$ rad.



(a) (b)

Obr. 17.14 Příklad 17.6. (a) Dva fázory o velikostech y_{m1} a y_{m2} svírají úhel $\pi/3$. (b) Vektorové sčítání těchto fázorů, provedené v libovolném okamžiku během jejich rotace, poskytuje velikost y'_m fázoru výsledné vlny.

Máme sestrojit vektorový součet obou fázorů, jako na obr. 17.13c. Oba sčítance můžeme nakreslit v libovolném okamžiku během jejich rotace. Pro zjednodušení vektorového sčítání bude tedy výhodné, když je nakreslíme jako na obr. 17.14a. Nyní fázory sečteme způsobem, který je obvyklý pro sčítání libovolných dvou vektorů (obr. 17.14b). Vodorovná složka výsledného fázoru je

$$\begin{aligned} y'_{mv} &= y_{m1}\cos 0 + y_{m2}\cos\pi/3 = \\ &= 4{,}0\,\text{mm} + (3{,}0\,\text{mm})\cos\pi/3 = \\ &= 5{,}50\,\text{mm}. \end{aligned}$$

Svislá složka výsledného fázoru je

$$\begin{aligned} y'_{ms} &= y_{m1}\sin 0 + y_{m2}\sin\pi/3 = \\ &= 0\,\text{mm} + (3{,}0\,\text{mm})\sin\pi/3 = \\ &= 2{,}60\,\text{mm}. \end{aligned}$$

Výsledná vlna má tedy amplitudu

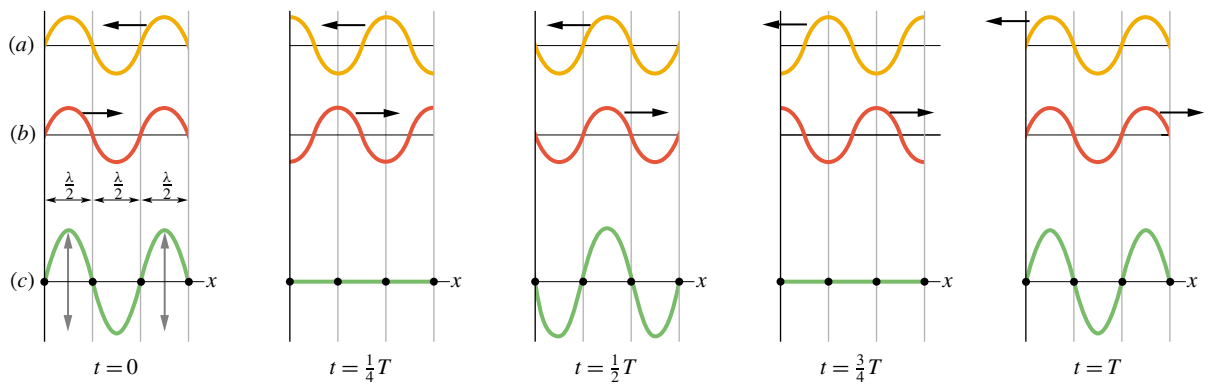
$$\begin{aligned} y'_m &= \sqrt{(5{,}50\,\text{mm})^2 + (2{,}60\,\text{mm})^2} = \\ &= 6{,}1\,\text{mm} \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a její fázová konstanta je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta &= \frac{(2{,}60\,\text{mm})}{(5{,}50\,\text{mm})} = 0{,}473, \\ \beta &= 0{,}44\,\text{rad}. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

17.11 STOJATÉ VLNY

V předchozích dvou odstavcích jsme studovali dvě sinusové vlny se stejnou vlnovou délkou a stejnou amplitudou postupující v napnuté struně *souhlasným směrem*. A co když běží proti sobě? Také v tomto případě použijeme k nalezení výsledné vlny princip superpozice. Východiskem našich úvah bude obr. 17.15, který znázorňuje danou situaci graficky. Vidíme zde dvě výchozí vlny: ta, která postupuje doleva je na obr. 17.15a. Proti ní, tj. doprava, běží vlna na obr. 17.15b. Na obr. 17.15c vidíme jejich součet, získaný graficky aplikací principu superpozice. Nápadným rysem výsledné vlny je existence určitých míst podél struny, ve kterých je struna neustále v klidu. Těmto místům říkáme **uzly** vlny. Čtyři takové uzly jsou na obr. 17.15c vyznačeny tečkami. Uprostřed mezi sousedními uzly se nacházejí **kmitny**; v nich je naopak amplituda výsledné vlny největší. Vlnu na obr. 17.15c nazýváme **vlnou stojatou**, protože se nepohybuje doprava ani doleva: polohy nulové a maximální výchylky se v čase nemění.



Obr. 17.15 Vznik stojaté vlny ze dvou vln postupných. Části (a) a (b) ukazují dvě série snímků dvou vln o stejné amplitudě a se stejnou vlnovou délkou. Vlny běží v opačných směrech a jejich tvary jsou zaznamenány v pěti různých okamžicích v rozmezí jedné periody. (c) Superpozice obou vln v pěti uvedených okamžicích. Všimněte si polohy uzlů a kmiten u výsledné stojaté vlny (c). Uzly jsou označeny černými tečkami. V případě postupných vln (a) a (b) žádné uzly či kmitny neexistují.

Jestliže dvě sinusové vlny o stejné amplitudě a se stejnou vlnovou délkou postupují v napnuté struně *opačným* směrem, vzniká jejich interferencí stojatá vlna.

Nyní budeme studovat stojatou vlnu matematicky. Dvě výchozí vlny popíšeme rovnicemi

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t), \qquad (17.49)$$

$$y_2(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t). \qquad (17.50)$$

Výsledná vlna y' je určena principem superpozice:

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = \\ = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t).$$

Nakonec použijeme identitu (17.41) a dostaneme:

$$y'(x,t) = (2y_m \sin kx)\cos \omega t. \qquad (17.51)$$

Výsledek *nemá* tvar rov. (17.16) a *není* to tedy postupná vlna. Rov. (17.51) popisuje vlnu stojatou.

Veličina $2y_m \sin kx$ v první závorce na pravé straně rov. (17.51) vlastně určuje amplitudu kmitů té částice struny, která je umístěna na poloze x. Avšak amplituda musí být vždy nezáporná a $\sin kx$ může být i záporný. Amplitudu kmitů částice v místě x tedy vezmeme jako absolutní hodnotu veličiny $2y_m \sin kx$.

V případě postupné sinusové vlny máme pro všechny částice struny jednu a tutéž amplitudu kmitů. Pro stojatou vlnu to neplatí: amplituda kmitů se *mění s polohou*. Tak například u stojaté vlny, popsané rov. (17.51), je amplituda nulová pro všechny částice struny, jejichž polohy splňují rovnici $\sin kx = 0$, a tedy také rovnici

$$kx = n\pi \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (17.52)$$

Když do této rovnice dosadíme $k = 2\pi/\lambda$ a provedeme malou úpravu, získáme

$$x = n\frac{\lambda}{2} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (17.53)$$

(poloha uzlů).

To je podmínka pro polohu částic struny s nulovou amplitudou — uzlů — v případě stojaté vlny popsané rov. (17.51). Všimněte si, že sousední uzly jsou vzdáleny o $\lambda/2$, tj. o polovinu vlnové délky, a uprostřed mezi nimi leží kmitna.

Největší z možných amplitud stojaté vlny v rov. (17.51) má velikost $2y_m$. Vyskytuje se pro ty hodnoty kx, pro které platí $|\sin kx| = 1$. Těmito hodnotami jsou

$$kx = \tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{3}{2}\pi,\ \tfrac{5}{2}\pi,\ \ldots = \\ = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\pi \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (17.54)$$

Do rov. (17.54) dosadíme $k = 2\pi/\lambda$ a provedeme malou úpravu. Tak získáme podmínku

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (17.55)$$

(poloha kmiten).

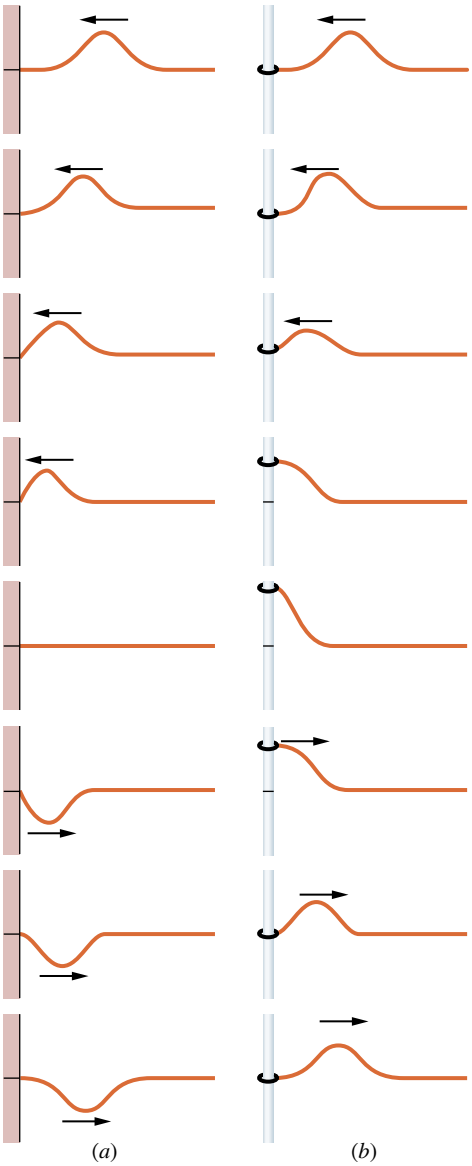
To je podmínka pro polohu částic struny s maximální amplitudou — kmiten — v případě stojaté vlny, popsané rov. (17.51). Sousední kmitny jsou vzdáleny o polovinu vlnové délky a uprostřed mezi nimi leží uzel.

Odraz na hranici

V napnuté struně lze vytvořit stojatou harmonickou vlnu také odrazem postupné vlny na konci struny. Dopadající (původní) vlna a odražená vlna jsou popsány postupně rov. (17.49) a (17.50). Jejich interferencí vzniká stojatá vlna.

Obr. 17.16 ilustruje odraz vlny na příkladu odrazu jednoho postupného pulzu. Na obr. 17.16a je struna na svém levém konci upevněna, a tedy i znehybněna. Pulz, který zprava dospěje k tomuto konci, působí na stěnu určitou silou ve směru nahoru. Podle zákona akce a reakce tedy také stěna působí na okrajovou částici struny stejně velkou, ale opačně orientovanou silou. Tato reakční síla vytváří u stěny nový pulz, který postupuje podél struny od konce zpátky. Při takovém „tvrdém" odrazu musí mít vlna u stěny uzel, struna je zde totiž znehybněna upevněním ve stěně. Výchylky dopadajícího a odraženého pulzu musí být těsně u stěny opačné, interferencí se zde musí nutně vyrušit. Jde-li o harmonickou vlnu, zjistíme toto: Vlna odražená na pevném konci je v protifázi k přicházející vlně.

Na obr. 17.16b je levý konec struny připevněn k lehkému prstenci, který může volně a bez tření klouzat po přímé tyči. Dopadající pulz vytáhne strunu i s prstencem na tyči směrem nahoru. Struna se přitom na svém konci prodlouží a vznikne v ní napětí, které má naopak tendenci toto prodloužení zmenšit: výsledkem je pohyb prstence směrem dolů a tím následný vznik odraženého pulzu, jehož výchylka je souhlasně orientovaná s výchylkou pulzu dopadajícího. Při takovém „měkkém" odrazu se tedy dopadající a odražený pulz navzájem zesilují a u konce struny vzniká kmitna; amplituda výchylky prstence je dvojnásobkem amplitudy každého z obou pulzů. Jde-li o harmonickou vlnu, zjistíme toto: Vlna odražená na volném konci je ve fázi s přicházející vlnou.



Obr. 17.16 (a) Zprava nabíhající pulz je na levém konci struny odražen doprava. Levý konec je pevně zabudován ve stěně. Všimněte si, že výchylky dopadajícího a odraženého pulzu jsou u stěny opačné. (b) Levý konec struny je spojen s prstencem, který může volně a bez tření klouzat nahoru a dolů po přímé tyči. Dopadající a odražený pulz mají nyní stejně orientované výchylky.

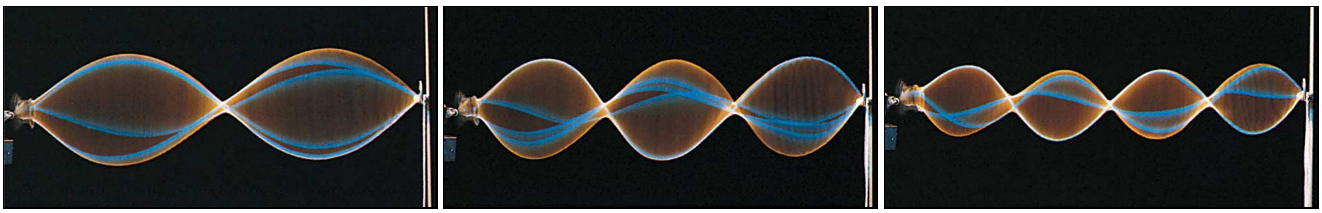
KONTROLA 5: Uvažme interferenci dvou vln stejné amplitudy a vlnové délky. Výsledná vlna má rovnici (1) $y'(x,t) = 4\sin(5x - 4t)$, (2) $y'(x,t) = 4\sin(5x)\cos(4t)$ a (3) $y'(x,t) = 4\sin(5x + 4t)$. Která z těchto rovnic popisuje výslednou vlnu v situaci, kdy se výchozí vlny šíří (a) obě ve směru osy x, (b) obě proti směru osy x a (c) v opačných směrech?

17.12 VLASTNÍ KMITY

Nechme jeden konec struny, řekněme levý, sinusově kmitat a druhý upevníme. Na struně bude vlna tedy nejprve postupovat ve směru doprava. Její frekvence se rovná frekvenci kmitů levého konce. Na pevném konci se vlna odrazí a postupuje skrze sebe samu zpět doleva. Vlna běžící doprava a vlna běžící doleva spolu interferují.

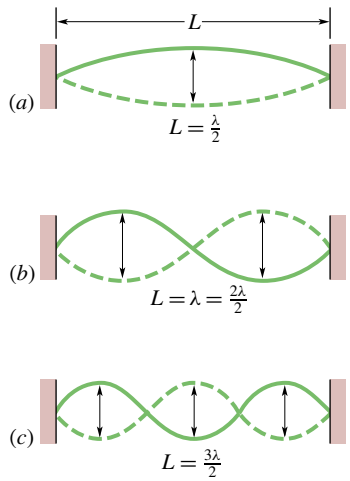
Pro jisté speciální frekvence vznikne díky interferenci stojatá vlna s uzly a s velkými kmitnami, podobná vlnám na obr. 17.17. Říkáme jí **vlastní** neboli **rezonanční kmit struny**. Frekvence, při kterých dochází ke vzniku rezonančních kmitů, nazýváme **vlastní** neboli **rezonanční frekvence struny**. Také říkáme, že při těchto frekvencích struna **rezonuje**. Kdyby se frekvence kmitů levého konce nerovnala některé z vlastních frekvencí, stojatá vlna by nemohla vzniknout. Interference vln postupujících doprava a doleva by v tomto nepříznivém případě vedla pouze ke vzniku malých, prakticky nepostřehnutelných kmitů částic struny.

Uvažme nyní podobnou situaci: určitá struna, například kytarová, je napnuta mezi dvěma pevnými svorkami. Vzdálenost svorek je L. Ve struně vybudíme kmitání na vlastní frekvenci, takže vznikne rezonanční kmit. Protože oba konce struny jsou upevněny, bude zde mít nutně stojatá vlna uzly. Nejjednodušší obrazec, který vyhovuje této podmínce, je na obr. 17.18a. Na něm vidíme strunu ve dvou extrémních polohách (první poloze odpovídá spojitá čára, druhé čárkovaná čára). Všimněme si, že zde máme pouze jednu kmitnu, umístěnou uprostřed struny. Všimněme si také, že na vzdálenosti L (délka struny) se rozložila jedna půl-



Obr. 17.17 Stroboskopické snímky odhalují speciální (nedokonalé) obrazce stojatých vln. Tyto rezonanční kmity jsou vybuzeny vibrátorem na levém konci struny. Vznikají pouze při určitých frekvencích vibrátoru.

vlna. Pro tento vlastní kmit tak máme podmínku $\lambda/2 = L$. Podrobněji řečeno: má-li interferencí dvou výchozích vln, postupujících doprava a doleva, vzniknout takový rezonanční kmit, musí mít tyto vlny touž vlnovou délku $\lambda = 2L$.



Obr. 17.18 Struna je natažena mezi dvěma svorkami a jsou v ní vybuzeny vlastní kmity. Jednotlivé vlastní kmity můžeme znázornit obrazci odpovídajících stojatých vln. Každý obrazec je tvořen soustavou *půlvln*, vznikajících při znázornění dvou krajních poloh struny v průběhu dané stojaté vlny. (a) Nejjednodušší obrazec je tvořen jedinou půlvlnou. Spojitá a přerušovaná čára znázorňují dvě krajní polohy struny. (b) V pořadí složitosti následuje obrazec tvořený dvěma půlvlnami. (c) Následující obrazec má tři půlvlny.

Druhý nejjednodušší obrazec stojatých vln při upevněných koncích struny je znázorněn na obr. 17.18b. Tento obrazec má tři uzly a dvě kmitny. Má-li interferencí dvou výchozích vln, postupujících doprava a doleva, vzniknout tento vlastní kmit, musí mít obě výchozí vlny vlnové délky $\lambda = L$. Třetí obrazec je znázorněn na obr. 17.18c. Odpovídající stojatá vlny má čtyři uzly, tři kmitny a vlnovou délku $\lambda = \frac{2}{3}L$. V této posloupnosti bychom mohli pokračovat. Jestliže vyjdeme z daného obrazce, pak následující obrazec stojatých vln má o jednu půlvlnu, o jeden uzel a o jednu kmitnu více. Na délku struny L musíme navíc vložit jednu půlvlnu $\lambda/2$.

V souhrnu můžeme říci, že vlastní kmity v napnuté struně vzniknou, je-li

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (17.56)$$

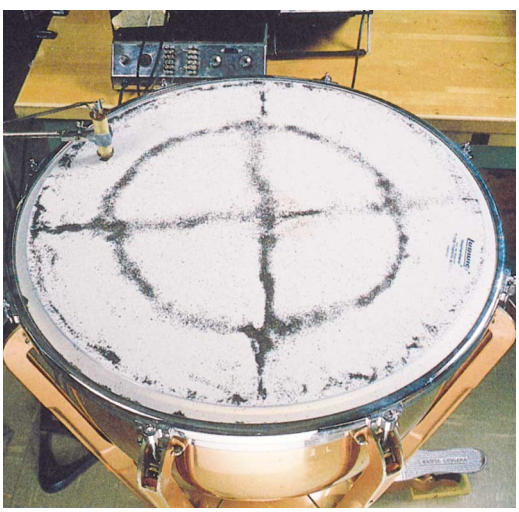
Těmto vlnovým délkám pak odpovídají příslušné vlastní frekvence. Dostaneme je z rov. (17.12), do které zahrneme podmínku v rov. (17.56):

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (17.57)$$

Zde v je rychlost postupné vlny v dané struně.

Podle rov. (17.57) jsou tedy všechny vlastní frekvence celočíselnými násobky jisté nejnižší vlastní frekvence. Tu získáme, když v rov. (17.57) vezmeme $n = 1$: $f = v/2L$. Vlastní kmit s touto nejnižší frekvencí nazýváme *základním kmitem* nebo také *prvním harmonickým kmitem* neboli první harmonickou. Kmit odpovídající $n = 2$ je *druhý harmonický kmit*, pro $n = 3$ máme *třetí harmonický kmit* atd. Frekvence jednotlivých vlastních kmitů se často označují f_1, f_2, f_3, … , f_n, kde n je **číslo harmonického kmitu** neboli **módu**.

Jev rezonance je zcela běžný u všech kmitajících systémů. Pozorujeme jej také u dvojrozměrných a trojrozměrných těles. Například na obr. 17.19 vidíte dvojrozměrný obrazec uzlů, vznikajících na kmitající membráně tympánů (**Chladniho obrazce**).



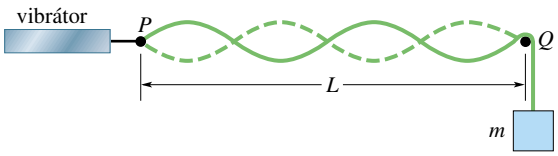
Obr. 17.19 Jeden z mnoha možných obrazců stojatých vln, vznikajících na membráně tympánů (Chladniho obrazce). Obrazec je vytvořen tmavým práškem, původně stejnoměrně rozsypaným na membráně. V levém horním rohu fotografie je vidět mechanický vibrátor, který v membráně vybudí kmitání určité frekvence. Prášek se samovolně sesypává k uzlům vzniklé stojaté vlny. V dvojrozměrném případě však uzly nejsou izolované body, ale vytvářejí na membráně kružnice a úsečky.

PŘÍKLAD 17.7

Na obr. 17.20 je zobrazena struna, spojená na jednom konci v bodě P s generátorem sinusových kmitů a na druhém konci zatížená přes držák Q závažím o hmotnosti m. Vzdálenost L bodů P a Q činí 1,2 m, délková hustota struny je 1,6 g·m^{-1}.

Frekvence vibrátoru byla 120 Hz. Amplituda příčného pohybu bodu P je dostatečně malá a bod P lze tedy považovat za uzel. Uzlem je i bod Q.

(a) Při jaké hmotnosti závaží m vybudí vibrátor na struně čtvrtý harmonický kmit?



Obr. 17.20 Příklad 17.7. Zatížená struna je spojena s vibrátorem. Pro pevnou frekvenci vibrátoru se na struně vybudí stojaté vlny jen pro jisté diskrétní hodnoty napětí na struně.

ŘEŠENÍ: Rezonanční frekvence jsou určeny v rov. (17.57) jako

$$f = \frac{v}{2L}n \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{17.58}$$

Napětí ve struně musíme nastavit tak, aby se frekvence vibrátoru rovnala čtvrté harmonické frekvenci, určené právě uvedenou rovnicí.

Rychlost vlny na struně je určena rov. (17.24):

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}, \tag{17.59}$$

kde za napětí ve struně τ byla dosazena váha závaží mg. Dosadíme v do rov. (17.58) a vyjádříme m:

$$m = \frac{4L^2 f^2 \mu}{n^2 g}. \tag{17.60}$$

Do tohoto obecného výsledku dosadíme nyní číslo harmonického kmitu $n = 4$. Po vyčíslení tak dostaneme

$$m = \frac{4(1{,}2\,\text{m})^2(120\,\text{Hz})^2(0{,}001\,6\,\text{kg·m}^{-1})}{(4)^2(9{,}8\,\text{m·s}^{-2})} = \\ = 0{,}846\,\text{kg} \doteq 0{,}85\,\text{kg}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou stojatou vlnu lze vybudit, jestliže strunu napneme závažím o hmotnosti $m = 1{,}00$ kg?

ŘEŠENÍ: Uvedenou hodnotu m dosadíme do rov. (17.60) a tuto rovnici vyřešíme vzhledem k proměnné n. Tímto postupem získáme $n = 3{,}7$. Číslo harmonického kmitu však musí být celé. Protože toto získané n celé není, nebude vibrátorem vybuzena vůbec žádná stojatá vlna. Kmitání struny bude malé, prakticky nepostřehnutelné.

KONTROLA 6: V následující řadě rezonančních frekvencí jedna z nich (nižší než 400 Hz) schází: 150 Hz, 225 Hz, 300 Hz, 375 Hz. (a) Jaká je chybějící frekvence? (b) Jaká je sedmá harmonická frekvence?

RADY A NÁMĚTY

Bod 17.2: *Harmonické kmity ve struně*

Když potřebujeme prozkoumat určitý harmonický kmit na napnuté struně dané délky L, nejprve si tento kmit nakreslíme jako na obr. 17.18. Potřebujeme například pátou harmonickou frekvenci. Nejprve si nakreslíme pět půlvln mezi šesti pevnými pomocnými body. Hned uvidíme, že pět půlvln, každá délky $\lambda/2$, má pokrývat délku struny L. To tedy znamená $5(\lambda/2) = L$, a tedy $\lambda = 2L/5$. Poté můžeme již použít rov. (17.12) ($f = v/\lambda$) a získáme hledanou pátou harmonickou frekvenci.

V každém případě si uvědomme, že vlnová délka harmonického kmitu je určena výhradně délkou struny L. Na druhé straně harmonická frekvence závisí také na rychlosti vlny v a ta je podle rov. (17.24) určena napětím struny a její délkovou hustotou.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Příčné a podélné vlny

Mechanické vlny mohou existovat pouze v látkovém prostředí a jejich pohyb je určen Newtonovými zákony. V případě *příčných* (*transverzálních*) mechanických vln, jakými jsou například vlny na napnuté struně, kmitají částice prostředí kolmo ke směru postupu vlny. Při šíření *podélných* (*longitudinálních*) vln kmitají částice prostředí rovnoběžně se směrem postupu vlny.

Sinusové vlny (harmonické vlny)

Sinusová (harmonická) vlna, postupující ve směru osy x, je popsána vztahem

$$y(x, t) = y_\text{m} \sin(kx - \omega t), \tag{17.2}$$

kde y_m je amplituda, k je úhlový vlnočet, ω je úhlový kmitočet neboli úhlová frekvence a $kx - \omega t$ je fáze. Vlnová délka λ souvisí s k vztahem

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{17.5}$$

Perioda T a frekvence f vlny jsou s úhlovou frekvencí ω vázány vztahy

$$\frac{\omega}{2\pi} = f = \frac{1}{T}. \tag{17.8, 17.9}$$

Rychlost šíření vlny v je uvedenými parametry určena vztahem

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \tag{17.12}$$

Rovnice obecné postupné vlny

Jakákoliv funkce tvaru

$$y(x,t) = h(x - vt) \tag{17.16}$$

popisuje vlnu postupující *ve směru* osy x stálou rychlostí v (pro $v > 0$). Její tvar je určen konkrétním tvarem funkce h. Vlna postupující *proti* směru osy x je popsána funkcí $h(x + vt)$.

Rychlost vlny na napnuté struně

Rychlost vlny, která postupuje na napnuté struně, je určena napětím struny τ a délkovou hustotou struny μ. Platí

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \tag{17.24}$$

Výkon

Střední výkon vlny je střední rychlost změny energie v daném místě v důsledku jejího přenosu touto vlnou. V případě sinusové vlny v napnuté struně je střední výkon roven

$$\overline{P} = \tfrac{1}{2}\mu v\omega^2 y_{\mathrm{m}}^2. \tag{17.35}$$

Skládání vln

Při současném šíření dvou nebo více vln v tomtéž prostředí je výchylka libovolné částice prostředí rovna součtu výchylek, které by této částici individuálně udělily jednotlivé vlny. Toto pravidlo se nazývá *princip superpozice*.

Fourierova řada

Libovolnou vlnu můžeme vyjádřit ve tvaru *Fourierovy řady*, tj. ve tvaru součtu vhodně zvolených sinusových vln.

Interference vln

Výchylky ve dvou vlnách postupujících na téže struně se sčítají nebo odčítají podle principu superpozice. Říkáme, že spolu interferují neboli že dochází k *interferenci*. Pokud se obě výchozí vlny shodují ve směru šíření, v amplitudě y_{m} a ve frekvenci f (a tedy mají také stejnou vlnovou délku), avšak liší se fázovou konstantou φ, vzniká interferencí jediná vlna stejné frekvence:

$$y'(x,t) = 2y_{\mathrm{m}} \cos \tfrac{1}{2}\varphi \sin(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\varphi). \tag{17.42}$$

Je-li $\varphi = 0$, vlny jsou ve fázi a jejich interference je (úplně) konstruktivní. Při $\varphi = \pi$ rad jsou vlny v protifázi a jejich interference je (úplně) destruktivní.

Fázory

Formálně můžeme vlnu $y(x,t)$ popsat *fázorem*. Je to vektor, jehož velikost je rovna amplitudě vlny y_{m} a který se otáčí kolem počátku s úhlovou rychlostí rovnou úhlové frekvenci vlny ω. Projekcí rotujícího fázoru na svislou osu získáme výchylku y jednotlivých částic při šíření vlny.

Stojaté vlny

Interferencí dvou identických sinusových vln, postupujících v opačných směrech, vznikají stojaté vlny. V případě struny s upevněnými konci jsou stojaté vlny popsány vztahem

$$y'(x,t) = 2y_{\mathrm{m}} \sin kx \cos \omega t. \tag{17.51}$$

Stojaté vlny mají pevné polohy uzlů a kmiten. *Uzel*, resp. *kmitna* je poloha nulové, resp. maximální příčné výchylky struny.

Vlastní kmity

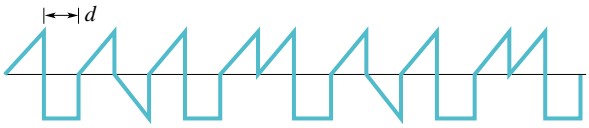
Stojaté vlnění můžeme na struně vytvořit odrazem postupných vln na koncích struny. Na upevněných koncích se vytvářejí uzly vlny. Toto pravidlo omezuje frekvence stojatých vln, které lze na dané struně vybudit. Každou takovou přípustnou frekvenci nazýváme *vlastní* neboli *rezonanční frekvencí* a odpovídající stojatou vlnu nazýváme *vlastním* neboli *rezonančním kmitem* struny. V případě struny délky L s oběma konci upevněnými jsou vlastní frekvence určeny vztahem

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{17.57}$$

Kmit příslušný $n = 1$ nazýváme *základním kmitem* neboli *prvním harmonickým kmitem* (první harmonickou). Kmit odpovídající $n = 2$ je *druhý harmonický kmit*. Podobně pro vyšší hodnoty n.

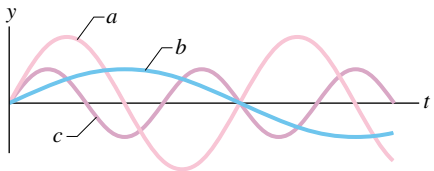
OTÁZKY

1. Jakou vlnovou délku má (neobvyklá) vlna na obr. 17.21? Délka každého segmentu na obrázku je d.



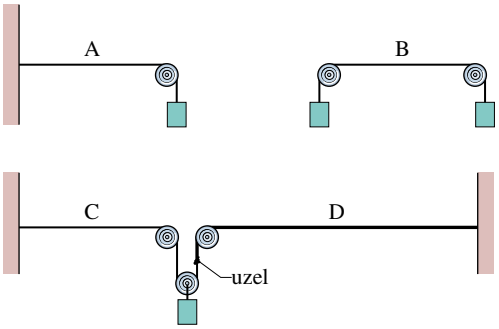
Obr. 17.21 Otázka 1

2. Vlákno napneme a pak podél něj odděleně vyšleme tři různé sinusové vlny. Na obr. 17.22 je znázorněna výchylka pevně zvolené částice vlákna jako funkce času pro každou ze tří uvedených vln. Uspořádejte křivky sestupně podle velikosti vlnové délky odpovídající vlny.



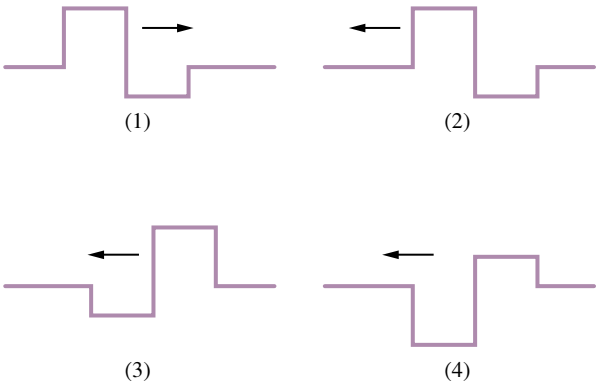
Obr. 17.22 Otázka 2

3. Na obr. 17.23 jsou vyobrazena čtyři vlákna, zatížená jedním nebo dvěma stejnými závažími. Vlákna A, B a C mají stejnou délkovou hustotu; délková hustota vlákna D je ale větší. Uspořádejte vlákna sestupně podle postupné rychlosti vln, které se na nich mohou šířit.



Obr. 17.23 Otázka 3

4. Vlnu 1 na obr. 17.24 tvoří dva pravoúhlé pulzy: první má výšku 4 jednotky a šířku d, druhý má hloubku 2 jednotky a šířku d. Vlna postupuje doprava podél osy x. Podobně jsou vytvořeny vlny 2, 3 a 4. Tyto vlny však postupují podél osy x doleva. Uvažme interferenci vlny 1 jednotlivě s ostatními vlnami. Při které kombinaci vln bude existovat časový okamžik, ve kterém vznikne interferencí (a) nejhlubší pravoúhlý pulz, (b) nulový signál na celé ose x a (c) jeden pravoúhlý pulz výšky a šířky $2d$?



Obr. 17.24 Otázka 4

5. Na struně postupují dvě vlny ve fázi. U jedné z nich změníme určitým způsobem fázi; v důsledku toho se vlna posune o 5,4 vlnové délky. Jaký druh interference se nyní objeví na struně?

6. Vyjdeme ze znění př. 17.5 a uvážíme následující čtyři fázové rozdíly mezi oběma vlnami: $\pi/4$, $7\pi/4$, $-\pi/4$ a $-7\pi/4$. (a) Uspořádejte sestupně tyto čtyři fázové rozdíly podle velikosti amplitudy výsledné vlny. Řešte bez provádění detailního výpočtu. (b) Pro každý ze čtyř uvedených fázových rozdílů popište typ vzniklé interference.

7. Uvažujme postupně čtyři dvojice harmonických vln stejné vlnové délky postupující týmž směrem podél struny. Pro každou dvojici známe amplitudy obou vln a jejich fázový rozdíl: (a) 2 mm, 6 mm, π rad; (b) 3 mm, 5 mm, π rad; (c) 7 mm, 9 mm, π rad; (d) 2 mm, 2 mm, 0 rad. Obě vlny spolu interferují. Uspořádejte sestupně uvedené čtyři dvojice podle velikosti amplitudy výsledné vlny. Řešte bez provádění detailního výpočtu. (*Tip*: Sestrojte fázorové diagramy.)

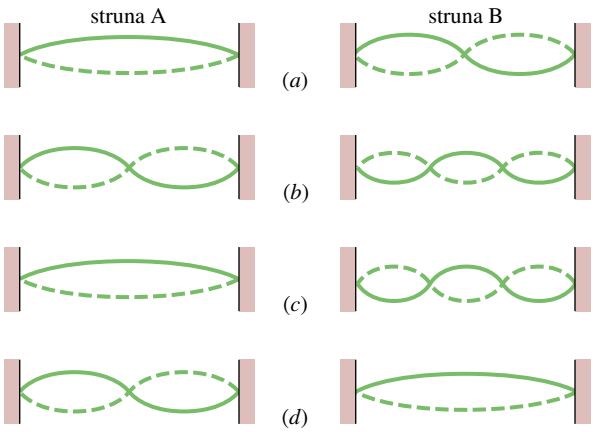
8. (a) Na struně postupují souhlasným směrem tři vlny stejné amplitudy a stejné vlnové délky. Řekněme, že jedna z nich má fázovou konstantu 0°. Jaké jsou fázové konstanty zbylých dvou vln, jestliže je interference všech tří vln úplně destruktivní? (*Tip*: Sestrojte fázorové diagramy.) (b) Uvažte čtyři výchozí vlny popsaných vlastností, jedna z nich má opět fázovou konstantu 0°. Jaké jsou fázové konstanty zbylých tří vln, jestliže je interference všech čtyř vln úplně destruktivní? Nyní existují dvě různé odpovědi.

9. Na struně vybudíme sedmý harmonický kmit. (a) Kolik vznikne uzlů? (b) Nachází se uprostřed struny uzel, kmitna, nebo něco jiného? (c) Je vlnová délka šestého harmonického kmitu delší, nebo kratší v porovnání se sedmým harmonickým kmitem? (d) Je šestá harmonická frekvence vyšší, nebo nižší než sedmá?

10. (a) Uvažme situaci popsanou v př. 17.7 a znázorněnou na obr. 17.20. Jestliže při pevné frekvenci vibrátoru postupně zvyšujeme hmotnost závaží, objevují se nové harmonické kmity.

Jsou pořadová čísla těchto harmonických kmitů větší, nebo menší než číslo harmonického kmitu v textu př. 17.7? (b) Následují nové harmonické kmity spojitě za sebou (při určité zátěži je jeden nahrazen druhým), nebo nejprve daný harmonický kmit zanikne a teprve po určitém zvýšení zátěže se objeví nový?

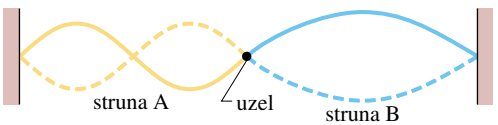
11. Mezi dvěma pevnými držáky, umístěnými ve vzdálenosti L, je natažena struna. (a) Pro která pořadová čísla harmonických kmitů existuje ve vzdálenosti $L/3$ od jednoho z držáků uzel? (b) Na struně vybudíme pátý harmonický kmit a zaměříme se na bod vzdálený o $2L/5$ od jednoho z držáků. Je v něm uzel, kmitna, nebo nic z toho? (c) Stejná otázka jako v bodě (b) pro desátý harmonický kmit.



Obr. 17.25 Otázka 12

12. Struny A a B mají stejnou délku a stejnou délkovou hustotu. Napětí ve struně B je však větší než napětí ve struně A. Na obr. 17.25 vidíte čtyři dvojice situací, označené (a) až (d), kdy na strunách byly vybuzeny stojaté vlny. U které dvojice kmitají obě struny se stejnou frekvencí?

13. Dvě struny stejné délky, ale různé délkové hustoty, jsou na koncích pevně spojeny a vzniklá struna je natažena mezi dvěma držáky. Určitá frekvence vybudí na vzniklé struně stojatou vlnu. Jeden její uzel je v místě spojení obou původních strun. Situace je znázorněna na obr. 17.26. Která struna má větší délkovou hustotu?



Obr. 17.26 Otázka 13

14. Uvažte postupně vlnovou délku a rezonanční frekvenci pro druhý harmonický kmit jisté struny, napnuté mezi dvěma držáky. Zvětší se tyto veličiny, zmenší se, nebo zůstanou stejné, jestliže (a) zvětšíme vzdálenost držáků beze změny napětí ve struně, (b) zvýšíme napětí ve struně beze změny vzdálenosti držáků a (c) použijeme strunu s větší délkovou hustotou?

15. Hráči na klasickou kytaru vědí, že před představením musí kytaru rozehrát a poté znovu naladit. Během prvních několika minut hry se totiž struny zahřejí a tím i nepatrně uvolní. Má toto uvolnění za následek snížení, nebo zvýšení rezonanční frekvence jednotlivých strun?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 17.5 Rychlost postupné vlny

1C. Daná vlna má rychlost $240\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a vlnovou délku 3,2 m. Jaká je (a) frekvence vlny a (b) perioda vlny?

2C. Daná vlna má úhlovou frekvenci $110\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ a vlnovou délku 1,80 m. Vypočtěte (a) úhlový vlnočet a (b) rychlost vlny.

3C. Rychlost elektromagnetické vlny ve vakuu je $3{,}0{\cdot}10^8$ m/s. (a) Vlnové délky viditelného světla vyplňují interval zhruba od 400 nm (pro fialové světlo) do 700 nm (pro červené světlo). Určete obor frekvencí světelných vln. (b) Vlny v oboru frekvencí od 1,5 MHz do 300 MHz jsou označovány jako krátkovlnné rádiové vlny (patří sem například frekvence rozhlasových FM stanic nebo frekvence televizního signálu VHF). Určete odpovídající obor vlnových délek. (c) Také rentgenové paprsky jsou elektromagnetickými vlnami. Jejich vlnové délky leží v intervalu od $1{,}0{\cdot}10^{-2}$ nm do 5,0 nm. Jaký je odpovídající frekvenční obor?

4C. Na struně postupuje sinusová vlna. Příčná výchylka částice struny klesla z maximální hodnoty na nulu za dobu 0,170 s. Určete (a) periodu vlny a (b) frekvenci vlny. (c) Vlnová délka dané vlny je 1,40 m. Jaká je rychlost vlny?

5C. Napište rovnici postupné vlny, která se šíří proti směru osy x, má amplitudu 0,010 m, frekvenci 550 Hz a rychlost $330\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

6C. Na struně se šíří postupná vlna popsaná vztahem

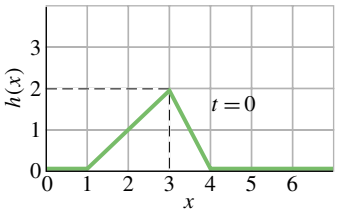
$$y = 2{,}0 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{0{,}40} + \frac{x}{80}\right)\right],$$

kde souřadnice x a y jsou vyjádřeny v centimetrech a čas t v sekundách. (a) Vezměte $t = 0$ a graficky znázorněte y jako funkci x pro $0 \leqq x \leqq 160$ cm. (b) Opakujte část (a) pro $t = 0{,}05$ s a pro $t = 0{,}10$ s. (c) Z grafů určete rychlost a směr šíření vlny ($+x$, nebo $-x$).

7C. Ukažte, že vlnu $y = y_\mathrm{m} \sin(kx - \omega t)$ lze zapsat v následujících ekvivalentních tvarech:

$$y = y_\mathrm{m} \sin\left[k(x - vt)\right],$$
$$y = y_\mathrm{m} \sin\left[\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right],$$
$$y = y_\mathrm{m} \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)\right],$$
$$y = y_\mathrm{m} \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right].$$

8C. Na obr. 17.27 je znázorněn izolovaný pulz v čase $t = 0$. Tvar pulzu je určen funkcí $h(x - 5t)$, kde x je v centimetrech a t v sekundách. Jaká je (a) rychlost a (b) směr postupu pulzu? (c) Nakreslete $h(x - 5t)$ jako funkci proměnné x pro $t = 2\,\mathrm{s}$. (d) Nakreslete $h(x - 5t)$ jako funkci proměnné t pro $x = 10\,\mathrm{cm}$.



Obr. 17.27 Cvičení 8

9C. Ukažte, že při šíření příčné postupné harmonické vlny na struně je (a) maximální příčná rychlost částic struny určena vztahem $u_{\max} = \omega y_{\mathrm{m}} = 2\pi f y_{\mathrm{m}}$ a (b) maximální příčné zrychlení částic struny určeno vztahem $a_{y,\max} = \omega^2 y_{\mathrm{m}} = 4\pi^2 f^2 y_{\mathrm{m}}$.

10C. Příčná postupná vlna na struně je určena rovnicí

$$y = (2{,}00\,\mathrm{mm}) \sin\left[(20\,\mathrm{rad{\cdot}m^{-1}})x - (600\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})t\right].$$

(a) Určete pro tuto vlnu amplitudu, frekvenci, rychlost a vlnovou délku. (b) Určete největší příčnou rychlost částic struny při šíření uvedené vlny.

11C. (a) Napište rovnici příčné postupné sinusové vlny, která se šíří na vlákně ve směru osy y s úhlovým vlnočtem $60\,\mathrm{cm^{-1}}$, s periodou 0,20 s a s amplitudou 3,0 mm. (b) Předpokládejte, že při šíření této vlny kmitají jednotlivé částice vlákna ve směru osy z. Jaká je největší příčná rychlost částic vlákna?

12Ú. Příčná postupná vlna, šířící se na velmi dlouhé struně, je popsána rovnicí

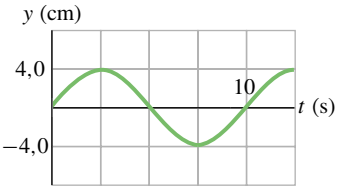
$$y = 6{,}0 \sin(0{,}020\pi x + 4{,}0\pi t),$$

kde souřadnice x a y jsou vyjádřeny v centimetrech a čas t v sekundách. Pro tuto vlnu určete (a) amplitudu, (b) vlnovou délku, (c) frekvenci, (d) rychlost, (e) směr šíření a (f) největší příčnou rychlost částic struny. (g) Jaká je příčná výchylka struny v místě $x = 3{,}5\,\mathrm{cm}$ a v čase $t = 0{,}26\,\mathrm{s}$?

13Ú. (a) Napište rovnici příčné postupné sinusové vlny, šířící se na vlákně ve směru $+x$, má-li tato vlna vlnovou délku 10 cm, frekvenci 400 Hz a amplitudu 2,0 cm. (b) Jaká je největší příčná rychlost částic vlákna? (c) Jaká je rychlost vlny?

14Ú. Uvažte příčnou postupnou sinusovou vlnu v napnuté struně. Ukažte, že v libovolném čase a v libovolném bodě struny je sklon tečny ke tvaru vlny roven poměru příčné rychlosti částic struny v daném bodě a rychlosti vlny.

15Ú. Na struně se ve směru osy x šíří příčná sinusová vlna vlnové délky 20 cm. Obr. 17.28 znázorňuje časovou závislost příčné výchylky částice struny o souřadnici $x = 0$. (a) Načrtněte tvar vlny na úseku jedné vlnové délky (mezi $x = 0$ a $x = 20\,\mathrm{cm}$) v čase $t = 0$. (b) Jaká je rychlost šíření vlny? (c) Napište rovnici vlny a explicitně v ní uveďte všechny konstanty. (d) Jaká je příčná rychlost částice struny o souřadnici $x = 0$ v čase $t = 5{,}0\,\mathrm{s}$?



Obr. 17.28 Úloha 15

16Ú. Sinusová vlna o frekvenci 500 Hz běží ve struně rychlostí $350\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jaká je vzdálenost dvou částic struny, které mají při kmitání fázový rozdíl $\pi/3$ rad? (b) Jaký je fázový rozdíl mezi dvěma výchylkami téže částice struny, jestliže výchylky po sobě následují s časovým odstupem 1,00 ms?

ODST. 17.6 Rychlost vlny na struně

17C. Jaká je rychlost příčné postupné vlny na vlákně hmotnosti 60,0 g a délky 2,00 m, jestliže napětí ve vlákně činí 500 N?

18C. Nejtěžší, resp. nejlehčí struna jistých houslí má délkovou hustotu $3{,}0\,\mathrm{g{\cdot}m^{-1}}$, resp. $0{,}29\,\mathrm{g{\cdot}m^{-1}}$. Jaký je poměr průměru těžší struny k průměru struny lehčí? Předpokládejte, že obě struny jsou vyrobeny z téhož materiálu.

19C. Při napětí 120 N činí rychlost příčné vlny na struně $170\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Na jakou hodnotu musíme změnit napětí, chceme-li zvýšit rychlost vlny na $180\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

20C. U ocelového drátu, který je na obou koncích upevněn ve svorkách, jsme zdvojnásobili napětí, aniž se přitom znatelně změnila jeho délka. Jaký je poměr nové rychlosti šíření příčné vlny k původní rychlosti vlny?

21C. Uvažme drát vyrobený z materiálu o objemové hustotě ϱ. V drátu vyvoláme tah σ (sílu na jednotku plochy příčného průřezu). Ukažte, že rychlost příčné vlny v je určena vztahem

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}.$$

22C. Příčná vlna na struně je popsána rovnicí

$$y = (2{,}00\,\mathrm{mm}) \sin\left[(20\,\mathrm{rad{\cdot}m^{-1}})x - (600\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})t\right].$$

Napětí ve struně je 15 N. (a) Určete rychlost vlny. (b) Vypočtěte délkovou hustotu struny v gramech na metr.

23C. Délková hustota struny je $1{,}6{\cdot}10^{-4}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$. Na struně se šíří příčná vlna, popsaná vztahem

$$y = (0{,}021\,\mathrm{m}) \sin\left[(2{,}0\,\mathrm{rad{\cdot}m^{-1}})x + (30\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})t\right].$$

(a) Určete rychlost vlny. (b) Vypočtěte napětí ve struně.

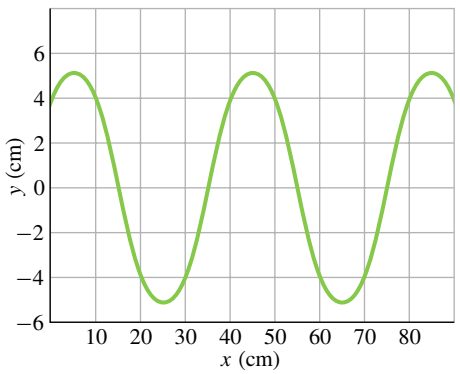
24C. Určete největší dosažitelnou rychlost příčné vlny v ocelovém drátu. Při započtení přiměřeného bezpečnostního faktoru lze

v ocelovém drátu vyvolat maximální tah (sílu na jednotku plochy příčného průřezu) $7{,}0\cdot10^8\ \mathrm{N\cdot m^{-2}}$. Objemová hustota oceli je $7\,800\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Dokažte, že výsledek nezávisí na průměru drátu.

25Ú. Struna má délkovou hustotu $5{,}0\ \mathrm{g\cdot cm^{-1}}$ a je napínána silou 10 N. Šíří se v ní příčná sinusová vlna o amplitudě 0,12 mm a frekvenci 100 Hz. Vlna postupuje proti směru osy x. Napište její rovnici.

26Ú. Uvažte sinusovou příčnou vlnu v napnutém vlákně. Nalezněte poměr největší příčné rychlosti částic vlákna k rychlosti vlny. Dále předpokládejte, že znáte frekvenci a amplitudu vlny. Závisí uvedený poměr rychlostí na materiálu, z něhož je vlákno vyrobeno (například vlákno nylonové, ocelové apod.)?

27Ú. V napnuté struně se šíří ve směru osy x příčná postupná vlna. Na obr. 17.29 vidíme závislost výchylky částic struny v čase $t = 0$ na jejich poloze podél struny. Ve struně je napětí 3,6 N, její délková hustota činí $25\ \mathrm{g\cdot m^{-1}}$. Nalezněte (a) amplitudu, (b) vlnovou délku, (c) rychlost vlny a (d) periodu vlny. (e) Jaká je největší příčná rychlost částic struny? (f) Napište rovnici vlny.



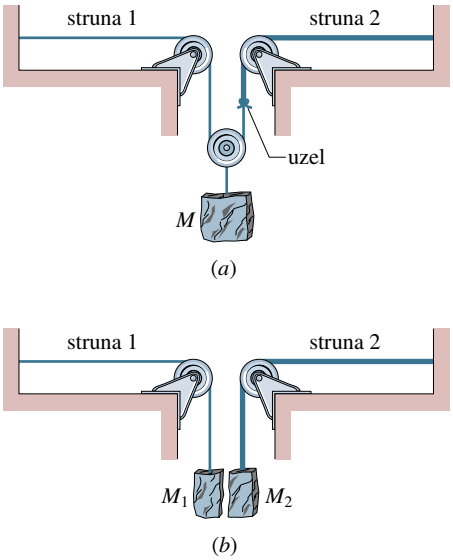
Obr. 17.29 Úloha 27

28Ú. Na struně se šíří rychlostí $40\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ příčná sinusová vlna. Časová závislost výchylky částice struny o souřadnici $x = 10$ cm je popsána rovnicí

$$y = (5{,}0\ \mathrm{cm})\sin\left[1{,}0\ \mathrm{rad} - (4{,}0\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}})t\right].$$

Délková hustota struny činí $4{,}0\ \mathrm{g\cdot cm^{-1}}$. Vypočtěte (a) frekvenci vlny a (b) vlnovou délku. (c) Nalezněte obecnou rovnici vlny, udávající závislost příčné výchylky částic struny na čase a na jejich souřadnici. (d) Vypočtěte napětí ve struně.

29Ú. Struna 1 na obr. 17.30a má délkovou hustotu $3{,}00\ \mathrm{g\cdot m^{-1}}$, struna 2 má délkovou hustotu $5{,}00\ \mathrm{g\cdot m^{-1}}$. Napětí ve strunách je vyvoláno závažím o hmotnosti $M = 500$ g. (a) Vypočtěte rychlost vlny na každé z obou strun. (b) Závaží rozdělíme na dvě části (přitom platí $M = M_1 + M_2$) a napínání strun uzpůsobíme podle obr. 17.30b. Jaké mají být hmotnosti M_1 a M_2, aby na obou strunách byla stejná rychlost vlny?



Obr. 17.30 Úloha 29

30Ú. Drát délky 10,0 m a hmotnosti 100 g je napnut silou 250 N. Na každém konci drátu byl s časovým odstupem 30,0 ms vytvořen pulz. Kde se oba pulzy poprvé setkají?

31Ú. Uvnitř některých typů baseballových a golfových míčků se používá gumová páska, splňující v širokém rozsahu prodloužení Hookův zákon. Uvažme určitý úsek této pásky hmotnosti m a nezatížené délky l. Působením síly F se daný úsek prodlouží o délku Δl. (a) Určete rychlost vlny pro příčné vlnění v napnuté pásce; vyjádřete ji pomocí hmotnosti m, prodloužení Δl a tuhosti k. (b) S využitím výsledku části (a) dokažte, že doba postupu příčného pulzu od jednoho konce napnuté pásky k druhému konci je pro $\Delta l \ll l$ úměrná $1/\sqrt{\Delta l}$ a pro $\Delta l \gg l$ je konstantní.

32Ú*. Ze stropu visí stejnorodé lano délky l a hmotnosti m. V laně se šíří příčná vlna. (a) Ukažte, že rychlost vlny je závislá na vzdálenosti y od spodního konce lana a je určena vztahem $v = \sqrt{gy}$. (b) Ukažte, že doba postupu vlny od jednoho konce lana k druhému činí $t = 2\sqrt{l/g}$.

ODST. 17.7 Energie a výkon vlny

33C. Jestliže je daná struna napnuta silou τ_1, přenáší se na frekvenci f_1 střední výkon P_1. (a) Ve struně zvýšíme čtyřikrát napětí, takže $\tau_2 = 4\tau_1$. Vyjádřete nový střední přenášený výkon P_2 pomocí původní hodnoty P_1. (b) Ve struně s původním napětím postupuje vlna s dvakrát nižší frekvencí, takže $f_2 = f_1/2$. Vyjádřete střední výkon, přenášený na frekvenci f_2, pomocí původní hodnoty P_1.

34C. Struna délky 2,7 m a hmotnosti 260 g je napnuta silou 36,0 N. Ve struně postupuje příčná vlna s amplitudou 7,70 mm. Jaká musí být její frekvence, jestliže je přenášen střední výkon 85,0 W?

35Ú. Na jednom konci dlouhé vodorovné struny je upevněno vahadlo. Struna má délkovou hustotu $120\ \mathrm{g\cdot m^{-1}}$ a je napínána

silou 90,0 N. Vahadlo vykonává 120krát za sekundu spojitý pohyb nahoru a dolů o 1,00 cm. Pohybem vahadla se na struně vytváří příčná sinusová vlna. Nalezněte pro libovolnou částici struny (a) největší velikost příčné rychlosti u a (b) největší hodnotu příčné složky napětí. (c) Ukažte, že obě uvedené maximální hodnoty se objevují se stejnou fází. Jaká je při této fázi příčná výchylka y částice struny? (d) Jaký největší výkon je přenášen danou částicí struny? (e) Jaká je příčná výchylka y částice struny v okamžiku, kdy je jí právě přenášen největší výkon? (f) Jaký nejmenší výkon je přenášen danou částicí struny? (g) Jaká je příčná výchylka y částice struny v okamžiku, kdy je jí právě přenášen nejmenší výkon?

ODST. 17.9 Interference vln

36C. Dvě stejné vlny, postupující souhlasným směrem, mají fázový rozdíl $\pi/2$ rad. Vyjádřete amplitudu výsledné vlny pomocí společné amplitudy y_m obou výchozích vln.

37C. Na napnuté struně postupují souhlasným směrem dvě stejné vlny. Jaký je mezi nimi fázový rozdíl, jestliže amplituda výsledné vlny je 1,5krát větší než společná amplituda obou výchozích vln? Výsledek vyjádřete ve stupních, v radiánech a ve vlnových délkách.

38Ú. Na struně se šíří souhlasným směrem dvě stejné sinusové vlny a interferují. Výsledná vlna má rovnici

$$y'(x,t) = \\ = (3{,}0\,\text{mm})\sin(20\,\text{rad}\cdot\text{m}^{-1}x - 4{,}0\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}t + 0{,}820\,\text{rad}).$$

(a) Jaká je společná vlnová délka λ obou výchozích vln? (b) Jaký je mezi nimi fázový rozdíl? (c) Jaká je jejich společná amplituda y_m?

ODST. 17.10 Fázory

39C. Dvě sinusové vlny mají stejnou frekvenci a šíří se stejným směrem. Jejich amplitudy jsou 3,0 cm a 4,0 cm, fázové konstanty mají hodnotu 0 a $\pi/2$ rad. Určete amplitudu výsledné vlny.

40C. Amplitudy dvou sinusových vln, které se současně šíří stejným směrem v napnuté struně, jsou 3,0 mm a 5,0 mm. Jejich fázové konstanty jsou 0° a 70°. Obě vlny mají stejnou vlnovou délku. Jaká je (a) amplituda a (b) fázová konstanta výsledné vlny?

41C. Dvě sinusové vlny o stejné vlnové délce postupují současně souhlasným směrem v napnuté struně. Jejich amplitudy jsou 4,0 mm a 7,0 mm, fázové konstanty mají hodnotu 0 a $0{,}8\pi$ rad. Jaká je (a) amplituda a (b) fázová konstanta výsledné vlny?

42Ú. Dvě sinusové vlny o stejné periodě se současně šíří stejným směrem v napnuté struně. Jejich amplitudy jsou 5,0 mm a 7,0 mm. Interferencí vzniká výsledná vlna, jejíž amplituda činí 9,0 mm. Fázová konstanta vlny s amplitudou 5,0 mm je 0. Určete fázovou konstantu vlny s amplitudou 7,0 mm.

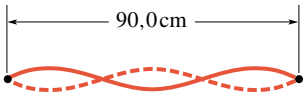
43Ú. Tři sinusové vlny o stejné frekvenci postupují v napnuté struně v kladném směru osy x. Jejich amplitudy jsou postupně y_1, $y_1/2$ a $y_1/3$. Fázové konstanty činí postupně 0, $\pi/2$ a π. Jaká je (a) amplituda a (b) fázová konstanta výsledné vlny? (c) Nakreslete tvar výsledné vlny v čase $t = 0$ a diskutujte jeho závislost na čase.

44Ú. Čtyři sinusové vlny postupují současně v téže napnuté struně v kladném směru osy x. Jejich frekvence jsou v poměru $1 : 2 : 3 : 4$, poměr jejich amplitud je postupně $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$. V čase $t = 0$ a na souřadnici $x = 0$ je první a třetí vlna fázově posunuta o 180° vzhledem k druhé a čtvrté vlně. Nakreslete tvar výsledné vlny v čase $t = 0$ a diskutujte jeho změny při vzrůstajícím t.

ODST. 17.12 Vlastní kmity

45C. Ve struně vyvoláme jisté napětí τ_a a vybudíme v ní třetí harmonický kmit. Jemu odpovídá vlastní frekvence f_3 a vlnová délka λ_3. Poté zvýšíme napětí ve struně na hodnotu $\tau_b = 4\tau_a$ a opět v ní vyvoláme třetí harmonický kmit. (a) Vyjádřete novou hodnotu třetí vlastní frekvence pomocí původní hodnoty f_3. (b) Vyjádřete novou vlnovou délku odpovídající stojaté vlny pomocí původní vlnové délky λ_3.

46C. Nylonová kytarová struna délkové hustoty $7{,}2\,\text{g}\cdot\text{m}^{-1}$ je napnuta silou 150 N a natažena přes dva pražce vzdálené 90 cm. Na struně vyvoláme stojatou vlnu znázorněnou na obr. 17.31. Vypočtěte (a) rychlost vlny, (b) vlnovou délku a (c) frekvenci postupných vln, jejichž superpozicí vzniká uvedená stojatá vlna.



Obr. 17.31 Cvičení 46

47Ú. V napnuté struně postupují rychlostí $10\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ v opačných směrech dvě sinusové vlny se stejnou vlnovou délkou a stejnou amplitudou. Doba mezi dvěma po sobě následujícími okamžiky, ve kterých je struna zcela rovná, činí 0,50 s. Jaká je společná vlnová délka obou výchozích vln?

48C. Nejnižší vlastní frekvence jisté houslové struny byla rovna 440 Hz (komorní a^1). Určete pro tuto strunu druhou a třetí harmonickou frekvenci.

49C. Struna délky 8,40 m a hmotnosti 0,120 kg je napnuta silou 96,0 N a na obou koncích upevněna. Poté jsou v ní vybuzeny vlastní kmity. (a) Určete pro danou strunu rychlost vlny. (b) Jaká je nejdelší možná vlnová délka stojaté vlny? (c) Vypočtěte její frekvenci.

50C. Rovnice postupné příčné vlny v jisté struně má tvar

$$y = 0{,}15\sin(0{,}79x - 13t),$$

kde veličiny x a y jsou vyjádřeny v metrech a čas t v sekundách. (a) Jaká je výchylka struny y na souřadnici $x = 2{,}3$ m v čase $t = 0{,}16$ s? (b) Napište rovnici vlny, která vytvoří při interferenci s výše uvedenou vlnou stojaté vlnění. (c) Jaká je výchylka výsledné stojaté vlny na souřadnici $x = 2{,}3$ m a v čase $t = 0{,}16$ s?

51C. Struna délky 120 cm je napnuta mezi dvěma pevnými svorkami. Určete tři nejdelší možné vlnové délky postupných vln, které mohou v upevněné struně vytvořit vlnu stojatou. Nakreslete obrazce odpovídajících stojatých vln.

52C. Struna délky 125 cm a hmotnosti 2,00 g je napnuta silou 7,00 N a upevněna mezi dvěma svorkami. (a) Jakou rychlostí se po struně šíří vlny? (b) Jakou má struna nejnižší vlastní frekvenci?

53C. Jaké jsou tři nejnižší vlastní frekvence pro stojaté vlny na struně délky 10,0 m a hmotnosti 100 g, jestliže je struna napnuta silou 250 N a upevněna mezi dvěma svorkami?

54C. Struna délky 1,50 m a hmotnosti 8,70 g je napínána silou 120 N. Oba její konce jsou upevněny a struna je rozkmitána. (a) Vypočtěte rychlost vln na struně. (b) Určete vlnovou délku postupné vlny, která vytvoří stojatou vlnu, tvořenou jedinou půlvlnou. Totéž pro stojatou vlnu s dvěma půlvlnami. (c) Určete frekvence stojatých vln v části (b).

55C. Struna A je napnuta mezi dvěma pevnými svorkami. Vzdálenost svorek je l. Struna B má stejnou délkovou hustotu jako struna A a je napnuta stejnou silou mezi dvěma svorkami, vzdálenými $4l$. Uvažte prvních osm vlastních frekvencí pro strunu B. Vystupuje v této sérii nějaká vlastní frekvence struny A?

56Ú. Struna je napnuta mezi dvěma pevnými svorkami, vzdálenými 75,0 cm. Vykazuje vlastní frekvence 420 Hz a 315 Hz; mezi nimi již žádná další vlastní frekvence neleží. (a) Jakou má tato struna nejnižší vlastní frekvenci? (b) Jakou rychlostí se po ní šíří vlny?

57Ú. Na velmi dlouhé napnuté struně postupují proti sobě dvě vlny. Vibrátor na jednom konci struny generuje vlnu, popsanou rovnicí

$$y = (6{,}0\,\mathrm{cm}) \cos \frac{\pi}{2} \left[(2{,}0\,\mathrm{m^{-1}})x + (8{,}0\,\mathrm{s^{-1}})t \right].$$

Vibrátor na opačném konci generuje vlnu

$$y = (6{,}0\,\mathrm{cm}) \cos \frac{\pi}{2} \left[(2{,}0\,\mathrm{m^{-1}})x - (8{,}0\,\mathrm{s^{-1}})t \right].$$

(a) Vypočtěte pro každou z uvedených dvou vln frekvenci, vlnovou délku a rychlost vlny. (b) Nalezněte pro vznikající stojatou vlnu polohu uzlů. (c) Nalezněte polohu kmiten.

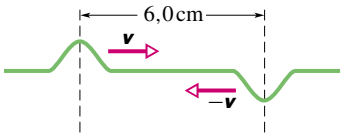
58Ú. Kmitání struny je popsáno rovnicí

$$y' = (0{,}50\,\mathrm{cm}) \sin \left[\left(\frac{\pi}{3}\,\mathrm{cm^{-1}} \right) x \right] \cos \left[(40\pi\,\mathrm{s^{-1}})\, t \right].$$

(a) Uvedené kmitání vzniklo superpozicí dvou stejných vln (až na směr šíření). Jaká byla jejich amplituda a rychlost? (b) Jaká je vzdálenost mezi sousedními uzly stojaté vlny? (c) Jak velkou příčnou rychlost má částice struny o souřadnici $x = 1{,}5$ cm v čase $t = \frac{9}{8}$ s?

59Ú. Na struně postupují proti sobě dvě příčné sinusové vlny. Obě mají amplitudu 0,30 cm a vlnovou délku 6,0 cm. Rychlost příčných vln v dané struně činí 1,5 m·s^{-1}. Nakreslete tvar vzniklé stojaté vlny v čase $t = 0$ (libovolný počátek odečítání času), $t = 5{,}0$ ms, $t = 10$ ms, $t = 15$ ms a $t = 20$ ms.

60Ú. Na obr. 17.32 jsou znázorněny dva pulzy, které postupují v napnuté struně proti sobě. Rychlost v příčných vln v dané struně činí 2,0 m·s^{-1}. V čase $t = 0$ jsou pulzy vzdáleny 6,0 cm. (a) Načrtněte tvar struny v čase $t = 5{,}0$ ms, $t = 10$ ms, $t = 15$ ms, $t = 20$ ms a $t = 25$ ms. (b) Jak je rozložena původní energie pulzů v čase $t = 15$ ms?



Obr. 17.32 Úloha 60

61Ú. V napnuté struně postupují dvě příčné vlny, popsané rovnicemi

$$y_1 = (0{,}10\,\mathrm{m}) \sin 2\pi \left[(0{,}50\,\mathrm{m^{-1}})x + (20\,\mathrm{s^{-1}})t \right],$$
$$y_2 = (0{,}20\,\mathrm{m}) \sin 2\pi \left[(0{,}50\,\mathrm{m^{-1}})x - (20\,\mathrm{s^{-1}})t \right].$$

Nakreslete, jak se s časem pohybuje částice struny o souřadnici $x = 3{,}0$ m.

62Ú. Na struně délky 3,0 m je vybuzena stojatá vlna, jejíž amplituda činí 1,0 cm. Je tvořena třemi půlvlnami. Po struně se šíří vlny rychlostí 100 m·s^{-1}. (a) Jaká je frekvence stojaté vlny? (b) Napište rovnice dvou výchozích vln, jejichž superpozicí vzniká uvažované stojaté vlnění.

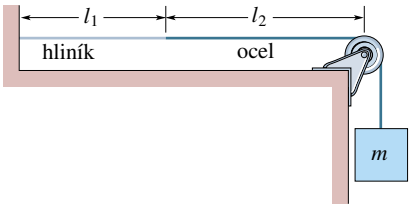
63Ú. Struna, po níž se šíří vlny rychlostí 400 m·s^{-1}, je na obou koncích uchycena v pevných svorkách. Strunu rozkmitáme ladičkou o frekvenci 600 Hz. Vznikající stojatá vlna má amplitudu 2,0 mm a je tvořena čtyřmi půlvlnami. (a) Jaká je vzdálenost mezi svorkami? (b) Určete výchylku jednotlivých částic struny jako funkci polohy částic a času.

64Ú. V průběhu pokusu, demonstrujícího vlastnosti stojatých vln, byla struna délky 90 cm a hmotnosti 0,044 kg na jednom konci připevněna ke hrotu elektricky buzené ladičky. Hrot kmitá s frekvencí 60 Hz ve směru kolmém ke struně. Jakou silou je struna napínána (závaží je umístěno na opačném konci struny), jestliže stojatá vlna je tvořena čtyřmi půlvlnami?

65Ú. Uvažte stojatou vlnu, vznikající ze dvou postupných vln stejné amplitudy. Ukažte, že největší kinetická energie částic struny, které jsou rozloženy v rozsahu jedné půlvlny, je určena výrazem $2\pi^2 \mu y_\mathrm{m}^2 f v$.

66Ú. Hliníkový drát délky $l_1 = 60{,}0$ cm, příčného průřezu $1{,}00 \cdot 10^{-2}$ cm^2 a hustoty 2,60 g·cm^{-3} je na jednom konci vetknut do stěny. Na druhém konci jej spojíme s ocelovým drátem stejného příčného průřezu a hustoty 7,80 g·cm^{-3}. Soustava obou drátů je přes kladku zatížena závažím o hmotnosti $m = 10{,}0$ kg. Vzdálenost l_2 místa spojení obou drátů od kladky je 86,6 cm. Popsané uspořádání je znázorněno na obr. 17.33. Pomocí vnějšího zdroje s proměnnou frekvencí lze v soustavě

generovat příčné vlnění; přitom je na kladce vždy uzel. (a) Určete nejnižší frekvenci vnějšího zdroje, při které se v soustavě vybudí rezonanční kmity a současně se v místě spojení obou drátů vytvoří uzel. (b) Kolik uzlů je při této frekvenci rozloženo podél celé kmitající soustavy?



Obr. 17.33 Úloha 66

PRO POČÍTAČ

67Ú. V napnutém vlákně postupují dvě vlny:

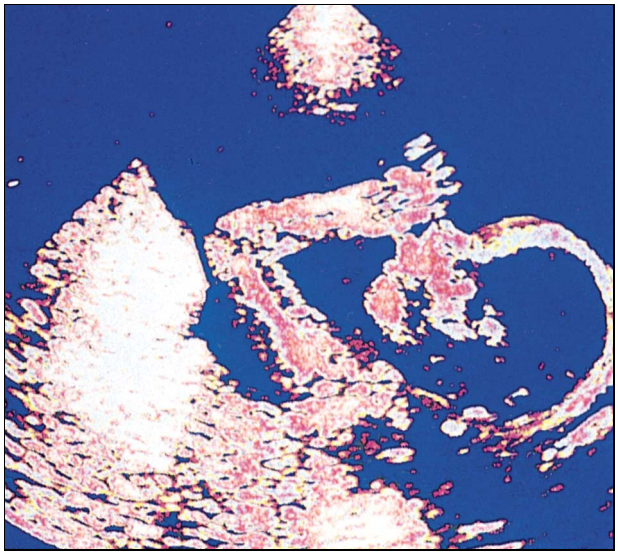
$$y_1(x,t) = (2{,}50\,\text{mm})\sin(kx - \omega t),$$
$$y_2(x,t) = (1{,}50\,\text{mm})\sin(kx + \omega t),$$

kde $k = 25{,}1\,\text{rad}\cdot\text{m}^{-1}$ je úhlový vlnočet a $\omega = 440\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ je úhlová frekvence. (a) Nakreslete funkci $y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$ jako funkci času t pro $x = 0$, $\lambda/8$, $\lambda/4$, $3\lambda/8$ a $\lambda/2$, kde λ je vlnová délka. Grafické znázornění by mělo zahrnovat časový interval od $t = 0$ až do doby o málo větší než jedna perioda. (b) Výsledek lze popsat jako superpozici jedné stojaté vlny a jedné postupné vlny. Jaký je směr šíření této postupné vlny? Jak by bylo nutno změnit obě výchozí vlny, aby jejich součet vyjadřoval opět superpozici jedné stojaté vlny a jedné postupné vlny, které by nyní měly stejné amplitudy jako dříve, avšak směr šíření postupné vlny by byl opačný? (c) Na základě grafického znázornění funkce y' určete polohu míst, ve kterých je amplituda výsledného kmitání největší a nejmenší. (d) Jak souvisí tato maximální a minimální amplituda s původními amplitudami 2,50 mm a 1,50 mm dvou výchozích postupných vln?

18
Vlny — II



Netopýr v úplné tmě nejen „vidí“ letící hmyz, ale navíc pozná, jak rychle se vůči němu pohybuje. To mu umožňuje hmyz lovit. Na jakém principu funguje jeho detekční systém? Jakým způsobem se může hmyz bránit?

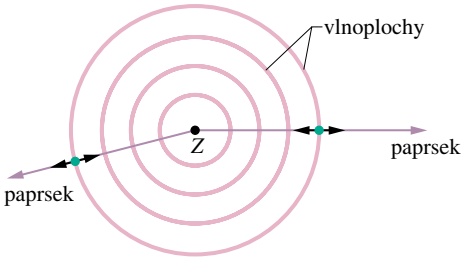


Obr. 18.1 Snímek pořízený ultrazvukem: plod se snaží nalézt svůj palec.

18.1 ZVUKOVÉ VLNĚNÍ

V kap. 17 jsme viděli, že pro vznik mechanického vlnění je potřeba nosné médium, hmotné prostředí. Existují dva typy mechanického vlnění: v **příčném** jsou kmity kolmé ke směru šíření vlny, zatímco v **podélném** jsou se směrem šíření rovnoběžné. Zvuk se vždy může šířit jako podélné vlnění; v pevných látkách pak navíc i jako příčné. Zvukové vlny se používají při hledání ropy v zemské kůře. Lodě jsou vybaveny sonarem, aby se vyhnuly překážkám skrytým pod hladinou. Ponorky využívají zvukových vln ke zjištění nepřátelských ponorek: pátrají po charakteristických zvucích, které vydává jejich pohon. Na počítačovém snímku hlavy dítěte (obr. 18.1) vidíme, jak lze zvukové vlny použít k výzkumu tkání v lidském těle. V této kapitole budeme zkoumat, jak se zvuk šíří vzduchem.

Obr. 18.2 ilustruje některé základní pojmy, které budeme používat. Bod Z představuje zdroj zvuku zanedbatelných rozměrů, tzv. *bodový zdroj*. Vlnění se od něj šíří rovnoměrně do všech směrů; bodový zdroj je tedy **izotropní**. Směr šíření a rozložení zvukových vln jsou znázorněny pomocí *vlnoploch* a *paprsků*. **Vlnoplocha** je plocha, na níž mají všechny částice vzduchu stejně velkou výchylku i rychlost (stejnou fázi); tyto plochy znázorňujeme na dvojrozměrném obrázku pomocí kružnic a oblouků. **Paprsky** jsou čáry kolmé k vlnoplochám a určují směr postupu vlnoploch. Fakt, že kmity podélného vlnění jsou rovnoběžné s paprsky, je vyznačen na obr. 18.2 krátkou oboustrannou šipkou. V blízkosti bodového zdroje jsou vlnoplochy kulové a šíří se do celého prostoru; pak mluvíme o kulové vlně. Se zvětšující se vzdáleností od zdroje se poloměr postupujících vlnoploch zvětšuje a jejich křivost se zmenšuje. Velmi daleko od zdroje lze vlnoplochy dobře aproximovat rovinami; pak mluvíme o rovinných vlnách.



Obr. 18.2 Zvukové vlny se šíří trojrozměrným prostředím od zdroje Z. Vlnoplochy vytvářejí koule se středem v bodě Z. Paprsky mají radiální směr od Z. Krátká oboustranná šipka naznačuje směr kmitů částic prostředí; je rovnoběžný s paprsky.

18.2 RYCHLOST ZVUKU

Rychlost libovolného mechanického vlnění (příčného i podélného) závisí jednak na setrvačných vlastnostech prostředí (souvisejí s kinetickou energií částic prostředí), jednak na jeho vlastnostech elastických (souvisí s potenciální energií). Rov. (17.24), která udává rychlost šíření příčného vlnění na struně, můžeme zobecnit:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{\text{pružnost}}{\text{setrvačnost}}}, \qquad (18.1)$$

kde (pro příčné výchylky) je τ napětí ve struně a μ její délková hustota. Je-li nosným prostředím vzduch, lze ze srovnání odvodit, že setrvačnosti vyjádřené μ odpovídá hustota vzduchu ϱ. Čím je třeba nahradit τ související s pružností?

Potenciální energie je u napjaté struny spojena s vychýlením jednotlivých částic struny. Při průchodu vlny strunou se výchylka každé částice periodicky mění. Při průchodu zvukové vlny vzduchem se periodicky mění v malých oblastech tlak. Veličinou, která udává, jak částice prostředí mění svůj objem se změnou tlaku (síly na jednotku plochy), je modul objemové pružnosti; je definován (porovnejte s rov. (13.36))

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V} \quad \text{(definice } K\text{)}, \qquad (18.2)$$

kde $\Delta V/V$ je poměrná změna objemu vyvolaná změnou tlaku Δp. Jednotkou tlaku v SI je newton na metr čtverečný (viz čl. 15.3), tj. *pascal* (Pa). Vidíme, že jednotka K z rov. (18.2) je také pascal. Znaménko Δp je vždy

Tabulka 18.1 **Rychlost zvuku**

PROSTŘEDÍ	v / m·s^{-1}	PROSTŘEDÍ	v / m·s^{-1}	PROSTŘEDÍ	v / m·s^{-1}
Plyny[a]		*Pevné látky*[a]		*Kapaliny*[a]	
Vzduch (0 °C)	331	Hliník	6 420	Voda (0 °C)	1 402
Vzduch (20 °C)	343	Ocel	5 941	Voda (20 °C)	1 482
Helium	965	Žula	6 000	Mořská voda[b]	1 522
Vodík	1 284				

[a] 0 °C a tlak 1 atm, pokud neuvedeno jinak.
[b] Při 20 °C a salinitě 3,5 %.

opačné než znaménko ΔV; se zvyšujícím se tlakem (Δp je kladné) se objem elementu zmenšuje (ΔV je záporné) a naopak. V rov. (18.2) vystupuje proto záporné znaménko, aby K bylo vždy kladné. Záměnou K za τ a ϱ za μ dostaneme vztah

$$v = \sqrt{\frac{K}{\varrho}} \quad \text{(rychlost zvuku)} \qquad (18.3)$$

pro prostředí s modulem objemové pružnosti K a hustotou ϱ. V tabulce 18.1 jsou uvedeny rychlosti zvuku v různých prostředích.

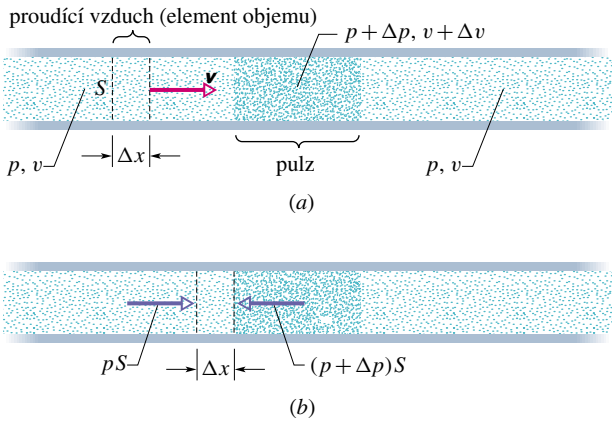
Hustota vody je téměř tisíckrát větší než hustota vzduchu. Kdyby o rychlosti zvuku rozhodovala pouze hustota, dalo by se očekávat vzhledem k rov. (18.3), že se ve vodě bude zvuk šířit asi třicetkrát pomaleji než ve vzduchu. Z tabulky 18.1 ale vyplývá, že je ve vodě zvuk naopak čtyřikrát rychlejší než ve vzduchu. Proto by měl být modul pružnosti vody více než desetitisíckrát větší než u vzduchu. Tak tomu skutečně je, protože voda je v porovnání se vzduchem mnohem hůř stlačitelná.

Odvození rov. (18.3)

Rov. (18.3) můžeme také odvodit přímo z druhého Newtonova zákona. Předpokládejme, že samostatný pulz vyššího tlaku se šíří zprava doleva rychlostí o velikosti v vzduchem v trubici. Zvolíme nyní soustavu spojenou s pulzem; v ní má tedy pulz nulovou rychlost. Tuto situaci zachycuje obr. 18.3a. Pulz stojí na místě a vzduch se pohybuje zleva doprava rychlostí o velikosti v.

Tlak vzduchu v okolí pulzu označíme p a tlak vzduchu uvnitř pulzu bude $p+\Delta p$, kde Δp je kladné, protože vzduch v pulzu je stlačen. Uvažujme nyní tenkou vrstvu vzduchu o šířce Δx a ploše S, která se pohybuje směrem k pulzu rychlostí v. Dostane-li se tato vrstva do oblasti pulzu, změní se díky odlišnému tlaku její rychlost na $v+\Delta v$, kde Δv má záporné znaménko. Ke zpomalení celé vrstvy dojde za dobu

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}. \qquad (18.4)$$



Obr. 18.3 Pulz stlačeného vzduchu se šíří dlouhou trubicí. Vztažná soustava obrázku je zvolena tak, že pulz zůstává na místě, zatímco vzduch se pohybuje zleva doprava. (a) Tenká vrstva vzduchu šířky Δx se pohybuje směrem k pulzu rychlostí $\boldsymbol{v}$. (b) Přední stěna vrstvy vstupuje do pulzu. Jsou znázorněny síly vyvolané tlakem vzduchu, působící na přední a zadní stěnu vrstvy.

Nyní použijeme na vrstvu vzduchu druhý Newtonův zákon. Během doby Δt působí na zadní stěnu vrstvy směrem doprava síla pS a na přední stěnu síla $(p+\Delta p)S$ doleva (obr. 18.3b). Výsledné silové působení na vrstvu během doby Δt je tedy

$$F = pS - (p+\Delta p)S = -\Delta p S \quad \text{(výsledná síla)}. \qquad (18.5)$$

Záporné znaménko znamená, že výslednice sil míří na obr. 18.3b doleva. Objem vrstvy je $S\Delta x$, a proto vzhledem k rov. (18.4) platí pro její hmotnost

$$\Delta m = \varrho S \Delta x = \varrho S v \Delta t \quad \text{(hmotnost)}. \qquad (18.6)$$

Zrychlení vrstvy během doby Δt je

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{(zrychlení)}. \qquad (18.7)$$

Z druhého Newtonova zákonu ($F = ma$) a z rovnic (18.5), (18.6) a (18.7) dostáváme

$$-\Delta p S = (\varrho S v \Delta t)\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

což můžeme zapsat také jako

$$\varrho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta v/v}. \qquad (18.8)$$

Vzduch, který zabírá vně pulzu objem $V = Sv\Delta t$, je stlačen o $\Delta V = S\Delta v\Delta t$ uvnitř pulzu, a tedy

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S\Delta v\Delta t}{Sv\Delta t} = \frac{\Delta v}{v}. \qquad (18.9)$$

Dosazením rov. (18.9) a (18.2) do rov. (18.8) dostaneme

$$\varrho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta v/v} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = K.$$

Z této rovnice dostaneme výraz pro v shodný s rov. (18.3) pro vzduch pohybující se směrem doprava na obr. 18.3, neboli pro rychlost pulzu doleva v klidném vzduchu.

PŘÍKLAD 18.1

K určení směru, z něhož k nám přichází zvuk, využívá náš mozek časový rozdíl Δt, s nímž zvuk dorazí k bližšímu a vzdálenějšímu uchu.* Vzdálenost mezi ušima označme l_0. Předpokládejme, že zdroj zvuku je dostatečně vzdálený, takže přicházející vlnoplochy jsou přibližně rovinné. V této situaci:

(a) Nalezněme vztah pro Δt vyjádřený pomocí vzdálenosti l_0 a úhlu θ mezi spojnicí uší a čelem vlnoplochy.

ŘEŠENÍ: Sledujme obr. 18.4. Vlnění se šíří od zdroje k pozorovateli. Časový rozdíl je způsoben vzdáleností d, kterou musí každá vlnoplocha urazit, aby po dosažení pravého ucha (P) ještě dospěla k levému (L). Z obr. 18.4 vyplývá

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{l_0 \sin\theta}{v}, \qquad \text{(Odpověď)} \qquad (18.10)$$

kde v je rychlost zvuku ve vzduchu. Náš mozek koreluje zaznamenanou dobu zdržení Δt s hodnotou úhlu θ směru ke zdroji na základě zkušenosti.

(b) Předpokládejte, že jste ponořeni ve vodě o teplotě 20 °C a zprava k vám přicházejí zvukové vlny. V jakém směru budete vnímat zdroj zvuku na základě Δt?

ŘEŠENÍ: Pomocí rov. (18.10) dostaneme časový rozdíl Δt_v pro tuto situaci, tj. pro $\theta = 90°$, místo rychlosti zvuku ve vzduchu v dosadíme jeho rychlost ve vodě v_v:

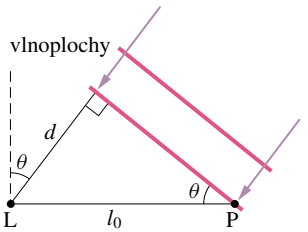
$$\Delta t_v = \frac{l_0 \sin 90°}{v_v} = \frac{l_0}{v_v}. \qquad (18.11)$$

Vzhledem k tomu, že v_v je asi čtyřikrát větší než v, bude Δt_v čtyřikrát menší než maximum časového rozdílu ve vzduchu. Náš mozek však odhaduje směr na základě zkušenosti získané ve vzduchu. Proto se nám bude zdát, že zvuk přichází pod úhlem θ menším než 90°. Abychom ho vyjádřili, dosadíme za Δt do rov. (18.10) časový rozdíl l_0/v_v z rov. (18.11):

$$\frac{l_0}{v_v} = \frac{l_0 \sin\theta}{v}. \qquad (18.12)$$

Dosazením hodnot $v = 343\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $v_v = 1\,482\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ z tabulky 18.1 do rov. (18.12) dostáváme

$$\sin\theta = \frac{v}{v_v} = \frac{(343\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})}{(1\,482\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})} = 0{,}231,$$
$$\theta = 13°. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 18.4 Příklad 18.1. K levému uchu musí vlna urazit vzdálenost o $d = l_0 \sin\theta$ delší než k pravému.

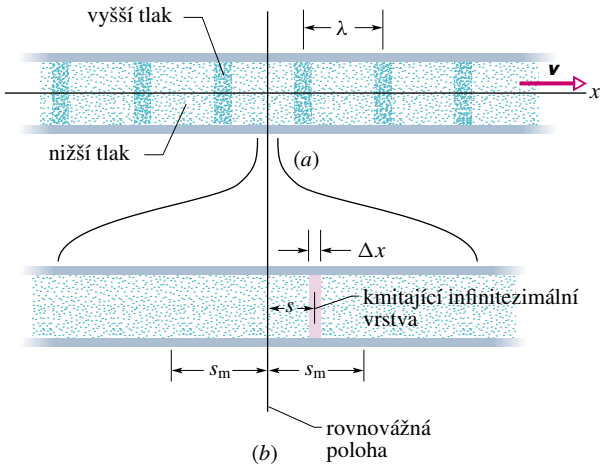
18.3 ŠÍŘENÍ ZVUKOVÝCH VLN

V této kapitole budeme zkoumat polohové a tlakové výchylky částic vzduchu při sinusovém průběhu zvukových vln. Na obr. 18.5 je zobrazena vlna postupující doprava trubicí se vzduchem. Takovou vlnu můžeme vyrobit třeba periodickým pohybem pístu na levém konci trubice (podobně jako na obr. 17.2). Pohyb pístu doprava posune a stlačí nejbližší infinitezimální vrstvičku vzduchu; obdobně pohyb pístu doleva způsobí pokles tlaku v této vrstvě. Vzruch, tj. změna tlaku a pohyb vzduchu, vyvolaný pístem, se šíří z vrstvy na vrstvu — a tak vzniká vlnění.

Uvažujme nyní v trubici tenkou vrstvu vzduchu tloušťky Δx o souřadnici x. Při průchodu vlny tato vrstva harmonicky kmitá okolo své rovnovážné polohy (obr. 18.5b). Podobně jako kmitají částice struny (příčně), kmitají i infinitezimální vrstvy vzduchu při průchodu vlny, s tím rozdílem, že se u vzduchu jedná o podélné kmity. K popisu polohové výchylky $s(x, t)$ vrstvy vzduchu z jeho rovnovážné polohy můžeme použít buď funkci sinus nebo kosinus. V této kapitole použijeme kosinus:

$$s(x, t) = s_m \cos(kx - \omega t). \qquad (18.13)$$

* Uvedený mechanismus lokalizace není ovšem jediný, uplatňují se např. i nepatrné mimovolné pohyby hlavou.



Obr. 18.5 (a) Zvuková vlna se šíří rychlostí v trubicí se vzduchem. Skládá se z pohybujících se a periodicky se opakujících oblastí s nízkým a vysokým tlakem. Na obrázku je vlna zobrazena v jednom časovém okamžiku. (b) Zvětšený výřez malé části trubice. Elementární vrstva vzduchu tloušťky Δx harmonicky kmitá při průchodu vlny okolo rovnovážné polohy. V daném okamžiku je vrstva vychýlena o vzdálenost s doprava z rovnovážné polohy. Největší výchylka (doleva i doprava) je s_m.

Symbol s_m označuje **amplitudu výchylky**, tj. maximální výchylku infinitezimální vrstvy vzduchu z rovnovážné polohy (obr. 18.5b).* Úhlový vlnočet k, úhlová frekvence ω, frekvence f, vlnová délka λ, rychlost v a perioda T jsou pro zvukové, a tedy podélné vlnění definovány stejně jako pro vlnění příčné a platí mezi nimi stejné vztahy. Výjimkou je λ, která nyní označuje nejmenší vzdálenost, na níž se začínají oblasti vyššího a nižšího tlaku opakovat (obr. 18.5a). (Předpokládáme, že s_m je mnohem menší než λ.)

Tlak v kterémkoli místě x se mění při postupu vlny harmonicky, jak dále ukážeme. Tato změna probíhá podle vztahu

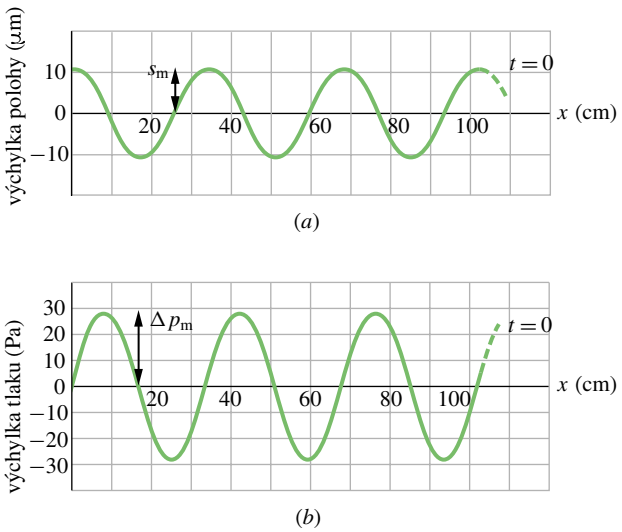
$$\Delta p(x,t) = \Delta p_m \sin(kx - \omega t). \qquad (18.14)$$

Záporná hodnota Δp v rov. (18.14) odpovídá roztažení, kladná hodnota stlačení vzduchové vrstvy. Symbol Δp_m označuje **amplitudu tlaku**, která odpovídá největšímu nárůstu nebo poklesu tlaku způsobeného vlnou; běžně je Δp_m mnohem menší než tlak p, který odpovídá tlaku v případě, že není přítomna vlna. Ukážeme, že amplituda tlaku Δp_m je svázána s amplitudou výchylky s_m z rov. (18.13) vztahem

$$\Delta p_m = (v\varrho\omega)s_m. \qquad (18.15)$$

* Pro příčnou výchylku elementu napjaté struny jsme užívali označení $y(x,t)$. Zde píšeme $s(x,t)$, abychom se vyhnuli zápisu $x(x,t)$ pro podélnou výchylku vzdušného elementu.

Na obr. 18.6 jsou grafy rov. (18.13) a (18.14) v čase $t = 0$. V průběhu času se obě křivky pohybují doprava podél osy x. Povšimněte si, že polohová a tlaková výchylka jsou vzájemně posunuty o fázi $\pi/2$ rad (neboli 90°). Výchylka tlaku je tedy nulová, právě když je výchylka polohy největší.



Obr. 18.6 (a) Graf polohové výchylky (rov. (18.13)) v čase $t = 0$. (b) Obdobný graf pro výchylku tlaku (rov. (18.14)). Oba grafy odpovídají zvukové vlně o frekvenci 1 000 Hz, jejíž amplituda je na úrovni prahu bolesti. Viz př. 18.2.

KONTROLA 1: Co se děje s tlakem v případě, že se infinitezimální vzduchová vrstva z obr. 18.5b pohybuje doprava bodem, v němž je polohová výchylka nulová? Je tlak v rovnovážné poloze, nebo právě začíná růst, či klesat?

Odvození vztahů (18.14) a (18.15)

Mějme kmitající infinitezimální vrstvu vzduchu o ploše S a tloušťce Δx, jejíž střed je z rovnovážné polohy vychýlen o vzdálenost s (obr. 18.5b). Podle rov. (18.2) platí pro výchylku tlaku ve vrstvičce vzduchu

$$\Delta p = -K\frac{\Delta V}{V}. \qquad (18.16)$$

Veličina V v rov. (18.16) je velikost objemu, daná vztahem

$$V = S\Delta x. \qquad (18.17)$$

Přitom ΔV v rov. (18.16) označuje změnu (výchylku) objemu související s polohovou výchylkou vrstvy. Změna objemu je způsobena tím, že posunutí obou stěn vrstvy nejsou zcela shodná, liší se o vzdálenost Δs. Platí tedy

$$\Delta V = S\Delta s. \qquad (18.18)$$

Dosazením rov. (18.17) a (18.18) do vztahu (18.16) dostaneme po provedení limitního přechodu

$$\Delta p = -K\frac{\Delta s}{\Delta x} = -K\frac{\partial s}{\partial x}. \qquad (18.19)$$

Symbol ∂ v rov. (18.19) znamená, že se jedná o parciální derivaci, která říká, jak se mění s se změnou x v pevném časovém okamžiku. Z rov. (18.13) tak dostáváme (s t se zachází jako s konstantou)

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(s_\mathrm{m}\cos(kx-\omega t)) = -ks_\mathrm{m}\sin(kx-\omega t).$$

Po dosazení tohoto výsledku do rov. (18.19) vyjde

$$\Delta p = Kks_\mathrm{m}\sin(kx-\omega t),$$

čímž jsme vztah (18.14) skutečně dokázali; zřejmě je $\Delta p_\mathrm{m} = Kks_\mathrm{m}$.

S použitím rov. (18.3) můžeme nyní psát

$$\Delta p_\mathrm{m} = (Kk)s_\mathrm{m} = (v^2\varrho k)s_\mathrm{m}.$$

Odtud po dosazení $v = \omega/k$ (rov. (17.12)) okamžitě plyne rov. (18.15), kterou jsme chtěli dokázat.

PŘÍKLAD 18.2

Maximální amplituda tlaku Δp_m hlasitého zvuku, kterou lidské ucho snese, je asi 28 Pa (což je mnohem méně než běžný tlak vzduchu 10^5 Pa). Jaké je posunutí s_m vzduchové částice u takového zvuku s frekvencí 1 000 Hz? Vzduch má hustotu $\varrho = 1{,}21\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

ŘEŠENÍ: Z rov. (18.15) dostaneme odpověď

$$s_\mathrm{m} = \frac{\Delta p_\mathrm{m}}{v\varrho\omega} = \frac{\Delta p_\mathrm{m}}{v\varrho(2\pi f)} = \frac{(28\ \mathrm{Pa})}{(343\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})(1{,}21\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}})(2\pi)(1\,000\ \mathrm{Hz})} =$$
$$= 1{,}1\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m} = 11\ \mu\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

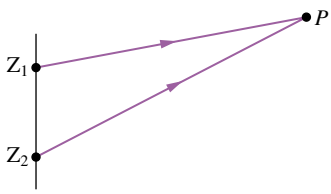
Výchylka, kterou lidské ucho snese, je i pro nejhlasitější zvuk zjevně velice malá: okolo jedné sedminy tloušťky listu papíru.

Amplituda tlaku Δp_m pro nejslabší slyšitelný zvuk o frekvenci 1 000 Hz je okolo $2{,}8\cdot 10^{-5}$ Pa. Uvedeným postupem dostaneme odpovídající amplitudu $s_\mathrm{m} = 1{,}1\cdot 10^{-11}$ m neboli 11 pm. To je asi jedna desetina typického atomového poloměru. Vidíme, že ucho je velice citlivý detektor zvukových vln. Ucho může zaznamenat zvukové pulzy, jejichž celková energie je na úrovni několika elektronvoltů, což odpovídá energii potřebné k vytržení jednoho elektronu z atomu.

18.4 INTERFERENCE

Na obr. 18.7 jsou dva bodové zdroje Z_1 a Z_2 zvukového vlnění o vlnové délce λ. Zdroje jsou ve fázi, což znamená, že vznikající vlny dosahují maximální výchylky současně. Předpokládejme, že zvukové vlny šířící se zhruba stejným směrem z obou zdrojů procházejí bodem P. Je-li v P uražená dráha obou vln stejná, budou i v tomto bodě ve fázi. Pokud se ovšem dráhy vzájemně liší jako na obr. 18.7, pak ve fázi nebudou. Jejich fázový rozdíl v bodě P závisí na jejich *dráhovém rozdílu* ΔL.

Šíří-li se dvě vlny po odlišných drahách, může se jejich fázový rozdíl díky dráhovému rozdílu ΔL změnit.



Obr. 18.7 Ze dvou bodových zdrojů Z_1 a Z_2 vycházejí kulové zvukové vlny ve fázi. Paprsky ukazují, že bodem P procházejí vlny s fázovým rozdílem.

Fázový rozdíl 2π rad odpovídá jedné vlnové délce (viz čl. 17.4). Proto pro obecný fázový rozdíl φ mezi dvěma vlnami platí

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta L}{\lambda}, \qquad (18.20)$$

odkud plyne

$$\varphi = \frac{\Delta L}{\lambda}2\pi. \qquad (18.21)$$

Zvukové vlnění vykazuje, podobně jako příčné vlnění, dva mezní případy interference: **konstruktivní** a **destruktivní**. Konstruktivní interference nastává v případě, že jsou vlny **ve fázi**, takže fázový rozdíl φ je nulový nebo je celočíselným násobkem 2π, tj.

$$\varphi = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (18.22)$$
(konstruktivní interference).

Je-li φ lichým násobkem π, tj.

$$\varphi = 2\pi\left(m + \tfrac{1}{2}\right), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (18.23)$$
(destruktivní interference),

jsou vlny **v protifázi** a nastává destruktivní interference. Podle rov. (18.21) je zřejmé, že uvedené podmínky lze přepsat na tvar

$$\Delta L = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (18.24)$$
(konstruktivní interference),

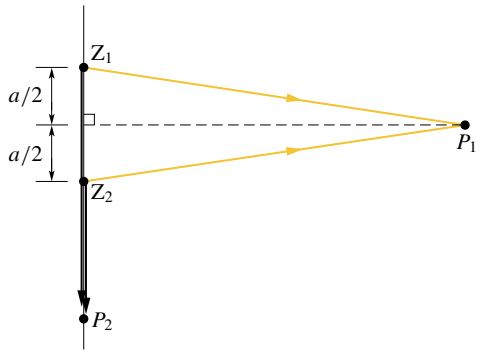
resp.

$$\Delta L = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (18.25)$$

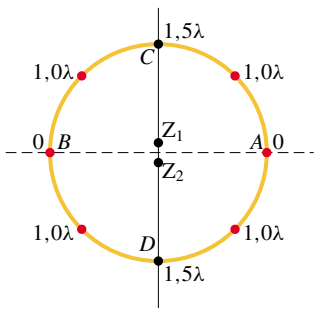
(destruktivní interference).

PŘÍKLAD 18.3

Jsou dány dva bodové zdroje Z_1 a Z_2 zvukových vln o vlnové délce λ. Zdroje jsou ve fázi a jejich vzájemná vzdálenost je $a = 1{,}5\lambda$ (obr. 18.8).



(a)



(b)

Obr. 18.8 Příklad 18.3. (a) Dva bodové zdroje Z_1 a Z_2 zvukových vln jsou ve vzdálenosti a. Zdroje jsou ve fázi. Dráha, kterou vlnění urazí k bodu P_1, je od obou zdrojů stejná. Bod P_2 leží na polopřímce procházející zdroji Z_1 a Z_2. (b) Fázový rozdíl (v násobcích vlnové délky) vln ze zdrojů Z_1 a Z_2 v osmi bodech na kružnici kolem zdrojů.

(a) Zjistěte, jaký je v bodě P_1 fázový rozdíl vln ze zdrojů Z_1 a Z_2. Bod P_1 leží na kolmici, která dělí vzdálenost a na dvě stejné části; vzdálenost bodu P_1 od zdrojů je mnohem větší než a (obr. 18.8a). Který z typů interferencí nastává v P_1?

ŘEŠENÍ: Vlny ze zdrojů Z_1 a Z_2 sice nedocházejí k bodu P_1 ze stejných směrů, ale i tak můžeme pro velké vzdálenosti od bodů oba paprsky prohlásit za prakticky rovnoběžné. Vzdálenost bodu P_1 je od obou zdrojů stejná, a proto je dráhový rozdíl vln ΔL nulový. Z rov. (18.21) dostáváme

$$\varphi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi = 0.$$

Hodnota $\varphi = 0$ splňuje podmínku rov. (18.22) pro $m = 0$, nastává tedy případ konstruktivní interference. Z podmínky rov. (18.24) dostáváme přirozeně stejný výsledek: dráhový rozdíl $\Delta L = 0$ splňuje pro $m = 0$ tuto podmínku také.

(b) Jaká je fáze a typ interference pro bod P_2 (obr. 18.8a)?

ŘEŠENÍ: Bod P_2 leží na polopřímce procházející zdroji Z_1 a Z_2. Dráhový rozdíl vln ΔL ze zdrojů bude tedy v P_2 roven vzdálenosti a. Z rov. (18.21) dostáváme pro $\Delta L = a = 1{,}5\lambda$

$$\varphi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi = \frac{1{,}5\lambda}{\lambda} 2\pi = 3\pi \text{ rad.} \quad \text{(Odpověď)}$$

Tato hodnota φ splňuje podmínku rov. (18.23) s $m = 1$, což odpovídá destruktivní interferenci. Obdobně je tomu s rov. (18.25), která je pro $\Delta L = 1{,}5\lambda$ splněna také s $m = 1$. Všimněte si, že vzdálenost bodu P_2 od zdroje Z_2 nemá vliv na výsledek.

(c) Na obr. 18.8b je kružnice s poloměrem mnohem větším než a, jejíž střed leží mezi zdroji Z_1 a Z_2. V kolika bodech (N) na kružnici nastává konstruktivní interference?

ŘEŠENÍ: Již víme z (a), že v bodech A a B, v nichž rovina symetrie je kolmá na spojnici od zdrojů a protíná kružnici (obr. 18.8b), je dráhový rozdíl $\Delta L = 0$. Z (b) víme, že dráhový rozdíl činí $\Delta L = 1{,}5\lambda$ v bodech C a D, kde kružnice protíná přímku procházející oběma zdroji. Odtud vyplývá, že na kružnici musí existovat mezilehlé body, v nichž je $\Delta L = 1{,}0\lambda$. V těchto bodech nastane konstruktivní interference. I když neurčíme polohy těchto bodů přesně, můžeme je alespoň přibližně na obr. 18.8b odhadnout. Spočítáme-li konstruktivní interferenční body na kružnici, dostaneme odpověď

$$N = 6. \quad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 2: Kdyby byla vzdálenost a mezi zdroji Z_1 a Z_2 z př. 18.3 rovna 4λ, jaký typ interference by nastal (a) v bodě P_1, (b) v bodě v P_2? Zjistěte odpovídající hodnotu m.

18.5 INTENZITA ZVUKU A JEJÍ HLADINA

Zkusili jste někdy spát při hlasité hudbě? Určitě jste si všimli, že existuje ještě další vlastnost zvuku kromě vlnové délky, frekvence a rychlosti. Touto vlastností je **intenzita**. Intenzita zvuku I je dána průměrnou energií vlnění, která projde za jednotku času jednotkovou plochou kolmou ke směru šíření. Platí tedy

$$I = \frac{P}{S}, \quad (18.26)$$

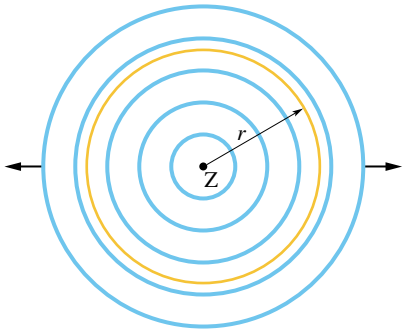
kde P je výkon zvukové vlny dopadající na plochu S. Intenzita I je s amplitudou polohové výchylky s_m svázána vztahem

$$I = \tfrac{1}{2}\varrho v\omega^2 s_m^2. \qquad (18.27)$$

Tento vztah brzy odvodíme.

Změna intenzity se vzdáleností

U skutečného zvuku je změna intenzity se vzdáleností velmi složitou záležitostí. Některé zdroje (např. reproduktory) mohou vysílat zvuk jen do určitého směru, skutečné prostředí zase umožňuje odraz zvukových vln a tedy vznik ozvěn. V některých případech však můžeme zanedbat vliv ozvěn a předpokládat, že vlnění se od zdroje šíří *izotropně*, tj. se stejnou intenzitou do všech směrů. Na obr. 18.9 jsou v jednom časovém okamžiku vlnoplochy z izotropního bodového zdroje Z.



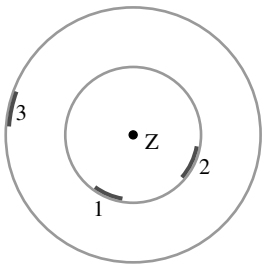
Obr. 18.9 Od bodového zdroje Z vycházejí zvukové vlny rovnoměrně do všech směrů. Vlny procházejí myšlenou koulí se středem v Z a poloměrem r.

Předpokládejme nyní, že se celková mechanická energie vln při šíření od zdroje zachovává. Do bodu Z položme střed myšlené koule o poloměru r (obr. 18.9). Veškerá energie ze zdroje musí procházet povrchem této koule, a proto bude výkon vln procházející povrchem koule roven výkonu P_Z zdroje. Z rov. (18.26) tedy plyne, že intenzita I je v každém bodu na povrchu koule rovna

$$I = \frac{P_Z}{4\pi r^2}, \qquad (18.28)$$

kde $4\pi r^2$ je velikost povrchu koule. Vztah (18.28) znamená, že intenzita zvuku izotropního bodového zdroje klesá se čtvercem vzdálenosti r od zdroje.

KONTROLA 3: Na obrázku jsou tři malé plošky 1, 2 a 3 ležící na povrchu myšlených koulí, jejichž společný střed leží v bodovém izotropním zdroji Z. Výkon procházející všemi ploškami je stejný. Seřaďte sestupně plošky (a) podle intenzity zvuku a (b) podle jejich plochy.



Stupnice v decibelech

V př. 18.2 jsme viděli, že amplituda polohové výchylky, kterou může lidské ucho zaznamenat, leží v intervalu hodnot od 10^{-5} m (u nejhlasitějšího snesitelného zvuku) do 10^{-11} m (u nejslabšího slyšitelného zvuku). Poměr těchto hodnot je 10^6. Z rov. (18.27) vidíme, že intenzita zvuku závisí na *kvadrátu* amplitudy vlny. Poměr intenzit odpovídajících hranicím uchem slyšitelných zvuků tedy bude 10^{12}. Lidské ucho slyší zvuky skutečně v ohromném rozpětí intenzit.



Zvuk může rozkmitat stěnu sklenice. Pokud vlivem zvuku vznikne stojaté vlnění a intenzita zvuku je dostatečná, sklenice praskne.

Abychom mohli zacházet s tak velkou oblastí hodnot, použijeme funkci logaritmus. Uvažujme vztahy

$$x = 10^y \quad \text{neboli} \quad y = \log x,$$

kde x a y jsou proměnné. Logaritmus má tu vlastnost, že když *vynásobíme* x číslem 10, zvýší se hodnota y o 1. Pišme pro lepší představu

$$y_1 = \log 10x = \log 10 + \log x = 1 + y.$$

Podobně, vynásobíme-li x číslem $1{\cdot}10^{12}$, zvýší se y pouze o 12. Je tedy daleko výhodnější namísto intenzity zvuku I mluvit o **hladině intenzity zvuku** β definované jako

$$\beta = (10\,\mathrm{dB}) \log \frac{I}{I_0}, \qquad (18.29)$$

kde dB je zkratka pro **decibel**, jednotku hladiny intenzity zvuku, pojmenovanou na počest Alexandra Grahama Bella. Hodnota I_0 v rov. (18.29) je standardní referenční intenzita ($10^{-12}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$), vybraná jako zhruba nejnižší lidským uchem slyšitelná úroveň zvuku. Pro $I = I_0$ dává rov. (18.29) $\beta = 10 \log 1 = 0$, referenční hladina odpovídá tedy nulové hodnotě v decibelech. Hodnota β se zvyšuje o 10 dB pokaždé, vzroste-li intenzita zvuku o jeden řád (zvětší-li se desetkrát). Hodnota $\beta = 40$ tedy odpovídá intenzitě 10^4krát větší než je referenční hladina. Tab. 18.2 ukazuje hladiny intenzity zvuku v různých situacích. **Hlasitost zvuku** je pak náš subjektivní vjem, související s hladinou intenzity zvuku. Určuje se porovnáváním zkoumaného zvuku s referenčním tónem výšky 1 000 Hz.

Tabulka 18.2 **Některé hladiny intenzity zvuku v** dB

Práh slyšitelnosti	0	Rockový koncert	110
Ševelení listů	10	Práh bolesti	120
Běžný hovor	60	Proudový motor	130

Odvození rov. (18.27)

Postup je obdobný jako při odvození rov. (17.35). Uvažujme (obr. 18.5a) tenkou vrstvičku vzduchu o tloušťce $\mathrm{d}x$, ploše S a hmotnosti $\mathrm{d}m$ kmitající v procházející zvukové vlně dle rov. (18.13). Kinetická energie $\mathrm{d}E_\mathrm{k}$ vrstvičky vzduchu je

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,v_s^2, \qquad (18.30)$$

kde v_s není rychlost procházející vlny, ale rychlost kmitání tohoto elementu vzduchu. Obdržíme ji z rov. (18.13) jako

$$v_s = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_\mathrm{m} \sin(kx - \omega t).$$

Užitím tohoto vztahu a dosazením $dm = \varrho S\,\mathrm{d}x$ upravíme rov. (18.30) na tvar

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2}(\varrho S\,\mathrm{d}x)(-\omega s_\mathrm{m})^2 \sin^2(kx - \omega t). \qquad (18.31)$$

Průměrnou kinetickou energii připadající na jednotkovou tloušťku vrstvy vzduchu vypočteme integrací:

$$\overline{E_\mathrm{k}} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{d}E_\mathrm{k}. \qquad (18.32)$$

Dosazením z rov. (18.31) dostaneme:

$$\overline{E_\mathrm{k}} = \tfrac{1}{4}\varrho S\omega^2 s_\mathrm{m}^2. \qquad (18.33)$$

Při odvození tohoto vztahu jsme použili toho, že průměrná hodnota kvadrátu funkce sinus (nebo kosinus) na intervalu délky λ je 1/2. Předpokládejme, že je *potenciální* energie nesena spolu s vlnou a má stejnou průměrnou hodnotu jako energie kinetická. Intenzita I vlny, což je průměrná hodnota energie (kinetické + potenciální) prošlé jednotkovou plochou za jednotku času, je

$$I = \frac{1}{S}(\overline{E_\mathrm{k}} + \overline{E_\mathrm{p}})v = \frac{2}{S}\overline{E_\mathrm{k}}v = \tfrac{1}{2}\varrho v\omega^2 s_\mathrm{m}^2,$$

což je právě rov. (18.27), kterou jsme chtěli odvodit.

PŘÍKLAD 18.4

Elektrická jiskra letící po přímé dráze o délce $h = 10$ m vysílá zvukový pulz, který se šíří radiálně symetricky od jiskry. Říkáme, že jiskra je v tomto případě *čárový zdroj zvuku*. Výkon vysílaného záření je $P_\mathrm{Z} = 1{,}6{\cdot}10^4$ W.

(a) Jaká je intenzita I, dosáhne-li zvukový pulz vzdálenosti $r = 12$ m od jiskry?

ŘEŠENÍ: Představme si myšlený válec (s otevřenými konci) o poloměru $r = 12$ m a výšce $h = 10$ m, na jehož ose se nachází dráha jiskry (obr. 18.10). Množství energie, které prochází povrchem válce, se musí rovnat výkonu P_Z, se kterým zdroj energii vysílá. Podle rov. (18.26) musí být intenzita I na povrchu válce rovna výkonu P_Z dělenému velikostí jeho pláště $2\pi rh$:

$$I = \frac{P_\mathrm{Z}}{2\pi rh}. \qquad (18.34)$$

Tento vztah nám říká, že intenzita zvuku z *čárového* zdroje klesá se vzdáleností jako r (a ne jako r^2, jak tomu bylo u *bodového* zdroje). Dosazením zadaných hodnot dostáváme výsledek

$$I = \frac{(1{,}6{\cdot}10^4\,\mathrm{W})}{2\pi(12\,\mathrm{m})(10\,\mathrm{m})} = \\ = 21{,}2\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}} \doteq 21\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

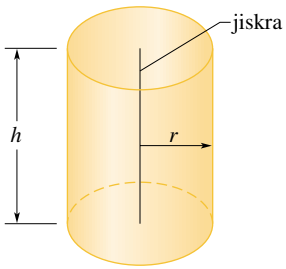
(b) Jak velký výkon registruje akustický detektor o ploše $S_\mathrm{D} = 2{,}0\,\mathrm{cm}^2$ zaměřený na jiskru ve vzdálenosti $r = 12$ m od ní?

ŘEŠENÍ: Z rov. (18.26) víme, že

$$I = \frac{P_D}{S_D}.$$

Odtud dostaneme po dosazení zadané plochy S_D a intenzity I z části (a)

$$P_D = (21{,}2\ \mathrm{W{\cdot}m^{-2}})(2{,}0{\cdot}10^{-4}\ \mathrm{m^2}) = 4{,}2\ \mathrm{mW}. \text{ (Odpověď)}$$



Obr. 18.10 Příklad 18.4. Jiskra radiálně vysílá zvukové vlny podél své přímé dráhy délky h. Vlny procházejí povrchem válce o poloměru r a výšce h, jehož osu tvoří dráha jiskry.

PŘÍKLAD 18.5

V roce 1976 vytvořila skupina Who rekord v hlasitosti koncertu. Hladina intenzity zvuku byla ve vzdálenosti 46 m před reproduktory $\beta_2 = 120\ \mathrm{dB}$. Jaký je poměr intenzity I_2 zvuku v daném místě ku intenzitě I_1 bucharu pracujícího s hladinou intenzity zvuku $\beta_1 = 92\ \mathrm{dB}$?

ŘEŠENÍ: Napišme poměr obou intenzit jako

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2/I_0}{I_1/I_0}.$$

Logaritmováním a vynásobením hodnotou 10 dB dostáváme

$$(10\,\mathrm{dB}) \log \frac{I_2}{I_1} = (10\,\mathrm{dB}) \log \frac{I_2}{I_0} - (10\,\mathrm{dB}) \log \frac{I_1}{I_0}.$$

Z rov. (18.29) pak vidíme, že členy na pravé straně rovnice jsou právě β_2 a β_1. Odtud plyne

$$(10\,\mathrm{dB}) \log \frac{I_2}{I_1} = \beta_2 - \beta_1. \qquad (18.35)$$

Všimněme si, že *poměr* dvou intenzit odpovídá *rozdílu* příslušných hladin intenzit zvuku. Dosazením zadaných dat dostáváme

$$(10\,\mathrm{dB}) \log \frac{I_2}{I_1} = 120\,\mathrm{dB} - 92\,\mathrm{dB} = 28\,\mathrm{dB}$$

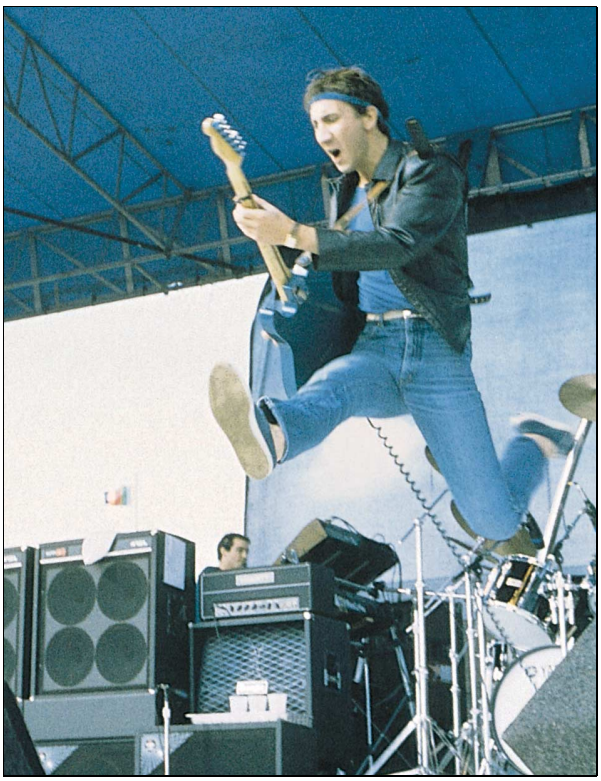
a

$$\log \frac{I_2}{I_1} = \frac{28\,\mathrm{dB}}{10\,\mathrm{dB}} = 2{,}8.$$

Odlogaritmováním obou stran dostaneme

$$\frac{I_2}{I_1} = 630.$$

Skupina Who byla opravdu velmi hlučná. Krátkodobý vliv intenzit tak velkých jako u uvedeného bucharu nebo koncertu Who má za následek dočasné poruchy sluchu. Opakovaný a delší vliv takových intenzit může způsobit jeho trvalé poškození (obr. 18.11). Ztráta sluchu je vážné riziko pro kohokoliv, kdo poslouchá heavy metal nebo jinou velmi hlučnou hudbu.



Obr. 18.11 Příklad 18.5. Peter Townshend ze skupiny Who hrající před reproduktory. Opakovaný a dlouhodobý vliv zvuku o nejvyšších intenzitách, speciálně při hraní přímo u reproduktoru kvůli zpětné vazbě, mu přivodil trvalé poškození sluchu.

18.6 ZDROJE HUDEBNÍHO ZVUKU

Hudební zvuky mohou být vytvořeny kmitáním strun (kytara, klavír, housle), membrán (bubny, tamburína), vzduchového sloupce (flétna, hoboj, varhany, fujara — obr. 18.12), dřevěných nebo kovových tyček (marimba, xylofon) nebo mnoha jiných těles. Většina nástrojů také obsahuje více než jednu kmitající část. U houslí se např. na tvorbě zvuku nepodílejí pouze struny, ale i celé tělo (**korpus**) nástroje. Zopakujme z kap. 17, že stojaté vlnění může vzniknout na struně, napneme-li ji mezi dva pevné body. Vznikne z postupných vln, které běží po struně a odrážejí se na jejích pevných koncích. Vlnová délka takových vln musí

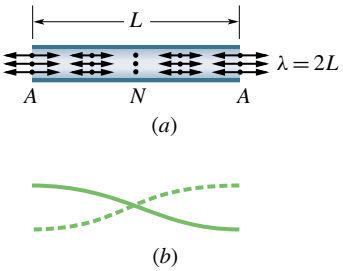
odpovídat *vlastní frekvenci* struny. Stojaté vlny pak mohou dlouho kmitat s velkou amplitudou, rozechvívají okolní vzduch a vzniká tak dobře slyšitelný tón o frekvenci kmitající struny. Takto vytváří zvuk např. kytarista.



Obr. 18.12 Při hře na tradiční slovenský nástroj fujaru kmitá uvnitř vzduchový sloupec.

Stojaté vlnění můžeme obdobně vytvořit i v **píšťale** — ve vzduchem naplněné trubici. Zvuková vlna šířící se v trubici se odráží na jejích koncích. (Takový odraz vzniká, i když jsou konce trubice otevřeny, ale pak není odraz tak dokonalý jako u konce uzavřeného). Pokud délka vlny odpovídá délce trubice, vznikne složením proti sobě běžících vln vlna stojatá. I její vlnová délka musí opět odpovídat *vlastní frekvenci* trubice. Stojaté vlny pak opět mohou dlouho kmitat s velkou amplitudou, rozechvívají okolní vzduch a opět vzniká dobře slyšitelný tón. Takto vytváří zvuk např. varhaník.

Mnoho dalších vlastností stojatých zvukových vln je podobných vlnám na struně: uzavřený konec trubice odpovídá upevněnému konci struny, ve kterém se nachází uzel (nulový rozkmit). Otevřený konec trubice odpovídá volně pohyblivému konci struny na kroužku podle obr. 17.16b, kde se zhruba nachází kmitna. (Ve skutečnosti je kmitna až kousek za koncem trubice, ale tímto detailem se zde nebudeme zabývat). Nejjednodušší stojaté vlnění můžeme vytvořit v trubici s oběma otevřenými konci, jak ukazuje obr. 18.13a. Na koncích trubice jsou kmitny, uprostřed trubice je tedy uzel. Nejjednodušší vysvětlení vzniku takové podélné stojaté vlny je (obr. 18.13b) analogie se stojatou příčnou vlnou na struně. Stojatá vlna na obr. 18.13a se nazývá **základní mód kmitání** neboli **první harmonická**. Aby mohla vzniknout, musí být vlnová délka λ takové vlny v trubici o délce L rovna $\lambda = 2L$. Několik dalších stojatých vln v trubici s otevřenými konci je znázorněno na obr. 18.14a pomocí analogie s vlnami na struně. *Druhá harmonická* potřebuje vlnovou délku $\lambda = L$, *třetí harmonická* vlnovou délku $\lambda = 2L/3$ atd.



Obr. 18.13 (a) Nejjednodušší podélná stojatá zvuková vlna v trubici s oběma otevřenými konci má kmitny na koncích v bodech A a uzel v bodě N uprostřed trubice. (Výchylky jsou znázorněny dvojitými šipkami různé velikosti.) (b) Odpovídající příčná stojatá vlna na struně.

Obecněji řečeno, vlastní frekvence pro trubici délky L s oběma konci otevřenými odpovídají vlnovým délkám

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{18.36}$$

kde n je pořadové číslo příslušné harmonické. Vlastní frekvence jsou pak dány vztahem

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{18.37}$$

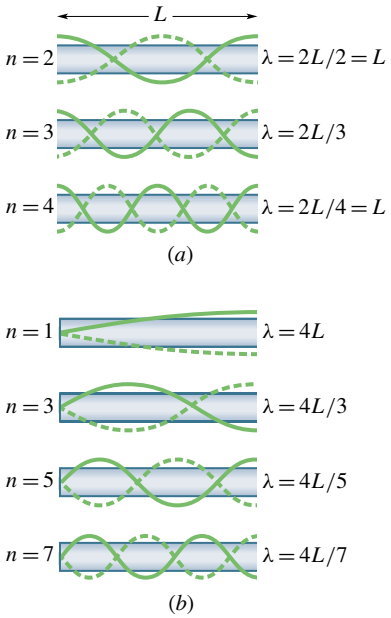
(píšťala s oběma otevřenými konci),

kde v je rychlost zvuku.

Obr. 18.14b ukazuje v analogii se strunou některé stojaté vlny, které mohou vzniknout v trubici s jedním otevřeným koncem. V otevřeném konci se nachází kmitna a v uzavřeném uzel. Pro nejjednodušší stojatou vlnu je třeba, aby vlnová délka splňovala vztah $L = \lambda/4$, tedy $\lambda = 4L$. Druhá nejjednodušší stojatá vlna má vlnovou délku $L = 3\lambda/4$, tedy $\lambda = 4L/3$ atd.

Obecněji řečeno, vlastní frekvence pro trubici délky L jen s jedním otevřeným koncem odpovídá vlnovým délkám

$$\lambda = \frac{4L}{n} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots), \tag{18.38}$$



Obr. 18.14 Typy stojatých vln, které známe ze struny, nakreslené přes trubice pro znázornění stojatých zvukových vln. (a) Jsou-li *oba* konce trubice otevřené, mohou v ní vzniknout všechny harmonické. (b) Je-li však *jeden* konec uzavřený, mohou vzniknout jen liché harmonické.

kde číslo harmonické n musí být liché. Vlastní frekvence jsou pak

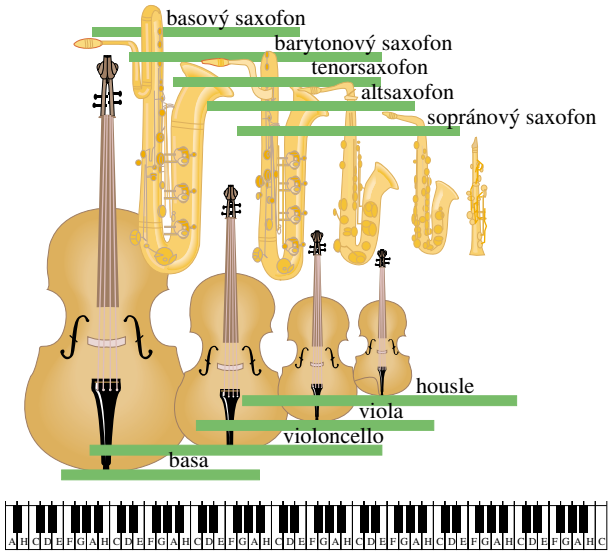
$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{4L} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots) \qquad (18.39)$$

(píšťala s jediným otevřeným koncem).

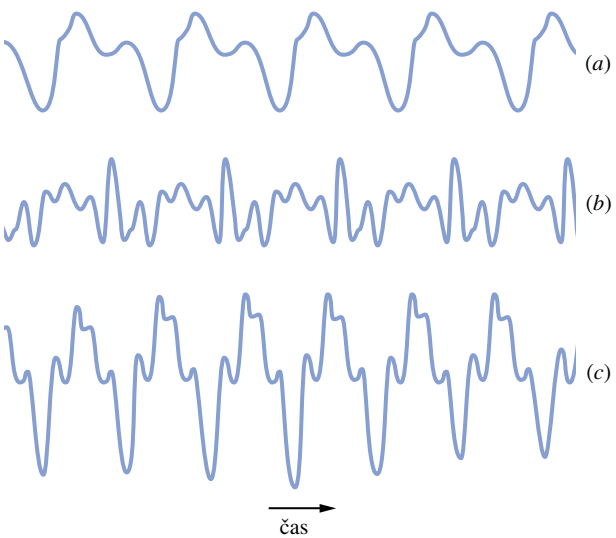
Ještě jednou zdůrazněme, že v trubici s jediným otevřeným koncem mohou existovat jen liché harmonické. Např. druhá harmonická s $n = 2$ nemůže v takové trubici vzniknout. Všimněme si také, že v takovém případě spojení „třetí harmonická“ stále znamená harmonickou s $n = 3$, a ne v pořadí třetí možnou harmonickou, vyskytující se v této trubici (zde např. $n = 5$).

Velikost hudebního nástroje je dána rozsahem frekvencí, pro který byl nástroj stavěn: menší velikost odpovídá vyšším frekvencím. Obr. 18.15 ukazuje jako příklad různé druhy saxofonů a smyčcových nástrojů s příslušným frekvenčním rozsahem. Rozsah každého nástroje se překrývá s rozsahy jeho sousedů.

V jakémkoli systému, ve kterém vzniká zvuk, ať už je to houslová struna nebo vzduchový sloupec v píšťale varhan, vznikají vedle základní frekvence obvykle i vyšší harmonické; ty se s ní sčítají a vytvářejí **barvu** tónu. U různých nástrojů mají vyšší harmonické různé intenzity, což způsobuje různé zabarvení téhož tónu hraného různými nástroji. Obr. 18.16 ukazuje, jak se vlny se stejnou základní frekvencí mohou u různých nástrojů lišit.



Obr. 18.15 Vztah mezi velikostí hudebního nástroje a jeho frekvenčním rozsahem na příkladu jednak smyčcových nástrojů, jednak různých druhů saxofonů. Frekvenční rozsah každého nástroje je znázorněn vodorovnou linkou podél měřítka frekvencí (zobrazeného klaviaturou dole; frekvence roste zleva doprava).



Obr. 18.16 Tóny stejné výšky (tedy vlny se stejnou první harmonickou) vytvořené (a) flétnou, (b) hobojem a (c) saxofonem.

PŘÍKLAD 18.6

Slabý šum pozadí vytvoří stojatou vlnu v lepenkové trubici s otevřenými konci, jejíž délka je $L = 67{,}0\,\text{cm}$. Předpokládejme, že rychlost zvuku ve vzduchu v trubici je $343\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

(a) Jakou frekvenci uslyšíme, když přiložíme ucho ke konci trubice?

ŘEŠENÍ: Svým uchem příslušný konec trubice uzavíráme. Základní frekvence je tedy dána rov. (18.39) pro $n = 1$:

$$f = \frac{v}{4L} = \frac{(343\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})}{4(0{,}670\ \mathrm{m})} = 128\ \mathrm{Hz}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Jestliže šum pozadí obsahuje i vyšší harmonické, např. třetí, pak můžeme uslyšet také frekvence, jež jsou lichými násobky 128 Hz.

(b) Jakou frekvenci uslyšíme, když oddálíme svou hlavu tak, aby trubice měla oba konce otevřené?

ŘEŠENÍ: Pro oba konce otevřené je základní frekvence dána rov. (18.37) pro $n = 1$:

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{(343\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})}{2(0{,}670\ \mathrm{m})} = 256\ \mathrm{Hz}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Jestliže šum pozadí obsahuje i vyšší harmonické, jako např. druhou, pak uslyšíme také frekvence, jež jsou celočíselnými násobky 256 Hz. V každém případě ale již zvuk s frekvencí 128 Hz slyšet nebudeme.

KONTROLA 4: Trubice A délky L a trubice B délky $2L$ mají každá oba konce otevřené. Kolikátá harmonická, příslušná trubici B, má stejnou frekvenci jako základní tón trubice A?

18.7 ZÁZNĚJE

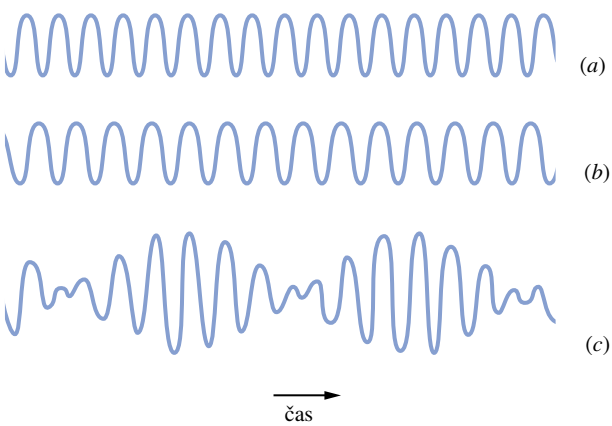
Když posloucháme po sobě dva tóny, jejichž frekvence jsou řekněme 552 Hz a 564 Hz, většina z nás je od sebe nedokáže odlišit. Když ale oba tóny dorazí do našeho ucha současně, uslyšíme tón, jehož frekvence je 558 Hz, tedy průměr původních dvou frekvencí. Navíc zaznamenáme střídavé změny v intenzitě zvuku: ta roste a opět klesá v poměrně pomalých rázech, které se opakují s frekvencí 12 Hz, tedy rozdílem obou původních frekvencí. Obr. 18.17 ukazuje tyto **rázy** neboli **zázněje**.

Nechť je časový průběh výchylek dvou zvukových vln v daném místě určen vztahem

$$s_1 = s_m \cos \omega_1 t \quad \text{a} \quad s_2 = s_m \cos \omega_2 t. \qquad (18.40)$$

(Předpokládáme pro jednoduchost, že vlny mají stejnou amplitudu.) Podle principu superpozice je výsledná výchylka rovna

$$s = s_1 + s_2 = s_m(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t).$$



Obr. 18.17 (a, b) Průběh tlaku Δp dvou zvukových vln, měřený pro každou vlnu zvlášť. Frekvence vln jsou téměř stejné. (c) Výsledný průběh tlaku v případě, že jsou vlny měřeny současně.

Goniometrická identita (dodatek E)

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

nám umožní přepsat výslednou výchylku do tvaru

$$s = 2s_m \cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t. \qquad (18.41)$$

Když ještě položíme

$$\omega' = \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad \text{a} \quad \omega = \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \qquad (18.42)$$

můžeme přepsat rov. (18.41) do tvaru

$$s(t) = (2s_m \cos \omega' t) \cos \omega t. \qquad (18.43)$$

Předpokládejme nyní, že úhlové frekvence ω_1 a ω_2 skládajících se vln jsou skoro stejné, tedy že v rov. (18.42) platí $\omega \gg \omega'$. Potom můžeme považovat rov. (18.43) za kosinusoidu, jejíž úhlová frekvence je ω a amplituda je výraz v závorce (který není konstantní, ale pozvolna roste a klesá, a to s frekvencí ω').

Tato amplituda bude maximální, kdykoli $\cos \omega' t$ v rovnici (18.43) bude roven jedné nebo minus jedné; to nastane během každé periody kosinusoidy dvakrát. Protože $\cos \omega' t$ má úhlovou frekvenci ω', bude úhlová frekvence, s kterou se budou opakovat rázy, rovna $\omega_{\text{rázy}} = 2\omega'$. Potom s pomocí rov. (18.42) můžeme psát

$$\omega_{\text{rázy}} = 2\omega' = 2(\tfrac{1}{2})(\omega_1 - \omega_2) = \omega_1 - \omega_2.$$

Protože ale platí $\omega = 2\pi f$, můžeme psát

$$f_{\text{rázy}} = f_1 - f_2 \quad \text{(frekvence záznějů)}. \qquad (18.44)$$

Hudebníci používají zázněje k ladění svých nástrojů. Když necháme nástroj znít současně s nějakou standardní frekvencí (např. komorním a hraným na první hoboj) a ladíme jej, dokud rázy nezaniknou, bude nástroj sladěn s tímto standardem. Ve Vídni, proslavenou její dávnou hudební tradicí, je **komorní a** (a^1, 440 Hz) zavedeno jako telefonní služba pro potřeby profesionálních i amatérských hudebníků ve městě.

PŘÍKLAD 18.7

Chcete naladit notu „a“ na klavíru na její správnou frekvenci 220 Hz, ale máte k dispozici jen ladičku „a^1“ s frekvencí 440 Hz. Jak budete postupovat?

ŘEŠENÍ: Tyto dvě frekvence jsou příliš vzdálené na to, aby vytvořily rázy. Připomeňme si naši analýzu rov. (18.43), kde jsme předpokládali, že skládající se frekvence jsou dostatečně blízko. Použijeme ale toho, že 440 Hz $= 2 \cdot 220$ Hz je druhá harmonická frekvence 220 Hz.

Předpokládejme, že struna klavíru je rozladěna, tj. její základní frekvence není přesně 220 Hz. Posloucháme rázy mezi základní frekvencí ladičky a druhou harmonickou „a^1“ tónu „a“ na klavíru, přičemž slyšíme rázy s frekvencí např. 6 Hz. Pak povolujeme nebo utahujeme strunu, dokud rázy nezmizí — a struna je naladěna.

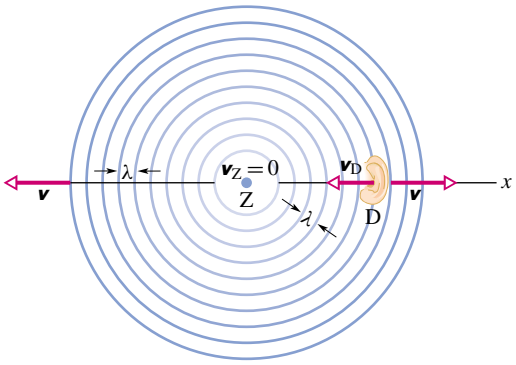
KONTROLA 5: V př. 18.7 přitáhneme strunu a frekvence rázů vzroste z 6 Hz na 7 Hz. Máme pokračovat s utahováním struny, nebo ji naopak povolit, abychom ji správně naladili?

18.8 DOPPLERŮV JEV

Siréna policejního auta zaparkovaného u kraje silnice vydává zvuk o frekvenci 1 000 Hz. Jestliže také parkujete u kraje, uslyšíte tutéž frekvenci. Ale v případě, že se vůči policejnímu autu pohybujete, ať už směrem k němu nebo od něj, uslyšíte jinou frekvenci. Například když se k policejnímu autu *blížíte* rychlostí 120 km/h, uslyšíte *vyšší* frekvenci (1 096 Hz, tedy *nárůst* o 96 Hz). Když se od policejního auta *vzdalujete* stejnou rychlostí, uslyšíte *nižší* frekvenci (904 Hz, tedy *pokles* o 96 Hz).

Tyto změny frekvence v závislosti na pohybu jsou příkladem **Dopplerova jevu**. Tento jev byl objeven (i když ne zcela objasněn) v roce 1842 rakouským fyzikem Johannem Christianem Dopplerem. Experimentálně jeho existenci potvrdil roku 1845 Buys Ballot v Holandsku (použil přitom „… lokomotivu, která táhla otevřený vagon s několika trumpetisty.“).

Dopplerův jev se projevuje nejen u zvukových vln, ale také u elektromagnetických vln včetně mikrovln, rádiových vln a viditelného světla. Policie používá Dopplerův jev u mikrovln k měření rychlosti auta: radarová jednotka vysílá svazek mikrovln jisté frekvence f směrem k přijíždějícímu autu. Mikrovlny, které se odrazí od kovových součástí auta zpět, mají vyšší frekvenci f' úměrnou rychlosti pohybu auta vůči radarové jednotce. Radarová jednotka zachytí rozdíl mezi f a f' a převede jej na rychlost auta, která se pak přímo zobrazí na displeji. Zobrazená rychlost je však správná, jen když se auto pohybuje přímo k radarové jednotce nebo přímo od ní; není-li tomu tak, je měřená frekvence f' nižší a tím vyjde nižší i měřená rychlost.



Obr. 18.18 Stacionární zdroj zvuku Z vysílá kulové vlnoplochy (znázorněné ve vzdálenosti jedné vlnové délky), které se rozbíhají rychlostí v. Detektor zvuku D (zobrazený jako ucho) se pohybuje rychlostí v_D ke zdroji. Díky svému pohybu zachytí detektor vyšší frekvenci zvuku.

V následujícím rozboru se omezíme na zvukové vlny a za vztažnou soustavu vezmeme vzduch, jímž vlny procházejí. (Pokud není uvedeno jinak, je vzduch v klidu vzhledem k Zemi, takže rychlosti můžeme také měřit vůči Zemi.) Budeme předpokládat, že se Z a D budou pohybovat přímo k sobě nebo přímo od sebe rychlostmi menšími, než je rychlost zvuku.

Nejprve odvodíme rovnice pro Dopplerův jev ve dvou speciálních situacích: (1) pro detektor v pohybu a zdroj v klidu a (2) pro zdroj v pohybu a detektor v klidu. Potom rovnice popisující tyto případy spojíme a dostaneme rovnici obecného Dopplerova jevu, která platí nejen pro oba uvedené případy, ale i pro situace, kdy se zároveň pohybuje zdroj i detektor.

Detektor v pohybu, zdroj v klidu

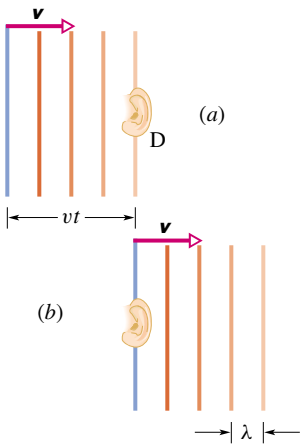
Na obr. 18.18 se detektor D (znázorněný jako ucho) pohybuje rychlostí v_D směrem ke klidnému zdroji Z, který vysílá kulové vlnoplochy o vlnové délce λ a frekvenci f šířící

se rychlostí v zvuku ve vzduchu. Znázorněné vlnoplochy jsou od sebe vzdáleny o jednu vlnovou délku. Frekvence zaznamenaná detektorem D je dána tím, jak často přicházejí vlny na detektor (resp. počtem vlnových délek, které projdou detektorem za jednotku času). Je-li D v klidu, je tato hodnota rovna f, ale když se D pohybuje vstříc vlnoplochám, bude počet prošlých vlnových délek za sekundu větší, tzn. zaznamenáme frekvenci f' vyšší než f.

Uvažujme zatím situaci, kdy je D v klidu (obr. 18.19). Za dobu t se vlnoplochy posunou doprava o vzdálenost vt. Počet vlnových délek na tomto intervalu délky vt odpovídá počtu vlnových délek, které projdou detektorem za dobu t, tzn. tento počet je roven vt/λ. Počet vlnových délek, které projdou detektorem za dobu t (odpovídá frekvenci zaznamenané detektorem), je tedy

$$f = \frac{vt/\lambda}{t} = \frac{v}{\lambda}. \qquad (18.45)$$

Zatím je tedy D v klidu a k Dopplerovu jevu nedochází: frekvence zaznamenaná detektorem je shodná s frekvencí vyslanou zdrojem.



Obr. 18.19 Vlnoplochy z obr. 18.18 (pro jednoduchost rovinné) (a) dosáhnou, (b) opustí detektor D, který je v klidu; za dobu t se vlny posunou o vzdálenost vt doprava.

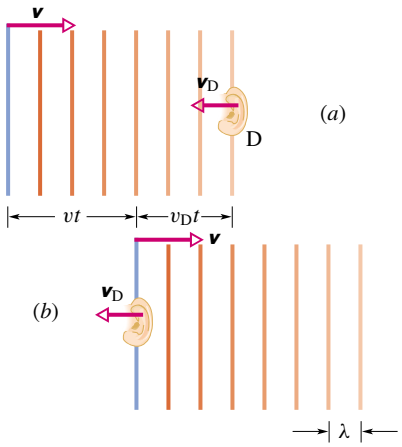
Vraťme se zpět k situaci, kdy se D pohybuje vstříc vlnoplochám (obr. 18.20). Za dobu t se vlnoplochy posunou doprava o vzdálenost vt jako v předchozím případě, ale zároveň se D posune doleva o vzdálenost $v_D t$. Proto se za tuto dobu t posunou vlnoplochy vzhledem k D o vzdálenost $vt + v_D t$. Počet vlnových délek na intervalu této délky $(vt + v_D t)$ je roven počtu vlnových délek, které projdou detektorem za dobu t, tedy $(vt + v_D t)/\lambda$. Počet vlnových délek, které projdou detektorem za jednotku času (je roven frekvenci f' zaznamenané detektorem), je dán vztahem

$$f' = \frac{(vt + v_D t)/\lambda}{t} = \frac{v + v_D}{\lambda}. \qquad (18.46)$$

Z rov. (18.45) víme, že platí $\lambda = v/f$. Dosazením do rov. (18.46) dostaneme

$$f' = \frac{v + v_D}{v/f} = f\frac{v + v_D}{v}. \qquad (18.47)$$

Všimněme si, že podle rov. (18.47) musí být f' vyšší než f, pokud není $v_D = 0$ (detektor v klidu).



Obr. 18.20 Vlnoplochy (a) přicházejí k detektoru, (b) vzdalují se od detektoru D, který se pohyboval proti nim. Za dobu t se vlnoplochy posunou o vzdálenost vt doprava a D se posune o vzdálenost $v_D t$ doleva.

Podobně odvodíme frekvenci změřenou detektorem v případě, že se detektor pohybuje od zdroje. V takovém případě se vlnoplochy posunou o vzdálenost $vt - v_D t$ vzhledem k D za dobu t a frekvence f' bude dána vztahem

$$f' = f\frac{v - v_D}{v}. \qquad (18.48)$$

Podle rov. (18.48) musí být frekvence f' nižší než f, není-li ovšem $v_D = 0$.

Rov. (18.47) a (18.48) můžeme shrnout do tvaru

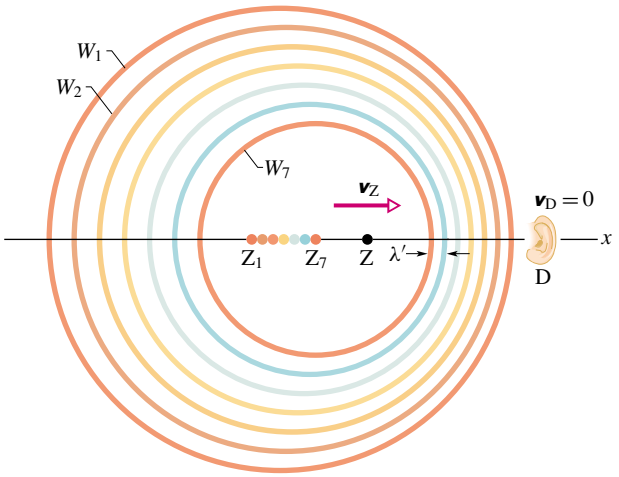
$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v} \qquad \begin{matrix}\text{(detektor v pohybu;}\\ \text{zdroj v klidu).}\end{matrix} \qquad (18.49)$$

Znaménko v rovnici rov. (18.49) můžeme určit z fyzikální zkušenosti: pohybuje-li se detektor ke zdroji, je frekvence vyšší (*směrem k sobě* znamená *vyšší*), tzn. použijeme znaménko + v čitateli. V opačném případě použijeme znaménko minus.

Zdroj v pohybu; detektor v klidu

Uvažujme detektor D v klidu vzhledem k okolnímu vzduchu a zdroj Z, který se pohybuje k D rychlostí v_Z podle

obr. 18.21. Pohybem Z se mění vlnová délka vyslaného zvuku, a tedy i frekvence zaznamenaná detektorem.



Obr. 18.21 Detektor D je v klidu; zdroj se pohybuje směrem k detektoru rychlostí v_Z. Vlnoplocha W_1 byla vyslána v okamžiku, kdy byl zdroj v poloze Z_1, vlnoplocha W_7 byla vyslána, když byl zdroj v Z_7. Ve znázorněném okamžiku je zdroj v poloze Z. Detektor přijímá vyšší frekvenci, protože pohybující se zdroj (dohánějící vyslané vlnoplochy) vysílá zkrácené vlnové délky λ' ve směru svého pohybu.

K popisu této změny položme $T = 1/f$ (doba mezi vysláním libovolné dvojice následujících vlnoploch W_1 a W_2). Během doby T se vlnoplocha W_1 posune o vzdálenost vT a zdroj se posune o vzdálenost $v_Z T$. Po uplynutí T je vyslána vlnoplocha W_2. Ve směru pohybu zdroje je vzdálenost mezi W_1 a W_2 (což je vlnová délka λ') rovna $vT - v_Z T$. Jestliže tyto vlny dopadnou na D, budou zaznamenány s frekvencí f' danou vztahem

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{vT - v_Z T} = \frac{v}{v/f - v_Z/f} = \\ = f\frac{v}{v - v_Z}. \qquad (18.50)$$

Všimněme si, že f' je vyšší než f, kromě případu $v_Z = 0$ (zdroj v klidu).

Pohybuje-li se zdroj Z od detektoru, je vlnová délka λ' rovna výrazu $vT + v_Z T$. Pokud tyto vlny přijdou na detektor, zaznamenají se s frekvencí f' danou vztahem

$$f' = f\frac{v}{v + v_Z}. \qquad (18.51)$$

V takovém případě musí být f' nižší než f, není-li ovšem $v_Z = 0$ (zdroj v klidu).

Rov. (18.50) a (18.51) můžeme shrnout do tvaru

$$f' = f\frac{v}{v \mp v_Z} \qquad \text{(zdroj v pohybu; detektor v klidu).} \qquad (18.52)$$

Znaménko v rov. (18.52) můžeme určit ze zkušenosti: jestliže se zdroj pohybuje k detektoru, je frekvence vyšší (*směrem k sobě* znamená *vyšší*), tzn. ve jmenovateli je znaménko minus. V opačném případě použijeme znaménko +.

Rovnice obecného Dopplerova jevu

Spojením rov. (18.49) a (18.52) vznikne vztah pro obecný Dopplerův jev, kdy se detektor i zdroj pohybují vzhledem k okolnímu vzduchu. Nahrazením f v rov. (18.52) (frekvence zdroje) frekvencí f' z rov. (18.49) (frekvence spojená s pohybem detektoru) dostaneme

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v \mp v_Z} \qquad \text{(obecný Dopplerův jev).} \qquad (18.53)$$

Speciálně, dosazením $v_Z = 0$ do rov. (18.53) dostaneme rov. (18.49); podobně dosazením $v_D = 0$ dostaneme (18.52). Znaménka plus a minus v rov. (18.53) jsou určena stejně jako v rovnicích (18.49) a (18.52): *směrem k sobě* znamená *vyšší* frekvence.

Dopplerův jev při malých rychlostech

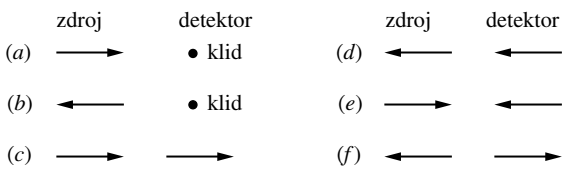
Dopplerův jev pro pohybující se detektor (popsaný rovnicí (18.49)) je různý od případu, kdy se pohybuje zdroj (podle rov. (18.52)), i když se detektor a zdroj pohybují vůči vzduchu stejně rychle. Pokud jsou však jejich rychlosti dostatečně malé (tzn. $v_D \ll v$ i $v_Z \ll v$), jsou změny frekvencí způsobené těmito dvěma pohyby stejné.

Užitím binomické věty (viz bod 7.2) můžeme ukázat, že rov. (18.53) lze upravit do tvaru

$$f' \approx f\left(1 \pm \frac{u}{v}\right) \qquad \text{(malé rychlosti),} \qquad (18.54)$$

ve kterém $u = |v_Z \pm v_D|$ je rychlost *relativního* pohybu zdroje vzhledem k detektoru. Pravidlo pro znaménka zůstává stejné: jestliže se detektor a zdroj pohybují směrem *k sobě*, dostáváme *vyšší* frekvenci a v rov. (18.54) použijeme znaménko +. V opačném případě, kdy se zdroj a detektor pohybují *od sebe*, frekvence poklesne a použijeme znaménko minus.

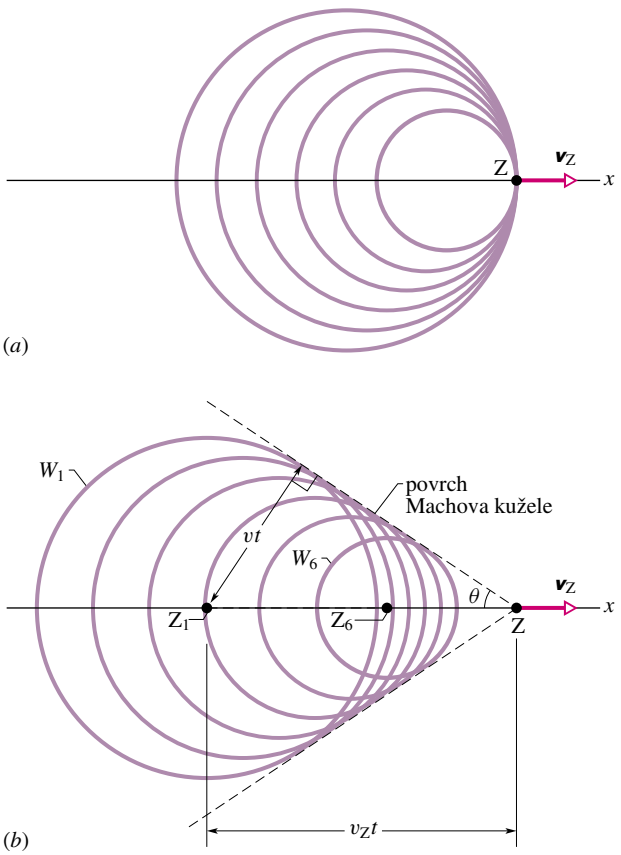
KONTROLA 6: Obrázek znázorňuje pohyb detektoru a zdroje zvuku pro šest situací v klidném vzduchu.



Pro každou situaci rozhodněte, jestli bude změřena frekvence vyšší, nebo nižší než vyslaná frekvence, nebo zda to nemůžeme určit bez dalších informací.

Nadzvukové rychlosti; rázové vlny

Jestliže se zdroj pohybuje směrem ke klidnému detektoru právě rychlostí zvuku, tedy $v_Z = v$, předpovídá rov. (18.52), že frekvence f' bude nekonečně vysoká. To znamená, že se zdroj pohybuje tak rychle, že se stále dotýká již dříve vyslaných vlnoploch, jak ukazuje obr. 18.22a. A co se stane, když rychlost zdroje *překročí* rychlost zvuku?

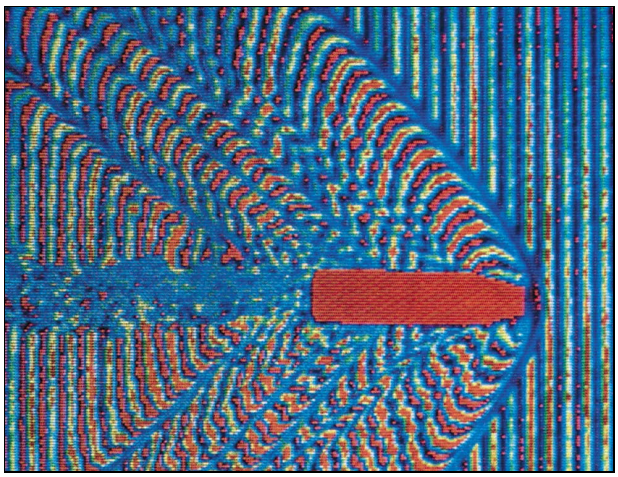


Obr. 18.22 (a) Zdroj zvuku Z se pohybuje rychlostí v_Z právě rovnou rychlosti zvuku, tzn. stejně rychle, jak se pohybují vlnoplochy. (b) Zdroj Z se pohybuje rychlostí větší, než je rychlost zvuku, tzn. rychleji než vlnoplochy. Když byl zdroj v poloze Z_1, vyslal vlnoplochu W_1; v poloze Z_6 vyslal vlnoplochu W_6. Všechny tyto kulové vlnoplochy se šíří rychlostí zvuku v a hromadí se podél povrchu kužele zvaného Machův kužel, čímž vytvářejí rázovou vlnu. Vrcholový úhel kužele je 2θ; kužel je tečný ke všem vlnoplochám.

Pro *nadzvukové* rychlosti už rov. (18.52) neplatí. Takovou situaci popisuje obr. 18.22b, který znázorňuje kulové vlny, vzniklé v různých polohách zdroje. Poloměr každé z vln je na tomto obrázku vt, kde v je rychlost zvuku a t doba, která uplynula od okamžiku, kdy zdroj vlnoplochu vyslal. Všimněme si, že se vlnoplochy hromadí na obálce tvaru V (obr. 18.22b), resp. ve trojrozměrném prostoru na povrchu kužele zvaného **Machův kužel** (podle Ernsta Macha, rodáka z Chrlic u Brna). Povrch tohoto kužele vytváří **rázovou vlnu**, protože nahromaděné vlnoplochy způsobují strmý nárůst a pokles tlaku vzduchu v místě, kterým povrch kužele prochází. Z obr. 18.22b je patrné, že poloviční úhel kužele θ, zvaný **Machův úhel**, je dán vztahem

$$\sin\theta = \frac{vt}{v_Z t} = \frac{v}{v_Z} \quad \text{(Machův úhel).} \qquad (18.55)$$

Poměr v_Z/v se nazývá **Machovo číslo**. Jestliže uslyšíte, že letadlo má 2,3 machů, znamená to, že letí 2,3krát rychleji než zvuk ve vzduchu. Rázová vlna způsobená nadzvukovým letadlem nebo střelou (obr. 18.23) vytváří *aerodynamický třesk*, při kterém tlak vzduchu nejprve náhle vzroste a poté klesne pod normál, než se opět vrátí k původní hodnotě.



Obr. 18.23 Obrázek v nepravých barvách. Dvacetimilimetrová střela se pohybuje s Machovým číslem 1,3. Všimněte si prvního Machova kužele vytvořeného čelem střely a sekundárních kuželů vzniklých nepravidelnostmi na povrchu střely.

PŘÍKLAD 18.8

Maketa rakety se pohybuje rychlostí $242\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ klidným vzduchem přímo k nehybnému stožáru. Přitom vysílá zvukové vlny o frekvenci $f = 1\,250\,\mathrm{Hz}$.

(a) Jakou frekvenci f' naměří detektor, který je připevněn ke stožáru?

ŘEŠENÍ: K určení f' použijeme rov. (18.53) pro obecný Dopplerův jev. Protože je detektor v klidu, dosadíme $v_D = 0$. Zdroj zvuku (raketa) se pohybuje *směrem k* detektoru, proto

použijeme ve jmenovateli znaménko minus. Dosazením zadaných hodnot a hodnoty $v = 343\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ z tab. 18.1 zjistíme naměřenou frekvenci

$$f' = f\frac{v}{v - v_Z} = (1\,250\ \mathrm{Hz})\frac{(343\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})}{(343\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) - (242\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})} = \\ = 4\,245\ \mathrm{Hz} \doteq 4\,250\ \mathrm{Hz}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek můžeme zběžně ověřit fyzikální zkušeností: jestliže se zdroj pohybuje *směrem ke* klidnému detektoru, pak změřená frekvence (zde 4 245 Hz) by měla být *vyšší* než vysílaná frekvence (1 250 Hz).

(b) Část zvukové vlny se od stožáru odrazí zpět k raketě, která má svůj vlastní detektor. Jakou frekvenci f'' zaznamená?

ŘEŠENÍ: Stožár nyní slouží jako zdroj zvuku, který působí tak, že odráží zvukovou vlnu, tzn. vytváří ozvěnu. Frekvence vlny odražené od stožáru je stejná jako frekvence $f' = 4\,245$ Hz, kterou „vnímá“ stožár. Protože nyní je v klidu zdroj (stožár), pokládáme v rov. (18.53) $v_Z = 0$. Detektor (v raketě) se pohybuje k novému zdroji, proto použijeme znaménko + v čitateli. Frekvence zaznamenaná detektorem v raketě je tedy

$$f'' = f'\frac{v + v_D}{v} = (4\,245\ \mathrm{Hz})\frac{(343\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) + (242\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})}{(343\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})} = \\ = 7\,240\ \mathrm{Hz}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledek můžeme opět zběžně ověřit: jestliže se detektor pohybuje *směrem k* nepohyblivému zdroji, měla by být zaznamenaná frekvence (zde 7 240 Hz) *vyšší* než vyslaná frekvence (4 245 Hz).

KONTROLA 7: V př. 18.8 navíc předpokládejte, že se vzduch pohybuje směrem k tyči rychlostí $20\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká rychlost zdroje v_Z by měla být použita v řešení části (a) a jakou rychlost v_D by měl mít detektor v části (b)?

PŘÍKLAD 18.9

Netopýři se orientují a hledají kořist vysíláním a přijímáním odrazů ultrazvukových vln, jejichž frekvence jsou vyšší než je schopen slyšet člověk. Předpokládejme, že netopýr letí k mušce rychlostí $v_n = 9{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (vůči zemi), kdežto muška letí k netopýrovi rychlostí $v_m = 8{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (také vůči zemi). Netopýr ze svých nozder vysílá ultrazvukové vlny o frekvenci f_{nv}, které se odrážejí od mouchy a vracejí zpět k netopýrovi s frekvencí f_{no}. Netopýr upraví vysílanou frekvenci f_{nv} takovým způsobem, že odražená vlna bude mít frekvenci f_{no} rovnou 83 kHz, na které je sluch netopýra nejcitlivější.

(a) Jakou frekvenci f_m slyší muška (taková frekvence se od ní také odráží), když f_{no} je 83 kHz?

ŘEŠENÍ: Vyjdeme z rov. (18.53), kde zdrojem je muška (resp. odražené vlny s frekvencí f_m) a detektorem netopýr (vnímá ozvěnu s frekvencí $f_{no} = 83$ kHz). Protože se detektor pohybuje ke zdroji (rychlostí v_n), použijeme znaménko + v čitateli rov. (18.53). Navíc se zdroj pohybuje k detektoru (rychlostí v_m), takže použijeme znaménko minus ve jmenovateli. Tím dostaneme

$$f_{no} = f_m\frac{v + v_n}{v - v_m}$$

neboli

$$(83\ \mathrm{kHz}) = f_m\frac{(343\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) + (9{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})}{(343\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) - (8{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})},$$

odkud

$$f_m = 78{,}99\ \mathrm{kHz} \doteq 79\ \mathrm{kHz}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou frekvenci f_{nv} vysílá netopýr, když slyší frekvenci $f_{no} = 83$ kHz?

ŘEŠENÍ: Opět použijeme rov. (18.53), ale nyní je netopýr zdrojem (o frekvenci f_{nv}) a muška detektorem (přijímá frekvenci f_m). Protože se detektor pohybuje ke zdroji (rychlostí v_m), použijeme znaménko + v čitateli rov. (18.53). Zdroj se navíc pohybuje k detektoru (rychlostí v_n), takže použijeme znaménko minus ve jmenovateli. V takovém případě dostaneme

$$f_m = f_{nv}\frac{v + v_m}{v - v_n}$$

neboli

$$(78{,}99\ \mathrm{kHz}) = f_{nv}\frac{(343\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) + (8{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})}{(343\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) - (9{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})},$$

odkud

$$f_{nv} = 75\ \mathrm{kHz}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Netopýr určuje relativní rychlost pohybu mušky (17 m/s) z rozdílu 8 kHz (= 83 kHz − 75 kHz), o který musí snížit vysílanou frekvenci, aby slyšel ozvěnu na frekvenci 83 kHz (kde slyší nejlépe). Některé mušky se vyhýbají ulovení tím, že odlétají přímo od směru, ve kterém slyší ultrazvukové vlny. Tato volba dráhy letu zmenšuje rozdíl frekvencí, které netopýr vysílá a přijímá, takže netopýr ozvěnu snadněji přeslechne. Jiné mušky se brání ulovení bzučením, které vytváří jiné ultrazvukové vlny, čímž netopýra zmatou.

18.9 DOPPLERŮV JEV U SVĚTLA

Je lákavé pokusit se použít vztah pro Dopplerův jev, odvozený v předcházející kapitole pro zvukové vlny

(rov. (18.53)), také pro světelné vlny, a to jednoduchým dosazením rychlosti světla c místo rychlosti zvuku v. Takovému pokušení je však třeba odolat.

Důvod je zajímavý. Zvukové vlny totiž potřebují prostředí, ve kterém se mohou šířit, zatímco světlo ne. Rychlost zvuku se proto také vždy, na rozdíl od rychlosti světla, měří vzhledem k prostředí. Rychlost světla je ale stejná ve všech inerciálních systémech, a to ve všech směrech. Právě z těchto důvodů, jak ukazuje Einsteinova teorie relativity, závisí Dopplerův jev u světla pouze na vzájemné rychlosti světelného zdroje a detektoru.

Přestože se rovnice Dopplerova jevu pro světlo a pro zvuk od sebe liší, lze je při nízkých rychlostech zjednodušit tak, že mají stejný tvar. (Dokonce je pravda, že *všechny* výsledky získané pomocí teorie relativity přecházejí při nízkých rychlostech na výsledky známé z *klasické* fyziky). Proto lze po dosazení $v = c$ použít rov. (18.54) i pro světelné vlny, pokud platí $u \ll c$, kde u je vzájemná rychlost zdroje a detektoru. Jako dobré přiblížení je tedy možné použít

$$f' = f(1 \pm u/c) \quad \text{(světlo; } u \ll c\text{)}. \qquad (18.56)$$

Jestliže se k sobě zdroj a detektor *přibližují*, předpokládáme, že frekvence *vzroste*, a podle naší znaménkové dohody použijeme v rov. (18.56) znaménko plus.

Při měření Dopplerova jevu na světelných vlnách v astronomii je snazší měřit vlnovou délku než frekvenci. V rov. (18.56) tedy nahradíme $f = c/\lambda$ a $f' = c/\lambda'$, čímž získáme

$$\lambda' = \lambda(1 \pm u/c)^{-1} \approx \lambda(1 \mp u/c).$$

To můžeme upravit na tvar

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \mp\frac{u}{c}$$

neboli

$$u = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}c \quad \text{(světlo; } u \ll c\text{)}, \qquad (18.57)$$

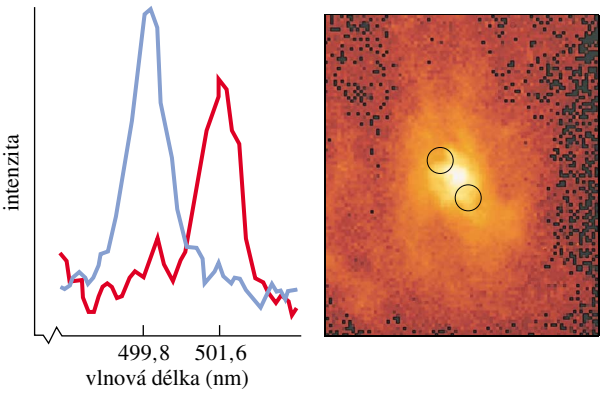
kde $\Delta\lambda$ je *velikost* (bez znaménka) Dopplerova posuvu vlnové délky.

Rov. (18.57) ukazuje, jak můžeme zjistit vzájemnou rychlost zdroje a detektoru ze změny vlnové délky. Pokud se vlnová délka zmenšuje („**modrý posuv**“, neboť modrá část viditelného spektra má kratší vlnovou délku), zvětšuje se frekvence a znamená to, že se zdroj a detektor navzájem přibližují. Pokud se vlnová délka zvětšuje („**rudý posuv**“), zdroj a detektor se vzájemně vzdalují. Astronomové měřící posuvy vlnových délek světla, které k nám přichází z dalekých hvězd a galaxií, zjistili, že světlo ze *všech* vzdálených galaxií vykazuje rudý posuv. To znamená, že všechny tyto galaxie se od nás vzdalují, a to dokonce tím rychleji, čím jsou od nás dál.

PŘÍKLAD 18.10

Obr. 18.24a ukazuje závislost intenzity na vlnové délce světla přicházejícího z mezihvězdného plynu, který se nachází ve dvou protilehlých oblastech galaxie M87 (obr. 18.24b). Jedna křivka má pík (tj. ostré maximum) v 499,8 nm, druhá v 501,6 nm. Plyn obíhá okolo jádra galaxie ve vzdálenosti $r = 100$ světelných let; při jedné straně se tedy pohybuje směrem k nám, při druhé naopak od nás.

(a) Jaká křivka odpovídá pohybu plynu směrem k nám? Jaká je relativní rychlost plynu vzhledem k nám (a vzhledem k jádru galaxie)?



Obr. 18.24 Příklad 18.10. (a) Závislost intenzity na vlnové délce světla vyzařovaného plynem v protilehlých oblastech galaxie M87. (b) Centrální oblast galaxie M87. Kroužky ukazují polohu plynu, jehož intenzita záření je znázorněna v (a). Střed galaxie se nachází uprostřed mezi oběma kroužky.

ŘEŠENÍ: Kdyby se plyn nepohyboval okolo jádra galaxie, naměřili bychom světlo s vlnovou délkou λ (danou procesem emise a rychlostí pohybu galaxie směrem od nás). Vlnová délka světla vysílaného z pohybujícího se plynu se však díky Dopplerovu jevu posouvá. Při pohybu plynu směrem od nás vlnová délka roste, při pohybu směrem k nám klesá. Křivka s maximem v 501,6 nm tedy odpovídá pohybu plynu směrem od nás a křivka s maximem v 499,8 nm odpovídá pohybu směrem k nám.

Předpokládejme, že vzrůst a pokles vlnové délky pohybujícího se plynu je co do velikosti stejný. Potom původní vlnová délka λ musí být průměrem obou posunutých vlnových délek:

$$\lambda = \frac{501{,}6\,\text{nm} + 499{,}8\,\text{nm}}{2} = 500{,}7\,\text{nm}.$$

Dopplerův posuv $\Delta\lambda$ světla z plynu pohybujícího se směrem od nás je pak

$$\Delta\lambda = 501{,}6\,\text{nm} - 500{,}7\,\text{nm} = 0{,}90\,\text{nm}.$$

Dosazením tohoto výsledku a hodnoty $\lambda = 500{,}7$ nm do rov. (18.57) vypočítáme, že se plyn pohybuje směrem od nás

rychlostí

$$u = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\, c = \frac{(0{,}90\,\mathrm{nm})}{(501{,}6\,\mathrm{nm})}(3{,}0{\cdot}10^{8}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) =$$
$$= 5{,}39{\cdot}10^{5}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Plyn obíhá okolo jádra galaxie, které na něj, díky své hmotnosti M, působí gravitační silou. Jak velká je tato hmotnost v násobcích hmotnosti Slunce $M_{\mathrm{S}} = 1{,}99{\cdot}10^{30}\,\mathrm{kg}$?

ŘEŠENÍ: Z rov. (14.1) vyplývá, že gravitační síla působící na částici plynu o hmotnosti m obíhající ve vzdálenosti r je

$$F = \frac{GMm}{r^2}.$$

Po použití druhého Newtonova zákona na částici plynu a po dosazení dostředivého zrychlení u^2/r za a dostaneme

$$\frac{GMm}{r^2} = ma = \frac{mu^2}{r}.$$

Po dosazení známých hodnot dostaneme

$$M = \frac{u^2 r}{G} =$$
$$= \frac{(5{,}39{\cdot}10^{5}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2(100\,\mathrm{ly})(9{,}46{\cdot}10^{15}\,\mathrm{m/ly})}{(6{,}67{\cdot}10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}})} =$$
$$= 4{,}12{\cdot}10^{39}\,\mathrm{kg} = 2{,}1{\cdot}10^{9} M_{\mathrm{S}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek nám ukazuje, že v jádru galaxie je namačkána hmota o velikosti dvou miliard Sluncí. To velmi silně nasvědčuje tomu, že jádro galaxie obsahuje *supertěžkou* černou díru.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Zvukové vlny

Zvukové vlny jsou mechanické vlny šířící se pevným, kapalným nebo plynným prostředím. Mohou být podélné (kdekoliv) anebo příčné (pouze v pevných látkách). Rychlost zvukové vlny v v prostředí s modulem objemové pružnosti K a hustotou ϱ je

$$v = \sqrt{\frac{K}{\varrho}} \quad \text{(rychlost zvuku)}. \qquad (18.3)$$

Ve vzduchu je při teplotě 20 °C rychlost zvuku $343\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Zvuková vlna způsobuje podélnou výchylku s částice prostředí podle vztahu

$$s(x,t) = s_{\mathrm{m}} \cos(kx - \omega t), \qquad (18.13)$$

kde s_{m} je *amplituda výchylky* (maximální výchylka z rovnovážné polohy), $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi f$, λ je vlnová délka a f frekvence zvukové vlny. Zvuková vlna také způsobuje odchylku tlaku Δp prostředí od rovnovážného tlaku:

$$\Delta p(x,t) = \Delta p_{\mathrm{m}} \sin(kx - \omega t), \qquad (18.14)$$

kde *amplituda tlaku* je

$$\Delta p_{\mathrm{m}} = (v\varrho\omega) s_{\mathrm{m}}. \qquad (18.15)$$

Interference

Výsledek interference (skládání) dvou vln o stejné vlnové délce procházejících jedním bodem závisí na jejich fázovém rozdílu φ v tomto bodě. Jestliže jsou obě vlny emitovány ve fázi a šíří se (přibližně) stejným směrem, pak pro φ platí

$$\varphi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi, \qquad (18.21)$$

kde ΔL je jejich *dráhový rozdíl* (rozdíl mezi vzdálenostmi, které obě vlny urazily do bodu setkání). Podmínky pro úplnou konstruktivní a destruktivní interferenci vln jsou dány vztahy

$$\varphi = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (18.22)$$
(konstruktivní interference)

a

$$\varphi = 2\pi(m + \tfrac{1}{2}), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (18.23)$$
(destruktivní interference).

Tyto vztahy odpovídají podmínkám

$$\Delta L = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (18.24)$$
(konstruktivní interference)

a

$$\Delta L = (m + \tfrac{1}{2})\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (18.25)$$
(destruktivní interference)

pro dráhový rozdíl ΔL.

Intenzita zvuku

Intenzita I zvukové vlny je průměrný výkon, s jakým prochází energie jednotkovou plochou kolmou na směr šíření:

$$I = \frac{P}{S}, \qquad (18.26)$$

kde P je výkon (velikost energie přenesené zvukovou vlnou za jednotku času) a S je velikost plochy, na kterou zvuk dopadá. Intenzita I je svázána s amplitudou zvukové vlny s_{m} vztahem

$$I = \tfrac{1}{2}\varrho v \omega^2 s_{\mathrm{m}}^2. \qquad (18.27)$$

Intenzita ve vzdálenosti r od bodového zdroje vysílajícího zvukové vlny o výkonu P_Z je

$$I = \frac{P_Z}{4\pi r^2}. \tag{18.28}$$

Hladina intenzity zvuku v decibelech

Hladina intenzity zvuku β v *decibelech* dB je definována jako

$$\beta = (10\,\text{dB}) \log \frac{I}{I_0}, \tag{18.29}$$

kde $I_0 = 1{\cdot}10^{-12}\,\text{W}{\cdot}\text{m}^{-2}$ je referenční hladina, ke které se všechny ostatní hodnoty vztahují. Každému zvýšení intenzity o desetinásobek odpovídá nárůst hladiny zvuku o 10 dB.

Stojaté vlnění v trubicích

V trubicích lze vybudit stojaté vlnění. Trubice délky L otevřená na obou koncích bude rezonovat při frekvencích

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{(otevřená trubice)}, \tag{18.37}$$

kde v je rychlost zvuku ve vzduchu uvnitř trubice. Trubice, která je otevřená jen na jedné straně a uzavřená na druhé, má vlastní frekvence

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{4L}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{18.39}$$

(trubice otevřená jen na jedné straně).

Rázy

Rázy vznikají při skládání dvou vln o blízkých frekvencích f_1 a f_2. Frekvence rázů je rovna

$$f_{\text{rázy}} = f_1 - f_2. \tag{18.44}$$

Dopplerův jev

Při *Dopplerově jevu* se mění pozorovaná frekvence vlny tím, že se zdroj nebo detektor (nebo oba) pohybují vzhledem k prostředí. Pro zvuk je pozorovaná frekvence f' vyjádřena pomocí frekvence zdroje f vztahem

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v \mp v_Z} \quad \text{(obecný Dopplerův jev)}, \tag{18.53}$$

kde v_D, resp. v_Z je relativní rychlost detektoru, resp. zdroje vůči prostředí a v je rychlost zvuku v tomto prostředí. Znaménka jsou volena tak, aby f' *rostla* při vzájemném pohybu zdroje a detektoru k sobě a *klesala* při jejich pohybu směrem od sebe.

Rázová vlna

Pokud rychlost zdroje vzhledem k prostředí překročí rychlost šíření zvuku v prostředí, pozbývá Dopplerova rovnice platnosti. V takovém případě dojde ke vzniku rázové vlny. Vrcholový úhel 2θ kuželové vlnoplochy (obr. 18.22) je dán vztahem

$$\sin\theta = \frac{v}{v_Z} \quad \text{(Machův úhel)}. \tag{18.55}$$

Dopplerův jev pro světlo

Pokud se světelný zdroj a detektor pohybují vzájemnou rychlostí $u \ll c$, bude naměřená frekvence světla f' rovna

$$f' = f(1 \pm u/c), \tag{18.56}$$

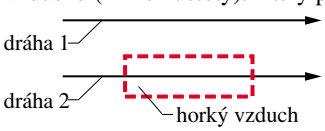
kde f je frekvence, která by byla naměřena, pokud by zdroj a detektor byly navzájem v klidu. Vzájemná rychlost u je spojena s posuvem vlnové délky $\Delta\lambda$ vztahem

$$u = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}c, \tag{18.57}$$

kde λ je vlnová délka při vzájemném klidu ($u = 0$). Pokud se zdroj a detektor pohybují směrem k sobě, je posuv $\Delta\lambda$ záporný (modrý posuv), pokud se od sebe vzdalují, je posuv $\Delta\lambda$ kladný (rudý posuv).

OTÁZKY

1. Obr. 18.25 ukazuje dráhy dvou zvukových pulzů, které odstartovaly ve stejný okamžik a závodí spolu ve vzduchu na tratích stejné délky. Jediný rozdíl je v tom, že podél 2. dráhy se nachází oblast horkého vzduchu (nízké hustoty). Který pulz zvítězí?

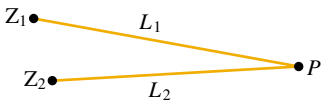


Obr. 18.25 Otázka 1

2. Zvuková vlna o vlnové délce λ a amplitudě výchylky s_m se začne šířit chodbou. Ve chvíli, kdy malé zařízení zachytí tuto vlnu, vyšle samo druhou zvukovou vlnu („**antizvuk**“), která dokáže odrušit první vlnu tak, že na konci chodby není nic slyšet. Jaký musí být (a) směr šíření, (b) vlnová délka a (c) amplituda výchylky druhé vlny, aby bylo takové odrušení možné? (d) Jaký musí být fázový rozdíl mezi oběma vlnami? (Takováto zařízení se používají k odrušení nežádoucích zvuků v hlučných prostředích.)

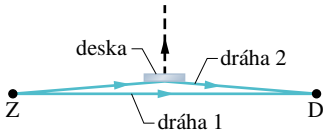
3. V obr. 18.26 vysílají dva bodové zdroje Z_1 a Z_2 ve fázi stejné zvukové vlny o vlnové délce 2,0 m. Jaký je rozdíl mezi fázemi vln (v jednotkách vlnových délek) přicházejících do bodu P,

pokud (a) $L_1 = 38\,\text{m}$ a $L_2 = 34\,\text{m}$, (b) $L_1 = 39\,\text{m}$ a $L_2 = 36\,\text{m}$? (c) Za předpokladu, že vzdálenost mezi zdroji je mnohem menší než L_1 a L_2, jaký druh interference nastává v bodě P v situaci (a) a (b)?



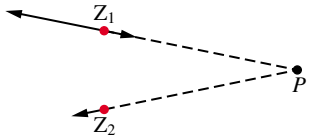
Obr. 18.26 Otázka 3

4. V obr. 18.27 jsou zvukové vlny o vlnové délce λ vysílány z bodového zdroje Z a šíří se směrem k detektoru D po dvou drahách. První dráha vede přímo, druhá vede přes odraz na desce. Zpočátku je deska blízko 1. dráhy a vlny přicházející do D po obou drahách jsou skoro ve fázi. Později je panel posunut dál od 1. dráhy tak, aby vlny přicházely do D přesně v protifázi. Jaký je potom dráhový rozdíl $\Delta\lambda$ mezi oběma drahami?



Obr. 18.27 Otázka 4

5. V obr. 18.28 jsou dva bodové zdroje Z_1 a Z_2 ve stejné fázi, které vysílají stejné zvukové vlny o vlnové délce λ, a bod P,



Obr. 18.28 Otázka 5

který je ve stejné vzdálenosti od obou zdrojů. Zdroj Z_2 je poté posunut směrem od bodu P o vzdálenost $\lambda/4$. Setkají se vlny v bodě P ve fázi, v protifázi nebo v nějakém jiném fázovém vztahu, jestliže (a) zdroj Z_1 je posunut směrem k bodu P o vzdálenost rovnou $\lambda/4$, (b) zdroj Z_1 je posunut směrem od bodu P o vzdálenost rovnou $3\lambda/4$?

6. V př. 18.3 a obr. 18.8a jsou vlny přicházející do bodu P_1 přesně ve stejné fázi. To znamená, že vlny přicházející ze zdrojů Z_1 a Z_2 vždy pohybují částicí vzduchu stejným směrem. Označme P_3 střed spojnice zdrojů Z_1 a Z_2. (a) Jsou vlny, které se setkávají v bodě P_3, ve fázi, v opačné fázi, nebo v nějakém stavu mezi tím? (b) Jaká bude odpověď, pokud zvětšíme vzdálenost mezi zdroji na $1{,}7\lambda$?

7. Zjistěte bez použití kalkulačky, o kolik se zvýší hladina zvuku, když se intenzita zdroje zvuku zvýší 10^7krát?

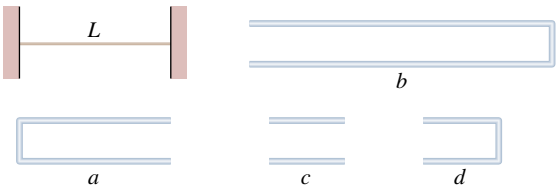
8. Stojatá vlna v trubici má pět uzlů a pět kmiten. (a) Kolik otevřených konců má trubice (má určitě alespoň jeden)? (b) Jaký mód (kolikátá harmonická) n odpovídá této stojaté vlně?

9. Uvnitř trubice se vybudila šestá harmonická. (a) Kolik otevřených konců má trubice? (Alespoň jeden má vždy.) (b) Je uprostřed trubice uzel, kmitna, nebo ani jedno z toho?

10. (a) Když se rozcvičuje orchestr, zahřívají hráči svým dechem vzduch uvnitř dechových nástrojů (a snižují tak hustotu vzduchu). Zvýší se, nebo sníží rezonanční frekvence? Když trombonista při hře povytáhne snižec (tj. zatlačí ho směrem od sebe), zvýší se, nebo sníží rezonanční frekvence nástroje?

11. Trubice A má délku L a jeden otevřený konec. Trubice B má délku $2L$ a dva otevřené konce. Které harmonické pro trubku B mají frekvence odpovídající rezonančním frekvencím trubice A?

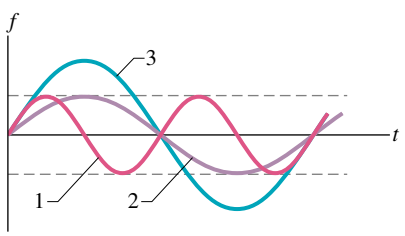
12. Na obr. 18.29 je napnutá struna o délce L a trubice a, b, c a d o délkách L, $2L$, $L/2$ a $L/2$. Struna je napnuta tak, aby rychlost vln po ní se šířících byla rovna rychlosti zvuku ve vzduchu. Struna je rozkmitána v základním módu. Ve které trubici způsobí strunou vydávaný zvuk rezonanci a kolikátá harmonická to bude?



Obr. 18.29 Otázka 12

13. Máme tři ladičky. Ladička s nejnižší frekvencí kmitá s frekvencí 500 Hz. Úderem do dvou ladiček najednou lze vytvořit následující frekvence rázů: 1, 2, 3, 5, 7 a 8 (údaje jsou v Hz). Jaké jsou možné frekvence ostatních ladiček? (Jsou dvě varianty řešení.)

14. Váš kamarád postupně jede na třech různých kolotočích a přitom drží v ruce zdroj, který všemi směry vysílá zvuk jedné frekvence. Frekvence zvuku, který slyšíte během každé z jízd vašeho kamaráda, se během otáčení kolotoče mění. Tyto změny ve frekvencích během tří jízd na třech různých kolotočích jsou zachyceny v obr. 18.30. Seřaďte sestupně křivky (a) podle postupné rychlosti v zdroje zvuku, (b) podle úhlové rychlosti ω, s jakou se otáčejí kolotoče, a (c) podle poloměru r kolotoče.



Obr. 18.30 Otázka 14

CVIČENÍ & ÚLOHY

Kdykoliv není jinak řečeno, použijte rychlost zvuku ve vzduchu $v = 343\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 1\,125\,\mathrm{ft{\cdot}s^{-1}}$ a hustotu vzduchu $\varrho = 1{,}21\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

ODST. 18.2 Rychlost zvuku

1C. Pravidlo pro určení vzdálenosti v kilometrech od místa, kde udeřil blesk, doporučuje počítat sekundy od chvíle, kdy je vidět blesk, až do chvíle, kdy je slyšet hrom a pak počet sekund vydělit třemi. (a) Vysvětlete toto pravidlo a určete procentuální chybu při teplotě 20 °C za předpokladu, že se zvuk k vám šíří po přímce. (b) Vymyslete podobné pravidlo pro určení vzdálenosti v mílích.

2C. Zástup vojáků pochoduje v rytmu 120 kroků za minutu podle taktu kapely, která kráčí na jeho začátku. Vojáci na konci kolony vykračují levou nohou právě tehdy, když hudebníci vykračují pravou. Jak je zástup přibližně dlouhý?

3C. Jste na velikém hudebním koncertu a sedíte 300 m od reproduktoru. Koncert je také vysílán v přímém přenosu přes satelit (rychlostí světla). Kdo slyší hudbu dřív: vy v sále, nebo posluchač rádia vzdáleného 5 000 km? Jak veliký je časový rozdíl?

4C. Dva diváci fotbalového utkání na stadionu Montjuic uvidí a za malou chvíli uslyší výkop míče na hřišti. Časový rozdíl je pro jednoho z nich 0,23 s a pro druhého 0,12 s. Přímky spojující oba diváky s kopajícím hráčem svírají úhel 90°. (a) Jak daleko jsou diváci vzdáleni od hráče? (b) Jak daleko jsou diváci vzdáleni od sebe?

5C. Průměrná hustota zemského pláště 10 km pod kontinenty je $2{,}7\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. Rychlost podélných seizmických vln v této hloubce, určená sledováním jejich příchodů ze vzdálených zemětřesení, je $5{,}4\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Určete modul pružnosti zemského pláště v dané hloubce. Pro porovnání: modul pružnosti oceli je kolem $16{\cdot}10^{10}$ Pa.

6C. Jaký je modul pružnosti kyslíku za standardní teploty (0 °C) a tlaku (1 atm)? Za těchto podmínek zaujímá 1 mol (32,0 g) kyslíku objem 22,4 l a rychlost zvuku v něm je $317\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

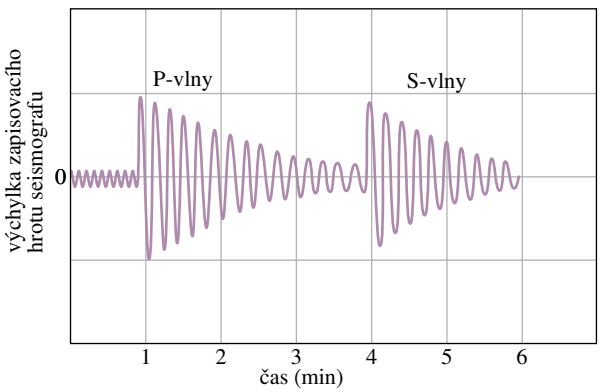
7Ú. Experimentátorka chce změřit rychlost zvuku v 10 cm dlouhé hliníkové tyči. Měří proto čas, za který zvukový impulz překoná celou délku tyče. Jestliže výsledky mají být uvedeny s přesností na 4 platné cifry, jak přesně je potřeba znát délku tyče a s jakou přesností je nutné měřit časové intervaly?

8Ú. Rychlost zvuku v jistém kovu je v_k. Do dlouhé roury z tohoto kovu na jednom konci silně udeříme. Člověk naslouchající na druhém konci uslyší dva zvuky. Jeden pochází z vlny šířící se podél roury a druhý z vlny šířící se vzduchem. (a) Jestliže v_v je rychlost zvuku ve vzduchu, jaký čas t uplyne mezi příchody obou úderů? (b) Položte $t = 1{,}00$ s a za kov vezměte ocel. Najděte délku l roury.

9Ú. Do dlouhé hliníkové tyče na jednom konci silně udeříme. Pozorovatel na opačném konci s uchem blízko tyče uslyší úder dvakrát (jednou přes tyč a jednou přes vzduch) s odstupem 0,120 s. Jak dlouhá je tyč?

10Ú. **Zemětřesením** vznikají v zemském nitru zvukové vlny. Na rozdíl od plynů se v Zemi šíří jak příčné (S), tak podélné (P) vlnění. Rychlost S-vln je kolem $4{,}5\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$, rychlost P-vln asi $8{,}0\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Seismograf zaznamená první P-vlny tři minuty před příchodem prvních S-vln (obr. 18.31). Předpokládejme, že vlny se šířily přímočaře. V jaké vzdálenosti probíhalo zemětřesení?

11Ú. Do studny hodíme kámen a za 3 vteřiny uslyšíme šplouchnutí. Jak je studna hluboká?



Obr. 18.31 Úloha 10

ODST. 18.3 Šíření zvukových vln

12C. Lidské ucho slyší frekvence přibližně od 20 Hz do 20 kHz. Jaké jsou vlnové délky příslušných zvukových vln?

13C. Nejmenší vlnová délka, kterou je schopný vydat netopýr, je 3,3 mm. Jaká je příslušná frekvence?

14C. K vyšetřování nádorů v měkkých tkáních používají lékaři ultrazvuk o frekvenci 4,50 MHz. (a) Jakou vlnovou délku mají tyto vlny ve vzduchu? (b) Jestliže rychlost zvuku v tkáni je $1\,500\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, jaká je v ní vlnová délka?

15C. (a) Kuželový reproduktor má průměr 15,0 cm. Jakou frekvenci musí mít vydávaný zvuk, aby vlnová délka ve vzduchu byla rovna průměru reproduktoru? Desetinásobku průměru? Desetině průměru? (b) Proveďte stejné výpočty pro reproduktor průměru 30,0 cm.

16C. Ultrazvukovým mikroskopem lze získat velmi detailní obrázky tranzistorů. Vlny vysílané mikroskopem mají frekvenci 4,2 GHz a rychlost (v tekutém héliu, ve kterém je vzorek ponořen) $240\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jakou mají vlnovou délku?

17Ú. (a) Zdroj oscilací je spojen s velmi dlouhou pružinou a vysílá po ní souvislou podélnou sinusovou vlnu. Frekvence zdroje je 25 Hz a vzdálenost mezi dvěma po sobě následujícími body maximálního roztažení pružiny je 24 cm. Určete rychlost vlny. (b) Napište rovnici této vlny, jestliže maximální

podélná výchylka částice v pružině je 0,30 cm a vlna se šíří proti směru osy x. Zdroj nechť leží v bodě $x = 0$ a nechť výchylka v bodě $x = 0$ je nulová v čase $t = 0$.

18Ú. Tlak v šířící se zvukové vlně je dán rovnicí

$$\Delta p = (1{,}5\,\text{Pa}) \sin \pi((1{,}00\,\text{m}^{-1})x - (330\,\text{s}^{-1})t).$$

Určete (a) amplitudu tlaku, (b) frekvenci, (c) vlnovou délku a (d) rychlost vlny.

19Ú. Dvě zvukové vlny z různých zdrojů stejné frekvence 540 Hz se šíří rychlostí 330 m·s^{-1}. Zdroje jsou ve fázi. Jaký je fázový rozdíl vln v bodě vzdáleném 4,40 m od jednoho a 4,00 m od druhého zdroje? Obě vlny putují ve stejném směru.

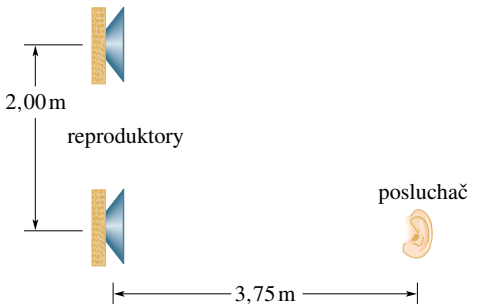
20Ú. Dvě vlny vyvolávají v jistém místě prostoru změny tlaku

$$\Delta p_1 = \Delta p_\text{m} \sin \omega t,$$
$$\Delta p_2 = \Delta p_\text{m} \sin(\omega t - \varphi).$$

Jaká je amplituda tlaku výsledné vlny v daném bodě, když $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = \pi/3$ a $\varphi = \pi/4$?

ODST. 18.4 Interference

21Ú. Dva reproduktory na obr. 18.32, jejichž vzdálenost je 2,00 m, jsou ve fázi. Předpokládejme, že amplitudy zvukových vln z reproduktorů jsou zhruba stejné v místě, kde stojí posluchač, tj. 3,75 m přímo před jedním z reproduktorů. (a) Pro jaké frekvence v slyšitelném rozsahu (20 Hz až 20 000 Hz) vnímá posluchač nejslabší signál? (b) Pro jaké frekvence je signál nejsilnější?

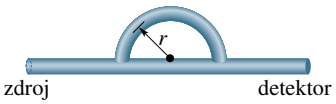


Obr. 18.32 Úloha 21

22Ú. Dva reproduktory jsou umístěny 3,35 m od sebe na jevišti hudebního sálu. Posluchač sedí ve vzdálenosti 18,3 m od jednoho a 19,5 m od druhého reproduktoru. Zvukový generátor udržuje na obou reproduktorech stejnou amplitudu a frekvenci. Vysílaná frekvence se mění v celém slyšitelném rozsahu (20 Hz–20 000 Hz). (a) Najděte tři nejnižší frekvence, při kterých bude kvůli destruktivní interferenci posluchač vnímat nejslabší signál. (b) Jaké jsou tři nejnižší frekvence, při kterých bude vnímaný signál maximální?

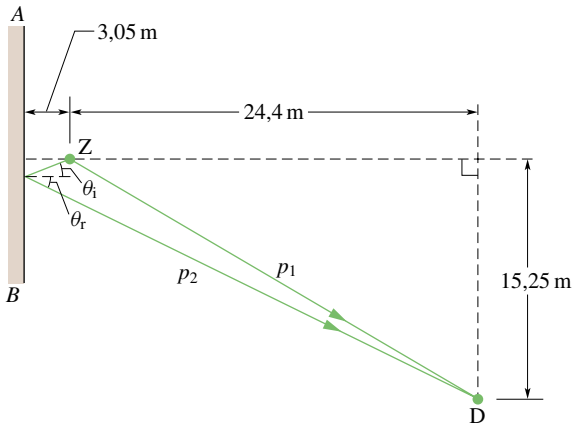
23Ú. Dva bodové zdroje zvukových vln stejné vlnové délky λ jsou od sebe vzdáleny na délku $d = 2{,}0\lambda$. Oba zdroje jsou ve fázi. (a) Kolik bodů s maximálním signálem (maximum konstruktivní interference) leží na velikém kruhu kolem zdrojů? (b) Kolik tam leží bodů s minimálním signálem (destruktivní interference)?

24Ú. Zvuková vlna o vlnové délce 40,0 cm vstupuje do trubice nakreslené na obr. 18.33 koncem, na němž je připojen zdroj. Jaký musí být nejmenší poloměr r, aby detektor na druhém konci zachytil nejslabší signál?



Obr. 18.33 Úloha 24

25Ú. Na obr. 18.34 je bodový zdroj Z zvukových vln umístěn blízko odrazové stěny AB. Detektor zvuku D zachytává paprsek p_1, šířící se přímo ze zdroje Z. Zachytává také paprsek p_2 odražený od stěny tak, že *úhel dopadu* θ_i je roven *úhlu odrazu* θ_r. Najděte dvě frekvence, při kterých nastává v D maximum konstruktivní interference paprsků p_1 a p_2. (Odraz od stěny nemění fázi zvukové vlny.)



Obr. 18.34 Úloha 25

26Ú*. Dva bodové zdroje vzdálené od sebe 5,00 m vysílají zvukové vlny stejné amplitudy a frekvence (300 Hz), ale navzájem přesně opačné fáze. V kterých bodech spojnice zdrojů způsobuje zvuk největší kmitání molekul vzduchu? (*Tip*: Jeden takový bod leží v jejím středu.)

ODST. 18.5 Intenzita zvuku a její hladina

27C. Bodový zdroj výkonu 1,0 W izotropně vysílá zvukové vlny. Za předpokladu, že energie vln se zachovává, jaká je intenzita ve vzdálenosti (a) 1,0 m od zdroje a (b) 2,5 m od zdroje?

28C. Zdroj izotropně vysílá zvukové vlny, jejichž intenzita ve vzdálenosti 2,50 m je $1{,}91 \cdot 10^{-4}$ W·m^{-2}. Jaký je výkon zdroje za předpokladu, že se energie vln zachovává?

29C. Zvuková vlna má intenzitu 100 μW·m^{-2} a frekvenci 300 Hz. S jakou amplitudou kmitají molekuly vzduchu, když jím prochází tato vlna?

30C. Dvě zvukové vlny se v hlasitosti liší o 1,00 dB. Jaký je poměr větší intenzity k menší intenzitě?

31C. Hlasitost zvuku zvětšíme o 30 dB. Kolikrát se zvýší (a) jeho intenzita a (b) amplituda tlaku?

32C. Prodavač tvrdil, že stereo věž má maximální výkon 120 W. Zákaznice testovala reproduktory tak, že jejich rozmístěním simulovala bodový zdroj. Zjistila, že při maximální hlasitosti se může přiblížit až na vzdálenost 1,2 m, teprve pak pocítí bolest v uších. Má celou záležitost ohlásit obchodní inspekci?

33C. Soustava reproduktorů vysílá izotropně zvuk frekvence 2 000 Hz a intenzity 0,960 $\mathrm{mW \cdot m^{-2}}$ ve vzdálenosti 6,10 m. Předpokládejte, že nenastává odraz. (a) Jaká je intenzita ve vzdálenosti 30,0 m? Jaká je ve vzdálenosti 6,10 m (b) amplituda výchylky a (c) amplituda tlaku?

34C. Zdroj zvukových vln má výkon 1,00 μW. Jestliže se jedná o bodový zdroj, (a) jaká je intenzita vln ve vzdálenosti 3,00 m a (b) jaká je hlasitost v decibelech v tomtéž místě?

35C. (a) Dvě zvukové vlny, z nichž jedna se šíří ve vzduchu a druhá ve vodě, mají stejnou intenzitu. Jaký je poměr amplitudy tlaku vlny ve vodě k amplitudě tlaku vlny ve vzduchu? Předpokládejte, že voda i vzduch mají teplotu 20 °C (viz tab. 15.1). (b) Jestliže jsou naopak stejné amplitudy tlaku, jaký je poměr intenzit?

36Ú. (a) Dokažte, že intenzita I vlny je součinem její hustoty energie u a její rychlosti v. (b) Rádiové vlny se šíří rychlostí $3 \cdot 10^8$ $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Určete hustotu energie u pro rádiovou vlnu ve vzdálenosti 450 km od 50 kW zdroje za předpokladu, že vlnoplochy mají kulový tvar.

37Ú. Předpokládejme, že hlučný nákladní vlak na přímé dráze vydává válcovou rozepínající se zvukovou vlnu. Jestliže vzduch neabsorbuje žádnou energii, jak závisí amplituda s_m vlny na kolmé vzdálenosti r od zdroje?

38Ú. Zvuková vlna se šíří stejnoměrně ve všech směrech z bodového zdroje (říkáme, že zdroj je izotropní). (a) Odůvodněte následující vztah pro výchylku s prostředí v libovolné vzdálenosti r od zdroje:

$$s = \frac{b}{r} \sin k(r - vt),$$

kde b je konstanta. Uvažte rychlost, směr šíření a intenzitu vlny. (b) Jaký rozměr má konstanta b?

39Ú. Určete poměry (a) intenzit, (b) amplitud tlaku a (c) amplitud výchylky dvou zvukových vln, které se liší v hlasitosti zvuku o 37 dB.

40Ú. Ve vzdálenosti 10 km je sotva slyšet 100 Hz parní píšťalu, o níž předpokládáme, že je bodovým zdrojem. V jaké vzdálenosti by člověku způsobila bolest?

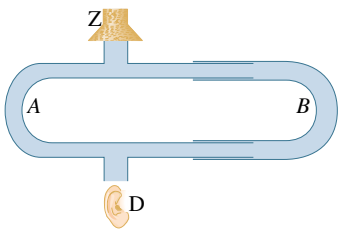
41Ú. Stojíte ve vzdálenosti l od zdroje vysílajícího zvukové vlny do všech směrů stejně. Když se přemístíte o 50,0 m blíže, zjistíte, že intenzita vln se zdvojnásobila. Vypočtěte vzdálenost l.

42Ú. Bodový zdroj o výkonu 30,0 W vysílá izotropně zvukové vlny. Malý mikrofon s účinnou plochou 0,750 $\mathrm{cm^2}$ je umístěn 200 m od zdroje. Vypočtěte (a) intenzitu zvuku v daném místě a (b) výkon přijímaný mikrofonem.

43Ú. Při zkušebním letu prolétá tryskové letadlo podzvukovou rychlostí ve výšce 100 m nad zemí. Intenzita zvuku na zemi při průletu je 150 dB. V jaké výšce by mělo letadlo letět, aby hlasitost na povrchu nepřekročila práh bolesti, tj. 120 dB? Konečnou dobu, za kterou zvuk z letadla dosáhne povrchu Země, zanedbejte.

44Ú. Konstruktér navrhl kulový reproduktor, který vysílá zvuk izotropně. Zařízení vysílá výkon 10 W v **bezdozvukové komoře** (s dokonale tlumivými stěnami). (a) Jaká je intenzita zvukových vln (v $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$) ve vzdálenosti 3,0 m od středu zdroje? (b) Porovnejte amplitudy vln ve vzdálenostech 4,0 m a 3,0 m od středu zdroje.

45Ú. Obr. 18.35 zachycuje vzduchem plněný **akustický interferometr**, používaný k demonstraci interference zvukových vln. Z je oscilující membrána; D je detektor zvuku, například lidské ucho nebo mikrofon. Délku dráhy ZBD můžeme měnit, kdežto vzdálenost ZAD je pevná. V bodě D interferuje zvuková vlna přicházející dráhou ZBD s vlnou z dráhy ZAD. V pokusu má intenzita zvuku v bodě D minimální hodnotu 100 jednotek. Při posunu bodu B o 1,65 cm intenzita spojitě vzrostla až k maximální hodnotě 900 jednotek. Spočítejte (a) frekvenci vysílaného zvuku a (b) poměr amplitud ZAD-vlny a ZBD-vlny v bodě D. (c) Jak je možné, že vlny mají různé amplitudy, ačkoli pocházejí ze stejného zdroje?



Obr. 18.35 Úloha 45

ODST. 18.6 Zdroje hudebního zvuku

46C. Zvuková vlna frekvence 1 000 Hz šířící se vzduchem má amplitudu tlaku 10,0 Pa. Jaká je (a) vlnová délka, (b) amplituda výchylky molekul vzduchu a (c) jejich největší rychlost? (d) Uvedená frekvence je základní frekvencí varhanní píšťaly otevřené na obou koncích. Vypočtěte délku píšťaly.

47C. Zvuková vlna šířící se v tekutém prostředí se odráží od stěny, čímž vznikne stojaté vlnění. Vzdálenost uzlů je 3,8 cm a rychlost šíření vlny je 1 500 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Určete frekvenci zvukové vlny.

48C. Struna houslí dlouhá 15,0 cm a s pevnými konci kmitá na základní frekvenci (mezi jejími konci není žádný další uzel). Vlnění šířící se po struně má rychlost 250 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, rychlost zvuku ve vzduchu je 348 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jaká je (a) frekvence a (b) vlnová délka vzniklé zvukové vlny?

49C. Houslová struna kmitá v základním módu, přičemž vznikají zvukové vlny o vlnové délce λ. Kolikrát musíme zvýšit napětí ve struně, aby se při stejném způsobu kmitání vlnová délka zvuku zmenšila na polovinu?

50C. Varhanní píšťala A je na obou koncích otevřena a má základní frekvenci 300 Hz. Píšťala B je otevřena na jednom konci a její třetí harmonická frekvence je stejná jako druhá harmonická píšťaly A. Jaká je délka (a) píšťaly A a (b) píšťaly B?

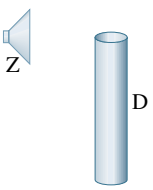
51C. Výšku vodní hladiny v 1,00 m dlouhé svislé skleněné trubici můžeme libovolně měnit. Těsně nad trubicí držíme ladičku vibrující s frekvencí 686 Hz. Při jaké výšce vodního sloupce nastane rezonance?

52C. (a) Určete rychlost vln pohybujících se po houslové struně hmotnosti 800 mg a délky 22,0 cm, jejíž základní frekvence je 920 Hz. (b) Jaké je ve struně napětí? Jaká je při základní frekvenci vlnová délka (c) vln pohybujících se po struně a (d) vznikajících zvukových vln?

53Ú. Vzdálenost pevných konců houslové struny je 30 cm. Struna má hmotnost 2,0 g. „Prázdná“ struna (tj. když na ní nemáme prst) vydává tón a^1 (440 Hz). (a) Kam musíme položit prst, abychom zahráli tón c^2 (523 Hz)? (b) Jaký je poměr vlnových délek struny kmitající s tóny a^1 a c^2? (c) Jaký je poměr vlnových délek zvukových vln tónu a^1 k tónu c^2?

54Ú. Délka violoncellové struny je L a její základní frekvence je f. (a) O jakou délku l musíme strunu zkrátit přitisknutím prstu, aby se její základní frekvence změnila na rf? (b) Vypočítejte l, jestliže $L = 0{,}80$ m a $r = 1{,}2$. (c) Když $r = 1{,}2$, jaký je poměr vlnových délek nové zvukové vlny a zvukové vlny vydávané před přitisknutím prstu?

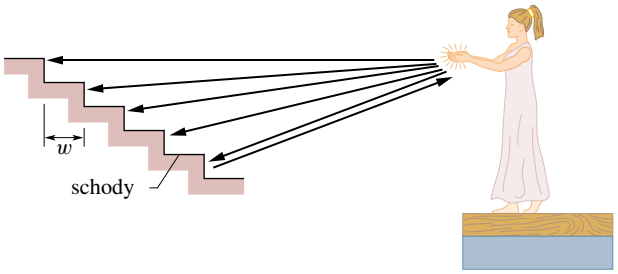
55Ú. Na obr. 18.36 je malý reproduktor Z napájený oscilátorem a zesilovačem. Vydává zvuk, jehož frekvenci můžeme měnit pouze v rozsahu od 1 000 Hz do 2 000 Hz. Trubice D je kus válcové kovové roury dlouhý 5,49 m a otevřený na obou koncích. (a) Jestliže se za určité teploty zvuk šíří ve vzduchu rychlostí 344,4 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, při jakých frekvencích nastane v trubici rezonance? (b) Načrtněte stojaté vlny (podle konvence z obr. 18.13(b)) při každé rezonanční frekvenci.



Obr. 18.36 Úloha 55

56Ú. Nejnižší rezonanční frekvence studny se svislými stěnami a vodou na dně je 7,00 Hz. Vzduch ve studni má hustotu 1,10 $\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a modul pružnosti $1{,}33{\cdot}10^5$ Pa. Jak je studna hluboká?

57Ú. Zvuk tlesknutí na jevišti starořeckého amfiteátru je přenášen zvukovými vlnami (obr. 18.37), které se posléze rozptylují na schodech šířky $w = 0{,}75$ m. Zvuk se pak vrací na jeviště jako řada pulzů, od každého schodu jeden. Přicházející pulzy spolu znějí jako jeden tón. (a) Za předpokladu, že všechny paprsky se šíří horizontálně, najděte frekvenci, se kterou se pulzy vracejí (tj. frekvenci tónu vnímaného na jevišti). (b) Kdyby byly schody užší, byla by výsledná frekvence vyšší, nebo nižší?



Obr. 18.37 Úloha 57

58Ú. Trubice dlouhá 1,20 m je na jednom konci uzavřena. K otevřenému konci umístíme natažený drát o délce 0,330 m a hmotnosti 9,60 g. Drát má oba konce pevné a kmitá v základním módu. Rezonancí se rozechvěje také vzduchový sloupec v trubici svou základní frekvencí. Určete (a) frekvenci kmitů vzduchu a (b) napětí drátu.

59Ú. Periodu pulzující hvězdy s proměnlivou velikostí lze odhadnout z představy, že hvězda kmitá *radiálně* podélně v základním módu stojatého vlnění. To znamená, že poloměr hvězdy se s časem periodicky mění, přičemž kmitna se nachází na jejím povrchu. (a) Bude střed hvězdy uzlem, nebo kmitnou? (b) Ukažte pomocí analogie s otevřenou píšťalou, že perioda pulzací T je dána vztahem

$$T = \frac{4R}{v},$$

kde R je poloměr hvězdy v rovnováze a v je průměrná rychlost zvuku. (c) Většina bílých trpaslíků je tvořena látkou s modulem pružnosti $1{,}33{\cdot}10^{22}$ Pa a s hustotou 10^{10} $\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Jejich poloměry jsou $9{,}0{\cdot}10^{-3}$ násobkem poloměru Slunce. Jaká je přibližná perioda kmitů bílého trpaslíka?

60Ú. Houslová struna dlouhá 30,0 cm s délkovou hustotou 0,650 $\mathrm{g{\cdot}m^{-1}}$ je umístěna před reproduktor, napojený na oscilátor měnitelné frekvence. Zjistíme, že když měníme frekvenci oscilátoru v rozsahu 500 Hz až 1 500 Hz, rozkmitá se struna jen při 880 Hz a 1 320 Hz. Jaké je napětí struny?

ODST. 18.7 Zázněje

61C. Když necháme ladičku neznámé frekvence znít současně se standardní ladičkou frekvence 384 Hz, uslyšíme tři zázněje za sekundu. Když na rameno zkoumané ladičky nalepíme kousek vosku, frekvence rázů klesne. Jaká je frekvence zkoumané ladičky?

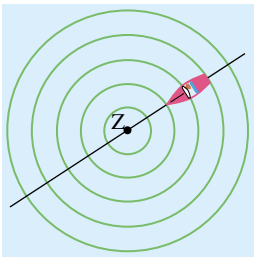
62C. Houslová struna A je trochu přetažená. Když ji necháme znít spolu s ladičkou, která vydává přesné komorní a ($a^1 = 440$ Hz), slyšíme čtyři zázněje za sekundu. Jaká je perioda kmitů struny?

63Ú. Dvě stejné struny klavíru mají při stejném napětí základní frekvenci 600 Hz. O jakou část se musí napětí jedné z nich zvýšit, aby při současném znění obou strun bylo slyšet 6 rázů za vteřinu?

64Ú. Máte k dispozici pět ladiček s různými frekvencemi. Určete (a) největší a (b) nejmenší počet rázových frekvencí, které můžete získat, když necháte znít vždy dvě z ladiček současně.

ODST. 18.8 Dopplerův jev

65C. Na jezeře se od zdroje Z šíří kruhové vlny, jejichž hřebeny jsou znázorněny na obr. 18.38. Rychlost šíření vln je 5,5 $m \cdot s^{-1}$ a vzdálenost hřebenů je 2,3 m. Vy se nacházíte v člunu plovoucím v přímém směru na zdroj Z konstantní rychlostí 3,3 $m \cdot s^{-1}$ vzhledem ke břehu jezera. Jakou frekvenci vln naměříte?



Obr. 18.38 Cvičení 65

66C. Na přímém úseku silnice pronásleduje policie lupiče. Obě auta jedou rychlostí 100 $mi \cdot h^{-1}$. Policii se nedaří lupiče dohonit a zapne znovu sirénu. Rychlost zvuku ve vzduchu je 1 100 $ft \cdot s^{-1}$ a frekvence sirény je 500 Hz. Jaký je v autě lupiče Dopplerův posuv sirény?

67C. Píšťalka na psy má frekvenci 30 kHz. Pes ji přesto ignoruje. Jeho majitelka se tedy chce pomocí Dopplerova jevu přesvědčit, že píšťalka funguje, ačkoli ona sama neslyší zvuky nad 20 kHz. Požádá proto svou přítelkyni, aby na píšťalku zapískala z jedoucího auta, zatímco ona bude stát u silnice a naslouchat. (a) Jakou rychlostí a v jakém směru musí auto jet, aby majitelka psa píšťalku uslyšela? (b) Výpočet zopakujte pro frekvenci píšťalky 22 kHz místo 30 kHz.

68C. Turbíny tryskového letadla bzučí s frekvencí 16 000 Hz. Letadlo letí rychlostí 200 $m \cdot s^{-1}$. Jakou frekvenci slyší pilot druhého letadla, který se snaží první letadlo předletět rychlostí 250 $m \cdot s^{-1}$?

69C. Sanitka, jejíž siréna zní s frekvencí 1 600 Hz, předjíždí cyklistu jedoucího rychlostí 2,5 $m \cdot s^{-1}$. Poté, co ho sanitka předjede, slyší cyklista frekvenci 1 590 Hz. Jakou rychlostí jede sanitka?

70C. V roce 1845 Buys Ballot poprvé ověřoval Dopplerův jev u zvuku. Na plošinu nákladního vagonu taženého lokomotivou umístil jednoho trubače a ke kolejím postavil druhého. Jak rychle se pohyboval vagon, jestliže oba muzikanti troubili tón s frekvencí 440 Hz a bylo slyšet 4 rázy za vteřinu?

71C. Rychlost světla ve vodě je asi tři čtvrtiny rychlosti světla ve vakuu. Svazek elektronů s vysokou rychlostí pocházejících z betatronu vyzařuje ve vodě **Čerenkovovo záření**; čelo vlny tvoří kužel s vrcholovým úhlem 60°. Určete rychlost elektronů ve vodě.

72C. Z pistole je vystřelen náboj rychlostí 2 200 $ft \cdot s^{-1}$. Určete úhel sevřený rázovou vlnou a trajektorií náboje.

73C. Dvě stejné ladičky oscilují s frekvencí 440 Hz. Někde na jejich spojnici se nachází posluchač. Vypočtěte, jakou naměří frekvenci, když (a) on je v klidu a obě ladičky se pohybují doprava rychlostí 30,0 $m \cdot s^{-1}$a (b) když jsou v klidu ladičky a posluchač se pohybuje doprava rychlostí 30,0 $m \cdot s^{-1}$.

74Ú. Píšťalka s frekvencí 540 Hz koná kruhový pohyb s poloměrem 0,61 m a s úhlovou rychlostí 15,0 $rad \cdot s^{-1}$. Jaké jsou (a) nejnižší a (b) nejvyšší frekvence, které slyší pozorovatel v dálce, jestliže je v klidu vzhledem ke středu kruhového pohybu?

75Ú. Letadlo letí 1,25krát rychleji než zvuk ve vzduchu. Rázová vlna dosáhne muže na zemi minutu poté, co mu letadlo přeletělo přesně nad hlavou. V jaké výšce letadlo letělo? Předpokládejte, že rychlost zvuku je 330 $m \cdot s^{-1}$.

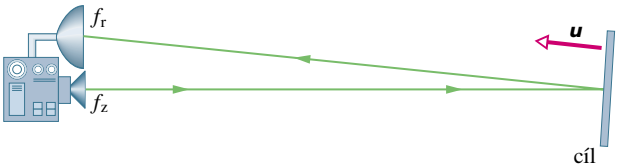
76Ú. Tryskové letadlo nad námi přeletí ve výšce 5 000 m rychlostí 1,5 M (machů). (a) Určete úhel Machova kuželu. (b) Za jak dlouho od přeletu nás dostihne rázová vlna? Za rychlost zvuku dosaďte 331 $m \cdot s^{-1}$.

77Ú. Na obr. 18.39 je nakreslen přístroj na vysílání a přijímání vln, který se používá k stanovení rychlosti u pohyblivého cíle (na obrázku je znázorněn symbolicky jako deska). Zařízení analyzuje vlny odražené od objektu, pohybujícího se přímým směrem k němu. (a) Dokažte, že frekvence f_r vln zachycených přístrojem závisí na frekvenci f_z vysílaných vln podle vztahu

$$f_r = f_z \left(\frac{v + u}{v - u} \right),$$

kde v je rychlost vln. (b) Ve velké většině případů je $u \ll v$. Dokažte, že v takové situaci lze předchozí vztah přepsat na

$$\frac{f_r - f_z}{f_z} \approx \frac{2u}{v}.$$



Obr. 18.39 Úloha 77

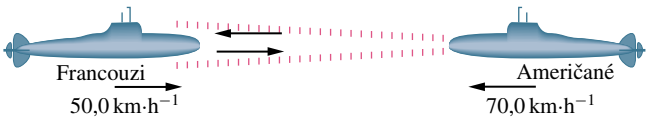
78Ú. Nehybný detektor pohybu vysílá zvukové vlny frekvence 0,150 MHz proti kamiónu přibližujícímu se rychlostí 45,0 $m \cdot s^{-1}$. Jaká je frekvence vln dopadajících zpátky na detektor?

79Ú. Siréna vydávající zvuk frekvence 1 000 Hz se pohybuje směrem od nás ke stěně skalního útesu rychlostí 10 $m \cdot s^{-1}$. Rychlost zvuku ve vzduchu je 330 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jaká je frekvence zvuku, který slyšíme přímo od sirény? (b) Jaká je frekvence zvuku odraženého od útesu? (c) Jaká je frekvence záznějů? Může lidské

ucho tyto zázněje rozeznat (jejich frekvence musí být nižší než 20 Hz)?

80Ú. Trubač na železničním vagonu zahraje na trubce tón o frekvenci 440 Hz. Vagon se s rychlostí 20,0 $m \cdot s^{-1}$ pohybuje směrem ke zdi. Vypočtěte (a) frekvenci zvuku vnímaného pozorovatelem stojícím u zdi a (b) frekvenci odraženého zvuku v místě jeho zdroje.

81Ú. Francouzská a americká ponorka plují přímo proti sebe (obr. 18.40) při manévrech v nehybných vodách severního Atlantiku. Francouzská pluje rychlostí 50,0 km/h, americká rychlostí 70,0 km/h. Francouzi vyšlou sonarový signál (zvuková vlna ve vodě) frekvence 1 000 Hz. Sonarové vlny se šíří rychlostí 5 470 km/h. (a) Jakou frekvenci signálu zachytí Američané? (b) Jakou frekvenci zachytí Francouzi v signálu odraženém zpátky od americké ponorky?



Obr. 18.40 Úloha 81

82Ú. Dle zahraničního zpravodajství se zdroj zvukových vln frekvence 1 200 Hz pohyboval doprava rychlostí 98,0 $ft \cdot s^{-1}$ vzhledem k okolí. Před ním se nacházela odrazová plocha (reflektor) pohybující se doleva rychlostí 216 $ft \cdot s^{-1}$ vzhledem k okolí. Jestliže rychlost zvuku ve vzduchu je 1 080 $ft \cdot s^{-1}$, vypočtěte (a) vlnovou délku zvuku vysílaného směrem k reflektoru, (b) počet vlnoploch dopadajících za sekundu na odrazovou plochu, (c) rychlost odražených vln, (d) vlnovou délku odražených vln a (e) počet odražených vlnoploch dopadajících zpátky na zdroj.

83Ú. Autoři článku o Dopplerově posuvu ultrazvukových vln, jehož se využívá v lékařské diagnostice, konstatují: „Když se v těle pohybuje nějaký orgán, pak každý milimetr za sekundu v jeho rychlosti způsobí relativní posuv frekvence ultrazvuku o $1{,}30 \cdot 10^{-4}$ % (tj. např. o 1,30 Hz při 1 MHz).“ Jaká z toho plyne rychlost ultrazvuku v živé tkáni?

84Ú. Poplašné zařízení obsahuje zdroj zvukových vln o frekvenci 28,0 kHz. Jaká bude frekvence záznějů vln odražených od zloděje jdoucího průměrnou rychlostí 0,950 $m \cdot s^{-1}$od alarmu?

85Ú. V jeskyni poletuje netopýr, orientující se pomocí ultrazvukových signálů. Předpokládejme, že frekvence vysílaného zvuku je 39 000 Hz. Při letu střemhlav na plochou stěnu letí netopýr 0,025násobkem rychlosti zvuku ve vzduchu. Jakou frekvenci zvuku odraženého od stěny zaznamená?

86Ú. Ponorka se pohybuje na sever těsně pod hladinou moře. Pluje rychlostí 75,0 km/h v mořském proudu směrujícím také na sever, jehož rychlost je 30,0 km/h. Obě rychlosti jsou udány vzhledem k mořskému dnu. Ponorka vyšle sonarový signál (zvukovou vlnu) frekvence $f = 1\,000$ Hz o rychlosti 5 470 km/h, který je zachycen válečnou lodí nacházející se severně od ponorky. Jaký je rozdíl vysílané a zachycené frekvence, jestliže je válečná loď (a) unášena proudem rychlostí 30,0 km/h a (b) v klidu vzhledem k mořskému dnu?

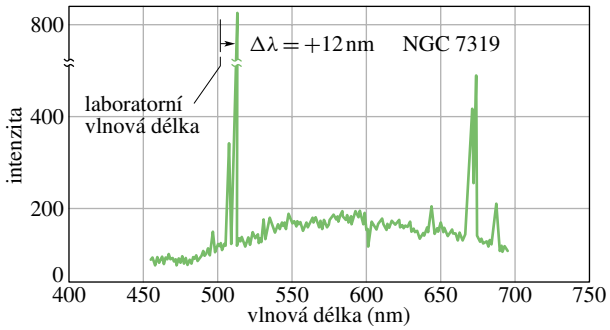
87Ú. Siréna s frekvencí 2 000 Hz je připevněna k budově, důstojník civilní obrany sedí poblíž. Jakou frekvenci uslyší důstojník, jestliže vítr fouká rychlostí 12 $m \cdot s^{-1}$ (a) od zdroje k pozorovateli a (b) od pozorovatele ke zdroji?

88Ú. Dva vlaky jedou směrem k sobě, každý jede rychlostí 30,5 $m \cdot s^{-1}$ vzhledem k Zemi. Jeden z nich zatroubí s frekvencí 500 Hz. (a) Jakou frekvenci bude slyšet ve druhém vlaku za bezvětří? (b) Jakou frekvenci bude slyšet ve druhém vlaku, jestliže vítr fouká rychlostí 30,5 $m \cdot s^{-1}$ od pozorovatele k houkačce? (c) Jaká bude tato frekvence při opačném směru větru?

89Ú. Ve vlaku, který se pohybuje rychlostí 10,00 $m \cdot s^{-1}$ směrem na východ, sedí při otevřeném okně děvče. Její strýc ji byl doprovodit na nádraží, takže teď stojí u kolejí a dívá se za odjíždějícím vlakem. Naráz lokomotiva zatroubí s frekvencí 500,0 Hz. Je bezvětří. (a) Jakou frekvenci slyší strýc? (b) Jakou děvče? Od východu se zvedne vítr s rychlostí 10,00 $m \cdot s^{-1}$. (c) Jakou frekvenci slyší teď strýc? (d) A děvče?

ODST. 18.9 Dopplerův jev u světla

90C. Obr. 18.41 je graf závislosti intenzity na vlnové délce světla, které k Zemi přichází z galaxie NGC 7 319, vzdálené od nás kolem $3 \cdot 10^8$ světelných roků. Nejjasnější čára ve spektru patří kyslíku. V laboratoři má kyslík spektrální čáru na vlnové délce $\lambda = 513$ nm, ale ve světle z NGC 7 319 je tato čára posunuta kvůli Dopplerově jevu (stejně jako všechny ostatní čáry). (a) Jak rychle se galaxie pohybuje vůči Zemi? (b) Pohybuje se směrem k nám nebo od nás?



Obr. 18.41 Cvičení 90

91C. Vlnové délky spektrálních čar jisté galaxie v souhvězdí Panny jsou o 0,4 % větší než ty, které naměříme ve světle z pozemských zdrojů. Jaká je radiální složka rychlosti této galaxie vzhledem k Zemi? Přibližuje se k nám, nebo se od nás vzdaluje?

92C. Ve spektru záření vzdálené galaxie je čára vlnové délky 434 nm. Tato hodnota je ovlivněna rudým posuvem, neboť v záření pozemského zdroje měla táž čára vlnovou délku 462 nm. (a) Jaká je rychlost galaxie (přesněji řečeno její průmět na spojnici se Zemí) vzhledem k zeměkouli? (b) Přibližuje se galaxie k Zemi, nebo se od ní vzdaluje?

93C. Za předpokladu, že platí rov. (18.57), vypočtěte, jak rychle byste museli procházet červeným světlem, aby se vám zdálo zelené. Vlnová délka červeného světla je 620 nm a zeleného 540 nm.

94Ú. Perioda otáčení Slunce na rovníku je 24,7 dne. Jeho poloměr je $7{,}00 \cdot 10^5$ km. Jaký bude Dopplerův posuv ve vlnové délce světla, které pochází z rovníku a jehož vlnová délka je 550 nm?

95Ú. Umělá družice Země, vysílající přesně na frekvenci 40 MHz, přeletí nad radiostanicí ve výšce 400 km rychlostí $3{,}0 \cdot 10^4$ km/h. Nakreslete změnu frekvence způsobenou Dopplerovým jevem jako funkci času, přičemž $t = 0$ bude okamžik, když je družice přesně nad stanicí. (*Tip*: Rychlost u ve vzorci pro Dopplerův jev není skutečnou rychlostí družice, nýbrž pouze její složkou ve směru k radiostanici. Zakřivení Země a dráhy družice zanedbejte.)

96Ú. Mikrovlny, šířící se rychlostí světla, jsou odráženy od letounu letícího k jejich zdroji. Když se odražené vlny složí s vysílanými, frekvence záznějů je 990 Hz. Jestliže vlnová délka mikrovln je 0,100 m, jakou rychlostí se přibližuje letoun?

19
Teplota a teplo



Na sluníčku se obvykle více zahřívá předmět s černým povrchem než se světlým. To platí i pro obleky beduínů v Sinaiské poušti: černé obleky se zahřívají více než bílé. Proč je ale tedy beduínové nosí? Nesnižuje to automaticky jejich šanci na přežití v drsném prostředí žhavé pouště?

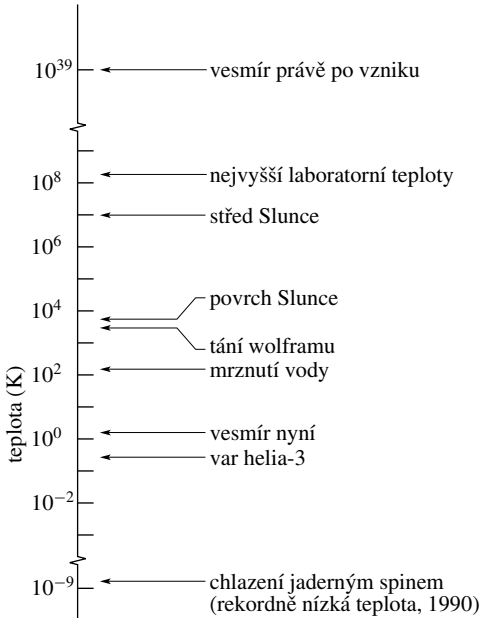
19.1 TERMODYNAMIKA

V této kapitole opustíme mechaniku a začneme se věnovat novému oboru — termodynamice. Mechanika se zabývá mechanickou energií systémů a řídí se Newtonovými zákony. Termodynamika se zabývá **vnitřní energií** systémů — „tepelnou energií“ — a řídí se novými zákony, se kterými se seznámíme v následujících třech kapitolách.

Centrálním pojmem termodynamiky je **teplota**. Toto slovo je nám důvěrně známé: od narození rozeznáme horké a studené, takže o přesnějším významu teploty zpravidla ani neuvažujeme. Ale náš „smysl pro teplotu“ není ve skutečnosti vždycky věrohodný. Tak například za studeného zimního dne se nám zdá železné zábradlí na dotyk mnohem studenější než dřevěné, třebaže mají obojí stejnou teplotu. Tento rozdíl v našem vnímání pochází z toho, že železo odebírá energii z našeho prstu rychleji než dřevo. V dalším zavedeme teplotu objektivně, aniž bychom se spoléhali na své subjektivní pocity.

Teplota je jednou ze sedmi základních veličin SI. Fyzikové ji měří v jednotkách zvaných **kelvin**. Ačkoliv teplota těles, jak se zdá, může být libovolně* vysoká, existuje jistá dolní hranice, zvaná **absolutní nula**; ta byla vzata jako nula v Kelvinově stupnici. Pokojová teplota je kolem 290 kelvinů, tedy 290 K. Obr. 19.1 ukazuje široké rozmezí, v němž mohou být stanoveny teploty.

Když Vesmír před nějakými 10 až 20 miliardami let vznikal, byla jeho teplota kolem 10^{39} K. Vesmír se rozpínal a tím chladnul; jeho současná průměrná teplota je kolem 3 K. Nám na Zemi je o něco tepleji, protože naštěstí žijeme poblíž hvězdy. Bez našeho Slunce bychom měli také jen teplotu 3 K (a nejspíš bychom ani neexistovali).

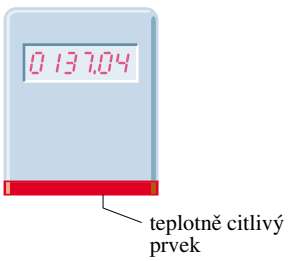


Obr. 19.1 Některé teploty na Kelvinově stupnici. Teplota $T = 0$ odpovídá $10^{-\infty}$ a v našem logaritmickém měřítku proto nemůže být vynesena.

19.2 NULTÝ ZÁKON TERMODYNAMIKY

Vlastnosti různých předmětů se mění, měníme-li jejich teplotu — třeba přenesením z chladničky do teplé pece. Např.: s rostoucí teplotou se objem kapalin zvětšuje, kovová tyčka se roztahuje, elektrický odpor drátu roste, stejně tak roste tlak plynu uzavřeného v nádobě. Kteroukoli z těchto vlastností můžeme použít jako základ přístroje, který nám pomůže zavést pojem teploty.

Obr. 19.2 ukazuje takový přístroj. Každý vynalézavý inženýr by ho mohl navrhnout a postavit na základě kterékoliv z výše uvedených vlastností. Přístroj je vybaven číslicovým displejem a má následující vlastnost: začnete-li ho zahřívat (třeba Bunsenovým kahanem), zobrazované číslo se začne zvětšovat; uložíte-li ho do mrazáku, číslo začne klesat. Přístroj není nijak kalibrován a jeho číselný údaj nemá (prozatím) žádný fyzikální význam. Zařízení bychom pojmenovali **termoskop**, tedy indikátor teploty, ale zatím nikoli **termometr**, tj. měřič teploty, **teploměr***.

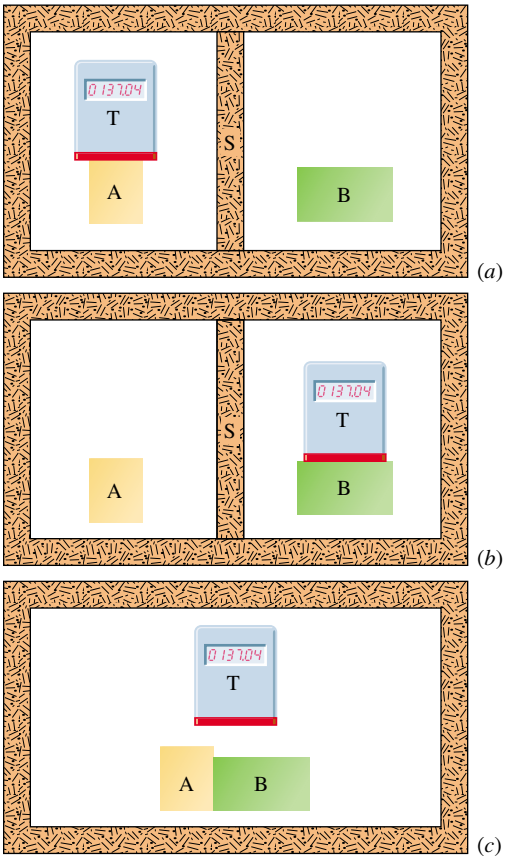


Obr. 19.2 Termoskop. Číselný údaj roste, když zařízení zahříváme, a klesá, když ho chladíme. Teplotně citlivým prvkem by mohla být např. cívečka drátu, jehož elektrický odpor měříme a zobrazujeme.

Předpokládejme, že podle obr. 19.3a dáme termoskop (budeme ho nazývat tělesem T) do těsného styku s jiným tělesem (těleso A). Celý systém je uzavřen v silnostěnné izolující krabici. Čísla na displeji se mění, až se ustálí na hodnotě „137,04“ a dále zůstávají stejná. Předpokládáme přitom, že po jisté době dosáhne každá měřitelná vlastnost těles T a A, tedy i teplota, jisté pevné, neproměnné hodnoty. Potom prohlásíme, že obě tělesa jsou navzájem

* Nepřiměřenou změnou teploty se může ovšem konkrétní těleso podstatně změnit, např. tato kniha zahřátím na 1 000 °C nebo meloun ochlazením na −50 °C.

* Místo „teploměr“ bychom měli správně říkat „teplotoměr“. Ale tuto historicky danou nedůslednost už asi nikdy nikdo nenapraví.



Obr. 19.3 (a) Těleso T (termoskop) a těleso A jsou v tepelné rovnováze. (Těleso S je teplotně izolující stěna.) (b) Těleso T a B jsou také v tepelné rovnováze s tímtéž údajem termoskopu. (c) Je-li pravda (a) i (b), pak nultý zákon termodynamiky tvrdí, že i tělesa A a B budou navzájem v tepelné rovnováze.

v **tepelné rovnováze**, tzn. mají tutéž teplotu. A třebaže číselný údaj tělesa T nebyl nijak kalibrován, použijeme ho k jednoznačnému očíslování: obě tělesa mají tutéž **teplotu** $T = 137{,}04$.

Předpokládejme, že poté uvedeme těleso T do kontaktu s tělesem B (obr. 19.3b) a zjistíme, že obě tělesa budou v tepelné rovnováze při tomtéž údaji termoskopu. Tělesa T a B tedy budou mít také tutéž teplotu. Budou také tělesa A a B navzájem v tepelné rovnováze, uvedeme-li je do kontaktu podle obr. 19.3c? Experiment potvrzuje, že tomu tak skutečně je.

Experimentální fakta z obr. 19.3 jsou shrnuta do **nultého zákona termodynamiky**:

> Je-li každé z těles A i B v tepelné rovnováze se třetím tělesem T, budou v tepelné rovnováze také tělesa A a B navzájem. K očíslování stavů tepelné rovnováhy stačí jediný spojitě proměnný parametr — teplota.

Pro úplnost bychom měli ještě dodat: „Každé těleso, které se samo nachází v tepelné rovnováze, má vlastnost zvanou **teplota**. Jsou-li dvě tělesa navzájem v tepelné rovnováze, mají stejné teploty. Také obráceně, mají-li tělesa stejnou teplotu*, budou po uvedení do kontaktu v tepelné rovnováze.“ Nyní můžeme náš termoskop (třetí těleso T) přejmenovat na teploměr a být si jisti, že jeho údaj má fyzikální smysl. Zbývá ho už jenom vhodně kalibrovat.

Nultý zákon používáme v laboratoři stále. Chceme-li zjistit, zda kapaliny ve dvou nádobách mají tutéž teplotu, změříme teploměrem teplotu každé z nich. Nemusíme je uvést do kontaktu a zkoumat, zda budou nebo nebudou navzájem v tepelné rovnováze.

Nultý zákon, který je vlastně dodatečnou logickou myšlenkou, byl formulován až ve třicátých letech tohoto století, tedy dávno po objevu a očíslování prvního a druhého zákona. Pojem teploty je však pro oba tyto zákony natolik klíčový, že bylo záhodno tento zákon, který činí pojem teploty smysluplným, očíslovat nižším číslem. Proto ho nazýváme nultým zákonem.

19.3 MĚŘENÍ TEPLOTY

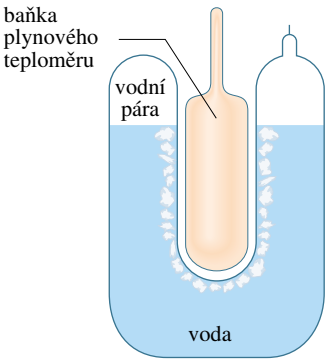
Podívejme se, jak definujeme a měříme teplotu v Kelvinově stupnici. Jinými slovy — podívejme se, jak kalibrovat náš termoskop, aby se stal teploměrem.

Trojný bod vody

Pro nastavení teplotní stupnice vybereme nějaký reprodukovatelný teplotní jev a přiřadíme — zcela libovolně — nějakou číselnou hodnotu jemu i jeho okolí, které je s ním v tepelné rovnováze. Vybereme tedy *standardní pevný bod* a přiřadíme mu jistou teplotu (**teplotu standardního bodu**). Dlouhou dobu byla užívána Celsiova stupnice stanovená tak, že teplotě tání ledu byla přiřazena hodnota 0 °C a teplotě varu vody 100 °C (obojí za obvyklého atmosférického tlaku). Při přesnějším přístupu k měření teplot je zvolena jediná teplota, daná **trojným bodem vody**.

Kapalná voda, pevný led a vodní pára (tj. plynná voda) mohou spolu být v tepelné rovnováze při jediné teplotě a tlaku. Obr. 19.4 ukazuje aparaturu, v níž může být trojný bod vody získán v laboratoři. Podle mezinárodní dohody trojnému bodu vody přiřazujeme hodnotu 273,16 K jakožto standardní teplotu pevného bodu pro kalibraci teploměrů. (Číselná hodnota 273,16 byla zvolena právě proto, aby se nově definovaný **kelvin** K co nejlépe shodoval s dosavadním Celsiovým stupněm C° ve smyslu setiny rozdílu teplot

* K úplnému popisu teploty stačí *jediné* číslo. To by nestačilo např. pro popis chuti nebo barvy.



Obr. 19.4 Buňka pro trojný bod vody, v níž jsou v tepelné rovnováze led, kapalná voda a vodní pára. Podle mezinárodní dohody je stanovena teplota této směsi jako 273,16 K. Baňka plynového teploměru je na obrázku vsunuta do dutiny buňky.

tání ledu a varu vody. Je tedy

$$T_3 = 273{,}16\,\mathrm{K} \quad \text{(teplota trojného bodu)}, \qquad (19.1)$$

kde index 3 nám připomíná, že jde o trojný bod. Tato dohoda také určuje velikost Kelvinova stupně jako 1/273,16 rozdílu mezi absolutní nulou a teplotou trojného bodu vody.

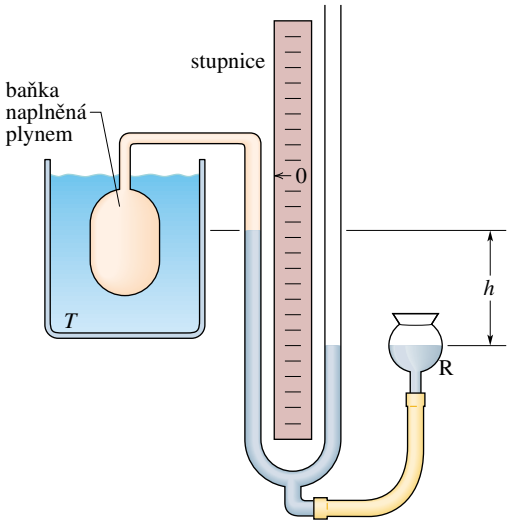
Všimněme si, že u Kelvinovy teploty neužíváme značky stupně. Je tedy 300 K (nikoli 300 °K) a čteme to „300 kelvinů“ a nikoli „300 stupňů Kelvina“. Můžeme též používat obvyklých předpon pro jednotky, takže 0,003 5 K je 3,5 mK. V nomenklatuře nečiníme rozdíl mezi Kelvinovou teplotou a teplotním rozdílem. Můžeme tedy psát „bod varu síry je 717,8 K“ a „teplota této vodní lázně stoupla o 8,5 K“.

Plynový teploměr s konstantním objemem

Až doposud jsme se podrobněji nezabývali konkrétní fyzikální vlastností závislou na teplotě, na níž bychom založili s mezinárodním souhlasem náš teploměr. Co máme zvolit — délku kovové tyčky, elektrický odpor drátu, tlak vykazovaný plynem v nádobě nebo něco jiného? Volba je podstatná, protože různé volby vedou při zvolené teplotě trojného bodu k různým teplotám jiných jevů, např. k různé teplotě varu vody. Z důvodů, které vyplynou dále, je standardní teploměr, vůči němuž by měly být všechny ostatní teploměry kalibrovány, založen na tlaku, který vykazuje plyn uzavřený v pevném objemu.

Obr. 19.5 ukazuje takový **plynový teploměr (s konstantním objemem)**. Sestává z plynem naplněné baňky vyrobené ze skla, taveného křemene nebo platiny (v závislosti na teplotním rozmezí, v němž hodláme teploměr používat). Ta je spojena hadičkou se rtuťovým manometrem. Zvedáním a snižováním zásobníku rtuti R můžeme udržovat hladinu rtuti v levé trubici ve stálé poloze, a tím zajistit, že objem uzavřeného plynu zůstává stejný. Teplotu libovolného tělesa v tepelném kontaktu s baňkou definujeme jako

$$T = Cp, \qquad (19.2)$$



Obr. 19.5 Plynový teploměr s konstantním objemem, jehož baňka je ponořena do lázně o teplotě T, která má být změřena.

kde p je tlak, kterým působí plyn, a C je konstanta. Tlak p spočítáme ze vztahu

$$p = p_0 - \varrho g h, \qquad (19.3)$$

kde p_0 je okolní atmosférický tlak, ϱ je hustota rtuti v manometru a h je změřený rozdíl výšek hladin rtuti v obou ramenech trubice.

Je-li baňka plynového teploměru vnořena do buňky pro trojný bod, tak jako na obr. 19.4, máme

$$T_3 = Cp_3, \qquad (19.4)$$

kde p_3 je tlak změřený v těchto podmínkách. Vyloučením C z rov. (19.2) a rov. (19.4) dostáváme

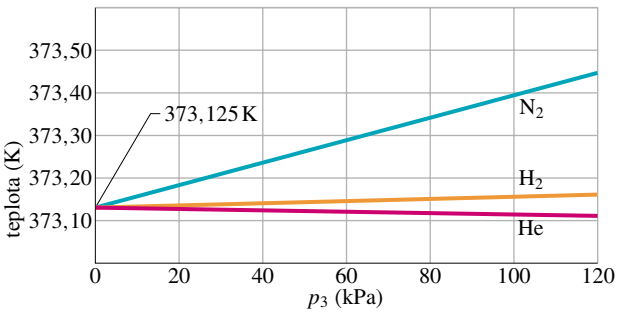
$$T = T_3 \left(\frac{p}{p_3}\right) = \\ = (273{,}16\,\mathrm{K}) \left(\frac{p}{p_3}\right) \quad \text{(prozatím)}. \qquad (19.5)$$

Rov. (19.5) ještě není naší konečnou definicí teploty měřené plynovým teploměrem. Neřekli jsme totiž nic o tom, jaký plyn (ani kolik plynu) se nachází v baňce teploměru. Kdybychom užili náš teploměr pro měření teploty varu vody, zjistili bychom, že různé plyny dávají poněkud různé hodnoty naměřené teploty. Jestliže bychom však používali menšího a menšího množství plynu v baňce (jeho množství měříme např. hmotností m), zjistili bychom, že by se výsledky dobře blížily jisté hodnotě, nezávisle na tom, jaký plyn jsme použili. Obr. 19.6 ukazuje tuto uspokojivou shodu.*

* Pro tlak použijeme jednotek zavedených v kap. 15.3. Jednotkou pro tlak v SI je newton na čtverečný metr, nazývaný pascal (Pa). Pascal souvisí s ostatními běžnými jednotkami tlaku vztahy 1 atm = = 101 325 Pa = 760 torr = 14,7 lb/in^2.

Můžeme tedy psát, jakožto konečný návod na měření teploty plynovým teploměrem,

$$T = (273{,}16\,\mathrm{K}) \left(\lim_{m \to 0} \frac{p}{p_3} \right). \qquad (19.6)$$



Obr. 19.6 Teploty vypočtené podle rov. (19.5) pro plynový teploměr s baňkou umístěnou ve vařící se vodě. V baňce byly použity různé plyny při různých hustotách (což dává různé hodnoty p_3.) Všimněte si, že pro tlak klesající k nule se všechny hodnoty blíží téže limitě: 373,125 K.

Podle toho budeme měřit neznámou teplotu následovně. Naplníme baňku teploměru libovolným množstvím *libovolného* plynu (například dusíku); jeho hmotnost budiž m. Změříme tlak p_3 (použitím buňky pro trojný bod) a tlak p odpovídající měřené teplotě. Vypočteme podíl p/p_3. Pak opakujeme obě měření s menším množstvím plynu a opět vypočteme tento podíl. V tomto postupu pokračujeme s menším a menším množstvím plynu v baňce, až budeme moci extrapolovat hodnotu p/p_3, kterou bychom dostali, kdyby už nebyl skoro žádný plyn v baňce. Vypočteme teplotu T dosazením této extrapolované hodnoty do rov. (19.6). (Teplota takto měřená se nazývá **ideální plynová teplota**.)

Má-li být teplota opravdu základní fyzikální veličinou, použitou v termodynamických zákonech, je žádoucí*, aby byla její definice nezávislá na nějakých konkrétních materiálových vlastnostech. Nebylo by vhodné např. mít veličinu tak základní, jako je teplota, závislou na roztažnosti rtuti, elektrickém odporu platiny nebo jiné takové vlastnosti. Vybereme zatím plynový teploměr jako náš standardní přístroj právě proto, že nezahrnuje žádné speciální materiálové vlastnosti při své činnosti. Použijeme-li *libovolný* plyn — dostaneme tentýž výsledek. Definitivní upřesnění provedeme v čl. 21.7.

* Je to vítané, není to však absolutně nutné. Vždyť i tak základní jednotka jako kilogram je dosud definována jako hmotnost konkrétního odlitku jisté konkrétní slitiny.

PŘÍKLAD 19.1

Baňka plynového teploměru je naplněna dusíkem o tlaku 120 kPa. Jakou prozatímní hodnotu (obr. 19.6) by udal teploměr pro bod varu vody a jaká je chyba této hodnoty?

ŘEŠENÍ: V obr. 19.6 ukazuje křivka pro dusík, že prozatímní bod varu vody by byl kolem 373,44 K. Skutečná teplota (nalezená extrapolací na obr. 19.6) je 373,125 K. Použití prozatímní teploty by vedlo k chybě 0,315 K neboli 315 mK.

19.4 CELSIOVA A FAHRENHEITOVA STUPNICE

Zatím jsme se zabývali jen Kelvinovou stupnicí, užívanou v základních vědeckých pracích. Ve většině zemí na světě se však teplota pro všeobecné, obchodní a často i pro vědecké účely měří v Celsiově stupnici. Teplotní údaj v Celsiově stupnici neboli Celsiova teplota se měří ve stupních a Celsiův stupeň je stejně velký jako kelvin. Celsiova stupnice má však počátek posunut k příhodnějším teplotám. Celsiova teplota je nyní definována vztahem

$$T_\mathrm{C} = T - 273{,}15\,\mathrm{C}^\circ. \qquad (19.7)$$

Při vyjadřování v Celsiově stupnici užíváme symbol stupně °. Navíc v této knize z praktických důvodů rozlišujeme polohu tohoto symbolu vůči písmenu. Týž symbol před písmenem C znamená *údaj*, např. 20,00 °C (stupně Celsia) neboli 293,15 K (kelviny). Tento symbol za písmenem C znamená *rozdíl údajů*, např. 3,00 C° neboli 3,00 K. Zapíšeme tedy např., že teplota přes den vzrostla o tři Celsiovy stupně 3 C° (= 3 K) na teplotu 23 °C (≙ 296 K).

Fahrenheitova stupnice používaná v USA užívá menší stupeň než Celsiova a jinou hodnotu nuly. Oba tyto rozdíly snadno zjistíte na pokojovém teploměru, který má obě stupnice. Převodní vztah mezi číselnými hodnotami těchto stupnic je

$$[T_\mathrm{F}] = \tfrac{9}{5}[T_\mathrm{C}] + 32, \qquad (19.8)$$

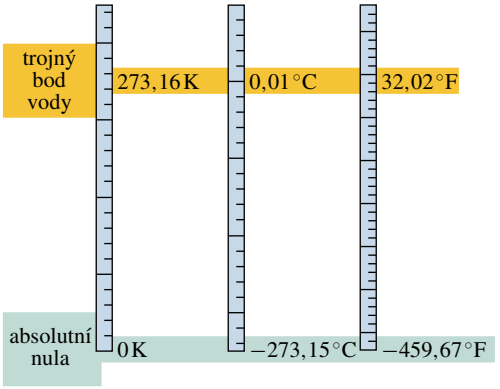
kde T_F je Fahrenheitova teplota. Převod mezi oběma stupnicemi snadno provedeme, známe-li několik odpovídajících si hodnot (jako třeba bod varu vody a bod mrazu, tj. mrznutí vody, viz tab. 19.1) a vzpomeneme-li si, že přírůstek 9 Fahrenheitových stupňů je 5 Celsiových stupňů. Obr. 19.7 porovnává Kelvinovu, Celsiovu a Fahrenheitovu stupnici.

Pro rozlišení obou stupnic užíváme písmena C a F. Tedy zápis

$$0\,^\circ\mathrm{C} = 32\,^\circ\mathrm{F}$$

znamená, že 0° na Celsiově stupnici udává tutéž teplotu jako 32° na Fahrenheitově stupnici, zatímco zápis

$$5\,\mathrm{C}^\circ = 9\,\mathrm{F}^\circ$$



Obr. 19.7 Srovnání stupnice Kelvinovy, Celsiovy a Fahrenheitovy

znamená, že teplotní rozdíl pěti Celsiových stupňů (všimněte si, že symbol stupně je *za* písmenem C, resp. F) je stejný jako teplotní rozdíl devíti Fahrenheitových stupňů.

Tabulka 19.1 **Některé význačné teploty ve °C a °F**

TEPLOTA	°C	°F
Teplota varu (vody)[a]	100	212
Tělesná teplota	37	98,6
Příjemně v pokoji	20	68
Teplota tuhnutí (vody)[a]	0	32
0 °F	≐ −18	0
Shoda stupnic	−40	−40

[a] Přesně měřeno, za tlaku 101 325 Pa je teplota varu vody v Celsiově stupnici 99,975 °C a její teplota tuhnutí 0,00 °C. Mezi těmito teplotami je tedy o něco méně než 100 C°.

PŘÍKLAD 19.2

Představte si, že listujete starými vědeckými spisy, kde se užívá teplotní stupnice Z. Voda vře při 65,0 °Z a tuhne při −14,0 °Z.

(a) Jaká změna teploty ΔT měřená touto stupnicí odpovídá změně o 53,0 F°?

ŘEŠENÍ: Abychom našli převodní faktor mezi oběma stupnicemi, použijeme teploty varu a tuhnutí vody. Na stupnici Z je rozdíl mezi nimi 65,0 °Z − (−14,0 °Z) = 79,0 Z°. Na Fahrenheitově stupnici totéž činí 212 °F − 32 °F = 180 F°. Změna o 79,0 Z° je tedy rovna změně o 180 F°. Změně o 53,0 F° tedy odpovídá

$$\Delta T = 53{,}0\,\mathrm{F^\circ} = 53{,}0\,\mathrm{F^\circ}\left(\frac{79{,}0\,\mathrm{Z^\circ}}{180\,\mathrm{F^\circ}}\right) = 23{,}3\,\mathrm{Z^\circ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaké teplotě Fahrenheita a Celsia odpovídá teplota $T = -98{,}0$ °Z?

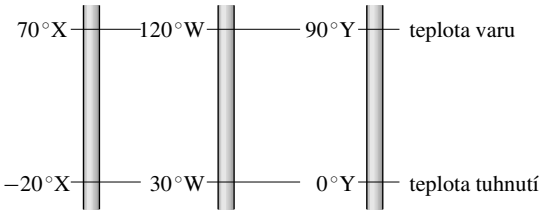
ŘEŠENÍ: Teplota tuhnutí vody je −14,0 °Z, takže rozdíl mezi ní a hledanou teplotou je 84,0 Z°. Tento rozdíl převedeme do obou stupnic:

$$\Delta T = 84{,}0\,\mathrm{Z^\circ}\left(\frac{180\,\mathrm{F^\circ}}{79{,}0\,\mathrm{Z^\circ}}\right) = 191\,\mathrm{F^\circ} = 84{,}0\,\mathrm{Z^\circ}\left(\frac{100\,\mathrm{C^\circ}}{79{,}0\,\mathrm{Z^\circ}}\right) = 106{,}3\,\mathrm{C^\circ}.$$

Teplota T je tedy 191 F° = 106,3 C° pod teplotou tuhnutí a platí

$$T = 32{,}0\,^\circ\mathrm{F} - 191\,\mathrm{F^\circ} = -159\,^\circ\mathrm{F} = 0\,^\circ\mathrm{C} - 106{,}3\,\mathrm{C^\circ} = -106{,}3\,^\circ\mathrm{C}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 1: Na obrázku jsou tři teploměrné stupnice s vyznačenými teplotami varu a tuhnutí. (a) Uspořádejte je sestupně podle velikosti stupně. (b) Uspořádejte sestupně teploty 50 °X, 50 °Y, 50 °Z.



RADY A NÁMĚTY

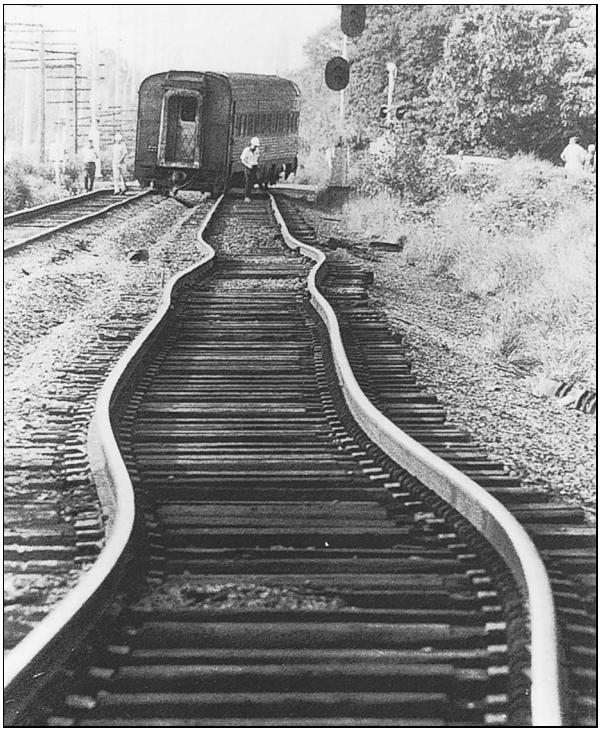
Bod 19.1: *Teplotní rozdíly*

Mezi teplotami varu a tuhnutí vody je (přibližně) 100 kelvinů neboli 100 Celsiových stupňů. Vidíme, že jakýkoliv teplotní rozdíl je v Celsiových stupních a v kelvinech vyjádřen stejným číslem (viz též rov. (19.7)). Například změna teploty o 10 K je totéž jako změna o 10 C°. Mezi varem a tuhnutím vody je 180 Fahrenheitových stupňů. Je tedy 180 F° = 100 C° a Fahrenheitův stupeň musí být 100 K/180 F°, tedy $\frac{5}{9}$ velikosti kelvina či Celsiova stupně. Odtud nebo z rov. (19.8) vidíme, že každý rozdíl teplot vyjádřený Fahrenheitovými stupni musí být $\frac{9}{5}$ z téhož rozdílu vyjádřeného v kelvinech nebo v Celsiových stupních. Např. změna teploty o 10 K je (9 F°/5 K)(10 K) neboli 18 F°.

Pozor, abychom nezaměnili *teplotu* (např. údaj v °C) a teplotní *změnu* (= teplotní *rozdíl*, údaj v C°). Teplota 10 K určitě není totéž co teplota 10 °C nebo 18 °F, ale — jak jsme viděli výše — teplotní *změna* o 10 K je totéž co změna o 10 C° nebo 18 F°.

19.5 TEPLOTNÍ ROZTAŽNOST

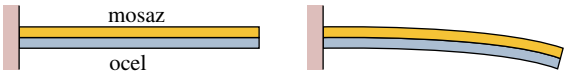
Často můžeme uvolnit kovové víčko na zavařovačce, když na víčko pustíme proud horké vody. Jak kovové víčko, tak skleněná zavařovačka se roztahují tím, že horká voda dodává energii jejich atomům. (S trochou energie navíc mohou atomy částečně překonat meziatomové síly, které je jako pružiny drží pohromadě, a tím se dostat ze své obvyklé polohy o něco dál od sebe.) Protože se však atomy kovu navzájem vzdálí více než atomy tvořící sklo, víčko se roztáhne více než sklenice a tím se uvolní.



Obr. 19.8 Železniční koleje v Asbury Park, New Jersey, zkroucené vlivem teplotní roztažnosti za velmi horkého červencového dne.

Tato **teplotní roztažnost** není vždy žádoucí, jak je zřejmé z obr. 19.8. Aby se zabránilo vybočení kolejí, umísťují se na mostech expanzní mezery pro kompenzaci roztažnosti za horkých dnů. V leteckém průmyslu se nýty a jiné podobné součásti často zchladí před zasunutím suchým ledem, aby se po rozmrznutí roztáhly a pevně držely.

Teploměry a termostaty bývají založeny na rozdílech v teplotní roztažnosti mezi dvěma kovy, tvořícími **bimetalový proužek** (obr. 19.9). Také běžný skleněný teploměr je založen na tom, že kapaliny (např. rtuť nebo alkohol) se roztahují podstatně více než sklo, z něhož je vyrobena baňka a kapilára teploměru.



Obr. 19.9 Bimetalový proužek (bimetal) je tvořen proužkem mosazi a oceli, svařenými k sobě. (a) Bimetal při referenční teplotě T_0. (b) Bimetal se ohýbá podle obrázku při teplotách vyšších než referenční. Při teplotách nižších se ohýbá na druhou stranu. Mnoho termostatů pracuje na tomto principu tak, že bimetal sepne, resp. rozepne elektrický kontakt (pece, žehličky), když teplota klesne, resp. vzroste.

Délková roztažnost

Jestliže teplota T kovové tyčky vzroste o ΔT, její délka d vzroste o hodnotu

$$\Delta d = d\alpha\Delta T, \tag{19.9}$$

kde α je na materiálu závislá konstanta zvaná **teplotní součinitel délkové roztažnosti**. Její jednotkou je K^{-1}, což je totéž jako $(\mathrm{C}^\circ)^{-1}$. Jednotku čteme „na kelvin“ neboli „na Celsiův stupeň“. Přepíšeme-li rov. (19.9) jako

$$\alpha = \frac{\Delta d/d}{\Delta T}, \tag{19.10}$$

vidíme, že α je poměrný (relativní) přírůstek délky při jednotkové změně teploty. Ačkoliv se α mírně mění s teplotou, lze ho pro většinu praktických účelů pro daný materiál brát jako konstantní. Tab. 19.2 udává hodnoty α pro některé látky.

Tabulka 19.2 **Součinitelé délkové roztažnosti látek**[a]

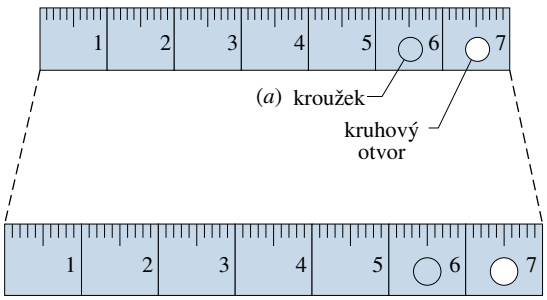
LÁTKA	α / $10^{-6}/\mathrm{C}^\circ$	LÁTKA	α / $10^{-6}/\mathrm{C}^\circ$
Led (při 0 °C)	51	Ocel	11
Olovo	29	Sklo (obyč.)	9
Hliník	23	Sklo (Pyrex)	3,2
Mosaz	19	Diamant	1,2
Měď	17	Invar[b]	0,7
Beton	12	Tavený křemen	0,5

[a] Kromě ledu jsou hodnoty udány pro pokojovou teplotu.
[b] Slitina invar byla navržena tak, aby měla co nejnižší součinitel roztažnosti. Slovo samo je zkratkou z lat. „invariabilis“ = angl. „invariable“ = neproměnný.

Teplotní roztažnost pevných látek je něco jako fotografické zvětšení ve všech třech rozměrech. Obr. 19.10b ukazuje (přehnaně*) roztažení ocelového pravítka při vzrůstu

* Zvětšení je zhruba tisíckrát větší, než by odpovídalo ohřátí o 100 C°.

teploty oproti stavu na obr. 19.10a. Rov. (19.9) se vztahuje na každý délkový element pravítka: na hrany, tloušťku, diagonálu, průřez vyrytého kroužku i průřez vyvrtané kruhové díry. Kdyby kroužek vyříznutý z pravítka padl těsně do otvoru při jedné teplotě, pak by stejně dobře padl i při libovolné jiné teplotě.



Obr. 19.10 Totéž ocelové pravítko při dvou teplotách. Při roztažení se mění ve stejném měřítku všechny jeho rozměry. Stupnice, čísla, tloušťka, průměr vyrytého kruhu i průměr kruhového otvoru se mění ve stejném poměru. (Pro názornost je roztažení značně přehnáno, viz pozn. pod čarou na str. 501.)

Objemová roztažnost

Vzrostou-li při zahřátí všechny rozměry tělesa, musí vzrůst i jeho objem. Pro tekutiny je objemová roztažnost jediný rozumný parametr k měření teplotní roztažnosti. Zvýší-li se teplota pevné látky nebo tekutiny objemu V o hodnotu ΔT, bude přírůstek objemu

$$\Delta V = V\beta\Delta T, \qquad (19.11)$$

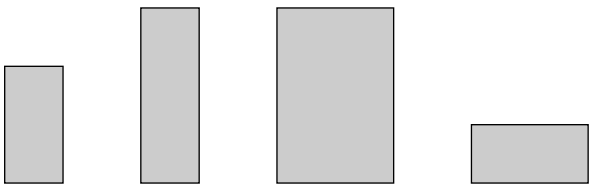
kde β je **teplotní součinitel objemové roztažnosti** materiálu. Součinitele objemové a délkové roztažnosti pevných látek jsou spojeny vztahem

$$\beta = 3\alpha. \qquad (19.12)$$

Nejběžnější kapalina — voda — se však chová jinak než ostatní kapaliny. Nad teplotou cca 4 °C se voda zahřátím roztahuje, jak bychom očekávali. Ale mezi 0 °C a 4 °C se voda s rostoucí teplotou *smršťuje*. Hustota vody prochází tedy kolem 4 °C maximem; při všech ostatních teplotách je její hustota nižší.

Toto chování vody je také důvodem, proč jezírka zamrzají shora dolů a nikoli zezdola nahoru. Když voda na hladině chladne řekněme z 10 °C k bodu mrazu, stává se hustší („těžší“) než voda níže a klesá proto ke dnu. Ale pod 4 °C se dalším ochlazováním voda na povrchu stává *řidší* (*lehčí*) než spodní vrstvy a zůstává tedy na povrchu až do zamrznutí. Kdyby voda jezírka zamrzala ode dna nahoru, pak by i v běžné zimě zamrzla úplně a nemohl by v ní přetrvávat život tak, jak ho známe. Dokonce by mohl u dna zůstávat led i přes léto.

KONTROLA 2: Obrázek ukazuje čtyři pravoúhlé kovové desky o hranách d, $2d$ a $3d$. Všechny jsou z téhož materiálu a jejich teploty se mají zvýšit o tutéž hodnotu. Uspořádejte sestupně desky podle očekávaného přírůstku (a) výšky, (b) plochy.



PŘÍKLAD 19.3

Ocelový drát o teplotě 830 °C má délku $a = 130$ cm a průměr $d = 1{,}1$ mm. Je upnut mezi dva pevné svěráky. Jaké mechanické napětí v drátu vznikne při ochlazení na 20 °C?

ŘEŠENÍ: Nejprve spočítáme, o kolik by se drát zkrátil, kdybychom ho ochladili neupnutý. Z rov. (19.9) a tab. 19.2 nalezneme, že zkrácení bude

$$\Delta a = a\alpha\Delta T = (1{,}3\,\mathrm{m})(11\cdot10^{-6}/\mathrm{C}^\circ)(830\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C}) = \\ = 1{,}16\cdot10^{-2}\,\mathrm{m} = 1{,}16\,\mathrm{cm}.$$

Ale drát je upnut a zkrátit se nemůže. Spočítáme proto, jaká síla by byla zapotřebí, aby drát o tuto délku protáhla. Z rov. (13.34) plyne

$$F = \frac{\Delta a E S}{a} = \frac{\Delta a E(\pi/4)d^2}{a},$$

kde E je Youngův modul pružnosti pro ocel (viz tab. 13.1) a S je velikost plochy průřezu drátu. Dosazením dostaneme

$$F = (1{,}16\cdot10^{-2}\,\mathrm{m})(200\cdot10^{9}\,\mathrm{N/m^2})(\pi/4)\cdot \\ \cdot\frac{(1{,}1\cdot10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{(1{,}3\,\mathrm{m})} = 1\,700\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Můžete dokázat, že výsledek nezávisí na délce drátu?

Někdy se vyboulené stěny starých budov zpevňují stažením ocelovou tyčí, vedoucí skrz budovu z vnější strany jedné zdi na vnější stranu protilehlé zdi; na obou stranách procházejí deskami, za kterými jsou matky. Opraváři tyč zahřejí a utáhnou matky na obou stranách. Když tyč chladne,

smršťuje se; protože je upnutá, vzniká v ní mechanické napětí, které pomáhá držet stěny proti dalšímu vyboulení.

PŘÍKLAD 19.4

Za horkého letního dne vyjíždí z Las Vegas tanker vezoucí 9 785 galonů nafty. Během cesty se ochladí a do přístavu v Paysonu vjíždí za teploty o 41 F° nižší než v Las Vegas. Tam vylodí celý náklad; kolik galonů to vlastně je? Součinitel objemové roztažnosti nafty je $9{,}5\cdot10^{-4}/\,\mathrm{C}^\circ$, součinitel délkové roztažnosti oceli, z níž jsou zhotoveny nádrže, je $11\cdot10^{-6}/\,\mathrm{C}^\circ$.

ŘEŠENÍ: Z rov. (19.11) plyne

$$\Delta V = V\beta\Delta T = \\ = (9\,785\ \mathrm{gal})(9{,}5\cdot10^{-4}/\,\mathrm{C}^\circ)(-41\ \mathrm{F}^\circ)\left(\frac{5\ \mathrm{C}^\circ}{9\ \mathrm{F}^\circ}\right) = \\ = -212\ \mathrm{gal}.$$

Dodané množství nafty je tedy

$$V_{\mathrm{dod}} = V + \Delta V = 9\,785\ \mathrm{gal} - 212\ \mathrm{gal} = \\ = 9\,573\ \mathrm{gal} \doteq 9\,600\ \mathrm{gal}.$$

Všimněte si, že teplotní roztažnost ocelové nádrže nemá vliv* na výsledek.

Otázka: Kdo zaplatí „chybějící“ množství?

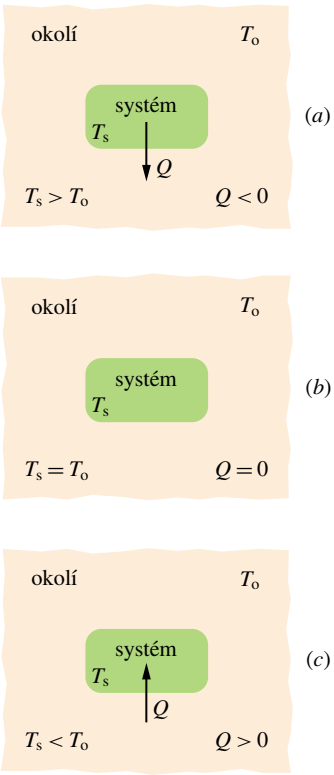
19.6 TEPLOTA A TEPLO

Vezmete-li si láhev piva z chladničky a necháte-li ji na stole, její teplota poroste — nejdřív rychle, potom volněji — až se vyrovná s teplotou místnosti (láhev i místnost budou v tepelné rovnováze). Podobně bude chladnout horký šálek kávy, zapomenutý na stole, až se jeho teplota vyrovná s teplotou místnosti.

Zobecníme tuto situaci: pivo nebo kávu označíme jako **systém** (s teplotou T_s) a příslušnou část kuchyně jako **okolí** (s teplotou T_o) tohoto systému. Zjistili jsme, že pokud T_s není rovno T_o, pak se T_s mění (i T_o se při tom může měnit) tak dlouho, dokud se teploty nevyrovnají; pak bude dosaženo tepelné rovnováhy.

Taková změna teploty je způsobena speciálním přenosem energie mezi systémem a jeho okolím. Mění se přitom **vnitřní energie**, což je souhrn potenciální a kinetické energie spojené s *náhodným* pohybem atomů, molekul a jiných mikroskopických částí zkoumaného předmětu. Přenos nastává zpravidla tím, že systém a jeho okolí mají různé teploty. Energie takto přenesená se nazývá **teplo** a značí se Q. Teplo bereme jako *kladné*, je-li dodáno do systému z okolí (někdy říkáme, že bylo teplo systémem pohlceno). Teplo je *záporné*, jestliže přešlo ze systému do jeho okolí (říkáme, že bylo teplo uvolněno, předáno, příp. vyzářeno). Nechceme-li určit směr přenosu energie, mluvíme o teplu vyměněném s okolím.

Tento přenos energie je znázorněn na obr. 19.11. V situaci na obr. 19.11a, když je $T_s > T_o$, přechází teplo ze systému do okolí; platí tedy $Q < 0$. Na obr. 19.11b je $T_s = T_o$ a teplo se nepřenáší*. Platí $Q = 0$ a teplo se ani neuvolňuje, ani nepohlcuje. Na obr. 19.11c je $T_s < T_o$. Teplo přechází z okolí do systému, takže $Q > 0$.



Obr. 19.11 Je-li teplota systému vyšší než teplota okolí, jako v případě (a), předává systém teplo do okolí (tj. „ztrácí teplo“) tak dlouho, až je dosaženo tepelné rovnováhy, tj. rovnosti teplot (b). Je-li teplota systému nižší než teplota okolí (jako v případě (c)), předává okolí teplo do systému (tj. systém pohlcuje teplo z okolí) tak dlouho, až je dosaženo rovnováhy.

* To je ovšem jen proto, že se nafta smršťí více než tank. Kdyby se tank smrštil více (nebo realističtěji, kdybychom tankovali v mrazu a vykládali v horku), nadbytečné množství nafty by z nádrže vyteklo ven.

* Ve zcela zvláštních případech se může přenášet teplo i zde. Fázový přechod, např. tání ledu, probíhá za téže teploty obou fází, a přitom se v principu vratně přenáší teplo z okolí do tajícího ledu.

To nás vede k následující definici tepla:

Teplo je energie vyměněná mezi systémem a okolím jako důsledek teplotního rozdílu mezi nimi.

Připomeňme, že energii mezi systémem a okolím lze vyměňovat také prostřednictvím práce; to spojujeme s působením síly během přemístění v systému. Na rozdíl od teploty, tlaku a objemu *nejsou* teplo a práce vlastnostmi systému. Mají smysl jen tehdy, pokud popisují děj — výměnu energie mezi systémem a jeho okolím. Má tedy smysl např. prohlásit „Během posledních tří minut bylo přeneseno 15 J tepla z okolí do systému“ anebo „V poslední minutě jsme dodali systému 12 J práce“. Nemá však smysl prohlásit „V systému je 450 J tepla“ nebo „Systém obsahuje 385 J práce.“ Proto také odlišujeme **dějové veličiny** (jako je teplo či práce), mající smysl jen při popisu konkrétního děje probíhajícího v systému, od **stavových veličin** (jako je vnitřní energie, teplota, tlak atd.), které mají smysl při popisu konkrétního stavu systému.

Než si vědci uvědomili, že teplo je přenesená energie, měřili ho pomocí vzrůstu teploty vody. Jedna **kalorie** byla definována jako množství tepla, které zvýší teplotu 1 g vody ze 14,5 °C na 15,5 °C. V britském systému je odpovídající jednotkou **British thermal unit** (**Btu**), definovaná jako množství tepla, které zvýší teplotu 1 lb vody z 63 °F na 64 °F.

Protože teplo je (stejně jako práce) přenesená energie, rozhodlo se v roce 1948, že jednotka tepla v SI bude táž jako jednotka energie, tedy **joule**. Kalorie je nyní definována jako 4,186 0 J přesně, bez dalšího odkazu na vlastnosti vody. Mezi různými jednotkami tepla platí vztah

$$1\,\text{cal} = 3{,}969{\cdot}10^{-3}\,\text{Btu} = 4{,}186\,\text{J}. \qquad (19.13)$$

19.7 ZAHŘÍVÁNÍ PEVNÝCH LÁTEK A KAPALIN

Tepelná kapacita

Tepelná kapacita C nějakého předmětu (např. šálku na kávu nebo mramorové desky stolu) je konstanta úměrnosti mezi množstvím tepla dodaného předmětu a tím způsobenou změnou jeho teploty. Platí tedy

$$Q = C(T_\text{f} - T_\text{i}), \qquad (19.14)$$

kde T_i a T_f jsou počáteční a koncová teplota předmětu. Jednotkou tepelné kapacity C je energie na kelvin (neboli energie na stupeň Celsia). Tepelná kapacita C takové mramorové desky může být 1 790 cal/ C°, což můžeme psát také jako 1 790 cal/K nebo 7 470 J/K.

Slovo „kapacita“ v tomto kontextu poněkud zavádí, protože podsouvá analogii s kapacitou nádrže na vodu. *Tato analogie je zavádějící.* Předmět především „neobsahuje“ žádné teplo (obsahuje energii, ale pojem teplo je spojen s dějem, s jistým *způsobem přenosu* energie). Dále, na rozdíl od nádrže není předmět omezen v přijímání tepla. Přenos tepla může probíhat bez omezení, pokud dokážeme vytvořit příslušný rozdíl teplot. (V praxi se ovšem konkrétní předmět může během dodávání tepla roztavit, vypařit nebo jinak změnit.) Prostě: tepelná kapacita neurčuje „kolik tepla se vejde do tělesa“, ale kolik tepla zvětší jeho teplotu o jednotku.

Měrná tepelná kapacita

Dva předměty z téhož materiálu, dejme tomu z mramoru, budou mít tepelné kapacity úměrné svým hmotnostem. Je proto výhodné zavést „tepelnou kapacitu na jednotku hmotnosti“ neboli **měrnou tepelnou kapacitu** c (dříve nazývanou měrné neboli specifické teplo). Nevztahuje se už ke konkrétnímu *předmětu*, ale k jeho *materiálu*. Rov. (19.14) pak získá tvar

$$Q = cm(T_\text{f} - T_\text{i}). \qquad (19.15)$$

Pokusem zjistíme, že zatímco tepelná kapacita výše zmíněné mramorové desky je 7 470 J/K, měrná tepelná kapacita mramoru jakožto materiálu (ať už oné desky nebo čehokoliv jiného) je 880 J/(kg·K).

Ze způsobu, jak byly původně definovány kalorie a Btu, plyne měrná tepelná kapacita vody

$$c = 1\,\text{cal/(g·C°)} = 1\,\text{Btu/(lb·F°)} = \\ = 4\,190\,\text{J/(kg·K)}. \qquad (19.16)$$

Tab. 19.3 udává měrné tepelné kapacity některých látek za pokojové teploty. Všimněme si poměrně vysoké hodnoty pro vodu. Měrné tepelné kapacity látek závisejí poněkud na teplotě; hodnoty z tab. 19.3 můžete s rozumnou přesností používat okolo pokojové teploty.

KONTROLA 3: Jisté množství tepla Q ohřeje 1 g materiálu A o 3 C° a 1 g materiálu B o 4 C°. Který z materiálů má větší měrnou tepelnou kapacitu?

Molární tepelná kapacita

Nejvhodnější jednotkou k vyjádření množství látky je v mnoha případech *mol* (symbol mol):

$$1\,\text{mol} = 6{,}02{\cdot}10^{23}\ \text{elementárních jednotek}$$

Tabulka 19.3 **Měrné a molární tepelné kapacity látek za pokojové teploty**

LÁTKA	c / cal·g^{-1}·K^{-1}	c / J·kg^{-1}·K^{-1}	c_{mol} / J·mol^{-1}·K^{-1}
Pevné prvky			
Olovo	0,030 5	128	26,5
Wolfram	0,032 1	134	24,8
Stříbro	0,056 4	236	25,5
Měď	0,092 3	386	24,5
Hliník	0,215	900	24,4
Jiné pevné látky			
Mosaz	0,092	380	
Žula	0,19	790	
Sklo	0,20	840	
Led (−10 °C)	0,530	2 220	
Kapaliny			
Rtuť	0,033	140	
Líh (ethanol)	0,58	2 430	
Mořská voda	0,93	3 900	
Voda	1,00	4 190	

zkoumané látky. Např. 1 mol hliníku je $6{,}02{\cdot}10^{23}$ atomů (za elementární jednotku kovu bereme atom), 1 mol oxidu hlinitého je $6{,}02{\cdot}10^{23}$ molekul Al_2O_3 (za elementární jednotku sloučeniny bereme její molekulu). Elementární jednotka musí být jednoznačně zadána, viz např. bod 20.1.

Je-li látkové množství vyjádřeno v molech, je tepelná kapacita vztažena na 1 mol (a ne na hmotnost 1 kg). V tom případě ji nazýváme **molární tepelná kapacita** (dříve **molární teplo**). Tab. 19.3 udává příslušné hodnoty za pokojové teploty pro některé prvky sestávající z jednotlivých atomů.

Všimněte si, že molární tepelné kapacity všech prvků uvedených v tab. 19.3 mají za pokojové teploty zhruba touž hodnotu, totiž 25 J/(mol·K). Toto zjištění nazýváme **Dulongův-Petitův zákon**. Molární tepelná kapacita *všech* pevných látek se s rostoucí teplotou blíží této hodnotě, ale některé látky jako berylium nebo uhlík jí dosahují až za podstatně vyšších teplot. Jiné látky mohou tát nebo se vypařit, dříve než potřebné teploty dosáhnou.

Porovnáváme-li dvě látky na molekulové úrovni, srovnáváme vzorky obsahující stejný počet elementárních jednotek. Skutečnost, že za dostatečně vysokých teplot mají všechny pevné látky zhruba tutéž molární tepelnou kapacitu, naznačuje, že atomy všech druhů — ať je to hliník, měď, uran nebo cokoliv jiného — přijímají teplo stejným způsobem.

Důležité upozornění

Při stanovení a používání hodnot měrné tepelné kapacity látek je nutné vědět, za jakých okolností bylo teplo vyměňováno. U pevných látek a kapalin jde zpravidla o přenos tepla za stálého *tlaku* (obvykle atmosférického). Lze si však představit i přenos tepla za udržování stálého *objemu*; tepelná roztažnost vzorku ovšem musí být kompenzována nějakým dodatečným tlakem. Toto lze pro pevné látky a kapaliny při skutečném pokusu zajistit jen obtížně; výpočtem však lze výsledné hodnoty celkem snadno odvodit z jiných veličin a ukazuje se, že pro každou pevnou látku či kapalinu se obě veličiny shodují s rozdílem nanejvýš několika procent. Jak však uvidíme, pro *plyny* má měrná tepelná kapacita za stálého tlaku zcela jinou hodnotu než za stálého objemu.

Skupenské teplo

Dodáme-li pevné látce nebo kapalině teplo, teplota látky obvykle roste, ale nemusí tomu tak být vždy. Namísto růstu teploty může látka změnit své **skupenství** (tj. pevné, kapalné nebo plynné) nebo obecněji svou **fázi** i při zachování téhož skupenství (síra krystalující v soustavě kosočtverečné na jednoklonnou při tomtéž — pevném — skupenství). Tak například led může tát a pohlcovat teplo, aniž se mění jeho teplota. Voda se vaří a pohlcuje teplo, aniž roste její teplota. Při obráceném ději (mrznutí vody či kondenzaci páry) naopak teplo ze systému odchází, aniž se mění teplota systému.

Množství tepla, které musí být vyměněno pro změnu skupenství celého množství látky, se nazývá **skupenské teplo** Q; teplo vztažené na jednotku hmotnosti, resp. na jeden mol se nazývá **měrné**, resp. **molární skupenské teplo** a značí se L, resp. L_{mol}. Jestliže tedy hmotnost m látky změní své skupenství, je příslušné přenesené množství tepla rovno

$$Q = Lm. \tag{19.17}$$

Jde-li o fázovou změnu z kapaliny na plyn (kapalině je nutno dodat teplo), mluvíme o **skupenském teplu vypařování** L_{v}, resp. o **skupenském teplu varu** (tj. vypařování při teplotě varu kapaliny). Pokud naopak dochází ke kapalnění plynu (plynu je nutno teplo odebrat), jedná se o **skupenské teplo kondenzace**, které je rovno skupenskému teplu vypařování. Pro vodu při 100 °C činí

$$L_{\text{v}} = 539\,\text{cal/g} = 2\,256\,\text{kJ/kg},$$
$$L_{\text{v,mol}} = 40{,}7\,\text{kJ/mol}. \tag{19.18}$$

Jde-li o fázovou změnu z pevné látky na kapalinu (pevné látce je nutno dodat teplo), mluvíme o **skupenském teplu**

tání L_t. Pro vodu činí za normálních podmínek (0 °C, atmosférický tlak)

$$L_t = 79{,}5\,\text{cal/g} = 333\,\text{kJ/kg},$$
$$L_{t,\text{mol}} = 6{,}01\,\text{kJ/mol}. \qquad (19.19)$$

Skupenské teplo tuhnutí charakterizuje naopak fázovou změnu kapaliny na pevnou látku; má touž hodnotu jako skupenské teplo tání. Tab. 19.4 udává skupenská tepla některých látek. Jde-li o fázový přechod beze změny skupenství (např. různé krystalické modifikace látky), pak místo skupenského tepla mluvíme ve všech výše uvedených případech o **teplu latentním**.

PŘÍKLAD 19.5

Karamelová tyčinka má uvedenu nutriční hodnotu 350 kcal. Kolik kilowatthodin vám dodá, když ji sníte?

ŘEŠENÍ: Energie E je rovna

$$\begin{aligned} E &= (350{\cdot}10^3\,\text{cal})(4{,}19\,\text{J/cal}) = \\ &= (1{,}466{\cdot}10^6\,\text{J})(1\,\text{W{\cdot}s/J})\cdot \\ &\quad \cdot (1\,\text{h}/3\,600\,\text{s})(1\,\text{kW}/1\,000\,\text{W}) = \\ &= 0{,}407\,\text{kW{\cdot}h}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

Tato energie by stačila k tomu, aby 100 W žárovka svítila po dobu 4,1 h. Chcete-li takovou energii „vyběhat“, běžte nějakých pět až šest kilometrů.

Slušná denní dávka energie je pro člověka kolem 3,5 kW·h. Je to také maximální práce, kterou je člověk schopen v jednom dni vykonat. Toto množství energie z elektrické sítě stojí u nás při sazbě N (0,91 Kč/kW·h, nepočítáme-li měsíční paušál) necelé 4 Kč.

PŘÍKLAD 19.6

(a) Kolik tepla potřebujeme dodat kusu ledu o hmotnosti $m = 720\,\text{g}$ a o teplotě $-10\,°\text{C}$, abychom dostali vodu teploty 15 °C?

ŘEŠENÍ: K odpovědi vedou tři kroky. V prvním kroku zahřejeme led z $-10\,°\text{C}$ na teplotu tání 0 °C. Použijeme rov. (19.15) s měrnou tepelnou kapacitou ledu podle tab. 19.3. Počáteční teplota je zde $T_i = -10\,°\text{C}$, koncová $T_f = 0\,°\text{C}$. Tak najdeme

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{\text{led}} m(T_f - T_i) = \\ &= (2\,220\,\text{J/(kg{\cdot}K)})(0{,}720\,\text{kg})(0\,°\text{C} - (-10\,°\text{C})) = \\ &= 15\,984\,\text{J} \doteq 15{,}98\,\text{kJ}. \end{aligned}$$

Ve druhém kroku roztavíme všechen led o teplotě 0 °C na vodu téže teploty. Použijeme rov. (19.17) a (19.19) a dostaneme

$$Q_2 = L_t m = (333\,\text{kJ/kg})(0{,}720\,\text{kg}) \doteq 239{,}8\,\text{kJ}.$$

Ve třetím kroku zahřejeme vodu z 0 °C na 15 °C. Opět použijeme rov. (19.15), ale tentokrát s měrnou tepelnou kapacitou c_{kap} kapalné vody podle tab. 19.3. V tomto kroku je počáteční teplota $T_i = 0\,°\text{C}$ a koncová teplota $T_f = 15\,°\text{C}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} Q_3 &= c_{\text{kap}} m(T_f - T_i) = \\ &= (4\,190\,\text{J/(kg{\cdot}K)})(0{,}720\,\text{kg})(15\,°\text{C} - 0\,°\text{C}) = \\ &= 45\,252\,\text{J} \doteq 45{,}25\,\text{kJ}. \end{aligned}$$

Celkové potřebné teplo Q_Σ je součtem dílčích tepel, potřebných pro jednotlivé kroky:

$$\begin{aligned} Q_\Sigma &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = \\ &= 15{,}98\,\text{kJ} + 239{,}8\,\text{kJ} + 45{,}25\,\text{kJ} \doteq \\ &\doteq 300\,\text{kJ}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

Všimněte si, že teplo potřebné k roztání ledu je mnohem větší, než teplo potřebné ke zvýšení teploty, ať už ledu nebo vody.

(b) Jaký bude výsledný stav a teplota, dodáme-li ledu celkové teplo jen 210 kJ?

Tabulka 19.4 **Měrná skupenská tepla**

Látka	Tání		Var	
	T / K	L_t / kJ·kg^{-1}	T / K	L_v / kJ·kg^{-1}
Vodík	14,0	58,0	20,3	455
Kyslík	54,8	13,9	90,2	213
Rtuť	234	11,4	630	296
Voda	273	333	373	2 256
Olovo	601	23,2	2 017	858
Stříbro	1 235	105	2 323	2 336
Měď	1 356	207	2 868	4 730

ŘEŠENÍ: Z prvního kroku víme, že je potřeba 15,98 kJ pro zahřátí ledu na teplotu tání. Zbývající teplo Q_{zb} je tedy 210 kJ − 15,98 kJ neboli něco kolem 194 kJ. Z druhého kroku vidíme, že toto teplo nestačí k roztání všeho ledu. Z rov. (19.17) a (19.19) však můžeme najít hmotnost m ledu, který roztaje:

$$m = \frac{Q_{zb}}{L_t} = \frac{(194\,\text{kJ})}{(333\,\text{kJ/kg})} = 0{,}583\,\text{kg} \doteq 580\,\text{g}.$$

Hmotnost neroztálého ledu je tedy 720 g − 580 g = 140 g. Protože neroztál veškerý led, musí být teplota směsi led + + voda rovna 0 °C. Výsledný stav tedy je

580 g vody a 140 g ledu při 0 °C. (Odpověď)

PŘÍKLAD 19.7

Měděný váleček o hmotnosti $m_m = 75\,\text{g}$ byl v laboratorní pícce zahřát na teplotu $T = 312\,^\circ\text{C}$. Poté byl vhozen do kádinky obsahující $m_v = 220\,\text{g}$ vody. Tepelná kapacita kádinky je $C_k = 45\,\text{cal/K}$. Počáteční teplota kádinky s vodou byla $T_i = 12\,^\circ\text{C}$. Jaká bude koncová teplota T_f válečku, vody a kádinky po dosažení tepelné rovnováhy?

ŘEŠENÍ: Náš systém budou tvořit *voda, kádinka a měděný váleček*. Systém nevymění s okolím žádné teplo, takže algebraický součet celkového přesunu tepla uvnitř systému musí být roven nule. Jde o tři přesuny:

$$\begin{aligned} \text{pro vodu:} \quad & Q_v = m_v c_v (T_f - T_i); \\ \text{pro kádinku:} \quad & Q_k = C_k (T_f - T_i); \\ \text{pro měď:} \quad & Q_m = m_m c_m (T_f - T). \end{aligned}$$

Teplotní rozdíl je ve všech výrazech zapsán jako rozdíl koncové teploty (T_f) a počáteční teploty (T_i pro vodu a kádinku, T pro váleček). Značíme to takto, i když víme, že Q_v a Q_k budou kladná (protože teplo přejde do původně chladné vody a kádinky), zatímco Q_m bude záporné (protože teplo odejde z původně horkého měděného válečku). Takto můžeme totiž napsat

$$Q_v + Q_k + Q_m = 0. \qquad (19.20)$$

Po dosazení za výrazy pro přenos tepla z rov. (19.20) dostaneme

$$m_v c_v (T_f - T_i) + C_k (T_f - T_i) + \\ + m_m c_m (T_f - T) = 0. \qquad (19.21)$$

V rov. (19.21) se vyskytují teploty pouze v rozdílech. Protože rozdíly teplot ve stupních Celsia a v kelvinech jsou stejné, můžeme užít v rovnicích kterékoliv z jednotek. Rov. (19.21) můžeme vyřešit pro T_f a dostaneme

$$T_f = \frac{m_m c_m T + C_k T_i + m_v c_v T_i}{m_m c_m + C_k + m_v c_v}.$$

Čitatel je při použití Celsiovy stupnice roven

$$(75\,\text{g})(0{,}092\,\text{cal/(g·K)})(312\,^\circ\text{C}) + (45\,\text{cal/K})(12\,^\circ\text{C}) + \\ + (220\,\text{g})(1{,}00\,\text{cal/(g·K)})(12\,^\circ\text{C}) = \\ = 5\,332{,}8\,\text{cal}$$

a jmenovatel je

$$(220\,\text{g})(1{,}00\,\text{cal/(g·K)}) + 45\,\text{cal/K} + \\ + (75\,\text{g})(0{,}092\,\text{cal/(g·K)}) = \\ = 271{,}9\,\text{cal/C°}.$$

Odtud získáme

$$T_f = \frac{(5\,332{,}8\,\text{cal})}{(271{,}9\,\text{cal/C°})} = 19{,}6\,^\circ\text{C} \doteq 20\,^\circ\text{C}. \quad \text{(Odpověď)}$$

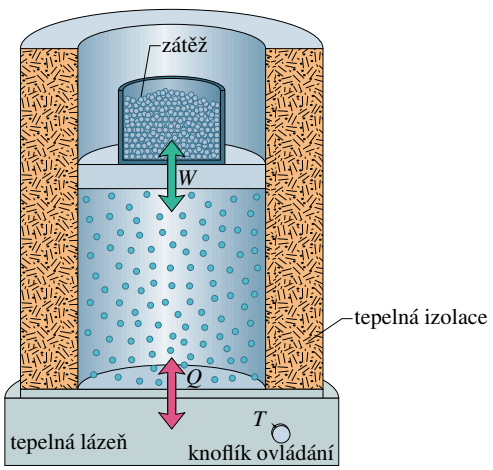
Z uvedených hodnot můžeme najít

$$Q_v \doteq 1\,670\,\text{cal}, \quad Q_k \doteq 342\,\text{cal}, \quad Q_m \doteq -2\,020\,\text{cal}.$$

Algebraický součet těchto tří přenesených tepel je až na zaokrouhlovací chyby opravdu roven nule, v souladu s požadavkem rov. (19.20).

19.8 PODROBNĚJŠÍ POHLED NA TEPLO A PRÁCI

Nyní se podíváme podrobněji, jak se přenáší teplo a práce mezi systémem a jeho okolím. Uvažujme jako systém plyn ve válci s pohyblivým pístem podle obr. 19.12. Síla působící na píst zdola nahoru, způsobená tlakem plynu, je v rovno-



Obr. 19.12 Plyn je uzavřen ve válci s pohyblivým pístem. Teplo Q může být vyměněno s okolím (tj. dodáno nebo odebráno) ovládáním teploty T tepelné lázně knoflíkem ovládání. Práci W lze konat nebo dodávat zvedáním nebo snižováním pístu.

váze s tíhovou silou, způsobenou váhou pístu a zátěže — misky s olověnými broky. Stěny z válce jsou z izolačního materiálu a zabrání jakékoli výměně tepla s okolím. Dno válce spočívá na rezervoáru tepelné energie, **tepelné lázni** (třebas na horké plotně), jehož teplotu T můžeme řídit knoflíkem.

Systém, tj. plyn, vychází z *počátečního stavu* $\mathscr{S}_\mathrm{i}$, popsaného tlakem p_i, objemem V_i a teplotou T_i. Systém chceme převést do *koncového stavu* $\mathscr{S}_\mathrm{f}$, popsaného tlakem p_f, objemem V_f a teplotou T_f. Děj popisující tento přechod nazýváme **termodynamický děj**, příp. **termodynamický proces**. Během tohoto děje dochází k výměně tepla: teplo může přecházet z lázně do systému (kladné teplo), anebo naopak ze systému do lázně (záporné teplo). Systém také může konat práci: může zvedat píst (kladná práce) anebo píst klesá (záporná práce). Budeme předpokládat, že všechny změny probíhají natolik zvolna, že systém je v každém okamžiku prakticky v tepelné rovnováze (tj., že každá část systému je v tepelné rovnováze s ostatními částmi).

Uberme nyní nepatrně zátěže z pístu na obr. 19.12. Tím umožníme plynu nadzdvihnout silou $\boldsymbol{F}$ píst se zbývající zátěží o infinitezimální posunutí $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ proti shora působící síle. Vzhledem k tomu, že posunutí je malé, můžeme předpokládat, že během něho zůstává síla $\boldsymbol{F}$ stejná. Její velikost je $F = pS$, kde p je tlak plynu a S plocha pístu. Diferenciál práce $\mathrm{d}W$ vykonané plynem během posunutí je

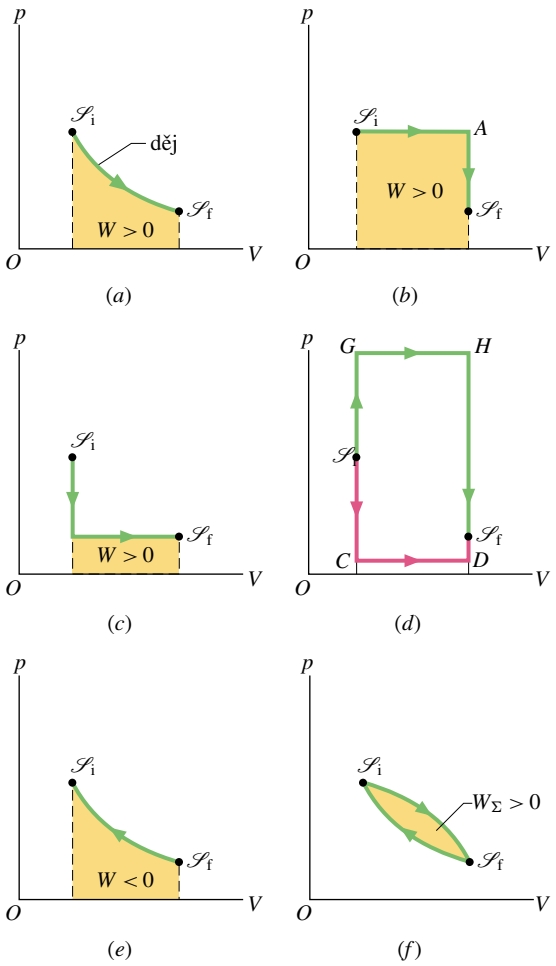
$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = (pS)(\mathrm{d}s) = p(S\,\mathrm{d}s) = \\ = p\,\mathrm{d}V, \qquad (19.22)$$

kde $\mathrm{d}V$ je infinitezimální změna objemu plynu daná posuvem pístu. Ubereme-li zátěže natolik, aby se plyn roztáhl z objemu V_i na V_f, bude celková práce vykonaná plynem rovna

$$W = \int_{\mathscr{S}_\mathrm{i}}^{\mathscr{S}_\mathrm{f}} \mathrm{d}W = \int_{V_\mathrm{i}}^{V_\mathrm{f}} p\,\mathrm{d}V. \qquad (19.23)$$

Během změny objemu plynu se může měnit také tlak a teplota. Chceme-li tedy vypočítat integrál v rov. (19.23), musíme vědět, jak se mění tlak plynu v závislosti na jeho objemu pro konkrétní děj, vedoucí od počátečního stavu $\mathscr{S}_\mathrm{i}$ do stavu koncového $\mathscr{S}_\mathrm{f}$.

Je mnoho možných způsobů, jak přejít od počátečního do koncového stavu. Několik z nich je zobrazeno na obr. 19.13 formou tzv. p-V **diagramu,** kde je vynesena závislost tlaku p plynu na jeho objemu V. Jeden způsob je na obr. 19.13a. Křivka ukazuje, že během zvětšování objemu plynu jeho tlak klesá. Integrál z obr. 19.13a, který určuje práci W vykonanou plynem, je dán vybarvenou plochou pod křivkou mezi body $\mathscr{S}_\mathrm{i}$ a $\mathscr{S}_\mathrm{f}$. Bez ohledu na to, jak



Obr. 19.13 (a) Systém na obr. 19.12 přechází z *počátečního stavu* $\mathscr{S}_\mathrm{i}$ do *koncového stavu* $\mathscr{S}_\mathrm{f}$ prostřednictvím *termodynamického děje*. Plocha označená W představuje práci *vykonanou systémem* během tohoto děje. Je kladná, protože během děje se zvětšuje objem. (b) Jiný děj pro přechod mezi týmiž stavy; práce je nyní větší než v (a). (c) Další děj, konající menší (kladnou) práci. (d) Práce může být libovolně malá (cesta $\mathscr{S}_\mathrm{i}$–C–D–$\mathscr{S}_\mathrm{f}$) nebo velká ($\mathscr{S}_\mathrm{i}$–G–H–$\mathscr{S}_\mathrm{f}$). (e) Zmenšíme-li objem (nějakou vnější silou), bude práce *vykonaná systémem* záporná. (f) Úhrnná práce vykonaná systémem během (uzavřeného) cyklického děje je vyjádřena uzavřenou plochou. Je to rozdíl mezi plochami pod oběma křivkami tvořícími cyklus.

jsme zajistili přechod plynu právě podél uvedené křivky, můžeme si být jisti, že vykonaná práce bude kladná, protože plyn bude zvětšovat svůj objem tím, že bude tlačit píst vzhůru.

Jiný způsob, jak se dostat ze stavu $\mathscr{S}_\mathrm{i}$ do $\mathscr{S}_\mathrm{f}$, je na obr. 19.13b; tady provedeme změnu ve dvou krocích — nejprve ze stavu $\mathscr{S}_\mathrm{i}$ do A, poté ze stavu A do $\mathscr{S}_\mathrm{f}$.

Krok $\mathscr{S}_\mathrm{i}$–A provedeme za konstantního tlaku; to znamená, že ponecháme všechny broky, které zatěžují píst na

obr. 19.12. Plyn donutíme ke zvětšení objemu z V_i do V_f tím, že pootočíme regulační knoflík a zvýšíme tím teplotu na nějakou vyšší hodnotu T_A. Během tohoto děje koná rozpínající se plyn kladnou práci (tím, že zvedá zatížený píst) a teplo přechází z tepelné lázně do systému (jako důsledek libovolně malého rozdílu teplot, který způsobíme zvýšením teploty lázně). Toto teplo je kladné, protože přechází do systému.

Krok A–$\mathscr{S}_f$ děje z obr. 19.13b probíhá za stálého objemu; musíme tedy píst upevnit, aby se nepohnul. Poté snížíme knoflíkem teplotu natolik, aby tlak klesl z p_A na p_f. Během tohoto procesu ztrácí systém teplo, které přejde do lázně.

Práce W vykonaná při celém ději $\mathscr{S}_i$–A–$\mathscr{S}_f$ je kladná a je konána pouze během kroku $\mathscr{S}_i$–A; je znázorněna vybarvenou plochou pod křivkou. Přenos tepla probíhá v obou krocích $\mathscr{S}_i$–A, A–$\mathscr{S}_f$, celkové přenesené teplo je Q.

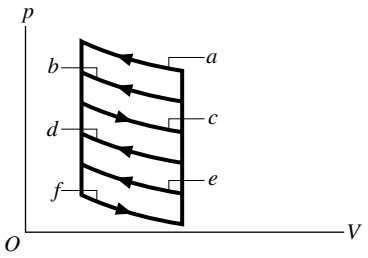
Obr. 19.13c představuje děj, při kterém probíhají oba dříve zmíněné kroky v obráceném pořadí. Práce W je nyní menší než na obr. 19.13b a rovněž je menší pohlcené teplo. Obr. 19.13d naznačuje, že práci vykonanou plynem lze učinit, jakou si přejeme — libovolně malou (podle cesty typu $\mathscr{S}_i$–C–D–$\mathscr{S}_f$) nebo libovolně velkou ($\mathscr{S}_i$–G–H–$\mathscr{S}_f$).

Závěr: z počátečního stavu do koncového můžeme přejít nekonečně mnoha ději. Můžeme, ale nemusíme vyměňovat teplo a pro různé děje budou přenesená tepla Q i vykonané práce W různé. Říkáme, že teplo i práce jsou **dějové veličiny**, tedy veličiny závislé na tom, jakou cestou probíhá konkrétní děj. (Všechny ostatní fyzikální veličiny, které jsme poznali, jako energie, poloha, rychlost, jsou stavové, tedy veličiny závislé jen na okamžitém stavu soustavy.)

Obr. 19.13e ukazuje příklad, kdy systém koná zápornou práci: vnější síla stlačuje plyn a zmenšuje jeho objem, jak ukazuje šipka. Absolutní hodnota práce je i nyní rovna vybarvené ploše pod křivkou, ale protože je plyn *stlačován*, práce jím konaná je záporná.

Obr. 19.13f ukazuje **cyklický děj**, v němž systém přechází ze stavu $\mathscr{S}_i$ do stavu $\mathscr{S}_f$ a poté zpátky do $\mathscr{S}_i$. Úhrnná práce vykonaná systémem během cyklu je algebraickým součtem kladné práce vykonané během rozepnutí plynu a záporné práce během jeho stlačení. Na obr. 19.13f je celková práce W_Σ kladná, protože plocha pod křivkou zobrazující rozepnutí (od $\mathscr{S}_i$ do $\mathscr{S}_f$) je větší než plocha pod křivkou zobrazující stlačení (od $\mathscr{S}_f$ do $\mathscr{S}_i$).

KONTROLA 4: p-V diagram ukazuje šest křivek (spojených svislicemi), zobrazujících děje, které může konat plyn. Které dvojice z nich by mohly být částí cyklického děje, v němž by práce vykonaná plynem byla maximální kladná?



19.9 PRVNÍ ZÁKON TERMODYNAMIKY

Zjistili jsme, že při přechodu ze zadaného počátečního stavu $\mathscr{S}_i$ do zadaného koncového stavu $\mathscr{S}_f$ závisí jak vykonaná práce W, tak i vyměněné teplo Q na povaze procesu. Při pokusech však zjistíme překvapující věc. *Rozdíl $Q - W$ zůstává týž pro všechny děje.* Tento rozdíl závisí výhradně na počátečním a koncovém stavu a vůbec nezávisí na tom, jak se systém mezi nimi vyvíjí. Všechny ostatní kombinace Q a W včetně samotného W, samotného Q, $Q + W$, $Q - 2W$ apod. jsou *dějové veličiny* — jenom veličina $Q - W$ nikoliv.

Veličina $Q - W$ musí tedy představovat změnu nějaké vnitřní vlastnosti systému. Tuto vlastnost nazýváme **vnitřní energie** U a píšeme

$$\Delta U = U_f - U_i = Q - W \quad \text{(1. zákon)}. \tag{19.24}$$

Rov. (19.24) vyjadřuje **první zákon termodynamiky**. Probíhá-li v systému jen infinitezimální* změna, můžeme psát první zákon ve tvaru

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q - \mathrm{d}W \quad \text{(1. zákon)}. \tag{19.25}$$

Vnitřní energie U systému vzroste, dodá-li mu okolí teplo Q a klesne, vykoná-li systém práci W.

V kap. 8 jsme diskutovali princip zachování energie v izolovaném systému, tj. v systému, který nevyměňuje žádnou energii s okolím: nevydává ji, ani nepřijímá. První zákon termodynamiky rozšiřuje tento princip na systémy, které *nejsou* izolované. V takových případech může energie přecházet *do* systému nebo vycházet *z něj*

* Na rozdíl od $\mathrm{d}U$ veličiny $\mathrm{d}Q$ a $\mathrm{d}W$ nejsou úplné diferenciály. To znamená, že neexistují žádné stavové funkce typu $Q(p, V)$ a $W(p, V)$, závisející jen na okamžitém stavu (p, V) systému. Veličina $\mathrm{d}Q$, resp. $\mathrm{d}W$ se nazývá **neúplný diferenciál**. Zpravidla se značí đQ, đW anebo $\delta Q, \delta W$. My je zde odlišovat nebudeme. Pro naše účely stačí, budeme-li s nimi zacházet jako s infinitezimálním přenosem energie.

jako práce W anebo teplo Q. V naší formulaci prvního zákona termodynamiky předpokládáme, že se nemění kinetická ani potenciální energie systému jako celku, že tedy $\Delta E_k = \Delta E_p = 0$.

V předchozích kapitolách termín *práce* a symbol W znamenaly vždy práci *dodanou systému* (v souladu s většinou novější literatury). Ale počínaje rov. (19.22) a v průběhu dalších dvou kapitol o termodynamice se soustředíme na práci *konanou systémem*, takovým, jako je plyn na obr. 19.12.

Práce *vykonaná systémem* má vždy opačné znaménko než práce *dodaná systému*. Přepíšeme-li tedy rov. (19.24) pro práci W_{dod} dodanou systému, dostaneme $\Delta U = Q + W_{dod}$. Tím je řečeno, že vnitřní energie systému roste, pokud systém pohlcuje teplo nebo se dodává kladná práce systému. Obráceně, vnitřní energie klesá, ztrácí-li systém teplo nebo je-li systému dodávána záporná práce (tj. koná-li systém práci).

19.10 ZVLÁŠTNÍ PŘÍPADY PRVNÍHO ZÁKONA TERMODYNAMIKY

V tomto článku se zaměříme na čtyři různé termodynamické děje, v nichž je vždy systém podroben nějakým omezením. Přitom uvidíme důsledky, plynoucí z použití prvního zákona termodynamiky na tyto děje.

1. ***Adiabatický děj.*** Adiabatický děj je takový, při němž se *nevyměňuje žádné teplo* mezi systémem a okolím. Bývá to proto, že je systém velmi dobře izolován, nebo že děj probíhá tak rychle, že výměna nestačí proběhnout. Dosazením $Q = 0$ do prvního zákona (rov. (19.24)) získáme

$$\Delta U = -W \quad \text{(adiabatický děj)}. \tag{19.26}$$

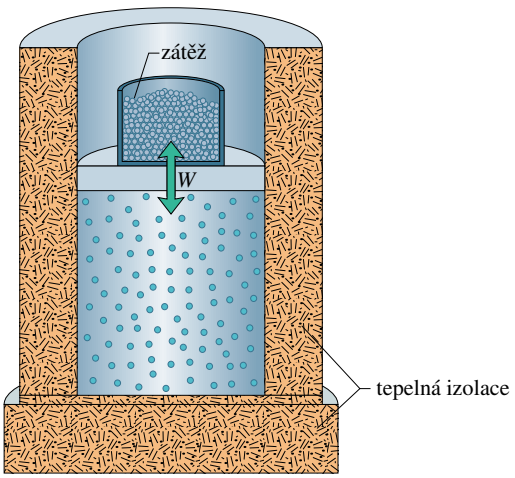
To znamená, že pokud systém *koná práci* (tj. je-li $W > 0$), pak jeho vnitřní energie poklesne o množství vykonané práce.

Obr. 19.14 ukazuje idealizovaný adiabatický děj. Teplo nemůže ani ze systému, ani do něj díky tepelné izolaci. Jediný způsob přenosu energie mezi systémem a okolím je tedy pomocí práce. Zmenšíme-li zátěž pístu a necháme-li plyn roztáhnout, je práce konaná systémem (plynem) kladná a vnitřní energie plynu klesá. Jestliže naopak přidáme zátěže a stlačíme tím plyn, je práce vykonaná systémem záporná a vnitřní energie plynu vzroste.

2. ***Izochorický děj.*** Při tomto ději se nemění objem systému (plynu), takže systém nekoná práci. Dosazením $W = 0$ do prvního zákona (rov. (19.24)) dostaneme

$$\Delta U = Q \quad \text{(izochorický děj)}. \tag{19.27}$$

Dodáváme-li do systému teplo ($Q > 0$), roste jeho vnitřní energie. Obráceně, jestliže odebíráme teplo ze systému ($Q < 0$), vnitřní energie systému klesá.



Obr. 19.14 Adiabatické rozepnutí provedeme pozvolným ubíráním zátěže z pístu. Naopak přidáváním zátěže můžeme proces kdykoli obrátit.

3. ***Cyklický děj.*** Při tomto ději se systém po případné výměně tepla a práce nakonec vrátí do výchozího stavu. V takovém případě se žádná vnitřní vlastnost systému — tedy ani jeho vnitřní energie — nemůže po proběhnutí cyklu změnit. Dosazením $\Delta U = 0$ do prvního zákona (rov. (19.24)) dostaneme

$$Q = W \quad \text{(cyklický děj)}. \tag{19.28}$$

Celková práce vykonaná během děje je tedy přesně rovna celkovému dodanému teplu; vnitřní energie systému zůstává nezměněna. Cyklický děj se na p-V diagramu zobrazí uzavřenou smyčkou (např. obr. 19.13f). Tento děj budeme podrobně probírat v kap. 21.

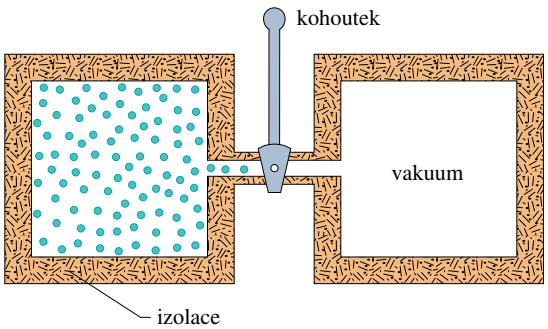
4. ***Volná expanze.**** V tomto adiabatickém ději nekoná systém žádnou práci, ani mu není žádná práce dodána. Je tedy $Q = W = 0$ a z prvního zákona plyne

$$\Delta U = 0 \quad \text{(volná expanze)}. \tag{19.29}$$

Obr. 19.15 ukazuje, jak lze takovou **expanzi** (neboli rozepnutí) provést. Plyn, který je v tepelné rovnováze, je původně uzavřen kohoutkem v jedné polovině tepelně izolované dvojité nádoby; ze druhé poloviny je vyčerpán vzduch.

* Tento děj se někdy nazývá „**expanze do vakua**“, což není nejšťastnější název. Vakuum totiž v ději není podstatné (a stejně prvním douškem plynu přestává vlastně být vakuem). Podstatné je, že se nepředává do okolí ani práce, ani teplo.

Poté otevřeme kohoutek a plyn volně přechází, až vyplní obě poloviny nádoby. Díky izolaci nevymění systém s okolím žádné teplo. Rovněž se nevykoná žádná práce; není zde žádný píst, který by předával do okolí práci. Ideální plyn (jehož vnitřní energie závisí jen na teplotě) tedy při volné expanzi *nezmění svou teplotu*: $\Delta T_{id} = 0$, neboli $T_i = T_f$.



Obr. 19.15 Počáteční stav před volnou expanzí. Po otevření kohoutku plyn postupně vyplní obě nádoby a přejde do rovnovážného stavu.

Volná expanze se liší od všech dosud probraných dějů tím, že nemůže být provedena vratně. Systém je v libovolném okamžiku expanze v nerovnováze, jeho tlak v různých místech je různý. Ačkoli tedy můžeme vynést do p-V diagramu počáteční a koncový stav, nemůžeme v něm vystihnout průběh děje.

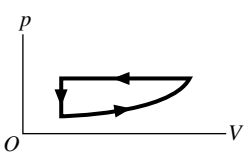
Tab. 19.5 podává přehled právě probraných dějů.

Tabulka 19.5 **První zákon termodynamiky pro čtyři speciální děje**

Zákon: $\Delta U = Q - W$ (rov. (19.24)).

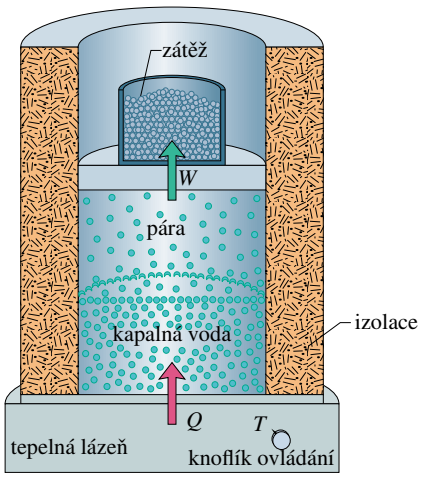
DĚJ	CHARAKTERISTIKA	DŮSLEDEK
Adiabatický děj	$Q = 0$	$\Delta U = -W$
Izochorický děj	$\Delta V = 0$	$W = 0, \Delta U = Q$
Cyklický děj	$\mathscr{S}_i = \mathscr{S}_f$	$\Delta U = 0, Q = W$
Volná expanze	$Q = W = 0$	$\Delta U = 0$

KONTROLA 5: Uvažujme jeden úplný cyklus děje znázorněného níže na p-V diagramu. Jsou veličiny (a) ΔU pro plyn, (b) úhrnné teplo Q dodané plynu kladné, záporné, nebo rovny nule?



PŘÍKLAD 19.8

Vyvařme za obvyklého tlaku 1,00 kg vody 100 °C teplé na páru téže teploty. Objem se přitom změní z počáteční hodnoty $1{,}00{\cdot}10^{-3}$ m^3 pro samotnou kapalinu na 1,671 m^3 pro samotnou páru (obr. 19.16).



Obr. 19.16 Příklad 19.8. Vaříme vodu za stálého tlaku. Z tepelné lázně dodáváme teplo, dokud se kapalná voda všechna nepromění v páru. Vznikající plyn koná práci tím, že zvedá zatížený píst.

(a) Jakou práci systém přitom vykoná?

ŘEŠENÍ: Práce je dána rov. (19.23). Protože je během varu tlak konstantní ($1{,}01{\cdot}10^5$ Pa), můžeme vytknout p před integrál a dostaneme

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV = p\int_{V_i}^{V_f} dV = p(V_f - V_i) =$$
$$= (1{,}01{\cdot}10^5\ \text{Pa})(1{,}671\ \text{m}^3 - 1{,}00{\cdot}10^{-3}\ \text{m}^3) =$$
$$= 1{,}69{\cdot}10^5\ \text{J} = 169\ \text{kJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledek je kladný, což znamená, že systém *koná práci* na své okolí tím, že zvedá zatížený píst na obr. 19.16.

(b) Kolik tepla je nutno systému dodat během děje?

ŘEŠENÍ: Protože se zde nemění teplota, ale jen fáze, použijeme rov. (19.17) a (19.18):

$$Q = L_v m = (2\,260\ \text{kJ}{\cdot}\text{kg}^{-1})(1{,}00\ \text{kg}) =$$
$$= 2\,260\ \text{kJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledek je kladný, což znamená, že teplo bylo systému *dodáno*.

(c) Jak se změní během varu vnitřní energie systému?

ŘEŠENÍ: Odpověď najdeme podle prvního zákona (rovnice (19.24)):

$$\Delta U = Q - W = 2\,260\ \text{kJ} - 169\ \text{kJ} \doteq$$
$$\doteq 2\,090\ \text{kJ} = 2{,}09\ \text{MJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato veličina je kladná, což znamená, že během varu vnitřní energie systému roste. Tato energie připadá na vzájemné oddělení molekul H_2O, které se v kapalném stavu navzájem silně přitahují.

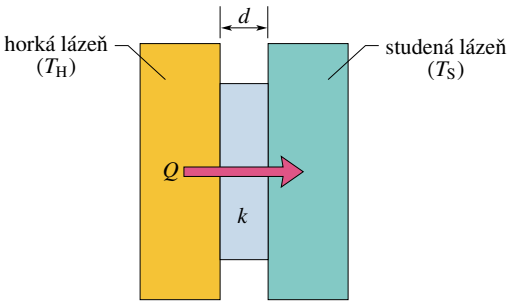
Vidíme, že při varu vody připadá kolem 7,5 % (tj. 169 kJ/2 260 kJ) dodaného tepla na práci vykonanou rozepnutím proti atmosférickému tlaku. Zbytek jde na zvýšení vnitřní energie systému.

19.11 MECHANISMY PŘENOSU TEPLA

Již jsme se zabývali přenosem tepla mezi systémem a jeho okolím, ale dosud jsme nepopsali, jak takový přenos probíhá. Jsou tři mechanismy přenosu: vedení, proudění a záření.

Vedení

Ponecháte-li pohrabáč v ohni delší dobu, bude i jeho držadlo horké. Energie se přenáší z ohně do držadla **vedením** podél celého pohrabáče. Amplitudy kmitů atomů a elektronů tvořících kov výrazně vzrostou v ohni díky vysoké teplotě okolí. Nárůst amplitud kmitání a s ním spojená energie se šíří podél pohrabáče od atomu k atomu prostřednictvím srážek sousedních atomů. Touto cestou se oblast zvýšené teploty rozšiřuje po pohrabáči až k držadlu.



$T_H > T_S$

Obr. 19.17 Vedení tepla. Teplo se přenáší z lázně s vyšší teplotou T_H k lázni s nižší teplotou T_S prostřednictvím desky o tloušťce d a tepelné vodivosti k.

Uvažujme desku o průřezu S a tloušťce d, jejíž stěny jsou udržovány na nepříliš rozdílných teplotách T_H a T_S tepelnými lázněmi (horkou a studenou) podle obr. 19.17. Označme Q teplo, které je přeneseno deskou za dobu t od horké stěny ke studené. Pokus nám ukáže, že **tepelný tok** H (množství tepla za jednotku času) je dán vztahem

$$H = \frac{Q}{t} = kS\frac{T_H - T_S}{d}, \qquad (19.30)$$

kde veličina k, nazývaná **součinitel tepelné vodivosti,** je konstanta charakteristická pro materiál desky. Dobrý vodič tepla má vysokou hodnotu k a naopak. Tab. 19.6 udává součinitele tepelné vodivosti některých běžných kovů, plynů a stavebních materiálů.

Tepelný odpor R

Máte-li zájem udržet si v domě teplo nebo udržet na výletě pivo dobře vychlazené, budou vás více zajímat materiály se špatnou tepelnou vodivostí než s dobrou. Proto byla do inženýrské praxe zavedena koncepce **tepelného odporu** R. Tepelný odpor desky o tloušťce d je definován jako

$$R = \frac{d}{k}. \qquad (19.31)$$

Čím nižší je tedy tepelná vodivost materiálu desky, tím větší je její tepelný odpor (angl. „R-value“). Všimněte si, že R je veličina typická pro desku určité tloušťky, nikoli pro materiál. Obvykle užívanou jednotkou pro R (která se ani ve Spojených státech raději neuvádí) je čtverečná stopa krát stupeň Fahrenheita krát hodina na Britskou tepelnou jednotku ($ft^2 \cdot F^\circ \cdot h/Btu$). (Teď už také víte, proč je tak utajená.)

Tabulka 19.6 **Součinitelé tepelné vodivosti**[a]

	k / $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$		k / $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
Kovy		*Stavební materiály*	
Nerez ocel	14	Molitan	0,024
Olovo	35	Čedičová vlna	0,043
Hliník	235	Skelná vata	0,048
Měď	401	Dřevo (borovice)	0,11
Stříbro	428	Okenní sklo	1,0
Plyny			
Suchý vzduch	0,026		
Helium	0,15		
Vodík	0,18		

[a] Tepelné vodivosti závisejí mírně na teplotě. Uvedené hodnoty platí pro pokojovou teplotu.

Kombinací rov. (19.30) a (19.31) dostaneme

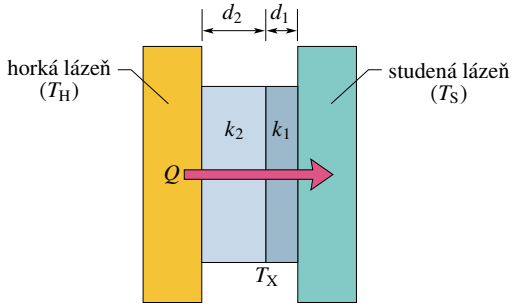
$$H = S\frac{T_H - T_S}{R}, \qquad (19.32)$$

což nám umožní počítat tok tepla deskou, je-li znám její tepelný odpor, plocha a rozdíl teplot mezi jejími stěnami.

Vedení tepla složenou deskou

Obr. 19.18 ukazuje složenou desku, sestávající ze dvou vrstev z různých materiálů o tloušťkách d_1 a d_2 s různými součiniteli tepelné vodivosti k_1 a k_2. Teploty vnějších povrchů

desky označme T_H a T_S, velikost jejich plochy S. V dalším odvodíme výraz pro rychlost přenosu tepla (neboli tok tepla) deskou za předpokladu, že přenos je **ustálený,** neboli že jde o **stacionární děj.** Při takovém ději zůstávají teplota a tok tepla v libovolném místě desky stejné a nemění se s časem.



Obr. 19.18 Teplo se přenáší stálou rychlostí deskou složenou ze dvou různých materiálů v různé tloušťce a s různou tepelnou vodivostí. Ustálenou teplotu na rozhraní obou materiálů označíme T_X.

V ustálené situaci jsou tepelné toky oběma vrstvami stejné. To je totéž, jako kdybychom řekli, že teplo přivedené jednou vrstvou za jistou dobu k rozhraní je stejné jako teplo druhou vrstvou za stejnou dobu odvedené. Pokud by to nebyla pravda, musela by se teplota desky měnit a deska by nebyla v ustáleném stavu. Označíme-li T_X teplotu rozhraní mezi oběma vrstvami, můžeme s použitím rov. (19.30) vyjádřit

$$H = \frac{k_2 S(T_H - T_X)}{d_2} = \frac{k_1 S(T_X - T_S)}{d_1}. \quad (19.33)$$

Vyřešením rov. (19.33) pro T_X dostaneme po snadné úpravě

$$T_X = \frac{k_1 d_2 T_S + k_2 d_1 T_H}{k_1 d_2 + k_2 d_1}. \quad (19.34)$$

Dosazením tohoto výrazu pro T_X do rov. (19.33) získáme

$$H = \frac{S(T_H - T_S)}{d_1/k_1 + d_2/k_2}. \quad (19.35)$$

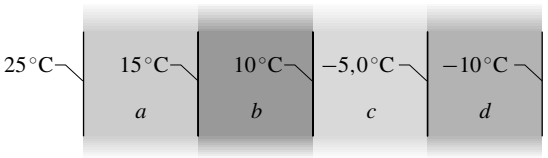
Rov. (19.31) nám připomene, že $d/k = R$.

Rov. (19.35) můžeme rozšířit na libovolný počet n vrstev různých materiálů vytvářejících desku:

$$H = \frac{S(T_H - T_S)}{\sum(d/k)} = \frac{S(T_H - T_S)}{\sum R}. \quad (19.36)$$

Suma ve jmenovateli zlomku říká, že odpory $R = d/k$ všech vrstev se sčítají.

KONTROLA 6: Obrázek ukazuje ustálené teploty na površích a rozhraních uvnitř desky složené ze čtyř vrstev stejné tloušťky z různých materiálů. Uspořádejte materiály sestupně podle jejich tepelné vodivosti.



Proudění

Pozorujeme-li plamen svíce nebo zápalky, vidíme přenos tepla vzhůru **prouděním**. Takový přenos tepla nastává tehdy, když tekutina (jako je vzduch nebo voda) je ve styku s předmětem vyšší teploty. Teplota tekutiny ve styku s tímto předmětem roste a tekutina (ve většině případů) se roztahuje, čímž její hustota klesá. Protože se tím stává lehčí než okolní chladná tekutina, začne ohřátá tekutina vlivem vztlaku stoupat vzhůru. Část chladnější tekutiny se dostane na její místo a tam se zahřeje; proces může pokračovat.



Fotbaloví fanoušci v záři hořící hranice. Ohřátý vzduch a horké plyny z ohně stoupají vzhůru, chladný vzduch z okolí proudí dolů, k základům hranice.



Obr. 19.19 Barevný termogram prozrazuje výkon, s jakým se vyzařuje energie z domů na ulici. Výkony jsou vyznačeny barvami, od nejvyššího k nejnižšímu: bílá, červená, fialová, modrá, černá. Můžeme rovnou říci, kde jsou stěny izolované, kde jsou na oknech těžké záclony a kde je teplejší vzduch u stropu v poschodí.

Proudění je součástí mnoha přírodních dějů. Proudění v atmosféře hraje základní úlohu při vytváření globálního klimatu i denních změn počasí. Piloti kluzáků a ptáci vyhledávají stoupající vzdušné proudy, které je vynesou vzhůru. Obrovský přenos energie v oceánech probíhá rovněž mechanismem proudění. A energie z termonukleárních dějů v nitru Slunce se dostává na povrch obrovskými proudy hmot, v nichž žhavá tekutina (plazma) proudí zvnitřku na povrch a je nahrazována chladnější, klesající dolů pod povrch.

Záření

Třetí způsob přenosu tepla mezi předmětem a jeho okolím je **přenos tepla zářením,** někdy též **sáláním,** prostřednictvím elektromagnetických vln. (Viditelné světlo je rovněž jistý druh elektromagnetických vln.) V takovém případě často mluvíme o **tepelném záření,** abychom ho odlišili od elektromagnetických *signálů* (jako např. televizní vysílání) nebo od radioaktivního záření (energie a částice vyzařované atomovými jádry). Stojíme-li na poledním slunci, zahříváme se tím, že pohlcujeme tepelné záření od Slunce. Pro přenos tepla zářením není potřeba žádné hmotné prostředí.

Výkon P_r vyzařujícího předmětu (tj. rychlost, s jakou vyzařuje energii prostřednictvím elektromagnetických vln) závisí na velikosti jeho povrchu S a na teplotě T v kelvinech a je dán **Stefanovým-Boltzmannovým zákonem**

$$P_r = \sigma \varepsilon S T^4, \qquad (19.37)$$

kde $\sigma = 5{,}670\,3 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$ se nazývá **Stefanova-Boltzmannova konstanta** po Josefu Stefanovi, který v roce 1879 objevil experimentálně rov. (19.37), a Ludwigu Boltzmannovi, který ji krátce nato odvodil teoreticky. Symbol ε označuje **emisivitu** povrchu předmětu a nabývá hodnot mezi 0 a 1 podle složení a provedení povrchu. Předmět s největší emisivitou rovnou 1,0 nazýváme **černý zářič** neboli **černé těleso;** je to teoretický model. Poznamenejme opět, že teplota T v rov. (19.37) musí být zadána v kelvinech, takže při teplotě absolutní nuly k tepelnému záření nedochází. Všimněme si však také, že každý předmět s teplotou vyšší než 0 K — včetně lidí — tepelně vyzařuje (obr. 19.19).

Výkon P_a, s jakým předmět absorbuje energii formou tepelného záření z jiného zdroje (o teplotě T_o v kelvinech), je

$$P_a = \sigma \varepsilon S T_o^4. \qquad (19.38)$$

Emisivita ε je táž jako v rov. (19.37). Ideální případ, černé těleso s $\varepsilon = 1$, by pohlcovalo všechnu dopadající energii (aniž by odrazem nebo rozptylem předávalo část dopadající energie svému okolí).

Předmět teploty T vyzařuje energii do svého okolí a současně energii z okolí přijímá. Neuvažujeme-li přínos záření odraženého, je úhrnný výkon P_Σ dodaný tepelným zářením roven

$$P_\Sigma = P_a - P_r = \sigma \varepsilon S (T_o^4 - T^4). \qquad (19.39)$$

Emisivita černého oblečení je větší než bílého; proto podle rov. (19.39) bude černý oblek pohlcovat více energie ze slunečního záření ($T_o \approx 6\,000$ K) než bílý, takže bude mít i vyšší teplotu. Výzkumy ukázaly, že v horké poušti může být černý plášť beduínů až o 6 C° teplejší než stejný v bílé barvě. Proč by tedy měl nosit černý plášť ten, kdo chce zabránit přehřátí a přežít v drsné poušti?

Odpověď spočívá v tom, že černý plášť, který je sám teplejší než stejný plášť bílé barvy, opravdu zahřívá vzduch pod sebou více. Tento teplejší vzduch stoupá rychleji a odchází ven porézní látkou, zatímco vnější vzduch je zezdola vtahován pod plášť (obr. 19.20). Černá látka tedy podporuje cirkulaci vzduchu pod pláštěm a brání beduínům v přehřátí více než bílé pláště ostatních. Stálý vánek proudící pod pláštěm podél těla je beduínovi příjemnější.



Obr. 19.20 Proudění vzduchu vzhůru pod teplejším černým pláštěm je mnohem mohutnější, než pod chladnějším bílým. (Podle „Why Do Bedouins Wear Black Robes in Hot Deserts?“ (Proč nosí beduíni v horké poušti černé šaty?), A. Shkolnik, C. R. Taylor, V. Finch a A. Borut, *Nature*, Vol. 283, 24. January, 1980, pp. 373–374.)

PŘÍKLAD 19.9

Složená deska (obr. 19.18) o ploše $S = 26\,\mathrm{ft}^2$ je vyrobena z vrstvy 2,0 in pěnového čediče (vrstva 1,0 in má tepelný odpor 3,3) a z 0,75 in borovice vejmutovky (1,0 in má tepelný odpor 1,3). Teplotní rozdíl mezi stěnami desky je 65 F°. Jak rychle probíhá tepelná výměna deskou?

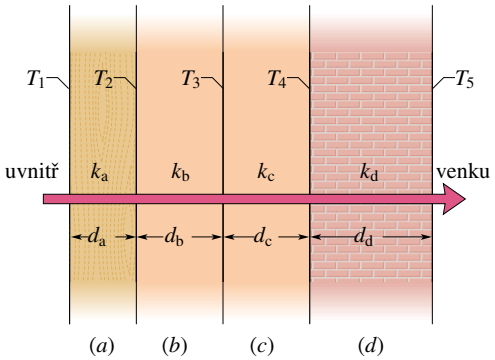
ŘEŠENÍ: Tepelný odpor dvoupalcové vrstvy čedičové pěny činí $3{,}3 \cdot 2{,}0\,\mathrm{ft}^2 \cdot {}^\circ\mathrm{F{\cdot}h/Btu}$. U tříčtvrtěpalcové dřevěné desky činí $1{,}3 \cdot 0{,}75\,\mathrm{ft}^2 \cdot {}^\circ\mathrm{F{\cdot}h/Btu}$ neboli $0{,}98\,\mathrm{ft}^2 \cdot {}^\circ\mathrm{F{\cdot}h/Btu}$. Složená deska má tedy tepelný odpor $(6{,}6 + 0{,}98)\,\mathrm{ft}^2 \cdot {}^\circ\mathrm{F{\cdot}h/Btu}$ neboli $7{,}58\,\mathrm{ft}^2 \cdot \mathrm{F}^\circ \cdot \mathrm{h/Btu}$. Dosazením do rov. (19.36) dostaneme

$$H = \frac{S(T_\mathrm{H} - T_\mathrm{S})}{\sum R} = \frac{(26\,\mathrm{ft}^2)(65\,\mathrm{F}^\circ)}{(7{,}58\,\mathrm{ft}^2 \cdot \mathrm{F}^\circ \cdot \mathrm{h/Btu})} =$$
$$= 223\,\mathrm{Btu/h} \doteq 220\,\mathrm{Btu/h} = 65\,\mathrm{W}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Při tomto rozdílu teplot se každou deskou stále přenáší tepelný výkon 65 W.

PŘÍKLAD 19.10

Na obr. 19.21 je průřez stěnou z borovice o tloušťce d_a a cihlovou stěnou o tloušťce $d_\mathrm{d} = 2{,}0d_\mathrm{a}$. Mezi nimi jsou dvě vrstvy z neznámého materiálu téže tloušťky i tepelné vodivosti. Tepelná vodivost borového dřeva je k_a a cihel $k_\mathrm{d} = 5{,}0k_\mathrm{a}$. Velikost plochy stěny S není známa. Vedení tepla zdí se ustálilo; na rozhraních známe jen teploty $T_1 = 25\,^\circ\mathrm{C}$, $T_2 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ a $T_5 = -10\,^\circ\mathrm{C}$.



Obr. 19.21 Příklad 19.10. Stěnou ze čtyř vrstev prochází ustálený tok tepla.

(a) Jaká je teplota rozhraní T_4?

ŘEŠENÍ: Teplotu T_4 nemůžeme najít jednoduše dosazením do rov. (19.30) vrstvu po vrstvě od borového dřeva doprava, protože neznáme parametry mezivrstev. Protože však nastal ustálený stav, musí být rychlost přenosu tepla H_a borovým dřevem rovna rychlosti H_d přenosu tepla cihlovou stěnou. Z rov. (19.30) a podle obr. 19.21 můžeme tyto veličiny zapsat ve tvaru

$$H_\mathrm{a} = k_\mathrm{a} S \frac{T_1 - T_2}{d_\mathrm{a}} \quad \text{a} \quad H_\mathrm{d} = k_\mathrm{d} S \frac{T_4 - T_5}{d_\mathrm{d}}.$$

Položíme $H_\mathrm{a} = H_\mathrm{d}$ a vyjádříme T_4:

$$T_4 = \frac{k_\mathrm{a} d_\mathrm{d}}{k_\mathrm{d} d_\mathrm{a}}(T_1 - T_2) + T_5.$$

Po dosazení $d_\mathrm{d} = 2{,}0d_\mathrm{a}$, $k_\mathrm{d} = 5{,}0k_\mathrm{a}$ a známých teplot dostaneme

$$T_4 = \frac{k_\mathrm{a}(2{,}0d_\mathrm{a})}{(5{,}0k_\mathrm{a})d_\mathrm{a}}(25\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C}) + (-10\,^\circ\mathrm{C}) =$$
$$= -8{,}0\,^\circ\mathrm{C}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je teplota na rozhraní T_3?

ŘEŠENÍ: Když nyní známe T_4, můžeme najít T_3, třebaže o mezivrstvě toho víme málo. (Mezi námi, nyní už byste mohli uhádnout odpověď.) Protože je tok tepla ustálený, je rychlost přenosu tepla H_b vrstvou b stejná jako rychlost H_c stěnou c. Potom z rov. (19.30) dostaneme

$$k_\mathrm{b} S \frac{T_2 - T_3}{d_\mathrm{b}} = k_\mathrm{c} S \frac{T_3 - T_4}{d_\mathrm{c}}.$$

Protože tepelné vodivosti k_b a k_c obou vrstev jsou stejné a jejich tloušťky také, máme

$$T_2 - T_3 = T_3 - T_4,$$

odkud dostáváme

$$T_3 = \frac{T_2 + T_4}{2} = \frac{20\,^\circ\mathrm{C} + (-8{,}0\,^\circ\mathrm{C})}{2} =$$
$$= 6{,}0\,^\circ\mathrm{C}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Protože obě mezivrstvy mají stejnou tepelnou vodivost i tloušťku, je zřejmé, že bod uprostřed mezi nimi bude mít střední hodnotu teploty, tj. střední hodnotu teplot vnějších povrchů těchto mezivrstev.

PŘÍKLAD 19.11

Na cestě pouští by přišel vhod kousek ledu. Bohužel však teplota vzduchu klesá každou noc jen na 6,0 °C a voda nezmrzne. Protože však za jasné, bezměsíčné noci působí nebe díky albedu jako černé těleso o teplotě $T_n = -23\,^\circ\mathrm{C}$, mohli bychom snad vyrobit led tak, že bychom nechali tenkou vrstvičku vody vyzářit energii vůči nebi. Nejprve bychom tepelně izolovali nádrž od země špatně tepelně vodivým materiálem, třeba pěnovou gumou anebo slámou. Pak bychom po povrchu nádrže rozlili do tenké vrstvičky trošku vody o hmotnosti $m = 4{,}5\,\mathrm{g}$, s povrchem $S = 9{,}0\,\mathrm{cm}^2$, hloubkou $d = 5\,\mathrm{mm}$, emisivitou $\varepsilon = 0{,}90$ a počáteční teplotou 6,0 °C. Za jak dlouho by voda vyzařováním zmrzla? Může zmrznout za jednu noc?

ŘEŠENÍ: Má-li voda zmrznout důsledkem tepelného vyzařování, musí nejprve její teplota poklesnout z 279 K = 6,0 °C na bod mrazu 273 K. Z rov. (19.15) a z tab. 19.3 zjistíme, že odebrané teplo musí být

$$\begin{aligned} Q_1 &= cm(T_f - T_i) = \\ &= (4\,190\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}})(4{,}5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg})(273\,\mathrm{K} - 279\,\mathrm{K}) = \\ &= -113\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

Tato energie musí být vyzářena proto, aby teplota vody klesla na bod mrazu.

Další energie Q_2 musí být vyzářena pro fázový přechod, aby voda zmrzla. Z rov. (19.17) a (19.19) nalezneme (nezapomeneme doplnit záporné znaménko, protože energie odchází z vody ven)

$$\begin{aligned} Q_2 &= -mL_t = -(4{,}5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg})(3{,}33\cdot 10^5\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}) = \\ &= -1\,499\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

Celkové teplo, které musí voda vyzářit, je tedy

$$Q = Q_1 + Q_2 = -113\,\mathrm{J} - 1\,499\,\mathrm{J} = -1\,612\,\mathrm{J}.$$

Voda však bude nejen vyzařovat energii do nebe, ale také pohlcovat energii vyzařovanou nebem. Výsledná rychlost tepelné výměny je dána rov. (19.39). Čas t potřebný k vyzáření energie Q je roven

$$t = \frac{Q}{P_\Sigma} = \frac{Q}{\sigma\varepsilon S(T_n^4 - T^4)}. \qquad (19.40)$$

Ačkoliv během chladnutí teplota vody lehce klesá, můžeme pro odhad nahradit hodnotu T teplotou mrznutí vody, 273 K. Pro $T_n = 250\,\mathrm{K}$ je jmenovatel výrazu (19.40) roven

$$\begin{aligned} &(5{,}67\cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}})(0{,}90)(9{,}0\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2})\cdot \\ &\cdot ((250\,\mathrm{K})^4 - (273\,\mathrm{K})^4) = -7{,}57\cdot 10^{-2}\,\mathrm{J\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

a rov. (19.40) nám dává

$$t = \frac{(-1\,612\,\mathrm{J})}{(-7{,}57\cdot 10^{-2}\,\mathrm{J\cdot s^{-1}})} = 2{,}13\cdot 10^4\,\mathrm{s} = 5{,}9\,\mathrm{h}. \text{ (Odpověď)}$$

Protože doba t je kratší než jedna noc, je možné tímto způsobem vodu zmrazit. V některých částech světa používali lidé tuto techniku dávno před elektrickými chladničkami.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Teplota, teploměry

Teplota je jednou ze základních veličin SI. Vychází z našeho pocitu tepla a zimy. Měříme ji teploměrem, obsahujícím teploměrnou látku s vhodnou vlastností (jako délka sloupce kapaliny či tlak plynu), která se pravidelně mění, když se teploměr zahřeje nebo ochladí.

Nultý zákon termodynamiky

Dostane-li se teploměr a nějaký jiný předmět do vzájemného kontaktu, dojde po určité době k tepelné rovnováze. Údaj teploměru lze brát jako teplotu tohoto předmětu. Tento postup umožňuje konzistentní a užitečná měření teploty díky *nultému zákonu termodynamiky*: je-li každé z těles A a B v tepelné rovnováze se třetím tělesem C (teploměrem), budou i A a B v tepelné rovnováze navzájem.

Plynová teplota

V systému SI měříme teplotu v kelvinech. V nich je definována teplota *trojného bodu vody* hodnotou 273,16 K. Ostatní teploty jsou z ní odvozeny. Mohou být přibližně měřeny *plynovým teploměrem s konstantním objemem*, v němž je tlak plynu podle definice úměrný jeho teplotě. Různé plyny dávají shodné výsledky jen při velmi nízkých hustotách, proto se definuje *plynová teplota* výrazem

$$T = (273{,}16\,\mathrm{K})\left(\lim_{m\to 0}\frac{p}{p_3}\right). \qquad (19.6)$$

Zde je T teplota v kelvinech, p_3 je tlak plynu při 273,16 K, p tlak plynu při měřené teplotě a m je hmotnost plynu v teploměru.

Celsiova a Fahrenheitova stupnice

Celsiova teplota (tj. údaj teploty v Celsiově stupnici) je defino-

vána vztahem

$$T_{\mathrm{C}} = T - 273{,}15^{\circ}, \tag{19.7}$$

číselný údaj Fahrenheitovy teploty vztahem

$$[T_{\mathrm{F}}] = \tfrac{9}{5}[T_{\mathrm{C}}] + 32^{\circ}. \tag{19.8}$$

Teplotní roztažnost

Všechny předměty mění svou délku s teplotou. Při změně teploty o ΔT je změna Δd lineárního rozměru d dána výrazem

$$\Delta d = d\alpha\Delta T, \tag{19.9}$$

kde α je *teplotní součinitel délkové roztažnosti*. Změna objemu ΔV pro objem V látky je rovna

$$\Delta V = V\beta\Delta T, \tag{19.11}$$

kde $\beta = 3\alpha$ je *teplotní součinitel objemové roztažnosti* materiálu.

Teplo

Teplo Q je energie přenesená mezi systémem a jeho okolím při teplotním rozdílu mezi nimi. V SI ho měříme v joulech (J). Další jednotky jsou např. kalorie (cal) nebo Britská teplotní jednotka (Btu), kde

$$1\,\mathrm{cal} = 3{,}969{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{Btu} = 4{,}186\,\mathrm{J}. \tag{19.13}$$

Tepelná kapacita, měrná a molární tepelná kapacita

Teplo Q dodané tělesu zvýší jeho teplotu o $T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{i}}$. Souvislost vyjadřujeme vztahem

$$Q = C(T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{i}}), \tag{19.14}$$

kde C je *tepelná kapacita* tělesa. Má-li těleso hmotnost m, pak

$$Q = cm(T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{i}}), \tag{19.15}$$

kde c je *měrná tepelná kapacita* materiálu, z něhož je těleso vyrobeno. *Molární tepelná kapacita* materiálu je jeho tepelná kapacita vztažená na jeden mol neboli $6{,}02{\cdot}10^{23}$ elementárních jednotek materiálu.

Skupenské a latentní teplo

Teplo, které dodáme materiálu při teplotě jeho fázového přechodu, může změnit jeho skupenství, např. z pevného do kapalného nebo z kapalného do plynného. Může také změnit jeho fázi beze změny skupenství, např. změnit síru kosočtverečnou na jednoklonnou. Teplo na jednotku hmotnosti potřebné k takové změně se nazývá *skupenské*, příp. *latentní* teplo L. Platí

$$Q = Lm. \tag{19.17}$$

Nejčastěji se setkáme se *skupenským teplem vypařování*, resp. *kondenzace*, což je množství energie na jednotku hmotnosti, které musíme dodat, resp. odebrat, abychom přeměnili kapalinu na plyn, resp. plyn na kapalinu. Skupenské teplo vypařování při teplotě varu kapaliny nazýváme *skupenské teplo varu*. *Skupenské teplo tání*, resp. *tuhnutí* je množství energie na jednotku hmotnosti, které musíme dodat, abychom roztavili pevnou látku, resp. které musíme odebrat, aby kapalina ztuhla.

Práce spojená se změnou objemu

Plyn může vyměňovat svou energii s okolím tím, že koná práci. Práce W *vykonaná plynem*, když se roztahuje nebo smršťuje z počátečního objemu V_{i} do koncového V_{f}, je rovna

$$W = \int_{\mathscr{S}_{\mathrm{i}}}^{\mathscr{S}_{\mathrm{f}}} \mathrm{d}W = \int_{V_{\mathrm{i}}}^{V_{\mathrm{f}}} p\,\mathrm{d}V. \tag{19.23}$$

Integrace je nutná, protože tlak p plynu se během změny jeho objemu zpravidla mění.

První zákon termodynamiky

Zákon zachování energie pro termodynamické děje je vyjádřen *prvním zákonem termodynamiky*, který má tvar

$$\Delta U = U_{\mathrm{f}} - U_{\mathrm{i}} = Q - W \quad \text{(první zákon)}, \tag{19.24}$$

popř. v diferenciálním tvaru

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q - \mathrm{d}W \quad \text{(první zákon)}. \tag{19.25}$$

U je vnitřní energie tělesa, která závisí jen na jeho stavu (teplotě, tlaku a objemu). Q je teplo vyměněné mezi systémem a jeho okolím. Bereme ho kladné, pokud systému teplo dodáváme, a záporné, pokud systému teplo odebíráme. W je práce *vykonaná systémem*. Bereme ji kladnou,* pokud systém práci koná (pokud se roztahuje proti síle způsobené okolím), a zápornou, pokud systému práci dodáváme (pokud se pod vlivem vnější síly smršťuje). Jak Q, tak i W závisí na ději (jsou to *dějové veličiny*). Naproti tomu ΔU závisí jen na počátečním a koncovém stavu; na průběhu děje nezávisí.

Aplikace prvního zákona

První zákon termodynamiky lze použít též v následujících speciálních případech:

$$\begin{aligned}
\text{adiabatický děj } Q = 0\text{:} &\quad Q = 0,\ \Delta U = -W,\\
\text{izochorický děj } \Delta V = 0\text{:} &\quad W = 0,\ \Delta U = Q,\\
\text{cyklický děj } \mathscr{S}_{\mathrm{i}} = \mathscr{S}_{\mathrm{f}}\text{:} &\quad \Delta U = 0,\ Q = W,\\
\text{volná expanze:} &\quad Q = W = \Delta U = 0.
\end{aligned}$$

* V moderní odborné literatuře se obvykle bere jako kladná ta energie, kterou systému dodáváme. Znaménko práce vykonané systémem je pak záporné.

Přenos tepla

Výkon H, kterým se teplo přenáší *vedením* skrz desku, jejíž stěny jsou udržovány na teplotách T_H a T_S, je

$$H = \frac{Q}{t} = kS\frac{T_H - T_S}{d}, \tag{19.30}$$

kde S, resp. d jsou plocha, resp. tloušťka desky a k je součinitel tepelné vodivosti materiálu desky.

K *proudění* dochází, pokud teplotní rozdíl způsobí přenos tepla pohybem tekutiny. *Záření* je přenos tepla vyzařováním elektromagnetické energie. Výkon P_r, jímž těleso vyzařuje energii prostřednictvím tepelného záření, je roven

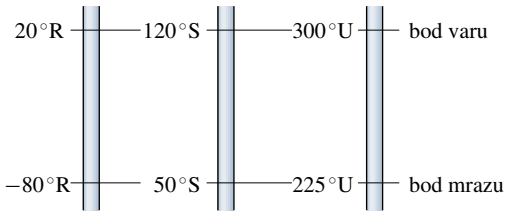
$$P_r = \sigma\varepsilon ST^4, \tag{19.37}$$

kde $\sigma = 5{,}670\,3\cdot10^{-8}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta, ε je emisivita povrchu předmětu, S je jeho povrch a T je povrchová teplota (v kelvinech). Výkon P_a, jímž těleso pohlcuje energii tepelného záření ze svého okolí, je při konstantní teplotě okolí T_o (v kelvinech) roven

$$P_a = \sigma\varepsilon ST_o^4. \tag{19.38}$$

OTÁZKY

1. Na obr. 19.22 jsou tři teplotní stupnice s vyznačenými teplotami tání a varu vody. Uspořádejte je sestupně podle velikosti změny o 25 R°, 25 S° a 25 U°.



Obr. 19.22 Otázka 1

2. Tyčka původně pokojové teploty je zahřívána a ochlazována v šesti krocích. Její jednotlivá prodloužení, vyjádřená ve vhodných jednotkách, jsou postupně +7, +5, +3, −4, −6 a −4. (a) Je výsledná teplota tyčky stejná s původní teplotou, vyšší, anebo nižší? (b) Našla by se taková posloupnost kroků, aby po některém z nich měla tyčka opět pokojovou teplotu?

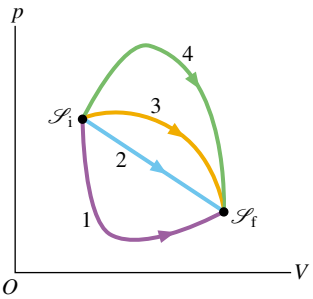
3. Tabulka udává počáteční délku d, změnu teploty ΔT a změnu délky Δd čtyř tyček. Uspořádejte sestupně tyčky podle jejich součinitelů teplotní roztažnosti.

TYČKA	d/m	ΔT/C°	Δd/m
a	2	10	$4\cdot10^{-4}$
b	1	20	$4\cdot10^{-4}$
c	2	10	$8\cdot10^{-4}$
d	4	5	$4\cdot10^{-4}$

4. Uspořádejte sestupně Celsiovu, Kelvinovu a Fahrenheitovu stupnici teplot podle tepla, které je potřeba dodat 1 g vody, aby jeho teplota vzrostla o 1 stupeň příslušné stupnice.

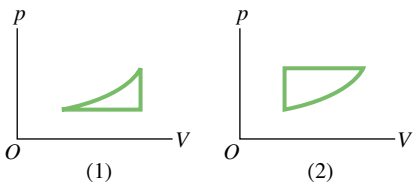
5. Materiály A, B a C jsou pevné látky při teplotě tání. Materiál A potřebuje 200 J pro roztavení 4 kg. Materiál B potřebuje 300 J pro roztavení 5 kg a materiál C 300 J pro roztavení 6 kg. Uspořádejte je sestupně podle jejich měrných skupenských tepel tání.

6. Obr. 19.23 ukazuje čtyři cesty na p-V diagramu, podél kterých lze převést plyn ze stavu $\mathscr{S}_i$ do stavu $\mathscr{S}_f$. Uspořádejte je sestupně podle (a) změny ΔU, (b) práce plynem vykonané, (c) velikosti vyměněného tepla Q.



Obr. 19.23 Otázka 6

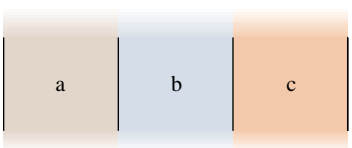
7. Obr. 19.24 ukazuje dva uzavřené cykly na p-V diagramu pro plyn. Tři části cyklu (1) mají stejné délky a tvary jako odpovídající části v cyklu (2). Má být cyklus orientován kladně (tj. proti směru otáčení hodinových ručiček), nebo záporně, má-li být kladná (a) celková práce W vykonaná plynem, (b) celkové teplo předané z plynu do okolí? Odpovězte pro oba cykly.



Obr. 19.24 Otázky 7 a 8

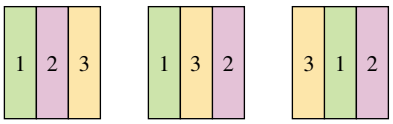
8. Pro který z cyklů na obr. 19.24 je při záporné orientaci (a) větší W, (b) větší Q?

9. Obr. 19.25 ukazuje desku složenou ze tří různých vrstev téže tloušťky, z různých materiálů a, b a c, s tepelnými vodivostmi $k_b > k_a > k_c$. Prochází jimi ustálený nenulový tepelný tok. Uspořádejte sestupně materiály podle teplotního úbytku na deskách.



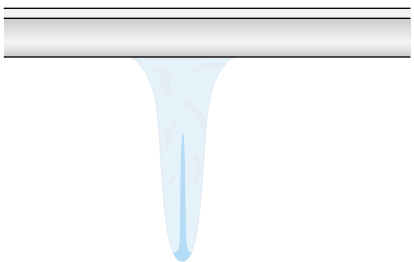
Obr. 19.25 Otázka 9

10. Obr. 19.26 ukazuje tři různá uspořádání materiálů 1, 2 a 3 tvořících stěnu. Jejich tepelné vodivosti jsou $k_1 > k_2 > k_3$. Levá strana stěny je o 20 C° teplejší než pravá. Uspořádejte stěny sestupně podle (a) toku energie stěnou, (b) teplotního úbytku na vrstvě 1.



Obr. 19.26 Otázka 10

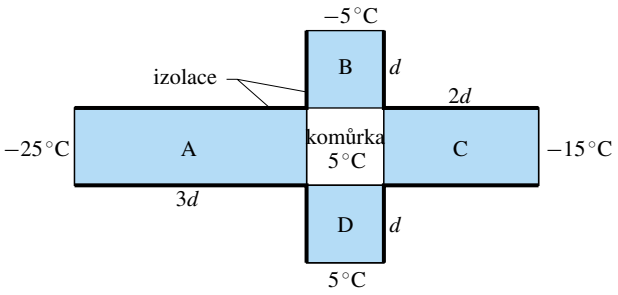
11. Když rampouch roste, je jeho vnější povrch pokryt tenkou vrstvičkou tekuté vody, která zvolna stéká dolů, aby vytvořila kapku visící na špičce (obr. 19.27). Každá kapka vytváří tenkou



Obr. 19.27 Otázka 11

trubičku kapalné vody, která se rozšiřuje vzhůru po rampouchu k jeho *kořenu* (nahoře). Protože voda na vršku této trubičky neustále tuhne, uvolňuje se energie. Odvádí se tato energie radiálně ledem ven, dolů vodou do visící kapky, nebo nahoru do kořenu? (Předpokládejme, že teplota vzduchu je pod 0 °C.)

12. Obr. 19.28 ukazuje vodorovný řez (pohled shora) čtvercovou komůrkou vytvořenou podle obrázku silnými stěnami. Stěny jsou z téhož materiálu a mají tutéž čelnou plochu. Jejich tloušťky jsou podle obrázku d, $2d$ a $3d$ a jsou podél dokonale izolovány. Čela vytvářející komůrku jsou udržována na teplotě 5 °C a tepelný tok stěnami je ustálený. Uspořádejte sestupně stěny podle velikosti tepelného toku v nich.



Obr. 19.28 Otázka 12

13. Představte si, že držíte v prstech dřevěnou a kovovou kostku o *téže* teplotě. Pokud vás kostky studí, zdá se kov chladnější než dřevo. Pokud vás kostky hřejí, zdá se zase kov teplejší než dřevo. Při jaké teplotě budete vnímat kov i dřevo jako stejně teplé?

14. Několik pevných předmětů z téhož materiálu je udržováno při teplotě 300 K v okolí, které má teplotu 350 K. Je to krychle o hraně délky r, koule o poloměru r a polokoule o poloměru r. Uspořádejte sestupně předměty podle tepelných ztrát z předmětu do okolí (tj. podle výkonu záření).

15. Následující dvojice hodnot udávají v různých situacích teploty předmětu a jeho okolí: (1) 300 K a 350 K; (2) 350 K a 400 K; (3) 400 K a 450 K. Uspořádejte sestupně bez počítání uvedené situace podle tepelných ztrát (tj. výkonu při přenosu tepla) P_n.

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 19.3 Měření teploty

1C. Fyzikové a astronomové často určují teplotu předmětu tím, že měří, jak závisí intenzita elektromagnetického záření vyzařovaného předmětem na vlnové délce záření. Vlnová délka λ_{max}, při které je záření nejintenzivnější, souvisí s teplotou T předmětu v kelvinech vztahem

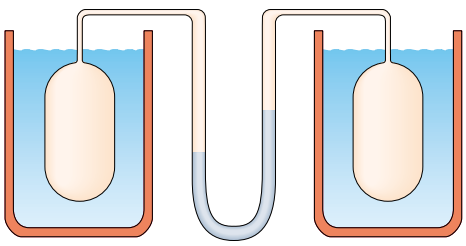
$$\lambda_{max} T = 0{,}289\,8\ \text{cm·K}.$$

V roce 1965 bylo objeveno, že ze všech stran Vesmíru přichází mikrovlnné záření s maximem pro $\lambda_{max} = 0{,}107$ cm. Jaké teplotě to odpovídá? Toto **reliktní záření** vykládáme tím, že jde o tepelné záření Vesmíru, zbývající z doby před cca 15 miliardami let, kdy Vesmír vznikl.

2C. Plyn má teplotu 373,15 K při varu vody. Jaký je limitní poměr jeho tlaku při této teplotě k tlaku při trojném bodu vody, konáme-li sérii pokusů za stálého objemu, ale se stále menším množstvím plynu?

3Ú. Byly zkonstruovány dva plynové teploměry s konstantním objemem, jeden s dusíkem, druhý s vodíkem. Každý obsahuje tolik plynu, aby jeho tlak byl $p_3 = 80$ kPa. Jaký je rozdíl mezi tlaky v teploměrech, umístíme-li je do lázně s vařící vodou? Který plyn má vyšší tlak?

4Ú. Speciální plynový teploměr má podle obr. 19.29 dvě baňky s plynem; každá je ve vodní lázni. Rozdíl tlaků měříme rtuťovým manometrem podle obrázku. Speciální zařízení (není na



Obr. 19.29 Úloha 4

obrázku) udržuje stálý objem plynu v obou baňkách. Mají-li obě baňky teploty trojného bodu vody, nevykazuje teploměr žádný rozdíl tlaků. Má-li jedna baňka teplotu trojného bodu vody a druhá baňka teplotu varu vody, je rozdíl tlaků 120 torr. Má-li konečně jedna baňka teplotu trojného bodu vody a druhá jistou neznámou teplotu, je rozdíl tlaků 90,0 torr. Jaká je teplota druhé baňky?

ODST. 19.4 Celsiova a Fahrenheitova stupnice

5C. Při jaké teplotě ukazuje Fahrenheitova stupnice (a) dvakrát větší číselnou hodnotu, (b) poloviční hodnotu oproti stupnici Celsiově?

6C. Doktor vám řekl, že máte teplotu 310 K nad absolutní nulou. Je to důvod k obavám? Vysvětlete svou odpověď.

7C. (a) V roce 1964 byla v sibiřské vesnici Ojmjakonu naměřena teplota $-71\,^{\circ}\mathrm{C}$. Jaká by to byla teplota ve stupních Fahrenheita? (b) Nejvyšší oficiálně zaznamenaná teplota ve vnitrozemí USA byla $134\,^{\circ}\mathrm{F}$ v Údolí smrti (Death Valley) v Kalifornii. Kolik by to bylo ve stupních Celsia?

8C. (a) Teplota na povrchu Slunce je kolem 6 000 K. Vyjádřete ji ve stupních Fahrenheita. (b) Vyjádřete normální tělesnou teplotu $36{,}5\,^{\circ}\mathrm{C}$ ve stupních Fahrenheita. (c) Ve vnitrozemí USA byla oficiálně zaznamenána nejnižší teplota $-70\,^{\circ}\mathrm{F}$ v Rogers Pass v Montaně. Vyjádřete tento údaj ve stupních Celsia. (d) Vyjádřete teplotu varu kyslíku za normálního tlaku $-183\,^{\circ}\mathrm{C}$, ve Fahrenheitově stupnici. (e) Při jaké Fahrenheitově teplotě by vám bylo v místnosti příliš teplo?

9C. Při jakých teplotách se shodují číselné údaje na stupnicích (a) Fahrenheita a Celsia (ověřte si výsledek v tab. 19.1), (b) Fahrenheita a Kelvina, (c) Celsia a Kelvina?

10Ú. Při teplotní stupnici X se voda vaří při $-53{,}5\,^{\circ}\mathrm{X}$ a tuhne při $-170\,^{\circ}\mathrm{X}$. Jaká teplota v této stupnici odpovídá 340 K?

11Ú. Z každodenního pozorování víme, že horké i studené předměty chladnou nebo se zahřívají až na teplotu svého okolí. Není-li teplotní rozdíl $\Delta T = T_\mathrm{p} - T_\mathrm{o}$ předmětu a jeho okolí co do velikosti značný, je změna teploty zhruba úměrná rozdílu teplot, tedy

$$\frac{\mathrm{d}\Delta T}{\mathrm{d}t} = -A\Delta T,$$

kde A = konst. (**Newtonův zákon vedení tepla**). Znaménko v rovnici je záporné, protože ΔT klesá s časem, je-li ΔT kladné, a roste, je-li ΔT záporné. (a) Na jakých faktorech závisí A? Jakou má fyzikální jednotku? (b) Jestliže je v okamžiku $T = 0$ teplotní rozdíl ΔT_0, pak v čase t platí

$$\Delta T = \Delta T_0 \mathrm{e}^{-At}.$$

Dokažte to.

12Ú. Domácí topení jednou vypadlo, když byla venku teplota $7{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$. V důsledku tohoto výpadku klesla uvnitř teplota během 1,0 h z $22\,^{\circ}\mathrm{C}$ na $18\,^{\circ}\mathrm{C}$. Majitelka domku topení opravila a vylepšila tepelnou izolaci (zateplila dům). Poté shledala, že při příštím výpadku topení za stejného počasí trvalo dvakrát déle, než teplota klesla z $22\,^{\circ}\mathrm{C}$ na $18\,^{\circ}\mathrm{C}$. Jaký je poměr konstant A z úlohy 11 v Newtonově zákonu vedení tepla před zateplením a po zateplení?

ODST. 19.5 Teplotní roztažnost

13C. Ocelová tyčka má délku přesně 20 cm při $30\,^{\circ}\mathrm{C}$. Kolikrát delší je při $50\,^{\circ}\mathrm{C}$?

14C. Hliníkový stožár je 33 m vysoký. O kolik se prodlouží, stoupne-li teplota o $15\,^{\circ}\mathrm{C}$?

15C. Pyrexové zrcadlo v dalekohledu observatoře na Mt. Palomar má průměr 200 in. Teplota se tam mění mezi $-10\,^{\circ}\mathrm{C}$ a $50\,^{\circ}\mathrm{C}$. Jaká je největší změna průměru zrcadla?

16C. Kruhový otvor v hliníkové desce má průměr 2,725 cm při $0{,}000\,^{\circ}\mathrm{C}$. Jaký má průměr, když se deska zahřeje na $100{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$?

17C. Tyč z lehké slitiny má délku 10,000 cm při $20{,}000\,^{\circ}\mathrm{C}$; délka vzroste na 10,015 cm při bodu varu vody. (a) Jakou má tyč délku při teplotě tání ledu? (b) Při jaké teplotě má tyč délku 10,009 cm?

18C. (a) Jaký je součinitel délkové teplotní roztažnosti hliníku ve stupních Fahrenheita? (b) Použijte tohoto výsledku k výpočtu změny délky hliníkové tyčky 20 ft dlouhé po zahřátí ze $40\,^{\circ}\mathrm{F}$ na $95\,^{\circ}\mathrm{F}$. (Výsledek uveďte ve ft.)

19C. Krátce po vzniku Země zvýšilo teplo uvolněné při radioaktivním rozpadu průměrnou vnitřní teplotu z 300 K na 3 000 K; zhruba tato teplota setrvává dosud. Předpokládáme-li průměrný součinitel teplotní objemové roztažnosti $3{,}0\cdot10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$, o kolik se zvětšil poloměr Země od jejího vzniku?

20C. Stanfordský lineární urychlovač obsahuje stovky mosazných disků těsně uložených v ocelové trubici, která je rovněž těsně objímá. Systém byl sestaven z disků ochlazených suchým ledem (při $-57{,}00\,^{\circ}\mathrm{C}$), aby je bylo možno do ocelové trubice uložit. Je-li při $43{,}00\,^{\circ}\mathrm{C}$ průměr disku 80,00 mm, jaký byl jeho průměr v suchém ledu?

21C. Skleněné okno má při teplotě $10\,^{\circ}\mathrm{C}$ rozměr přesně 20 cm × × 30 cm. O kolik vzroste jeho plocha při teplotě $40\,^{\circ}\mathrm{C}$?

22C. Při $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ má mosazná krychle hranu délky 30 cm. O kolik vzroste její povrch po zahřátí z $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ na $75\,^{\circ}\mathrm{C}$?

23C. Jak se změní objem hliníkové koule s původním poloměrem 10 cm při zahřátí z $0{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$ na $100\,^{\circ}\mathrm{C}$?

24C. Jaký je objem olověné koule při $30\,^{\circ}\mathrm{C}$, je-li její objem při $60\,^{\circ}\mathrm{C}$ roven $50\ \mathrm{cm}^3$?

25C. O kolik se zvětší objem hliníkové krychle o hraně 5 cm, zahřejeme-li ji z $10{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$ na $60{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$?

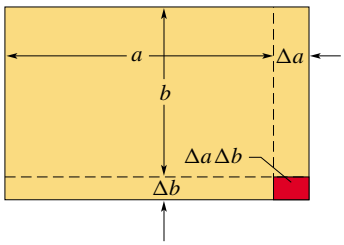
26C. Hliníkový kelímek s objemem $100\ \mathrm{cm}^3$ je naplněn glycerinem při $22\,^{\circ}\mathrm{C}$. Kolik glycerinu přeteče ven (pokud vůbec přeteče), zahřeje-li se kelímek i s glycerinem na $28\,^{\circ}\mathrm{C}$? (Součinitel objemové roztažnosti glycerinu je $5{,}1\cdot10^{-4}/\,\mathrm{C}^{\circ}$.)

27C. Ocelová tyčka je při $25\,^{\circ}\mathrm{C}$ zakotvena na obou koncích a poté chlazena. Při jaké teplotě se přetrhne? Použijte tab. 13.1.

28Ú. Při 20 °C je tyčka přesně 20,05 cm dlouhá podle ocelového pravítka. Pravítko i tyčku umístíme v pícce při 270 °C; tam bude tyčka měřit podle pravítka 20,11 cm. Jaký je součinitel teplotní roztažnosti materiálu tyčky?

29Ú. Ocelová tyčka má průměr 3,000 cm při 25 °C. Mosazný prstenec má vnitřní průměr 2,992 cm při 25 °C. Při jaké společné teplotě můžeme právě nasadit prstenec na tyč?

30Ú. Obsah S pravoúhlé desky je ab. Teplotní součinitel délkové roztažnosti je α. Po zahřátí o ΔT se strana a prodlouží o Δa a strana b o Δb (obr. 19.30). Ukažte, že při zanedbání malé veličiny $\Delta a\,\Delta b/ab$ je $\Delta S = 2\alpha S \Delta T$.



Obr. 19.30 Úloha 30

31Ú. Hustota je hmotnost dělená objemem. Hmotnost na teplotě nezávisí, ale závisí-li na teplotě objem V, závisí na ní i hustota ϱ. Ukažte, že malá změna hustoty $\Delta\varrho$ souvisí se změnou teploty ΔT vztahem

$$\Delta\varrho = -\beta\varrho\Delta T,$$

kde β je součinitel teplotní objemové roztažnosti. Vysvětlete záporné znaménko.

32Ú. Když se teplota kovového válce zvýší z 0,0 °C na 100 °C, zvětší se jeho délka o 0,23 %. (a) Jak se změní jeho hustota? (b) O který kov se jedná?

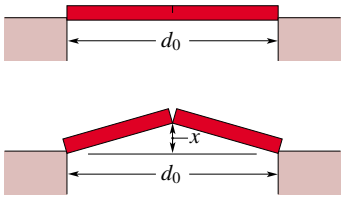
33Ú. Dokažte, že když se teplota kapaliny v barometru změní o ΔT při konstantním tlaku, tak se sloupec prodlouží o hodnotu $\Delta h = \beta h \Delta T$, kde β je součinitel teplotní objemové roztažnosti. Roztažnost skla zanedbejte.

34Ú. Když teplota měděné desetikoruny vzroste o 100 C°, její průměr vzroste o 0,18 %. Vypočtěte na dvě desetinná místa v procentech: (a) změnu obsahu povrchu, (b) změnu tloušťky, (c) změnu objemu, (d) změnu hmotnosti. (e) Vypočtěte součinitel teplotní délkové roztažnosti.

35Ú. Hodiny s mosazným kyvadlem jdou přesně při 20 °C. Vypočtěte sekundový rozdíl, který vznikne za hodinu při teplotě 0,0 °C.

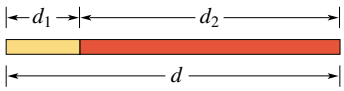
36Ú. Tyč s puklinou je upevněna ve svěráku puklinou nahoru podle obr. 19.31. Při zahřátí o 32 C° se zdvihne o x. Vypočítejte x, je-li délka tyče $d = 3{,}77$ m a součinitel teplotní délkové roztažnosti je $25{\cdot}10^{-6}/\,\mathrm{C}^\circ$.

37Ú. Složená tyč délky $d = d_1 + d_2$ sestává z tyče o délce d_1 vyrobené z materiálu 1, připojené k tyči o délce d_2 z materiálu 2 (obr. 19.32). (a) Dokažte, že součinitel teplotní délkové roztažnosti je roven $\alpha = (\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2)/d$. (b) Použijte ocel a mosaz



Obr. 19.31 Úloha 36

a spočtěte d_1, d_2, víte-li, že $d = 52{,}4$ cm a součinitel teplotní délkové roztažnosti $\alpha = 13{,}0{\cdot}10^{-6}/\,\mathrm{C}^\circ$.



Obr. 19.32 Úloha 37

ODST. 19.7 Zahřívání pevných látek a kapalin

38C. Je možné rozpustit led třením dvou ledových kostek o sebe? Kolik práce (v joulech) musíme vykonat pro rozpuštění 1,00 g ledu?

39C. Materiál hmotnosti 30,0 g má molární hmotnost 50 g/mol. Po dodání tepla 314 J se teplota zvýší z 25,0 °C na 45,0 °C. (a) Jaká je měrná tepelná kapacita tohoto materiálu? (b) Kolik molekul obsahuje? (c) Jaká je molární tepelná kapacita?

40C. V ekologickém domě skladují sluneční energii v nádobách naplněných vodou. Pro udržení teploty 22,0 °C po období pěti chladných dní je potřeba $1{,}00{\cdot}10^6$ kcal. Voda v nádobách má teplotu 50,0 °C a její hustota je $1{,}00{\cdot}10^3$ kg·m^{-3}. Kolik vody je zapotřebí?

41C. Svérázný dietolog doporučuje svým pacientům, kteří chtějí zhubnout, aby pili ledovou vodu. Jeho teorie je založena na tom, že tělo musí spálit značné množství energie k ohřátí vody (0,00 °C) na tělesnou teplotu (37,0 °C). Kolik litrů ledové vody je zapotřebí ke spálení 454 g (jedné libry) tuku? Při spálení tohoto množství tuku vytvoří tělo 3 500 kcal. Proč není dobré následovat jeho rady?

42C. Ledovce představují veliké nebezpečí pro lodě plující severním Atlantikem. Lodní trasy vedoucí tímto územím představují asi 30 % celkové dráhy lodí. Ledovce je možné zničit pomocí min, bomb a torpédování nebo je možné je rozpustit. Jaké teplo je zapotřebí k rozpuštění 10 % ledovce o hmotnosti 200 000 tun?

43C. Voda v nádobě má hmotnost 260 g. Její teplota je 0 °C. Kolik vody zůstane nezmrzlé, když odebereme teplo 50,2 kJ?

44C. Vypočítejte, kolik tepla je zapotřebí k úplnému roztavení kusu stříbra o hmotnosti 130 g a o teplotě 15 °C.

45C. Místnost je osvětlena čtyřmi stowattovými žárovkami. (100 W je příkon elektrické energie; ta se přemění na teplo a světlo.) 90 % energie se přemění na teplo. Kolik tepla se vyzáří do místnosti za jednu hodinu?

46C. Jaké množství másla s energetickou hodnotou 6 000 cal/g musí sníst muž vážící 72 kg, který chce vystoupit na Mount Eve-

rest? Mt. Everest je vysoký 8 850 m n. m. Uvažujte, že vychází z výšky 4 425 m n. m.

47C. Energetický příjem atleta je 4 000 kcal denně. Kdyby uvolňoval energii plynule po celý den, jak by dopadlo srovnání jeho energetického výdaje se stowattovou žárovkou? (Údaj získáte ve cvič. 45.)

48C. Představme si, že bychom dovedli přeměnit teplo, které jsme spotřebovali k zahřátí vody o hmotnosti m z teploty 68 °F na teplotu 78 °F, na její kinetickou energii. Jak rychle by se voda pohybovala? Anebo realističtěji: Jak rychle by se musela pohybovat nádoba s vodou teploty 68 °F, aby jejím zabrzděním (provedeným tak šikovně, aby se vně vody nic neohřálo) stoupla teplota vody na 78 °F?

49C. Při vrtání do kostky mědi o hmotnosti $m = 1{,}60$ lb pracujeme s příkonem 0,400 HP („kůň“) po dobu 2,00 min. (a) Jaká energie (teplo v jednotkách Btu) vzniká? (b) Jaký je přírustek teploty mědi, pokud se na teplo přemění 75 % energie? ($1\ \text{ft}\cdot\text{lb} = 1{,}285\cdot10^{-3}$ Btu)

50C. Závaží o hmotnosti 6,00 kg padá z výšky 50,0 m. Prostřednictvím lanka roztáčí vrtulku, která je ponořena v 0,600 kg vody. Teplota vody je 15,0 °C. O kolik C° se nanejvýš voda zahřeje?

51C. Jedna možnost, jak za chladné zimní noci udržet v garáži rozumnou teplotu, je dát do ní nádobu s vodou. Je-li hmotnost vody 125 kg a je-li její počáteční teplota 20 °C, vypočtěte: (a) Jaká energie se uvolní do okolního prostředí při zamrznutí veškeré vody? (b) Jaká byla nejmenší (rovnovážná) teplota v garáži, než všechna voda v nádobě zamrzla?

52C. Malý elektrický ponorný vařič ohřál 100 g vody na šálek kávy. Výkon vařiče je 200 W. Vypočítejte, jak dlouho trvalo ohřátí vody z 23 °C na teplotu varu. Tepelné ztráty zanedbejte.

53C. Malá dodávka o hmotnosti 2 200 kg jede po dálnici rychlostí 105 km/h za hodinu. (a) Kdyby šlo využít všechnu její kinetickou energii k přeměně vody o teplotě 100 °C na páru, kolik vody by se vypařilo? (b) Kdybychom měli za tuto energii zaplatit elektrárně při ceně 0,91 Kč/kW·h (sazba N), kolik by to stálo? Odhadněte odpověď před výpočtem.

54C. Měděný kotlík o hmotnosti 150 g obsahuje 220 g vody o teplotě 20,0 °C. Vhodíme do ní velmi horký 300 g vážící měděný váleček. Voda začne vřít a 5 g se vypaří. Konečná teplota soustavy je 100 °C. (a) Jaké množství tepla voda přijala? (b) Kolik tepla přijal kotlík? (c) Jaká byla původní teplota válečku?

55Ú. Kovová nádoba o hmotnosti 3,6 kg obsahuje 14 kg vody. Je do ní vhozen váleček z téhož kovu o hmotnosti 1,8 kg a teplotě 180 °C. Vypočítejte měrnou tepelnou kapacitu kovu, víte-li, že teplota nádoby i vody byla na počátku 16,0 °C a konečná teplota soustavy je 18,0 °C.

56Ú. Teploměr o hmotnosti 0,055 0 kg s měrnou tepelnou kapacitou $0{,}837\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ukazoval 15 °C. Byl celý ponořen do 0,300 kg vody. Teplota se ustálila na 44,4 °C. Jaká byla teplota vody před měřením?

57Ú. Jak dlouho bude trvat ohřátí 40 gal vody ze 70 °F na 100 °F ohřívačem o výkonu $2{,}0\cdot10^5$ Btu/h?

58Ú. Atlet se rozhodl shodit na váze fyzickým cvičením. (a) Kolikrát musí zvednout závaží o hmotnosti 80 kg do výšky 1 m, aby spálil 1 lb tuku (ekvivalent 3 500 kcal)? (b) Jak dlouho mu bude trvat, než shodí 1 lb, zvedá-li závaží jednou za dvě sekundy?

59Ú. Osobní auto jedoucí rychlostí 90 km/h o hmotnosti 1 500 kg náhle zabrzdilo na dráze 80 m. Kolik energie se přeměnilo na zahřátí brzd?

60Ú. Kuchařovi se rozbila kamna. Rozhodl se proto uvařit vodu na kávu pro svou ženu tak, že bude třepat termoskou s vodou. Předpokládejme, že v termosce je 500 cm^3 vody o teplotě 20 °C. Při každém otočení spadne voda z výšky 30 cm. Kuchař otočí termosku třicetkrát za minutu. Jak dlouho bude trvat, než se voda začne vařit? Teplotní ztráty zanedbejte.

61Ú. Kostka ledu o teplotě 0 °C a o hmotnosti 50,0 kg klouzala s počáteční rychlostí $5{,}38\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Zastavila se po 28,3 metrech. Kolik ledu roztálo při tření? Počítejte, jako by se všechno teplo při tření přeneslo jen do ledu.

62Ú. Měrná tepelná kapacita látky se mění s teplotou podle vztahu: $c = 0{,}20 + 0{,}14T + 0{,}023T^2$. (Teplota je ve stupních Celsia a c je v $\text{cal}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.) Vypočítejte teplo, které je potřeba k zahřátí 2 g látky z teploty 5 °C na 15 °C.

63Ú. V solárním ohřívači vody se využívá sluneční energie. Na střeše prochází sluneční záření průhledným krytem a prohřívá v trubkách kolektoru vodu, která je pak čerpána do zásobníku. Účinnost tohoto zařízení je 20 % (tj. 80 % dopadající sluneční energie se pro naše účely nepodaří využít). Jaká plocha je potřeba k zahřátí 200 l vody z teploty 20 °C na 40 °C za 1,0 h? Intenzita slunečního záření je $700\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

64Ú. V termosce je 130 cm^3 kávy o teplotě 80 °C. Vhodíme do ní 12,0 g ledu o teplotě 0 °C. O kolik stupňů se káva ochladí, když led roztaje? (Z hlediska termiky není podstatný rozdíl mezi kávou a čistou vodou.)

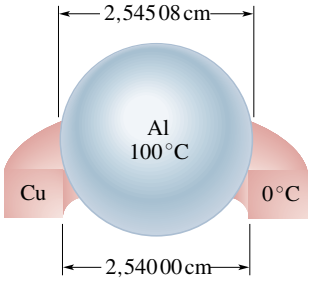
65Ú. Kolik g páry o teplotě 100 °C je zapotřebí přivést do termosky ke kusu ledu o hmotnosti 150 g a teplotě 0 °C, aby vznikla voda teploty 50 °C?

66Ú. Student si chladí čaj tak, že smíchá 500 g horkého čaje se stejným množstvím ledu o teplotě 0 °C. Počáteční teplota čaje byla: (a) 90 °C, (b) 70 °C. Jaká bude výsledná teplota nápoje?

67Ú. Do 200 g vody byly vhozeny (a) dvě, (b) jedna padesátigramová kostka ledu. Počáteční teplota vody byla 25 °C, ledu −15 °C. Jaká bude konečná teplota nápoje? Tepelnou kapacitu sklenice zanedbejte.

68Ú. Mějme 20,0 g měděný prstýnek o vnitřním průměru 2,540 00 cm o teplotě 0,000 °C a hliníkovou kuličku o průměru 2,545 08 cm o teplotě 100,0 °C. Kulička leží na prstýnku podle obr. 19.33. Po vzájemném vyrovnání teplot zapadne kulička přesně do prstýnku. Jaká je její hmotnost? Tepelnou výměnu s okolím zanedbejte.

69Ú. **Průtokový kalorimetr** je zařízení sloužící k měření měrných tepelných kapacit protékajících kapalin. Porovnává rozdíl mezi přítokovou a výtokovou teplotou kapaliny, kterou zahřívá vnitřní spirálou o známém výkonu. Při měření měla kapalina



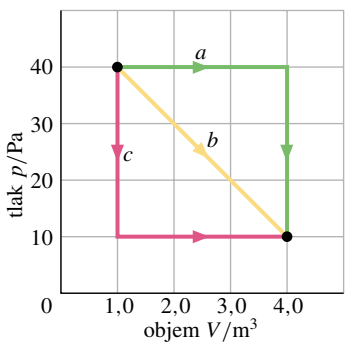
Obr. 19.33 Úloha 68

hustotu 0,85 g/cm^3 a objemový průtok 8,0 cm^3/s. Výkon spirály uvnitř kalorimetru byl 250 W. Rozdíl mezi teplotou přítoku a výtoku byl 15 C°. Jaká byla měrná tepelná kapacita kapaliny?

70Ú. V kalorimetru ohříváme látku elektrickou spirálou stálým výkonem a měříme teplotu látky T jako funkci času t. (a) Ukažte, jak můžeme ze znalosti $T = T(t)$ vyjádřit závislost teplotní kapacity látky na teplotě. (b) Předpokládejme, že by v jistém teplotním rozmezí byla teplota úměrná t^3. Jak by závisela teplotní kapacita na teplotě?

ODST. 19.10 Zvláštní případy prvního zákona termodynamiky

71C. Při rozpínání plynu z objemu 1,0 m^3 do objemu 4,0 m^3 klesá tlak z 40 Pa na 10 Pa. Jakou práci vykoná plyn, když tlak se mění s objemem třemi způsoby podle obr. 19.34?

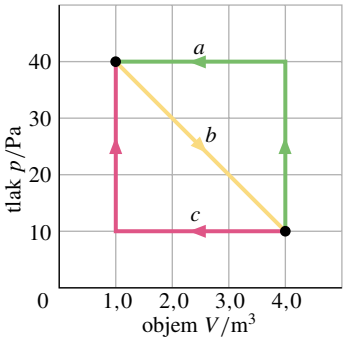


Obr. 19.34 Cvičení 71

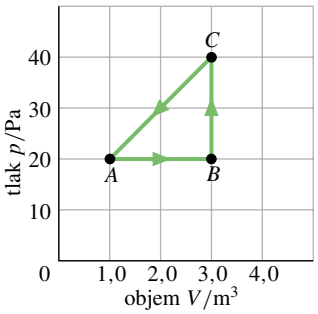
72C. Plyn se rozepne z objemu 1,0 m^3 na čtyřnásobek dle křivky b podle obr. 19.35. Potom je stlačen zpět na objem 1,0 m^3 dle křivky a nebo c. Určete práci, kterou plyn vykonal.

73C. Soustava přijala 200 J práce a odevzdala 70,0 cal. S uvážením prvního zákona termodynamiky vyjádřete hodnoty (a znaménka) (a) W, (b) Q, (c) ΔU.

74C. Termodynamický děj proběhl z výchozího stavu A do B a přes C zpátky do A podle obr. 19.36a. (a) Doplňte do tabulky znaménka + a − pro příslušné veličiny v každém z procesů. (b) Vypočítejte práci, kterou vykonala soustava během úplného cyklu A–B–C–A.



Obr. 19.35 Cvičení 72



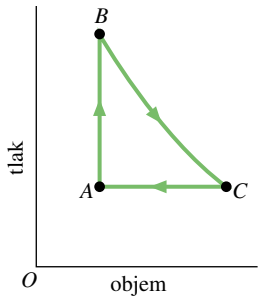
(a)

	Q	W	ΔE_{int}
$A \rightarrow B$			+
$B \rightarrow C$	+		
$C \rightarrow A$			

(b)

Obr. 19.36 Cvičení 74

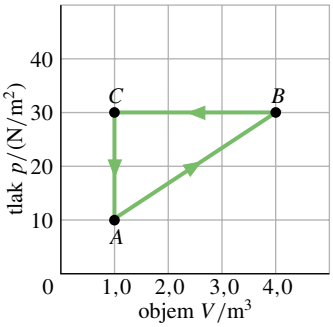
75C. Plyn vykonal cyklus podle obr. 19.37. Vypočítejte teplo dodané plynu během děje C–A, když $Q_{A-B} = 20{,}0$ J je teplo dodané během děje A–B, děj B–C je adiabatický a úhrnná práce plynem vykonaná během cyklu je 15,0 J.



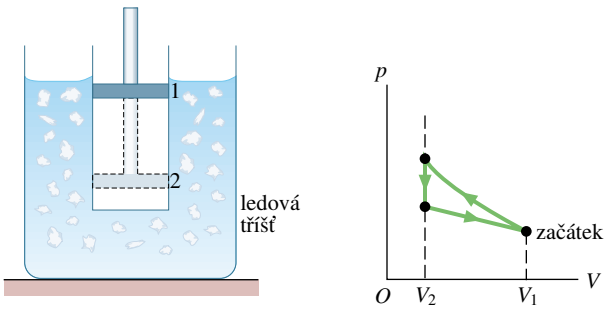
Obr. 19.37 Cvičení 75

76C. Plyn vykonal cyklus podle obr. 19.38. Vypočítejte úhrnné teplo dodané plynu během jednoho cyklu.

77Ú. Na obr. 19.39a je válec obsahující plyn, který je uzavřen pohyblivým pístem. Válec je vložen do ledové tříště. Píst je *velmi rychle* stlačen z horní polohy 1 do dolní 2 a držen, dokud se teplota plynu nevyrovná s teplotou tříště. Potom je *pomalu* vytažen zpět do polohy 1. Obr. 19.39b ukazuje p-V diagram tohoto děje. Jakou práci plyn přijme, jestliže v průběhu cyklu roztaje 100 g ledu?

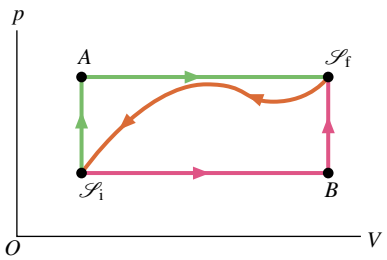


Obr. 19.38 Cvičení 76



Obr. 19.39 Úloha 77

78Ú. Soustava během děje $\mathscr{S}_\mathrm{i}$–A–$\mathscr{S}_\mathrm{f}$ podle obr. 19.40 přijala teplo $Q = 50\,\mathrm{cal}$ a vykonala práci $W = 20\,\mathrm{cal}$. Během děje $\mathscr{S}_\mathrm{i}$–B–$\mathscr{S}_\mathrm{f}$ přijala teplo $Q = 36\,\mathrm{cal}$. (a) Jaká je vykonaná práce během děje $\mathscr{S}_\mathrm{i}$–B–$\mathscr{S}_\mathrm{f}$? (b) Jaké teplo přijme soustava během děje popsaného křivkou $\mathscr{S}_\mathrm{f}$–$\mathscr{S}_\mathrm{i}$, jestliže je vykonaná práce $W = -13\,\mathrm{cal}$? (c) Jaká je vnitřní energie U_f, jestliže je $U_\mathrm{i} = 10\,\mathrm{cal}$? (d) Jak velké je teplo přijaté během dějů $\mathscr{S}_\mathrm{i}$–B a B–$\mathscr{S}_\mathrm{f}$, je-li $U_B = 22\,\mathrm{cal}$?



Obr. 19.40 Úloha 78

ODST. 19.11 Mechanismy přenosu tepla

79C. Průměrná hustota tepelného toku zemským povrchem v Severní Americe je $54{,}0\,\mathrm{mW\cdot m^{-2}}$. Průměrná tepelná vodivost skály je $2{,}50\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Má-li povrch teplotu 10,0 °C, jaká by měla být teplota v hloubce 35,0 km? (Ve skutečnosti je teplota spoluvytvářena rozpadem radioaktivních prvků v zemské kůře. To však zde zanedbejte.)

80C. Strop rodinného domku v chladném klimatu by měl mít tepelný odpor $R = 30$ (dle americké normy). Jak tlustá by měla být izolace (a) z polyuretanové pěny, (b) ze stříbra?

81C. Tepelná vodivost skla (Pyrex) je $2{,}9\cdot10^{-3}\,\mathrm{cal/(cm\cdot C^\circ\cdot s)}$ při 0 °C. (a) Převeďte tuto hodnotu jednak do jednotek SI, jednak do $\mathrm{Btu/(ft\cdot F^\circ\cdot h)}$. (b) Jaký je tepelný odpor R skleněné destičky o tloušťce 0,25 in?

82C. (a) Vypočítejte tepelný tok oblečením lyžaře v ustáleném stavu, víte-li, že povrch lidského těla je asi $1{,}8\,\mathrm{m^2}$ a vrstva oblečení je 1,0 cm tlustá. Povrchová teplota kůže je 33 °C, teplota povrchu obleku 1,0 °C, tepelná vodivost oblečení je $0{,}040\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. (b) Jak se změní situace, když lyžař upadne a oblečení nasákne vodou o tepelné vodivosti $0{,}60\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$?

83C. Uvažujte ustálený tok tepla měděnou deskou podle obr. 19.17, kde $d = 25{,}0\,\mathrm{cm}$, $S = 90{,}0\,\mathrm{cm^2}$, $T_\mathrm{H} = 125\,^\circ\mathrm{C}$ a $T_\mathrm{S} = 10{,}0\,^\circ\mathrm{C}$. Určete jeho velikost (tj. výkon při přenosu tepla destičkou).

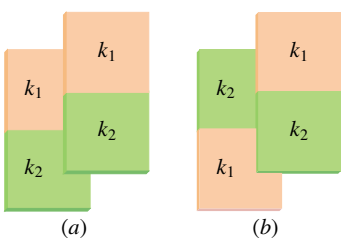
84C. Válcová měděná tyč o délce 1,2 m a obsahu příčného průřezu $4{,}8\,\mathrm{cm^2}$ je izolována proti povrchovým tepelným ztrátám. Konce tyče udržujeme v teplotním rozdílu 100 C°, jeden je v ledové tříšti, druhý ve vroucí vodě. (a) Vypočítejte závislost teploty na vzdálenosti od konce tyče. (b) Jak rychle se bude rozpouštět ledová tříšť? (Rozvažte, jaká fyzikální jednotka nejlépe popisuje „rychlost rozpouštění ledu“.)

85C. Ukažte, že teplota T_X na rozhraní horké a studené destičky na obr. 19.18 je dána vzorcem

$$T_\mathrm{X} = \frac{R_1 T_\mathrm{H} + R_2 T_\mathrm{S}}{R_1 + R_2}.$$

86C. Kdybyste byl (jako astronaut ve filmu Vesmírná odyssea 2001) daleko od Slunce vyslán z kosmické lodi do vesmíru bez speciální ochrany, cítil byste mráz vesmíru: sám byste vyzařoval tepelnou energii, ale nepřijímal byste téměř žádnou energii ze svého okolí. (a) Jak rychle by vám ubývala energie zářením? (b) Kolik energie byste ztratil za 30 s? Emisivitu zvolme 0,90; odhadněte ostatní data, která potřebujete k výpočtu.

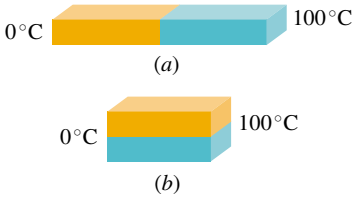
87C. Čtyři čtvercové izolační desky vyrobené ze dvou různých materiálů se stejnou tloušťkou l a se stejným obsahem S by měly pokrýt plochu o obsahu $2S$. To lze udělat dvěma způsoby podle obr. 19.41. Jaké uspořádání je úspornější (a), nebo (b)?



Obr. 19.41 Cvičení 87

88Ú. Dvě stejné pravoúhlé kovové tyče jsou svařeny konci k sobě podle obr. 19.42a. Protéká jimi ustálený tok tepla 10 J za

dvě minuty. Za jak dlouho by prošlo 10 J tepla stejnými tyčemi, ale svařenými po délce, podle obr. 19.42b?



Obr. 19.42
Úloha 88

89Ú. Vypočítejte tepelný tok dveřmi, které jsou 2,0 m vysoké a 0,75 m široké. (a) Dveře tvoří panel z hliníku tlustý 1,5 mm, pokrytý ze 75 % panelem ze skla 3,0 mm tlustého. (b) Dveře jsou z bílé borovice a jsou 2,5 cm tlusté. Předpokládejte rozdíl vnitřní a vnější teploty 33 C°. Vliv rámu zanedbejte.

90Ú. Velká válcová cisterna na vodu má železné dno o průměru 1,7 m a 5,2 mm tlusté. Voda je ohřívána plynovým hořákem tak, že se udržuje teplotní rozdíl 2,3 C° mezi volnou hladinou a dnem cisterny. Kolik tepla projde dnem za 5,0 min? (Železo má tepelnou vodivost 67 $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.)

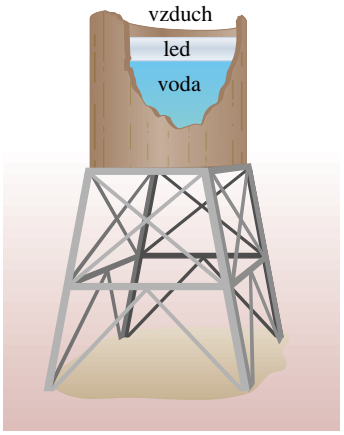
91Ú. (a) Jaké jsou tepelné ztráty okenního skla 3,0 mm tlustého, je-li vnější teplota −20 °F a vnitřní +72 °F? (Výsledek uveďte v jednotkách SI.) (b) Venkovní okno se skládá ze dvou skleněných tabulí téže tloušťky. Mezi tabulemi skla je vzduchová vrstva tloušťky 7,5 cm. Jaké budou tepelné ztráty, uvažujeme-li pouze ztráty vedením tepla?

92Ú. Koule o poloměru 0,500 metru a teplotě 27,0 °C má emisivitu 0,850 a je v prostředí o teplotě 77,0 °C. (a) Jaký tepelný výkon vyzařuje? (b) Jaký výkon pohlcuje? (c) Jaký je úhrnný vyzařovaný výkon koule?

93Ú. Krychle s délkou hrany $6{,}0 \cdot 10^{-6}$ m, s emisivitou 0,75 a s teplotou −100 °C se nachází v prostředí o teplotě −150 °C. Jaký tepelný výkon vyměňuje s okolím?

94Ú. Válec o poloměru $r_1 = 2{,}5$ cm a délce $h_1 = 5{,}0$ cm má emisivitu 0,85 a teplotu 30 °C. Je zavěšen v prostředí o teplotě 50 °C. (a) Jaký má zářivý výkon P_1? (b) Na jaký výkon P_2 klesne, zmenšíme-li poloměr válce na $r_2 = 0{,}50$ cm? (c) Jaký je poměr P_2/P_1?

95Ú. Nádrž s vodou byla ponechána venku v mrazivém počasí. Vytvořila se vrstva ledu silná 5,0 cm (obr. 19.43). Vzduch nad ledem měl teplotu −10 °C. Vypočítejte rychlost nárůstu dalšího ledu na spodku ledové vrstvy (v centimetrech za hodinu). Tepelná vodivost ledu je 0,004 0 cal/(s·cm· C°) a hustota ledu je 0,92 g/cm^3. Předpokládejte, že nádrž dokonale izoluje.



Obr. 19.43 Úloha 95

96Ú. Na mělkém rybníku se vytvořil led. Teplota vzduchu nad ním je stálá, −5,0 °C. Rybník je (včetně ledu) hluboký 1,4 m, teplota na jeho dně se udržuje 4,0 °C. Vypočítejte, jak silný je led. Tepelná vodivost ledu je 0,40 cal/(m· C°·s), vody 0,12 cal/(m· C°·s).

97Ú. Tři kovové tyče — měděná, hliníková a mosazná — jsou sesazeny v tomto pořadí za sebou. Všechny jsou 6,00 cm dlouhé a v průměru mají 1,00 cm. Konec měděné, resp. mosazné tyče je udržován na teplotě varu vody, resp. tání ledu. Jaká teplota se ustálí na spoji mezi hliníkovou a mosaznou tyčí? A mezi hliníkovou a měděnou tyčí? Tepelná vodivost mosazi je 109 $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.

20
Kinetická teorie plynů



Představte si, že jste se právě vrátili z lyžařské túry do promrzlé chaty; co uděláte nejdřív? Nejspíš zatopíte v kamnech — a proč? Řeklo by se, že kamna zvýší obsah vnitřní („tepelné“) energie vzduchu v celé místnosti natolik, že se v něm budete cítit příjemně. Jakkoliv to vypadá logicky, má to velkou slabinu: vnitřní energie veškerého vzduchu v místnosti se totiž zahřátím nezmění. Jak je to možné? A když je tomu tak, proč tedy v kamnech topíme?

20.1 NOVÝ POHLED NA PLYNY

Klasická termodynamika, kterou jsme se zabývali v minulé kapitole, nepojednává vůbec o atomech. V jejích zákonech vystupují pouze makroskopické veličiny jako objem, tlak a teplota. Přesto je všeobecně známo, že plyn je souhrn obrovského množství atomů a molekul (tj. skupin atomů vázaných k sobě). Tlak vyvolaný plynem jistě souvisí s nepřetržitým „bubnováním“ jeho molekul na stěny nádoby. Schopnost plynu vyplnit zcela objem nádoby je zase spojena s možností volného pohybu molekul. A konečně teplota a vnitřní energie plynu určitě souvisí s kinetickou energií těchto molekul. Když vyjdeme z těchto představ, jistě získáme nové poznatky o plynech. Tento molekulový přístup nazýváme **kinetickou teorií plynů**; ta je také náplní této kapitoly.

20.2 AVOGADROVA KONSTANTA

Obrátíme-li v dalším svou pozornost na molekuly, bude rozumné měřit velikost zkoumaných soustav v molech. Pak si totiž můžeme být jisti, že dva porovnávané vzorky mají stejný počet molekul. Jednotka **mol**, se kterou jsme se setkali již na konci čl. 1.6, je jednou ze sedmi základních jednotek soustavy SI a je definována takto:

Jeden mol je počet atomů obsažených ve 12 gramech uhlíku ^{12}C.

Říkáme „jeden mol helia“ nebo „jeden mol vody“ a rozumíme tím jistý počet základních jednotek zkoumaného systému. Ale stejně dobře bychom mohli uvažovat „jeden mol tenisáků“, přičemž základní jednotkou by byl jeden tenisový míček.

První, co nás však napadne, je otázka: „A kolik atomů nebo molekul je v jednom molu?“ Odpověď byla zjištěna experimentálně; je to

$$N_A \doteq 6{,}02{\cdot}10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1} \quad \text{(Avogadrova konstanta).} \qquad (20.1)$$

Toto číslo nazýváme **Avogadrova konstanta** (dříve též **Avogadrovo číslo**) podle italského vědce Amadea Avogadra (1776–1856), který formuloval hypotézu, že stejné objemy všech plynů za stejné teploty a stejného tlaku obsahují stejný počet molekul.

Počet molů n ve vzorku libovolné látky lze určit ze vztahu

$$n = \frac{N}{N_A}, \qquad (20.2)$$

kde N je počet molekul ve vzorku. Počítat jednotlivé molekuly však není snadné, a tak počet molů n ve vzorku určujeme z jeho hmotnosti m_x a buďto z molární hmotnosti m_m (tj. hmotnosti 1 molu uvažované látky), anebo z hmotnosti m' jedné molekuly:

$$n = \frac{m_x}{m_m} = \frac{m_x}{m' N_A}. \qquad (20.3)$$

Extrémně vysoká hodnota Avogadrovy konstanty poukazuje na to, jak malé a jak početné musí být atomy. Jeden mol vzduchu se například bez problémů vejde do kufru. Pokud bychom tyto molekuly rovnoměrně rozprostřeli po povrchu Země, bylo by jich kolem 120 000 na čtverečný centimetr. Jiný příklad: jeden mol tenisáků by vyplnil stejný objem jako sedm Měsíců.

RADY A NÁMĚTY

Bod 20.1: *Počet molů — ale čeho?*

Řekneme-li „jeden mol helia“, znamená to vždy $6{,}02{\cdot}10^{23}$ atomů He a také $6{,}02{\cdot}10^{23}$ molekul He, protože pojem atomu splývá u helia s pojmem molekuly jako nejmenší částečky materiálu, zachovávající si stále ještě (chemické) vlastnosti celku. Naproti tomu označení „jeden mol vodíku“ je dvojznačné; míníme-li atomy H (každý má hmotnost $1{,}6{\cdot}10^{-27}$ kg), tak 1 mol tvoří (1 mol) $\cdot$ $(6{,}02{\cdot}10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1})$ $\cdot$ $\cdot$ $(1{,}6{\cdot}10^{-27}\ \mathrm{kg}) \doteq 1$ g vodíku. Míníme-li však molekuly H_2, pak 1 mol molekulového vodíku představuje (1 mol) $\cdot$ $\cdot$ $2(6{,}02{\cdot}10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}) \cdot (1{,}6{\cdot}10^{-27}\ \mathrm{kg}) \doteq 2$ g vodíku. Stručně a přehledně: je-li v balonku 0,4 g vodíku, je v něm 0,4 mol H (atomy) neboli 0,2 mol H_2 (molekuly).

20.3 IDEÁLNÍ PLYNY

V této kapitole chceme vysvětlit makroskopické vlastnosti plynu (jako je tlak a teplota) na základě chování jeho molekul. Okamžitě ale vyvstává otázka: „Jakého plynu?“ Měl by to být vodík či kyslík nebo metan anebo dokonce fluorid uranový? Tyto plyny jsou samozřejmě různé. Nicméně bylo experimentálně zjištěno, že když uzavřeme různé plyny stejného látkového množství (např. 1 mol) a stejné teploty do nádob stejného objemu, naměříme v každé nádobě téměř stejný tlak. Jestliže opakujeme měření při snížené hustotě, pak i tento rozdíl mezi tlaky prakticky vymizí. Také jiné experimenty potvrzují, že se reálné plyny při nízkých hustotách chovají podle vztahu

$$pV = nRT \qquad \text{(ideální plyn),} \qquad (20.4)$$

kterému říkáme **stavová rovnice ideálního plynu**. V této rovnici značí p tlak plynu (absolutní, nikoli přetlak!), n je

počet molů plynu a R je tzv. **plynová konstanta**, která má pro všechny plyny stejnou hodnotu

$$R = 8{,}31\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}. \tag{20.5}$$

Teplota T v rov. (20.4) musí být vyjádřena v kelvinech. Pokud je hustota plynu dostatečně nízká, popisuje rov. (20.4) jakýkoli plyn nebo směs různých plynů, přičemž n značí celkový počet molů všech plynů.

Můžete se ovšem také ptát: „Co je to ideální plyn a co je vlastně na něm tak *ideální*?“ Odpověď je skryta v jednoduchosti rov. (20.4), která popisuje jeho makroskopické vlastnosti. Pomocí této rovnice, jak uvidíme později, budeme schopni snadno nalézt mnoho vlastností ideálních plynů. Přestože se v přírodě nesetkáme s opravdovým ideálním plynem, všechny reálné plyny se k němu blíží při nízkých hustotách, což odpovídá větším vzdálenostem mezi molekulami. Studium ideálního plynu nám tak umožňuje snáze nahlédnout do chování skutečných plynů v tomto limitním případě.

Práce konaná ideálním plynem za stálé teploty

Uvažujme n molů ideálního plynu uzavřeného do válce pod pístem. Nechme ho zvětšovat objem z počáteční hodnoty V_i na koncovou hodnotu V_f, přičemž teplotu během tohoto děje udržujme konstantní. Takový proces nazýváme **izotermické rozpínání** (neboli **izotermická expanze**) a opačný proces **izotermické stlačení** (neboli **izotermická komprese**).

Zobrazíme-li uvažovaný izotermický děj jako závislost tlaku plynu na jeho teplotě v tzv. p-V diagramu, obdržíme část křivky (na obr. 20.1 úsek prostřední křivky od počátečního stavu $\mathscr{S}_\mathrm{i}$ do koncového stavu $\mathscr{S}_\mathrm{f}$) nazývané **izoterma**. Obecně je izoterma křivka, na níž leží body o stejné teplotě. V případě ideálního plynu je popsána vztahem

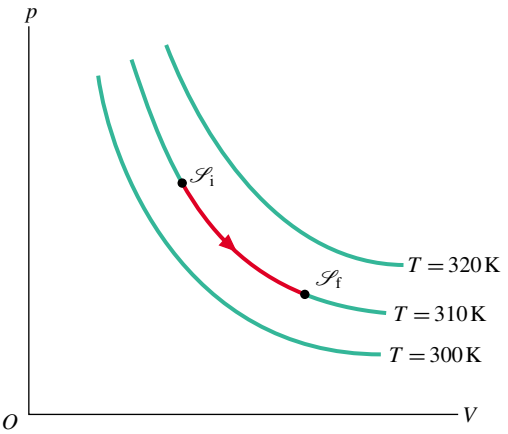
$$p = nRT\frac{1}{V} = \text{konst.}\,\frac{1}{V}, \tag{20.6}$$

kde teplotu T udržujeme konstantní. Pro tři různé teploty je tato závislost ukázána na obr. 20.1.

Vypočtěme nyní práci, kterou vykoná ideální plyn při izotermickém rozpínání. Z předchozí kapitoly (viz rov. (19.23)) známe obecný vztah

$$W = \int_{V_\mathrm{i}}^{V_\mathrm{f}} p\,\mathrm{d}V \tag{20.7}$$

pro práci vykonanou plynem při změně jeho objemu. Protože se zde zabýváme ideálním plynem, můžeme za p do-



Obr. 20.1 Tři izotermy v p-V diagramu. Zvýrazněný úsek (s vyznačeným směrem) prostřední izotermy odpovídá izotermickému rozpínání plynu z počátečního stavu $\mathscr{S}_\mathrm{i}$ do koncového stavu $\mathscr{S}_\mathrm{f}$. Opačný směr by odpovídal izotermickému stlačování ze stavu $\mathscr{S}_\mathrm{f}$ do stavu $\mathscr{S}_\mathrm{i}$.

sadit z rov. (20.4) a dostaneme

$$W = \int_{V_\mathrm{i}}^{V_\mathrm{f}} \frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V. \tag{20.8}$$

Navíc uvažujeme izotermické rozpínání, takže teplota T je konstantní a lze ji společně s ostatními konstantami vytknout před integrál, tedy

$$W = nRT\int_{V_\mathrm{i}}^{V_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT\left[\ln V\right]_{V_\mathrm{i}}^{V_\mathrm{f}}. \tag{20.9}$$

Použijeme-li vztah $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$, dostaneme

$$W = nRT\ln\frac{V_\mathrm{f}}{V_\mathrm{i}} \quad \begin{matrix}\text{(ideální plyn,}\\ \text{izotermický děj).}\end{matrix} \tag{20.10}$$

Připomeňme, že symbol ln značí *přirozený* logaritmus, tj. logaritmus při základu e.

Při rozpínání je dle definice $V_\mathrm{f} > V_\mathrm{i}$, tedy podíl $V_\mathrm{f}/V_\mathrm{i}$ v rov. (20.10) je větší než jedna. Přirozený logaritmus hodnot větších než jedna je kladný, takže i práce vykonaná plynem při izotermickém rozpínání, jak očekáváme, je kladná. Při stlačování je naopak $V_\mathrm{f} < V_\mathrm{i}$ a poměr $V_\mathrm{f}/V_\mathrm{i}$ je menší než jedna. Přirozený logaritmus v rov. (20.10) je nyní záporný, z čehož vyplývá, že práce vykonaná plynem je záporná.

Rov. (20.10) neurčuje práci vykonanou ideálním plynem při libovolném ději, ale pouze při ději, během něhož udržujeme konstantní teplotu. Pokud se teplota mění, nemůžeme T v rov. (20.8) vytknout před integrál, neboť bude záviset na objemu V. Proto nám znalost rov. (20.10) nestačí a obecně se musíme vrátit ke vztahu (20.7).

Pokud tak učiníme, můžeme ještě snadno odvodit vzorce pro práci vykonanou plynem (a dokonce nejen ideálním) při dalších dvou dějích, a to **izobarickém**, během něhož se nemění tlak plynu, a **izochorickém**, kdy se nemění jeho objem. Jestliže se nemění objem plynu, dává rov. (20.7) přímo

$$W = 0 \qquad \text{(izochorický děj)}. \tag{20.11}$$

Pokud se naopak objem plynu mění a jeho tlak zůstává konstantní, dostaneme

$$W = p(V_f - V_i) = p\Delta V \quad \text{(izobarický děj)}. \tag{20.12}$$

KONTROLA 1: Ideální plyn má počáteční tlak 3 a počáteční objem 4 (v jistých jednotkách tlaku a objemu). V tabulce jsou uvedeny koncové tlaky a objemy (ve stejných jednotkách) pro pět dějů. Které z těchto dějů začínají a končí na stejné izotermě?

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
p	12	6	5	4	1
V	1	2	7	3	12

PŘÍKLAD 20.1

Ve válci je 20 l kyslíku při teplotě 20 °C a tlaku 15 atm. Teplota byla zvýšena na 35 °C a objem byl zmenšen na 8,5 l. Jaký bude výsledný tlak plynu v atmosférách, uvažujeme-li ideální plyn?

ŘEŠENÍ: Použijeme-li rov. (20.4), můžeme psát

$$nR = \frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f}.$$

Odtud pro p_f nalezneme

$$p_f = \frac{p_i T_f V_i}{T_i V_f}. \tag{20.13}$$

Všimněte si, že pokud převedeme daný počáteční a koncový objem z litrů na základní jednotky, tj. metry krychlové, multiplikativní (tj. *násobící*) převodní faktory se v rov. (20.13) vykrátí. Totéž platí u tlaku pro převodní faktory mezi atmosférami a pascaly. Abychom však převedli stupně Celsia na kelviny, musíme použít *aditivní* faktor, tedy přičíst hodnotu 273, kterou zkrátit nemůžeme. Proto musíme psát

$$T_i = (273 + 20)\,\text{K} = 293\,\text{K},$$
$$T_f = (273 + 35)\,\text{K} = 308\,\text{K}.$$

Nyní dosadíme tyto hodnoty do rov. (20.13) a dostaneme

$$p_f = \frac{(15\,\text{atm})(308\,\text{K})(12\,\text{l})}{(293\,\text{K})(8{,}5\,\text{l})} = 22\,\text{atm}. \quad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 20.2

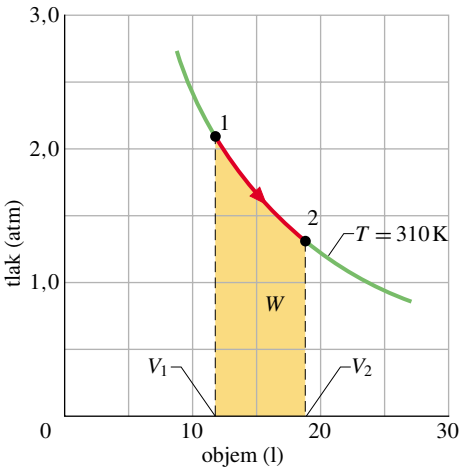
Jeden mol kyslíku (považujme ho za ideální plyn) expanduje při konstantní teplotě $T = 310\,\text{K}$ z počátečního objemu $V_1 = 12\,\text{l}$ na koncový objem $V_2 = 19\,\text{l}$.

(a) Jakou práci při tom vykoná?

ŘEŠENÍ: Z rov. (20.10) obdržíme

$$W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} =$$
$$= (1\,\text{mol})(8{,}31\,\text{J·mol}^{-1}\text{·K}^{-1})(310\,\text{K}) \ln \frac{(19\,\text{l})}{(12\,\text{l})} =$$
$$= 1\,180\,\text{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Na obr. 20.2 je zobrazen daný děj jako úsek izotermy v p-V diagramu. Práci vykonané plynem odpovídá plocha pod křivkou 1 – 2.



Obr. 20.2 Příklad 20.2. Zvýrazněná plocha odpovídá práci vykonané 1 molem kyslíku při rozpínání za konstantní teploty $T = 310\,\text{K}$.

(b) Jakou práci vykoná plyn během izotermického stlačování z $V_2 = 19\,\text{l}$ na $V_1 = 12\,\text{l}$?

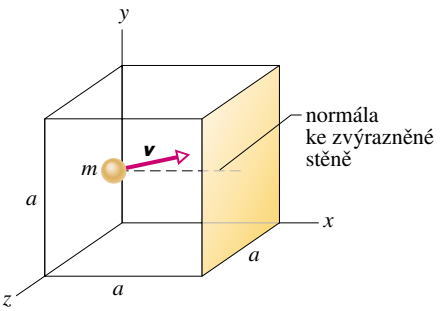
ŘEŠENÍ: Stejným postupem jako v (a) dostaneme

$$W = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} =$$
$$= (1\,\text{mol})(8{,}31\,\text{J·mol}^{-1}\text{·K}^{-1})(310\,\text{K}) \ln \frac{(12\,\text{l})}{(19\,\text{l})} =$$
$$= -1\,180\,\text{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Výsledek má stejnou hodnotu, ale opačné znaménko než při izotermickém rozpínání v případě (a). Znaménko minus nám říká, že musíme *vykonat* práci 1 180 J, abychom plyn stlačili z objemu V_2 na objem V_1.

20.4 TLAK, TEPLOTA A STŘEDNÍ KVADRATICKÁ RYCHLOST

Nyní se budeme zabývat naším prvním problémem z kinetické teorie plynů. Uvažujme n molů ideálního plynu uzavřených v krychli o objemu V (obr. 20.3), jejíž stěny jsou udržovány na stálé teplotě T. Jaký je vztah mezi tlakem plynu p působícím na stěny a rychlostí molekul?



Obr. 20.3 Krychle o hraně a obsahující n molů ideálního plynu. Molekula o hmotnosti m pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}$ narazí na zvýrazněnou stěnu o ploše a^2. Na obrázku je též čárkovaně vyznačena normála k této stěně.

Molekuly plynu se v krychli pohybují všemi směry a různými rychlostmi, narážejí navzájem do sebe a odrážejí se od stěn jako koule na kulečníku. Pro začátek však nebudeme studovat srážky mezi molekulami, ale pouze pružný odraz od stěny.

Na obr. 20.3 vidíme typickou molekulu plynu o hmotnosti m a rychlosti $\boldsymbol{v}$, která za chvíli narazí na zvýrazněnou stěnu krychle. Protože odraz molekul od stěny považujeme za pružný, změní se jen x-ová složka rychlosti, a to na opačnou. Nezmění se však velikost rychlosti. Zároveň se změnou rychlosti dojde též ke změně x-ové složky hybnosti částice z hodnoty mv_x na $(-mv_x)$, tedy

$$\Delta p_x = (-mv_x) - (mv_x) = -2mv_x.$$

Hybnost $\Delta p'_x$ přenesená touto molekulou na stěnu má opačné znaménko, tj. $\Delta p'_x = -\Delta p_x = +2mv_x$. (U složky vektoru hybnosti p_x pišme důsledně index, abychom ji nezaměnili se skalárním tlakem p.)

Molekula na obr. 20.3 bude narážet na stěnu opakovaně. Doba Δt mezi jednotlivými nárazy je rovna době, za kterou molekula doletí k protější stěně a zpátky, tj. urazí vzdálenost $2a$ konstantní rychlostí v_x. (Uvědomte si, že tato doba se nezmění, pokud mezitím molekula narazí na některou z ostatních čtyř stěn, neboť tento náraz nemá vliv na rychlost ve směru osy x.) Hybnost přenesená na zvýrazněnou stěnu krychle jednou molekulou za jednotku času je tedy

$$\frac{\Delta p'_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2a/v_x} = \frac{mv_x^2}{a}.$$

Z druhého Newtonova zákona ($\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$) plyne, že hybnost molekuly přenesená na stěnu krychle za jednotku času se rovná síle působící na tuto stěnu. Abychom nalezli celkovou sílu působící na danou stěnu, musíme sečíst příspěvky od všech narážejících molekul, přičemž musíme brát v úvahu jejich různé rychlosti. Vydělíme-li pak celkovou sílu F_x plochou stěny a^2, dostaneme tlak p působící na stěnu. Tedy

$$p = \frac{F_x}{a^2} = \frac{mv_{x1}^2/a + mv_{x2}^2/a + \ldots + mv_{xN}^2/a}{a^2} = \\ = \left(\frac{m}{a^3}\right)(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \ldots + v_{xN}^2), \qquad (20.14)$$

kde N je počet molekul v krychli.

Protože $N = nN_\mathrm{A}$, vystupuje v rov. (20.14) v druhé závorce součet nN_A členů. Tento součet můžeme nahradit výrazem $nN_\mathrm{A}\overline{v_x^2}$, kde $\overline{v_x^2}$ značí střední hodnotu kvadrátu x-ové složky rychlosti všech molekul. Rov. (20.14) tak nabývá tvaru

$$p = \frac{nmN_\mathrm{A}}{a^3}\overline{v_x^2}.$$

Výraz mN_A je ovšem molární hmotnost m_m plynu (tj. hmotnost jednoho molu plynu) a a^3 není nic jiného než jeho objem V, tedy

$$p = \frac{nm_\mathrm{m}\overline{v_x^2}}{V}. \qquad (20.15)$$

Pro každou molekulu platí, že $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Protože je v krychli mnoho molekul a všechny se pohybují náhodnými směry, jsou střední hodnoty kvadrátů jednotlivých složek rychlostí stejné a mají hodnotu $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$. Rov. (20.15) lze proto přepsat na tvar

$$p = \frac{nm_\mathrm{m}\overline{v^2}}{3V}. \qquad (20.16)$$

Odmocnina z $\overline{v^2}$ je jistým druhem střední rychlosti, kterou nazýváme **střední kvadratická rychlost** molekul a značíme ji v_ef. Dle definice $v_\mathrm{ef} = \sqrt{\overline{v^2}}$ a rov. (20.16) tak můžeme psát

$$p = \frac{nm_\mathrm{m}v_\mathrm{ef}^2}{3V}. \qquad (20.17)$$

Tato rovnice (platná pro objem V libovolného tvaru) je základní rovnicí kinetické teorie, neboť nám říká, jak souvisí tlak plynu (čistě makroskopická veličina) s rychlostí jednotlivých molekul (čistě mikroskopická veličina).

Rov. (20.17) můžeme také obrátit, a určovat tak střední kvadratickou rychlost molekul z makroskopických charakteristik plynu, použijeme-li navíc stavovou rovnici ideálního plynu $pV = nRT$. Platí například

$$v_{\mathrm{ef}} = \sqrt{\frac{3RT}{m_{\mathrm{m}}}}. \qquad (20.18)$$

Tabulka 20.1 **Rychlosti molekul za pokojové[a] teploty** ($T = 300\,\mathrm{K}$)

PLYN	$\frac{m_{\mathrm{m}}}{10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot mol^{-1}}}$	$\frac{v_{\mathrm{ef}}}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$
vodík (H_2)	2,02	1 920
helium (He)	4,0	1 370
vodní pára (H_2O)	18,0	645
dusík (N_2)	28,0	517
kyslík (O_2)	32,0	483
oxid uhličitý (CO_2)	44,0	412
oxid siřičitý (SO_2)	64,1	342

[a] Pro jednoduchost bereme často pokojovou teplotu rovnu 300 K, ačkoliv by nám při ní (27 °C) bylo dosti horko.

V tab. 20.1 jsou uvedeny střední kvadratické rychlosti pro několik plynů, vypočtené podle rov. (20.18). Rychlosti jsou překvapivě vysoké. Například molekuly vodíku mají za pokojové teploty (300 K) střední kvadratickou rychlost $1\,920\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ neboli 6 910 km/h, tj. větší rychlost, než má vystřelená kulka. Na povrchu Slunce, kde je teplota $2\cdot10^6$ K, by střední kvadratická rychlost molekul vodíku měla být dokonce 82krát větší než při pokojové teplotě. To by už však molekuly nepřežily srážky mezi sebou. Navíc mnohé z nich by měly mít rychlost ještě vyšší; nezapomeňte, že střední kvadratická rychlost je jen jistým druhem střední rychlosti. Kinetická teorie proto vylučuje, aby na povrchu Slunce byl vodík ve formě molekul.

Rychlost zvuku v plynu je úzce spojena se střední kvadratickou rychlostí molekul daného plynu. Zvuková vlna se šíří pomocí srážek mezi jednotlivými molekulami. Rychlost vlny proto nemůže být vyšší než *střední* rychlost molekul, neboť molekuly se pohybují všemi směry, a ne jen ve směru vlny. Například střední kvadratická rychlost molekul vodíku, resp. dusíku je při pokojové teplotě $1\,920\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, resp. $517\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Při téže teplotě je rychlost zvuku v těchto plynech $1\,350\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, resp. $350\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Napadne vás možná otázka: „Jestliže jsou molekuly tak rychlé, proč trvá řekněme minutu, než se k nám rozšíří vůně z otevřeného parfému na druhé straně místnosti?“ Letmý pohled na obr. 20.4 v čl. 20.6 nám naznačí odpověď: Třebaže jsou molekuly tak rychlé mezi jednotlivými srážkami, trvá jedné molekule poměrně dlouho, než se opravdu dostane o kus dál.

PŘÍKLAD 20.3

Máme pět naměřených hodnot: 5, 11, 32, 67 a 89.

(a) Jaká je jejich střední hodnota $\overline{n}$?

ŘEŠENÍ: Určíme ji ze vztahu

$$\overline{n} = \frac{5 + 11 + 32 + 67 + 89}{5} = 40{,}8. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je jejich střední kvadratická hodnota n_{ef}?

ŘEŠENÍ: Určíme ji ze vztahu

$$n_{\mathrm{ef}} = \sqrt{\frac{5^2 + 11^2 + 32^2 + 67^2 + 89^2}{5}} = 52{,}1. \quad \text{(Odpověď)}$$

Střední kvadratická hodnota n_{ef} je větší než střední hodnota $\overline{n}$, protože větší čísla, když je umocníme, hrají relativně důležitější roli při určování n_{ef}. Pro ověření tohoto tvrzení nahraďme číslo 89 číslem 300. Střední hodnota je nyní (jak si snadno vypočtete) 2,0krát větší než předchozí. Avšak střední kvadratická hodnota se zvýší 2,7krát oproti předešlému případu.

Střední kvadratická hodnota fyzikálních veličin hraje významnou roli v mnoha oblastech fyziky. Například efektivní hodnota napětí 230 V uváděná na žárovkách je časovou střední kvadratickou hodnotou napětí.

20.5 KINETICKÁ ENERGIE POSUVNÉHO POHYBU

Uvažujme opět jedinou molekulu ideálního plynu, která se pohybuje v krychli na obr. 20.3, ale nyní budeme brát v úvahu též změny její rychlosti způsobené srážkami s ostatními molekulami. Kinetická energie této molekuly je v libovolném okamžiku $\frac{1}{2}mv^2$. Avšak její *střední* kinetická energie posuvného pohybu během doby, po kterou částici sledujeme, bude

$$\overline{E_{\mathrm{k}}} = \overline{\tfrac{1}{2}mv^2} = \tfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{ef}}^2, \qquad (20.19)$$

kde jsme předpokládali, že střední kvadratická rychlost jedné molekuly během našeho pozorování je stejná jako střední kvadratická rychlost všech molekul v libovolném daném čase. (Tento předpoklad je oprávněný, pokud se nemění celková energie plynu a pokud pozorujeme molekulu

dostatečně dlouho.) Dosazením za v_{ef} z rov. (20.18) dostaneme

$$\overline{E_k} = (\tfrac{1}{2}m)\frac{3RT}{m_m}.$$

Poměr molární hmotnosti a hmotnosti molekuly m_m/m je však Avogadrova konstanta, takže

$$\overline{E_k} = \frac{3RT}{2N_A},$$

což můžeme přepsat na tvar

$$\overline{E_k} = \tfrac{3}{2}kT. \qquad (20.20)$$

Konstantu k nazýváme **Boltzmannova konstanta**; je to poměr plynové konstanty R a Avogadrovy konstanty N_A. Někdy se nazývá *plynová konstanta na jednu molekulu* (nikoli na mol látky). Má hodnotu

$$k = \frac{R}{N_A} \doteq \frac{(8{,}31\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}})}{(6{,}02\cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}})} = 1{,}38\cdot 10^{-23}\ \mathrm{J\cdot K^{-1}} \doteq$$
$$\doteq 8{,}62\cdot 10^{-5}\ \mathrm{eV\cdot K^{-1}}. \qquad (20.21)$$

Rov. (20.20) říká něco neočekávaného:

Všechny molekuly ideálního plynu, nezávisle na jejich hmotnosti, mají za dané teploty tutéž střední hodnotu kinetické energie posuvného pohybu, a to $\frac{3}{2}kT$. Měříme-li tedy teplotu ideálního plynu, zjistíme tím zároveň také střední kinetickou energii jeho molekul.

KONTROLA 2: Směs plynů sestává z molekul typu 1, 2 a 3 s molekulovými hmotnostmi $m_{m1} > m_{m2} > m_{m3}$. Uspořádejte sestupně tyto typy podle (a) střední kinetické energie a (b) střední kvadratické rychlosti.

PŘÍKLAD 20.4

Jaká je střední kinetická energie (v elektronvoltech) posuvného pohybu molekul kyslíku, přítomných ve vzduchu za pokojové teploty 300 K? A jaká je pro molekuly dusíku?

ŘEŠENÍ: Střední kinetická energie posuvného pohybu závisí pouze na teplotě a nikoli na druhu molekul. Proto je pro oba plyny dána rov. (20.20), tedy

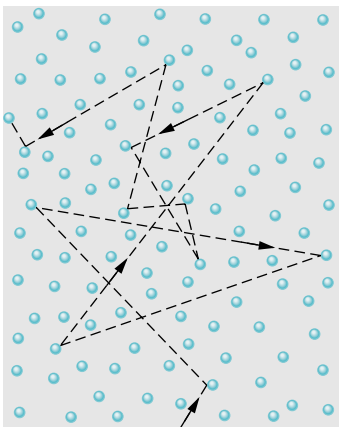
$$\overline{E_k} = \tfrac{3}{2}kT \doteq \tfrac{3}{2}(8{,}62\cdot 10^{-5}\ \mathrm{eV\cdot K^{-1}})(300\ \mathrm{K}) =$$
$$= 0{,}039\ \mathrm{eV} \doteq \tfrac{1}{25}\ \mathrm{eV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Bývá užitečné zapamatovat si $\frac{1}{25}$ eV jako přibližnou hodnotu střední kinetické energie posuvného pohybu molekul vzduchu za pokojové teploty.

V tab. 20.1 nalezneme, že střední kvadratická rychlost molekul kyslíku (pro nějž $m_m = 32{,}0\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$) je $483\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Pro molekuly dusíku ($m_m = 28{,}0\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$) je to $517\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Lehčí molekuly mají tedy vyšší střední kvadratickou rychlost, což souhlasí s tím (viz rov. (20.19)), že mají stejnou střední kinetickou energii.

20.6 STŘEDNÍ VOLNÁ DRÁHA

Pokračujme ve studiu pohybu molekul ideálního plynu. Na obr. 20.4 je znázorněna typická dráha jedné z molekul, která se pohybuje skrz plyn a velmi často mění jak rychlost, tak směr svého pohybu, když se pružně srazí s jinou molekulou. Mezi srážkami se naše molekula pohybuje rovnoměrně přímočaře. Třebaže jsou ostatní molekuly na obrázku nakresleny jako nepohyblivé, vykonávají ve skutečnosti pohyb stejného druhu jako sledovaná molekula.



Obr. 20.4 Molekula pohybující se plynem a srážející se během své cesty s ostatními molekulami. Třebaže jsou ostatní molekuly zobrazeny v klidu, pohybují se ve skutečnosti velmi podobným způsobem.

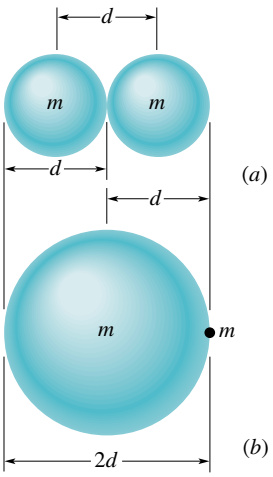
Velice užitečným parametrem, který popisuje náhodný pohyb částice, je **střední volná dráha** λ. Jak název napovídá, jde o střední vzdálenost, kterou molekula urazí mezi dvěma srážkami. Mezi λ a číselnou hustotou N/V molekul očekáváme nepřímou úměrnost, neboť čím větší bude hustota molekul, tím kratší bude střední volná dráha. Dále lze očekávat, že λ bude nepřímo úměrné velikosti molekul. Pokud by totiž molekuly byly bodové, nedocházelo by vůbec ke srážkám a střední volná dráha by byla nekonečná. Čím větší budou molekuly, tím kratší bude λ. Dokonce můžeme odhadnout, že λ bude záviset na čtverci průměru d molekuly, neboť velikost „terčíku“ pro srážku je úměrná jeho ploše, tedy $\frac{1}{4}\pi d^2$.

Skutečný výraz pro střední volnou dráhu má tvar

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V} \quad \text{(střední volná dráha).} \quad (20.22)$$

Abychom ověřili rov. (20.22), budeme nejprve sledovat jedinou molekulu (obr. 20.4) pohybující se konstantní rychlostí v „moři“ nepohyblivých molekul. (Později rozebereme reálnější případ, kdy se pohybují všechny molekuly.)

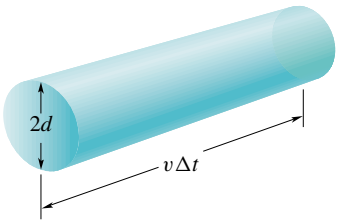
Předpokládejme dále, že molekuly jsou kuličky o průměru d. Ke srážce dojde tehdy, pokud se středy molekul přiblíží na vzdálenost menší, než je právě průměr molekuly d (obr. 20.5a). Na tuto situaci lze nahlížet názorněji tak, že pohybující se molekula má *poloměr* d a ostatní molekuly jsou bodové částice, jako na obr. 20.5b. Tím se popis srážky nezmění, usnadní se však výpočet λ.



Obr. 20.5 (a) Srážka nastane, pokud se středy dvou molekul přiblíží na vzdálenost menší než je jejich průměr d. (b) Ekvivalentní, ale názornější je představa pohybující se molekuly o *poloměru* d, která se sráží s bodovými molekulami. Podmínky srážky však zůstávají stejné.

Mezi jednotlivými srážkami naše molekula „vymete“ krátký válec průřezu πd^2. Pokud pozorujeme tuto molekulu po dobu Δt, urazí vzdálenost $v\Delta t$, kde v značí její rychlost. Pokud seřadíme ony krátké válce mezi jednotlivými srážkami za dobu Δt za sebe, dostaneme jediný válec (obr. 20.6) o délce $v\Delta t$ a o objemu $(\pi d^2)(v\Delta t)$. Počet srážek naší částice za dobu Δt je pak roven počtu (bodových) částic uvnitř tohoto válce.

Protože N/V je hustota částic, dostaneme počet srážek vynásobením této hustoty objemem válce, tedy $(N/V)(\pi d^2 v\Delta t)$. Střední volná dráha je dráha molekuly



Obr. 20.6 Pohybující se molekula „vymete“ za dobu Δt válec délky $v\Delta t$ a poloměr u d.

(tj. délka válce) dělená tímto počtem srážek:

$$\lambda = \frac{\text{délka dráhy}}{\text{počet srážek}} \sim \frac{v\Delta t}{\pi d^2 v\Delta t N/V} = \\ = \frac{1}{\pi d^2 N/V}. \quad (20.23)$$

Tento vztah je pouze přibližný, neboť je založen na předpokladu, že všechny molekuly (až na jedinou) jsou v klidu. Ve skutečnosti se všechny molekuly pohybují. Pokud správně započteme tento pohyb, obdržíme rov. (20.22). Všimněte si, že se rov. (20.23) liší od rov. (20.22) pouze faktorem $1/\sqrt{2}$.

Není obtížné nahlédnout, v čem se skrývá „aproximace“, kterou jsme použili při odvození rov. (20.23). Rychlost v čitateli totiž není přesně stejná jako rychlost ve jmenovateli. Rychlost v v čitateli je střední rychlost $\overline{v}$ molekuly vzhledem *k laboratoři*. Rychlost v ve jmenovateli je však střední rychlost $\overline{v_{\text{rel}}}$ *relativního* pohybu naší molekuly vůči ostatním molekulám, které se taky pohybují. Tato rychlost $\overline{v_{\text{rel}}}$ určuje počet srážek molekuly. Podrobný výpočet, který vychází ze skutečného rozdělení rychlostí molekul, dává $\overline{v_{\text{rel}}} = \sqrt{2}\overline{v}$, odkud je již patrný původ faktoru $\sqrt{2}$.

Střední volná dráha molekul vzduchu je u hladiny moře zhruba 0,1 μm. Ve výšce 100 km je hustota vzduchu natolik nízká, že střední volná dráha molekul stoupne na 16 cm, a ve výšce 300 km má pak hodnotu okolo 20 km. Proto je pro vědce, kteří se zabývají fyzikou a chemií vyšších vrstev atmosféry, prakticky nemožné provádět v laboratoři experimenty, které by napodobily podmínky vyšších vrstev atmosféry, neboť nelze vyčerpat dostatečně velký prostor s plynem na tak nízkou hustotu. Přitom však studium těchto vrstev atmosféry má velký význam např. v souvislosti s problémem „ozonové díry“ a koncentrace freonů.

PŘÍKLAD 20.5

Rozměry molekul pro různé plyny lze určovat experimentálně z rychlosti difuze jednoho plynu do druhého. Například pro kyslík se uvádí průměr $d = 2{,}9\cdot10^{-10}$ m.

(a) Jaká je střední volná dráha λ molekul kyslíku při pokojové teplotě ($T = 300$ K) a atmosférickém tlaku 1 atm? Uvažujte ideální plyn.

ŘEŠENÍ: Nalezněme nejprve číselnou hustotu molekul N/V za těchto podmínek. Ze stavové rovnice ideálního plynu zjistíme, že 1,0 mol ideálního plynu zaujímá objem

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{(1{,}0\,\text{mol})(8{,}31\,\text{J·mol}^{-1}\text{·K}^{-1})(300\,\text{K})}{(1{,}0\,\text{atm})(1{,}01\cdot10^5\,\text{Pa/atm})} \doteq$$
$$\doteq 2{,}47\cdot10^{-2}\,\text{m}^3.$$

Číselnou hustotu molekul určíme pomocí Avogadrovy konstanty jako

$$\frac{N}{V} = \frac{nN_\text{A}}{V} = \frac{(1{,}0\,\text{mol})(6{,}02\cdot10^{23}\,\text{mol}^{-1})}{(2{,}47\cdot10^{-2}\,\text{m}^3)} \doteq$$
$$\doteq 2{,}44\cdot10^{25}\,\text{m}^{-3}.$$

Z rov. (20.22) pak dostaneme pro střední volnou dráhu

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}\pi(2{,}9\cdot10^{-10}\,\text{m})^2(2{,}44\cdot10^{25}\,\text{m}^{-3})} \doteq$$
$$\doteq 1{,}1\cdot10^{-7}\,\text{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato hodnota odpovídá zhruba 380 molekulovým průměrům, přestože střední vzdálenost mezi jednotlivými molekulami je jen 11 molekulových průměrů.

(b) Jak četné jsou srážky mezi molekulami, je-li střední rychlost molekul kyslíku 450 m·s^{-1}?

ŘEŠENÍ: Hledanou četnost určíme z poměru střední rychlosti molekul a střední volné dráhy

$$\text{četnost} = \frac{\overline{v}}{\lambda} = \frac{(450\,\text{m·s}^{-1})}{(1{,}1\cdot10^{-7}\,\text{m})} \doteq 4{,}1\cdot10^9\,\text{s}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Každá molekula kyslíku tedy vykoná více než 4 miliardy srážek za sekundu.

KONTROLA 3: V nádobě se nachází jeden mol plynu A, jehož molekuly mají poloměr $2d_0$ a střední rychlost v_0. Ve druhé, úplně stejné nádobě se nachází jeden mol plynu B, jehož molekuly mají poloměr d_0 a střední rychlost $2v_0$ (tj. molekuly plynu B jsou menší, ale rychlejší). U kterého z plynů bude vyšší četnost srážek uvnitř nádoby?



20.7 ROZDĚLENÍ RYCHLOSTÍ MOLEKUL

Střední kvadratická rychlost v_ef nám dává hrubou představu o tom, jakými rychlostmi se pohybují molekuly plynu při určité teplotě. Avšak často bychom chtěli vědět více. Kolik molekul má například rychlost větší než v_ef? A kolik z nich větší než dvojnásobek v_ef? Abychom mohli odpovědět na tyto otázky, musíme vědět, jak jsou jednotlivé rychlosti mezi molekulami rozděleny. Obr. 20.7a ukazuje rozdělení rychlostí molekul kyslíku při pokojové teplotě ($T = 300$ K); na obr. 20.7b je pak toto rozdělení porovnáno s rozdělením při teplotě $T = 80$ K.

Problém rozdělení rychlostí molekul plynu řešil poprvé v roce 1852 skotský fyzik James Clerk Maxwell. Dospěl k výsledku známému jako **Maxwellovo rozdělení rychlostí molekul**

$$P(v) = 4\pi\left(\frac{m_\text{m}}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 \text{e}^{-m_\text{m}v^2/2RT}. \qquad (20.24)$$

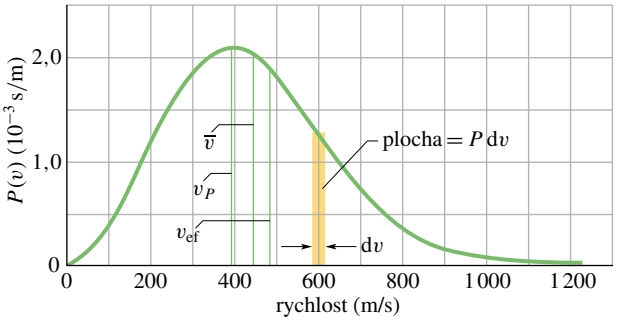
Zde v značí rychlost molekul, T teplotu plynu, m_m molární hmotnost plynu a R je plynová konstanta. Právě tato funkce je vykreslena na obr. 20.7a, b. Veličinu $P(v)$ nazýváme rozdělovací funkcí a je definována takto: Součin $P(v)\,\text{d}v$ (který je bezrozměrový) udává relativní počet molekul s rychlostmi v intervalu $(v, v + \text{d}v)$.

Jak ukazuje obr. 20.7a, je tento relativní počet roven plošce sloupečku, jehož výška je $P(v)$ a šířka $\text{d}v$. Celková plocha pod křivkou rozdělovací funkce odpovídá relativnímu počtu molekul, jejichž rychlosti leží mezi nulou a nekonečnem. To jsou však všechny molekuly, takže tato plocha je rovna jedné.

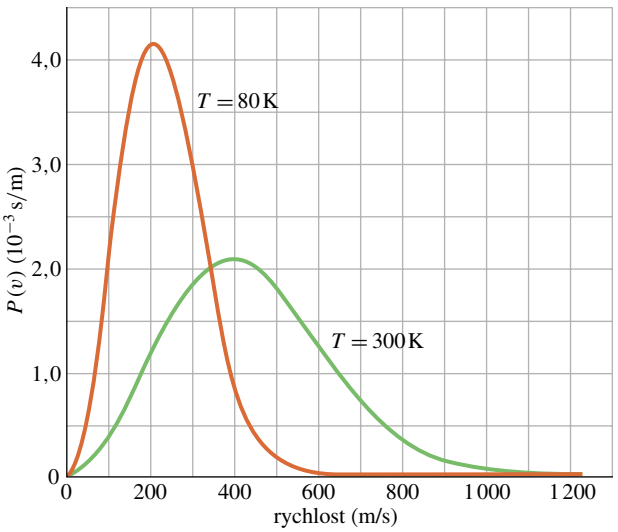
Na obr. 20.7a jsou též vyznačeny střední kvadratická rychlost $v_\text{ef} = 483\,\text{m·s}^{-1}$ a další dvě význačné rychlosti molekul kyslíku; *nejpravděpodobnější rychlost* $v_P = 395\,\text{m·s}^{-1}$, ve které nabývá funkce $P(v)$ maxima, a *střední rychlost* $\overline{v} = 445\,\text{m·s}^{-1}$, která je prostě průměrem přes všechny velikosti rychlostí molekul. Malý počet molekul může mít rychlosti, které leží na pravém konci rozdělovací funkce a které mohou být několikanásobně vyšší než střední rychlost. Díky tomuto jednoduchému faktu vysvětlíme, proč na Zemi může pršet a proč Slunce může svítit.

Déšť: Rozdělení rychlostí molekul vody například v rybníce za letních dnů může být popsáno podobnou křivkou jako na obr. 20.7a. Většina molekul nemá dostatečnou kinetickou energii k tomu, aby unikly skrz hladinu. Avšak molekuly z pravého konce rozdělení, které mají vysokou rychlost, mohou uniknout, tj. vypařit se. Potom mohou vytvořit mraky, a tím může vzniknout déšť.

Vzápětí poté, co rychlé molekuly uniknou z povrchu rybníka, se vyrovnává teplota vody s okolím. Vhodnými srážkami mezi molekulami vody nabývají opět některé mo-



(*a*)



(*b*)

Obr. 20.7 (a) Maxwellovo rozdělení rychlostí pro kyslík při teplotě $T = 300$ K. V grafu jsou též znázorněny tři význačné rychlosti. (b) Rozdělení rychlostí pro teploty 300 K a 80 K. Všimněte si, že při nižších teplotách se molekuly pohybují pomaleji. Protože jde o pravděpodobnostní rozdělení, je plocha pod každou křivkou rovna jedné.

lekuly vyšších rychlostí, čímž se neustále obnovuje rozdělení rychlostí molekul pro odpovídající teplotu.

Světlo Slunce: Nechť je rozdělení rychlostí protonů v jádře Slunce popsáno zákonem (20.24). Energie Slunce pochází z termojaderné fúze, která začíná slučováním jader vodíku, tj. protonů. Protože se protony kvůli svému elektrickému náboji navzájem odpuzují, nemůže ke sloučení dojít u protonů majících jen střední rychlost. Ty totiž nemají dostatečnou kinetickou energii k tomu, aby se přiblížily na takovou vzdálenost, kde přitažlivé jaderné síly převládnou nad odpudivými silami elektromagnetickými. Avšak velmi rychlé protony ze vzdáleného konce rozdělení tuto energii mají, sloučení může proběhnout — a proto Slunce svítí.

PŘÍKLAD 20.6

Nádoba je naplněna kyslíkem pokojové teploty (300 K). Jaká část molekul má rychlosti v intervalu 599 m·s^{-1} až 601 m·s^{-1}? Molární hmotnost m_m kyslíku je 0,032 0 kg/mol.

ŘEŠENÍ: Interval rychlostí $\Delta v = 2$ m·s^{-1} je natolik malý, že hledaná část molekul, kterou označíme α, je dostatečně přesně určena výrazem $P(v)\Delta v$, kde $P(v)$ vyhodnotíme pro rychlost $v = 600$ m·s^{-1} ve středu daného intervalu (viz zvýrazněná ploška na obr. 20.7a). Užitím rov. (20.24) nalezneme

$$\alpha = P(v)\Delta v = 4\pi \left(\frac{m_m}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-m_m v^2/2RT} \Delta v.$$

Aby byl výpočet přehledný, rozdělíme tento výraz na několik členů, které vyčíslíme odděleně:

$$\alpha = 4\pi(A)(v^2)(e^B)(\Delta v). \qquad (20.25)$$

Hodnoty výrazů A a B jsou:

$$A = \left(\frac{m_m}{2\pi RT}\right)^{3/2} = \left(\frac{0{,}032\,0\ \text{kg·mol}^{-1}}{2\pi(8{,}31\ \text{J·mol}^{-1}\text{·K}^{-1})(300\ \text{K})}\right)^{3/2} = 2{,}92\cdot10^{-9}\ \text{s}^3\text{·m}^{-3}$$

a

$$B = -\frac{m_m v^2}{2RT} = -\frac{(0{,}032\,0\ \text{kg·mol}^{-1})(600\ \text{m·s}^{-1})^2}{2(8{,}31\ \text{J·mol}^{-1}\text{·K}^{-1})(300\ \text{K})} = -2{,}31.$$

Dosazením do rov. (20.25) dostaneme

$$\alpha = 4\pi(A)(v^2)(e^B)(\Delta v) = 4\pi(2{,}92\cdot10^{-9}\ \text{s}^3\text{·m}^{-3})\cdot(600\ \text{m·s}^{-1})^2(e^{-2{,}31})(2\ \text{m·s}^{-1}) = 2{,}62\cdot10^{-3}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Odtud vidíme, že při pokojové teplotě se 0,262 % molekul kyslíku pohybuje rychlostí v úzkém intervalu mezi 599 m·s^{-1} až 601 m·s^{-1}. Pokud by zvýrazněná ploška na obr. 20.7a měla rozměry odpovídající této úloze, byla by opravdu velice úzká.

PŘÍKLAD 20.7

(a) Jaká je střední rychlost molekul kyslíku při teplotě 300 K? Molární hmotnost m_m kyslíku je 0,032 0 kg·mol^{-1}.

ŘEŠENÍ: Abychom nalezli střední rychlost molekul, budeme každou rychlost brát s váhou $P(v)\,dv$, která udává relativní počet molekul o rychlostech v intervalu $(v, v+dv)$. Integrací přes všechny rychlosti pak dostaneme hledanou střední rychlost, neboli

$$\overline{v} = \int_0^\infty v P(v)\,dv. \qquad (20.26)$$

Po dosazení za $P(v)$ z rov. (20.24) je třeba vyčíslit získaný integrál. Najdeme ho v tabulkách integrálů a výsledkem je

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi m_{\mathrm{m}}}} \quad \text{(střední rychlost)}, \tag{20.27}$$

odkud dosazením numerických hodnot obdržíme

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8(8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}})(300\,\mathrm{K})}{\pi(0{,}032\,0\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}})}} \doteq$$
$$\doteq 445\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je střední kvadratická rychlost v_{ef} molekul kyslíku?

ŘEŠENÍ: Budeme postupovat podobně jako v případě (a), jen místo v budeme nyní faktorem $P(v)\,\mathrm{d}v$ násobit v^2. Po integraci tak dostaneme

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 P(v)\,\mathrm{d}v = \frac{3RT}{m_{\mathrm{m}}}.$$

Střední kvadratickou rychlost obdržíme odmocněním tohoto výrazu

$$v_{\mathrm{ef}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{m_{\mathrm{m}}}} \quad \text{(střední kvadratická rychlost)}. \tag{20.28}$$

Tato rovnice souhlasí s rov. (20.18), kterou jsme odvodili dříve. Dosazením numerických hodnot dostaneme

$$v_{\mathrm{ef}} = \sqrt{\frac{3(8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}})(300\,\mathrm{K})}{(0{,}032\,0\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}})}} \doteq$$
$$\doteq 483\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaká je nejpravděpodobnější rychlost v_P?

ŘEŠENÍ: Nejpravděpodobnější rychlost odpovídá maximu rozdělení $P(v)$ daného rov. (20.24). Toto maximum nalezneme z podmínky $\mathrm{d}P/\mathrm{d}v = 0$, kterou vyřešíme vůči v. Výsledkem je (jak si čtenář snadno dopočte)

$$v_P = \sqrt{\frac{2RT}{m_{\mathrm{m}}}} \quad \text{(nejpravděpodobnější rychlost)}. \tag{20.29}$$

Číselně vychází

$$v_P = \sqrt{\frac{2(8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}})(300\,\mathrm{K})}{(0{,}032\,0\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}})}} \doteq$$
$$\doteq 395\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V této úloze jsme vypočetli tři význačné rychlosti Maxwellova rozdělení. Jejich souhrnný přehled obsahuje tab. 20.2.

20.8 MOLÁRNÍ TEPELNÉ KAPACITY IDEÁLNÍHO PLYNU

V tomto článku chceme na základě úvah o atomech a molekulách odvodit výraz pro **vnitřní energii** U ideálního plynu. Tento výsledek pak použijeme k výpočtu molárních tepelných kapacit ideálního plynu.

Vnitřní energie U

Uvažujme nejprve ideální *jednoatomový* plyn, jehož molekulu tvoří jediný atom, jakým jsou např. helium, neon nebo argon. Jak víme z kap. 8, vnitřní energie souvisí s náhodným pohybem atomů a molekul. Budeme proto předpokládat, že vnitřní energie je prostě součet kinetických energií posuvného pohybu atomů. (Nebudeme tedy uvažovat rotační kinetickou energii, která je pro atomy prakticky zanedbatelná.) Střední kinetická energie posuvného pohybu jedné molekuly závisí pouze na teplotě a je dána rov. (20.20) jako $\overline{E_{\mathrm{k}}} = \frac{3}{2}kT$. Vzorek n molů uvažovaného plynu obsahuje nN_{A} atomů. Vnitřní energie vzorku je tedy

$$U = (nN_{\mathrm{A}})\overline{E_{\mathrm{k}}} = (nN_{\mathrm{A}})(\tfrac{3}{2}kT)$$

neboli, s využitím plynové konstanty $R = N_{\mathrm{A}}k$,

$$U = \tfrac{3}{2}nRT \quad \text{(jednoatomový ideální plyn)}. \tag{20.30}$$

Vnitřní energie U daného množství ideálního plynu závisí *pouze* na teplotě T. Nezávisí na jeho tlaku p, hustotě ϱ ap.

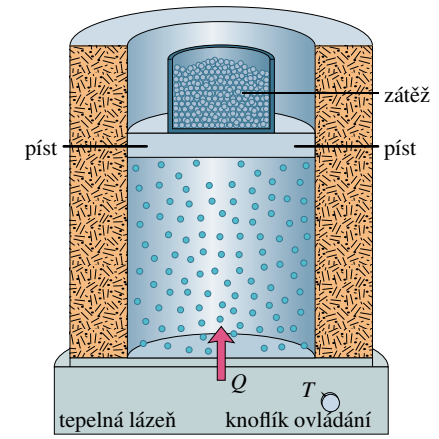
Tabulka 20.2 **Význačné rychlosti Maxwellova rozdělení**

VELIČINA	OZNAČENÍ	VZTAH	PRO KYSLÍK PŘI 300 K
Nejpravděpodobnější rychlost	v_P	$\sqrt{2RT/m_{\mathrm{m}}}$	$395\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
Střední rychlost	$\overline{v}$	$\sqrt{8RT/\pi m_{\mathrm{m}}}$	$445\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
Střední kvadratická rychlost	v_{ef}	$\sqrt{3RT/m_{\mathrm{m}}}$	$483\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$

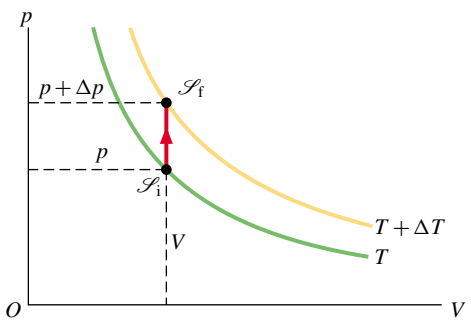
Pomocí rov. (20.30) můžeme odvodit vztah pro molární tepelnou kapacitu ideálního plynu. Ve skutečnosti odvodíme dva výrazy — jeden pro případ, kdy dodáváme teplo a objem plynu zůstává konstantní, a druhý pro případ konstantního tlaku plynu. Molární tepelné kapacity v těchto případech značíme C_V, resp. C_p. Vedle těchto veličin se běžně užívají také měrné tepelné kapacity, které značíme c_V a c_p a které se nevztahují na 1 mol, nýbrž na 1 kg plynu.

Molární tepelná kapacita při stálém objemu

Na obr. 20.8a je válec objemu V vyplněný n moly ideálního plynu o tlaku p a teplotě T. *Počáteční stav* tohoto plynu je na obr. 20.8b vyznačen $\mathscr{S}_\mathrm{i}$. Zvýšíme-li teplotu lázně,



(*a*)



(*b*)

Obr. 20.8 (a) Teplotu ideálního plynu zvýšíme z teploty T na $T + \Delta T$, přičemž objem udržujeme konstantní. Plynu bylo dodáno teplo, avšak práci nevykonal žádnou. (b) p-V diagram tohoto děje.

na které spočívá válec s plynem, dodáme tím plynu jisté množství tepla Q a v koncovém stavu (označeném $\mathscr{S}_\mathrm{f}$) bude mít teplotu $T + \Delta T$ a tlak $p + \Delta p$.

Molární tepelná kapacita při stálém objemu je dle rov. (19.15) definována vztahem

$$Q = nC_V \Delta T \qquad \text{(při stálém objemu).} \qquad (20.31)$$

Dosazením do prvního termodynamického zákona obdržíme

$$\Delta U = nC_V \Delta T - W.$$

Je-li objem plynu konstantní, nekoná plyn žádnou práci a tedy $W = 0$. Pro C_V proto můžeme psát

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{\Delta U}{\Delta T}. \qquad (20.32)$$

Podle rov. (20.30) platí $\Delta U/\Delta T = \frac{3}{2}nR$. Dosazením do rov. (20.32) nakonec dostaneme

$$C_V = \tfrac{3}{2}R \doteq 12{,}5\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}} \quad \text{(jednoatomový ideální plyn).} \qquad (20.33)$$

Jak ukazuje tab. 20.3, tento výsledek kinetické teorie ideálního plynu velmi dobře souhlasí s experimentem pro reálné jednoatomové plyny, tj. pro případ, který jsme uvažovali. Experimentální (ale i předpovídané) hodnoty C_V pro dvouatomové a víceatomové plyny jsou vyšší z důvodu, který si objasníme v čl. 20.9.

Tabulka 20.3 **Molární tepelné kapacity při stálém objemu (bez vibrací molekul)**

Molekula	Plyn		C_V / J·mol^{-1}·K^{-1}
Jednoatomová	Ideální		$\frac{3}{2}R \doteq 12{,}5$
	Reálný	He	12,5
		Ar	12,6
Dvouatomová	Ideální		$\frac{5}{2}R \doteq 20{,}8$
	Reálný	N_2	20,7
		O_2	20,8
Víceatomová	Ideální		$3R \doteq 24{,}9$
	Reálný	NH_4	29,0
		CO_2	29,7

Nyní můžeme zobecnit výraz pro vnitřní energii daný rov. (20.30), dosadíme-li za $\frac{3}{2}R$ molární tepelnou kapacitu C_V. Dostaneme

$$U = nC_V T \qquad \text{(libovolný ideální plyn).} \qquad (20.34)$$

Tato rovnice platí nejen pro jednoatomové ideální plyny, ale také pro dvouatomové a víceatomové ideální plyny, pokud dosadíme odpovídající hodnotu C_V. Tak jako u rov. (20.30) i nyní vidíme, že vnitřní energie závisí pouze na teplotě a nikoli na tlaku či hustotě plynu.

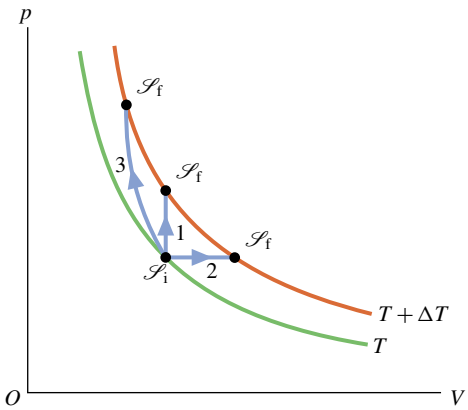
Pokud se změní teplota ideálního plynu uzavřeného v nádobě o ΔT, pak výsledná změna jeho vnitřní energie je dána pomocí rov. (20.34) jako

$$\Delta U = nC_V \Delta T \quad \text{(ideální plyn, libovolný děj).} \tag{20.35}$$

Tato rovnice nám říká:

Změna vnitřní energie U neproměnného množství ideálního plynu závisí pouze na změně jeho teploty. Nezávisí na ději, při kterém tato změna teploty nastala.

Jako příklad uvažujme tři cesty mezi dvěma izotermami na obr. 20.9. Cesta 1 odpovídá izochorickému ději a cesta 2 ději izobarickému, kterým se budeme zabývat v následujícím odstavci. Poslední cesta 3 odpovídá ději, při kterém nedochází k výměně tepla mezi systémem a okolím a který budeme studovat v čl. 20.11. Přestože jsou hodnoty vyměněného tepla Q, vykonané práce W, koncového tlaku p_f a koncového objemu V_f pro tyto tři procesy různé, změna vnitřní energie ΔU spojená s těmito procesy je vždy stejná a je dána rov. (20.35), neboť změna teploty ΔT je vždy stejná. Nezávisle na tom, po které cestě se plyn dostane ze stavu o teplotě T do stavu o teplotě $T + \Delta T$, můžeme tedy změnu vnitřní energie plynu určit tak, že použijeme cestu 1, pro kterou platí rov. (20.35).



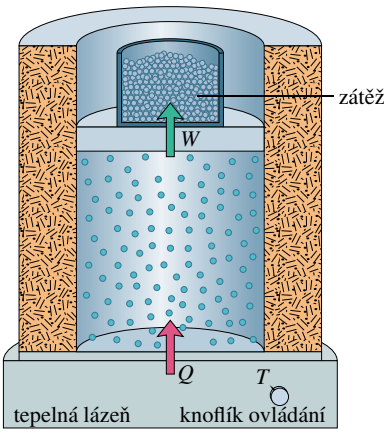
Obr. 20.9 Tři cesty odpovídají třem různým dějům, při kterých přešel ideální plyn z počátečního stavu $\mathscr{S}_i$ s teplotou T do koncového stavu $\mathscr{S}_f$ s teplotou $T + \Delta T$. Změna ΔU vnitřní energie plynu je stejná pro všechny tyto procesy a také pro libovolný jiný proces se stejnou změnou teploty.

Molární tepelná kapacita při konstantním tlaku

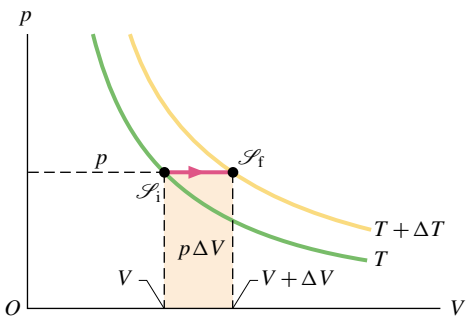
Stejně jako v předchozím případě budeme nyní zvyšovat teplotu plynu o ΔT, ale tentokrát budeme dodávat potřebné teplo Q při konstantním tlaku. Na obr. 20.10a je znázorněno, jak lze takový děj provést. Odpovídající p-V diagram je pak na obr. 20.10b. Ihned můžeme odhadnout, že molární tepelná kapacita C_p při konstantním tlaku, definovaná vztahem

$$Q = nC_p \Delta T \quad \text{(konstantní tlak),} \tag{20.36}$$

bude větší než molární tepelná kapacita při konstantním objemu, neboť část dodaného tepla se spotřebuje na práci, kterou plyn vykoná během nadzvedávání zatíženého pístu (obr. 20.10a).



(a)



(b)

Obr. 20.10 (a) Plynu dodáme teplo Q za stálého tlaku p. Tím vzroste jeho objem o ΔV, plyn vykoná práci $p\Delta V$ a jeho teplota vzroste o ΔT. (b) Znázornění tohoto děje na p-V diagramu. Práce $p\Delta V$ je dána obsahem zvýrazněné plochy.

Abychom nalezli vztah mezi C_p a C_V, napišme nejprve první termodynamický zákon (rov. (19.24)) ve tvaru

$$\Delta U = Q - W. \tag{20.37}$$

Do této rovnice dosadíme za ΔU z rov. (20.35) a za Q z rov. (20.36). Rov. (19.23) nám říká, že práce vykonaná

při konstantním tlaku je $W = p\Delta V$. Použijeme-li stavovou rovnici ideálního plynu, můžeme tento vztah přepsat jako

$$W = p\Delta V = nR\Delta T.$$

Po dosazení a vydělení výrazem $n\Delta T$ dostaneme z rovnice (20.37)

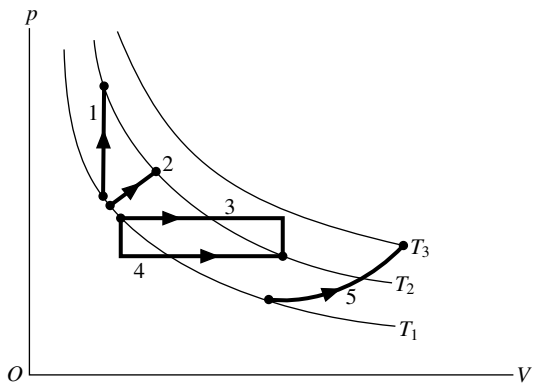
$$C_V = C_p - R,$$

odkud

$$C_p = C_V + R. \qquad (20.38)$$

Tato předpověď kinetické teorie plynů dobře souhlasí s experimentem, a to nejen pro jednoatomové plyny, ale pro všechny, jejichž hustota je natolik nízká, že je můžeme považovat za ideální.

KONTROLA 4: V p-V diagramu je vyznačeno pět dějů. Seřaďte sestupně tyto děje podle změny vnitřní energie plynu během těchto dějů.



PŘÍKLAD 20.8

Balonek s pěti moly (jednoatomového) helia ponoříme do vody do určité hloubky a za konstantního tlaku vodu (a tím i helium) zahřejeme o $\Delta T = 20\,\mathrm{C}^\circ$. Výsledkem tohoto procesu je zvětšení balonku.

(a) Kolik tepla Q přijme helium během svého rozpínání a zvyšování teploty?

ŘEŠENÍ: Protože považujeme helium za ideální plyn, můžeme použít rov. (20.38) a (20.33), odkud

$$C_p = C_V + R = \tfrac{5}{2}R.$$

Dosazením do rov. (20.36) dostaneme

$$Q = nC_p\Delta T = n(\tfrac{5}{2}R)\Delta T =$$
$$= (5{,}00\,\mathrm{mol})(2{,}5)(8{,}31\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}})(20{,}0\,\mathrm{C}^\circ) =$$
$$= 2\,077{,}5\,\mathrm{J} \doteq 2\,080\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je změna ΔU vnitřní energie helia během zvyšování teploty?

ŘEŠENÍ: Ať se teplota helia zvyšuje za konstantního tlaku, nebo za konstantního objemu, můžeme k určení změny vnitřní energie použít rov. (20.35), tedy

$$\Delta U = nC_V\Delta T =$$
$$= (5{,}00\,\mathrm{mol})(1{,}5)(8{,}31\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}})(20{,}0\,\mathrm{C}^\circ) =$$
$$= 1\,246{,}5\,\mathrm{J} \doteq 1\,250\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jakou práci W vykoná helium proti tlaku okolní vody během svého rozpínání?

ŘEŠENÍ: Dle prvního termodynamického zákona platí

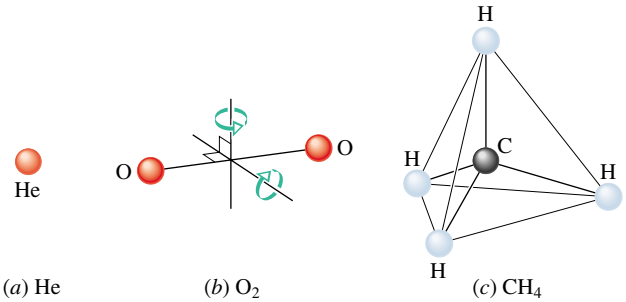
$$W = Q - \Delta U = (2\,077{,}5\,\mathrm{J}) - (1\,246{,}5\,\mathrm{J}) =$$
$$= 831\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že pouze část (1 250 J) z celkového tepla (2 080 J) přijatého heliem se použije na zvýšení jeho vnitřní energie a tím i jeho teploty. Zbytek (831 J) je použit na práci, kterou helium vykoná během svého rozpínání. Pokud by voda zamrzla, nemohlo by k rozpínání dojít. Pak by stejná změna teploty o $20\,\mathrm{C}^\circ$ vyžadovala pouze 1 250 J tepla, protože by helium nekonalo žádnou práci.

20.9 STUPNĚ VOLNOSTI A MOLÁRNÍ TEPELNÉ KAPACITY

Jak ukazuje tab. 20.3, souhlasí předpověď $C_V = \frac{3}{2}R$ s experimentem pro jednoatomové plyny, ale nesouhlasí pro dvouatomové a víceatomové plyny. Tento nesouhlas nyní vysvětlíme tím, že kinetická energie víceatomových molekul není jen energií posuvného pohybu.

Na obr. 20.11 vidíme modely helia (jednoatomový plyn), kyslíku (dvouatomový) a metanu (víceatomový) tak, jak je uvažuje kinetická teorie plynů. Vzhledem ke stavbě jednoatomových molekul, které jsou v podstatě bodové



(*a*) He (*b*) O_2 (*c*) CH_4

Obr. 20.11 Modely molekul používané v kinetické teorii plynů: (a) helium, typická jednoatomová molekula; (b) kyslík, typická dvouatomová molekula (jsou vyznačeny dvě rotační osy); (c) metan, typická víceatomová molekula.

a jejichž moment setrvačnosti je velmi malý, je rozumné předpokládat, že jejich kinetická energie je plně určena posuvným pohybem. Naopak u víceatomových molekul bude podstatný také příspěvek od rotačního pohybu či kmitů molekuly.

Abychom tyto příspěvky zahrnuli do našich úvah kvantitativně, použijeme tzv. **ekvipartiční teorém**, který poprvé formuloval James Clerk Maxwell:

> Každá molekula má jistý počet *stupňů volnosti* f a každý z nich nezávisle přispívá k energii molekuly. Každému stupni volnosti odpovídá energie $\frac{1}{2}kT$ na jednu molekulu (neboli $\frac{1}{2}RT$ na jeden mol).

Pro posuvný pohyb máme tři stupně volnosti, které odpovídají pohybu podél tří kolmých souřadnicových os. Pro rotační pohyb není v případě jednoatomové molekuly žádný stupeň volnosti. V případě dvouatomové molekuly, tj. tuhé činky na obr. 20.11b, existují dvě osy, kolem kterých může molekula rotovat s nezanedbatelným příspěvkem k celkové kinetické energii. Příspěvek od rotace kolem osy spojující jádra atomů v molekule je velice malý, neboť moment setrvačnosti molekuly vůči této ose je prakticky nulový. Molekuly s více než dvěma atomy mají šest stupňů volnosti, tři posuvné a tři rotační. Kmitání (vibrace) mohou přispívat dalšími stupni; ty jsou však někdy „zamrzlé“ a neuplatní se (to vysvětluje kvantová teorie, viz čl. 20.10).

Abychom zobecnili výsledky čl. 20.8 na ideální dvouatomové a víceatomové plyny, musíme postup zopakovat s tím, že nahradíme rov. (20.30) ($U = \frac{3}{2}nRT$) vztahem $U = (f/2)nRT$, kde f je počet stupňů volnosti vzatý z tab. 20.4. Pro molární tepelnou kapacitu za konstantního objemu tak dostaneme

$$C_V = \left(\frac{f}{2}\right) R = 4{,}16\, f \ \mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}, \quad (20.39)$$

což samozřejmě souhlasí s rov. (20.33) pro jednoatomový plyn ($f = 3$). Vzorec (20.39), jak vidíme v tab. 20.3, je v souladu s experimentem pro dvouatomové plyny, avšak pro víceatomové plyny dává podstatně nižší hodnoty.

PŘÍKLAD 20.9

V chatě o objemu V má vzduch, který budeme považovat za dvouatomový plyn, počáteční teplotu T_1. Poté, co zatopíme v kamnech, se tato teplota zvýší na T_2. Jaká je výsledná změna vnitřní energie vzduchu uvnitř chaty?

ŘEŠENÍ: Tato situace se poněkud liší od těch, které jsme až dosud vyšetřovali, neboť chata jistě není zcela utěsněna. Pokud by byla utěsněna a teplota by uvnitř stoupla, pak by se dle stavové rovnice ideálního plynu ($pV = nRT$) zvýšil také tlak. Protože však chata není vzduchotěsná, může vzduch různými otvory unikat a tlak vzduchu v chatě se neustále vyrovnává s tlakem venkovního vzduchu.

Dle rov. (20.35) můžeme pro změnu vnitřní energie vzduchu v chatě psát

$$\Delta U = C_V \Delta(nT),$$

přičemž se mění jak n, tak T. Použijeme-li stavovou rovnici ideálního plynu a nahradíme-li $\Delta(nT)$ výrazem $\Delta(pV)/R$, získáme vztah

$$\Delta U = \frac{C_V}{R}\Delta(pV).$$

Poněvadž se v chatě nemění ani tlak, ani objem vzduchu, vidíme odtud, že

$$\Delta U = 0,$$

přestože teplota uvnitř stoupá.

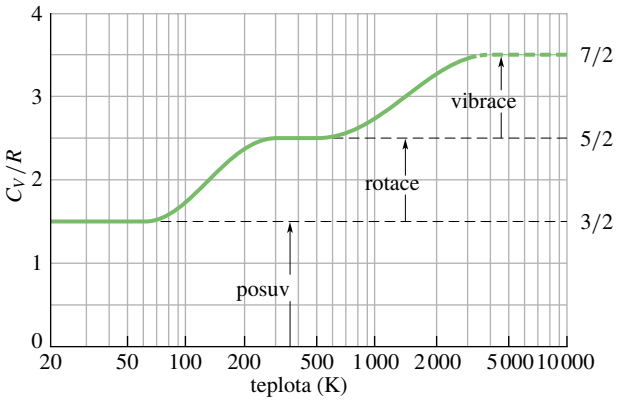
Proč je nám tedy v chatě příjemněji, když si zatopíme? Na naše pocity mají vliv minimálně dva faktory. Člověk si předává s okolím tepelnou energii, protože (a) vyzařuje a přijímá elektromagnetické (termální) záření a (b) si vyměňuje s okolním vzduchem skrze pokožku teplo. Zatopíme-li v kamnech, (a) zvýší se množství přijímaného termálního záření od různých ploch v chatě a (b) stoupne teplota vzduchu v chatě, takže budeme od něho přijímat větší množství tepla a bude nám příjemněji.

Tabulka 20.4 **Stupně volnosti pro různé molekuly**

		Stupně volnosti (bez vibrací)			Předpovězené molární tepelné kapacity	
Molekula	Příklad	Posuvné	Rotační	Celkové (f)	C_V (rov. (20.39))	$C_p = C_V + R$
Jednoatomová	He	3	0	3	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$
Dvouatomová	O_2	3	2	5	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$
Víceatomová	CH_4	3	3	6	$3R$	$4R$

20.10 TROCHA KVANTOVÉ TEORIE

Souhlas dosavadních výsledků kinetické teorie plynů s experimentem můžeme zlepšit, pokud do našich úvah zahrneme také vibrační pohyb — kmity dvouatomových a víceatomových molekul. Například atomy v molekule O_2 na obr. 20.11b mohou kmitat směrem k sobě a od sebe kolem určité rovnovážné polohy, jako by mezi nimi byla pružina. Avšak experiment ukazuje, že tyto kmity se u molekul objeví až při relativně vysokých teplotách plynu, tj. molekuly začnou kmitat až tehdy, mají-li dostatečnou energii. Podobně je tomu s rotací molekul, ale u tohoto pohybu je potřebná energie nižší, takže molekuly rotují už při běžných teplotách.



Obr. 20.12 Závislost C_V/R na teplotě pro (dvouatomový) vodíkový plyn. Protože rotační a vibrační pohyb vyžadují určitou minimální energii, je při nízkých teplotách možný pouze pohyb posuvný. S rostoucí teplotou plynu začínají molekuly nejprve rotovat a při dostatečných teplotách také kmitat.

Obr. 20.12 nám dá lepší představu o tom, kdy začíná hrát roli rotační a kdy vibrační pohyb molekul. Na obrázku je graf závislosti poměru C_V/R na teplotě pro dvouatomový vodíkový plyn H_2. Teplotní škála je logaritmická, aby bylo možno pokrýt dostatečný rozsah teplot. Z tohoto grafu odečteme, že pro teploty pod 80 K je $C_V/R = 1{,}5$. Tato hodnota odpovídá třem stupňům volnosti posuvného pohybu, který za nízkých teplot jediný přispívá k tepelné kapacitě C_V. Se zvyšující se teplotou roste C_V/R na hodnotu 2,5, neboť začínají přispívat další dva stupně volnosti. Kvantová teorie nám říká, že tyto stupně volnosti odpovídají rotačnímu pohybu molekul a že je zapotřebí určitá minimální energie, aby molekula mohla rotovat. (Tato minimální energie je spojena s kvantováním momentu hybnosti a jde o netriviální výsledek kvantové teorie. Uvědomme si, že v klasické mechanice může být energie rotačního pohybu libovolně malá.) Při nízkých teplotách (pod 80 K) nemají molekuly dostatečnou energii, aby mohly rotovat. S rostoucí teplotou rotuje nejprve jen několik molekul, později více a více, až nakonec rotují prakticky všechny a $C_V/R = 2{,}5$.

Podobně nám kvantová teorie říká, že i vibrační pohyb molekul vyžaduje určitou minimální energii, která je však vyšší než u rotačního pohybu a je jí dosaženo až při teplotách okolo 1 000 K (obr. 20.12). Se zvyšující se teplotou opět přibývá kmitajících molekul a C_V/R roste až na hodnotu 3,5. (Graf na obr. 20.12 končí okolo teploty 3 200 K, při které atomy kmitají natolik, že se od sebe odtrhnou — dojde k disociaci molekul H_2 na dva oddělené atomy H.)

20.11 ADIABATICKÉ ROZPÍNÁNÍ IDEÁLNÍHO PLYNU

V čl. 18.2 jsme studovali zvukové vlny jako posloupnost stlačení a rozepnutí vzduchu; tyto změny probíhají natolik rychle, že nedojde k přenosu tepla ve vzduchu z jednoho místa na druhé. Proces, při kterém je $Q = 0$, jsme v čl. 19.10 nazvali **adiabatický**. Výměně tepla během určitého děje lze zabránit dvěma způsoby. Buď děj probíhá tak rychle, že k výměně tepla prakticky nestihne dojít (jako v případě zvukových vln), anebo systém dobře tepelně izolujeme. Podívejme se nyní, co může o adiabatickém ději říci kinetická teorie plynů.

Na obr. 20.13a je zobrazen izolovaný válec obsahující ideální plyn. Odebíráním závaží z pístu necháme plyn adiabaticky rozpínat. Když se zvětšuje objem plynu, jeho teplota i tlak klesají. Později dokážeme, že během vratného adiabatického děje platí mezi tlakem a objemem plynu vztah

$$pV^{\gamma} = \text{konst.} \qquad \text{(adiabatický děj)}, \qquad (20.40)$$

kde $\gamma = C_p/C_V$ je poměr molárních tepelných kapacit, neboli tzv. **Poissonova konstanta**. Tento děj je v p-V diagramu na obr. 20.13b znázorněn částí křivky zvané **adiabata**, která je popsána rovnicí $p = \text{konst.}/V^{\gamma}$. Pokud děj probíhá z počátečního stavu $\mathscr{S}_\text{i}$ do koncového stavu $\mathscr{S}_\text{f}$, plyne z rov. (20.40)

$$p_\text{i} V_\text{i}^{\gamma} = p_\text{f} V_\text{f}^{\gamma} \qquad \text{(adiabatický děj)}. \qquad (20.41)$$

Rovnici pro adiabatický děj lze také přepsat pomocí veličin V a T. K tomu použijeme stavovou rovnici ideálního plynu ($pV = nRT$), pomocí níž vyloučíme tlak p z rov. (20.40) a dostaneme

$$\frac{nRT}{V} V^{\gamma} = \text{konst.}$$

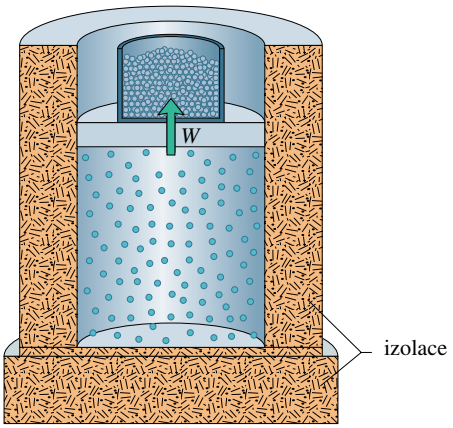
Protože n a R jsou konstantní, přepišme ještě poslední rov-

nici na ekvivalentní tvar

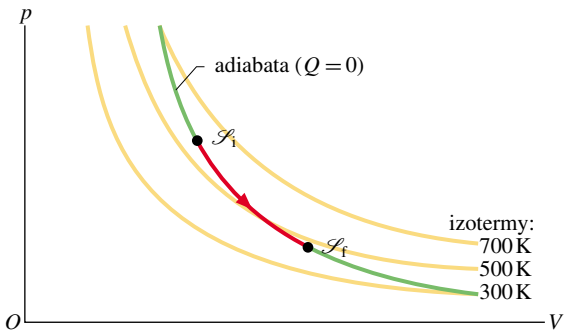
$$TV^{\gamma-1} = \text{konst.} \quad \text{(adiabatický děj)}, \qquad (20.42)$$

kde však vystupuje jiná konstanta než v rov. (20.40). Pokud děj probíhá z počátečního stavu $\mathscr{S}_\text{i}$ do koncového stavu $\mathscr{S}_\text{f}$, můžeme rov. (20.42) přepsat jako

$$T_\text{i} V_\text{i}^{\gamma-1} = T_\text{f} V_\text{f}^{\gamma-1} \quad \text{(adiabatický děj)}. \qquad (20.43)$$



(*a*)



(*b*)

Obr. 20.13 (a) Odebíráme-li závaží z pístu, zvětšuje se objem ideálního plynu. Děj je adiabatický, neboť $Q = 0$. (b) Děj probíhá z počátečního stavu $\mathscr{S}_\text{i}$ do koncového stavu $\mathscr{S}_\text{f}$ podél adiabaty znázorněné v p-V diagramu.

Odvození rov. (20.40)

Předpokládejme, že odebereme z pístu na obr. 20.13a trochu zátěže, a tím necháme plyn povytlačit píst a zvětšit tak jeho objem o $\mathrm{d}V$. Protože je změna objemu infinitezimální, můžeme tlak plynu působícího na píst považovat během této změny za neměnný. Tento předpoklad nám umožňuje vyjádřit elementární práci $\mathrm{d}W$ vykonanou plynem během zvětšování objemu jako $p\,\mathrm{d}V$. Dosazením do rov. (19.25) přepíšeme první termodynamický zákon jako

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q - p\,\mathrm{d}V. \qquad (20.44)$$

Poněvadž je systém tepelně izolovaný (tj. rozpínání je adiabatické), dosadíme $\mathrm{d}Q = 0$. Dále použijeme rov. (20.35) a nahradíme $\mathrm{d}U$ výrazem $nC_V\,\mathrm{d}T$. Po jednoduché úpravě tak obdržíme

$$n\,\mathrm{d}T = -\frac{p}{C_V}\,\mathrm{d}V. \qquad (20.45)$$

Diferenciací stavové rovnice ideálního plynu ($pV = nRT$) dostaneme rovnici

$$p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p = nR\,\mathrm{d}T, \qquad (20.46)$$

kterou přepíšeme pomocí vztahu $R = C_p - C_V$ na tvar

$$n\,\mathrm{d}T = \frac{p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p}{C_p - C_V}. \qquad (20.47)$$

Dosazením za $n\,\mathrm{d}T$ z rov. (20.47) do (20.45) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} + \frac{C_p}{C_V}\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0.$$

Označíme-li poměr molárních tepel jako γ a poslední rovnici integrujeme, dostaneme

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{konst.}$$

Levou stranu přepíšeme jako $\ln pV^\gamma$ a odlogaritmováním nakonec nalezneme

$$pV^\gamma = \text{konst.}, \qquad (20.48)$$

což jsme chtěli dokázat.

Volná expanze

Z čl. 19.10 víme, že volná expanze je nevratný adiabatický děj, při kterém plyn nekoná žádnou práci a nedochází tedy ani ke změně vnitřní energie plynu. Tento proces se odlišuje od vratného adiabatického děje popsaného rov. (20.40) až (20.48), během kterého plyn koná práci a mění se jeho vnitřní energie. Pro volnou expanzi proto nelze uvedené vztahy použít, třebaže jde také o adiabatický děj.

Připomeňme si dále, že během volné expanze je plyn v rovnovážném stavu pouze na začátku a na konci. Na p-V diagramu nemůžeme zobrazit celý průběh expanze, ale pouze tyto dva rovnovážné stavy, o kterých víme, že leží na izotermě, neboť se při volné expanzi nemění teplota

plynu ($\Delta U = 0$). Rov. (20.43) je v tomto případě nahrazena rovnicí

$$T_i = T_f \qquad \text{(volná expanze).} \qquad (20.49)$$

Budeme-li považovat plyn za ideální ($pV = nRT$), pak při stálé teplotě zůstává výraz pV konstantní. Místo rov. (20.41) tak pro volnou expanzi platí

$$p_i V_i = p_f V_f \qquad \text{(volná expanze).} \qquad (20.50)$$

PŘÍKLAD 20.10

Uvažujme stejnou situaci jako v př. 20.2; jeden mol kyslíku (ideálního plynu) izotermicky expanduje při teplotě 310 K z počátečního objemu $V_i = 12\,\text{l}$ na koncový objem $V_f = 19\,\text{l}$.

(a) Jaká bude koncová teplota plynu, pokud expanduje adiabaticky z objemu 12 l na objem 19 l? Kyslík (O_2) má dvouatomové molekuly, u kterých uvažujte pouze posuvný a rotační pohyb.

ŘEŠENÍ: Pro dvouatomový plyn, u jehož molekul neuvažujeme vibrační pohyb, platí $C_p = \frac{7}{2}R$ a $C_V = \frac{5}{2}R$. Tedy $\gamma = C_p/C_V = 1{,}40$ a z rov. (20.43) dostaneme

$$T_f = \frac{T_i V_i^{\gamma-1}}{V_f^{\gamma-1}} = \frac{(310\,\text{K})(12\,\text{l})^{1,40-1}}{(19\,\text{l})^{1,40-1}} \doteq$$
$$\doteq 258\,\text{K}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Protože došlo k ochlazení plynu z teploty 310 K na 258 K, snížila se také jeho vnitřní energie. Tento úbytek vnitřní energie je spojen s prací, kterou plyn vykonal (např. k nadzvednutí závaží na pístu na obr. 20.13a).

(b) Jaká bude koncová teplota a koncový tlak, pokud bude plyn volně expandovat opět na koncový objem V_f? Jeho počáteční tlak byl 2,0 Pa.

ŘEŠENÍ: Během volné expanze nedochází ke změně teploty plynu, platí tedy

$$T_f = T_i = 310\,\text{K}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

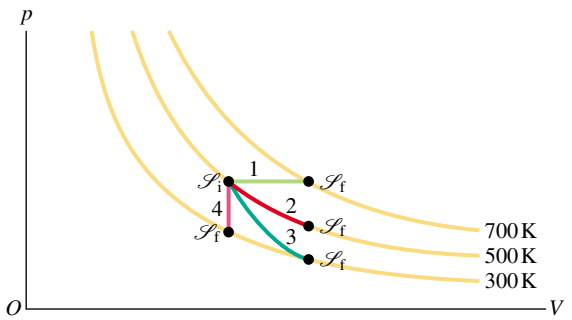
Koncový tlak určíme pomocí rov. (20.50) a dostaneme

$$p_f = p_i \frac{V_i}{V_f} = (2{,}0\,\text{Pa})\frac{(12\,\text{l})}{(19\,\text{l})} \doteq 1{,}3\,\text{Pa}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 20.2: *Grafické zobrazení čtyř dějů s plynem*

V této kapitole jsme se zabývali ideálním plynem a ději, které s ním můžeme vykonat. Mezi nimi mají zvláštní význam čtyři děje (izobarický, izotermický, adiabatický a izochorický). Jejich znázornění pomocí p-V diagramu vidíme na obr. 20.14 a některé jejich charakteristiky v tab. 20.5.



Obr. 20.14 p-V diagram popisující čtyři význačné děje v ideálním plynu. Viz také tab. 20.5.

KONTROLA 5: Uspořádejte sestupně dráhy 1, 2, 3 z obr. 20.14 podle tepla dodaného plynu.

Tabulka 20.5 **Čtyři význačné děje**

Dráha na obr. 20.14	Vlastnost	Typ děje	Některé speciální výsledky ($\Delta U = Q - W$ a $\Delta U = nC_V\Delta T$ pro všechny děje)
1	p = konst.	izobarický	$Q = nC_p\Delta T$; $W = p\Delta V$
2	T = konst.	izotermický	$Q = W = nRT\ln(V_f/V_i)$; $\Delta U = 0$
3	$Q = 0$	adiabatický	$Q = 0$; $W = -\Delta U$
4	V = konst.	izochorický	$Q = \Delta U = nC_V\Delta T$; $W = 0$

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Kinetická teorie plynů

Kinetická teorie plynů spojuje *makroskopické* vlastnosti plynů (např. tlak a teplotu) s *mikroskopickými* vlastnostmi molekul plynu (např. s rychlostmi a kinetickými energiemi).

Avogadrova konstanta

Jeden mol substance obsahuje N_A základních jednotek (obvykle atomů či molekul), přičemž experimentálně určená *Avogadrova konstanta* N_A má hodnotu

$$N_A = 6{,}02{\cdot}10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1} \quad \text{(Avogadrova konstanta).} \qquad (20.1)$$

Molární hmotnost m_m libovolné látky je hmotnost jednoho molu této látky.

Ideální plyn

Ideální plyn je charakterizován stavovou rovnicí

$$pV = nRT \quad \text{(stavová rovnice ideálního plynu),} \qquad (20.4)$$

kde p značí tlak, T teplotu, V objem a n látkové množství (počet molů) plynu. *Plynová konstanta* R má hodnotu $8{,}31\ \mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$.

Práce vykonaná při izotermickém ději

Práce, kterou *vykoná* ideální plyn během *izotermického* děje, je dána vztahem

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \quad \text{(ideální plyn, izotermický děj),} \qquad (20.10)$$

kde V_i, resp. V_f je počáteční, resp. koncový objem plynu.

Tlak, teplota a rychlost molekul

Tlak vyvolaný n moly ideálního plynu je spojen s rychlostmi molekul plynu vztahem

$$p = \frac{n m_m v_{ef}^2}{3V}, \qquad (20.17)$$

přičemž *střední kvadratická rychlost* molekul plynu v_{ef} je definována jako $v_{ef} = \sqrt{\overline{v^2}}$. Použitím rov. (20.4) a (20.17) získáme pro ni výraz

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{3RT}{m_m}}. \qquad (20.18)$$

Teplota a kinetická energie

Střední kinetická energie $\overline{E_k}$ posuvného pohybu připadající na jednu molekulu ideálního plynu je

$$\overline{E_k} = \tfrac{3}{2}kT, \qquad (20.20)$$

kde $k = R/N_A = 1{,}38{\cdot}10^{-23}\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$ je *Boltzmannova konstanta*.

Střední volná dráha

Střední volná dráha λ molekul plynu je střední dráha, kterou molekula urazí mezi po sobě jdoucími srážkami. Platí pro ni

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V}, \qquad (20.22)$$

kde N/V je hustota molekul a d jejich průměr.

Maxwellovo rozdělení rychlostí molekul

Relativní počet molekul s rychlostmi v intervalu $(v, v + \mathrm{d}v)$ je dán výrazem $P(v)\,\mathrm{d}v$, ve kterém funkci

$$P(v) = 4\pi \left(\frac{m_m}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 \mathrm{e}^{-m_m v^2/2RT} \qquad (20.24)$$

nazýváme *Maxwellovo rozdělení rychlostí*. Třemi význačnými rychlostmi odvozenými z tohoto rozdělení jsou

$$v_P = \sqrt{\frac{2RT}{m_m}} \quad \text{(nejpravděpodobnější rychlost),} \qquad (20.29)$$

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi m_m}} \quad \text{(střední rychlost)} \qquad (20.27)$$

a výše uvedená střední kvadratická rychlost v_{ef} (rov. (20.18)).

Molární tepelné kapacity

Molární tepelná kapacita C_V plynu *při stálém objemu* V je definována vztahem

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{Q}{\Delta T} = \frac{1}{n}\frac{\Delta U}{\Delta T}, \qquad (20.31, 20.32)$$

ve kterém Q značí teplo, které si n molů plynu *izochoricky* vymění s okolím, ΔT je změna teploty a ΔU je změna vnitřní energie plynu. Pro ideální jednoatomový plyn platí

$$C_V = \tfrac{3}{2}R = 12{,}5\ \mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}. \qquad (20.33)$$

Molární tepelná kapacita C_p plynu *při stálém tlaku* p je definována vztahem

$$C_p = \frac{1}{n}\frac{Q}{\Delta T}, \qquad (20.36)$$

ve kterém Q, n a ΔT mají analogický význam jako v předchozím případě. Molární tepelné kapacity C_p a C_V ideálního plynu jsou svázány rovnicí

$$C_p = C_V + R. \qquad (20.38)$$

Vnitřní energie ideálního plynu

Pro *vnitřní energii* n molů ideálního plynu platí

$$U = nC_V T \quad \text{(ideální plyn).} \qquad (20.34)$$

Pokud libovolným způsobem změníme teplotu o ΔT, bude změna jeho vnitřní energie rovna

$$\Delta U = nC_V \Delta T \qquad \text{(ideální plyn, libovolný proces)}, \qquad (20.35)$$

přičemž hodnota C_V závisí na druhu ideálního plynu.

Stupně volnosti a C_V

Molární tepelnou kapacitu C_V můžeme odhadnout užitím *ekvipartičního teorému*. Ten říká, že na každý stupeň volnosti jedné molekuly plynu (tj. na každý nezávislý způsob uchování energie) připadá průměrně energie $\frac{1}{2}kT$ (což odpovídá energii $\frac{1}{2}RT$ na jeden mol). Značí-li f počet stupňů volnosti, je $U = (f/2)nRT$ a

$$C_V = \left(\frac{f}{2}\right) R = 4{,}16 f \ \mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}. \qquad (20.39)$$

Pro jednoatomový plyn $f = 3$ (tři stupně volnosti pro posuvný pohyb). Pro dvouatomový plyn $f = 5$ (tři pro posuvný a dva pro rotační pohyb); po započtení vibrací $f = 7$.

Adiabatický děj

Probíhá-li v ideálním plynu vratný adiabatický děj (tj. děj, pro který je $Q = 0$), jsou tlak a objem plynu spojeny vztahem

$$pV^{\gamma} = \text{konst.} \qquad \text{(adiabatický děj)}, \qquad (20.40)$$

kde $\gamma = C_p/C_V$ je Poissonova konstanta daného plynu. Při volné expanzi nabývá plyn stejné teploty v počátečním i koncovém stavu, a proto $p_i V_i = p_f V_f$. Během volné expanze není plyn v tepelné rovnováze a nemá proto teplotu ani tlak definovány; výraz pV nemá smysl a nelze ho průběžně vyhodnocovat.

OTÁZKY

1. Změní-li se teplota ideálního plynu za neměnného objemu z 20 °C na 40 °C, zvýší se tlak dvakrát, méně než dvakrát, nebo více než dvakrát?

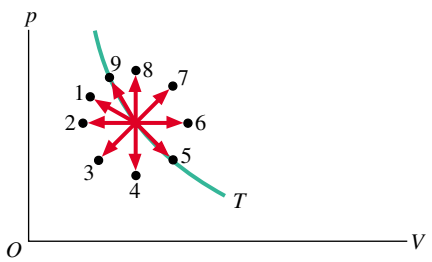
2. Dvě stejně velké místnosti jsou spojeny úzkým otevřeným průchodem, ale jejich teplotu udržujeme na různých hodnotách. Ve které místnosti je více molekul?

3. Molární hmotnosti a teploty tří ideálních plynů (v kelvinech) jsou (a) m_m a $2T_0$, (b) $2m_m$ a T_0, (c) $6m_m$ a $6T_0$. Seřaďte sestupně tyto plyny podle střední kvadratické rychlosti jejich molekul.

4. Objem a počet molekul plynu ve čtyřech různých situacích nabývají hodnot (a) $2V_0$ a N_0, (b) $3V_0$ a $3N_0$, (c) $8V_0$ a $4N_0$, (d) $3V_0$ a $9N_0$. Seřaďte sestupně jednotlivé situace podle střední volné dráhy molekul.

5. Uvažujme plyn z př. 20.2. Jaké teplo si vymění plyn s okolím během svého rozpínání?

6. Na obr. 20.15 je vyznačen počáteční stav ideálního plynu a izoterma jdoucí tímto stavem. Během kterého z dějů, které jsou naznačeny šipkami, dojde ke snížení teploty plynu?



Obr. 20.15 Otázka 6

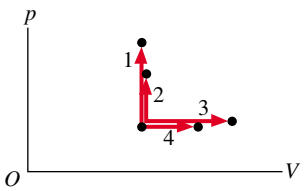
7. Tabulka udává pro děje a, b, c, d teplo Q, které si vyměnil ideální plyn s okolím, a dále buď práci W vykonanou plynem, nebo práci W', která byla vykonána na plynu. Seřaďte sestupně tyto děje podle změny teploty plynu.

	a	b	c	d
Q	−50	+35	−15	+20
W	−50	+35		
W'			−40	+40

8. Abychom zvýšili teplotu určitého množství ideálního plynu o ΔT, musíme za neměnného objemu dodat teplo 30 J, nebo za neměnného tlaku teplo 50 J. Jakou práci vykoná plyn v druhém případě?

9. Ideální dvouatomový plyn, u jehož molekul uvažujeme pouze rotaci, ale ne kmity, odevzdá během děje teplo Q. Je výsledná změna vnitřní energie plynu větší, jde-li o děj izochorický, nebo jde-li o děj izobarický?

10. Jisté množství tepla dodáme jednomu molu jednoatomového plynu (a) při stálém tlaku a (b) při stálém objemu; a dále jednomu molu dvouatomového plynu (c) při stálém tlaku a (d) při stálém objemu. Na obr. 20.16 vidíme p-V diagram se čtyřmi drahami jdoucími ze společného počátečního stavu do různých koncových stavů. Rozhodněte, která dráha odpovídá kterému ději. (e) Rotují molekuly dvouatomového plynu?

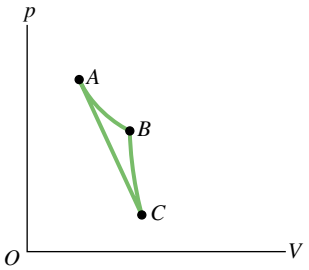


Obr. 20.16 Otázka 10

11. Jak se změní teplota plynu (a) během izotermické expanze, (b) během izobarické expanze, (c) během adiabatické expanze a (d) při zvýšení tlaku během izochorického děje? Stoupne, klesne, nebo zůstane stejná?

12. (a) Seřaďte sestupně děje vyznačené drahami na obr. 20.14 podle práce, kterou vykoná plyn. (b) Seřaďte sestupně děje 1, 2 a 3 podle změny vnitřní energie plynu.

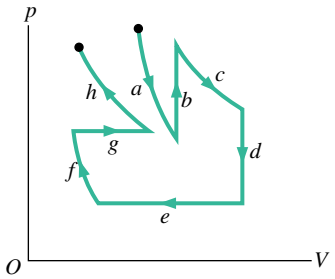
13. Plyn vykoná práci 5 J během izotermického děje, který je zobrazen v p-V diagramu na obr. 20.17 dráhou A–B. Dále vykoná práci 4 J během adiabatického děje, kterému odpovídá dráha B–C. Jaká je změna vnitřní energie plynu při přechodu po přímé dráze A–C?



Obr. 20.17 Otázka 13

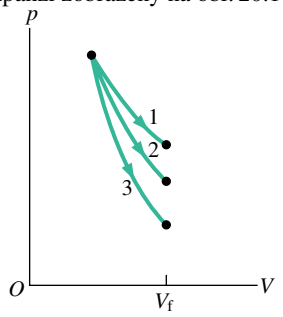
14. Na obr. 20.18 je kvalitativně naznačeno osm dějů (označených písmeny a až h), které proběhnou s ideálním plynem, když přechází z počátečního do koncového stavu. V tabulce jsou uvedeny hodnoty Q, W a ΔU (v joulech) pro určité děje, označené 1–8. Přiřaďte k jednotlivým drahám na obr. 20.18 odpovídající sloupec z tabulky. (*Tip*: Porovnejte dráhy na obr. 20.18 s drahami na obr. 20.14.)

	1	2	3	4	5	6	7	8
Q	10	5	−20		−10	−12		10
W	10		−10	10		−12	−10	
ΔU		2		−10	−10		10	10



Obr. 20.18 Otázka 14

15. (a) Na obr. 20.19 vidíme p-V diagram adiabatického rozpínání jednoatomového, dvouatomového a víceatomového plynu z téhož stavu na koncový objem V_f. Která z drah přísluší kterému z plynů? (b) Pokud by jednoatomový plyn volně expandoval na stejný koncový objem V_f, byl by výsledný tlak větší, menší, nebo stejný jako v případě (a)? (*Tip*: Jaký by byl počáteční a koncový stav při volné expanzi zobrazený na obr. 20.14?)



Obr. 20.19 Otázka 15

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 20.2 Avogadrova konstanta

1C. Molární hmotnost zlata je 197 g·mol^{-1}. (a) Kolik molů zlata je obsaženo ve vzorku čistého zlata o hmotnosti 2,50 g? (b) Kolik atomů je ve vzorku?

2C. Určete hmotnost v kilogramech $7{,}50\cdot10^{24}$ atomů arsenu, jehož molární hmotnost je 74,9 g·mol^{-1}.

3Ú. Kolik molekul vody by připadalo na 1,0 cm^2, kdyby byl 1,0 g vody rovnoměrně rozprostřen po zemském povrchu?

4Ú. Vyberte ze slov „kapka, čajová lžička, polévková lžíce, šálek, vědro, sud, cisterna“ to jediné, které by šlo doplnit na obě místa do věty: … vody obsahuje tolik molekul, jako je… vody ve všech oceánech světa. Oceány pokrývají 75 % zemského povrchu a mají průměrnou hloubku 5 km. (Podle Edwarda M. Purcella.)

5Ú. Jeden fyzik kdysi napsal: „V jediném písmenu této věty je tolik molekul inkoustu, že by po jedné mohli dostat nejen lidé na Zemi, ale i každý tvor v naší Galaxii, kdyby u každé hvězdy byla planeta s obdobnou populací, jako má Země.“ Ověřte toto tvrzení. Předpokládejte, že hmotnost inkoustu (molární hmotnost 18 g·mol^{-1}) je 1 μg, že na Zemi žije $6\cdot10^9$ lidí a že počet hvězd v naší Galaxii je 10^{11}.

ODST. 20.3 Ideální plyn

6C. (a) Jaký objem zaujímá 1,00 mol ideálního plynu za normálních podmínek, tj. při tlaku 1,00 atm a teplotě 0 °C? (b) Ukažte, že počet molekul v centimetru krychlovém (tzv. **Loschmidtovo číslo**) za normálních podmínek je $2{,}69\cdot10^{19}$.

7C. Vypočtěte (a) počet molů a (b) počet molekul v 1,00 cm^3 ideálního plynu při tlaku 100 Pa a teplotě 220 K.

8C. Nejlepší vakuum, kterého lze dosáhnout v laboratoři, odpovídá zhruba tlaku $1\cdot10^{-18}$ atm. Kolik molekul je v jednom krychlovém centimetru při tomto tlaku a teplotě 293 K?

9Ú. Ideální plyn zaujímá při teplotě 10,0 °C a tlaku 100 kPa objem 2,50 m^3. (a) Kolik molů plynu tam je? (b) Jaký objem bude plyn zaujímat, zvýší-li se jeho tlak na 300 kPa a jeho teplota na 30 °C?

10C. Kyslík se z počátečního stavu o objemu 1 000 cm^3, teplotě 40,0 °C a tlaku $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa rozepne na koncový objem 1 500 cm^3, přičemž jeho tlak *vzroste* na hodnotu $1{,}06 \cdot 10^5$ Pa. (a) Kolik molů kyslíku se účastní tohoto děje? (b) Jaká je koncová teplota plynu?

11C. Pneumatika automobilu má objem 1 000 in^3 a je naplněna vzduchem při obvyklém tlaku 24,0 lb/in^2 a teplotě 0,00 °C. Jaký bude tlak v pneumatice, zvýší-li se teplota na 27,0 °C za současného zvýšení jejího objemu na 1 020 in^3? (*Tip*: Není nutno převádět britské jednotky na jednotky SI; proč? Použijte vztah $p_{atm} = 14{,}7\ lb/in^2$.)

12C. Vypočtěte práci, kterou musíme vykonat, abychom izotermicky stlačili kyslík z objemu 22,4 l na objem 16,8 l. Na počátku byl jeho tlak 1,00 atm a teplota 0 °C.

13Ú. (a) Jaká je číselná hustota molekul (počet molekul v jednotce objemu) vzduchu při teplotě 20 °C a tlaku 1,00 atm? (b) Jaká je hmotnost 1 m^3 vzduchu za těchto podmínek? Uvažujte, že ve vzduchu je 75 % molekul dusíku a 25 % molekul kyslíku.

14Ú. Stavová rovnice určitého materiálu pro tlak p, teplotu T a objem V je

$$p = \frac{AT - BT^2}{V},$$

kde A a B jsou konstanty. Nalezněte vztah pro práci, kterou vykoná materiál, jestliže se jeho teplota změní z T_1 na T_2, přičemž tlak zůstává konstantní.

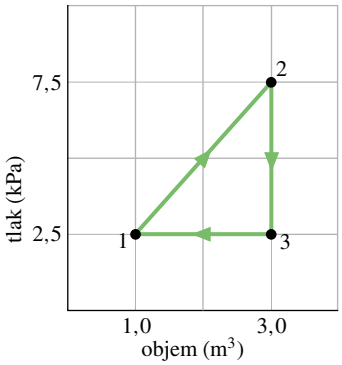
15Ú. Vzduch, který na začátku zaujímá objem 0,14 m^3 při tlaku $1{,}03 \cdot 10^5$ Pa, nejprve izotermicky expanduje, přičemž se jeho tlak vyrovná s atmosférickým, a poté je izobaricky ochlazován, až se jeho objem bude rovnat původnímu objemu. Vypočtěte práci, kterou plyn vykoná během popsaného děje.

16Ú. Uvažujte jisté množství plynu. Porovnejte křivky pro izochorický, izobarický a izotermický děj (a) na p-V diagramu, (b) na p-T diagramu a (c) na V-T diagramu. (d) Jak tyto křivky závisejí na množství plynu?

17Ú. V nádobě jsou smíchány 2 moly určitého ideálního plynu s 0,5 molu jiného ideálního plynu. První plyn má molární hmotnost m_{m1} a druhý $m_{m2} = 3m_{m1}$. Jaká část z celkového tlaku směsi na stěny nádoby připadá na druhý plyn? (V kinetické teorii plynu je možné odvodit **zákon parciálních tlaků** pro směs plynů, které spolu nereagují: *Celkový tlak směsi plynů v určitém objemu je roven součtu tlaků, které by jednotlivé plyny vyvolaly, pokud by zaujímaly stejný objem jako směs.*)

18Ú. Vzorek ideálního plynu prochází kruhovým dějem 1231 na obr. 20.20, přičemž jeho teplota ve stavu 1 je $T = 200$ K. (a) Kolik molů plynu je ve vzorku? Jaká je teplota plynu (b) ve stavu 2 a (c) ve stavu 3? (d) Jaké teplo bylo dodáno plynu během kruhového děje?

19Ú. Ideální plyn o počáteční teplotě 300 K je při tlaku 25 Pa izobaricky ochlazen a jeho objem se zmenší ze 3,0 m^3 na objem 1,8 m^3. Během tohoto procesu plyn odevzdá teplo 75 J.



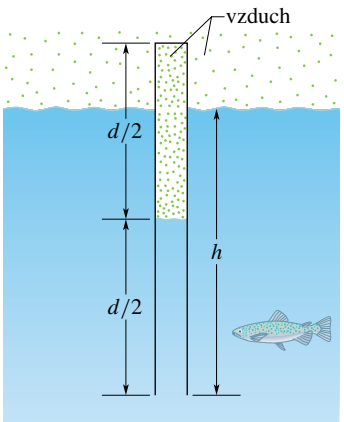
Obr. 20.20 Úloha 18

(a) Jak se změní vnitřní energie plynu? (b) Jaká bude koncová teplota plynu?

20Ú. Meteorologický balon je naplněn heliem při atmosférickém tlaku 1,0 atm a teplotě 20 °C. Objem helia je 2,2 m^3. V nadmořské výšce 6 km je atmosférický tlak pouze 380 torr a helium se proto rozepne, přičemž obal balonu mu v rozpínání nijak nebrání. Teplota plynu v této výšce je −48 °C. Jaký je objem helia v této výšce?

21Ú. Vzduchová bublina objemu 20 cm^3 se nachází na dně čtyřicetimetrového jezera, kde je teplota vody 4,0 °C. Bublina stoupá k hladině, kde je teplota vody 20 °C. Předpokládejte, že teplota vzduchu v bublině je vždy rovna teplotě okolní vody. Jaký bude mít bublina objem těsně pod hladinou jezera?

22Ú. Trubice délky $d = 25{,}0$ m je na jednom konci uzavřena. Budeme ji svisle nořit do vody jezera otevřeným koncem, až voda vystoupí do poloviny trubice (obr. 20.21). Jak hluboko bude v tomto okamžiku ústí trubice pod hladinou? Předpokládejte, že teplota je všude stejná a že se s časem nemění.

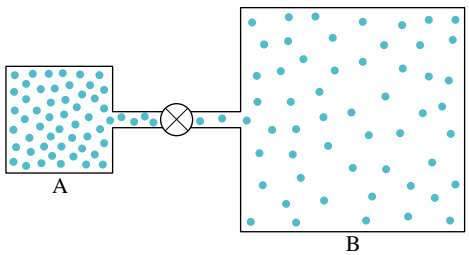


Obr. 20.21 Úloha 22

23Ú. Horkovzdušný balon včetně koše má hmotnost 550 lb a jeho objem je 77 000 ft^3. Jaká musí být teplota vzduchu ve °F v plně nafouknutém balonu, aby byla jeho nosnost 600 lb (tj., aby kromě 550 lb své váhy unesl navíc dalších 600 lb)? Předpokládejte, že okolní vzduch má při teplotě 20,0 °C hustotu $7{,}56 \cdot 10^{-2}\ lb/ft^3$.

24Ú. Ocelová nádoba obsahuje 300 g plynného amoniaku (NH_3) při tlaku $1{,}35\cdot10^6$ Pa a teplotě 77 °C. (a) Jaký je objem nádoby? (b) Po určité době, během níž teplota nádoby poklesla na 22 °C, je naměřen tlak $8{,}7\cdot10^5$ Pa. Kolik gramů plynu uniklo stěnami nádoby?

25Ú. Nádoba A na obr. 20.22, která na začátku obsahuje ideální plyn o teplotě 300 K a tlaku $5{,}0\cdot10^5$ Pa, je úzkou trubicí spojena s nádobou B, která má čtyřikrát větší objem a která obsahuje stejný plyn, avšak při teplotě 400 K a tlaku $1{,}0\cdot10^5$ Pa. Jaký bude výsledný tlak v systému, jestliže otevřeme kohoutek na spojovací trubici, ale zároveň budeme udržovat původní teploty obou nádob?



Obr. 20.22 Úloha 25

ODST. 20.4 Tlak, teplota a střední kvadratická rychlost

26C. Vypočtěte střední kvadratickou rychlost atomů helia při teplotě 1 000 K. Molární hmotnost helia je 4,00 g·mol^{-1}.

27C. Nejnižší teplota v mezihvězdném prostoru je 2,7 K. Jaká je střední kvadratická rychlost molekul vodíku při této teplotě? (Použijte tab. 20.1.)

28C. Najděte střední kvadratickou rychlost atomů argonu při teplotě 313 K. Molární hmotnost argonu je 39,9 g·mol^{-1}.

29C. Uvažujme Slunce jako obrovskou kouli horkého ideálního plynu. Teplota a tlak v určité oblasti sluneční atmosféry jsou $2{,}00\cdot10^6$ K a 0,030 0 Pa. Vypočtěte střední kvadratickou rychlost volných elektronů v této oblasti. (Hmotnost elektronu je $9{,}11\cdot10^{-31}$ kg.)

30C. (a) Vypočtěte střední kvadratickou rychlost molekul dusíku při 20,0 °C. Při jaké teplotě bude tato rychlost (b) poloviční, (c) dvojnásobná?

31C. Při jaké teplotě mají atomy helia stejnou střední kvadratickou rychlost jako molekuly vodíku H_2 při 20,0 °C?

32Ú. Při teplotě 273 K a tlaku $1{,}00\cdot10^{-2}$ atm je hustota plynu $1{,}24\cdot10^{-5}$ g·cm^{-3}. (a) Nalezněte střední kvadratickou rychlost v_{ef} molekul plynu. (b) Nalezněte molární hmotnost plynu a určete, o který plyn se jedná.

33Ú. Hmotnost molekuly H_2 je $3{,}3\cdot10^{-24}$ g. Jaký tlak vyvolává plyn na stěnu plochy 2 cm^2, jestliže na ni dopadá 10^{23} molekul H_2 za jednu sekundu rychlostí $1{,}0\cdot10^5$ cm·s^{-1} pod úhlem 55° od normály?

ODST. 20.5 Kinetická energie posuvného pohybu

34C. Jaká je střední kinetická energie posuvného pohybu molekul kyslíku při teplotě 1 600 K (a) v joulech, (b) v elektronvoltech?

35C. (a) Určete střední kinetickou energii posuvného pohybu částic ideálního plynu v elektronvoltech pro teploty 0,00 °C a 100 °C. (b) Jaká kinetická energie posuvného pohybu v joulech připadá na jeden mol ideálního plynu při těchto teplotách?

36C. Při jaké teplotě je střední kinetická energie posuvného pohybu molekul rovna 1,00 eV?

37C. Kyslík O_2 je uzavřen do krychle o hraně 10 cm při teplotě 273 K a tlaku 1,0 atm. Vypočtěte změnu ΔU gravitační potenciální energie molekuly O_2 při přemístění mezi dnem a víkem krychle a porovnejte ji se střední kinetickou energií E_k posuvného pohybu molekuly.

38Ú. Ukažte, že stavová rovnice ideálního plynu (20.4) může být přepsána (a) na tvar $p = \varrho RT/m_m$, kde ϱ je hustota plynu a m_m je jeho molární hmotnost; (b) na tvar $pV = NkT$, kde N je počet částic plynu (atomů či molekul).

39Ú. Neuzavřeme-li vodu do nádoby s víkem, bude se neustále vypařovat, neboť molekuly z jejího povrchu unikají do vzduchu. Měrná tepelná kapacita vypařování (539 cal·g^{-1}) je přibližně rovna εn, kde ε je střední energie unikající molekuly a n je počet molekul v jednom gramu vody. (a) Nalezněte ε. (b) Jaký je poměr ε a střední kinetické energie molekul H_2O, pro niž budeme předpokládat, že závisí na teplotě jako u ideálních plynů?

40Ú. **Avogadrův zákon** říká, že za stejných podmínek obsahuje daný objem plynu vždy stejný počet molekul, nezávisle na druhu plynu. Je tento zákon ekvivalentní stavové rovnici ideálního plynu? Vysvětlete.

ODST. 20.6 Střední volná dráha

41C. Střední volná dráha molekul dusíku při teplotě 0,0 °C a tlaku 1,0 atm je $0{,}80\cdot10^{-5}$ cm. Hustota částic za těchto podmínek je $2{,}7\cdot10^{19}$ cm^{-3}. Jaký průměr mají molekuly?

42C. Ve výšce 2 500 km nad mořem je zhruba jedna molekula na 1 cm^{-3}. (a) Jakou střední volnou dráhu molekul předpovídá rov. (20.22) v těchto podmínkách? (b) Lze tuto rovnici použít při těchto podmínkách? Uvažujte průměr molekul $2{,}0\cdot10^{-8}$ cm.

43C. Jaká je střední volná dráha 15 cvrnkacích kuliček v „divoce se třesoucí“ krabičce? Objem krabičky je 1,0 l a průměr kuličky je 1,0 cm.

44C. Vyjádřete četnost srážek atomů či molekul plynu v závislosti na N/V, $\overline{v}$ a d.

45Ú. V urychlovači částic krouží protony po kruhové dráze o průměru 23,0 m. V jeho evakuovaných komorách je tlak $1{,}00\cdot10^{-6}$ torr při teplotě 295 K. (a) Vypočtěte, kolik molekul při tomto tlaku připadá na jeden krychlový centimetr. (b) Jaká je střední volná dráha molekul plynu, jestliže mají průměr $2{,}00\cdot10^{-8}$ cm?

46Ú. Při jaké frekvenci by byla vlnová délka zvukových vln šířících se vzduchem rovna střední volné dráze molekul kyslíku při 0,0 °C a 1,0 atm? Průměr molekul uvažujte $3{,}0\cdot10^{-8}$ cm.

47Ú. (a) Jaký je **molární objem** (tj. objem jednoho molu) ideálního plynu za normálních podmínek (0,00 °C, 1,00 atm)? (b) Vypočtěte poměr středních kvadratických rychlostí atomů helia a atomů neonu za normálních podmínek. (c) Jaká je střední volná dráha atomů helia? Průměr atomů helia je $1{,}00{\cdot}10^{-8}$ cm. (d) Jaká je střední volná dráha atomů neonu? Použijte stejný průměr atomů jako u helia. (e) Zamyslete se nad výsledky (c) a (d). Přihlédněte k tomu, že se atomy helia pohybují rychleji než atomy neonu.

48Ú. Střední volnou dráhu λ molekul plynu lze určovat také experimentálně (např. z měření viskozity plynů). Tato měření dávají pro argon a dusík při teplotě 20 °C a tlaku 750 torr hodnoty $\lambda_{Ar} = 9{,}9{\cdot}10^{-6}$ cm a $\lambda_{N_2} = 27{,}5{\cdot}10^{-6}$ cm. (a) Určete poměr efektivních průměrů atomu argonu a dusíku. Jaká je střední volná dráha atomů argonu (b) při teplotě 20 °C a tlaku 150 torr a (c) při teplotě −40 °C a tlaku 750 torr?

49Ú. Dokažte, že k pokrytí tečky na konci této věty je zapotřebí 10^{13} molekul vzduchu. Dokažte dále, že každou sekundu do této tečky narazí 10^{21} molekul vzduchu.

ODST. 20.7 Rozdělení rychlostí molekul

50C. Deset molekul se pohybuje různými rychlostmi: 2,0 km/s, 3,0 km/s, 4,0 km/s, …, 11,0 km/s. (a) Jaká je jejich střední rychlost? (b) Jaká je jejich střední kvadratická rychlost?

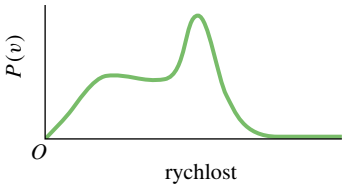
51C. Uvažujme 22 částic. Jejich rychlosti jsou dány následující tabulkou (N_i značí počet částic, které mají rychlost v_i):

N_i	2	4	6	8	2
v_i (cm·s^{-1})	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0

Vypočtěte (a) střední rychlost $\overline{v}$ a (b) střední kvadratickou rychlost v_{ef}. (c) Která z rychlostí v tabulce je nejpravděpodobnější rychlost v_P?

52C. (a) Čtyři částice se pohybují rychlostí 200 m·s^{-1}, dvě rychlostí 500 m·s^{-1} a čtyři rychlostí 600 m·s^{-1}. Určete střední rychlost a střední kvadratickou rychlost těchto částic. Je $v_{ef} > \overline{v}$? (b) Vymyslete si vlastní rozdělení rychlostí pro 10 částic a ukažte, že i pro vaše rozdělení platí $v_{ef} \geqq \overline{v}$. (c) Za jakých podmínek bude $v_{ef} = \overline{v}$?

53C. Uvažujte rozdělení rychlostí zobrazené na obr. 20.23. (a) Seřaďte sestupně rychlosti v_{ef}, $\overline{v}$ a v_P tohoto rozdělení. (b) Jak se liší uspořádání v_{ef}, $\overline{v}$ a v_P pro Maxwellovo rozdělení oproti zde uvažovanému rozdělení?



Obr. 20.23 Cvičení 53

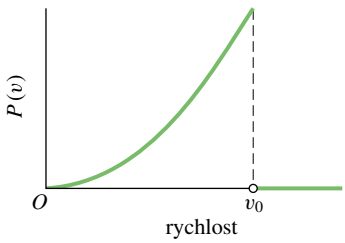
54C. Pro určitý plyn bylo zjištěno, že nejpravděpodobnější rychlost jeho molekul při teplotě T_2 je shodná se střední kvadratickou rychlostí těchto molekul při teplotě T_1. Určete poměr T_2/T_1.

55Ú. (a) Vypočtěte teplotu vodíku, resp. kyslíku, při které je střední kvadratická rychlost molekul rovna únikové rychlosti ze Země. (b) Totéž vypočtěte pro únikovou rychlost z Měsíce, jestliže je gravitační zrychlení na jeho povrchu rovno $0{,}16g$. (c) Teplota horních vrstev atmosféry dosahuje teploty 1 000 K. Očekávali byste tam převážně vodík? Nebo kyslík?

56Ú. Molekula vodíku o průměru $1{,}0{\cdot}10^{-8}$ cm, která se pohybuje střední kvadratickou rychlostí, vylétá z oblasti o teplotě 4 000 K do komory naplněné chladným argonem, jehož atomy o průměru $3{,}0{\cdot}10^{-8}$ cm zaplňují komoru s hustotou částic $4{,}0{\cdot}10^{19}$ cm^{-3}. (a) Jaká je rychlost molekuly vodíku? (b) Jaká je nejmenší možná vzdálenost středů molekuly H_2 a atomu argonu, jestliže dojde k jejich vzájemné srážce? Atom i molekulu považujte za sférické. (c) Jaká je počáteční četnost srážek molekuly vodíku s argonovými atomy?

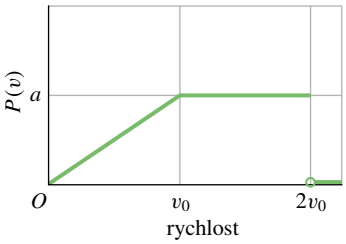
57Ú. Uvažujme dvě nádoby o stejné teplotě. V první z nich je plyn, jehož tlak je p_1 a jehož molekuly mají hmotnost m_1 a střední kvadratickou rychlost $v_{ef,1}$. V druhé je plyn, jehož tlak je $2p_1$ a jehož molekuly mají hmotnost m_2 a střední rychlost $\overline{v}_2 = 2v_{ef,1}$. Určete poměr m_1/m_2.

58Ú. Uvažujme hypotetické rozdělení rychlostí N částic plynu, které vidíme na obr. 20.24: $P(v) = Cv^2$ pro $0 < v \leqq v_0$; $P(v) = 0$ pro $v > v_0$. (a) Vyjádřete konstantu C pomocí N a v_0. Nalezněte (b) střední rychlost částic a (c) jejich střední kvadratickou rychlost.



Obr. 20.24 Úloha 58

59Ú. Na obr. 20.25 je graf rozdělení rychlostí jistého hypotetického vzorku N částic plynu, přičemž $P(v) = 0$ pro $v > 2v_0$. (a) Vyjádřete hodnotu a hustoty pravděpodobnosti pomocí N a v_0. (b) Kolik částic má rychlost mezi $1{,}5v_0$ a $2{,}0v_0$? (c) Vyjádřete střední rychlost částic pomocí v_0. (d) Určete střední kvadratickou rychlost v_{ef}.



Obr. 20.25 Úloha 59

ODST. 20.8 Molární tepelné kapacity ideálního plynu

60C. Jaká je vnitřní energie 1,0 molu ideálního jednoatomového plynu při teplotě 273 K?

61C. Jeden mol ideálního plynu izotermicky expanduje. Nalezněte vztah pro teplo dodané plynu jako funkci počátečního a koncového objemu a teploty. (*Tip*: Použijte první termodynamický zákon.)

62C. Hmotnost atomu helia je $6{,}66\cdot10^{-27}$ kg. Vypočtěte měrnou tepelnou kapacitu jednoatomového heliového plynu při stálém objemu (v $\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$), znáte-li jeho molární tepelnou kapacitu při stálém objemu.

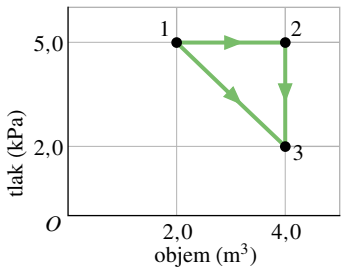
63Ú. Dodejme určitému ideálnímu plynu 20,9 J tepla. V důsledku toho se zvětší jeho objem z 50,0 $\mathrm{cm^3}$ na 100 $\mathrm{cm^3}$, zatímco jeho tlak zůstává stejný a má hodnotu 1,00 atm. (a) Jak se změní vnitřní energie plynu? (b) Určete molární tepelnou kapacitu plynu při stálém tlaku, je-li množství plynu $2{,}00\cdot10^{-3}$ mol. (c) Jaká je jeho molární tepelná kapacita při stálém objemu?

64Ú. Na počátku má n molů ideálního plynu teplotu T_1. Poté pomalu zdvojnásobíme tlak a objem plynu, přičemž v p-V diagramu je tento děj popsán úsečkou, spojující počáteční a koncový stav. Vyjádřete (a) práci W, (b) změnu vnitřní energie ΔU a (c) teplo Q v závislosti na n, R a T_1. (d) Pokud bychom definovali molární tepelnou kapacitu pro tento proces, jaká by byla její hodnota?

65Ú. Nádoba obsahuje směs tří navzájem neinteragujících plynů: n_1 molů (resp. n_2, n_3) prvního (resp. druhého, třetího) plynu, který má molární tepelnou kapacitu při stálém objemu C_1 (resp. C_2, C_3). Určete pro jejich směs molární tepelnou kapacitu při stálém objemu.

66Ú. Hmotnost jedné molekuly plynu je možno vypočítat z měrné tepelné kapacity při stálém objemu c_V. Pro argon má hodnotu $c_V = 0{,}075\ \mathrm{cal\cdot g^{-1}\cdot K^{-1}}$. Určete (a) hmotnost atomu argonu a (b) molární hmotnost argonu.

67Ú. Děj s jedním molem ideálního dvouatomového plynu je v p-V diagramu na obr. 20.26 vyznačen šikmou čarou jdoucí z 1 do 2. Teplota plynu v bodě 1 je 1 200 K. (a) Jak se během tohoto děje změní vnitřní energie plynu? (b) Jaké teplo je třeba plynu dodat? (c) Kolik tepla by bylo nutno dodat, pokud by děj probíhal podél dráhy $1 \to 2 \to 3$?



Obr. 20.26 Úloha 67

ODST. 20.9 Stupně volnosti a molární tepelné kapacity

68C. Jeden mol kyslíku O_2 zahříváme při stálém tlaku, přičemž jeho počáteční teplota je 0 °C. Kolik tepla mu musíme dodat, aby se jeho objem zdvojnásobil? (Neuvažujte kmity molekul, ale pouze jejich rotaci.)

69C. (a) Kolik molů O_2 je obsaženo ve 12,0 g plynného kyslíku? (Viz tab. 20.1.) (b) Kolik tepla musíme dodat, abychom toto množství kyslíku ohřáli při atmosférickém tlaku z 25,0 °C na 125 °C? (Neuvažujte opět kmity molekul, ale pouze jejich rotaci.) (c) Jaká část dodaného tepla se spotřebuje na změnu vnitřní energie kyslíku?

70Ú. (a) Jaké teplo je třeba dodat 4,00 mol ideálního dvouatomového plynu, jehož molekuly rotují, ale nekmitají, aby se jeho teplota při stálém tlaku zvýšila o 60 K? (b) O kolik se přitom změní jeho vnitřní energie? (c) Jakou práci plyn vykoná? (d) O kolik se zvýší celková kinetická energie posuvného pohybu molekul plynu?

ODST. 20.11 Adiabatické rozpínání ideálního plynu

71C. Jisté množství ideálního plynu s $\gamma = 1{,}4$ zaujímá při tlaku 1,2 atm a teplotě 310 K objem 4,3 l. Adiabaticky ho stlačíme na objem 0,76 l. Určete koncový (a) tlak, (b) objem.

72C. (a) Jeden litr plynu, pro který platí $\gamma = 1{,}3$, adiabaticky stlačíme na poloviční objem. Jeho počáteční tlak byl 1,0 atm a počáteční teplota 273 K. Zjistěte jeho koncový tlak a koncovou teplotu. (b) Poté ho ochladíme na původní teplotu 273 K, přičemž tlak zůstává konstantní. Jaký je jeho koncový objem?

73C. Nechť n molů ideálního plynu expanduje adiabaticky z počáteční teploty T_1 na koncovou teplotu T_2. Dokažte, že práce vykonaná plynem je dána výrazem $nC_V(T_1 - T_2)$, kde C_V je molární tepelná kapacita za stálého objemu. (*Tip*: Použijte první termodynamický zákon.)

74C. Víme, že pro adiabatický proces platí $pV^\gamma = \text{konst}$. Vypočtěte tuto konstantu, když 2,0 mol plynu během tohoto procesu prochází stavem o teplotě $T = 300$ K a tlaku $p = 1{,}0$ atm. Uvažujte dvouatomové molekuly, které rotují, ale nekmitají.

75C. Ukažte, že při adiabatickém ději v ideálním plynu je modul objemové pružnosti dán vztahem

$$B = -V\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = \gamma p,$$

z čehož dostaneme pro rychlost zvuku v plynu

$$v_\mathrm{z} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{m_\mathrm{m}}}.$$

Viz rov. (18.2) a (18.3).

76C. Vzduch má při teplotě 0,00 °C a tlaku 1,00 atm hustotu $1{,}29\cdot10^{-3}\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. Rychlost zvuku ve vzduchu je při této teplotě $331\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Vypočtěte Poissonovu konstantu γ vzduchu. (*Tip*: Viz cvič. 75.)

77C. Rychlost zvuku v různých plynech při dané teplotě závisí pouze na jejich molárních hmotnostech. Ukažte, že $v_1/v_2 = \sqrt{m_{\mathrm{m}\,2}/m_{\mathrm{m}\,1}}$ (při konstantní teplotě), kde v_1, resp. v_2 je rychlost zvuku v plynu, jehož molární hmotnost je $m_{\mathrm{m}\,1}$, resp. $m_{\mathrm{m}\,2}$. (*Tip*: Viz cvič. 75.)

78Ú. Molární hmotnost jodu je 127 g·mol^{-1}. Uzly stojatého vlnění zvuku v trubici naplněné plynným jodem teploty 400 K jsou při frekvenci 1 400 Hz vzdáleny 6,77 cm. (a) Jaké je γ jodu? (b) Je plynný jod jednoatomový, nebo dvouatomový? (*Tip*: Viz cvič. 75.)

79Ú. Molární tepelná kapacita při stálém objemu C_V určitého plynu je $5{,}0R$. Určete poměr rychlosti zvuku v tomto plynu a střední kvadratické rychlosti jeho molekul při teplotě T. (*Tip*: Viz cvič. 75.)

80Ú. (a) Z počátečního stavu o tlaku p_0 se ideální plyn volně rozepne do vakua, čímž zvětší svůj objem na trojnásobek. Jaký je jeho tlak po expanzi? (b) Poté plyn opět pomalu adiabaticky stlačíme na jeho původní objem. Po kompresi je jeho tlak roven $(3{,}00)^{1/3}\,p_0$. Rozhodněte, zda se jedná o plyn jednoatomový, dvouatomový, nebo víceatomový. (c) Porovnejte střední kinetické energie molekul v jeho koncovém a počátečním stavu.

81Ú. Určitý ideální plyn adiabaticky stlačíme z $p = 1{,}0$ atm, $V = 1{,}0{\cdot}10^6$ l, $T = 0{,}0\,^\circ$C na $p = 1{,}0{\cdot}10^5$ atm, $V = 1{,}0{\cdot}10^3$ l. (a) Jde o jednoatomový, dvouatomový, nebo víceatomový plyn? (b) Jaká je jeho koncová teplota? (c) Kolik molů plynu stlačujeme? (d) Jaká je celková kinetická energie posuvného pohybu molekul připadající na jeden mol plynu před a po kompresi? (e) Jaký je poměr čtverců středních kvadratických rychlostí molekul před a po kompresi?

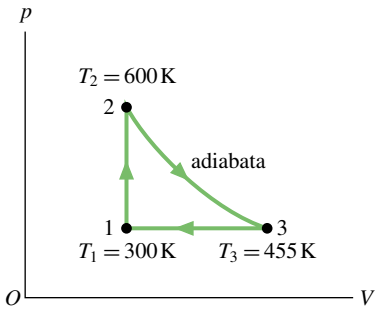
82Ú. Vzorek ideálního plynu expanduje ze stavu o tlaku 32 atm, teplotě 300 K a objemu 1,0 l na koncový objem 4,0 l. Jaké jsou koncový tlak a teplota plynu a jakou práci vykoná plyn, je-li expanze (a) izotermická, (b) adiabatická a plyn je jednoatomový a (c) adiabatická a plyn je dvouatomový?

83Ú. Ideální plyn má počáteční teplotu T_1 a objem 2 m^3. Nejprve ho rozepneme adiabaticky na objem 4 m^3, poté rozepneme izotermicky na objem 10 m^3 a nakonec adiabaticky stlačíme, až dosáhne jeho teplota původní hodnoty T_1. Jaký má plyn nakonec objem?

84Ú. Molární tepelná kapacita C_V jistého ideálního plynu je 6,00 cal·mol^{-1}·K^{-1}. Tři moly tohoto plynu jsme zahřáli o 50 K třemi různými ději: izochorickým, izobarickým a adiabatickým. Doplňte do tabulky u každého děje dodané (či odebrané) teplo Q, práci W vykonanou plynem, změnu ΔU jeho vnitřní energie a změnu ΔE_k celkové kinetické energie posuvného pohybu molekul plynu.

DĚJ	Q	W	ΔU	ΔE_k
Izochorický	____	____	____	____
Izobarický	____	____	____	____
Adiabatický	____	____	____	____

85Ú. Na obr. 20.27 vidíme p-V diagram kruhového děje s jedním molem jednoatomového ideálního plynu. Děj $1 \to 2$ je izochorický, $2 \to 3$ adiabatický a $3 \to 1$ izobarický. (a) Vypočtěte vyměněné teplo Q, změnu vnitřní energie ΔU a vykonanou práci W během těchto tří dějů a také během kruhového děje celkově. (b) Určete tlak a objem v bodech 2 a 3, je-li v počátečním bodě 1 tlak 1,00 atm. Teploty jsou vyznačeny na obrázku. Použijte převodního vztahu 1,00 atm $= 1{,}013{\cdot}10^5$ Pa a plynové konstanty $R = 8{,}314$ J·mol^{-1}·K^{-1}.



Obr. 20.27 Úloha 85

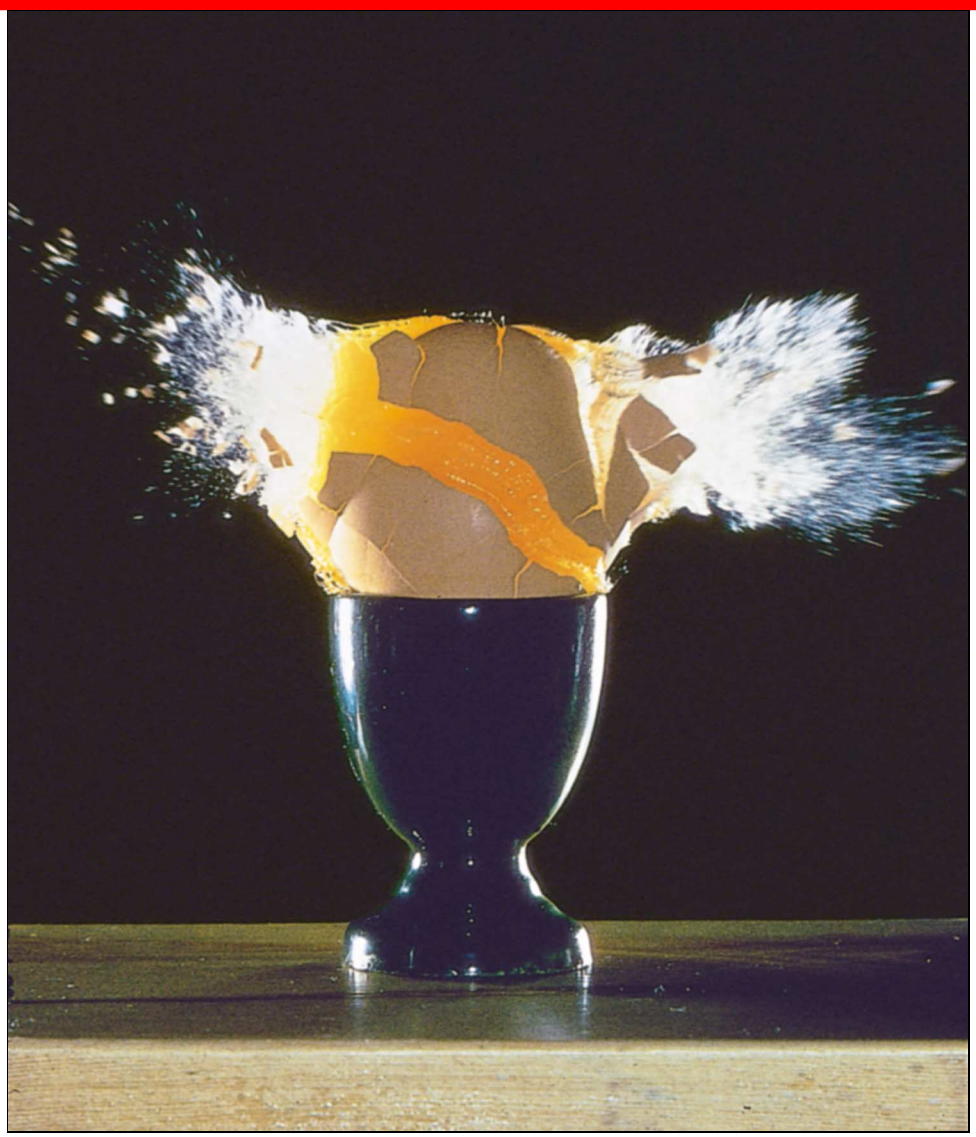
PRO POČÍTAČ

86Ú. V určitém průmyslovém procesu dochází ke stlačování 25,0 mol jednoatomového ideálního plynu stálou rychlostí z počátečního objemu 0,616 m^3 na koncový objem 0,308 m^3 za 2,00 h. Teplota plynu přitom rovnoměrně roste z 27,0 °C na 450 °C. Během tohoto procesu prochází plyn termodynamicky rovnovážnými stavy. (a) Nakreslete graf závislosti práce, kterou je potřeba vykonat ke stlačení plynu, a tepla, které plyn přijme od okolí, na čase. (b) Jaké jsou úhrnné hodnoty těchto veličin pro celý proces? (c) Jaká je molární tepelná kapacita plynu při tomto procesu? (*Tip*: Abyste vypočetli integrál vyjadřující práci, použijte vztah

$$\int \frac{a+bx}{A+Bx}\,\mathrm{d}x = \frac{bx}{B} + \frac{aB-bA}{B^2}\ln(A+Bx).)$$

(d) Porovnejte tyto hodnoty s těmi, které byste obdrželi, kdyby se nejprve zmenšoval objem za konstantní teploty a poté by se zvyšovala teplota za konstantního objemu, přičemž koncový stav by byl stejný.

21
Entropie



Anonymní nápis na zdi v jedné kavárničce na Pecan Street v Austinu v Texasu nám sděluje: „Čas je způsob, jak Bůh zajistil, aby se všechno nestalo najednou“. Čas má také směr: některé děje se odehrávají v jisté posloupnosti a nikdy obráceně. Tak třeba vajíčko, které vám vyklouzlo z výšky do kelímku. Nestane se, aby se rozbité a rozlité vajíčko zpátky sebralo do původního tvaru a skočilo vám do ruky. Ale proč vlastně ne? Proč nemůže tento děj probíhat pozpátku tak, jako bychom si ho promítali obráceně na videu? Co vlastně určuje ve světě směr toku času?

21.1 VRATNÉ A NEVRATNÉ DĚJE

Představte si, že jste se vrátili za velmi chladného dne a tisknete svýma zkřehlýma rukama horký hrnek kakaa. Ruce se vám ohřívají, hrnek chladne. Nikdy se nestane obráceně, že by vaše ruce přitom ještě více promrzly a hrnek se ohřál.

Uveďme si další nevratné děje: (1) Krabice klouzající po stole se za chvilku zastaví. Ale nikdy neuvidíte, že by se původně klidná krabice sama od sebe dala do pohybu. (2) Upustíte-li hroudu kytu, spadne na zem. Ale klidná hrouda na zemi nikdy sama nevyskočí do vzduchu. (3) Propíchnete-li heliem naplněný balonek v místnosti, uteče z něj plyn a rozptýlí se po místnosti. Ale jednotlivé atomy helia se už nikdy samy neshluknou a nevrátí zpátky do balonku. Říkáme, že takovéto děje jsou **nevratné**.

V termodynamice mají základní důležitost děje **vratné**. Příkladem vratného děje je pomalé rozpínání plynu, který vyměňuje teplo s lázní při nepatrném rozdílu teplot. Vratnost tohoto děje nevyplývá z toho, že plyn lze vrátit z koncového do počátečního stavu stlačením. Je vratný proto, že při pomalém stlačení (a) plyn vrátí lázni teplo, které jí při rozpínání odebral, (b) plyn přijme práci stejně velkou, jako je ta, kterou vykonal při rozpínání. Děj je vratný, je-li možno z koncového do počátečního stavu převést uvažovanou soustavu tak, že se do lázní vrátí tepla, která z nich byla odebrána a soustavě se vrátí práce, kterou vykonala. Případná pomocná zařízení se též musí vrátit do počátečního stavu. Dalším příkladem vratného děje je vytažení břemene motorem napájeným z akumulátoru. Nabije-li se akumulátor při spuštění břemene tak, že má počáteční energii, je uvažované vytažení břemene děj vratný. Spotřebuje-li se část energie třením nebo nárazem, je vytažení závaží děj nevratný.

Nevratnost většiny termodynamických dějů je natolik běžná, že ji pokládáme za samozřejmou. Kdyby snad takové děje proběhly *samovolně* v „nesprávném“ směru, byli bychom tím naprosto šokováni. *Ale žádný z těchto „nesprávně probíhajících“ dějů by nenarušoval zákon zachování energie.* Na příkladu s hrnkem kakaa by byl tento zákon splněn i při opačném toku tepla — z rukou do hrnku. Byl by splněn, i kdyby klidná krabice na stole nebo klidná hrouda kytu náhle převedly část své tepelné energie na kinetickou energii a daly se do pohybu. A byl by splněn, i kdyby atomy helia, které utekly z balonku, se samy od sebe vrátily zpátky — a nestálo by je to žádnou energii.

Změny energie v uzavřeném systému tedy neukazují směr nevratných dějů. Tento směr je dán jinou vlastností, kterou budeme v této kapitole probírat — **změnou entropie** ΔS systému. Změnu entropie systému budeme definovat až v dalším článku, ale už nyní formulujme její hlavní vlastnost, často zvanou **postulát entropie**:

> Probíhá-li v uzavřeném systému nevratný děj, entropie S systému vždy roste a nikdy neklesá.

Entropie se od energie liší tím, že pro ni *neplatí* zákon zachování. *Energie* uzavřeného systému se zachovává; zůstává stále konstantní. Při nevratných dějích však *entropie* uzavřeného systému stále roste. Pro tuto vlastnost se změna entropie někdy nazývá „šipkou času“. Tak třeba vejce na úvodní fotografii, které právě nevratně puká při dopadu do kelímku, můžeme spojit s chodem času kupředu a s nárůstem entropie. Opačný směr času (kdyby páska videa běžela pozpátku), by odpovídal rozbitému vajíčku, které se promění na celé, nerozbité a vznese se do vzduchu. Takový obrácený děj, při němž by klesala entropie, nikdy samovolně nenastane.

Jsou dvě ekvivalentní cesty, jak definovat změny entropie v systému: (1) makroskopicky: použitím pojmu teploty systému a tepla, které systém získá nebo ztratí; (2) mikroskopicky: počítáním možností, jak mohou být uspořádány atomy nebo molekuly tvořící systém. První přístup využijeme v dalším článku, druhý v článku 21.8.

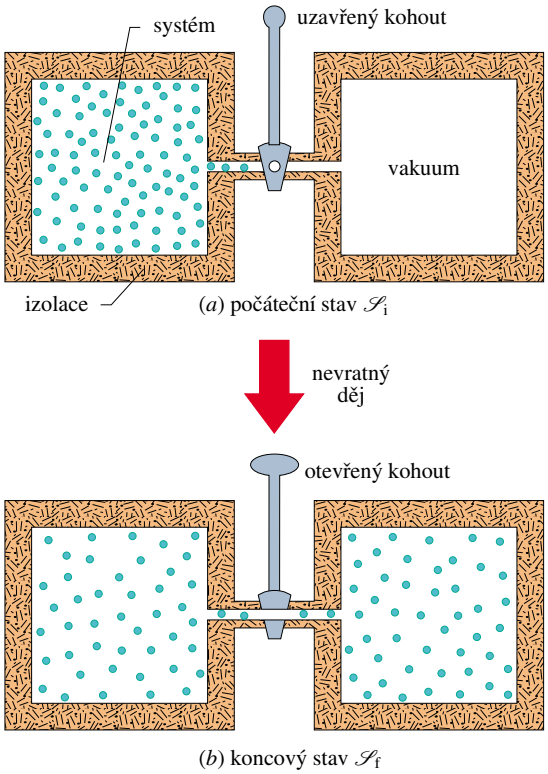
21.2 ENTROPIE

Přistoupíme k definici *změny entropie* tím, že znovu rozebereme děj z čl. 19.10 a 20.11: volnou expanzi plynu. Obr. 21.1a ukazuje plyn v jeho počátečním rovnovážném stavu $\mathscr{S}_\mathrm{i}$, udržovaný v levé polovině tepelně izolované nádrže zavřeným kohoutkem. Otevřeme-li kohoutek, plyn vytryskne ven a plní celou nádobu, až konečně dospěje do koncového stavu $\mathscr{S}_\mathrm{f}$ z obr. 21.1b. Tento děj je nevratný; už nikdy se samovolně nevrátí všechny molekuly plynu do levé části nádrže.

p-V diagram děje podle obr. 21.2 ukazuje tlak a objem plynu v jeho počátečním stavu $\mathscr{S}_\mathrm{i}$ a koncovém stavu $\mathscr{S}_\mathrm{f}$. Tlak a objem jsou *stavové veličiny* (neboli stavové proměnné), veličiny, které závisejí jen na okamžitém stavu plynu a nikoli na tom, jak tohoto stavu plyn dosáhl. Další stavové proměnné jsou teplota a energie. Plyn má však ještě další stavovou veličinu — **entropii**. Zavedeme **přírůstek entropie** $S_\mathrm{f} - S_\mathrm{i}$ systému během děje, který vede z počátečního stavu ke koncovému, jako

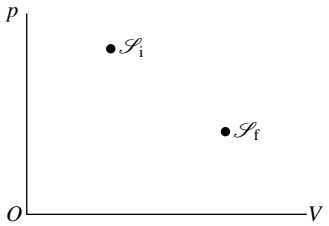
$$\Delta S = S_\mathrm{f} - S_\mathrm{i} = \int_{\mathscr{S}_\mathrm{i}}^{\mathscr{S}_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}Q}{T} \qquad \text{(definice změny entropie).} \tag{21.1}$$

Zde Q je energie přenesená jakožto teplo do systému nebo z něj během děje, a T je teplota systému v kelvinech. Změna entropie tedy závisí nejenom na množství přeneseného tepla, ale i na teplotě, při které přenos probíhá. Protože T je



Obr. 21.1 Volná expanze ideálního plynu. (a) Plyn se nachází pouze v levé části izolované nádrže, obě části nádrže jsou odděleny kohoutem. (b) Otevřeme-li kohout, plyn rychle zaplní celou nádrž. Tento děj je nevratný; to znamená, že nikdy samovolně neproběhne obráceně, tedy tak, že by se plyn sám od sebe vrátil do levé části nádrže.

vždy kladné, je znaménko ΔS stejné jako znaménko Q. Z rov. (21.1) je zřejmé, že jednotkou entropie a změny entropie v systému SI je joule na kelvin.



Obr. 21.2 p-V diagram ukazuje počáteční $\mathscr{S}_i$ a koncový $\mathscr{S}_f$ stav volné expanze z obr. 21.1. Přechodné stavy nelze zakreslit, neboť nejsou rovnovážné.

Při použití rov. (21.1) na volnou expanzi podle obr. 21.1 se však vyskytne problém. Plyn se chaoticky řítí do dosud prázdné části nádrže a jeho tlak, teplota a objem se přitom nepředvídatelně mění. Během přechodu z výchozího rovnovážného stavu $\mathscr{S}_i$ do koncového rovnovážného stavu $\mathscr{S}_f$ nemají uvedené veličiny v přechodných stavech žádné dobře definované rovnovážné hodnoty. Proto nemůžeme zakreslit např. změnu tlaku v závislosti na objemu jako křivku do p-V diagramu (obr. 21.2), a což je ještě důležitější, nemůžeme najít vztah mezi Q a T, který by nám dovolil provést integraci, kterou vyžaduje rov. (21.1).

Pokud je však entropie skutečně stavová veličina, musí její změna mezi stavy $\mathscr{S}_i$ a $\mathscr{S}_f$ záviset *pouze na těchto stavech* a vůbec ne na cestě, kterou se systém dostal z jednoho stavu do druhého. Předpokládejme tedy, že nevratný děj volné expanze (obr. 21.1) nahradíme dějem *vratným*, který bude také spojovat stavy $\mathscr{S}_i$ a $\mathscr{S}_f$. U vratného děje již můžeme najít a zakreslit trajektorii změn tlaku v závislosti na teplotě v p-V diagramu. Můžeme též najít vztah mezi Q a T, jenž nám umožní použít rov. (21.1) a získat tak změnu entropie.

V části čl. 20.11 jsme viděli, že teplota ideálního plynu se během volné expanze nemění: $T_i = T_f = T$. Stavy $\mathscr{S}_i$ a $\mathscr{S}_f$ na obr. 21.2 tedy musí být na téže izotermě. Vhodným náhradním dějem je proto vratná izotermická expanze ze stavu $\mathscr{S}_i$ do stavu $\mathscr{S}_f$, která probíhá právě *podél* této izotermy. Protože T je během vratné izotermické expanze konstantní, integrál v rov. (21.1) se navíc výrazně zjednoduší.

Obr. 21.3 ukazuje, jak takovou vratnou izotermickou expanzi provést. Uzavřeme plyn do izolovaného válce umístěného na tepelné lázni, který je udržován na teplotě T. Začneme umístěním právě tolika olověných kuliček na pohyblivý píst, aby tlak a objem plynu odpovídaly počátečnímu stavu $\mathscr{S}_i$ z obr. 21.1a. Potom kuličky postupně odebíráme (kousek po kousku), dokud tlak a objem nedosáhnou hodnot koncového stavu $\mathscr{S}_f$ (obr. 21.1b). Teplota plynu se nemění, neboť plyn je během celého děje v tepelném kontaktu s lázní.

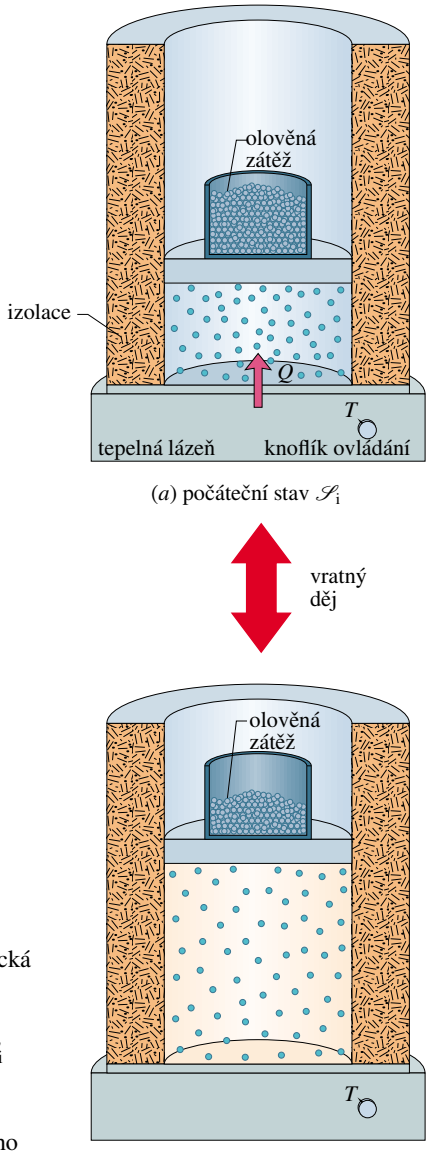
Vratná izotermická expanze z obr. 21.3 je fyzikálně zcela odlišná od nevratné volné expanze, znázorněné na obr. 21.1. Přesto *oba děje mají týž počáteční a týž koncový stav, a tedy musí mít stejnou změnu entropie*. Protože jsme olověné kuličky odebírali postupně, přechodné stavy plynu byly rovnovážné, takže je můžeme vynést do p-V diagramu (obr. 21.4).

Rov. (21.1) upravíme a použijeme na izotermickou expanzi: konstantní teplotu T vytkneme před integrál a dostaneme

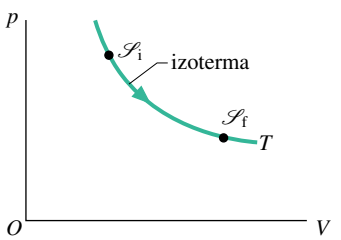
$$\Delta S = S_f - S_i = \frac{1}{T}\int_{\mathscr{S}_i}^{\mathscr{S}_f} \mathrm{d}Q.$$

Protože platí $\int \mathrm{d}Q = Q$, kde Q je celková energie přenesená během děje ve formě tepla, získáme nyní rovnici

$$\Delta S = S_f - S_i = \frac{Q}{T} \qquad \begin{matrix}\text{(změna entropie,}\\ \text{izotermický děj).}\end{matrix} \qquad (21.2)$$



Obr. 21.3 Izotermická expanze ideálního plynu provedená vratně. Výchozí $\mathscr{S}_i$ a koncový $\mathscr{S}_f$ stav plynu je týž jako v případě nevratného děje z obr. 21.1 a 21.2.



Obr. 21.4 *p-V* diagram vratné izotermické expanze znázorněné na obr. 21.3. Jsou zde zakresleny přechodné stavy, které jsou nyní zvoleny jako rovnovážné.

Aby teplota T plynu byla během izotermické expanze (obr. 21.3) konstantní, muselo být teplo Q přenášeno z lázně *do* plynu. Teplo Q je tedy kladné a entropie plynu během izotermického děje i během volné expanze (obr. 21.1) *roste*. Shrňme:

Změnu entropie ΔS_n soustavy během nevratného děje mezi dvěma rovnovážnými stavy určíme takto: Uvažujeme mezi těmito stavy libovolný vratný děj a změnu entropie ΔS_v vypočítáme pro něj z rov. (21.1). Pak platí $\Delta S_n = \Delta S_v$.

Pokud je změna teploty ΔT systému malá v porovnání s teplotou (v kelvinech) před a po ději, lze změnu entropie aproximovat jako

$$\Delta S = S_f - S_i \approx Q/\overline{T}, \qquad (21.3)$$

kde $\overline{T}$ je průměrná teplota systému během děje.

KONTROLA 1: Na kamnech ohříváme vodu. Její teplota vzroste (a) z 20 °C na 30 °C, (b) z 30 °C na 35 °C, (c) z 80 °C na 85 °C. Seřaďte tyto děje sestupně podle změny entropie vody.

PŘÍKLAD 21.1

Jeden mol dusíku v plynném skupenství je uzavřen v levé části nádrže z obr. 21.1. Otevřeme kohout a objem plynu se zdvojnásobí. Jaká je změna entropie plynu při tomto nevratném ději? Uvažujme ideální plyn.

ŘEŠENÍ: Při řešení využijeme dvou skutečností: (1) Změna entropie závisí výhradně na počátečním a koncovém stavu a nikoli na způsobu přechodu mezi nimi. Nevratný a těžko popsatelný děj tedy můžeme nahradit vhodným jednoduchým vratným dějem. (2) Při volné expanzi ideálního plynu se nemění jeho teplota, jak víme z čl. 20.11. Stejně jako v předchozím případě tedy nahradíme nevratný děj z obr. 21.1 izotermickou expanzí z obr. 21.3 a 21.4 a vypočítáme změnu entropie při tomto ději.

Podle tab. 20.5 je teplo Q, dodané ideálnímu plynu při izotermické expanzi za teploty T z počátečního objemu V_i na koncový objem V_f, rovno

$$Q = nRT \ln \frac{V_f}{V_i},$$

kde n je počet molů daného plynu. Z rov. (21.2) je změna entropie při tomto vratném ději rovna

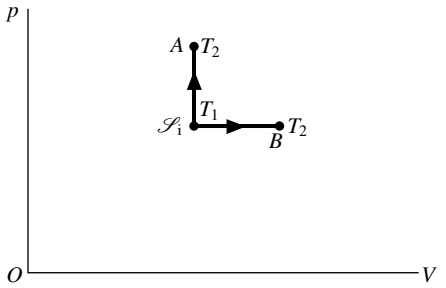
$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{nRT \ln(V_f/V_i)}{T} = nR \ln \frac{V_f}{V_i}.$$

Dosadíme-li $n = 1{,}00$ mol a $V_f/V_i = 2$, dostáváme

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i} = (1{,}00\,\text{mol})(8{,}31\,\text{J·mol}^{-1}\text{·K}^{-1})(\ln 2) =$$
$$= +5{,}76\,\text{J·K}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

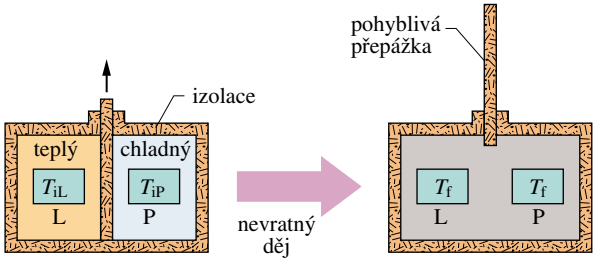
Toto je také změna entropie při volné expanzi — a při všech ostatních procesech, spojujících počáteční a koncový stav z obr. 21.2. Zde je ΔS je kladné, entropie tedy roste v souhlase s postulátem o entropii z čl. 21.1.

KONTROLA 2: Ideální plyn podle přiloženého obrázku má ve výchozím stavu $\mathscr{S}_\mathrm{i}$ teplotu T_1. Ve výsledných stavech A i B má teplotu T_2 vyšší. Dosáhne je podél naznačených cest. Je změna entropie podél cesty do bodu A větší, menší, nebo stejná, nežli změna podél cesty do bodu B?



PŘÍKLAD 21.2

Obr. 21.5a znázorňuje dva stejné měděné bloky o hmotnosti $m = 1{,}5\,\mathrm{kg}$: levý blok L má teplotu $T_\mathrm{iL} = 60\,^\circ\mathrm{C}$ a pravý blok P teplotu $T_\mathrm{iP} = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Bloky jsou v tepelně izolované schránce a jsou odděleny izolující přepážkou. Zvedneme-li přepážku, bloky časem dosáhnou rovnovážné teploty $T_\mathrm{f} = 40\,^\circ\mathrm{C}$ (obr. 21.5b). Jaká je celková změna entropie tohoto systému dvou bloků během popsaného nevratného děje? Měrná tepelná kapacita mědi je $386\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$.



Obr. 21.5 Příklad 21.2. (a) V počátečním stavu jsou dva měděné bloky L a P (identické až na teplotu) v izolované schránce a jsou odděleny izolující přepážkou. (b) Po odstranění přepážky si bloky začnou vyměňovat teplo a posléze dosáhnou koncového stavu, oba se stejnou teplotou T_f. Tento děj je nerovnovážný, soustavě L + P nelze přisoudit v mezistavech teplotu (která by byla shodná pro všechny její části).

ŘEŠENÍ: Naši soustavu tvoří dva stejné bloky. Uvažujeme vyrovnání teplot bloků přenosem tepla, tedy děj nevratný. K výpočtu změny entropie při nevratném ději obecně musíme najít *vratný* děj, převádějící uvažovanou soustavu z počátečního stavu do koncového. V našem případě k tomu použijeme dva válce s písty. V obou válcích je ideální plyn, v prvním má teplotu 60 °C, ve druhém 20 °C. Válce přiložíme k blokům o odpovídajících teplotách. Píst v prvním válci začneme pomalu vysouvat, čímž pozvolna ochlazujeme plyn a ten zas ochlazuje blok, a to při nepatrném rozdílu teplot. Vždy při poklesu teploty bloku o $\mathrm{d}T$ předá blok plynu teplo $\mathrm{d}Q = mc\,\mathrm{d}T$ a entropii $\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T = mc\,\mathrm{d}T/T$. Píst ve druhém válci začneme pomalu zasouvat a obdobně usoudíme, že studenější blok se tím ohřívá; vztahy pro $\mathrm{d}Q$ ani $\mathrm{d}S$ se nezmění. Podle rov. (21.1) je pak změna entropie teplejšího bloku L, odpovídající přechodu z počátečního stavu do koncového rovna

$$\Delta S_\mathrm{L} = \int_{\mathscr{S}_\mathrm{i}}^{\mathscr{S}_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_\mathrm{iL}}^{T_\mathrm{f}} \frac{mc\,\mathrm{d}T}{T} = mc \int_{T_\mathrm{iL}}^{T_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}T}{T} = mc \ln \frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{iL}}.$$

Po dosazení zadaných hodnot dostaneme

$$\Delta S_\mathrm{L} = (1{,}5\,\mathrm{kg})(386\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}) \ln \frac{(313\,\mathrm{K})}{(333\,\mathrm{K})} = -35{,}86\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}.$$

Obdobně pro studenější blok P máme

$$\Delta S_\mathrm{P} = (1{,}5\,\mathrm{kg})(386\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}) \ln \frac{(313\,\mathrm{K})}{(293\,\mathrm{K})} = +38{,}23\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}.$$

Celková změna entropie naší soustavy dvou bloků tedy je

$$\Delta S = \Delta S_\mathrm{L} + \Delta S_\mathrm{P} = -35{,}86\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}} + 38{,}23\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}} \doteq 2{,}4\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}.$$

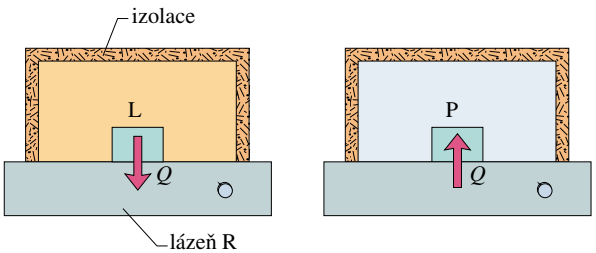
Změna entropie, tak jako změna teploty nebo tlaku, závisí jen na příslušném výchozím a konečném stavu soustavy. Tyto stavy jsou pro uvažovaný vratný i nevratný děj stejné, a proto platí

$$\Delta S_\mathrm{nevr} = \Delta S = 2{,}4\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že vratnost uvažovaného děje nevyplývá z toho, že při obrácení chodu pístů přejde naše soustava z koncového stavu do počátečního. Podstatné pro vratnost je, že (a) při zpětném chodu pístů plyn v prvním válci vrátí bloku L všechno teplo, které mu předtím odebral (a obdobně pro blok P), a (b) práce pístů při zpětném chodu kompenzuje jejich práci při chodu přímém (tj. součet prací je nulový).

Z řešení příkladu je dále patrné, že k výsledku jsme mohli dojít bez uvažování vratného děje, protože ústřední vztah

$\mathrm{d}S = mc\,\mathrm{d}T/T$ může platit i pro děj nevratný, předpokládáme-li, že teplota uvnitř bloku L i P se vyrovnává v každém okamžiku děje. Takový přístup je naznačen na obr. 21.6 a vede ke správnému výsledku. Je však třeba zdůraznit, že tento přístup nemusí být obecně správný, protože vztah $\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T$ platí obecně jen pro vratné děje. Pro nevratné děje platí $\mathrm{d}S > \mathrm{d}Q/T$.



(*a*) krok 1 (*b*) krok 2

Obr. 21.6 Bloky z obr. 21.5 mohou z počátečního do koncového stavu přejít procesem, v němž známe v každém mezistavu teplotu T zkoumané soustavy. Použijeme lázeň R, u které lze řídit teplotu, abychom zvolna (a) odebrali teplo z bloku L a (b) dodali teplo bloku P.

Entropie jako stavová funkce

Předpokládali jsme, že stejně jako tlak, energie a teplota je i entropie vlastnost stavu systému a že je nezávislá na tom, jak jsme tento stav dosáhli. To, že entropie je skutečně *stavová funkce* (což je jen jiný název pro stavovou veličinu), můžeme vyvodit jen z experimentu. Můžeme ale dokázat, že entropie je stavovou funkcí ve speciálním a důležitém případě, kdy ideální plyn prochází vratným dějem.

Abychom dosáhli vratného procesu, provádíme pomalu posloupnost malých kroků tak, že plyn je na konci každého kroku v rovnovážném stavu. Pro každý malý krok je teplo předané plynu $\mathrm{d}Q$, práce vykonaná plynem $\mathrm{d}W$ a změna vnitřní energie $\mathrm{d}U$. Tyto veličiny jsou spojeny prvním zákonem termodynamiky, který v diferenciálním tvaru zní:

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q - \mathrm{d}W.$$

Protože prováděné kroky jsou vratné (plyn je v rovnovážných stavech), můžeme za $\mathrm{d}W$ dosadit $p\,\mathrm{d}V$ podle rov. (19.22) a za $\mathrm{d}U$ dosadit $nC_V\,\mathrm{d}T$ podle rov. (20.35). Pak lze vyjádřit $\mathrm{d}Q$ takto:

$$\mathrm{d}Q = p\,\mathrm{d}V + nC_V\,\mathrm{d}T.$$

Použijeme rovnici pro ideální plyn a nahradíme podle ní p výrazem nRT/V. Pak obě strany rovnice vydělíme T a dostáváme:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{T} = nR\frac{\mathrm{d}V}{V} + nC_V\frac{\mathrm{d}T}{T}.$$

Nyní integrujme každý člen této rovnice v intervalu mezi jakýmkoli počátečním stavem $\mathscr{S}_\mathrm{i}$ a jakýmkoli koncovým stavem $\mathscr{S}_\mathrm{f}$:

$$\int_{\mathscr{S}_\mathrm{i}}^{\mathscr{S}_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{\mathscr{S}_\mathrm{i}}^{\mathscr{S}_\mathrm{f}} nR\frac{\mathrm{d}V}{V} + \int_{\mathscr{S}_\mathrm{i}}^{\mathscr{S}_\mathrm{f}} nC_V\frac{\mathrm{d}T}{T}.$$

Výraz na levé straně je změna entropie $\Delta S = S_\mathrm{f} - S_\mathrm{i}$, definovaná rov. (21.1). Dosazením tohoto vztahu a integrací členů na pravé straně získáme rovnici

$$\Delta S = S_\mathrm{f} - S_\mathrm{i} = nR\ln\frac{V_\mathrm{f}}{V_\mathrm{i}} + nC_V\ln\frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{i}}. \qquad (21.4)$$

Všimněme si, že jsme při integraci nemuseli určit konkrétní vratný děj. Proto integrace musí být platná pro všechny vratné děje, které převádějí plyn ze stavu $\mathscr{S}_\mathrm{i}$ do stavu $\mathscr{S}_\mathrm{f}$. Změna entropie ΔS mezi počátečním a koncovým stavem ideálního plynu závisí pouze na vlastnostech počátečního stavu (V_i; T_i) a koncového stavu (V_f; T_f). Změna ΔS nezávisí na tom, jak plyn přejde z jednoho stavu do druhého.

21.3 DRUHÝ ZÁKON TERMODYNAMIKY

Stojíme před záhadou. V př. 21.1 jsme viděli, že když necháme proběhnout vratný děj podle obr. 21.3 z *a* do *b*, je změna entropie plynu (který je nyní naším systémem) kladná. Protože je ale děj vratný, můžeme ho nechat proběhnout z *b* do *a* prostě tak, že budeme pomalu přidávat olověnou zátěž na píst z obr. 21.3b, dokud nedosáhneme původního objemu plynu. V tomto zpětném ději musí být teplo *plynu odebíráno*, aby jeho teplota zůstala konstantní. Zde je Q záporné a entropie plynu tedy musí podle rov. (21.2) klesat.

Neporušuje tento pokles entropie plynu postulát o entropii z čl. 21.1, který říká, že entropie se vždy zvyšuje? Neporušuje — protože tento postulát platí pouze pro *nevratné* děje v *uzavřených* systémech. Postup, který jsme navrhli výše, tyto podmínky nesplňuje: jednak jde o vratný děj, ale především náš systém, tvořený samotným plynem, *není* uzavřený (protože energie je přenášena ve formě tepla z plynu do lázně).

Pokud ovšem do systému zahrneme kromě plynu i lázeň, získáme uzavřený systém. Prozkoumejme nyní změnu entropie zvětšeného systému *plyn + lázeň* při ději z obr. 21.3, probíhajícím z *b* do *a*. Během vratného děje se energie ve formě tepla přenáší z plynu do lázně, tj. z jedné části našeho rozšířeného systému do druhé. Označme $|Q|$ velikost tohoto tepla. Použitím rov. (21.2) pak můžeme vypočítat odděleně změny entropie plynu (který ztrácí $|Q|$) a lázně (která získává $|Q|$). Dostáváme

$$\Delta S_\mathrm{plyn} = -\frac{|Q|}{T} \qquad \text{a} \qquad \Delta S_\mathrm{láz} = +\frac{|Q|}{T}.$$

Změna entropie uzavřeného systému je součet těchto dvou hodnot, což dává nulu.

Nyní tedy můžeme pozměnit postulát o entropii z čl. 21.1 tak, abychom zahrnuli vratné i nevratné děje:

Entropie uzavřeného systému roste při ději nevratném a zůstává stálá při ději vratném. Entropie uzavřeného systému nikdy neklesá.

V části uzavřeného systému entropie může klesat, ale vždy lze najít stejně velký či větší přírůstek entropie v jiné části téhož systému, takže entropie jako celek nikdy neklesá. Tato skutečnost je jednou z forem **druhého termodynamického zákona** a lze ji napsat takto:

$$\Delta S \geqq 0 \quad \text{(druhý termodynamický zákon, pro uzavřený systém)}, \tag{21.5}$$

kde znaménko $>$ platí pro nevratné děje a rovnítko pro děje vratné. Tento vztah platí pouze pro uzavřené systémy.

Ve skutečném světě je většina dějů do jisté míry nevratná kvůli tření, víření a podobným činitelům. Entropie reálných uzavřených systémů při reálných dějích tedy vždy vzrůstá. Děje, při nichž se entropie nemění, jsou vždy pouze idealizací dějů skutečných.

21.4 ENTROPIE KOLEM NÁS: MOTORY

Tepelný stroj

Tepelný stroj je takový stroj, který se svým okolím vyměňuje teplo a práci. (Připomeňme z čl. 19.6, že jde o výměnu *energie*; označením „teplo“ a „práce“ rozlišujeme způsob, děj, jakým se přenos odehrál.) Může to být tepelný motor, který s okolím vyměňuje teplo a dodává práci; zabýváme se jím v tomto článku. Může to být také chladnička anebo tepelné čerpadlo (tepelná pumpa). Těm dodáváme práci, aby odebíraly teplo chladnější lázni a dodávaly ho lázni teplejší; těmi se budeme zabývat v čl. 21.5. A může to být i kombinace uvedených strojů — např. plynová chladnička, kde dodáváme teplo k tomu, abychom přečerpali teplo z chladnější lázně do teplejší.

Tepelný motor

Tepelný motor nebo stručně jen **motor** je zařízení, které odebírá ze svého okolí teplo a koná užitečnou práci. Srdcem takového stroje — nebo ještě výstižněji jeho krví — je **pracovní látka**. V parním stroji je pracovní látkou voda, a to jak kapalná, tak i pára. V automobilovém motoru je pracovní látkou směs benzinových par a vzduchu, a to spálená i nespálená. Stroj má pracovat trvale, ne jednorázově. Předpokládáme proto, že probíhá **cyklus**, to znamená, že pracovní látka prochází jistou posloupností termodynamických stavů; děje mezi nimi nazýváme **takty**. Na konci každého cyklu se stroj vrátí do výchozího stavu. Podívejme se nyní, co nám může o činnosti motorů říci termodynamika.

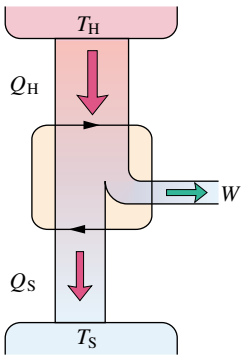
Carnotův motor

Viděli jsme již, že pro studium chování skutečných plynů je účelné zabývat se ideálním plynem, který vyhovuje jednoduchému zákonu $pV = nRT$. Je to rozumný přístup; ačkoliv ideální plyn neexistuje, každý reálný plyn se mu svým chováním blíží za předpokladu, že je dostatečně zředěný. V podobném duchu budeme studovat chování reálných motorů na základě rozboru **ideálního motoru**.

V ideálním motoru jsou všechny děje vratné. Nenastává žádný ztrátový přenos energie způsobený například třením nebo vířením pracovní látky.

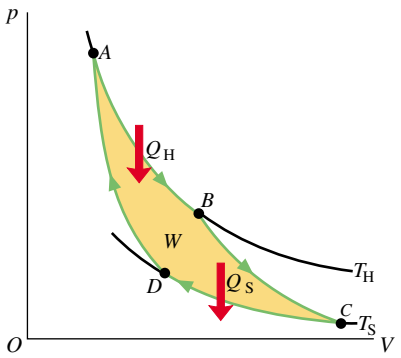
Soustředíme se na speciální ideální stroj zvaný **Carnotův**, podle francouzského vědce a inženýra Carnota (Sadi Nicolas Léonard Carnot), který formuloval tuto ideu v roce 1824. Později ukážeme, že tento stroj je v principu nejlepší v tom smyslu, že převádí teplo na práci s nejvyšší možnou účinností. Carnotova prozíravost překvapuje ještě více, když si uvědomíme, že svůj rozbor provedl dříve, než byl formulován první zákon termodynamiky, a mnohem dříve, než byl zaveden pojem entropie.

Obr. 21.7 ukazuje schematicky činnost Carnotova motoru. Během každého cyklu stroje pohltí pracovní látka teplo $|Q_H|$ z tepelné lázně za stálé teploty T_H a předá studenější tepelné lázni teplo $|Q_S|$ za stálé (nižší) teploty T_S. (H = „horká“, S = „studená“.)



Obr. 21.7 Schéma tepelného motoru. Smyčka se dvěma černými šipkami ve středu obrázku symbolizuje pracovní látku cyklického stroje a připomene nám p-V diagram. Teplo Q_H se přenáší z horké lázně o teplotě T_H do pracovní látky. Teplo Q_S se naopak přenáší z pracovní látky do studené lázně o teplotě T_S. Motor vykonává práci W na vhodném objektu v okolí systému.

Obr. 21.8 ukazuje p-V diagram pro Carnotův cyklus. Jak ukazují šipky, cyklus probíhá po směru otáčení hodinových ručiček. Představme si, že pracovní látkou je plyn, uzavřený ve válci s pístem podle obr. 21.3. Válec můžeme umístit do některé ze dvou teplotních lázní podle obr. 21.3, nebo ho tepelně izolovat. Obr. 21.8 ukazuje, že dáme-li válec do kontaktu s horkou lázní o teplotě T_H, přenáší se teplo $|Q_H|$ z lázně do pracovní látky a plyn se izotermicky rozpíná z objemu V_A do objemu V_B. Podobně, je-li pracovní látka v kontaktu se studenou lázní o teplotě T_S, přenáší se teplo $|Q_S|$ z pracovní látky do lázně a plyn se izotermicky stlačuje z objemu V_C do objemu V_D.



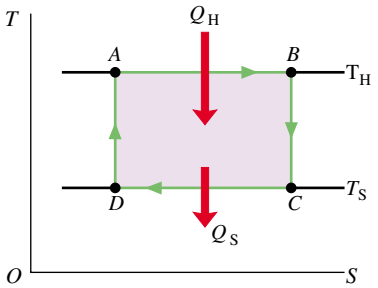
Obr. 21.8 p-V diagram Carnotova cyklu motoru z obr. 21.7. Cyklus sestává ze dvou izotermických dějů AB, CD a dvou adiabatických dějů BC, DA. Zvýrazněná plocha uzavřená smyčkou má velikost rovnou práci, kterou Carnotův motor vykoná během jednoho cyklu.

Teplo: Ve stroji na obr. 21.7 předpokládáme, že výměna tepla mezi pracovní látkou a lázněmi se koná výhradně během izotermických procesů AB a CD na obr. 21.8. Procesy zobrazené na obrázku čarami BC a DA, které spojují izotermy odpovídající teplotám T_H a T_S, musí být vratné adiabatické děje; nepřenáší se při nich žádná energie formou tepla. Abychom to zajistili, umístíme během těchto dějů válec do tepelné izolace. Píst se přitom pohybuje a plyn může vyměňovat práci s okolím.

Během dějů AB a BC na obr. 21.8 se pracovní látka rozpíná a koná tedy kladnou práci zdvíháním pístu. Tato práce je v obr. 21.8 zobrazena jako plocha pod křivkou ABC. Během dalších dvou dějů CD a DA se pracovní látka stlačuje, což znamená, že koná zápornou práci na svém okolí neboli že okolí koná kladnou práci na systému tím, že stlačuje píst. Tato práce je na obrázku zobrazena plochou pod křivkou CDA. Celková práce během cyklu, která je v obr. 21.7 i 21.8 označena W, je dána rozdílem mezi těmito dvěma plochami a je kladná; je rovna ploše uzavřené cyklem $ABCDA$ v obr. 21.8. Tato práce W se koná na nějakém vnějším objektu, například na proměnné zátěži, kterou zvedáme (a nahoře uložíme stranou).

Rov. (21.1), tj. $\Delta S = \int \mathrm{d}Q/T$ říká, že každý přenos tepla je spojen se změnou entropie. Abychom znázornili změnu entropie v Carnotově motoru, nakreslíme Carnotův cyklus v T-S diagramu (proměnné teplota a entropie), obr. 21.9. Stavy označené jako A, B, C a D v obr. 21.9 odpovídají týmž písmenům v obr. 21.8. Dvě vodorovné čáry v obr. 21.9 popisují izotermické děje v Carnotově cyklu (protože teploty jsou konstantní). Děj AB je izotermické rozpínání. Protože pracovní látka (vratně) přijímá během rozpínání teplo $|Q_H|$ za (stálé) teploty T_H, roste její entropie. Podobně během izotermického stlačení CD předává pracovní látka (vratně) teplo $|Q_S|$ za (stálé) teploty T_S a její entropie klesá.

Dvě svislé čáry v obr. 21.9 odpovídají dvěma adiabatickým dějům Carnotova cyklu. Protože se během těchto dvou dějů nepřenáší žádné teplo, nemění se během nich entropie pracovní látky.



T-S diagram

Obr. 21.9 Carnotův cyklus stroje podle obr. 21.8 vynesený do diagramu proměnných entropie S a teploty T (neboli T-S diagram). Během dějů AB a CD zůstává teplota stálá. Naopak během dějů BC a DA zůstává stálá entropie S.

Práce: Abychom vypočítali úhrnnou práci vykonanou Carnotovým motorem během cyklu, použijeme rov. (19.24), tj. prvního zákona termodynamiky ($\Delta U = Q - W$). Pracovní látka opakovaně prochází počátečním stavem cyklu. Jestliže proto označíme X libovolnou stavovou veličinu pracovní látky (např. tlak, teplotu, objem, vnitřní energii nebo entropii), musí platit $\Delta X = 0$ pro každý cyklus. Z toho plyne, že $\Delta U = 0$ pro úplný cyklus pracovní látky. Připomeneme-li si, že Q v rov. (19.24) je celkové teplo vyměněné během cyklu a W je celková vykonaná práce během cyklu, můžeme zapsat první zákon termodynamiky pro Carnotův cyklus ve tvaru

$$W = |Q_H| - |Q_S|. \qquad (21.6)$$

Změny entropie: V Carnotově motoru probíhají dva vratné přenosy tepla, a proto dochází ke dvěma změnám entropie pracovní látky — jedna za teploty T_H, druhá za teploty T_S. Úhrnná změna entropie pracovní látky během cyklu je tedy rovna

$$\Delta S = \Delta S_H + \Delta S_S = \frac{|Q_H|}{T_H} - \frac{|Q_S|}{T_S}, \qquad (21.7)$$

kde ΔS_H je kladné, protože energie $|Q_H|$ je dodána pracovní látce ve formě tepla (nárůst entropie); ΔS_S je naopak záporné, protože energie $|Q_S|$ je pracovní látce ve formě tepla odebrána (úbytek entropie). Protože entropie je stavová veličina, musí platit $\Delta S = 0$ pro úplný cyklus. Dosazením $\Delta S = 0$ do rov. (21.7) získáme

$$\frac{|Q_H|}{T_H} = \frac{|Q_S|}{T_S}. \qquad (21.8)$$

Protože platí $T_H > T_S$, musí platit $|Q_H| > |Q_S|$. Odebrali jsme tedy více tepla z teplejší lázně, nežli jsme dodali tepla studenější lázni. Z posledních dvou rovnic odvodíme výraz pro účinnost Carnotova motoru.

Tato rozvaha o entropii svádí k závěru, že $\Delta S = 0$ platí pro jakýkoliv cyklus, protože pracovní látka se při uzavření cyklu vrátí do počátečního stavu a tedy všechny stavové veličiny včetně entropie znovu nabudou počáteční hodnoty. Ve skutečnosti platí $dS > 0$, a to pro nevratné cykly, tedy pro všechny reálné motory. Probíhá-li totiž cyklus rychle, nelze vůbec rov. (21.7) napsat, protože pracovní látka nestihne vyrovnávat teplotu s lázněmi, v pracovní látce se žádná teplota neustaví. V takovém nerovnovážném cyklu dochází ke zvýšení entropie pracovní látky zvaném produkce entropie. Změnu entropie lázní však lze vypočítat obvyklým způsobem, takže pro celkovou změnu entropie uzavřené soustavy podle druhého termodynamického zákona dostáváme

$$-\frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_S}{T_S} + \Delta S > 0.$$

Tepelná účinnost

Tepelná účinnost (či jednoduše **účinnost**) motoru je mírou jeho schopnosti měnit teplo na práci. U motoru z obr. 21.7 je Q_H tou energií, za kterou platíme třeba ve formě nákladů na palivo do nádrže auta. Získáváme za to energii W, kterou můžeme používat. Je tedy rozumné definovat účinnost motoru jako

$$\eta = \frac{\text{energie získaná}}{\text{energie zaplacená}} = \frac{|W|}{|Q_H|} \qquad (21.9)$$

(účinnost jakéhokoli motoru).

(Používáme absolutní hodnoty, protože chceme získat poměr velikostí.) Pro Carnotův stroj stačí dosadit za práci W z rov. (21.6):

$$\eta_C = \frac{|Q_H| - |Q_S|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_S|}{|Q_H|} \qquad (21.10)$$

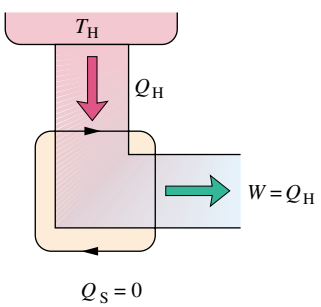
a dosazením z rov. (21.8)

$$\eta_C = 1 - \frac{T_S}{T_H} \quad \text{(účinnost Carnotova motoru)}, \qquad (21.11)$$

kde teploty T_S, T_H jsou v kelvinech. Podle této rovnice je tepelná účinnost Carnotova stroje nutně menší než jednička, tj. menší než 100 %. Vidíme to i na obr. 21.7, kde zřejmě jen část energie odebrané jako teplo z horní, teplejší lázně odejde jako práce W; zbytek přejde jako teplo do studenější lázně. V čl. 21.6 ukážeme, že *žádný* stroj pracující mezi dvěma lázněmi T_S a T_H nemůže mít tepelnou účinnost větší než Carnotův motor.

Objevitelé nedosti odborně fundovaní se neustále snaží zlepšit účinnost motorů snížením energie $|Q_S|$, která je „ztracena“, „vyhozena“ během každého cyklu. Nemají-li dobré teoretické zázemí, je jejich snem **„100% motor“**, znázorněný na obr. 21.10, kde $|Q_S|$ je potlačeno na nulu a $|Q_H|$ je beze zbytku přeměněno na práci $|W|$. Takový „100% motor“ na zámořském parníku by mohl odebírat teplo z mořské vody a používat této energie na pohon lodního šroubu bez jakéhokoliv paliva. Ale bohužel, takový „100% motor“ je jen snem; z rov. (21.11) je zřejmé, že $|Q_S|$ může být nulové jen tehdy, je-li buď $T_S = 0\,\text{K}$, nebo $T_H \to \infty$, což jsou nesplnitelné požadavky. Místo toho nás po desítky let sbírané zkušenosti praktického inženýrství přesvědčují o této alternativní formě **druhého zákona termodynamiky**:

> Není možné vytvořit takové cyklické děje, jejichž jediným výsledkem by bylo odebrání tepla z tepelné lázně a jeho úplná přeměna v práci.

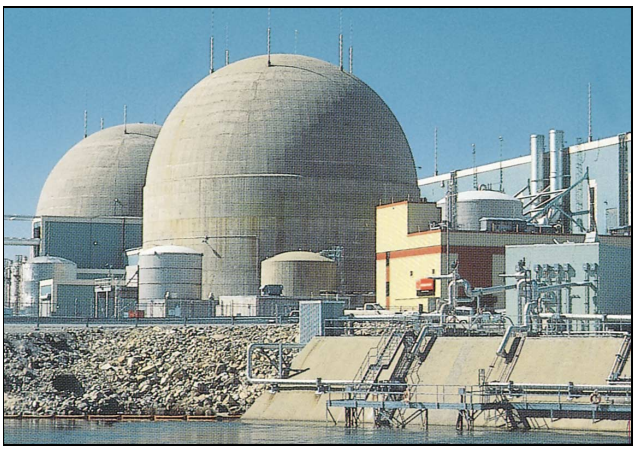


Obr. 21.10 Schéma „100% motoru“ (perpetua mobile 2. druhu), který by měnil teplo Q_H z horké lázně (fakticky z jediné lázně) beze zbytku v práci W se 100% účinností.

Stručně řečeno: *neexistuje „100% motor“*. Někdy se takový stroj nazývá **perpetuum mobile 2. druhu** na rozdíl od „obyčejného“ perpetua mobile, které se pro odlišení nazývá **1. druhu**. Každé z nich narušuje jeden fyzikální zákon, jak ukazuje následující tabulka:

perpetuum mobile:	narušuje:
1. druhu	zákon zachování energie
2. druhu	druhý zákon termodynamiky

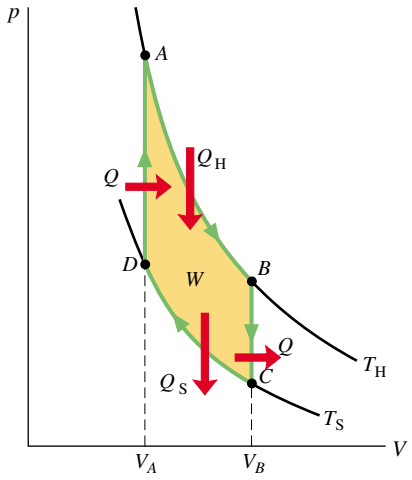
Účinnost jsme odvodili pro Carnotův motor. Libovolný *reálný* motor se svými nevratnými ději a ztrátami užitečné energie je ještě méně účinný. Kdyby motor vašeho auta byl ideálním tepelným motorem, měl by podle rov. (21.11) účinnost asi 55 %; jeho skutečná účinnost je asi tak 25 %. Jaderná elektrárna na obr. 21.11 je mnohem složitější zařízení. Odebírá teplo z aktivní zóny reaktoru, koná práci pomocí turbíny a odvádí nadbytečné teplo do blízké řeky. Kdyby byla elektrárna ideálním motorem, měla by účinnost kolem 40 %; její skutečná účinnost je však kolem 30 %. Ať postavíte jakýkoli motor, nepodaří se vám obejít omezení, které na účinnost klade rov. (21.11).



Obr. 21.11 Jaderná elektrárna North Anna poblíž Charlottesville ve Virginii s výkonem 900 MW. Elektrárna současně (podle plánu) rozptyluje v blízké říčce teplo s výkonem 2 100 MW. Tato elektrárna — stejně jako každá jiná podobná — rozptyluje více energie, než jí dodává v užitečné formě. Toto je reálná paralela k ideálnímu motoru z obr. 21.7.

Stirlingův motor

Rov. (21.11) neplatí pro všechny ideální stroje, ale jen pro takové, které můžeme popsat pomocí obr. 21.8, tj. pro stroje Carnotovy. Na obr. 21.12 je zobrazen operační cyklus jiného motoru — **Stirlingova**. Porovnáme-li ho s Carnotovým cyklem z obr. 21.8, vidíme, že oba stroje mají izotermické přenosy tepla při teplotách T_H a T_S. Ve Stirlingově motoru podle obr. 21.12 jsou však obě izotermy spojeny nikoli adiabatickým dějem jako v Carnotově stroji, ale izochorickým dějem, probíhajícím při konstantním objemu. Abychom zahřáli plyn při konstantním objemu z T_S na T_H (děj DA na obr. 21.12), musíme pracovní látce dodat teplo z další tepelné lázně R, jejíž teplota se bude spojitě měnit mezi těmito mezemi. Analogický děj obráceným směrem probíhá během procesu BC, a to z téže lázně R — v tom je hlavní vtip Stirlingova motoru. Přenos tepla (a odpovídající změna entropie) probíhá tedy ve Stirlingově motoru během všech čtyř taktů, nejenom během dvou taktů jako v Carnotově stroji. Účinnost Stirlingova motoru je stejná jako Carnotova motoru, je dána rov. (21.11). Obecně platí, že účinnost všech vratných motorů pracujících mezi dvěma danými teplotami T_H a T_S dosahuje maximální hodnoty η_C.



Obr. 21.12 p-V diagram Stirlingova stroje, pracujícího (pro jednoduchost) s ideálním plynem jako s pracovní látkou.

Stirlingův motor byl poprvé navržen v roce 1816 Robertem Stirlingem. Tento dlouho opomíjený motor se nyní vyvíjí pro použití v automobilech a v kosmických lodích. Byl již zkonstruován Stirlingův motor o výkonu 5 000 HP, tj. 3,7 MW.

KONTROLA 3: Tři Carnotovy motory pracují mezi lázněmi o teplotách (a) 400 K a 500 K; (b) 600 K a 800 K; (c) 400 K a 600 K. Uspořádejte je sestupně podle jejich účinnosti.

PŘÍKLAD 21.3

Carnotův motor pracuje mezi lázněmi teplot $T_H = 850$ K a $T_S = 300$ K. Koná práci 1 200 J během každého cyklu trvajícího 0,25 s.

(a) Jakou má účinnost?

ŘEŠENÍ: Účinnost η_C Carnotova motoru závisí jen na podílu teplot (v kelvinech) obou lázní mezi nimiž pracuje. Podle rov. (21.11) je tedy

$$\eta_C = 1 - \frac{T_S}{T_H} = 1 - \frac{(300\,\mathrm{K})}{(850\,\mathrm{K})} = \\ = 0{,}647 \doteq 65\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaký je střední výkon motoru?

ŘEŠENÍ: Střední výkon P je podíl práce W a doby cyklu t, během které je práce vykonána. Pro tento motor nalezneme

$$P = \frac{W}{t} = \frac{(1\,200\,\mathrm{J})}{(0{,}25\,\mathrm{s})} = 4\,800\,\mathrm{W} = 4{,}8\,\mathrm{kW}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(c) Kolik tepla $|Q_H|$ odebere motor během každého cyklu z horké lázně?

ŘEŠENÍ: Z rov. (21.9) plyne

$$|Q_H| = \frac{|W|}{\eta} = \frac{(1\,200\,\mathrm{J})}{(0{,}647)} = 1\,855\,\mathrm{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(d) Kolik tepla $|Q_S|$ dodá stroj v každém cyklu studenější lázni?

ŘEŠENÍ: Podle 1. zákona termodynamiky dostaneme

$$|Q_S| = |Q_H| - W = \\ = (1\,855\,\mathrm{J}) - (1\,200\,\mathrm{J}) = 655\,\mathrm{J}. \text{ (Odpověď)}$$

(e) O kolik se změní entropie pracovní látky v každém cyklu při kontaktu s teplejší (ΔS_H) a studenější (ΔS_S) lázní?

ŘEŠENÍ: V obou případech platí $\Delta S = Q/T$. U teplejší lázně entropie pracovní látky vzroste, u studenější poklesne. Protože jde o cyklický děj, budou obě změny co do velikosti stejné. Je tedy

$$\Delta S_H = \frac{Q_H}{T_H} = \frac{(1\,855\,\mathrm{J})}{(850\,\mathrm{K})} = +2{,}18\,\mathrm{J/K} \quad \text{(Odpověď)}$$

a podobně

$$\Delta S_S = \frac{Q_S}{T_S} = \frac{(-655\,\mathrm{J})}{(300\,\mathrm{K})} = -2{,}18\,\mathrm{J/K}. \quad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 21.4

Objevitel tvrdí, že postavil motor s účinností 75 %, pracující mezi body varu a tuhnutí vody. Je to možné?

ŘEŠENÍ: Z rov. (21.11) dostaneme

$$\eta = 1 - \frac{T_S}{T_H} = 1 - \frac{(0 + 273)\,\mathrm{K}}{(100 + 273)\,\mathrm{K}} = 0{,}268 \doteq 27\,\%.$$

Ideální Carnotův motor pracující mezi danými teplotami by měl účinnost 27 %; jakýkoliv reálný motor (v němž nutně nastávají nevratné děje a ztrátové přenosy energií) bude méně účinný. Deklarovaná účinnost 75 % je tedy pro dané teploty nemožná.

RADY A NÁMĚTY

Bod 21.1: *Jazyk termodynamiky*

Při studiu termodynamiky ve vědě i v aplikacích se používá jazyk velmi bohatý, ale někdy zavádějící. A bez ohledu na svou specializaci budete muset tomuto jazyku rozumět. Dočtete se, že teplo je absorbováno, extrahováno, uvolněno, předáno, vyměněno, odvedeno, vyjmuto, dodáno, přijmuto, ztraceno nebo odejmuto či teplo proudí z jednoho tělesa na jiné (jako by se jednalo o kapalinu). Můžete také číst, že těleso *má* teplo (jako by bylo možné teplo uchopit nebo vlastnit), či teplo se zvětšuje nebo zmenšuje. Měli bychom si vždy uvědomit, co se míní výrazem *teplo*:

> Teplo je energie přenesená z jednoho tělesa na jiné formou neuspořádaného pohybu mikročástic. Tento přenos je zpravidla důsledkem rozdílu teplot těles.

Zvolme jedno z těles za náš zkoumaný systém. Pak takovému přenosu energie *do* zkoumaného systému odpovídá *kladné* teplo $Q > 0$. Přenosu energie *ven* ze zkoumaného systému odpovídá záporná hodnota tepla $Q < 0$.

I pojem *práce* si zaslouží bližší pozornost. Dočtete se, že práce je konána nebo produkována, či proměněna na teplo nebo vyměňována za teplo. Výrazem *práce* míníme toto:

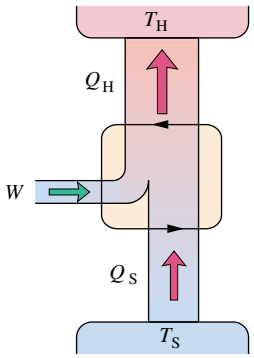
> Práce je energie, která je přenesena z jednoho tělesa na jiné formou uspořádaného pohybu; zpravidla je to důsledkem vnější síly působící mezi tělesy.

Takovému přenosu energie *ven ze zkoumaného systému* odpovídá kladná práce $W > 0$ *konaná systémem na okolí*, resp. záporná práce $W' < 0$ *vykonaná okolím na systému*. A podobně přenos energie *dovnitř systému* popíšeme zápornou prací $W < 0$ *konanou systémem na okolí*, resp. kladnou prací $W' > 0$ *vykonanou okolím na systému*. To může být zavádějící. Jakmile tedy vidíte slovo *práce*, čtěte pozorně, aby vám neunikl správný směr přenosu, a tím správné znaménko.

Poslední způsob přenosu energie (zde neprobíraný) souvisí se vznikáním, zanikáním a výměnou částic. Např. v chemické reakci hoření vodíku „zanikají“ molekuly kyslíku a vodíku a „vznikají“ molekuly vody. Probíhá-li reakce vratně, má změna energie charakter práce. Nevratnost reakce posouvá charakter změny k výměně tepla. (Proto mluvíme např. o spalném teple; i hoření může sice probíhat vratně, ale za podmínek a rychlostí, které jsou pro praxi zpravidla nevhodné.)

21.5 ENTROPIE KOLEM NÁS: CHLADNIČKY

Chladnička je takový **tepelný stroj**, který využívá práce k čerpání tepla z chladnější lázně do teplejší, a to cyklickým vykonáváním vhodné posloupnosti dějů. Např. v domácí chladničce koná práci elektrický kompresor a přenáší teplo prostřednictvím pracovní látky (chladicího média) z prostoru pro uskladnění jídla (chladnější lázeň) do místnosti (teplejší lázeň). Obr. 21.13 ukazuje základní části chladničky.



Obr. 21.13 Složení chladničky. Smyčka se dvěma černými šipkami ve středu obrázku symbolizuje pracovní látku cyklického stroje, podobně jako v p-V diagramu. Teplo Q_S se přenáší ze studené lázně o teplotě T_S do pracovní látky. Teplo Q_H se přenáší z pracovní látky do horké lázně o teplotě T_H. Práce W je chladničce (resp. její pracovní látce) dodávána zvenčí.

Klimatizační zařízení a tepelná čerpadla jsou ve své podstatě chladničkami. Rozdíly jsou jen v povaze chladnější a teplejší lázně. Klimatizační zařízení čerpá teplo z místnosti (chladnější lázně, která se má ještě více ochladit) a odevzdává ho do okolí domu (teplejší lázni). Tepelné čerpadlo pracuje obráceně: čerpá teplo z okolí domu (chladnější lázně) a dodává ho do místnosti (teplejší lázně).

Jestliže předpokládáme, že všechny procesy v chladničce jsou vratné, máme **ideální chladničku**. Taková chladnička je totéž co (myšlený) ideální tepelný motor pracující pozpátku.

V ideální chladničce probíhají všechny procesy vratně a nedochází k žádným ztrátovým přenosům energie (např. třením nebo vířením pracovní látky).

Obr. 21.13 ukazuje schéma ideální chladničky, která pracuje jako obrácený Carnotův motor z obr. 21.7. Jinými slovy, všechny přenosy tepla i práce probíhají opačným směrem nežli v Carnotově motoru. Takovou ideální chladničku budeme nazývat **Carnotova chladnička**.

Návrhář chladničky se bude snažit odebrat co možná největší množství tepla $|Q_S|$ z chladnější lázně (což chceme) za cenu minimálního množství práce W (za kterou platíme). Za vhodnou míru účinnosti (chlazení) můžeme považovat

$$K = \frac{\text{co chceme}}{\text{co za to platíme}} = \frac{|Q_S|}{|W|} \quad \text{(chladicí faktor)}, \tag{21.12}$$

kde K se nazývá **chladicím faktorem** neboli **činitelem chlazení**. Jde-li o ideální Carnotovu chladničku, redukuje se první zákon termodynamiky na tvar $|W| = |Q_H| - |Q_S|$, kde $|Q_H|$ je velikost tepla přeneseného do teplejší lázně. Z rov. (21.12) pak dostaneme

$$K = \frac{|Q_S|}{|Q_H| - |Q_S|}. \tag{21.13}$$

Protože Carnotova chladnička je Carnotovým motorem pracujícím obráceně, můžeme do rov. (21.13) dosadit rov. (21.8) a po jednoduché úpravě dostaneme

$$K = \frac{T_S}{T_H - T_S} \quad \text{(chladicí faktor Carnotovy chladničky)}. \tag{21.14}$$

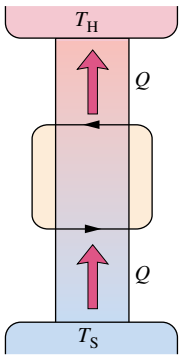
Pro běžná klimatizační zařízení bývá $K \doteq 2{,}5$, pro běžné domácí chladničky $K \doteq 5$. Je možná překvapující, že K je tím vyšší, čím jsou si teploty lázní bližší. Z tohoto důvodu jsou tepelná čerpadla účinnější v podnebích s malými výkyvy teplot než v podnebích, kde se teploty mění ve velkém rozsahu.

Bylo by krásné mít chladničku, která by nepotřebovala žádnou vstupní práci, tzn. kterou by nebylo nutné mít připojenou do zásuvky. Na obr. 21.14 je další „sen objevitelů“: **100% chladnička**, která přenosem tepla Q z chladnější lázně ohřívá teplejší lázeň, aniž by jí bylo nutné dodávat práci. (Zákon zachování energie by tím narušen nebyl.) Protože zařízení pracuje cyklicky, nemůže se entropie pracovní látky po skončení každého cyklu změnit. Entropie obou lázní se však mění: změna entropie chladnější lázně je $-|Q|/T_S$ a teplejší lázně $+|Q|/T_H$, změna entropie chladničky je nulová (chladnička se vrací do výchozího stavu), takže změna entropie celého systému je

$$\Delta S = -\frac{|Q|}{T_S} + \frac{|Q|}{T_H}.$$

Protože $T_H > T_S$, je pravá strana této rovnice záporná a změna celkové entropie uzavřeného systému *chladnička + obě lázně* je také záporná. Takový pokles entropie však porušuje druhý zákon termodynamiky (rov. (21.5)), a proto nemůže 100% chladnička existovat. (Jestliže chcete,

aby vám chladnička fungovala, nemůžete ji nechat vypojenou.) Jistě přijdete na to, že by to bylo jen jiné provedení perpetua mobile 2. druhu.



Obr. 21.14 Schéma „100% chladničky“, která by přenášela teplo z chladnější lázně do teplejší bez jakékoliv vstupní práce.

Tento výsledek vede k další (ekvivalentní) formulaci druhého zákona termodynamiky:

Není možné vytvořit takový cyklický děj, jehož jediným výsledkem by bylo odebrání tepla z tepelné lázně a předání do lázně teplejší.

Stručně řečeno: *neexistuje 100% chladnička.*

Tepelné čerpadlo neboli **tepelná pumpa** pracuje jako chladnička, ale svými „žebry“ vyhřívá náš byt, zatímco její „mrazák“ je vyveden do blízkého potůčku. Její **topný faktor** K je dán vztahem

$$K = \frac{\text{co chceme}}{\text{za co platíme}} = \frac{|Q_H|}{|W|} = \\ = 1 + \frac{|Q_S|}{|Q_H| - |Q_S|} = \frac{T_H}{T_H - T_S} \quad \text{(topný faktor).}$$

Snadno vidíme, že je vždy *větší* než 1. Jde o principiálně velice pokrokové a úsporné zařízení. Skutečné, reálné tepelné pumpy mají oproti teoretickým topný faktor asi poloviční; je výhodné, pracují-li mezi teplotami co nejbližšími.

KONTROLA 4: Chceme zvýšit chladicí faktor ideální chladničky. Můžeme toho dosáhnout mírným (a) zvýšením, (b) snížením požadované teploty mrazáku; přemístěním zařízení do nepatrně (c) teplejší, (d) chladnější místnosti. Změny teploty jsou ve všech čtyřech případech stejné. Seřaďte tyto změny podle chladicího faktoru od největšího k nejmenšímu.

PŘÍKLAD 21.5

Ideální chladnička s chladicím faktorem $K = 4{,}7$ odebírá teplo z chladnější komory, a to 250 J/cyklus.

(a) Kolik práce na cyklus je nutné dodat, aby mohla chladnička fungovat?

ŘEŠENÍ: Z rov. (21.12) máme

$$|W| = \frac{|Q_S|}{K} = \frac{(250\,\text{J})}{(4{,}7)} = 53\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Kolik tepla je při každém cyklu přivedeno do místnosti?

ŘEŠENÍ: Pro ideální chladničku, v níž jsou všechny procesy vratné a v níž nedochází k jiným přenosům energie než $|Q_H|$, $|Q_S|$, $|W|$, nám první zákon termodynamiky říká, že

$$\Delta U = (|Q_H| - |Q_S|) - |W|.$$

V našem případě $\Delta U = 0$, neboť pracovní látka pracuje cyklicky. Vyjádřením $|Q_H|$ a dosazením zadaných hodnot dostaneme

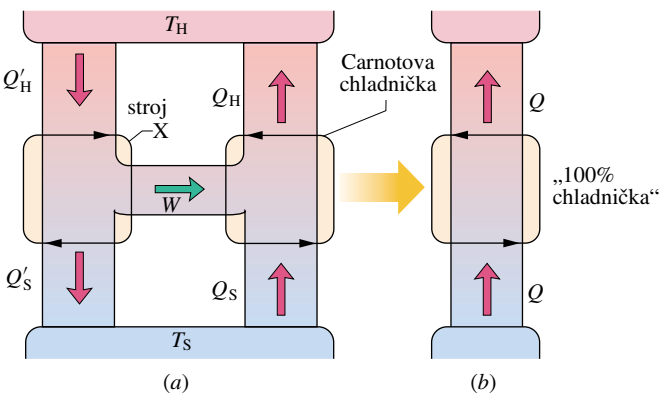
$$|Q_H| = |W| + |Q_S| = (53\,\text{J}) + (250\,\text{J}) = \\ = 303\,\text{J} \doteq 300\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

21.6 ÚČINNOST REÁLNÝCH MOTORŮ

Označme jako dříve η_C účinnost Carnotova motoru pracujícího mezi dvěma danými teplotami. Dokážeme, že žádný reálný motor pracující mezi týmiž teplotami nemůže mít účinnost vyšší než η_C. Kdyby ji měl, narušoval by druhý zákon termodynamiky.

Představme si, že objevitel vytvořil ve své dílně motor X, který má údajně účinnost větší:

$$\eta_X > \eta_C \qquad \text{(údajně).} \qquad (21.15)$$



Obr. 21.15 (a) Motor X pohání Carnotovu chladničku. (b) Pokud by stroj X měl účinnost vyšší než Carnotův stroj, pak by kombinace (a) byla ekvivalentní „100% chladničce“ (b). To by ale narušovalo druhý zákon termodynamiky. Z toho usoudíme, že žádný tepelný stroj pracující mezi dvěma lázněmi nemůže mít účinnost větší než Carnotův stroj.

Propojme motor X s Carnotovou chladničkou podle obr. 21.15a. Nastavíme ještě rychlost chodu chladničky tak, aby její příkon byl právě roven výkonu vynálezcova stroje. Naše kombinace tedy nevyměňuje žádnou práci s okolím. Je-li účinnost opravdu taková, jak vynálezce hlásá, platí podle rov. (21.15)

$$\frac{|W|}{|Q'_{\mathrm{H}}|} > \frac{|W|}{|Q_{\mathrm{H}}|} = \eta_{\mathrm{C}},$$

kde Q'_{H} je teplo odebrané vynálezcovým motorem; kdyby Carnotova chladnička nyní pracovala obráceně, tj. jako motor (je vratná!) odebrala by teplo Q_{H}. Z této nerovnosti plyne

$$|Q_{\mathrm{H}}| > |Q'_{\mathrm{H}}|. \qquad (21.16)$$

Protože veškerou práci vynálezcovým motorem vyrobenou právě odebere chladnička, plyne z prvního zákona termodynamiky, že

$$W = |Q_{\mathrm{H}}| - |Q_{\mathrm{S}}| = |Q'_{\mathrm{H}}| - |Q'_{\mathrm{S}}|,$$

a tedy

$$|Q_{\mathrm{H}}| - |Q'_{\mathrm{H}}| = |Q_{\mathrm{S}}| - |Q'_{\mathrm{S}}| = Q, \qquad (21.17)$$

kde teplo Q je podle rov. (21.16) kladné.

Porovnáním posledních rovnic je zřejmé, že kombinace vynálezcova motoru a Carnotovy chladničky přenesla teplo $Q > 0$ ze studené lázně do teplé. Pracovala by tedy jako 100% chladnička, která je však ve sporu s druhým zákonem termodynamiky.

V našich předpokladech tedy musí být nějaká chyba — a jediné, co přichází v úvahu, je údajná účinnost vynálezcova motoru, vyšší než účinnost Carnotova (vratného) tepelného motoru. Z toho uzavřeme, že *žádný reálný tepelný motor pracující mezi dvěma lázněmi nemůže mít účinnost vyšší než Carnotův motor, pracující mezi týmiž lázněmi.* Mohl by mít nanejvýš účinnost stejnou; pak by to byl ale také Carnotův motor.

Rozvažme ostatně toto: má-li vratný stroj odebírat teplo *jen* z lázně T_{H} a dodávat ho *jen* do T_{S}, pak tyto odběry jsou popsány příslušnými izotermami. Nemá-li mezitím odebírat žádné teplo, musí pracovat adiabaticky. Střídání izoterma – adiabata – izoterma – adiabata je ale právě typické pro Carnotův stroj. Takový stroj musí být tedy Carnotův.



21.7 TERMODYNAMICKÁ TEPLOTA

Koncept plynové teploty byl velmi dobrý; přesto však není dokonalý. Jednak je ideální plyn charakterizovaný vlastností $T = T_3(pV/p_3V_3)$ opět jen jednou speciální teploměrnou látkou. Ale hlavně: ideální plyn — stejně jako ideální láska — má oproti všem možným výhodám jednu podstatnou nevýhodu: neexistuje. Víme přece, že při dostatečně nízké teplotě každý reálný plyn zkapalní a jeho objem se změní skokem, a to ideální plyn „neumí“. A dále — dosti zředěný plyn je dosti dobrým přiblížením, ale kolik to je „dosti“? Čím víc plyn zředíme, tím méně gramů ho v našem teploměru bude a tím více nám ovlivní chování teploměru jeho ostatní konstrukční materiály — trubice, nádoby apod. Tyto okolnosti by vedly k nepřesnostem v měření, takže přímky z obr. 19.6, zobrazující rozptýlené naměřené hodnoty, by byly tím tlustší, čím více by se p_3 blížilo hodnotě 0. V přesném měření a zejména v **metrologii**, tj. v nauce zabývající se definicí fyzikálních veličin a realizací jejich standardů, bychom tedy s ideálním plynem neuspěli.

Teoreticky bezvadnou možnost zavést teplotu nám dává až druhý zákon termodynamiky. Z něj mj. plyne, že všechny *vratné* stroje, pracující cyklicky mezi dvěma tepelnými lázněmi — „studenou“ $\mathrm{L_S}$ a „horkou“ $\mathrm{L_H}$ — mají stejnou účinnost:

$$\eta = \frac{\text{odevzdaná práce}}{\text{dodané teplo}} = \frac{|W|}{|Q_{\mathrm{H}}|} = 1 - \frac{|Q_{\mathrm{S}}|}{|Q_{\mathrm{H}}|}.$$

Zde $|Q_{\mathrm{H}}|$ je teplo dodané během jednoho cyklu stroji z teplejší lázně $\mathrm{L_H}$, $|W|$ je práce strojem během cyklu odevzdaná a $|Q_{\mathrm{S}}|$ teplo odevzdané chladnější lázní $\mathrm{L_S}$. Poměr vyměněných tepel je tedy nezávislý na konstrukci stroje, pracovní náplni atd., pokud je stroj cyklický a vratný.

Na tomto základě je postaveno opravdu teoreticky bezvadné zavedení **termodynamické teploty**. Zvolíme opět trojný bod vody a přiřadíme* mu teplotu $T_3 = 273{,}16\,\mathrm{K}$. Každé tepelné lázni potom přiřadíme termodynamickou teplotu T úměrnou poměru tepel, které by vyměnil vratný Carnotův motor pracující mezi touto lázní (teplo Q) a lázní mající teplotu T_3 trojného bodu vody (teplo Q_3) podle vzorce

$$T = T_3 \frac{|Q|}{|Q_3|}.$$

Účinnost Carnotova stroje je pak dána termodynamickou teplotou pomocí vzorce

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{\mathrm{H}}|}{|Q_{\mathrm{S}}|} = 1 - \frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{S}}},$$

kde T_{H}, T_{S} jsou termodynamické teploty pracovních lázní (horké a studené).

* Volba čísla 273,16 byla vedena snahou co možno nezměnit dosavadní rozdíl teplot 1 stupně Celsia, 1 C°. Nejpřesnější současná měření ukazují, že tato volba byla nepatrně podhodnocena, takže teplotní rozdíl mezi tuhnutím a varem vody za tlaku 101 325 Pa je nepatrně menší než 100 C°.

Tím je teorie uspokojena úplně. Horší by to bylo v praxi, protože přiblížit se vratnému tepelnému stroji je v praxi určitě obtížnější než rozředit plyn. Ale na štěstí, jak se říká, není praktičtější věci než dobrá teorie. Následující kroky vedou bezpečně od nejčistší teorie k nejaktuálnější praxi:

(1) Kvantová fyzika umí s dostatečnou přesností vypočítat vzájemnou energii malých soustav (*klastrů*) atomů a molekul, např. vodíku či helia.

(2) Statistická fyzika umí z těchto energií vypočítat všechny rovnovážné hodnoty veličin rozsáhlých soustav, tedy velkého objemu plynu; rovnováha je zadána parametrem β jednoduše souvisejícím s termodynamickou teplotou T.

(3) Pro kontrolu: V ideálním plynu na sebe částice na dálku nepůsobí a potenciální energii klastrů lze tedy zanedbat. Výsledky se získají jednoduše a potvrzují, že termodynamická teplota se shoduje s plynovou teplotou.

(4) Pro dané množství skutečného, reálného plynu dostáváme (využitím energie klastrů) konkrétní vztahy mezi jeho tlakem p, objemem V a teplotou T, tzv. *stavovou rovnici*.

(5) Plynovým teploměrem, pracujícím nyní se skutečným plynem, se pak pomocí této stavové rovnice stanovují hodnoty dalších dobře reprodukovatelných teplot — body tání a varu různých látek v širokém teplotním rozmezí.

(6) Podle těchto bodů tání a varu se cejchují precizní odporové teploměry z platiny, tzv. **sekundární etalony**.

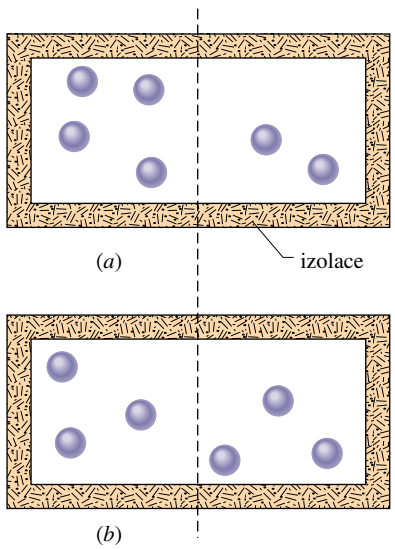
(7) Podle sekundárních etalonů se dále cejchují ostatní teploměry, které užíváme.

21.8 STATISTICKÝ POHLED NA ENTROPII

V kap. 20 jsme zjistili, že vlastnosti plynů můžeme vysvětlit pomocí jejich mikroskopického, resp. molekulárního chování; takovým zkoumáním se zabývá *statistická mechanika*. Připomeňme si například, že umíme vypočítat tlak plynu působící na stěny nádoby pomocí hybnosti přenesené do těchto stěn při odrazech molekul.

Zde se zaměříme na jednoduchý problém týkající se molekul plynu v krabici rozdělené na dvě části. Tento problém se dostatečně jednoduše rozebírá a umožňuje nám použít statistickou mechaniku k výpočtu změny entropie pro volnou expanzi ideálního plynu. V př. 21.7 uvidíme, že statistická mechanika dá stejnou změnu entropie, jakou jsme dostali v př. 21.1 použitím termodynamiky.

Mějme krabici (obr. 21.16), která obsahuje šest identických molekul plynu. V každém okamžiku se bude daná molekula nacházet buď v levé, nebo v pravé části krabice. Protože obě části krabice mají stejný objem, má každá molekula stejnou pravděpodobnost, že se bude nacházet v levé, nebo v pravé části.



Obr. 21.16 Izolovaná krabice obsahující šest molekul plynu. Každá molekula může být se stejnou pravděpodobností v levé (L), nebo v pravé (P) polovině. Uspořádání v (a) odpovídá konfiguraci III v tab. 21.1 a (b) konfiguraci IV.

Tabulka 21.1 **Šest molekul v krabici**

KONFIGURACE		NÁSOBNOST W	W	$\frac{S}{10^{23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}}$
OZNAČENÍ	$(n_\mathrm{L}; n_\mathrm{P})$	(POČET MIKROSTAVŮ)	PODLE ROV. (21.18)	PODLE ROV. (21.19)
I	(6; 0)	1	$6!/(6!0!) = 1$	0
II	(5; 1)	6	$6!/(5!1!) = 6$	2,47
III	(4; 2)	15	$6!/(4!2!) = 15$	3,74
IV	(3; 3)	20	$6!/(3!3!) = 20$	4,13
V	(2; 4)	15	$6!/(2!4!) = 15$	3,74
VI	(1; 5)	6	$6!/(1!5!) = 6$	2,47
VII	(0; 6)	1	$6!/(0!6!) = 1$	0
Celkový počet mikrostavů:		64	$2^6 = 64$	

Tab. 21.1 pojednává o možných uspořádáních šesti shodných, ale navzájem rozlišitelných molekul; pojmenujeme je a, b, c, d, e, f. Uvažujme, kolika různými způsoby je lze umístit do dvou částí (levá, pravá) krabice. Každý jednotlivý způsob nazveme **mikrostav**. Tak například zápis (*abcd*; *ef*) popisuje mikrostav se čtyřmi molekulami a, b, c, d v levé a dvěma molekulami e, f v pravé části nádoby. Středník symbolizuje přepážku mezi nimi. Týž mikrostav můžeme ovšem zapsat i (*dabc*; *fe*): nezáleží na pořadí, v jakém molekuly v příslušné části jmenujeme. Ovšem něco jiného, tedy jiný mikrostav, je třeba (*ebcd*; *af*), kde se molekuly a, e prohodily z jedné části do druhé.

Ale i tak mají oba tyto mikrostavy něco společného: v levé části jsou čtyři molekuly, v pravé dvě. Toto budeme nazývat **konfigurací** neboli **makrostavem** a zapisovat (4; 2). Je zřejmě sedm konfigurací: v tabulce jsou očíslovány římskými číslicemi I až VII. Například konfigurace I je (6; 0), tj. všech šest molekul je v levé části krabice, pravá je prázdná. Je jen jediná možnost — jediný mikrostav, který tomu odpovídá, totiž (*abcdef*;). V konfiguraci II, tj. (5; 1), je v levé části pět molekul, zbývající molekula je v části pravé. Snadno najdeme všech 6 různých mikrostavů: v druhé části je totiž právě jediná z molekul, v levé části všechny ostatní. Jsou to mikrostavy (*bcdef*; *a*), (*acdef*; *b*), (*abdef*; *c*), (*abcef*; *d*), (*abcdf*; *e*) a (*abcde*; *f*). Zkusme nyní najít, jak obecně vypočítat, kolika různými mikrostavy lze vytvořit jistý makrostav.

Uvažme nejprve, kolika způsoby můžeme vyjmenovat všechny molekuly: kolik vytvoříme „slov“ typu *abcdef*, *bacdef*, *cbadef*, *dbcaef*, … , *fedcba*. Zřejmě musíme užít každé z písmen *a* až *f*, a to právě jednou. Každé písmeno bude na nějakém místě, v poloze první až šesté. Vezměme nejprve *a*; máme pro něj šest poloh, tedy 6 možností, kam ho umístit. Pro *b* však už zbývá jen pět poloh, protože jedna ze šesti je obsazena písmenem *a*. Možností, jak rozmístit *a* a *b*, je proto celkem $6 \cdot 5 = 30$. Pro *c* zbydou už jen 4 polohy, takže písmena *a*, *b*, *c* mohou být rozmístěna $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ způsoby. Pro *d* jsou další 3 polohy, pro *e* jen 2, až nakonec pro *f* zbyde jen jediná poloha. Všech šest písmen lze tedy uspořádat

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$$

způsoby. Zde jsme zavedli znak **faktoriálu**, totiž vykřičník, k označení součinu všech přirozených čísel v klesajícím pořadí až po jednotku. Je např. $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Pro úplnost definujeme ještě $1! = 1$ a také $0! = 1$.

Vraťme se však k molekulám. Všech „slov“ typu (*abcdef*), popisujících molekuly v krabici, je 720, ovšem různá slova neznamenají různé mikrostavy. Hledejme proto, kolik je např. opravdu různých mikrostavů pro konfiguraci (2; 4). Vypíšeme proto všech 720 slov, přičemž za druhým písmenem vždy vložíme středník (přepážku v krabici), tedy (*ab*; *cdef*), (*ba*; *cdef*), (*cb*; *adef*), (*db*; *caef*), … , (*fe*; *dcba*). Ihned však vidíme, že např. první dvě slova jsou stejná v tom smyslu, že popisují týž mikrostav (třetí i čtvrté už se liší!). Molekuly *ab* jsou přitom v levé části, *cdef* vpravo a to, že písmena v levé či pravé části krabice vyjmenujeme v jiném pořadí, nový mikrostav neudělá. Protože první dvě písmena můžeme uspořádat $2! = 2$ způsoby, musíme zmenšit celkový počet *různých* mikrostavů dvakrát. A protože zbývající čtyři písmena lze uspořádat $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ způsoby, zmenší se opět počet různých mikrostavů 24krát. Počet různých mikrostavů např. pro konfiguraci (2; 4) je tedy roven

$$\frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{720}{2 \cdot 24} = 15.$$

Podobně pro konfiguraci (3; 3) je počet roven

$$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{720}{6 \cdot 6} = 20.$$

Pro šest molekul na obr. 21.16 můžeme jednoduše sestavit seznam mikrostavů přiřazených každé ze sedmi konfigurací a pak nalézt jejich násobnosti. Tab. 21.1 zahrnuje výpočet W pro každou konfiguraci použitím následujícího vztahu. Pro obecný případ N molekul můžeme totiž určit násobnost konfigurace takto:

$$W = \frac{N!}{n_{\mathrm{L}}! \, n_{\mathrm{P}}!} \quad \text{(násobnost konfigurace).} \quad (21.18)$$

Zde je N celkový počet molekul, n_{L} počet molekul v levé polovině krabice a n_{P} počet molekul v pravé polovině.

Základním pravidlem statistické mechaniky je následující předpoklad:

> Každý mikrostav může nastat se stejnou pravděpodobností jako kterýkoliv jiný.

To znamená, že kdybychom vzali mnoho snímků molekul náhodně rozmístěných v krabici a spočetli, kolikrát který mikrostav nastal, zjistili bychom, že každý mikrostav nastal stejně často. V každém daném okamžiku je tedy pravděpodobnost, že nalezneme molekuly v nějakém mikrostavu, rovná pravděpodobnosti, že je nalezneme v jakémkoliv jiném mikrostavu. To mj. znamená, že systém v průměru setrvá stejnou dobu v každém ze 64 mikrostavů tvořících konfigurace v tab. 21.1.

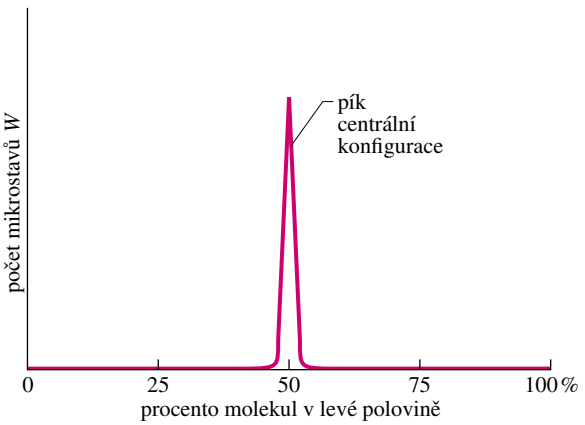
Mikrostavy jsou stejně pravděpodobné, ale konfigurace sestávají z *různého počtu mikrostavů* (říkáme, že mají různé **násobnosti**), proto konfigurace *nebudou* stejně pravděpodobné. *Pravděpodobnost (výskytu) konfigurace* je dána

poměrem její násobnosti k celkovému počtu mikrostavů systému. V tab. 21.1 má např. konfigurace III s patnácti mikrostavy (a tedy násobností 15) pravděpodobnost výskytu $15/64 = 0{,}234$. To znamená, že systém je ve stavu s konfigurací III 23,4 % času. Konfigurace I a VII, ve kterých plyn zabírá jen polovinu krabice, jsou nejméně pravděpodobné, a to s pravděpodobnostmi $1/64 = 0{,}015\,6$, resp. 1,56 % pro každou z nich.

Připomeňme si volnou expanzi z př. 21.1; zjistili jsme, že stav, ve kterém je plyn v celé nádobě, má vyšší entropii než plyn, který se nachází jen v polovině nádoby. Zde jsme zjistili, že stav (nebo konfigurace), ve které plyn vyplňuje celou nádobu rovnoměrně, je pravděpodobnější než stav, kdy se plyn nachází jen v polovině nádoby. Zdá se tedy, že stav s vyšší entropií má také větší pravděpodobnost výskytu.

Uvažovaný počet šesti molekul v krabici ($N = 6$) není příliš velký na to, abychom na něm mohli založit nějaký závěr. Zvětšeme počet molekul N na 100 a porovnejme opět množství času, kdy je celá krabice vyplněná molekulami plynu a kdy jsou molekuly jen v levé polovině krabice. Tento poměr už nebude 20 : 1 (jako pro $N = 6$ v tabulce tab. 21.1), ale okolo 10^{29} : 1. Představte si, jak velký by tento poměr musel být pro reálnější případ $N = 10^{22}$, což je řádově počet molekul v nafukovacímu balonku. Zdaleka největší pravděpodobnost pak je pro rozložení molekul v krabici, které je velmi blízké rovnoměrnému.

Pro velká N je také velký počet mikrostavů. Ale téměř všechny mikrostavy odpovídají přibližně rovnoměrnému rozdělení molekul do obou polovin krabice, jak je znázorněno na obr. 21.17. Přestože změřená teplota a tlak plynu zůstávají konstantní, plyn stále fluktuuje, jak molekuly „navštěvují“ všechny možné mikrostavy se stejnými pravděpodobnostmi. Protože jen velmi málo stavů leží mimo úzký *pík centrální konfigurace* z obr. 21.17, můžeme velmi dobře předpokládat, že molekuly plynu jsou stále rovnoměrně rozděleny do obou polovin krabice. A jak jsme viděli, je to konfigurace s největší entropií.



Obr. 21.17 Závislost počtu mikrostavů na různých zastoupeních molekul v levé části pro *velký* počet molekul v krabici. Téměř všechny mikrostavy odpovídají přibližně stejnému rozdělení molekul do obou polovin krabice; tyto mikrostavy tvoří pík centrální konfigurace. Pro $N \approx 10^{22}$ by byl pík centrální konfigurace příliš úzký, než aby jej bylo možné zakreslit na tento obrázek.

Někdy se v přírodě vyskytne překvapující řád. (a) Giant's Causeway (Obří cesta) v severním Irsku sestává z vysokých kamenných sloupců, z nichž většina má šestiúhelníkový průřez a vypadá jako by byla uměle vytvořena. Tyto sloupce vznikly, když se horké magma vylilo ze země a ochladilo. (b) Řád také můžeme pozorovat v *uspořádaných kruzích* štěrku a kamínků, které přirozeně vznikly na ostrově na sever od Norska. Dodnes se diskutuje o tom, jak tyto sloupce a kruhy přesně vznikly, ale je zjištěno, že entropie magmatu a kamínků klesala, a to za cenu, že výrazně rostla entropie okolí.

(*a*)



(*b*)



PŘÍKLAD 21.6

Představme si, že v krabici z obr. 21.16 je 100 stejných molekul. Kolika různými způsoby (mikrostavy) lze vytvořit konfiguraci s $n_1 = 50$, $n_2 = 50$? A kolika způsoby konfiguraci s $n_1 = 100$, $n_2 = 0$? Interpretujte výsledek pomocí relativních pravděpodobností výskytu obou konfigurací.

ŘEŠENÍ: Násobnost W konfigurace identických molekul v krabici nalezneme jako počet navzájem různých mikrostavů realizujících tuto konfiguraci; použijeme rov. (21.18). Pro konfiguraci (50; 50) dostaneme

$$W = \frac{N!}{n_1!n_2!} = \frac{100!}{50!50!} = \\ = \frac{9{,}33\cdot 10^{157}}{(3{,}04\cdot 10^{64})(3{,}04\cdot 10^{64})} = \\ = 1{,}01\cdot 10^{29}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Podobně pro konfiguraci (100; 0) dostaneme

$$W = \frac{N!}{n_1!n_2!} = \frac{100!}{100!0!} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Rozdělení (50; 50) je tedy 10^{29}krát pravděpodobnější než rozdělení (100; 0). Kdybychom uměli počítat všechny mikrostavy rozdělení (50; 50) fantastickou rychlostí 1 mikrostav za 1 ns (tj. miliardu mikrostavů za sekundu), trvalo by nám to kolem $3\cdot 10^{12}$ let, což je asi 750krát víc než stáří Vesmíru. A přitom 100 molekul je *velmi malý* počet. Představte si, jaké by byly příslušné pravděpodobnosti například pro 1 mol, tedy asi $N = 10^{24}$ molekul! Opravdu se tedy nemusíte bát, že by se náhodou na chvilku ocitly všechny molekuly vzduchu v jednom rohu vaší pracovny.

Pravděpodobnost a entropie

Viděli jsme, že konfigurace s větší pravděpodobností výskytu mají také větší entropii. Protože násobnost je měrou její pravděpodobnosti, můžeme také říci, že stavy s větší násobností mají větší entropii. Rakouský fyzik Ludwig Boltzmann v roce 1877 poprvé určil následující vztah mezi těmito dvěma veličinami:

$$S = k \ln W \qquad \text{(Boltzmannova rovnice pro entropii)}, \qquad (21.19)$$

kde S je entropie konfigurace, $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$ je Boltzmannova konstanta, se kterou jsme se poprvé setkali v kap. 20.5 a W je násobnost konfigurace. Tento slavný vztah je vytesán na Boltzmannově náhrobku.

Je přirozené, že entropie S a násobnost W, úměrná pravděpodobnosti, spolu souvisejí logaritmicky. Úhrnná entropie dvou nezávislých systémů je rovna *součtu* dílčích entropií, zatímco úhrnná pravděpodobnost dvou nezávislých jevů je rovna *součinu* jejich pravděpodobností. Protože $\ln ab = \ln a + \ln b$, je zřejmě logaritmus tou pravou funkcí na převod mezi S a W.

Poslední sloupec tab. 21.1 ukazuje entropii konfigurací systému šesti molekul z obr. 21.16 vypočtenou pomocí rov. (21.19). Konfigurace IV, která má největší násobnost, má také největší entropii.

Budete-li používat rov. (21.18) pro výpočet W, může vám kalkulačka signalizovat chybu „Přeplnění“ při výpočtu faktoriálů větších čísel (např. $70! \doteq 1{,}2\cdot 10^{100}$). Naštěstí existuje velmi dobrá aproximace, známá jako Stirlingův* vzorec, a to nikoli pro $N!$, ale pro $\ln N!$, tedy přesně pro to, co potřebujeme v rov. (21.19). Má tvar

$$\ln N! \approx N(\ln N) - N \qquad \text{(Stirlingův vzorec)}. \qquad (21.20)$$

KONTROLA 5: V nádobě je obsažen jeden mol plynu. Uvažujte dvě konfigurace: (a) obě poloviny nádoby obsahují právě polovinu molekul a (b) všechny třetiny nádoby obsahují právě jednu třetinu molekul. Která konfigurace má více mikrostavů?

PŘÍKLAD 21.7

V př. 21.1 jsme ukázali, že pokud n molů ideálního plynu zdvojnásobí svůj objem volnou expanzí, je vzrůst entropie z počátečního stavu $\mathscr{S}_\mathrm{i}$ do koncového stavu $\mathscr{S}_\mathrm{f}$ dán jako $S_\mathrm{f} - S_\mathrm{i} = nR\ln 2$. Odvoďte tento výsledek použitím statistické mechaniky.

ŘEŠENÍ: Nechť N je počet molekul v n molech plynu. Z rov. (21.18) plyne, že násobnost počátečního stavu, ve kterém je všech N molekul v levé polovině nádoby (obr. 21.1), je

$$W_\mathrm{i} = \frac{N!}{N!0!} = 1.$$

Násobnost koncového stavu, ve kterém je $N/2$ v obou polovinách nádoby, je

$$W_\mathrm{f} = \frac{N!}{(N/2)!(N/2)!}.$$

Z rov. (21.19) plyne, že entropie na začátku a na konci děje je

$$S_\mathrm{i} = k\ln W_\mathrm{i} = k\ln 1 = 0,$$
$$S_\mathrm{f} = k\ln W_\mathrm{f} = k\ln(N!) - 2k\ln((N/2)!). \qquad (21.21)$$

Při úpravách jsme použili rovnost

$$\ln\frac{a}{b^2} = \ln a - 2\ln b.$$

* Stirling, který objevil tuto aproximaci je jiný než ten, který zkonstruoval Stirlingův motor.

Nyní dosadíme rov. (21.20) do (21.21) a dostaneme tak

$$\begin{aligned} S_\mathrm{f} &= k\ln(N!) - 2k\ln[(N/2)!] = \\ &= k[N(\ln N) - N] - 2k[(N/2)\ln(N/2) - (N/2)] = \\ &= k[N(\ln N) - N - N\ln(N/2) + N] = \\ &= k[N(\ln N) - N(\ln N - \ln 2)] = kN\ln 2. \end{aligned} \qquad (21.22)$$

Za kN můžeme dosadit ze vztahů

$$k = \frac{R}{N_\mathrm{A}} \quad \text{a} \quad N = nN_\mathrm{A}$$

z rov. (20.21) a (20.2). Zde N_A je Avogadrova konstanta a R je univerzální plynová konstanta. Z těchto vztahů vidíme, že $kN = nR$. Dosazením do rov. (21.22) dostaneme

$$S_\mathrm{f} = nR\ln 2.$$

Změna entropie z počátečního do koncového stavu tedy je

$$S_\mathrm{f} - S_\mathrm{i} = nR\ln 2 - 0 = nR\ln 2, \qquad \text{(Odpověď)}$$

což jsme měli ukázat. V př. 21.1 jsme vypočetli vzrůst entropie pro volnou expanzi z termodynamiky nalezením ekvivalentních procesů a výpočtem změny entropie pro *takový* proces pomocí teploty a přenosů energie. Zde jsme vypočetli stejný nárůst pomocí statistické mechaniky a užitím faktu, že systém je složen z molekul.



21.9 TŘETÍ ZÁKON TERMODYNAMIKY

Nultý zákon termodynamiky zavedl pojem teploty. První zákon přivedl do světa termodynamiky pojem energie a zavedl jednak vnitřní energii, jednak teplo jakožto jistým (neuspořádaným) způsobem přenášenou energii. Druhý zákon termodynamiky ve svých důsledcích umožnil definovat měření teploty způsobem zcela nezávislým na konkrétních materiálech. Jedinou volitelnou veličinou zůstala „velikost dílku“, tj. teplota zůstala určena až na multiplikativní faktor. Ten byl z praktických důvodů stanoven volbou teploty trojného bodu vody $T_3 = 273{,}16\,\mathrm{K}$ tak, aby zvětšení teploty o 1 K bylo co možná rovno dosavadnímu přírůstku o 1 °C. Druhý zákon termodynamiky také umožnil zavést entropii — přesněji řečeno přírůstek entropie vztahem $\mathrm{d}Q = T\,\mathrm{d}S$. Je tak automaticky dána i velikost „dílku“ na stupnici entropie, není však určen *počátek* této stupnice: entropie je zatím určena až na libovolnou aditivní konstantu (asi jako potenciální energie v mechanice). Můžeme ji určit?

V mikroskopické teorii jsme rovněž zavedli entropii vztahem $S = k\ln W$. Zde je už entropie určena „se vším všudy“, i s počátkem: je-li totiž $W = 1$, je $S = 0$. Protože W je přirozené číslo, je toto i jeho nejmenší možná hodnota.

Studovali jsme konkrétní příklady rozložení částic v krabici, zatím bez vnějších vlivů. Kdyby ale např. šlo o horní a dolní polovinu nádoby v poli zemské tíže, pak by částice v různých místech měly navíc různou potenciální energii. Snadno lze nahlédnout, že existuje takový stav, který má minimální energii, a že je jediný (všechny molekuly leží v naprostém klidu ($\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$), a to co možná nejníž v nádobě). Úhrnné mikroskopické mechanické energii tohoto stavu (tj. kinetická + potenciální) můžeme přiřadit hodnotu 0; jeho entropie bude také rovna nule: $k\ln W = k\ln 1 = 0$.

Protože teplota u systémů, které jsme zkoumali, byla určena střední kvadratickou rychlostí molekul a protože ta je v základním stavu rovna nule, je v základním stavu nulová i teplota: $T = 0$, tzv. „absolutní nula“.

Při absolutní nule je i entropie systému nulová: je-li $T = 0$, je i $S = 0$.

Z toho však plynou další hluboké důsledky, zejména *nedosažitelnost teploty absolutní nuly*:

Teploty absolutní nuly nelze dosáhnout konečným počtem kroků.

Již mnohem dříve totiž bylo známo, že další ochlazování látky je tím obtížnější, čím nižší teplotu už látka má. Jak se blížíme absolutní teplotě, mění se totiž vlastnosti látek. Jak zjistil a v r. 1906 formuloval W. Nernst, v blízkosti absolutní nuly se adiabatický děj přibližuje izotermickému. Tím se ovšem ztrácí účinnost libovolné ochlazovací metody založené na střídání těchto dějů, např. Carnotovy chladničky. V současné době jsme se již *přiblížili* k absolutní nule až na 280 pK (spinová teplota jader rhenia, Helsinki, 1994). Ale *dosáhnout* ji nebudeme moci nikdy.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Entropie

Nevratný děj je takový, který nemůže být obrácen pomocí malých změn okolí. Směr, ve kterém může nevratný děj probíhat, je dán změnou entropie systému ΔS během děje. Entropie S je *stavovou veličinou* (nebo *stavovou funkcí*) systému; to znamená, že závisí jen na stavu systému a ne na způsobu, jakým se systém do tohoto stavu dostal. *Postuláty o entropii* především říkají: *Jestliže v uzavřeném systému dochází k nevratným dějům, musí entropie takového systému růst.*

Výpočet změn entropie

Změna entropie ΔS pro nevratný děj, který probíhá z počátečního stavu $\mathscr{S}_\mathrm{i}$ do koncového stavu $\mathscr{S}_\mathrm{f}$ se právě rovná změně entropie ΔS *libovolného vratného děje*, který probíhá mezi stejnými dvěma stavy. Tu pak umíme vypočítat ze vztahu

$$\Delta S = S_\mathrm{f} - S_\mathrm{i} = \int_{\mathscr{S}_\mathrm{i}}^{\mathscr{S}_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}Q}{T}, \tag{21.1}$$

kde Q je energie přenesená jako teplo do systému nebo ze systému během děje a T je teplota systému (v kelvinech).

Pro vratný izotermický děj se rov. (21.1) zjednodušuje na

$$\Delta S = S_\mathrm{f} - S_\mathrm{i} = \frac{Q}{T}. \tag{21.2}$$

Je-li změna teploty ΔT systému malá vzhledem ke své velikosti (v kelvinech) před i po ději, můžeme změnu entropie odhadnout jako

$$\Delta S = S_\mathrm{f} - S_\mathrm{i} \approx \frac{Q}{\overline{T}}, \tag{21.3}$$

kde $\overline{T}$ je průměrná teplota systému během děje.

Přejde-li ideální plyn vratně z počátečního stavu s teplotou T_i a objemem V_i do koncového stavu s teplotou T_f a objemem V_f, bude změna entropie ΔS plynu rovna

$$\Delta S = S_\mathrm{f} - S_\mathrm{i} = nR \ln \frac{V_\mathrm{f}}{V_\mathrm{i}} + nC_V \ln \frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{i}}. \tag{21.4}$$

Druhý zákon termodynamiky

Tento zákon (v jedné ze svých formulací) říká: *Jestliže děj nastává v uzavřeném systému, tak entropie systému roste pro nevratné děje a zůstává konstantní pro děje vratné. Entropie uzavřeného systému nikdy neklesá.* To můžeme zapsat vztahem

$$\Delta S \geqq 0. \tag{21.5}$$

Tepelné motory

Motor je cyklicky pracující zařízení, které odebírá teplo $|Q_\mathrm{H}|$ z teplejší lázně, koná jisté množství práce $|W|$ a odevzdává teplo $|Q_\mathrm{S}|$ chladnější lázni. *Účinnost* motoru η je definována jako

$$\eta = \frac{\text{energie získaná}}{\text{energie zaplacená}} = \frac{|W|}{|Q_\mathrm{H}|}. \tag{21.9}$$

Ideální motor je takový, ve kterém jsou všechny děje vratné a ve kterém jedinými úhrnnými přenosy energie jsou $|Q_\mathrm{H}|$, $|W|$ a $|Q_\mathrm{S}|$. Carnotův motor je ideální motor pracující v cyklu podle obr. 21.8. Jeho účinnost je

$$\eta_\mathrm{C} = 1 - \frac{|Q_\mathrm{S}|}{|Q_\mathrm{H}|} = 1 - \frac{T_\mathrm{S}}{T_\mathrm{H}}, \tag{21.10, 21.11}$$

kde T_H, resp. T_S jsou teploty teplejší („horké“), resp. chladnější („studené“) lázně. Reálné motory mají vždy nižší účinnost, než je dána vztahy (21.9) a (21.10).

100% motor (perpetuum mobile 2. druhu) je hypotetický cyklický motor, ve kterém by se veškeré teplo odebrané teplejší lázni přeměnilo na práci. Protože by taková přeměna způsobovala pokles entropie systému během každého cyklu, porušoval by 100% motor druhý zákon termodynamiky. Tento zákon je možné přeformulovat také takto: Není možné utvořit takový cyklický děj, jehož jediným výsledkem by bylo odebrání tepla z tepelné lázně a jeho úplná přeměna na práci.

Chladničky

Chladnička (což může být i klimatizační zařízení nebo tepelné čerpadlo) je cyklicky pracující zařízení, které odebírá teplo $|Q_\mathrm{S}|$ z chladnější lázně, odevzdává teplo $|Q_\mathrm{H}|$ teplejší lázni, a které dodáváme práci $|W|$. *Chladicí faktor* K chladničky je definován vztahem

$$K = \frac{\text{co chceme}}{\text{co za to platíme}} = \frac{|Q_\mathrm{S}|}{|W|}. \tag{21.12}$$

Ideální chladnička je taková, ve které jsou všechny děje vratné a jedinými úhrnnými toky energie v cyklu jsou $|Q_\mathrm{H}|$, $|Q_\mathrm{S}|$ a $|W|$. Pro ideální chladničku přejde rov. (21.12) na

$$K = \frac{|Q_\mathrm{S}|}{|Q_\mathrm{H}| - |Q_\mathrm{S}|} = \frac{T_\mathrm{S}}{T_\mathrm{H} - T_\mathrm{S}}, \tag{21.13, 21.14}$$

kde T_H, resp. T_S je teplota teplejší, resp. chladnější lázně.

100% chladnička je hypotetické zařízení, ve kterém je veškeré teplo odebrané z chladnější lázně odvedeno do teplejší lázně bez nutnosti dodání práce zvenčí. Protože takový přenos způsobuje pokles entropie systému během každého cyklu, porušuje 100% chladnička druhý zákon termodynamiky. Tento zákon může být také přeformulován následovně: Neexistuje žádný cyklický stroj, který by převáděl teplo ze studenější lázně do teplejší bez dodání práce.

Tepelné čerpadlo

Tepelné čerpadlo je chladnička, která ochlazuje okolí a získaným teplem ohřívá soustavu: chladí tedy okolí našeho domu a vyhřívá náš byt. Její mírou účinnosti je topný faktor K:

$$K = \frac{|Q_\mathrm{H}|}{W} = 1 + \frac{|Q_\mathrm{S}|}{|Q_\mathrm{H}| - |Q_\mathrm{S}|} = \frac{T_\mathrm{H}}{T_\mathrm{H} - T_\mathrm{S}}.$$

Je vždy větší než 1. Reálná čerpadla mívají asi polovinu teoretické hodnoty.

Statistický pohled na entropii

Entropie systému může být definována i pomocí rozdělení molekul v systému. Každé možné rozdělení molekul nazýváme *mikrostavem* systému. Všechny ekvivalentní mikrostavy seskupujeme do *konfigurace* systému, přičemž počet mikrostavů v konfiguraci nazýváme násobností W konfigurace; je to její *statistická váha*.

Pro systém o N molekulách, které mohou být rozděleny do dvou polovin nádoby, je dána násobnost vztahem

$$W = \frac{N!}{n_L!\, n_P!} \tag{21.18}$$

ve kterém n_L, resp. n_P je počet molekul v levé, resp. v pravé části nádoby. Základním postulátem *statistické mechaniky* je předpoklad, že všechny mikrostavy mohou nastat se stejnou pravděpodobností. Konfigurace s největší násobností tedy nastávají nejčastěji. Je-li N velmi velké (např. $N = 10^{22}$ molekul nebo více), jsou molekuly téměř vždy v konfiguraci s $n_L \doteq n_P$.

Násobnost W konfigurace systému a jeho entropie S v takové konfiguraci jsou svázány Boltzmannovým vztahem pro entropii:

$$S = k \ln W, \tag{21.19}$$

kde $k = 1{,}38{\cdot}10^{-23}$ J/K je Boltzmannova konstanta.

Je-li N velmi velké (což je obvyklé), je výhodné používat aproximaci pro $\ln N!$ ze Stirlingova vzorce:

$$\ln N! \approx N(\ln N) - N. \tag{21.20}$$

Třetí zákon termodynamiky

Podle třetího zákona termodynamiky má systém ve stavu s nulovou teplotou ($T = 0$, „absolutní nula“) nulovou i entropii. Tento stav je nedosažitelný konečným počtem kroků a můžeme se mu jen přibližovat. Při tom se různé vratné děje (izotermický, adiabatický) navzájem blíží, což mj. snižuje účinnost chladicích postupů.

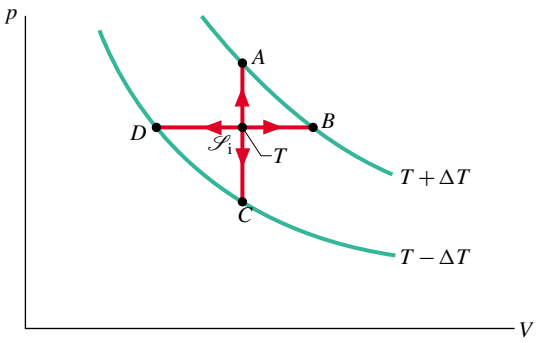
OTÁZKY

1. Plyn uzavřený do izolačního válce je adiabaticky stlačen na polovinu svého původního objemu. Zjistěte, jestli entropie plynu roste, klesá, či zůstává během stlačování konstantní.

2. Bloky A a B různých počátečních teplot byly ve čtyřech pokusech dány do kontaktu v izolované krabici (jako v př. 21.1) a ponechány až do vyrovnání teploty. Změny entropie bloků v těchto pokusech měly hodnoty podle tabulky (v $\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$), ale ne nutně v tomto pořadí. Přiřaďte správně hodnoty pro blok B hodnotám pro blok A.

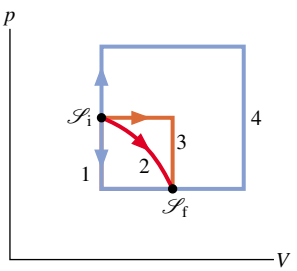
BLOK	HODNOTY			
A	8	5	3	9
B	−3	−8	−5	−2

3. Na obr. 21.18 je označen počáteční stav $\mathscr{S}_i$ ideálního plynu o teplotě T. Seřaďte změny entropie plynu při dějích ze stavu $\mathscr{S}_i$ do stavů A, B, C, D od největší k nejmenší za předpokladu, že všechny děje probíhají vratně.



Obr. 21.18 Otázka 3

4. Ideální plyn ve styku s řízeným termostatem lze převést z počátečního stavu $\mathscr{S}_i$ do koncového $\mathscr{S}_f$ čtyřmi různými cestami podle obr. 21.19. Uspořádejte cesty sestupně podle velikosti změny entropie (a) plynu, (b) termostatu, (c) systému plyn + termostat.



Obr. 21.19 Otázka 4

5. Ideální plyn necháme nejprve volně rozepnout z objemu V do objemu $2V$. Potom jej necháme rozepnout z tohoto objemu $2V$ do objemu $3V$. Je úhrnná změna entropie pro tyto dvě expanze větší, menší, či rovná změně entropie, která by nastala, pokud bychom nechali plyn rozepnout z objemu V přímo do objemu $3V$?

6. Tři Carnotovy motory pracují mezi teplotami (a) 400 K a 500 K; (b) 500 K a 600 K; (c) 400 K a 600 K. Každý motor odebírá stejné množství energie na cyklus z teplejší lázně. Seřaďte velikosti prací vykonaných motory za cyklus od největší k nejmenší.

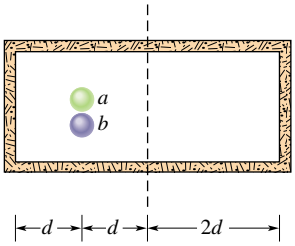
7. Rozhodněte, zda entropie následujících motorů roste, klesá, či zůstává konstantní: (a) ideální motor, (b) reálný motor, (c) 100% motor (který samozřejmě nelze sestrojit).

8. Jak se změní teplota kuchyně, necháte-li v ní dveře chladničky otevřené po několik hodin. Vzroste, klesne, nebo zůstane stejná? Předpokládejte, že kuchyň je uzavřená a dokonale izolovaná.

9. Rozhodněte, jestli entropie (a) ideální chladničky, (b) reálné chladničky a (c) 100% chladničky (kterou samozřejmě nelze zkonstruovat) během jednoho cyklu vzroste, klesne, či zůstane stejná.

10. Nádoba obsahuje 100 atomů v konfiguraci, kdy je v obou jejích polovinách po 50 atomech. Předpokládejte, že použitím superpočítače můžeme počítat jednotlivé mikrostavy této konfigurace rychlostí miliarda mikrostavů za sekundu. Bez písemného výpočtu odhadněte, kolik času by k tomu bylo potřeba: den, rok, nebo více než rok?

11. Obr. 21.20 ukazuje polohu molekul a a b v nádobě v okamžiku $t = 0$ (podobně jako na obr. 21.16). Molekuly mají stejnou hmotnost m i velikost rychlosti v, srážky mezi nimi i se stěnami nádoby jsou pružné. S jakou pravděpodobností bude na obrázku v čase (a) $t = 0,10d/v$, (b) $t = 10d/v$ molekula a v levé a molekula b v pravé polovině nádoby? (c) S jakou pravděpodobností bude někdy později v pravé půlce nádoby kinetická energie rovna právě poloviční hodnotě celkové kinetické energie?



Obr. 21.20 Otázka 11

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 21.2 Entropie

1C. Vzorek 2,50 mol ideálního plynu se izotermicky a vratně rozpíná při teplotě 360 K. Jeho objem se zvýší na dvojnásobek počátečního objemu. O jakou hodnotu vzroste entropie?

2C. Kolik tepla je potřeba pro vratné izotermické rozepnutí ideálního plynu při 132 °C, jestliže jeho entropie vzroste o 46,0 J/K?

3C. Čtyři moly ideálního plynu změní svůj objem z V na $2V$. Pokud je expanze plynu izotermická při teplotě 400 K, určete (a) práci vykonanou plynem, (b) změnu jeho entropie. (c) Jestliže je expanze plynu vratná a adiabatická, určete také změnu jeho entropie.

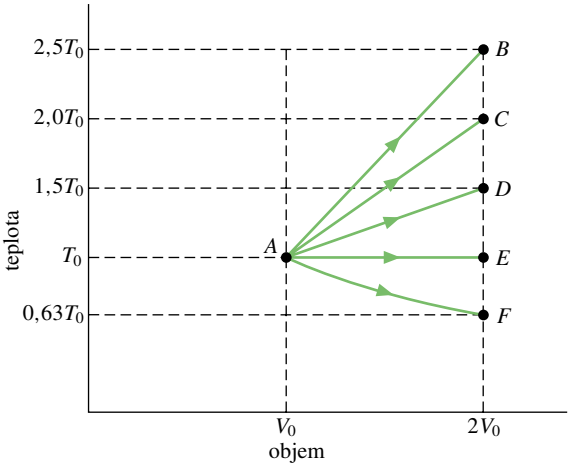
4C. Ideální plyn se vratně izotermicky rozpíná při 77,0 °C z objemu 1,30 l na 3,40 l. Jeho entropie přitom vzroste o 22,0 J/K. S kolika moly tohoto plynu probíhá pokus?

5C. Určete pohlcené teplo a změnu entropie měděného bloku, jehož teplota se zvýší vratným dějem z 25 °C na 100 °C. Hmotnost bloku je 2,00 kg. Měrná tepelná kapacita mědi je 386 $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$.

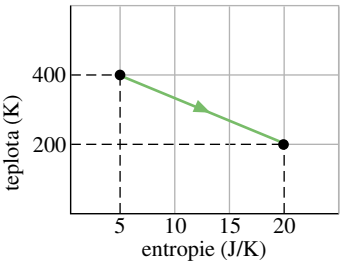
6C. Ideální jednoatomový plyn má teplotu T_0 a objem V_0. V každém z pěti dějů znázorněných na obr. 21.21 zvýší svůj objem na $2V_0$. Určete, který z dějů je (a) izotermický, (b) izobarický a (c) adiabatický. Své odpovědi zdůvodněte. (d) Určete, v kterém z dějů se sníží entropie plynu.

7C. (a) Jak se změní entropie kostky ledu o hmotnosti 12,0 g, která se úplně rozpustí ve kbelíku s vodou. Voda ve kbelíku má nepatrně vyšší teplotu, než je teplota tání ledu. (b) Jak se změní entropie 5,00 gramů vody v kávové lžičce, když se úplně vypaří při teplotě nepatrně vyšší, než je teplota varu vody?

8Ú. V 2,0 mol jednoatomového ideálního plynu proběhl vratný děj znázorněný na obr. 21.22. (a) Jaké teplo přijal plyn? (b) Jak se změnila jeho vnitřní energie? (c) Jakou práci plyn vykonal?



Obr. 21.21 Cvičení 6



Obr. 21.22 Úloha 8

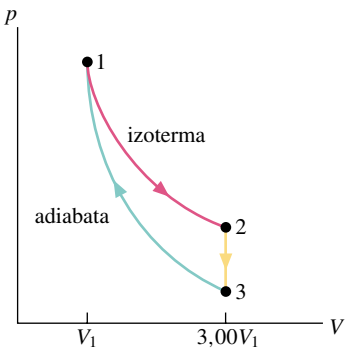
9Ú. 200 g hliníku o teplotě 100 °C ponoříme do 50,0 g vody o teplotě 20 °C, přitom měrná tepelná kapacita hliníku je

$900\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. (a) Jaká bude výsledná teplota vody a hliníku po nastolení rovnováhy? Jak se změní entropie (b) hliníku, (c) vody, (d) soustavy hliník + voda?

10Ú. Na obr. 21.5 je znázorněn nevratný děj. Počáteční teploty dvou stejných bloků L a P jsou 305,5 K a 294,5 K. Pro ustanovení rovnováhy mezi nimi by muselo přejít z jednoho bloku na druhý 215 J tepla. Pak pro vratný děj podle obr. 21.6 vypočítejte změnu entropie (a) bloku L, (b) jeho lázně, (c) bloku P, (d) jeho lázně, (e) systému tvořeného oběma bloky L+P, (f) systému tvořeného oběma bloky L + P a jejich lázněmi.

11Ú. Pomocí zařízení na obr. 21.6 ukažte neplatnost druhého termodynamického zákona, jestliže by se děj na obr. 21.5 stal vratným.

12Ú. Ideální dvouatomový plyn, jehož molekuly rotují, ale neosciluji, vykoná cyklický děj znázorněný v obr. 21.23. Stanovte pro všechny tři děje (a) p_2, p_3, T_3, (b) W, Q, ΔS a ΔU pro jeden mol za předpokladu, že známe p_1, V_1, T_1 a R.



Obr. 21.23 Úloha 12

13Ú. Blok z mědi o hmotnosti 50,0 g má teplotu 400 K. Blok je umístěn v izolující nádobě spolu s kusem olova o hmotnosti 100 g a teplotě 200 K. (a) Jaká bude výsledná teplota systému měděné + olověné těleso? (b) Vypočítejte změnu vnitřní energie systému mezi počátečním stavem a rovnovážných stavem. (c) Jaká je změna entropie tohoto systému? Podívejte se na tab. 19.3.

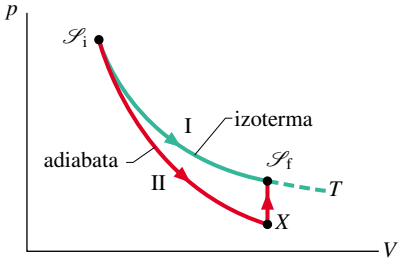
14Ú. Jeden mol jednoatomového ideálního plynu změní svůj počáteční tlak p a počáteční objem V na tlak $2p$ a objem $2V$. Tato změna probíhá dvěma různými ději. (1) Nejprve plyn izotermicky zdvojnásobí objem a pak plyn zvýší svůj tlak izochorickým dějem. (2) Plyn je izotermicky stlačen na dvojnásobek svého počátečního tlaku a potom proběhne izobarická expanze plynu. (a) Znázorněte oba děje v p-V diagramu. Pro každý děj vypočítejte (b) teplo přijaté plynem v každé části děje, (c) práci vykonanou plynem v každé části děje, (d) změnu vnitřní energie plynu a (e) změnu entropie plynu $S_f - S_i$. Předpokládejme, že známe počáteční tlak p a objem V.

15Ú. Kostka ledu o hmotnosti 10 g a teplotě $-10\,^\circ\mathrm{C}$ je umístěna v jezeře, jehož teplota je $15\,^\circ\mathrm{C}$. Vypočítejte změnu entropie systému kostka ledu + jezero po ustanovení teplotní rovnováhy. Měrná tepelná kapacita ledu je $2\,220\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. (*Tip*: Bude mít kostka ledu vliv na teplotu jezera?)

16Ú. Kostku ledu o hmotnosti 8,0 g a teplotě $-10\,^\circ\mathrm{C}$ dáme do termosky, která obsahuje $100\,\mathrm{cm^3}$ vody o teplotě $20\,^\circ\mathrm{C}$. Jak se změní entropie po dosažení rovnovážného stavu soustavy voda + ledová kostka? Měrná tepelná kapacita ledu je $2\,220\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$.

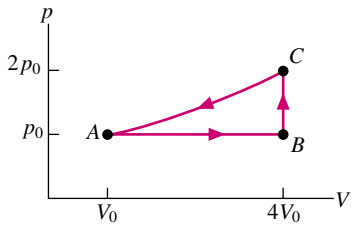
17Ú. Směs 1 773 g vody a 227 g ledu je v rovnovážném stavu při teplotě $0{,}00\,^\circ\mathrm{C}$. Směs je dále vratným procesem převedena do druhého rovnovážného stavu, při kterém je poměr hmotností vody a ledu 1 : 1 při teplotě $0{,}00\,^\circ\mathrm{C}$. (a) Vypočítejte změnu entropie při tomto ději. (Měrné skupenské teplo tání vody je $333\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.) (b) Systém pak vrátíme do původního stavu nevratným dějem (například pomocí Bunsenova hořáku). Vypočítejte změnu entropie při tomto ději. (c) Jsou vaše odpovědi v souladu s druhým termodynamickým zákonem?

18Ú. Válec obsahuje n molů jednoatomového plynu. Jestliže plyn izotermicky expandujeme z počátečního objemu V_i na objem V_f (obr. 21.24), můžeme změnu entropie vypočítat podle vztahu $\Delta S = nR\ln(V_f/V_i)$. Nyní vezměte v úvahu ještě druhou cestu (II) znázorněnou na témže obrázku. (a) Popište, jak provedete vratné děje, probíhající na cestě II. (b) Dokažte, že teplota plynu ve stavu X je $T_X = T_i(V_i/V_f)^{2/3}$. (c) Vypočítejte odevzdané teplo Q_I při cestě I a teplo Q_{II} při cestě II. Jsou si tato tepla rovna? (d) Jaká je změna entropie při cestě II? Jsou si změny entropie (I, II) rovny? (e) Vypočítejte T_X, Q_I, Q_{II} a ΔS pro $n = 1$, $T_i = 500\,\mathrm{K}$ a $V_f/V_i = 2$.



Obr. 21.24 Úloha 18

19Ú. Jeden mol ideálního plynu vykonává cyklický děj znázorněný na obr. 21.25. (a) Plyn jde ze stavu A do stavu C přes stav B. Vypočítejte práci, kterou plyn při tomto ději vykoná. (b) Jaká je změna vnitřní energie a entropie mezi stavy B, C a (c) po celém cyklu? Předpokládejme, že ve stavu A známe tlak p_0, objem V_0 a teplotu T_0.



Obr. 21.25 Úloha 19

20Ú. Jeden mol ideálního jednoatomového plynu má počáteční tlak 5,00 kPa a počáteční teplotu 600 K. Plyn se rozepne z počátečního objemu $V_i = 1{,}00\,\mathrm{m}^3$ na objem $V_f = 2{,}00\,\mathrm{m}^3$. Během expanze závisí tlak plynu na jeho objemu podle vztahu $p = 5{,}00\exp((V_i - V_f)/a)$, kde tlak p je uveden v kilopascalech, V_i a V_f jsou v krychlových metrech a $a = 1{,}00\,\mathrm{m}^3$. Jaký je (a) koncový tlak a (b) koncová teplota plynu? (c) Jak velkou práci vykoná plyn během expanze? (d) Jaká je změna entropie plynu během expanze? (*Tip*: Užijte dva jednoduché vratné děje k výpočtu změny entropie.)

ODST. 21.4 Entropie kolem nás: motory

21C. Carnotův motor přijme teplo 52 kJ a vydá 36 kJ tepla během jednoho cyklu. Vypočítejte účinnost a práci stroje, kterou vykoná během jednoho cyklu.

22C. Teplota chladiče Carnotova motoru je 17 °C. Jeho účinnost je 40 %. O jakou hodnotu musí vzrůst teplota ohřívače, aby účinnost motoru vzrostla na 50 %?

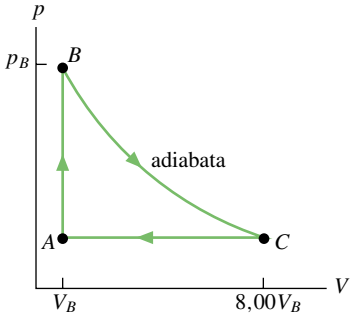
23C. Ideální motor vykonává Carnotův cyklus mezi teplotami 235 °C a 115 °C. Během jednoho cyklu přijme od ohřívače $6{,}30\cdot10^4$ J tepla. (a) Jaká je účinnost motoru? (b) Jakou práci je motor schopen vykonat během jednoho cyklu?

24C. Hypotetický jaderný fúzní reaktor má palivo deuterium o teplotě $7\cdot10^8$ K. Jestliže by tento plyn mohl být použit pro ideální tepelný stroj o $T_S = 100\,^\circ\mathrm{C}$, jaká by byla účinnost tohoto stroje?

25C. Účinnost Carnotova motoru je 22,0 %. Pracuje s ohřívačem a chladičem, jejichž rozdíl teplot je 75,0 C°. Jaké jsou teploty chladiče a ohřívače?

26Ú. Výkon Carnotova motoru je 500 W. Motor pracuje mezi ohřívačem o teplotě 100 °C a chladičem o teplotě 60,0 °C. (a) Kolik tepla za sekundu je přijato motorem? (b) Kolik tepla vystoupí z motoru za sekundu? Hodnoty tepel uveďte v kilojoulech.

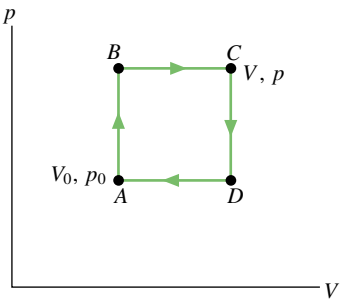
27Ú. Jeden mol jednoatomového ideálního plynu proběhne vratný cyklus znázorněný na obr. 21.26. Děj BC je adiabatická expanze s $p_B = 10{,}0$ atm a $V_B = 1{,}00\cdot10^{-3}\,\mathrm{m}^3$. Určete (a) teplo přijaté plynem, (b) teplo odevzdané plynem, (c) práci vykonanou plynem a (d) účinnost jednoho cyklu.



Obr. 21.26 Úloha 27

28Ú. Ukažte, že plocha smyčky v T–S diagramu (tj. v proměnných T, S) Carnotova cyklu na obr. 21.9 má obsah rovný teplu přenesenému pracovní látkou stroje.

29Ú. Jeden mol ideálního plynu vykoná cyklus znázorněný na obr. 21.27. Předpokládejme, že $p = 2p_0$, $V = 2V_0$, $p_0 = 1{,}01\cdot10^5$ Pa, $V_0 = 0{,}022\,5\,\mathrm{m}^3$. Vypočítejte (a) práci vykonanou během jednoho cyklu, (b) teplo přijaté během trasy ABC, (c) účinnost jednoho cyklu. (d) Jaká je účinnost ideálního motoru, který pracuje mezi nejvyšší a nejnižší teplotou během cyklu? Jak tuto hodnotu srovnáte s účinností vypočítanou v (c)?

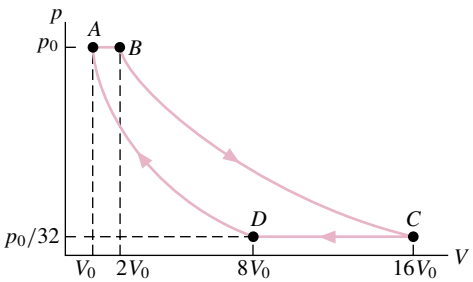


Obr. 21.27 Úloha 29

30Ú. V prvním stupni dvoustupňového ideálního motoru je přijato teplo Q_1 při teplotě T_1. Vykonaná práce je W_1 a teplo Q_2 je předáno chladiči o teplotě T_2. Druhý stupeň motoru přijme teplo Q_2, vykoná práci W_2 a předá teplo Q_3 chladiči o ještě nižší teplotě T_3. Dokažte, že účinnost takového stroje se vypočítá podle vzorce $(T_1 - T_3)/T_1$.

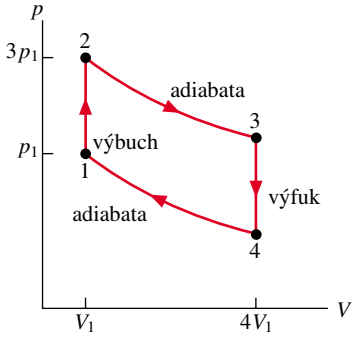
31Ú. Předpokládejme, že v zemské kůře poblíž zeměpisného pólu byla vyhloubena hluboká šachta. V okolí vrtu je teplota −40 °C a na dně šachty je teplota 800 °C. (a) Jaká je teoretická účinnost motoru pracujícího mezi těmito teplotami? (b) Jestliže by se všechno teplo předané chladiči použilo k tání ledu o teplotě −40 °C, jaké množství tekuté vody o teplotě 0 °C by bylo vyrobeno pomocí stroje o výkonu 100 MW? Měrná tepelná kapacita ledu je $2\,220\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$; měrné skupenské teplo tání ledu je $333\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$. (Poznamenejme, že motor může v tomto případě pracovat pouze mezi teplotami 0 °C a 800 °C. Energie získaná při teplotě −40 °C nemůže být použita k růstu teploty ničeho nad −40 °C.)

32Ú. Jeden mol ideálního plynu je pracovní látkou pro motor, který pracuje na cyklu znázorněném na obr. 21.28. Křivky BC a DA popisují vratné adiabaty. (a) Je plyn jednoatomový, dvouatomový, nebo víceatomový? (b) Jaká je účinnost motoru?



Obr. 21.28 Úloha 32

33Ú. Činnost vnitřního benzinového spalovacího motoru je znázorněna na obr. 21.29. Předpokládejme ideální plyn jako pracovní látku a použijme kompresi 4 : 1 ($V_4 = 4V_1$). Dále předpokládejme, že $p_2 = 3p_1$. (a) Určete tlak a teplotu v každém bodě p-V diagramu pomocí p_1 a T_1 a molární skupenské teplo plynu. (b) Jaká je účinnost jednoho cyklu?



Obr. 21.29 Úloha 33

ODST. 21.5 Entropie kolem nás: chladničky

34C. Ideální chladničce dodáme práci 200 J, aby odebrala teplo 600 J z ochlazovaného prostoru. (a) Jaký je její chladicí faktor? (b) Kolik tepla během cyklu je předáno do kuchyně?

35C. Carnotova klimatizace odebere z pokoje o teplotě 70 °F teplo a předá ho ven, kde je teplota 96 °F. Kolik joulů tepla je odebráno z místnosti na každý joule potřebný k fungování klimatizace?

36C. Tepelným čerpadlem odebíráme teplo z venku, kde je teplota −5,0 °C a předáváme ho do místnosti o teplotě 17 °C. Jestliže je čerpadlo ideální, kolik joulů tepla je předáno do místnosti na každý joule elektrické energie potřebné k provozu čerpadla?

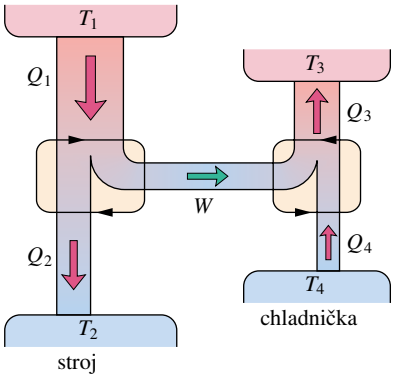
37C. Ideální tepelná pumpa slouží k vytápění budovy. Venku je teplota −5,0 °C a teplotu uvnitř budovy udržujeme na 22 °C. Topný faktor pumpy je 3,8. Tepelná pumpa předává 7,54 MJ tepla do budovy každou hodinu. Jakou práci musíme dodávat pumpě, aby fungovala?

38C. Ohřívač ideální chladničky má teplotu 27 °C. Kolik práce musíme dodat chladničce pro převedení tepla 1,0 J z chladiče teploty (a) 7 °C, (b) −73 °C, (c) −173 °C, (d) −223 °C?

39Ú. Klimatizace pracuje mezi teplotami 93 °F a 70 °F. Chladicí kapacita je 4 000 Btu/h. Její chladicí faktor je 27 % z chladicího faktoru ideální chladničky pracující mezi stejnými teplotami. Jaký výkon má motor klimatizace?

40Ú. Motor chladničky má výkon 200 W. Vypočítejte její ideální chladicí faktor, jestliže teplota uvnitř chlazeného prostoru je 270 K a venku je teplota 300 K. Jaké je maximální množství tepla, které může být odebráno z chlazeného prostoru za 10,0 min?

41Ú. Carnotův motor pracuje mezi teplotami T_1 a T_2. Pohání ideální chladničku, která pracuje mezi teplotami T_3 a T_4 (obr. 21.30). Vypočtěte poměr Q_3/Q_1 pomocí T_1, T_2, T_3 a T_4.



Obr. 21.30 Úloha 41

ODST. 21.8 Statistický pohled na entropii

42C. Vytvořte tabulku podle tab. 21.1 pro osm molekul.

43Ú. Dokažte, že pro N molekul v krabici je počet možných mikrostavů 2^N. Mikrostav je určen podle toho, zda daná molekula je v levé, nebo v pravé části krabice. Proveďte kontrolu pro situaci v tab. 21.1.

44Ú. Nádoba obsahuje N molekul plynu, rovnoměrně rozdělených do jejích dvou polovin. Pro $N = 50$: (a) Jaká je násobnost tohoto středního uspořádání? (b) Jaký je celkový počet mikrostavů systému? (*Tip*: Viz cvič. 45.) (c) Kolik procent času stráví systém ve středním uspořádání? (d) Opakujte (a) až (c) pro $N = 100$. (e) Opakujte (a) až (c) pro $N = 200$. (f) Když N zvětšujeme, zjistíme, že systém stráví *méně* času (a nikoli více) ve svém středním uspořádání. Vysvětlete, proč tomu tak je.

45Ú. Nádoba obsahuje N molekul plynu. Rozdělte si nádobu na tři shodné části. (a) Napište vzorec analogický vzorci (21.18) pro násobnost jakékoli konfigurace. (b) Porovnejte dvě uspořádání: konfiguraci A se stejným počtem molekul ve všech třech částech nádoby a konfigurací B se stejným počtem molekul v obou polovinách nádoby. Jaký je poměr W_A/W_B násobností konfigurací A a B? (c) Vypočítejte W_A/W_B pro $N = 100$. (100 není dělitelné třemi, dejte tedy 34 molekul do jedné třetiny nádoby a 33 molekul do každé z obou zbývajících třetin nádoby pro uspořádání A.)

22
Elektrický náboj



Zavřete se s přítelem do temné komory; asi po 15 minutách si vaše oči přivyknou na tmu. Bude-li pak váš přítel kousat kostku cukru, bude kostka jiskřit. U některých tvrdých bonbonů uvidíte při každém kousnutí vystupovat z jeho úst slabé záblesky modrého světla. (Můžete také drtit kostku kleštěmi, jako je to na fotografii.) Co způsobuje tento světelný úkaz, obvykle nazývaný triboluminiscence?

22.1 ELEKTROMAGNETISMUS

Již staří Řekové věděli, že když budou třít kus jantaru, bude přitahovat kousky slámy. Tato dávná pozorování zanechala své stopy i v dnešní elektronické době — slovo **elektron** znamená řecky jantar. Řekové také pozorovali, že některé přírodní „kameny“, např. minerál magnetovec, přitahují železo.

Z těchto skromných počátků se vědy o elektřině a magnetismu rozvíjely po staletí odděleně — v podstatě až do roku 1820, kdy Hans Christian Oersted mezi nimi našel spojení: zjistil, že elektrický proud protékající vodičem vychyluje magnetickou střelku kompasu. Je zajímavé, že Oersted učinil tento objev, když si připravoval demonstrace k přednášce pro své studenty fyziky.

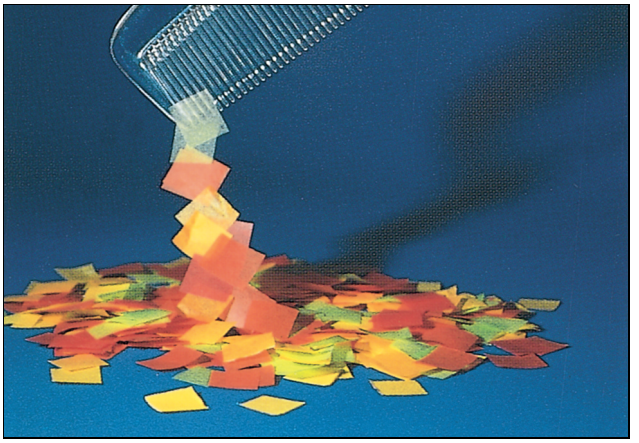
Novou vědu, **elektromagnetismus** (spojující elektrické a magnetické jevy), rozvíjeli dále vědci v mnoha zemích. Jedním z nejvýznamnějších byl Michael Faraday, velice nadaný experimentátor s velkou fyzikální intuicí a představivostí. Toto jeho nadání zejména vyniká, uvážíme-li, že jeho sebrané laboratorní deníky neobsahují jedinou rovnici. V polovině 19. století James Clerk Maxwell vyjádřil Faradayovy poznatky v matematické podobě, připojil řadu svých vlastních nových myšlenek a položil tak teoretické základy elektromagnetismu.

Tab. 32.1 uvádí základní zákony elektromagnetismu, nyní nazývané Maxwellovy rovnice. Přijdeme k nim postupně v následujících kapitolách, ale možná se na ně chcete podívat už teď, abyste viděli, jaký je náš cíl.

22.2 ELEKTRICKÝ NÁBOJ

Projdete-li se za suchého dne po koberci a pak přiblížíte prst ke kovové klice u dveří, přeskočí jiskra. Televizní reklamy nás upozorňují na problém „statické přilnavosti“ oblečení (obr. 22.1). A blesk, abychom uvedli i něco velkolepého, zná každý z nás. Každý z těchto jevů je přitom projevem jen nepatrné části z obrovského množství **elektrického náboje**, jenž je obsažen v předmětech, které nás obklopují, i v našem vlastním těle. **Elektrický náboj** neboli stručně jen **náboj** je atributem (neodmyslitelnou vlastností) základních částic, z nichž se skládají objekty kolem nás; je charakteristickou vlastností, která je s těmito částicemi spojena, ať se nacházejí v jakékoli situaci.

Obrovské množství náboje si v běžných předmětech obvykle neuvědomujeme, protože předměty obsahují stejné množství *náboje* dvojího druhu: *kladného* a *záporného*. V takovém případě jsou předměty jako celek *elektricky neutrální* (předmět není nabit); to znamená, že jeho výsledný náboj je roven nule. Pokud nejsou oba typy náboje ve stejném množství, projeví se jejich rozdíl jako volný



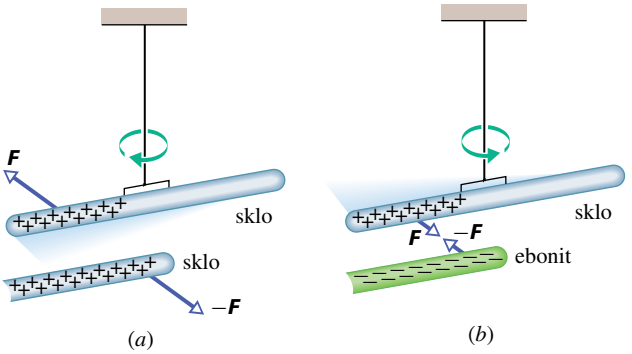
Obr. 22.1 Statická přilnavost — elektrický jev zvláště výrazný v suchých dnech — způsobuje, že se kousky papíru slepí dohromady a přilepí se k plastikovému hřebenu, že se vám šaty lepí na tělo atd.

náboj, který může interagovat s jinými předměty, a tím získáme důkaz o jeho existenci. V tom případě říkáme, že předmět je *nabitý*. Rozdíl v množství náboje je však vždy velmi malý ve srovnání s obrovským celkovým množstvím kladného a záporného náboje obsaženého v předmětu.

Nabité předměty spolu interagují navzájem silovým působením. Abychom to ukázali, nabijeme nejprve skleněnou tyč třením jednoho jejího konce hedvábím. Při velmi těsném dotyku mezi tyčí a hedvábím se přenáší malé množství náboje z jednoho předmětu na druhý a tím se trochu naruší elektrická neutralita každého z nich. (Tyč hedvábím *třeme* jen proto, abychom dosáhli těsnějšího kontaktu a tím také většího množství přeneseného náboje. To však stále zůstává oproti celkovému náboji předmětů nepatrné.)

Zavěsme nyní nabitou tyč na vlákno, abychom ji *elektricky izolovali* od okolí; její náboj se pak nemůže měnit. Přiblížíme-li k ní druhou skleněnou tyč podobně nabitou (obr. 22.2a), obě tyče se navzájem *odpuzují*. Na každou z tyčí tedy působí síla směřující od druhé tyče. Když však třeme ebonitovou tyč kožešinou a přiblížíme ji k zavěšené skleněné tyči (obr. 22.2b), budou se obě tyče navzájem *přitahovat*. Na každou tyč tedy nyní působí síla směřující ke druhé tyči.

Tento jev můžeme vysvětlit pomocí kladného a záporného náboje. Třeme-li skleněnou tyč hedvábím, ztrácí sklo část svého záporného náboje a získá tak malý přebytek náboje kladného (reprezentovaného znaménkem plus na obr. 22.2a). Třeme-li ebonitovou tyč kožešinou, získá naopak tyč malý přebytek záporného náboje (reprezentovaného znaménkem minus na obr. 22.2b). Z našich dvou pokusů plyne:



Obr. 22.2 (a) Dvě tyče nabité souhlasnými náboji se odpuzují. (b) Dvě tyče nabité opačnými náboji se přitahují.

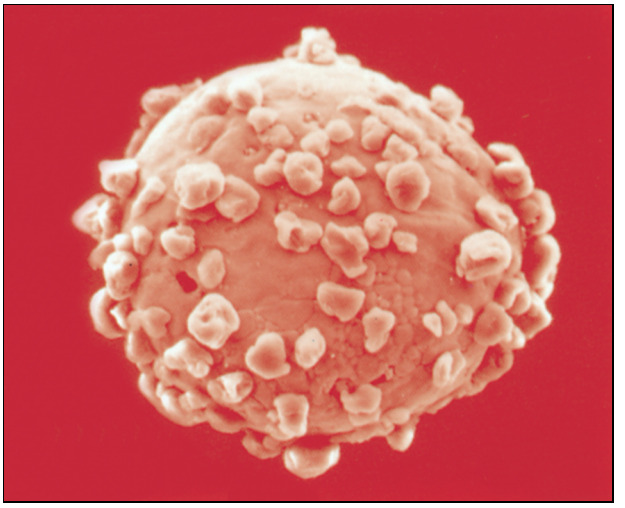
Elektrické náboje téhož znaménka se odpuzují, náboje opačného znaménka se přitahují.

V čl. 22.4 vyjádříme tuto skutečnost i kvantitativně jako Coulombův zákon pro **elektrostatickou sílu** (nebo stručněji **elektrickou sílu**) mezi náboji.* Termín elektrostatická se používá pro zdůraznění toho, že náboje jsou vůči sobě v klidu nebo se navzájem pohybují jen zanedbatelnou rychlostí.

Přívlastky „kladný“ a „záporný“ a jejich přiřazení elektrickým nábojům „hedvábí“ a „kožešiny“ zvolil Benjamin Franklin, a to zcela libovolně v tom smyslu, že mohl klidně zaměnit označení nebo použít jinou dvojici protikladů pro rozlišení dvou druhů náboje. (Franklin byl světově uznávaný vědec. Dokonce se říkalo, že jeho diplomatický triumf ve Francii během americké války za nezávislost byl umožněn právě díky tomu, že byl jako vědec tak vysoce oceňován.)

Vzájemné přitahování a odpuzování nabitých těles má mnoho průmyslových aplikací, např. elektrostatické nanášení barev a naprašování, zachycování popílku v komínech, bezdotykový inkoustový tisk a fotokopírování. Obr. 22.3 ukazuje nepatrnou nosnou kuličku v xeroxovém kopírovacím stroji, pokrytou částicemi černého prášku nazývaného *toner*, které jsou k ní přitahovány elektrostatickými silami. Při kopírování jsou záporně nabité částice toneru přetaženy z nosné kuličky na ta místa rotujícího válce, kde byl vytvořen kladně nabitý obraz kopírovaného dokumentu. Odtud jsou poté přitáhnuty na nabitý list papíru a na něj nakonec tepelně nataveny; tím se vytvoří trvanlivá kopie.

* Elektrický náboj je vždy vázán na látkovou částici, často však kvůli stručnosti hovoříme jen o nábojích, o působení mezi náboji atp.



Obr. 22.3 Nosná kulička v xeroxu. Je pokryta částicemi toneru, které k ní přilnou díky elektrostatickému přitahování. Průměr kuličky je asi 0,3 mm.

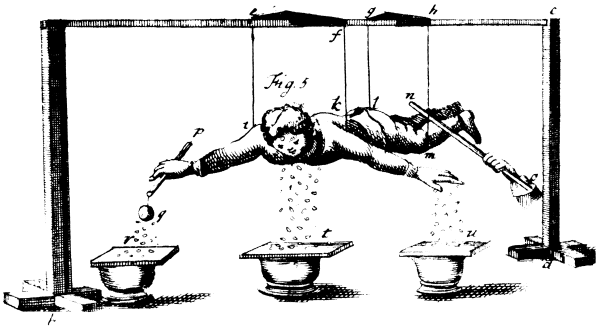
22.3 VODIČE A NEVODIČE

V některých látkách (např. v kovech, v pitné vodě, v lidském těle) se může část jejich náboje pohybovat značně volně. Takové látky nazýváme **vodiče.** V jiných látkách (např. ve skle, v destilované vodě, v ebonitu a vůbec ve většině umělých hmot) se nemůže volně pohybovat prakticky žádný náboj. Tyto látky nazýváme **nevodiče** (též **izolátory, dielektrika**). To, co se jeví při mikroskopickém popisu jako *uspořádaný pohyb náboje* látkou, je právě to, čemu říkáme v makroskopickém popisu **elektrický proud**.

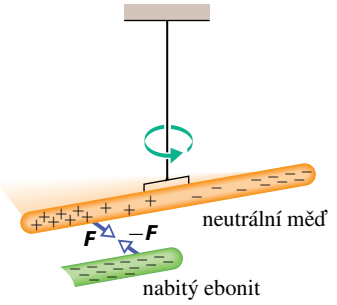
Třete-li měděnou tyč vlnou a přitom ji držíte v ruce, nebudete schopni ji nabít, protože vy i tyč jste vodiče. Tření vytvoří nerovnováhu náboje na tyči, ale přebytečný náboj je okamžitě odveden z tyče vaším tělem do podlahy (která je spojena se zemským povrchem) a na tyči žádný přebytečný náboj nezůstane.

Uzemnit předmět znamená vytvořit vodivou cestu mezi ním a zemským povrchem. *Vybít* předmět znamená jej zneutralizovat, tj. vyrovnat jakoukoli cestou množství kladného a záporného náboje, který na něm je. (Obr. 22.4 ukazuje poněkud bizarní způsob vybíjení.) Když tyč držíme nikoli přímo v ruce, ale za držadlo z izolátoru, přerušíme vodivou cestu k zemi a tyč pak můžeme třením nabít.

Vlastnosti vodičů a nevodičů jsou podmíněny strukturou a elektrickou podstatou *atomů*. Atomy se skládají z kladně nabitých *protonů*, záporně nabitých *elektronů* a elektricky neutrálních *neutronů*. Protony a neutrony jsou těsně vázány v *jádře* atomů; prozatím nám bude stačit představa, že elektrony obíhají na jistých dráhách (orbitách) kolem jádra.



Obr. 22.4 Toto není akrobatický kousek, ale seriozní experiment, provedený v roce 1774 jako důkaz, že lidské tělo vede elektrický proud. Historický lept ukazuje nevodivými provazy přivázaného člověka, který je nabíjen dotykem nabité tyče (tyč se pravděpodobně dotýkala přímo těla, nikoli kalhot). Když člověk přiblížil obličej, levou ruku nebo tyč s vodivou koulí v pravé ruce ke kovovým deskám, elektrické jiskry přeskakující vzduchem ho vybily.



Obr. 22.5 Neutrální měděná tyč je elektricky izolována od okolí zavěšením na nevodivé vlákno. Každý z obou konců tyče může být přitahován nabitým ebonitem. Vodivostní elektrony z blízké části měděné tyče jsou záporným nábojem ebonitu odpuzovány k jejímu vzdálenějšímu konci a tím v uprázdněné části převáží kladný náboj jader. Záporný náboj ebonitu pak přitahuje kladný náboj na bližším konci měděné tyče a odpuzuje záporný náboj na vzdálenějším; proto se měděná tyč přitáčí k ebonitu.

Náboje elektronu a protonu mají stejnou velikost, ale opačné znaménko, proto elektricky neutrální atom musí obsahovat stejný počet elektronů a protonů. Elektrony se drží poblíž jádra, protože mají elektrický náboj opačného znaménka než protony v jádře a jsou tedy k jádru přitahovány.

Když se seskupí atomy vodiče (např. mědi), aby vytvořily tuhé těleso, pak některé z jejich vnějších (tedy nejméně přitahovaných) elektronů už nejsou vázány k jednotlivým atomům, uvolní se od nich a pohybují se víceméně volně uvnitř celého tělesa, zanechávajíce na místě kladně nabité zbytky atomů — *kladné ionty*. Tyto pohyblivé elektrony se nazývají *vodivostní*. V kovech je jich velmi mnoho, zatímco v nevodičích je vodivostních elektronů velmi málo.

Pokus na obr. 22.5 demonstruje pohyblivost náboje ve vodiči. Záporně nabitá ebonitová tyč bude přitahovat libovolný konec izolované neutrální měděné tyče. Vodivostní elektrony v bližším konci měděné tyče jsou odpuzovány záporným nábojem ebonitové tyče. Pohybují se ke vzdálenějšímu konci měděné tyče a způsobují tak v jejím bližším konci nedostatek elektronů a tím převažující kladný náboj. Tento kladný náboj je přitahován k zápornému náboji ebonitové tyče. Ačkoli měděná tyč jako celek zůstává neutrální, říkáme, že má *indukovaný náboj*; část jejích kladných a záporných nábojů se navzájem oddělila v důsledku přiblížení jiného náboje. Jakmile se tyto náboje od sebe oddálí, budou i od okolních předmětů různě vzdáleny a budou na ně proto působit různě velkými silami; tento rozdíl již můžeme zjistit.

Podobně, přiblížíme-li kladně nabitou skleněnou tyč k jednomu konci neutrální měděné tyče, vodivostní elektrony v měděné tyči jsou k tomuto konci přitahovány. Tento konec se nabije záporně a opačný konec kladně, tj. v měděné tyči se opět vytvoří indukovaný náboj. Ačkoli měděná tyč zůstává jako celek neutrální, přitahuje se k nabité skleněné tyči.

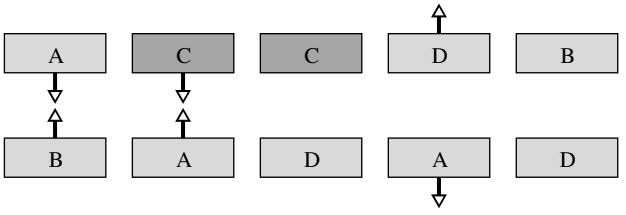
Poznamenejme, že v kovech se mohou pohybovat pouze vodivostní elektrony*; kladné ionty tvořící mřížku kovu zůstávají na místě. Předměty se tedy nabíjejí kladně pouze díky *odvedení části záporných nábojů*.

Polovodiče (např. křemík a germanium) jsou látky, které mají vlastnosti mezi vodiči a izolátory. Revoluce mikroelektroniky, která tolik změnila naše životy, byla možná jen díky přístrojům zkonstruovaným z polovodičových materiálů. V kap. 42 se budeme polovodičům věnovat podrobněji.

Běžné materiály (i ty nejlepší vodiče jako stříbro nebo měď) vždy brání toku náboje, který jimi prochází; mají vždy nenulový odpor. Existují však **supravodiče** nazývané tak proto, že nekladou pohybu elektrického náboje vůbec *žádný* odpor. Pokud vytvoříme v supravodivém prstenci proud, bude jím procházet beze změny stále, aniž by jej bylo potřeba udržovat baterií nebo jiným zdrojem energie.

* V nekovových vodičích (jako jsou roztoky a taveniny solí, ionizované plyny, plazma) se pohybují celé atomy či molekuly, obohacené o elektrony či ochuzené o ně, tedy fakticky se pohybují částice nabité kladně i záporně.

KONTROLA 1: Obrázek ukazuje pět dvojic desek: A, B, D jsou nabité ebonitové desky a C je elektricky neutrální měděná deska. Elektrostatické síly působící mezi nimi jsou naznačeny pro tři dvojice. Určete, zda se desky ve zbývajících dvojicích budou přitahovat, nebo odpuzovat.

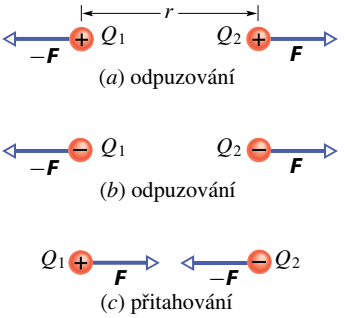


22.4 COULOMBŮV ZÁKON

Uvažujme dvě nabitá tělíska zanedbatelných rozměrů — dvě nabité částice (nazývané **bodové náboje**). Nechť jsou jejich náboje Q_1 a Q_2 a jejich vzdálenost r. **Elektrostatická síla** působící mezi nimi, přitažlivá nebo odpudivá, má velikost

$$F = k\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \quad \text{(Coulombův zákon)}, \qquad (22.1)$$

kde k je konstanta. Každá částice působí silou této velikosti na druhou částici; tyto dvě síly jsou silami akce a reakce. Jestliže se částice navzájem *odpuzují*, směřuje síla působící na každou částici směrem *od té druhé* (obr. 22.6a, b). Jestliže se navzájem *přitahují*, působí na každou částici síla směřující *ke druhé* částici (obr. 22.6c).



Obr. 22.6 Dvě nabité částice ve vzdálenosti r se navzájem odpuzují, jestliže jejich náboje jsou (a) oba kladné nebo (b) oba záporné. (c) Přitahují se, mají-li náboje opačného znaménka. V každém z těchto případů je síla působící na jednu částici stejně velká jako síla působící na druhou částici, ale směřuje opačným směrem.

Rov. (22.1) se nazývá **Coulombův zákon** podle francouzského fyzika Charlese Augustina Coulomba, který jej v roce 1785 formuloval na základě svých měření. Všimněte si, že má stejný tvar jako Newtonův gravitační zákon (14.1) pro přitažlivou sílu mezi dvěma částicemi s hmotnostmi m_1 a m_2, jejichž vzdálenost je r:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (22.2)$$

kde G je gravitační konstanta. Konstantu k v rov. (22.1) bychom mohli v analogii s gravitační konstantou G v rovnici (22.2) nazvat „elektrostatická konstanta“. Obě rovnice vyjadřují „zákon převrácených čtverců“, v němž síla klesá se čtvercem vzdálenosti mezi interagujícími částicemi. Oba zákony se liší tím, že gravitační síly jsou vždy přitažlivé, zatímco elektrostatické síly mohou být jak přitažlivé, tak odpudivé podle toho, jaká jsou znaménka obou nábojů. Existuje totiž jen jeden druh hmotnosti (žádný známý objekt nemá zápornou hmotnost), ale jsou dva druhy náboje (proto jsou v rov. (22.1) potřebné absolutní hodnoty, zatímco v rov. (22.2) nikoli).

Coulombův zákon byl doposud potvrzen všemi pokusy, a to s vynikající přesností. Platí dokonce i uvnitř atomu: popisuje správně sílu mezi kladně nabitým jádrem a každým ze záporně nabitých elektronů, ačkoli klasická Newtonova mechanika v této oblasti selhává a musí být nahrazena kvantovou fyzikou. Tento jednoduchý zákon také správně popisuje síly, kterými se navzájem vážou atomy při vytváření molekul, a rovněž síly, kterými jsou vzájemně vázány atomy a molekuly v pevných látkách a kapalinách.

Elektrický náboj je jednou ze základních fyzikálních veličin. Z praktických důvodů (vzhledem k možnostem měření) však jednotka náboje v soustavě SI není jednotkou základní, ale odvozenou, a to z jednotky elektrického proudu — ampéru (A). Jednotkou náboje v soustavě SI je **coulomb** (C): 1 coulomb je množství náboje, které projde průřezem vodiče za 1 sekundu, protéká-li jím proud 1 ampéru. V čl. 30.2 popíšeme, jak je ampér definován experimentálně. Obecně můžeme psát

$$\mathrm{d}Q = I\,\mathrm{d}t, \qquad (22.3)$$

kde $\mathrm{d}Q$ (v coulombech) je náboj přenesený proudem I (v ampérech) za časový interval $\mathrm{d}t$ (v sekundách).

Coulombův zákon zapisujeme v SI ve tvaru

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \quad \text{(Coulombův zákon)}. \qquad (22.4)$$

Konstanta v rov. (22.1) má hodnotu

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \doteq 8{,}99\cdot 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}. \qquad (22.5)$$

Veličina ε_0, nazývaná **permitivita vakua** nebo též **elektrická konstanta**, vystupuje někdy v rovnicích samostatně. Její hodnota je

$$\varepsilon_0 \doteq 8{,}85{\cdot}10^{-12}\,\mathrm{C^2{\cdot}N^{-1}{\cdot}m^{-2}}. \qquad (22.6)$$

(Jak uvidíme v čl. 34.2 v rov. (34.3), je číselná hodnota $\{\varepsilon_0\}$ spojena s číselnou hodnotou rychlosti $\{c\}$ světla ve vakuu vztahem $\{\varepsilon_0\} = 1/(4\pi{\cdot}10^{-7}{\cdot}\{c\}^2)$.)

Další paralelou mezi gravitační a elektrostatickou silou je platnost **principu superpozice** (čl. 14.3). Máme-li n nabitých částic, je síla působící na libovolnou z nich (označme ji částice 1) dána vektorovým součtem

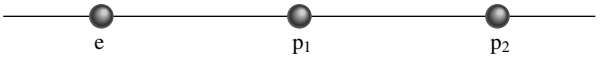
$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{14} + \ldots + \boldsymbol{F}_{1n}, \qquad (22.7)$$

kde např. $\boldsymbol{F}_{14}$ je síla působící na částici 1 v důsledku existence částice 4. Stejný vztah platí pro gravitační sílu (čl. 14.3).

Rovněž oba slupkové teorémy, které nám byly tak užitečné při studiu gravitace, mají svou analogii v elektrostatice (a zdůvodníme je v čl. 24.9):

1. Kulová slupka nabitá rovnoměrně rozloženým nábojem přitahuje nebo odpuzuje nabité částice stejně, jako kdyby veškerý náboj slupky byl soustředěn v jejím středu.
2. Kulová slupka nabitá rovnoměrně rozloženým nábojem nepůsobí žádnou elektrostatickou silou na nabité částice umístěné uvnitř (v dutině) slupky.

KONTROLA 2: Obrázek zobrazuje dva protony (p_1, p_2) a jeden elektron (e) ležící na přímce. Jaký je směr (a) elektrostatické síly, kterou působí e na p_1, (b) elektrostatické síly, kterou působí p_2 na p_1, (c) výsledné elektrostatické síly, která působí na p_1?



PŘÍKLAD 22.1

Na obr. 22.7a jsou dvě částice v klidu: první s nábojem $Q_1 = 8Q$ ($Q > 0$) leží v počátku osy x a druhá s nábojem $Q_2 = -2Q$ ve vzdálenosti $x = d$. Do kterého bodu musíme umístit proton (jinam než do nekonečna) tak, aby byl v rovnováze (tj., aby výslednice sil, které na něj působí, byla nulová)? Je tato rovnováha stabilní, nebo nestabilní?

ŘEŠENÍ: Je-li $\boldsymbol{F}_1$ síla, kterou na proton působí náboj Q_1, a $\boldsymbol{F}_2$ síla, kterou působí na proton náboj Q_2, pak v hledaném bodě musí platit $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}$, tj.

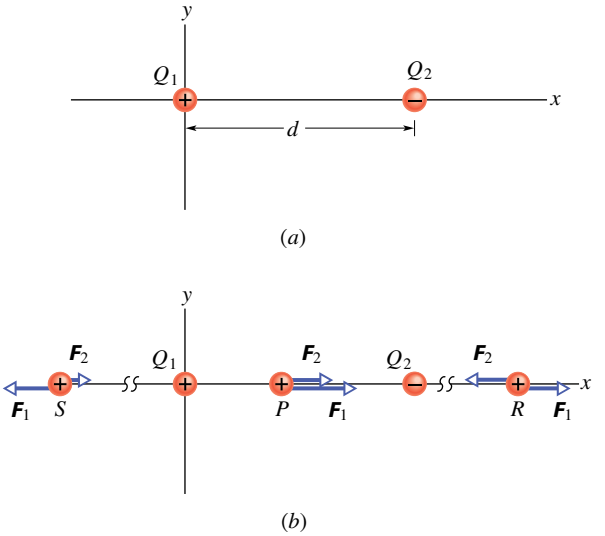
$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2. \qquad (22.8)$$

Síly působící na proton v hledaném bodě musí mít tedy stejnou velikost,

$$F_1 = F_2, \qquad (22.9)$$

stejný směr a opačnou orientaci.

Proton má kladný náboj, má tedy stejné znaménko jako Q_1, a síla $\boldsymbol{F}_1$ působící na proton musí tedy směřovat od náboje Q_1. Proton a částice s nábojem Q_2 mají opačná znaménka, takže síla $\boldsymbol{F}_2$ působící na proton směřuje k náboji Q_2. Síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ mohou mít opačné směry jen tehdy, leží-li proton na ose x.



Obr. 22.7 Příklad 22.1. (a) Dvě částice s náboji Q_1 a Q_2 jsou v klidu na ose x ve vzdálenosti d. (b) Tři možné polohy S, P, R protonu. V každém bodě působí na proton elektrostatická síla $\boldsymbol{F}_1$ buzená nábojem Q_1 a elektrostatická síla $\boldsymbol{F}_2$ buzená nábojem Q_2.

Je-li proton na ose x v libovolném bodě mezi Q_1 a Q_2 (např. v bodě P na obr. 22.7b), pak mají síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ směr stejný a nikoli opačný, jak požadujeme. Je-li proton v libovolném bodě na ose x vlevo od Q_1 (např. v bodě S na obr. 22.7b), pak síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ mají opačné směry. Z rov. (22.4) ovšem plyne, že síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ nemohou mít stejnou velikost: F_1 je větší než F_2, protože F_1 vzniká působením bližšího náboje (menší r) větší velikosti ($8Q$ proti $2Q$).

Je-li konečně proton v libovolném bodě na ose x vpravo od náboje Q_2 (např. v bodě R), pak $x > d$ a síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ mají opět opačný směr. Protože je nyní větší náboj (Q_1) dále od protonu než náboj menší, existuje bod, ve kterém si velikosti sil F_1 a F_2 jsou rovny. Nechť x je jeho souřadnice a Q_p náboj protonu. Dosazením z rov. (22.4) do rov. (22.9) dostaneme

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8QQ_p}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2QQ_p}{(x-d)^2}. \qquad (22.10)$$

(Všimněte si, že v rov. (22.10) vystupuje jen velikost nábojů.) Úpravou rov. (22.10) získáme

$$\frac{(x-d)^2}{x^2} = \frac{1}{4}.$$

Odmocněním obou stran získáme

$$\frac{x-d}{x} = \pm\frac{1}{2}$$

a odtud (protože $x > d$)

$$x = 2d. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Rovnováha v bodě $x = 2d$ je nestabilní. (Lze dokonce dokázat tzv. *Earnshawovu větu*: Žádná elektrostatická soustava nábojů se neudrží ve *stabilní* rovnováze pouze elektrickými silami.) Jestliže je proton vychýlen doleva od bodu R, pak velikosti obou sil F_1 i F_2 narůstají, ale F_2 narůstá rychleji (protože Q_2 je blíže než Q_1) a výsledná síla bude posunovat proton dále doleva. Je-li proton vychýlen doprava, velikosti obou sil F_1 a F_2 klesají, ale F_2 klesá více, takže výsledná síla posunuje proton dále doprava. Ve stabilní rovnováze se proton při každém malém vychýlení vrací zpět do rovnovážné polohy.

PŘÍKLAD 22.2

Obr. 22.8a představuje uspořádání šesti nabitých částic, kde $a = 2{,}0\,\text{cm}$ a úhel $\theta = 30°$. Všech šest částic má náboj stejné velikosti $Q = 3{,}0\cdot10^{-6}\,\text{C}$; znaménka nábojů jsou vyznačena. Jaká je výsledná elektrostatická síla $\boldsymbol{F}_1$, kterou na náboj Q_1 působí ostatní náboje?

ŘEŠENÍ: Z rov. (22.7) víme, že $\boldsymbol{F}_1$ je vektorovým součtem sil $\boldsymbol{F}_{12}$, $\boldsymbol{F}_{13}$, $\boldsymbol{F}_{14}$, $\boldsymbol{F}_{15}$ a $\boldsymbol{F}_{16}$, což jsou elektrostatické síly, kterými na Q_1 působí ostatní náboje. Protože Q_2 a Q_4 mají stejnou velikost a oba jsou ve vzdálenosti $r = 2a$ od náboje Q_1, dostáváme z rov. (22.4)

$$F_{12} = F_{14} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1||Q_2|}{(2a)^2}. \qquad (22.11)$$

A obdobně, protože Q_3, Q_5 a Q_6 mají stejnou velikost a jsou stejně vzdáleny ($r = a$) od náboje Q_1, dostáváme

$$F_{13} = F_{15} = F_{16} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1||Q_3|}{a^2}. \qquad (22.12)$$

Na obr. 22.8b jsou znázorněny síly, které působí na náboj Q_1 (silový diagram podle kap. 5). Z něho a z rovnice (22.11) je vidět, že síly $\boldsymbol{F}_{12}$ a $\boldsymbol{F}_{14}$ mají stejnou velikost, ale opačný směr, takže se navzájem vyruší. Z obr. 22.8b a z rov. (22.12) dále plyne, že y-ové složky sil $\boldsymbol{F}_{13}$ a $\boldsymbol{F}_{15}$ se také ruší a že jejich x-ové složky mají stejnou velikost a obě jsou záporné. Z obr. 22.8b také plyne, že síla $\boldsymbol{F}_{16}$ má směr osy x. Síla $\boldsymbol{F}_1$ musí tedy být rovnoběžná s osou x; její velikost je rovna rozdílu mezi velikostí F_{16} a dvojnásobkem velikosti x-ové složky síly $\boldsymbol{F}_{13}$:

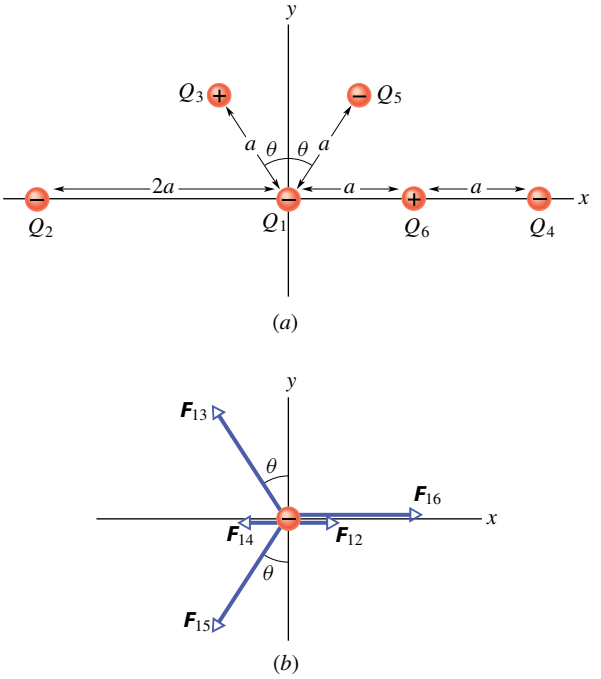
$$F_1 = F_{16} - 2F_{13}\sin\theta = \\ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1||Q_6|}{a^2} - \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1||Q_3|}{a^2}\sin\theta.$$

Dosadíme $Q_3 = Q_6$ a $\theta = 30°$:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1||Q_6|}{a^2} - \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1||Q_6|}{a^2}\sin 30° = 0.$$

(Odpověď)

Všimněte si, že přítomnost Q_6 na spojnici mezi náboji Q_1 a Q_4 neovlivní elektrostatickou sílu, kterou působí náboj Q_4 na Q_1.



Obr. 22.8 Příklad 22.2. (a) Uspořádání šesti nabitých částic. (b) Elektrostatické síly, kterými působí ostatních pět nábojů na Q_1.

RADY A NÁMĚTY

Bod 22.1: *Symetrie*

V př. 22.2 jsme využili symetrie ke zjednodušení výpočtů potřebných k řešení. Protože Q_2 a Q_4 jsou umístěny symetricky vzhledem ke Q_1 a síly $\boldsymbol{F}_{12}$ a $\boldsymbol{F}_{14}$ se tedy ruší, nebylo třeba tyto síly počítat. Protože y-ové složky $\boldsymbol{F}_{13}$ a $\boldsymbol{F}_{15}$ se ruší a jejich x-ové složky jsou stejné a sčítají se, ušetřili jsme si další námahu.

Bod 22.2: *Zakreslení vektorů elektrostatických sil*

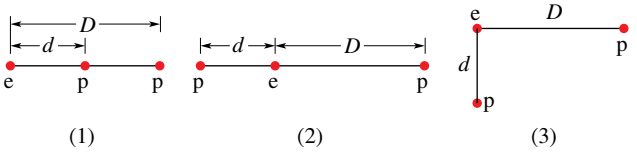
Je-li zadáno rozložení nabitých částic (obr. 22.8a) a naším úkolem je najít výslednou elektrostatickou sílu působící na

jednu z nich, sestrojíme obvykle silový diagram zobrazující pouze uvažovanou částici a síly, které na ni působí (obr. 22.8b). Pokud místo toho zakreslujeme síly přímo do zadaného diagramu zobrazujícího všechny částice, zakreslujeme je vždy s počátečním nebo koncovým bodem v místě uvažované částice.

Bod 22.3: *Symboly pro náboje*

Pokud znaménko náboje není slovy specifikováno, symbol Q může znamenat jak náboj kladný, tak záporný. Naproti tomu označení $+Q$ (nebo např. také $+3Q$) vyjadřuje náboj kladný a označení $-Q$ (nebo např. také $-3Q$) náboj záporný.

KONTROLA 3: Obrázek ukazuje tři různá uspořádání jednoho elektronu e a dvou protonů p. (a) Seřaďte uspořádání sestupně podle velikosti výsledné elektrostatické síly, kterou na elektron působí oba protony. (b) Je v případě (3) úhel mezi výslednou silou působící na elektron a úsečkou d menší, nebo větší než 45°?



PŘÍKLAD 22.3

Na obr. 22.9a jsou dvě stejné osamocené elektricky izolované vodivé koule A, B. Vzdálenost a jejich středů je velká vzhledem k poloměrům koulí. Koule A má kladný náboj $+Q$, koule B je elektricky neutrální. Na počátku nepůsobí mezi koulemi žádná elektrostatická síla.

(a) Předpokládejme, že koule jsou na okamžik spojeny vodivým drátem. Drát je dostatečně tenký, aby bylo možno zanedbat jeho výsledný náboj. Jaká je elektrostatická síla působící mezi koulemi, je-li drát odstraněn?

ŘEŠENÍ: Když jsou koule spojeny drátem, jsou vodivostní elektrony z koule B přitahovány kladným nábojem koule A (obr. 22.9b). Koule B ztrácí záporný náboj a nabíjí se kladně. Koule A získává záporný náboj, je stále méně kladně nabitá. Protože jsou koule stejné, musí nakonec získat stejný náboj. Přenos náboje proto skončí, když nadbytečný náboj na kouli B vzroste na $+Q/2$ a nadbytečný náboj na kouli A klesne na $+Q/2$ (obr. 22.9c).

Můžeme předpokládat, že po odstranění drátu nenaruší náboj na jedné kouli rovnoměrnost rozložení náboje na druhé kouli, protože koule jsou malé vzhledem ke své vzájemné vzdálenosti. Můžeme tedy použít první slupkový teorém. Z rov. (22.4) s $Q_1 = Q_2 = Q/2$ a $r = a$ plyne pro velikost elektrostatické síly mezi koulemi

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Q/2)(Q/2)}{a^2} = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a}\right)^2. \quad \text{(Odpověď)}$$

Koule se nyní navzájem odpuzují, protože jsou obě kladně nabité.

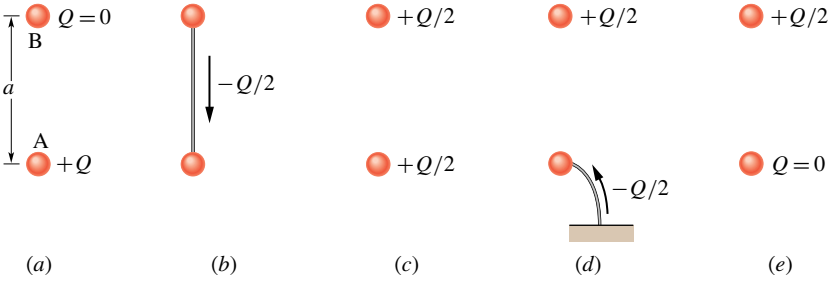
(b) Předpokládejme nyní, že je koule A na okamžik uzemněna, a pak je uzemnění přerušeno. Jaká je nyní elektrostatická síla mezi koulemi?

ŘEŠENÍ: Uzemnění dovolí elektronům s celkovým nábojem $-Q/2$ přesunout se (ze země) na kouli A (obr. 22.9d) a neutralizovat ji (obr. 22.9e). Není-li na kouli A žádný volný náboj, pak mezi koulemi nepůsobí žádná elektrostatická síla (tak jako na počátku na obr. 22.9a).

22.5 KVANTOVÁNÍ NÁBOJE

V dobách Benjamina Franklina byl elektrický náboj považován za spojitou tekutinu („fluidum“, podobně jako teplo, světlo apod.); tato myšlenka byla v mnoha případech užitečná. Dnes však již víme, že i samotné tekutiny (jako vzduch, voda) nejsou spojité, ale jsou tvořeny atomy a molekulami; hmota je rozložena diskrétně. Experimenty ukazují, že ani „elektrická tekutina“ není spojitá, ale je tvořena násobky jistého elementárního náboje. Libovolný kladný nebo záporný náboj Q, který můžeme naměřit, může tedy mít hodnotu jenom

$$Q = ne, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \qquad (22.13)$$



Obr. 22.9 Příklad 22.3. Dvě malé vodivé koule A a B. (a) Na počátku je koule A nabita kladně. (b) Vodivým spojením je mezi koulemi přenesen záporný náboj. (c) Obě koule jsou nyní nabity kladně. (d) Uzemňujícím vodičem je na kouli A přenesen záporný náboj. (e) Koule A je nyní neutrální.

kde e je **elementární náboj**, který má hodnotu

$$e \doteq 1{,}60{\cdot}10^{-19}\ \mathrm{C}. \qquad (22.14)$$

Elementární náboj e je jednou z důležitých fyzikálních konstant. Elektron a proton mají náboj o velikosti e (tab. 22.1). (Kvarky — částice tvořící neutrony a protony — mají náboje $\pm e/3$ nebo $\pm 2e/3$, ale nemohou být detegovány samostatně. Proto jejich náboje nepovažujeme za elementární.)

Tabulka 22.1 **Náboje tří částic**

ČÁSTICE	ZNAČKA	NÁBOJ
elektron	e^- (nebo jen e)	$-e$
proton	p	$+e$
neutron	n	0

Často se můžete setkat s větami jako: „náboj na kouli“, „množství přeneseného náboje“, „náboj nesený elektronem“, z nichž by se zdálo, že náboj je nějaký objekt, látka. (Taková tvrzení se objevila i v této kapitole.) Elektrický náboj však neexistuje sám o sobě, ale je vždy vázán na hmotné částice. Je to fyzikální veličina, podobně jako např. hmotnost nebo spin.

Pokud nějaká fyzikální veličina nemůže nabývat libovolné hodnoty, ale pouze hodnot diskrétních (nespojitých), říkáme, že je kvantována. Už víme, že hmotnost, energie, moment hybnosti jsou kvantovány; elektrický náboj je další takovou fyzikální veličinou. Můžeme například najít částici, která nemá vůbec žádný náboj, nebo má náboj $+10e$, nebo $-6e$, ale nenajdeme částici s nábojem, řekněme, $3{,}57e$.

Kvantem náboje je elementární náboj e; je velmi malý. Pro ilustraci: svítí-li 100 W žárovka, vstupuje do ní každou sekundu zhruba 10^{19} elementárních nábojů a stejné množství ji opouští. „Zrnitost“ elektřiny se při tak velkém počtu neprojeví, stejně jako nepocítíme rukou ve vodě jednotlivé molekuly.

„Zrnitosti“ elektřiny můžeme také přičíst modré záblesky (jev triboluminiscence), které emituje kostka cukru z úvodu kapitoly, je-li drcena. Když se rozlomí krystaly cukru, jedna část každého porušeného krystalu má přebytek elektronů, zatímco druhá část má přebytek kladných iontů. Téměř okamžitě elektrony a ionty přeskočí trhlinu v porušeném krystalu, a tak se obě strany neutralizují. Během přeskoku se elektrony a ionty sráží s molekulami dusíku obsaženého ve vzduchu, který proudí do trhliny. V důsledku srážek emituje dusík ultrafialové záření, které je neviditelné, a velmi slabé modré světlo (z viditelné oblasti spektra), které vidíme jako slabé jiskření. Aromatický olej z některých bonbonů absorbuje ultrafialové světlo a emituje následně dostatek modrého světla, které osvětlí ústa nebo čelisti kleští. Je-li však bonbon zvlhčen slinami, pokus se nezdaří, protože vodivé sliny neutralizují obě části porušeného krystalu ještě dříve, než by se mohly objevit jiskry.

KONTROLA 4: Koule A má na začátku pokusu náboj $-50e$ a koule B náboj $+20e$. Obě jsou vyrobeny z vodivého materiálu a stejně velké. Jaký bude výsledný náboj na kouli A poté, co se navzájem dotknou?

PŘÍKLAD 22.4

Elektricky neutrální měděná mince o hmotnosti $m = 3{,}11$ g obsahuje stejné množství kladného a záporného náboje.

(a) Jaká je velikost Q celkového kladného (nebo záporného) náboje obsaženého v minci?

ŘEŠENÍ: Neutrální atom má záporný náboj o velikosti Ze, představovaný jeho elektrony, a kladný náboj o stejné velikosti, představovaný protony v jádře; Z je atomové číslo uvažovaného prvku. Pro měď je $Z = 29$ (dodatek F), tj. atom mědi má 29 protonů, a je-li elektricky neutrální, také 29 elektronů.

Náboj velikosti Q, který hledáme, je roven NZe, kde N je počet atomů v minci. Určíme ho tak, že násobíme počet molů mědi v minci počtem atomů obsažených v jednom molu (Avogadrovou konstantou $N_A = 6{,}02{\cdot}10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$). Počet molů mědi v minci je m/m_m, kde $m_m = 63{,}5\ \mathrm{g{\cdot}mol}^{-1}$ je molární hmotnost mědi (dodatek F). Je tedy

$$N = N_A \frac{m}{m_m} = (6{,}02{\cdot}10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}) \frac{(3{,}11\ \mathrm{g})}{(63{,}5\ \mathrm{g{\cdot}mol}^{-1})} = \\ = 2{,}95{\cdot}10^{22}.$$

Velikost celkového kladného nebo záporného náboje v minci je pak

$$Q = NZe = \\ = (2{,}95{\cdot}10^{22})(29)(1{,}60{\cdot}10^{-19}\ \mathrm{C}) = \\ = 137\,000\ \mathrm{C}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

To je obrovský náboj. Z kap. 25 vyplyne, že tento náboj by centimetrovou kuličku nabil na nepředstavitelné napětí 10^{17} V. Pro srovnání: Třete-li ebonitovou tyč kožešinou, můžete na tyč přemístit stěží náboj o velikosti 10^{-9} C.

(b) Předpokládejme, že kladný a záporný náboj v minci by mohly být soustředěny do dvou oddělených „balíčků“ vzdálených 100 m. Jak velká přitažlivá síla by působila na každý balíček?

ŘEŠENÍ: Z Coulombova zákona (22.4) plyne

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2} = \\ = (8{,}99{\cdot}10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}) \frac{(1{,}37{\cdot}10^5\ \mathrm{C})^2}{(100\ \mathrm{m})^2} = \\ = 1{,}69{\cdot}10^{16}\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Na „balíčky“ by tedy působila síla odpovídající váze tělesa o hmotnosti skoro $2{\cdot}10^{12}$ tun. Dokonce i kdyby náboje byly ve vzdálenosti poloměru Země, přitažlivá síla by byla stále ještě obrovská; odpovídala by váze 426tunového závaží. Proto je také nemožné výrazně porušit elektrickou neutralitu. Pokud se pokusíme odstranit z tělesa větší část náboje jednoho znaménka, vzniká velká elektrostatická síla, která se ho snaží přitáhnout zpět.

PŘÍKLAD 22.5

Jádro atomu železa má poloměr asi $4{,}0{\cdot}10^{-15}$ m a obsahuje 26 protonů.

(a) Jak velká je odpudivá elektrostatická síla mezi dvěma protony, které jsou ve vzdálenosti $4{,}0{\cdot}10^{-15}$ m?

ŘEŠENÍ: Z rov. (22.4) a tab. 22.1 plyne

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = \\ = \frac{(8{,}99{\cdot}10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}})(1{,}60{\cdot}10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(4{,}0{\cdot}10^{-15}\ \mathrm{m})^2} = \\ = 14\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Účinek této síly by byl zanedbatelný, pokud by působila třeba na meloun, ale je obrovský, pokud působí na proton. Tak velké síly by musely roztrhnout na kousky jádro každého prvku (kromě jádra atomu vodíku, které obsahuje jen jediný proton). To se ale nestane, dokonce ani v jádrech s velkým počtem protonů. Musí tedy existovat nějaká přitažlivá jaderná síla, která tak velkou odpudivou elektrostatickou sílu překoná.

(b) Jaká je velikost gravitační síly, kterou na sebe působí tyto dva protony?

ŘEŠENÍ: Hmotnost protonu je $m_\mathrm{p} \doteq 1{,}67{\cdot}10^{-27}$ kg. Vztah (22.2) pro gravitační sílu pak dává

$$F = G\frac{m_\mathrm{p}^2}{r^2} = \\ = \frac{(6{,}67{\cdot}10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}})(1{,}67{\cdot}10^{-27}\ \mathrm{kg})^2}{(4{,}0{\cdot}10^{-15}\ \mathrm{m})^2} = \\ = 1{,}2{\cdot}10^{-35}\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z tohoto výsledku je vidět, že (přitažlivá) gravitační síla je příliš slabá na to, aby mohla překonat odpudivé elektrostatické síly působící mezi protony v jádře. Protony jsou však navzájem vázány obrovskou přitažlivou silou způsobenou *silnou interakcí*. Ta se však výrazně projevuje jen tehdy, pokud jsou částice velmi blízko u sebe (jak je tomu v jádře atomu).

Ačkoli je gravitační síla mnohonásobně slabší než síla elektrostatická, je důležitější ve velkých měřítkách. Protože je vždy přitažlivá, může se velmi mnoho malých těles spojit do těles s obrovskými hmotnostmi, jako jsou planety a hvězdy, které vyvolávají obrovské gravitační síly. Na druhé straně, elektrostatická síla je pro náboje stejného znaménka odpudivá, nemůže tedy spojit samotné kladné nebo samotné záporné náboje do velkých objektů, které by pak mohly působit navenek velkými elektrostatickými silami.

22.6 ZACHOVÁNÍ NÁBOJE

Třeme-li skleněnou tyč hedvábím, objeví se na tyči kladný náboj. Z měření plyne, že se na hedvábí objeví záporný náboj stejné velikosti. Třením se tedy náboj nevytváří, ale jen přerozděluje — převádí z jednoho tělesa na druhé a porušuje se tak původní elektrická neutralita obou těles. Tato hypotéza o **zachování náboje** byla poprvé vyslovena Benjaminem Franklinem a byla mnohokrát ověřena jak pro makroskopická nabitá tělesa, tak i pro atomy, jádra a elementární částice. Proto patří elektrický náboj k veličinám (energie, hybnost, momentu hybnost, hmotnost), pro něž platí v izolovaných systémech zákon zachování.

Radioaktivní rozpad jádra, při němž se jádro spontánně přemění na jádro jiného typu, nám dává mnoho příkladů zachování elektrického náboje. Například uran 238 (^{238}U) se může přeměnit na α-částici (tj. heliové jádro ^{4}He) a thorium (^{234}Th):

$$^{238}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}\mathrm{Th} + {}^{4}\mathrm{He} \qquad \text{(radioaktivní rozpad).} \qquad (22.15)$$

Radioaktivní *mateřské* jádro ^{238}U má atomové číslo $Z = 92$, tj. jádro obsahuje 92 protonů a má náboj $92e$. Emitovaná α-částice má $Z = 2$ a *dceřiné* jádro ^{234}Th má $Z = 90$. Náboj před rozpadem je $92e$, celkový náboj po rozpadu je $90e + 2e$. Náboj se zachovává.

Jiným příkladem zachování náboje je *anihilace* elektronu e^- (jehož náboj je $-e$) a jeho antičástice pozitronu e^+ (jehož náboj je $+e$), při níž vznikají dva fotony γ-záření.

$$\mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+ \rightarrow \gamma + \gamma \qquad \text{(anihilace).} \qquad (22.16)$$

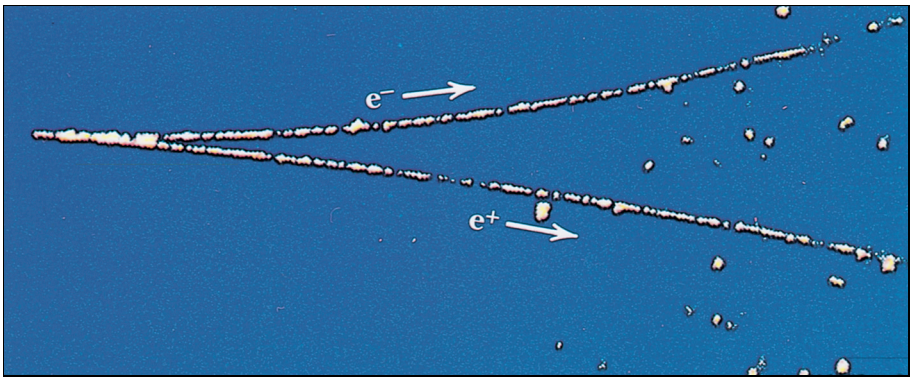
Při použití zákona zachování náboje musíme náboje sčítat algebraicky, tj. s ohledem na jejich znaménka. V anihilačním procesu rov. (22.16) je celkový náboj systému nulový před i po procesu. Náboj se opět zachovává.

Při *tvorbě elektron-pozitronových párů* (opačný proces k anihilaci) se náboj také zachovává. V tomto procesu se γ-kvantum přemění na elektron a pozitron:

$$\gamma \rightarrow \mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+ \qquad \text{(tvorba párů).} \qquad (22.17)$$

Obr. 22.10 ukazuje takovou tvorbu párů v bublinkové komoře. Záření γ vstupuje do komory zleva v přímém směru

a v určitém místě se přemění na elektron a pozitron. Protože tyto nové částice jsou nabité a pohybují se, zanechávají za sebou stopu drobných bublinek. Stopy jsou zakřivené, protože v komoře je magnetické pole (kap. 29.5). Záření γ, které nemá náboj, nezanechává žádnou stopu. Můžeme tedy určit, kde přesně došlo k vytvoření páru: bylo to ve špici vidlice tvaru V, kde začínají stopy elektronu a pozitronu.



Obr. 22.10 Fotografie stop, které zanechaly v bublinkové komoře elektron e^- a pozitron e^+. Dvojice částic vznikla z γ-záření, které vniklo do komory zleva. Protože γ-záření nemá náboj, nezanechává žádnou stopu podél své dráhy (na rozdíl od elektronu a pozitronu). Stopy jsou tvořeny nepatrnými bublinkami vzniklými v přehřáté kapalině.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Elektrický náboj

Elektrická interakce těles (makroskopických i mikroskopických) je dána jejich *elektrickým nábojem*; ten může být kladný nebo záporný. Náboje stejného znaménka se vzájemně odpuzují, náboje opačného znaménka se přitahují. Těleso se stejným množstvím obou druhů náboje je elektricky neutrální. Těleso, ve kterém náboj není v rovnováze, je elektricky nabité.

Vodiče a nevodiče

Vodiče jsou látky, ve kterých se může volně pohybovat velmi mnoho nabitých částic (elektrony v kovech). V *nevodičích* (*izolátorech*) se nabité částice nemohou volně pohybovat. Pohybují-li se nabité částice látkou převážně určitým směrem (probíhá-li usměrněný pohyb nosičů náboje), říkáme, že látkou *protéká elektrický proud*.

Coulomb a ampér

Jednotkou náboje v SI je coulomb (C). Je definován pomocí jednotky elektrického proudu, ampéru (A), jako náboj, který projde průřezem vodiče za dobu 1 sekundy, když vodičem prochází stálý proud o velikosti 1 ampéru.

Coulombův zákon

Coulombův zákon popisuje elektrostatickou sílu působící mezi dvěma bodovými elektrickými náboji Q_1 a Q_2, které jsou v klidu a jejichž vzdálenost je r:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \qquad \text{(Coulombův zákon).} \qquad (22.4)$$

Zde $\varepsilon_0 \doteq 8{,}85{\cdot}10^{-12}\,\mathrm{C^2{\cdot}N^{-1}{\cdot}m^{-2}}$ je *permitivita vakua* neboli *elektrická konstanta*; $1/(4\pi\varepsilon_0) \doteq 8{,}99{\cdot}10^{9}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}$.

Přitažlivá nebo odpudivá síla mezi bodovými náboji v klidu působí ve spojnici obou nábojů. Jestliže uvažujeme více než dva náboje, platí rov. (22.4) pro každou dvojici nábojů. Výsledná síla působící na každý náboj je dána *principem superpozice* jako vektorový součet sil, kterými na náboj působí všechny ostatní přítomné náboje.

Dále platí dva slupkové teorémy elektrostatiky:

Slupka s rovnoměrně rozloženým nábojem přitahuje nebo odpuzuje nabitou částici vně slupky tak, jako by veškerý náboj slupky byl soustředěn v jejím středu.

Slupka s rovnoměrně rozloženým nábojem nepůsobí žádnou elektrickou silou na nabitou částici, která se nachází uvnitř (v dutině) slupky.

Elementární náboj

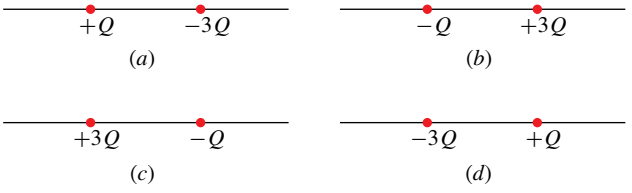
Elektrický náboj je *kvantován*. Každý náboj může být vyjádřen součinem ne, kde n je kladné nebo záporné celé číslo a e je fyzikální konstanta nazývaná *elementární náboj* (je rovna přibližně $1{,}60{\cdot}10^{-19}$ C). Elektrický náboj se zachovává: celkový náboj libovolného izolovaného systému se nemění při libovolných procesech v něm probíhajících.

OTÁZKY

1. Platí Coulombův zákon pro všechny nabité objekty?

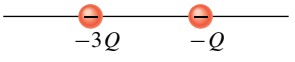
2. Částice s nábojem Q_1 je umístěna vně vodivého tělesa s rovnoměrně rozloženým nábojem Q. Těleso je (1) velká plná koule, (2) velká kulová slupka, (3) malá plná koule, (4) malá kulová slupka. Vzdálenost mezi částicí a středem tělesa je ve všech případech stejná, Q_1 je dostatečně malé, aby prakticky neovlivnilo rovnoměrné rozložení náboje Q. Seřaďte tělesa sestupně podle velikosti elektrostatické síly, kterou působí na částici.

3. Obr. 22.11 ukazuje čtyři uspořádání dvou nabitých částic. Ve kterém případě existuje vlevo od nich bod, do kterého můžeme umístit elektron tak, že bude v rovnováze?



Obr. 22.11 Otázka 3

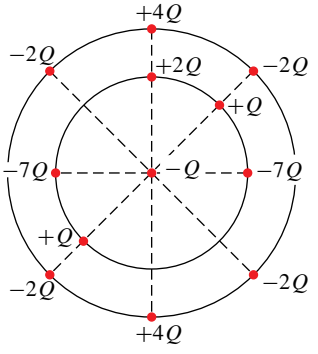
4. Na obrázku 22.12 jsou dvě nabité částice, které se mohou volně pohybovat. Víme, že existuje bod, kam můžeme umístit třetí částici tak, aby všechny tři částice byly v rovnováze. (a) Leží tento bod vlevo od obou původních částic, vpravo od nich, nebo mezi nimi? (b) Má mít třetí částice kladný, nebo záporný náboj? (c) Je rovnováha stabilní, nebo nestabilní?



Obr. 22.12 Otázka 4

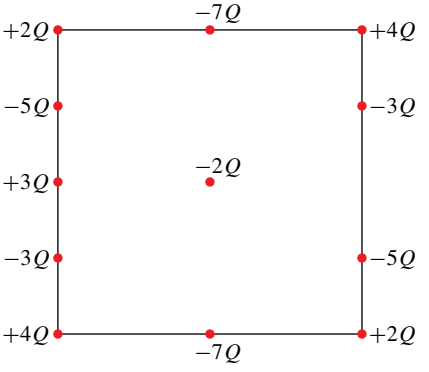
5. Na obr. ke kontrole 2 jsou na ose pevně umístěny dva protony a jeden elektron. Kam bychom měli na ose umístit čtvrtou nabitou částici tak, aby výsledná elektrostatická síla, kterou na ni působí první tři částice, byla nulová? Je to vlevo od prvních tří částic, vpravo od nich, mezi protony, nebo mezi elektronem a jemu bližším protonem?

6. Na obr. 22.13 je centrální částice s nábojem $-Q$ obklopená dvěma soustřednými kružnicemi s poloměry r a R, $R > r$. Na kružnicích jsou rozmístěny nabité částice. Jakou velikost a směr má výsledná elektrostatická síla, kterou na centrální částici působí ostatní částice?



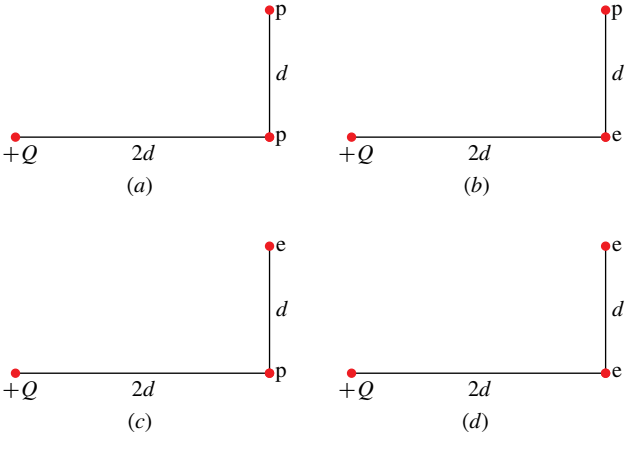
Obr. 22.13 Otázka 6

7. Na obr. 22.14 je centrální částice s nábojem $-2Q$ obklopena nabitými částicemi rozmístěnými po obvodu čtverce ve vzdálenostech d nebo $d/2$. Jakou velikost a směr má výsledná elektrostatická síla, kterou na centrální částici působí ostatní částice?



Obr. 22.14 Otázka 7

8. Na obr. 22.15 jsou čtyři uspořádání nabitých částic: protonu, elektronu a náboje $+Q$. Seřaďte tato uspořádání sestupně podle velikosti výsledné elektrostatické síly působící na částici s nábojem $+Q$.

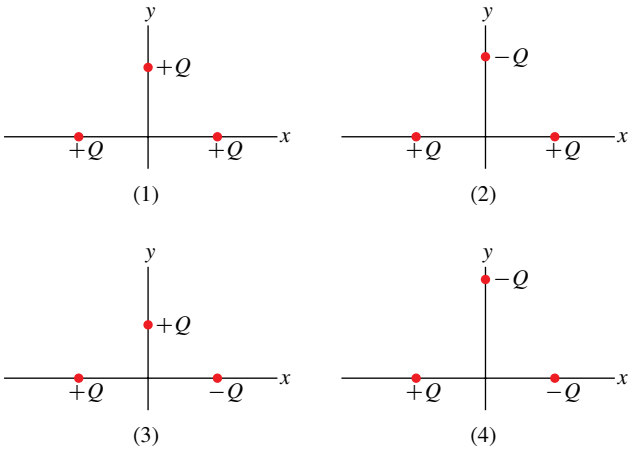


Obr. 22.15 Otázka 8

9. Na obr. 22.16 jsou čtyři uspořádání tří částic s náboji $+Q$ a $-Q$. Částice na ose x jsou stejně vzdáleny od osy y. Nejprve uvažujme prostřední částici v případě (1); každá z ostatních dvou částic na ni působí elektrostatickou silou. (a) Jsou velikosti těchto sil stejné, nebo rozdílné? (b) Je velikost výsledné síly působící na prostřední částici stejně velká, větší, nebo menší než součet

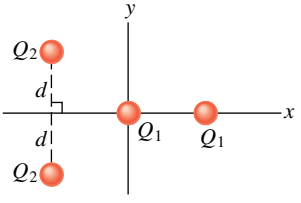
velikostí sil od obou částic? (c) Vyruší se x-ové složky obou sil? (d) Vyruší se y-ové složky obou sil? (e) Jaký směr má výsledná síla působící na prostřední částici?

Nyní uvažujme zbývající případy: Jaký je směr výsledné síly působící na prostřední částici (f) v případě (2), (g) v případě (3), (h) v případě (4)?



Obr. 22.16 Otázka 9

10. Na obr. 22.17 jsou dvě částice s nábojem Q_1 a jiné dvě částice s nábojem Q_2. Částice v počátku se může volně pohybovat, ostatní částice jsou nepohyblivé. Určete, zda Q_2 je kladné, nebo záporné, má-li být výsledná síla působící na volnou částici nulová v případě, že Q_1 je (a) kladné, (b) záporné.



Obr. 22.17 Otázka 10

11. Čtyři stejné vodivé koule A, B, C, D mají náboje $-8{,}0Q$, $-6{,}0Q$, $-4{,}0Q$, $+8{,}0Q$. Které z nich je třeba vodivě spojit (tenkým vodičem), aby vznikly útvary s nábojem (a) $-2{,}0Q$, (b) $-2{,}5Q$? (c) Jakým spojením vzniknou dvě koule s nábojem $-3{,}0Q$?

12. Kladně nabitou kouli přiblížíme k izolovanému neutrálnímu vodiči. Vodič uzemníme. Určete, je-li nabit kladně, záporně, nebo je neutrální, jestliže (a) nejprve vzdálíme kouli a pak přerušíme uzemnění, (b) nejprve přerušíme uzemnění a kouli pak vzdálíme?

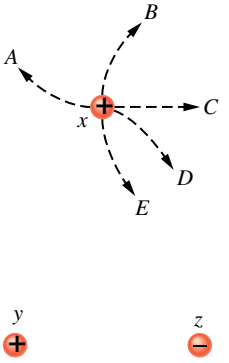
13. Vedle kladně nabité skleněné tyče visí na nevodivém vlákně tělísko. (a) Tyč tělísko přitahuje. Znamená to nutně, že je tělísko záporně nabité? (b) Tyč a tělísko se odpuzují. Je nutně tělísko nabité kladně?

14. Máte k dispozici dvě stejné neutrální vodivé koule A, B, kterými můžete pohybovat po nevodivé podložce, dále tenký vodič a skleněnou tyč, kterou můžete třít hedvábím. Vodičem smíte spojit koule navzájem nebo spojit jednu kouli s podlahou. Tyčí se nesmíte dotknout žádné z koulí. Jak můžete koule nabít nábojem (a) stejné velikosti a stejného znaménka, (b) stejné velikosti a opačného znaménka?

15. V jednoduchém modelu atomu helia obíhají dva elektrony kolem jádra skládajícího se ze dvou protonů. Je velikost síly, kterou na jádro působí jeden z elektronů, větší, menší, nebo stejně velká vzhledem k velikosti síly, kterou působí jádro na tento elektron?

16. Záporně nabitá ebonitová tyč na obr. 22.5 způsobí, že se některé z vodivostních elektronů v měděné tyči pohybují k jejímu vzdálenějšímu konci. Proč proud vodivostních elektronů rychle ustane? V tyči je přece velké množství vodivostních elektronů, které se mohou ke vzdálenějšímu konci pohybovat.

17. Na obr. 22.18 jsou tři malé koule, které mají náboje o stejné velikosti a jsou v klidu na dokonale hladké ploše. Koule y a z jsou pevně umístěny ve stejné vzdálenosti od koule x. Po které z pěti naznačených trajektorií se bude pohybovat koule x, jestliže ji uvolníme z klidu?



Obr. 22.18 Otázka 17

18. Člověk, stojící na elektricky izolované plošině, se dotkne nabitého, elektricky izolovaného vodiče. Bude tím vodič zcela vybit?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 22.4 Coulombův zákon

1C. Při zpětném úderu typického blesku protéká výbojovým kanálem proud $2{,}5\cdot10^4$ A po dobu 20 μs. Jak velký náboj přitom proteče kanálem?

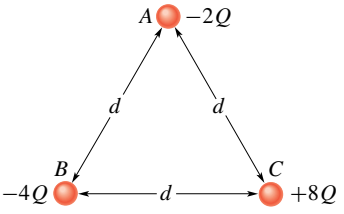
2C. Jaká elektrostatická síla působí mezi dvěma bodovými náboji o velikosti 1,00 C, jsou-li vzdáleny (a) 1,00 m, (b) 1,00 km?

3C. Bodový náboj $+3{,}00\cdot10^{-6}$ C je ve vzdálenosti 12,0 cm od druhého bodového náboje $-1{,}50\cdot10^{-6}$ C. Vypočítejte velikost síly působící na každý náboj.

4C. Jaká musí být vzdálenost mezi dvěma bodovými náboji $Q_1 = 26{,}0\cdot10^{-6}$ C a $Q_2 = -47{,}0\cdot10^{-6}$ C, aby elektrostatická síla, která mezi nimi působí, měla velikost 5,70 N?

5C. Dvě pohyblivé částice nabité souhlasným nábojem stejné velikosti, jsou původně od sebe vzdálené $3{,}2\cdot10^{-3}$ m. Počáteční zrychlení první částice je $7{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, zrychlení druhé částice je $9{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Je-li hmotnost první částice $6{,}3\cdot10^{-7}$ kg, jaká je (a) hmotnost druhé částice, (b) velikost náboje každé z částic?

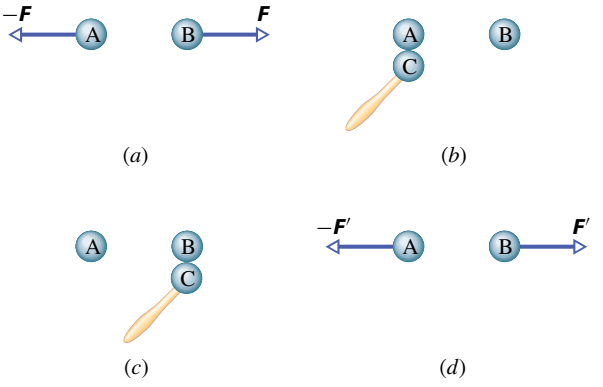
6C. Na obr. 22.19 leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka se stranou délky d tři stejné vodivé koule A, B, C, jejichž počáteční náboje jsou $-2Q$, $-4Q$, $+8Q$. (a) Jaká je velikost elektrostatické síly, která působí mezi koulemi A a C? Pak proběhnou následující procesy: A a B jsou spojeny tenkým vodičem a pak rozpojeny; B je uzemněna vodičem a pak je vodič odstraněn; B a C jsou spojeny vodičem a pak rozpojeny. Jaká bude nyní velikost elektrostatické síly (b) mezi koulemi A a C, (c) mezi koulemi B a C?



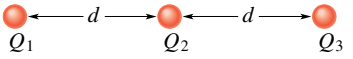
Obr. 22.19 Cvičení 6

7C. Dvě stejné vodivé koule (A) a (B) mají stejný náboj a jejich vzdálenost je mnohem větší než jejich průměr (obr. 22.20a). Elektrostatická síla, kterou působí koule (A) na kouli (B), je $\boldsymbol{F}$. Uvažujme nyní třetí, stejnou a na počátku neutrální kouli (C) s nevodivým držadlem. Nejprve se s ní dotkneme koule (A) (obr. 22.20b), potom koule (B) (obr. 22.20c) a pak ji odstraníme (obr. 22.20d). Pomocí původní síly $\boldsymbol{F}$ vyjádřete elektrostatickou sílu $\boldsymbol{F}'$, která nyní působí na kouli (B).

8Ú. Na obr. 22.21 leží na téže přímce tři nabité částice ve vzdálenostech d. Náboje Q_1 a Q_2 jsou pevné. Náboj Q_3 se může volně pohybovat, ale je v rovnováze (výslednice elektrostatických sil, které na něj působí, je nulová). Vyjádřete náboj Q_1 prostřednictvím náboje Q_2.

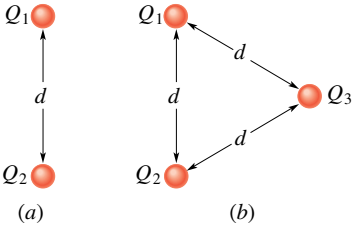


Obr. 22.20 Cvičení 7



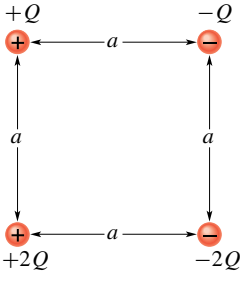
Obr. 22.21 Úloha 8

9Ú. Na obr. 22.22a jsou ve vzdálenosti d dva náboje Q_1 a Q_2. (a) Jaká je velikost elektrostatické síly, která působí na Q_1? Předpokládejme, že $Q_1 = Q_2 = 20{,}0\cdot10^{-6}$ C a $d = 1{,}50$ m. (b) Přidáme třetí náboj $Q_3 = 20{,}0\cdot10^{-6}$ C podle obr. 22.22b. Jaká je nyní velikost elektrostatické síly, která působí na Q_1?



Obr. 22.22 Úloha 9

10Ú. Na obr. 22.23 určete, jaká je vodorovná a svislá složka výsledné elektrostatické síly, která působí na náboj v levém dolním rohu čtverce, je-li $Q = 1{,}0\cdot10^{-7}$ C a $a = 5{,}0$ cm?



Obr. 22.23 Úloha 10

11Ú. Náboje Q_1 a Q_2 leží na ose x v bodech $x = -a$ a $x = +a$. (a) Jaký musí být poměr Q_1/Q_2, aby výsledná elektrostatická

síla, která působí na náboj $+Q$ umístěný v bodě $x = +a/2$, byla nulová? (b) Proveďte totéž pro náboj $+Q$, jestliže je umístěn v bodě $x = +3a/2$.

12Ú. Dvě malé kladně nabité koule mají celkový náboj $5{,}0 \cdot 10^{-5}$ C. Jaký je náboj na každé z nich, odpuzují-li se elektrostatickou silou velikosti 1,0 N ve vzdálenosti 2,0 m?

13Ú. Dvě stejné vodivé koule, umístěné pevně ve vzdálenosti 50,0 cm, se přitahují elektrostatickou silou 0,108 N. Spojíme je vodičem. Po odstranění vodiče se koule odpuzují silou 0,0360 N. Jaké byly původní náboje na koulích?

14Ú. Dvě pevné částice s náboji $Q_1 = +1{,}0 \cdot 10^{-6}$ C a $Q_2 = -3{,}0 \cdot 10^{-6}$ C jsou ve vzdálenosti 10 cm. Jak daleko od každé z nich by měl být umístěn třetí náboj, aby výsledná elektrostatická síla, která na něj působí, byla nulová?

15Ú. Náboje a souřadnice dvou nabitých částic, pevně umístěných v rovině xy, jsou: $Q_1 = +3{,}0 \cdot 10^{-6}$ C, $x_1 = 3{,}5$ cm, $y_1 = 0{,}50$ cm; $Q_2 = -4{,}0 \cdot 10^{-6}$ C, $x_2 = -2{,}0$ cm, $y_2 = 1{,}5$ cm. (a) Určete velikost a směr elektrostatické síly působící na náboj Q_2. (b) Kam umístíte třetí náboj $Q_3 = +4{,}0 \cdot 10^{-6}$ C, aby výsledná elektrostatická síla působící na Q_2, byla nulová?

16Ú. Dva volně pohyblivé bodové náboje $+Q$ a $+4Q$ jsou ve vzdálenosti d. Třetí náboj je umístěn tak, že je systém v rovnováze. (a) Určete polohu, velikost a znaménko třetího náboje. (b) Ukažte, že rovnováha systému je nestabilní.

17Ú. (a) Jaký kladný náboj by musel být umístěn na Zemi i na Měsíci, aby se vykompenzovala jejich gravitační přitažlivost? Potřebujeme k řešení znát vzdálenost Země od Měsíce? Proč ano, nebo proč ne? (b) Kolik tisíc kilogramů vodíku by bylo potřeba rozštěpit na protony a elektrony pro vytvoření kladného náboje spočítaného v případě (a)?

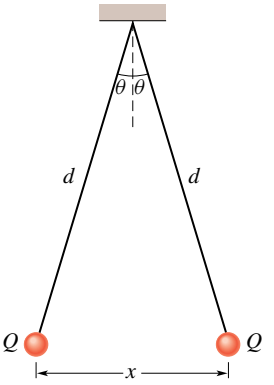
18Ú. Náboj Q je rozdělen na dvě části Q_1 a $Q - Q_1$, které jsou pak od sebe odděleny do určité vzdálenosti. Jaké musí být Q_1 vzhledem ke Q, aby elektrostatické odpuzování mezi náboji bylo maximální?

19Ú. V každém ze dvou protilehlých vrcholů čtverce je pevně umístěn náboj Q_1, v každém z druhých dvou protilehlých vrcholů je umístěn náboj Q_2. (a) Vyjádřete Q_1 prostřednictvím Q_2 v případě, že výsledná elektrostatická síla působící na každý náboj Q_1 je nulová. (b) Existuje taková hodnota Q_2, pro kterou by výsledná elektrostatická síla působící na každý ze čtyř nábojů byla nulová? Vysvětlete.

20Ú. Na obr. 22.24 jsou dvě malé vodivé kuličky o stejné hmotnosti m a stejném náboji Q zavěšené na nevodivých závěsech o délce d. Předpokládejme, že úhel θ je tak malý, že přibližně platí $\operatorname{tg}\theta = \sin\theta$. (a) Ukažte, že v rovnováze je vzdálenost mezi kuličkami

$$x = \left(\frac{Q^2 d}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}.$$

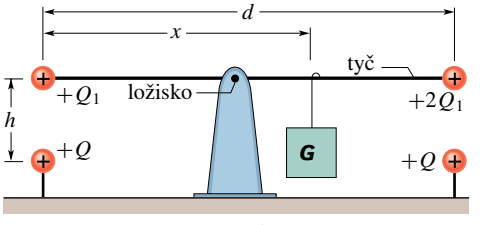
(b) Jaká je hodnota Q, je-li $d = 120$ cm, $m = 10$ g, $x = 5{,}0$ cm?



Obr. 22.24 Úloha 20

21Ú. Vysvětlete, co se stane s kuličkami z úlohy 20b, bude-li jedna z nich vybita. Najděte novou rovnovážnou vzdálenost x s užitím daných hodnot d a m a vypočítané hodnoty Q.

22Ú. Na obr. 22.25 je nevodivá tyč délky d zanedbatelné hmotnosti, otočná kolem svého středu. Na obou koncích tyče jsou připevněny malé vodivé koule zanedbatelných hmotností s kladnými náboji Q_1 a $2Q_2$. Tyč je vyvážena závažím G dle obrázku. Ve vzdálenosti h přímo pod každou z koulí je pevně umístěna koule s kladným nábojem Q. (a) Určete vzdálenost x, pro niž je tyč vodorovná a je v rovnováze. (b) Pro jakou hodnotu h bude tyč v rovnováze a nebude přitom vůbec zatěžovat čep, na němž je upevněna?



Obr. 22.25 Úloha 22

ODST. 22.5 Kvantování náboje

23C. Jaká je velikost elektrostatické síly mezi iontem sodíku Na^+ s nábojem $+e$ a sousedním iontem chloru Cl^- s nábojem $-e$ v krystalu soli, je-li jejich vzdálenost $2{,}82 \cdot 10^{-10}$ m?

24C. Neutron se skládá z jednoho kvarku „up“ s nábojem $+2e/3$ a dvou kvarků „down“, každý s nábojem $-e/3$. Jaká je velikost elektrostatické síly, kterou na sebe působí kvarky „down“, jsou-li v neutronu od sebe vzdáleny $2{,}6 \cdot 10^{-15}$ m?

25C. Jaký celkový náboj v coulombech by mělo 75,0 kg elektronů?

26C. Kolik megacoulombů kladného (resp. záporného) náboje je obsaženo v 1 molu neutrálního molekulárního vodíkového plynu (H_2)?

27C. Dva stejné ionty ve vzdálenosti $5{,}0 \cdot 10^{-10}$ m se odpuzují silou velikosti $3{,}7 \cdot 10^{-9}$ N. (a) Jaký je náboj každého iontu? (b) O kolikamocné ionty jde?

28C. (a) Kolik elektronů bychom museli odstranit z mince uvažované v př. 22.4, aby měla náboj $+1{,}0\cdot10^{-7}$ C? (b) Jaké části elektronů obsažených v minci to odpovídá?

29C. Vzdálenost středů dvou malých kulových vodních kapek se stejným nábojem $-1{,}0\cdot10^{-16}$ C je 1,0 cm. (a) Jaká je velikost elektrostatické síly působící mezi kapkami? (b) Kolik přebytečných elektronů způsobujících nerovnováhu jejího náboje je v každé kapce?

30C. Jak daleko musí být od sebe vzdáleny dva protony, aby se velikost elektrostatické síly působící mezi nimi rovnala váze protonu na povrchu Země?

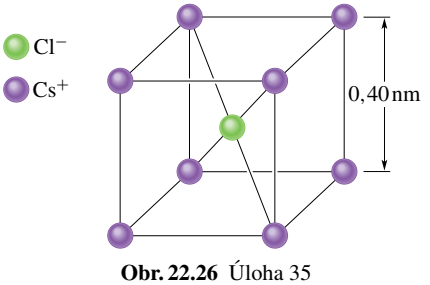
31C. Elektron je ve vakuu blízko povrchu Země. Kam je nutno umístit druhý elektron, aby elektrostatická síla vyrovnala tíhovou sílu působící na první elektron?

32Ú. Zemská atmosféra je neustále bombardována protony kosmického záření z vesmíru. Pokud by všechny protony prošly atmosférou, dopadalo by na každý čtverečný metr povrchu Země zhruba 1 500 protonů za sekundu. Jaký by byl odpovídající proud?

33Ú. Vláknem 100 W žárovky, připojené ke stejnosměrnému zdroji napětí 120 V, prochází stálý proud 0,83 A. Za jak dlouho projde vláknem 1 mol elektronů?

34Ú. Vypočítejte, kolik coulombů kladného náboje je obsaženo v 250 cm^3 (neutrální) vody (přibližně plná sklenice).

35Ú. V krystalové struktuře chloridu cesného CsCl tvoří ionty Cs^+ vrcholy krychle a iont Cl^- leží v jejím středu (obr. 22.26). Délka hrany krychle je 0,40 nm. Každému z iontů Cs^+ chybí jeden elektron (má tedy náboj $+e$), iont Cl^- má jeden elektron navíc (má tedy náboj $-e$). (a) Jaká je velikost výslednice elektrostatických sil, kterými na iont Cl^- působí osm iontů Cs^+ nacházejících se v rozích krychle? (b) Jestliže jeden z iontů Cs^+ chybí, říkáme, že krystal má defekt. Jaká je v tomto případě velikost výslednice elektrostatických sil, kterými na iont Cl^- působí sedm zbývajících iontů Cs^+?



Obr. 22.26 Úloha 35

36Ú. Víme, že velikost záporného náboje elektronu a kladného náboje protonu je stejná. Předpokládejme však, že by se tyto hodnoty lišily o 0,000 10 %. Jakou silou by se pak odpuzovaly dvě měděné mince o hmotnosti 3,11 g vzdálené 1,0 m? Jaký závěr můžete učinit? (*Tip*: Viz př. 22.4.)

37Ú. Dva studenti Jan s hmotností 90 kg a Marie s hmotností 45 kg jsou od sebe vzdáleni 30 m. Předpokládejte, že každý z nich má 0,01 % nerovnováhy v množství svého kladného a záporného náboje, Jan je nabit kladně a Marie záporně. Odhadněte zhruba přitažlivou elektrostatickou sílu působící mezi nimi. Studenty v provedené úvaze nahraďte stejně těžkými koulemi vody.

ODST. 22.6 Zachování náboje

38C. Při β-rozpadu se jedna částice mění na jinou, přičemž je emitován buď elektron, nebo pozitron. (a) Jaká částice je emitována, jestliže se z protonu stane β-rozpadem neutron? (b) Jaká částice je emitována, jestliže se neutron mění β-rozpadem na proton?

39C. Určete X v následujících jaderných reakcích (dodatek F):

(a) $^1\mathrm{H} + {}^9\mathrm{Be} \rightarrow \mathrm{X} + \mathrm{n}$;

(b) $^{12}\mathrm{C} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow \mathrm{X}$;

(c) $^{15}\mathrm{N} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + \mathrm{X}$.

40C. Při radioaktivním rozpadu ^{238}U (rov. (22.15)) je střed vznikající částice ^{4}He v určitém okamžiku ve vzdálenosti $9{,}0\cdot10^{-15}$ m od dceřiného jádra ^{234}Th. (a) Jaká je v tomto okamžiku velikost elektrostatické síly, která působí na částici ^{4}He? (b) Jaké je v tomto okamžiku zrychlení částice?

PRO POČÍTAČ

41Ú. V úloze 18 označme $Q_1 = \alpha Q$. (a) Napište výraz pro velikost F síly působící mezi náboji pomocí α, Q a vzdálenosti nábojů d. (b) Sestrojte graf závislosti F na α. Graficky nalezněte hodnotu α, která dává (c) maximální hodnotu F, (d) polovinu maximální hodnoty F.

42Ú. Dvě částice, každá s kladným nábojem Q, jsou pevně umístěny na ose x, jedna v bodě $x = 0$, druhá v bodě $x = d$. Částice s nábojem Q_1 má být umístěna na této ose v poloze $x = \alpha d$. (a) Zapište pomocí α výrazy pro výslednou elektrostatickou sílu $\boldsymbol{F}$ působící na třetí částici, která se nachází postupně v oblastech $x < 0$; $0 < x < d$; $d < x$. Výrazy by měly dát kladný výsledek, má-li $\boldsymbol{F}$ kladný směr osy x, a záporný výsledek, je-li $\boldsymbol{F}$ orientována v záporném směru osy x. (b) Sestrojte graf závislosti F na α v intervalu $-2 < \alpha < 3$.

23
Elektrické pole



Voda se ohřívá v mikrovlnné troubě tak snadno, že ji můžeme zahřát až na teplotu o 8 °C vyšší, než je normální teplota varu, aniž by začala vřít. Jestliže pak nasypeme do šálku vody kávový prášek nebo kostky ledu, nastane prudký var, jak je vidět na fotografii, a voda se rozstřikuje na všechny strany, takže nás může snadno opařit. Proč mikrovlny ohřívají vodu?

23.1 NÁBOJE A SÍLY: BLIŽŠÍ POHLED

Umístěme pevně v prostoru částici s kladným nábojem Q_1 a přibližme k ní druhou částici s kladným nábojem Q_2. Z Coulombova zákona víme, že částice Q_1 působí na Q_2 odpudivou elektrostatickou silou, a pokud máme dostatek vstupních údajů, můžeme určit její velikost a směr. Zůstává však zásadní otázka: Jak „ví“ náboj Q_1 o existenci náboje Q_2? Pokud se náboje nedotýkají, jak může Q_1 působit silou na Q_2?

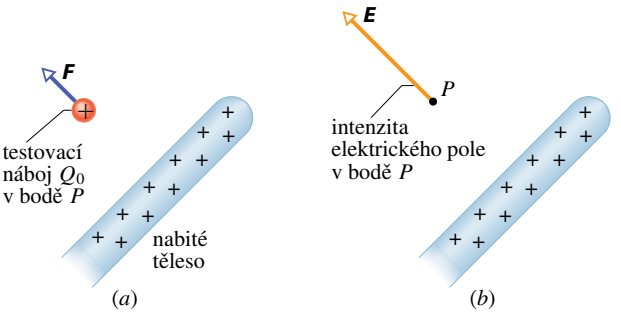
Tuto otázku o *působení na dálku* můžeme zodpovědět tak, že náboj Q_1 vytváří kolem sebe v prostoru **elektrické pole**. V každém bodě P prostoru lze pole popsat veličinou, která má velikost a směr. Její velikost závisí na velikosti Q_1 a na vzdálenosti mezi Q_1 a bodem P, ve kterém pole působí; její směr závisí na směru od Q_1 k P a na znaménku náboje Q_1. Umístíme-li náboj Q_2 do bodu P, pak Q_1 interaguje s Q_2 prostřednictvím pole v bodě P. Velikostí a směrem tohoto pole je určena velikost a směr síly působící na Q_2.

Další problém vzniká tehdy, když posuneme např. náboj Q_1 blíže k náboji Q_2. Podle Coulombova zákona platí, že čím blíže je Q_1 ke Q_2, tím větší musí být odpudivá síla, která na Q_2 působí. Tak tomu také je. Ale: změní se síla působící na Q_2 okamžitě? Neboli — změní se při změně polohy Q_1 okamžitě elektrické pole ve všech (i ve vzdálených) místech, např. tam, kde se nachází Q_2? Odpověď zní: nikoli. Informace o pohybu náboje Q_1 se šíří od Q_1 ve všech směrech jako elektromagnetická vlna rychlostí světla c. Změna elektrického pole v bodě, kde je náboj Q_2, a tím také změna síly působící na Q_2, se projeví, až když vlna dojde do tohoto bodu.

23.2 ELEKTRICKÉ POLE

S některými příklady pole jsme se již ve fyzice setkali. Vzduch v místnosti má v každém místě jistou teplotu. Umístíme-li teploměr kdekoli nás to zajímá, můžeme ji změřit. Říkáme, že teplotu T v místnosti lze popsat teplotním polem $T(\boldsymbol{r})$. Úplně stejně si můžeme představit tlakové pole $p(\boldsymbol{r})$ v atmosféře; udává nám, jaký tlak je v kterémkoli konkrétním bodě sledované oblasti. Toto byly dva příklady **skalárního pole**, protože jak teplota, tak i tlak jsou skalární veličiny. Z hlediska matematického popisu je tedy pole funkcí souřadnic (polohového vektoru $\boldsymbol{r}$) definovanou v oblasti, která nás zajímá. (Může samozřejmě záviset i na dalších proměnných, např. na čase t apod.)

Podobně zavádíme **vektorové pole**, jestliže uvažovaná veličina má vektorovou povahu. Proudění kapaliny jsme mohli popsat rychlostním polem $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$, udávajícím okamžitou rychlost $\boldsymbol{v}$ kapaliny v místě $\boldsymbol{r}$. Můžeme zavést silové pole $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, udávající sílu $\boldsymbol{F}$, která by působila na zkoumanou částici, kdyby se nacházela v místě $\boldsymbol{r}$. A takto také popíšeme elektrické pole kolem nabitého tělesa, např. v bodě P na obr. 23.1a: do bodu P umístíme *kladný* náboj Q_0, nazývaný *testovací náboj*, a změříme elektrostatickou sílu $\boldsymbol{F}$, která na něj působí.



Obr. 23.1 (a) Kladný testovací náboj Q_0 umístěný do bodu P v blízkosti nabitého tělesa. Na testovací náboj působí elektrostatická síla $\boldsymbol{F}$. (b) Intenzita $\boldsymbol{E}$ elektrického pole v bodě P, které je buzeno nabitým tělesem.

Elektrické pole popíšeme vektorovou veličinou $\boldsymbol{E}$, kterou nazýváme **intenzita elektrického pole** nebo stručněji **elektrická intenzita**, která je definována vztahem

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q_0} \quad \text{(intenzita elektrického pole).} \qquad (23.1)$$

V bodě P má elektrická intenzita velikost $E = F/Q_0$ a její směr je dán směrem síly $\boldsymbol{F}$ působící na *kladný* testovací náboj. Elektrickou intenzitu $\boldsymbol{E}$ zobrazujeme vektorem umístěným v bodě P (obr. 23.1). Abychom určili elektrické pole v nějaké oblasti, musíme provést podobné měření ve všech jejích bodech. V soustavě SI je jednotkou elektrické intenzity newton na coulomb ($\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$); později pro ni odvodíme i jiná, pro praxi názornější vyjádření. V tab. 23.1 jsou uvedeny velikosti intenzity v některých konkrétních případech.

Zároveň se tu setkáváme s dalším, užším významem **fyzikálního pole**: zavedli jsme ho jako *prostředníka interakce* mezi nabitými částicemi. Vzájemné působení nyní můžeme schematicky zapsat takto:

$$\text{náboj} \Rightarrow \text{pole} \Rightarrow \text{náboj}.$$

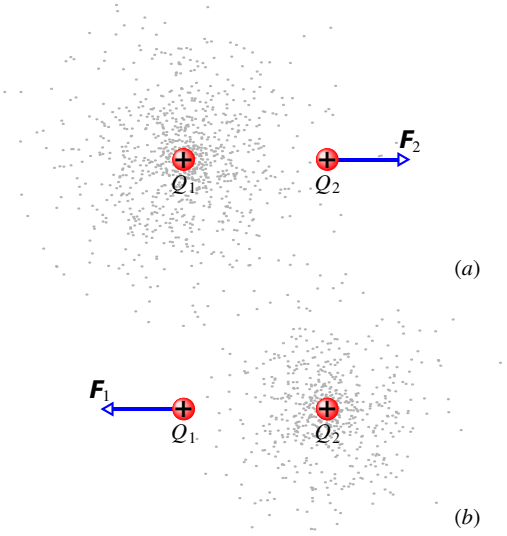
1. První náboj budí ve svém okolí *elektrické pole*.
2. Elektrické pole se šíří prostorem.
3. Druhý náboj interaguje s polem (prvního náboje), ve kterém se nachází.

Obr. 23.2 ilustruje elektrické pole zprostředkující interakci dvou nábojů. Na obr. 23.2a budí náboj Q_1 ve svém

Tabulka 23.1 **Některá elektrická pole**

ELEKTRICKÉ POLE	VELIKOST INTENZITY ($N \cdot C^{-1}$)
Na povrchu jádra uranu	$3 \cdot 10^{21}$
Uvnitř atomu vodíku (Bohrův poloměr, úloha 56 z kap. 24)	$5 \cdot 10^{11}$
Při elektrickém průrazu ve vzduchu	$3 \cdot 10^{6}$
V blízkosti nabitého válce fotokopírovacího stroje	10^{5}
V blízkosti nabitého plastikového hřebenu	10^{3}
V dolní vrstvě atmosféry	10^{2}
Uvnitř měděného vodiče v elektrických obvodech v domácnosti	10^{-2}

okolí elektrické pole (znázorněno vytečkováním). Toto pole působí na náboj Q_2 silou $\boldsymbol{F}_2$. Z hlediska Q_1 (obr. 23.2b) můžeme však stejně dobře předpokládat, že pole budí náboj Q_2 a že síla $\boldsymbol{F}_1$ působící na Q_1 je výsledkem jeho interakce s polem buzeným nábojem Q_2. Síly mají ovšem stejnou velikost a opačný směr ($\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$), i když obě elektrická pole mohou být různě silná, pokud se náboje od sebe liší velikostí.



Obr. 23.2 (a) Náboj Q_1 budí pole, které působí silou $\boldsymbol{F}_2$ na náboj Q_2. (b) Náboj Q_2 budí pole, které působí silou $\boldsymbol{F}_1$ na náboj Q_1. Mají-li náboje různou velikost, výsledná pole budou různá. Síly však mají vždy stejnou velikost a opačný směr; tj. $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$.

Ačkoli pro určení elektrického pole nabitého tělesa používáme testovací náboj, pole samozřejmě existuje nezávisle na něm. Pole v bodě P na obr. 23.1b existuje předtím i poté, co jsme do tohoto bodu testovací náboj umístili. (Předpokládáme, že testovací náboj je natolik malý, že jeho přítomnost neovlivní rozdělení náboje na nabitém tělese a že se jeho vložením tedy nezmění to elektrické pole, které určujeme.)

Pro vyšetření úlohy, jakou hraje elektrické pole při interakci nabitých těles, musíme vyřešit dva úkoly:

(1) Vypočítat intenzitu pole vytvářeného daným rozdělením nábojů.
(2) Vypočítat sílu, kterou dané pole působí na náboj umístěný do pole.

Prvnímu úkolu se budeme věnovat v čl. 23.4 až 23.7 pro několik konfigurací nábojů. Druhý úkol budeme řešit v čl. 23.8 a 23.9 pro bodový náboj a dvojici bodových nábojů nacházejících se v elektrickém poli. Nejprve se ale budeme zabývat způsobem zobrazení elektrických polí.

23.3 ELEKTRICKÉ SILOČÁRY

Michael Faraday, který v 19. století zavedl pojem elektrického pole, si představoval prostor kolem nabitého tělesa vyplněný *siločárami*. Tyto čáry — budeme je pro určitost nazývat **elektrické siločáry** — jsou myšlené orientované křivky, které názorně zobrazují elektrické pole.

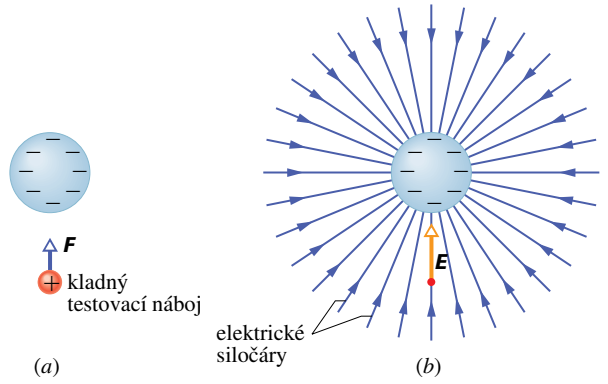
Vztah mezi siločárou a vektorem elektrické intenzity je následující:

(1) Kvalitativně: v každém bodě určuje směr tečny k siločáře směr vektoru $\boldsymbol{E}$.
(2) Kvantitativně: chceme-li vyjádřit nejen směr, ale i velikost elektrické intenzity, nakreslíme tolik siločár, aby jejich počet na jednotku plochy kolmé k siločárám byl úměrný velikosti $\boldsymbol{E}$. V tom případě tam, kde jsou siločáry blízko u sebe, je pole silné (velikost intenzity E je velká) a tam, kde jsou daleko od sebe, je pole slabé.

Na obr. 23.3a je koule s rovnoměrně rozloženým záporným nábojem. Jestliže umístíme *kladný* testovací náboj kamkoli do blízkosti koule, bude na něj působit elektrostatická síla směřující do středu koule (obr. 23.3a). Jinými slovy, vektor elektrické intenzity směřuje v každém bodě v blízkosti koule radiálně do jejího středu. Toto vektorové pole je zobrazeno na obr. 23.3b siločárami, které jsou orientovány stejně jako síla a vektor intenzity. Navíc rozbíhání siločár se vzdáleností od koule ukazuje, že velikost intenzity se vzdáleností od koule klesá.

Kdyby byla koule na obr. 23.3 rovnoměrně nabita *kladným* nábojem, vektor intenzity v každém bodě blízko koule by směřoval radiálně *od* koule. Proto by se také elektrické siločáry *rozbíhaly* radiálně od koule.

Z kladných nábojů siločáry vycházejí (zdroj, zřídlo). V záporných nábojích siločáry končí (nor, propad).



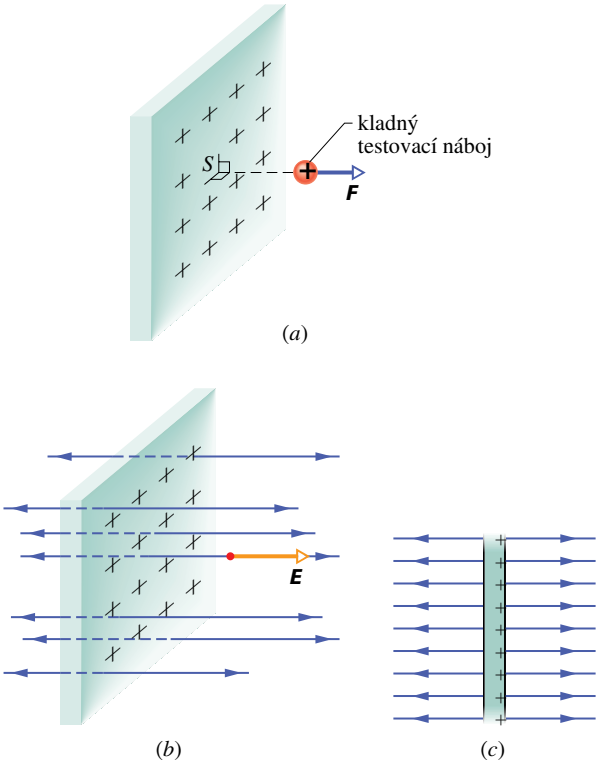
Obr. 23.3 (a) Elektrostatická síla ***F*** působící na kladný testovací náboj v blízkosti koule s rovnoměrně rozloženým záporným nábojem. (b) Vektor elektrické intenzity ***E*** v místě testovacího náboje a elektrické siločáry v okolí koule. Siločáry vedou směrem k záporně nabité kouli. (Jejich počátek je v nekonečnu nebo ve vzdálených kladných nábojích.)

Je-li úhrnný náboj zkoumané soustavy kladný, pak některé siločáry z ní vedou do nekonečna (pokud ovšem nekončí na záporných nábojích mimo zkoumanou soustavu). Analogicky, je-li úhrnný náboj zkoumané soustavy záporný, pak některé siločáry do ní vedou z nekonečna (pokud ovšem nevycházejí z kladných nábojů mimo zkoumanou soustavu).

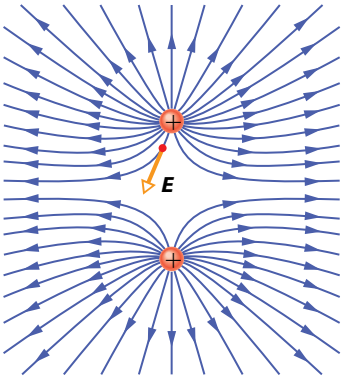
Na obr. 23.4a je část nekonečné nevodivé *vrstvy* (nebo roviny), která je na jedné straně rovnoměrně nabita kladným nábojem. Umístíme-li kladný testovací náboj do libovolného bodu poblíž roviny, bude výsledná elektrostatická síla na něj působící k rovině kolmá, protože složky síly ve směrech rovnoběžných s rovinou se navzájem zruší v důsledku symetrie v rozložení náboje vzhledem k bodu S. Výsledná síla směřuje kolmo od roviny (obr. 23.4a); proto také intenzita v každém bodě prostoru na obou stranách roviny směřuje kolmo od ní (obr. 23.4b, c). Protože je náboj na rovině rozložen rovnoměrně, mají všechny vektory intenzity tutéž velikost. Pole, jehož intenzita má v každém bodě nějaké oblasti stejný směr a velikost, nazýváme *homogenní* ($\boldsymbol{E} = \boldsymbol{konst}$.).

Žádná reálná nevodivá vrstva samozřejmě není nekonečně velká. Uvažujeme-li však oblast blízko reálné roviny a dostatečně daleko od jejích krajů, jsou siločáry pole uspořádány tak, jak je to zobrazeno na obr. 23.4b, c.

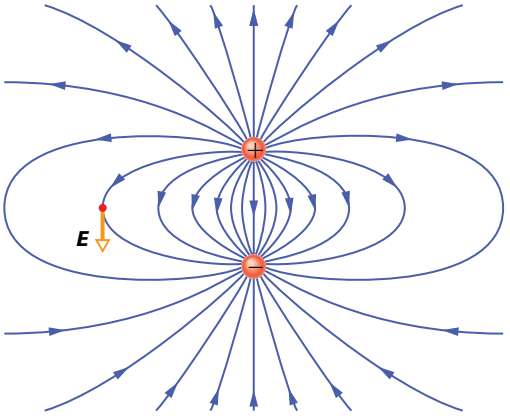
Obr. 23.5 ukazuje siločáry pole dvou stejně velkých kladných nábojů, obr. 23.6 siločáry dvou nábojů stejné velikosti, ale opačného znaménka. Toto uspořádání nábojů se nazývá **elektrický dipól**. Ačkoli nepoužíváme siločáry v kvantitativním významu často, jsou pro popis velmi výstižné. Můžeme téměř „vidět“, jak se náboje na obr. 23.5 odstrkují a na obr. 23.6 k sobě přitahují.



Obr. 23.4 (a) Elektrostatická síla ***F*** působící na kladný testovací náboj poblíž velmi velké, nevodivé roviny, která je na jedné straně rovnoměrně nabita kladným nábojem. (b) Vektor intenzity ***E*** v místě testovacího náboje a siločáry elektrického pole v blízkosti roviny. Siločáry směřují od kladně nabité roviny. (c) Boční pohled na situaci (b).



Obr. 23.5 Siločáry pole dvou stejně velkých kladných bodových nábojů. Náboje se navzájem odpuzují. Abychom „viděli“ skutečný trojrozměrný model elektrických siločár, je třeba v duchu otáčet zobrazeným modelem kolem osy ležící v rovině stránky a procházející oběma náboji. Trojrozměrný model a elektrické pole, které reprezentuje, jsou *rotačně symetrické* kolem této osy. V jednom bodě pole je zobrazen vektor intenzity. Má směr tečny k siločáře procházející tímto bodem.



Obr. 23.6 Siločáry pole dvou stejně velkých bodových nábojů opačných znamének. Náboje se navzájem přitahují. Model siločár a elektrické pole, které reprezentuje, jsou rotačně symetrické kolem osy procházející oběma náboji. V jednom bodě je zobrazen vektor intenzity. Má směr tečny k siločáře procházející tímto bodem.

PŘÍKLAD 23.1

Jak se na obr. 23.3 mění velikost elektrické intenzity se vzdáleností od středu rovnoměrně nabité koule?

ŘEŠENÍ: Předpokládejme, že na kouli z obr. 23.3 končí N siločár. Představme si soustřednou kouli o poloměru r obklopující nabitou kulovou plochu. Počet siločár připadajících na jednotku této plochy je $N/(4\pi r^2)$. Protože intenzita E je úměrná této hodnotě, můžeme psát $E \sim 1/r^2$. Intenzita pole vytvářeného rovnoměrně nabitou koulí tedy také klesá se čtvercem vzdálenosti od středu koule.

23.4 ELEKTRICKÉ POLE BODOVÉHO NÁBOJE

Hledáme-li intenzitu pole **bodového náboje** Q (nabité částice zanedbatelných rozměrů), vložíme do libovolného bodu ve vzdálenosti r od bodového náboje kladný testovací náboj Q_0. Podle Coulombova zákona (rov. (22.4)) je velikost elektrostatické síly působící na Q_0 rovna

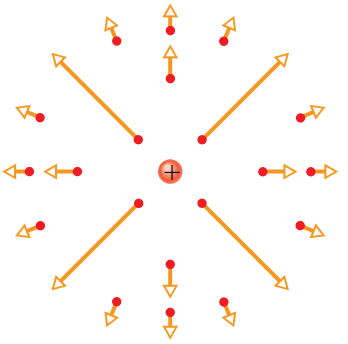
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q||Q_0|}{r^2}. \qquad (23.2)$$

Síla $\boldsymbol{F}$ směřuje od bodového náboje, je-li náboj Q kladný, a směrem k němu, je-li záporný. Velikost elektrické intenzity je podle rov. (23.1) rovna

$$E = \frac{F}{Q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q|}{r^2} \quad \text{(bodový náboj)}. \qquad (23.3)$$

Směr vektoru $\boldsymbol{E}$ je stejný jako směr síly působící na kladný testovací náboj: směřuje od bodového náboje, je-li náboj Q kladný, a směrem k němu, je-li záporný.

Elektrické pole v prostoru kolem bodového náboje najdeme tak, že v jednotlivých bodech tohoto prostoru umísťujeme testovací náboj. Na obr. 23.7 jsou znázorněny vektory intenzity pole kladného bodového náboje (nikoli siločáry).



Obr. 23.7 Vektory elektrické intenzity v několika bodech kolem kladného bodového náboje.

Výsledné pole způsobené několika bodovými náboji můžeme najít pomocí principu superpozice. Jestliže umístíme kladný testovací náboj Q_0 do blízkosti n bodových nábojů $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, pak podle rov. (22.7) je výsledná síla $\boldsymbol{F}_0$, kterou působí n bodových nábojů na testovací náboj, rovna

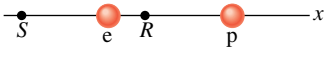
$$\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{F}_{01} + \boldsymbol{F}_{02} + \ldots + \boldsymbol{F}_{0n}.$$

Podle rov. (23.1) je tedy intenzita výsledného elektrického pole v místě testovacího náboje

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}_0}{Q_0} = \frac{\boldsymbol{F}_{01}}{Q_0} + \frac{\boldsymbol{F}_{02}}{Q_0} + \ldots + \frac{\boldsymbol{F}_{0n}}{Q_0} = \\ = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \ldots + \boldsymbol{E}_n, \qquad (23.4)$$

kde $\boldsymbol{E}_i$ je intenzita pole, které by budil osamocený bodový náboj Q_i. Rov. (23.4) je vyjádřením **principu superpozice** pro intenzitu elektrického pole.

KONTROLA 1: Na obrázku je znázorněn proton p a elektron e na ose x. Jaký je směr intenzity elektrického pole buzeného elektronem (a) v bodě S, (b) v bodě R? Jaký je směr intenzity výsledného pole (c) v bodě R, (d) v bodě S?



PŘÍKLAD 23.2

Na obr. 23.8a jsou tři částice s náboji $Q_1 = +2Q$, $Q_2 = -2Q$, $Q_3 = -4Q$, každá ve vzdálenosti d od počátku. Jaká je intenzita výsledného elektrického pole v počátku souřadnic?

ŘEŠENÍ: Náboje Q_1, Q_2 a Q_3 budí pole o intenzitách $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ a $\boldsymbol{E}_3$. Hledáme vektorový součet $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3$. Nejprve musíme nalézt velikost a směr všech tří vektorů intenzity. Velikost vektoru $\boldsymbol{E}_1$, který je buzen nábojem Q_1, najdeme z rov. (23.3) dosazením d za r a $2Q$ za $|Q|$:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2}.$$

Podobně najdeme velikosti vektorů $\boldsymbol{E}_2$ a $\boldsymbol{E}_3$:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2} \quad \text{a} \quad E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{d^2}.$$

Nyní musíme zjistit, jaká bude orientace těchto tří vektorů v počátku souřadnic. Protože Q_1 je kladný náboj, směřuje vektor intenzity směrem od něho. Protože náboje Q_2 a Q_3 jsou oba záporné, směřují vektory intenzity polí, která budí, směrem k nim. Vektory intenzity jsou znázorněny na obr. 23.8b. (Počátky vektorů jsme umístili do bodu, v němž máme určit výsledné pole.)

Intenzity nyní obvyklým postupem vektorově sečteme. Vyjádřením x-ové a y-ové složky každého vektoru a jejich sečtením získáme výslednou x-ovou a y-ovou složku vektoru $\boldsymbol{E}$. Jeho velikost najdeme pomocí Pythagorovy věty a pro určení směru $\boldsymbol{E}$ použijeme definici tangenty úhlu.

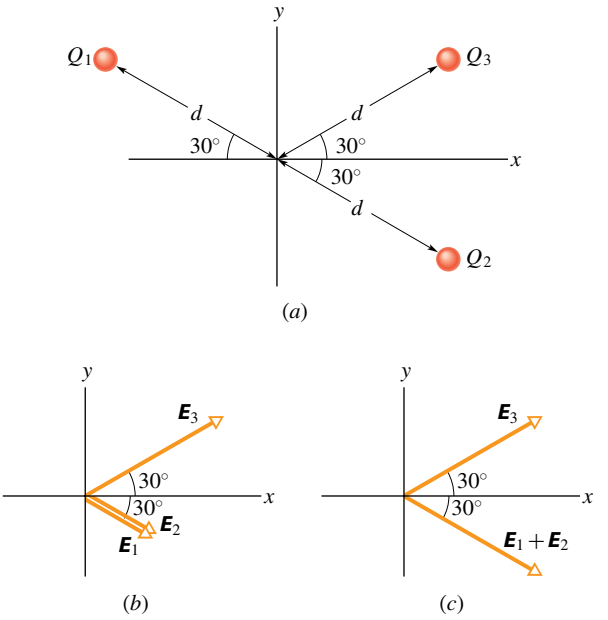
Pro zjednodušení výpočtu můžeme však také využít symetrie úlohy. Z obr. 23.8b plyne, že $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_2$ mají stejný směr. Proto i jejich vektorový součet má tento směr a velikost bude

$$E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2} = \\ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{d^2},$$

což je stejná velikost, jakou má $\boldsymbol{E}_3$.

Zbývá sečíst dva vektory, a to $\boldsymbol{E}_3$ a $\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$, které mají stejnou velikost a jsou symetrické vzhledem k ose x (obr. 23.8c). Z toho plyne, že y-ové složky těchto dvou vektorů se navzájem ruší. Protože x-ové složky obou vektorů jsou kladné, má výsledná intenzita $\boldsymbol{E}$ směr osy x a její velikost je

$$E = 2E_{3x} = 2E_3\cos 30^\circ = \\ = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{d^2}(0{,}866) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{6{,}93Q}{d^2}. \quad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 23.8 Příklad 23.2. (a) Tři částice s náboji Q_1, Q_2, Q_3 se nacházejí ve stejné vzdálenosti d od počátku souřadnic. (b) Vektory intenzit $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ polí buzených v počátku souřadnic těmito třemi částicemi. (c) Vektor intenzity $\boldsymbol{E}_3$ a vektorový součet $\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ v počátku souřadnic.

PŘÍKLAD 23.3

Předpokládejme pro jednoduchost, že jádro atomu uranu je kulově symetrické a má poloměr $R = 6{,}8\cdot10^{-15}$ m. Za předpokladu, že kladný náboj jádra je rozložen rovnoměrně, určete elektrickou intenzitu, kterou tento náboj budí v bodě na povrchu jádra.

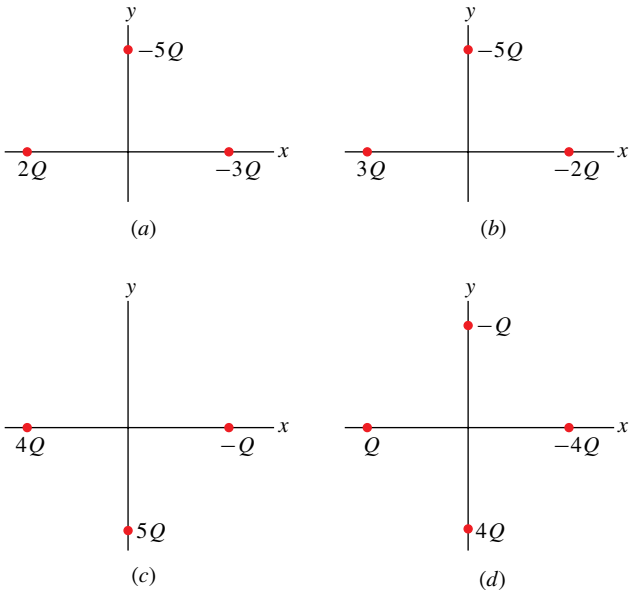
ŘEŠENÍ: Jádro má kladný náboj Ze, kde atomové číslo $Z = 92$ udává počet protonů v jádře a $e = 1{,}60\cdot10^{-19}$ C je náboj protonu. Je-li náboj v jádře rozložen rovnoměrně, lze použít první slupkový teorém z kap. 22. Elektrostatická síla působící na kladný testovací náboj umístěný vně jádra je stejná, jako by celý náboj jádra byl soustředěn v jeho středu.

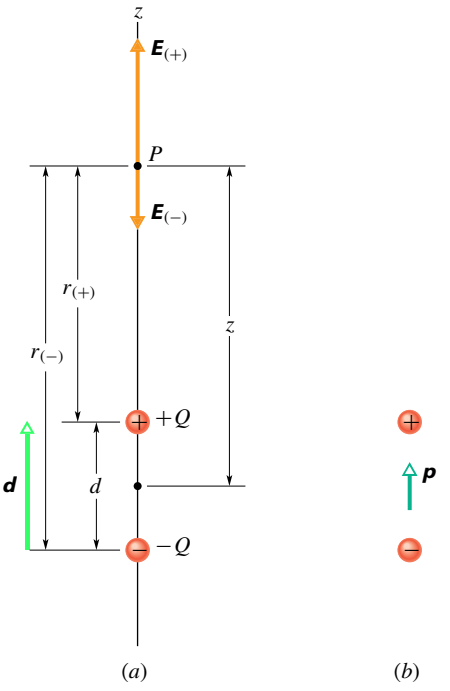
Z rov. (23.1) plyne, že také intenzita pole buzeného jádrem je stejná, jako by byl všechen jeho náboj soustředěn v jeho středu. Podle rov. (23.3) je velikost intenzity

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze}{R^2} = \\ = \frac{(8{,}99\cdot10^9\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}})(92)(1{,}60\cdot10^{-19}\ \mathrm{C})}{(6{,}8\cdot10^{-15}\ \mathrm{m})^2} = \\ = 2{,}9\cdot10^{21}\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Protože náboj jádra je kladný, směřuje vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ směrem od středu jádra.

KONTROLA 2: Obrázek znázorňuje čtyři situace, v nichž jsou nabité částice ve stejné vzdálenosti od počátku. Seřaďte tyto případy sestupně podle velikosti intenzity výsledného elektrického pole v počátku souřadnic.





Obr. 23.9 (a) Elektrický dipól. Intenzity $\boldsymbol{E}_{(+)}$ a $\boldsymbol{E}_{(-)}$ v bodě P na ose dipólu jsou buzeny náboji $+Q$ a $-Q$. Vzdálenost bodu P od jednotlivých nábojů, které tvoří dipól, je $r_{(+)}$ a $r_{(-)}$. (b) Dipólový moment dipólu $\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d}$ směřuje od záporného náboje ke kladnému.

23.5 ELEKTRICKÉ POLE DIPÓLU

Na obr. 23.9a jsou dva náboje $+Q$ a $-Q$. Poloha náboje $+Q$ vůči $-Q$ je dána vektorem $\boldsymbol{d}$. Jak už bylo uvedeno v souvislosti s obr. 23.6, takové uspořádání se nazývá **elektrický dipól**. Určeme intenzitu pole dipólu v bodě P, který je ve vzdálenosti z od středu dipólu na *ose dipólu* (tj. na přímce procházející oběma náboji tvořícími dipól).

Vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ v bodě P — a také intenzit $\boldsymbol{E}_{(+)}$ a $\boldsymbol{E}_{(-)}$ polí buzených jednotlivými náboji tvořícími dipól — leží v ose dipólu; zvolíme ji za osu z. Použitím principu superpozice najdeme velikost E intenzity v bodě P:

$$\begin{aligned} E &= E_{(+)} - E_{(-)} = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_{(+)}^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_{(-)}^2} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(z-\frac{1}{2}d\right)^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(z+\frac{1}{2}d\right)^2}. \end{aligned} \tag{23.5}$$

Po malých úpravách můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left(\left(1-\frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1+\frac{d}{2z}\right)^{-2}\right). \tag{23.6}$$

Obvykle se zajímáme o elektrické působení dipólu ve vzdálenostech, které jsou velké ve srovnání s jeho rozměry, tj. ve vzdálenostech $z \gg d$. Pro tak velké vzdálenosti v rov. (23.6) platí $d/(2z) \ll 1$. Oba výrazy v závorkách můžeme proto rozvinout podle binomické věty

$$\left(\left(1+\frac{2d}{2z(1!)}+\ldots\right) - \left(1-\frac{2d}{2z(1!)}+\ldots\right)\right).$$

Pro velikost intenzity tedy platí

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left[\left(1+\frac{d}{z}+\ldots\right) - \left(1-\frac{d}{z}+\ldots\right)\right]. \tag{23.7}$$

Vynechané členy v obou rozvojích v rov. (23.7) obsahují d/z ve vyšších mocninách. Protože $d/z \ll 1$, příspěvky těchto členů jsou stále menší a při aproximaci E ve velkých vzdálenostech je můžeme zanedbat. V naší aproximaci můžeme rov. (23.7) zapsat ve tvaru

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\frac{2d}{z} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Qd}{z^3}. \tag{23.8}$$

Součin Qd udává velikost p vektorové veličiny, kterou nazýváme **elektrický dipólový moment** $\boldsymbol{p}$. Rov. (23.8)

můžeme tedy psát ve tvaru

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3} \qquad \text{(elektrický dipól).} \qquad (23.9)$$

Vektor $\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d}$ podle definice směřuje od záporného konce dipólu ke kladnému (obr. 23.9b).

Jak plyne z rov. (23.9), měříme-li elektrické pole dipólu pouze ve vzdálených bodech, nemůžeme určit odděleně hodnoty Q a d, ale pouze hodnotu jejich součinu. Pole ve vzdálených bodech se nezmění, jestliže se například zdvojnásobí Q a současně d klesne na polovinu. Dipólový moment je tedy základní vlastností dipólu.

Ačkoli rov. (23.9) platí pouze pro vzdálené body na ose dipólu, lze dokázat, že velikost intenzity E pole dipólu klesá se vzdáleností: $E \sim 1/r^3$ pro *všechny* vzdálené body bez ohledu na to, leží-li na ose dipólu nebo ne; r zde označuje vzdálenost mezi uvažovaným bodem a středem dipólu.

Ze srovnání obr. 23.9 s průběhem siločár na obr. 23.6 je vidět, že směr intenzity $\boldsymbol{E}$ pro vzdálené body *na ose* dipólu je vždy stejný jako směr dipólového momentu $\boldsymbol{p}$. To platí bez ohledu na to, kam jsme umístili bod P na ose dipólu.

Z rov. (23.9) plyne, že zdvojnásobíme-li vzdálenost uvažovaného bodu od dipólu, klesne intenzita pole osmkrát. Zdvojnásobíme-li však vzdálenost od bodového náboje, zmenší se intenzita pole pouze čtyřikrát (viz rov. (23.3)). Intenzita pole dipólu klesá tedy se vzdáleností mnohem rychleji než intenzita pole náboje. Fyzikálním důvodem pro tento rychlý pokles je skutečnost, že ze vzdálených bodů se dipól jeví jako dva stejně velké, ale opačné náboje, které téměř — ale ne zcela — splývají. Proto se také jejich pole ve vzdálených bodech téměř — i když ne zcela — ruší.

PŘÍKLAD 23.4

Molekula vodní páry budí ve svém okolí stejné elektrické pole jako dipól na obr. 23.9. Její dipólový moment má velikost $p = 6{,}2\cdot10^{-30}$ C·m. Jaká je velikost intenzity pole ve vzdálenosti $z = 1{,}1$ nm od molekuly na její dipólové ose? (Tato vzdálenost je dostatečně velká, abychom mohli použít rov. (23.9)).

ŘEŠENÍ: Z rov. (23.9) plyne

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3} = \frac{(6{,}2\cdot10^{-30}\ \text{C·m})}{2\pi(8{,}85\cdot10^{-12}\ \text{C}^2\text{·N}^{-1}\text{·m}^{-2})(1{,}1\cdot10^{-9}\ \text{m})^3} =$$
$$= 8{,}4\cdot10^{7}\ \text{N·C}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

23.6 ELEKTRICKÉ POLE NABITÉHO VLÁKNA

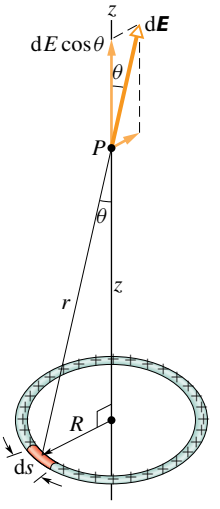
Dosud jsme uvažovali pole vytvářené jedním nebo nanejvýše několika bodovými náboji. Nyní uvažujme rozložení náboje, které je tvořeno velkým množstvím velmi těsně vedle sebe umístěných bodových nábojů, prostírajících se na vlákně, na ploše, nebo uvnitř nějakého objemu. Mluvíme o **spojitém rozložení náboje**. V tomto odstavci vyšetříme elektrické pole spojitě nabitého vlákna a plochy. S nabitým objemem jsme se již setkali v př. 23.3, kde jsme určili intenzitu pole vně rovnoměrně nabité koule. V kap. 24 vypočteme intenzitu i uvnitř takové koule.

Když se zabýváme spojitě rozloženým nábojem, popisujeme náboj na tělese pomocí **hustoty náboje**. Je to náboj, který připadá na jednotku délky (nabitého vlákna), nebo na jednotkovou plochu (nabité plochy), nebo na jednotku objemu (nabitého tělesa). V tab. 23.2 jsou uvedeny příslušné hustoty nábojů s jejich označením a jednotkou v soustavě SI.

Tabulka 23.2 **Některé charakteristiky popisující rozložení elektrického náboje**

NÁZEV	ZNAČKA	JEDNOTKA SI
Náboj	Q	C
Délková hustota náboje	τ	C·m^{-1}
Plošná hustota náboje	σ	C·m^{-2}
Objemová hustota náboje	ϱ	C·m^{-3}

Na obr. 23.10 je tenký nevodivý prstenec o poloměru R s rovnoměrně rozloženým kladným nábojem o délkové hustotě τ. Jaká je intenzita $\boldsymbol{E}$ elektrického pole v bodě P, který je ve vzdálenosti z od roviny prstence na jeho ose souměrnosti?



Obr. 23.10 Prstenec s rovnoměrně rozloženým kladným nábojem. Na element délky ds připadá element náboje $\tau\,ds$, který budí v bodě P pole o intenzitě $d\boldsymbol{E}$. Složka $d\boldsymbol{E}$ ve směru osy prstence je $dE\cos\theta$.

Abychom našli odpověď, nemůžeme přímo použít rov. (23.3), která udává intenzitu pole vytvářeného bodovým nábojem: prstenec není bod. Můžeme ho však myšleně rozdělit na infinitezimální elementy tak malé, že je můžeme považovat za bodové, a pak pro každý z nich použít rov. (23.3). Intenzitu, kterou v bodě P budí prstenec, dostaneme podle principu superpozice jako vektorový součet intenzit, které budí jednotlivé nábojové elementy.

Nechť $\mathrm{d}s$ je délka elementu prstence. Protože τ je náboj připadající na jednotku délky, má element prstence infinitezimální náboj o velikosti

$$\mathrm{d}Q = \tau\,\mathrm{d}s \tag{23.10}$$

a ten vytváří v bodě P ve vzdálenosti r pole o intenzitě $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$. Element považujeme za bodový náboj a s užitím rov. (23.10) můžeme z rov. (23.3) vyjádřit velikost $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\,\mathrm{d}s}{r^2}. \tag{23.11}$$

Protože $r^2 = z^2 + R^2$, můžeme rov. (23.11) přepsat do tvaru

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\,\mathrm{d}s}{(z^2+R^2)}. \tag{23.12}$$

Z obr. 23.10 plyne, že $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ svírá s osou prstence (kterou jsme zvolili za osu z) úhel θ a má nenulovou složku jak ve směru kolmém k této ose, tak i rovnoběžném s ní.

Každý element náboje na prstenci vytváří v bodě P infinitezimální pole o intenzitě $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$, jejíž velikost je dána rov. (23.12). Všechny tyto vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ mají stejné z-ové složky. Průměty kolmé k ose souměrnosti mají stejnou velikost, ale míří do různých směrů. Ke každému z nich přitom existuje druhý, opačně orientovaný; takové dvojice průmětů se spolu vyruší. Výsledná intenzita v bodě P proto leží v ose z a má velikost rovnou součtu z-ových složek intenzit $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$.

Podle obr. 23.10 má z-ová složka $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ velikost $\mathrm{d}E\cos\theta$. Dále odsud plyne, že

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}. \tag{23.13}$$

Z rov. (23.13) a (23.12) dostáváme

$$\mathrm{d}E\cos\theta = \frac{z\tau}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}s. \tag{23.14}$$

Velikost výsledné intenzity získáme integrací rovnice (23.14) podél obvodu prstence, tj. od $s = 0$ do $s = 2\pi R$. Protože s je jediná veličina v rov. (23.14), která se během integrace mění, můžeme ostatní veličiny vytknout před integrál. Integrace pak dává

$$E = \int \mathrm{d}E\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\tau}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}s = \\ = \frac{z\tau(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}. \tag{23.15}$$

Protože τ je náboj připadající na jednotkovou délku prstence, je člen $\tau(2\pi R)$ v rov. (23.15) roven celkovému náboji prstence Q. Rov. (23.15) můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$E = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}} \qquad \text{(nabitý prstenec).} \tag{23.16}$$

Je-li náboj na prstenci záporný, je velikost intenzity v bodě P také dána rov. (23.16), ale vektor $\boldsymbol{E}$ je orientován směrem k prstenci.

Uvažujme nyní rov. (23.16) pro bod na ose z, který je tak daleko od prstence, že $z \gg R$. Pro takový bod můžeme výraz $z^2 + R^2$ v rov. (23.16) nahradit výrazem z^2; rov. (23.16) přejde do tvaru

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2} \qquad \text{(nabitý prstenec ve velké vzdálenosti).} \tag{23.17}$$

To je pochopitelný výsledek, protože z velké vzdálenosti se prstenec jeví jako bodový náboj. Dosadíme-li v rov. (23.17) r za z, dostaneme skutečně rov. (23.3) pro intenzitu elektrického pole bodového náboje.

Uvažujme dále rov. (23.16) pro bod ve středu prstence, tj. pro $z = 0$. V tomto bodě vychází $E = 0$. To je opět pochopitelný výsledek, protože když umístíme testovací náboj do středu prstence, nebude na něj působit žádná výsledná síla: síla, kterou působí libovolný element prstence, se bude rušit se silou, kterou působí element k němu protilehlý. To znamená, že je nulová také intenzita elektrického pole.

PŘÍKLAD 23.5

Na obr. 23.11a je ebonitová tyč rovnoměrně nabitá nábojem $-Q$. Tyč je ohnuta do oblouku o středovém úhlu 120° a poloměru r. Zvolme souřadnicový systém tak, že osa x splývá s osou oblouku a počátek je v jeho středu křivosti P. Vyjádřete pomocí Q a r intenzitu $\boldsymbol{E}$ elektrického pole vytvořeného tyčí v bodě P.

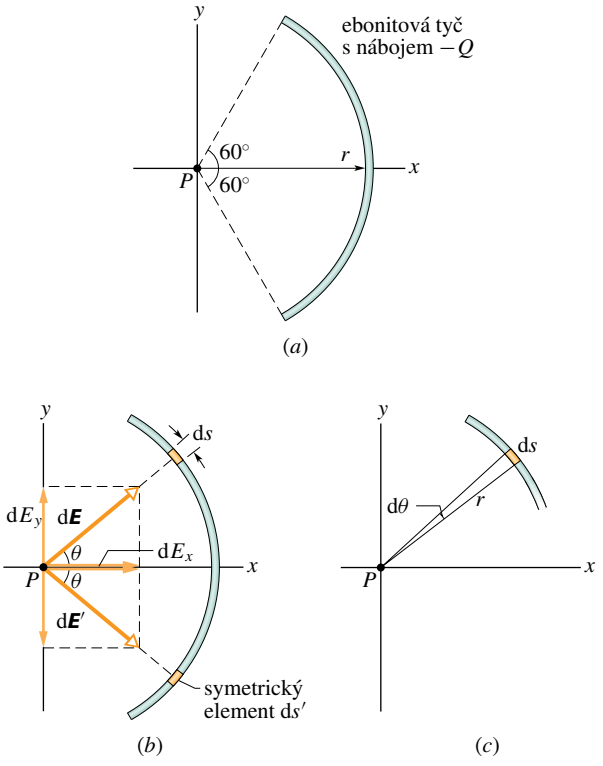
ŘEŠENÍ: Uvažujme infinitezimální element tyče o délce $\mathrm{d}s$, který je nad osou x a jehož průvodič svírá s osou x úhel θ (obr. 23.11b). Nechť τ je délková hustota náboje na tyči. Pak element $\mathrm{d}s$ má infinitezimální náboj o velikosti

$$\mathrm{d}Q = \tau\,\mathrm{d}s. \tag{23.18}$$

Ten vytváří v bodě P, který je ve vzdálenosti r od elementu, pole o infinitezimální intenzitě $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$. Považujeme-li element za bodový náboj, můžeme pomocí rov. (23.3) vyjádřit velikost $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ vztahem

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\,\mathrm{d}s}{r^2}. \qquad (23.19)$$

Protože náboj $\mathrm{d}Q$ je záporný, směřuje $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ k $\mathrm{d}s$.



Obr. 23.11 Příklad 23.5. (a) Ebonitová tyč s nábojem $-Q$ tvoří oblouk o poloměru r se středovým úhlem 120°; bod P je středem křivosti oblouku. (b) Infinitezimální element $\mathrm{d}s$ v horní části tyče, jehož průvodič svírá s osou x úhel θ, budí v bodě P elektrické pole $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$. Element $\mathrm{d}s'$, symetrický k $\mathrm{d}s$ podle osy x, budí v bodě P pole $\mathrm{d}\boldsymbol{E}'$, které má stejnou velikost. (c) Oblouku délky $\mathrm{d}s$ odpovídá úhel $\mathrm{d}\theta$.

Ke každému elementu $\mathrm{d}s$ existuje symetricky umístěný element $\mathrm{d}s'$ (zrcadlový obraz) na spodní polovině tyče. Intenzita $\mathrm{d}\boldsymbol{E}'$, kterou budí v bodě P element $\mathrm{d}s'$, má velikost rovněž danou rov. (23.19), přičemž vektor intenzity směřuje směrem k $\mathrm{d}s'$ (obr. 23.11b). Je zřejmé, že y-ové složky vektorů $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{E}'$ jsou stejně velké, ale mají opačná znaménka; jejich součet je proto nulový. Dále vidíme, že jejich x-ové složky jsou stejné. Abychom našli intenzitu pole buzeného tyčí, stačí sečíst (integrovat) pouze x-ové složky infinitezimálních intenzit buzených všemi elementy tyče. Z obr. 23.11b a rov. (23.19) dostáváme pro velikost x-ové složky $\mathrm{d}E_x$ buzené elementem $\mathrm{d}s$

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r^2}\cos\theta\,\mathrm{d}s. \qquad (23.20)$$

Rov. (23.20) má dvě proměnné, θ a s. Ty však nejsou nezávislé. Element $\mathrm{d}s$ vyjádříme vztahem

$$\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\theta,$$

kde $\mathrm{d}\theta$ je úhel, příslušný oblouku $\mathrm{d}s$ (obr. 23.11c). Nyní můžeme integrovat rov. (23.20) přes středový úhel od $\theta = -60°$ do $\theta = 60°$. Pro intenzitu pole, které v bodě P budí celá tyč, dostaneme

$$\begin{aligned} E_x &= \int \mathrm{d}E_x = \int_{-60°}^{60°} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r^2} r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}\int_{-60°}^{60°}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}\left[\sin\theta\right]_{-60°}^{60°} = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}[\sin 60° - \sin(-60°)] = \\ &= \frac{1{,}73\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}. \end{aligned} \qquad (23.21)$$

Určíme ještě τ. Tyči odpovídá středový úhel 120°, tj. tyč tvoří třetinu celé kružnice. Její délka je tedy $2\pi r/3$ a délková hustota náboje

$$\tau = \frac{\text{náboj}}{\text{délka}} = \frac{Q}{2\pi r/3} = \frac{0{,}477Q}{r}.$$

Dosazením do rov. (23.21) a úpravou dostáváme

$$E_x = \frac{1{,}73(0{,}477Q)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{0{,}83Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vektor $\boldsymbol{E}$ směřuje k tyči, podél osy symetrie rozložení náboje.

RADY A NÁMĚTY

Bod 23.1: *Výpočet pole nabitého vlákna*

Podáme obecný návod, jak určit intenzitu pole, které v bodě P budí rovnoměrně nabité vlákno, buď přímé, nebo ve tvaru oblouku. Zvolíme element náboje $\mathrm{d}Q$, najdeme intenzitu $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ buzenou tímto elementem a $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ integrujeme přes celé nabité vlákno.

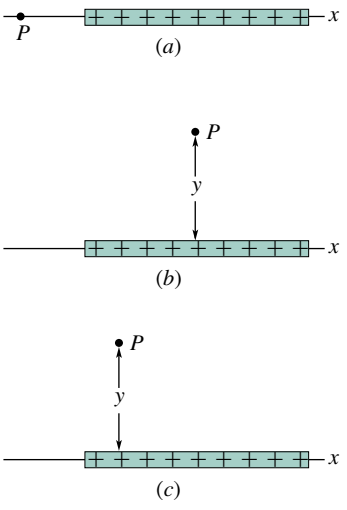
1. Má-li nabité vlákno tvar oblouku, je $\mathrm{d}s$ délka elementárního oblouku. Je-li přímé, zvolíme v jeho směru osu x a pak $\mathrm{d}x$ je délka elementu. Délkový element si označíme na náčrtku.
2. Vyjádříme element náboje $\mathrm{d}Q$ zvoleného délkového elementu buď jako $\mathrm{d}Q = \tau\,\mathrm{d}s$, nebo $\mathrm{d}Q = \tau\,\mathrm{d}x$.
3. Vyjádříme intenzitu $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ pole buzeného v bodě P nábojem $\mathrm{d}Q$ z rov. (23.3), kde $\mathrm{d}Q$ je rovno $\tau\,\mathrm{d}s$ (nebo $\tau\,\mathrm{d}x$). Je-li náboj vlákna kladný, zakreslíme v bodě P vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$, který směřuje od elementu $\mathrm{d}Q$. Je-li náboj záporný, zakreslíme vektor směřující k $\mathrm{d}Q$.
4. Vždy hledáme, zda je v rozložení nábojů symetrie. Jestliže bod P leží na ose symetrie, rozložíme vektor intenzity $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$

do dvou směrů, z nichž jeden je k ose symetrie kolmý a druhý je s ní rovnoběžný. Pak zavedeme element dQ' symetrický s dQ. V bodě P zakreslíme vektor $d\boldsymbol{E}'$ pole, které je buzeno elementem dQ', a rozložíme ho do výše uvedených směrů. Jedna ze složek buzená dQ se ruší s odpovídající složkou buzenou dQ' a nemusíme ji dále uvažovat. Složky ve směru kolmém se však sčítají. Integrováním sečteme tyto složky od všech elementů.

5. Existují čtyři typy rovnoměrného rozdělení náboje, kde můžeme zjednodušit integrál podle kroku 4. Každý typ můžeme ještě zobecnit tím, že část vlákna bude nabita kladně a část záporně.

Prstenec, leží-li bod P na jeho ose (obr. 23.10): Ve výrazu pro dE dosadíme $r^2 = z^2 + R^2$ jako v rov. (23.12). Vyjádříme sčítanou složku $d\boldsymbol{E}$ pomocí θ. Tím se zavede $\cos\theta$, ale θ je pro všechny elementy stejné a není tedy proměnnou. Vyjádříme $\cos\theta$ z rov. (23.13). Integrujeme přes s podél obvodu kružnice.

Oblouk kružnice, leží-li bod P v jejím středu (obr. 23.11): Vyjádříme sčítanou složku $d\boldsymbol{E}$ pomocí θ. Tím se zavede buď $\sin\theta$, nebo $\cos\theta$. Zredukujeme výsledné dvě proměnné s a θ na jednu (θ) nahrazením $ds = r\,d\theta$. Integrujeme přes θ jako v př. 23.5 od jednoho konce oblouku ke druhému.



Obr. 23.12 (a) Bod P leží v prodloužení nabitého vlákna. (b) Bod P leží v rovině symetrie vlákna ve vzdálenosti y. (c) Totéž jako (b), ale P neleží v rovině symetrie.

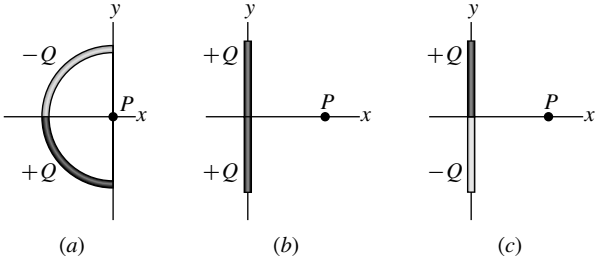
Přímé vlákno, leží-li bod P v prodloužení vlákna jako na obr. 23.12a: Ve výrazu pro $d\boldsymbol{E}$ nahradíme $r = x$. Integrujeme přes x od jednoho konce vlákna ke druhému.

Přímé vlákno, leží-li bod P ve vzdálenosti y jako na obr. 23.12b: Ve výrazu pro $d\boldsymbol{E}$ nahradíme r výrazem obsahujícím x a y. Je-li P na ose vlákna, najdeme výraz pro sčítanou složku $d\boldsymbol{E}$. Tím se zavede buď $\sin\theta$, nebo $\cos\theta$. Zredukujeme výsledné dvě proměnné x a θ na jednu (x) nahrazením goniometrické funkce výrazem obsahujícím x a y. Integrujeme přes x od jednoho konce vlákna k druhému.

Jestliže P neleží na ose (obr. 23.12c), sestavíme integrál pro součet složek dE_x a integrujeme přes x, abychom našli E_x. Sestavíme také integrál pro součet složek dE_y a integrujeme opět přes x, abychom našli E_y. Obvyklým způsobem najdeme ze složek E_x a E_y velikost E a směr $\boldsymbol{E}$.

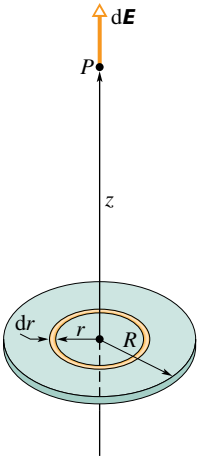
6. Má-li být výsledek vyjádřen pomocí celkového náboje Q, nahradíme $\tau = Q/s$, kde s je délka vlákna (např. pro prstenec je s rovno obvodu prstence).

KONTROLA 3: Na obrázku jsou tři nevodivé tyče, jedna ohnutá do oblouku a dvě přímé. Na obou polovinách každé z nich je rovnoměrně rozložen uvedený náboj. Určete pro každou tyč směr intenzity výsledného pole v bodě P.



23.7 ELEKTRICKÉ POLE NABITÉHO DISKU

Na obr. 23.13 je kruhový ebonitový disk o poloměru R, který má na svém horním povrchu rovnoměrně rozložený kladný náboj o plošné hustotě σ (tab. 23.2). Jaká je elektrická intenzita v bodě P, který je ve vzdálenosti z od roviny disku na jeho ose souměrnosti?

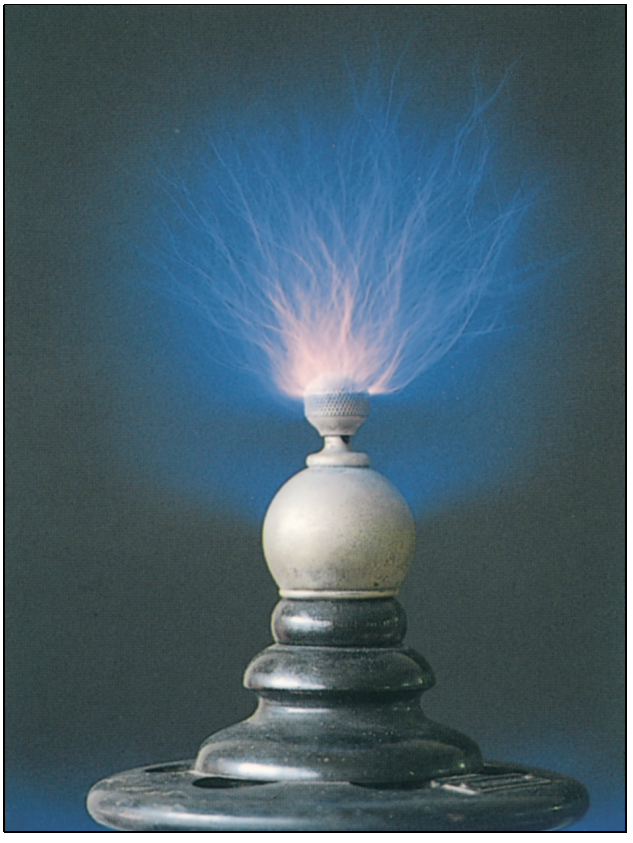


Obr. 23.13 Disk o poloměru R rovnoměrně nabitý kladným nábojem. Vyznačený prstenec má poloměr r a radiální šířku dr. V bodě P na ose souměrnosti budí prstenec infinitezimální intenzitu $d\boldsymbol{E}$.

Rozdělíme disk na soustředné prstence a spočítáme intenzitu v bodě P sečtením (tj. integrací) všech dílčích příspěvků. Na obr. 23.13 je jeden takový prstenec o poloměru r a šířce $\mathrm{d}r$. Protože σ je náboj připadající na jednotku plochy, je náboj na prstenci roven

$$\mathrm{d}Q = \sigma\,\mathrm{d}S = \sigma(2\pi r\,\mathrm{d}r), \qquad (23.22)$$

kde $\mathrm{d}S$ je element plochy prstence.



Je-li elektrická intenzita v okolí nabitého tělesa dostatečně velká, dojde k *elektrickému průrazu* okolního vzduchu: molekuly vzduchu jsou ionizovány (z molekul se uvolní elektrony) a vznikají přechodné vodivé dráhy. Elektrické jiskry, které zde vidíte, tyto dráhy ukazují.

Pole, které budí nabitý prstenec, jsme už počítali. Do rov. (23.16) za Q dosadíme $\mathrm{d}Q$ z rov. (23.22) a za R proměnnou r. Tím získáme výraz pro velikost intenzity $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$, kterou v bodě P budí zvolený prstenec:

$$\mathrm{d}E = \frac{z\sigma 2\pi r\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)^{3/2}}$$

neboli

$$\mathrm{d}E = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\frac{2r\,\mathrm{d}r}{(z^2+r^2)^{3/2}}.$$

Nyní můžeme najít velikost E integrací přes celý povrch disku, tj. integrací podle proměnné r od $r = 0$ do $r = R$, přičemž z zůstává během integrace konstantní. Dostáváme

$$E = \int \mathrm{d}E = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\int_0^R (z^2+r^2)^{-3/2}(2r)\,\mathrm{d}r. \qquad (23.23)$$

Integrál převedeme na tvar $\int X^m\,\mathrm{d}X$ substitucí $X = (z^2 + r^2)$, $m = -\frac{3}{2}$ a $\mathrm{d}X = (2r)\,\mathrm{d}r$. Pro upravený integrál máme

$$\int X^m\,\mathrm{d}X = \frac{X^{m+1}}{m+1}$$

a z rov. (23.23) dostáváme

$$E = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\left[\frac{(z^2+r^2)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^R.$$

Po dosazení mezí a úpravě dostáváme pro velikost intenzity pole buzeného plochým kruhovým nabitým diskem v bodě P na jeho ose

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \quad \text{(nabitý disk)}. \qquad (23.24)$$

Směr intenzity $\boldsymbol{E}$ je kolmý k disku.

Pro $R \to \infty$ a z konečné se v rov. (23.24) druhý člen v závorce blíží k nule a rovnice se redukuje na tvar

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{(nekonečná vrstva)}. \qquad (23.25)$$

To je intenzita pole buzeného nekonečnou vrstvou náboje rovnoměrně rozloženého na jedné straně nevodiče. Siločáry v takové situaci jsou zobrazeny na obr. 23.4.

Rov. (23.25) dostaneme i v případě, že $z \to 0$ a R zůstává konečné. To znamená, že v bodech velmi blízko disku je intenzita stejná, jako kdyby byl disk nekonečný.

PŘÍKLAD 23.6

Disk na obr. 23.13 je na svém horním povrchu nabit nábojem s plošnou hustotou $\sigma = +5{,}3\,\mu\mathrm{C\cdot m^{-2}}$. (To odpovídá situaci na fotosenzitivním válci kopírovacího stroje.)

(a) Jaká je elektrická intenzita u povrchu disku?

ŘEŠENÍ: Směr $\boldsymbol{E}$ je kolmý k disku a velikost E plyne z rov. (23.25):

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{(5{,}3\cdot10^{-6}\,\mathrm{C\cdot m^{-2}})}{2(8{,}85\cdot10^{-12}\,\mathrm{C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}})} =$$
$$= 3{,}0\cdot10^5\,\mathrm{N\cdot C^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato hodnota platí pro všechny body, které jsou blízko povrchu disku, a přitom dostatečně daleko od jeho okraje.

Je-li intenzita pole v látce dostatečně velká, dojde k *elektrickému průrazu*, při kterém v materiálu náhle vznikají vodivé cesty. Ve vzduchu k němu za atmosférického tlaku dochází, jestliže intenzita přesáhne hodnotu $3{\cdot}10^6\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$. Při průrazu probíhají elektrony jednou či více vodivými dráhami a vytvářejí *elektrické jiskry*. Protože vypočítaná intenzita v tomto příkladu je pouze $3{\cdot}10^5\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$, k jiskření ještě nedojde.

(b) Užitím binomické věty najděte elektrickou intenzitu v bodě na ose disku ve velké vzdálenosti od něj.

ŘEŠENÍ: Slova *ve velké vzdálenosti od disku* znamenají, že vzdálenost z je mnohem větší než rozměry disku. To nám umožní použít binomickou větu pro aproximaci odmocniny vystupující v rov. (23.24).

Binomická věta má tvar (dodatek E)

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots, \quad (23.26)$$

kde $|x| < 1$. Odmocninu vyjádříme ve tvaru

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{z}{z\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} = \left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2},$$

který je vhodný pro užití binomické věty s $x = R^2/z^2$ a $n = -\frac{1}{2}$. Protože z je mnohem větší než R, je také $|x| < 1$.

Podle rov. (23.26) můžeme rozvinout

$$\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}\frac{R^2}{z^2} + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}\frac{R^4}{z^4} + \dots.$$

Následující členy na pravé straně jsou stále menší. Požadovaný výsledek můžeme dostatečně přesně aproximovat zanedbáním členů menších než R^2/z^2, což dává

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \doteq 1 - \frac{R^2}{2z^2}.$$

Dosazením tohoto výrazu do rov. (23.24) dostáváme

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\left(1-\frac{R^2}{2z^2}\right)\right) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\frac{R^2}{z^2}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Tento výraz můžeme vyjádřit pomocí náboje Q rozloženého na povrchu disku, neboť $\sigma = Q/S$, kde $S = \pi R^2$. Je tedy

$$E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\frac{R^2}{z^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{R^2}{z^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2}. \quad \text{(Odpověď)} \quad (23.27)$$

V bodech na ose disku, pro které je $z \gg R$, je podle rov. (23.27) pole buzené nábojem Q na povrchu disku stejné jako pole buzené bodovou částicí se stejným nábojem Q.

23.8 BODOVÝ NÁBOJ V ELEKTRICKÉM POLI

V předcházejících čtyřech článcích jsme se zabývali prvním z našich dvou úkolů: nalézt pro dané rozdělení náboje elektrické pole, které je nábojem buzeno v okolním prostoru. Nyní se budeme zabývat druhým úkolem: co se stane s nabitou částicí, která se nachází v elektrickém poli, buzeném jinými statickými nebo pomalu se pohybujícími náboji.

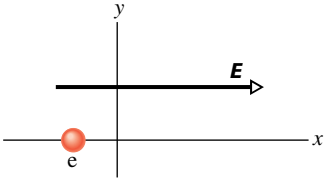
Na takovou částici působí elektrostatická síla vyjádřená vztahem

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}, \quad (23.28)$$

kde Q je náboj částice (zahrnující i znaménko) a $\boldsymbol{E}$ je intenzita pole, které v místě, kde se částice nachází, budí ostatní náboje. (Toto pole nazýváme někdy *vnějším polem*, abychom zdůraznili, že nezahrnuje *vlastní pole* částice. Nabitá částice není ovlivněna svým vlastním elektrickým polem.) Z rov. (23.28) je vidět, že platí:

Na nabitou částici působí ve vnějším elektrickém poli $\boldsymbol{E}$ elektrostatická síla $\boldsymbol{F}$. Má směr $\boldsymbol{E}$, jestliže je náboj Q částice kladný, a opačný směr, jestliže je náboj Q záporný.

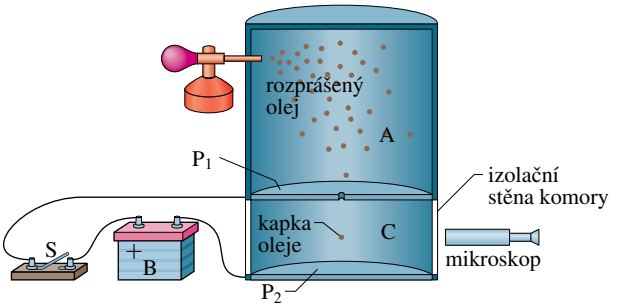
KONTROLA 4: (a) Určete na obrázku, jaký je směr elektrostatické síly, kterou na elektron působí znázorněné elektrické pole. (b) Ve kterém směru je elektron urychlován, jestliže se před vstupem do elektrického pole pohybuje rovnoběžně s osou y? (c) Jestliže se na počátku pohybuje ve směru osy x, bude velikost jeho rychlosti vzrůstat, klesat, nebo zůstane stejná?



Měření elementárního náboje

Rov. (23.28) se uplatní při měření velikosti náboje elektronu, tj. elementárního náboje e, které prováděl americký fyzik Robert A. Millikan v letech 1910–1913. Na obr. 23.14 je zobrazeno jeho zařízení.

Vstřikujeme-li drobné olejové kapky do komory A, některé z nich se při srážkách s ionty vzduchu nabijí kladně, jiné záporně. Uvažujme kapku o poloměru r a hmotnosti m, která padá dolů malým otvorem v desce P_1 do komory C. Předpokládejme, že kapka má záporný náboj $-Q_1$. Pomalu se pohybující kapku brzdí síla odporu prostředí o velikosti



Obr. 23.14 Millikanovo zařízení pro měření elementárního náboje e. Jestliže nabitá olejová kapka prochází otvorem v desce P_1 do komory C, můžeme její pohyb řídit zapínáním a vypínáním spínače S, tedy vytvářením nebo rušením elektrického pole v komoře C. Kapku pozorujeme mikroskopem a z doby průchodu mezi dvěma vodorovnými vlákny v ohniskové rovině okuláru měříme její rychlost.

$F = 6\pi\eta r v$ (Stokesův vzorec), kde η je dynamická viskozita vzduchu. Proto kapka záhy dosáhne mezní rychlosti, kterou určíme z rovnováhy sil.

Je-li spínač S na obr. 23.14 vypnut, není v komoře C žádné elektrické pole, a podmínka rovnováhy sil dává*

$$mg = 6\pi\eta r v_0.$$

Mezní rychlost v_0 se určí z doby průchodu mezi dvěma vodorovnými vlákny v ohniskové rovině okuláru mikroskopu, kterým pozorujeme kapku.

Zapneme-li spínač S, spojíme komoru C s kladným pólem baterie a ta nabije vodivou desku P_1 kladně a desku P_2 záporně. Nabité desky budí v komoře C elektrické pole, jehož intenzita $\boldsymbol{E}$ směřuje dolů. Podle rov. (23.28) působí toto pole elektrostatickou silou na každou nabitou kapku, která se nachází v komoře, a ovlivňuje její pohyb. Pád kapky se zastaví a kapka začne stoupat. Její mezní rychlost v_1 je určena podmínkou rovnováhy sil

$$Q_1 E - mg = 6\pi\eta r v_1.$$

Změní-li se náboj kapky (srážkou s jiným iontem vzduchu) na $-Q_2$, změní se mezní rychlost jejího stoupání na v_2:

$$Q_2 E - mg = 6\pi\eta r v_2.$$

Z těchto tří vztahů dostaneme

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \frac{mg}{E v_0}(v_2 - v_1).$$

Potom kondenzátor vybijeme a znovu změříme rychlost v_0. Jednu kapku tak mnohokrát proměříme a z každé náhlé změny její rychlosti vypočteme podle výše uvedené rovnice změnu jejího náboje.

Mnohonásobným proměřením kapek Millikan zjistil, že rozdíly ΔQ byly vždy celistvými násobky jistého náboje e, tedy

$$\Delta Q = ne, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots . \qquad (23.29)$$

Hodnota $e \doteq 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C patří mezi základní fyzikální konstanty a nazývá se **elementární náboj**. Millikanův pokus byl důkazem toho, že elektrický náboj je kvantován, a Millikan získal v roce 1923 Nobelovu cenu za fyziku částečně i za tuto práci. Nyní dokážeme měřit elementární náboj mnohem přesněji, a to nepřímo, výpočtem z veličin, které jsou snadněji a přesněji měřitelné.

Inkoustová tiskárna

Potřeba vysoce kvalitního a rychlého tisku si vyžádala hledání alternativ k dotykovému tisku, který se uplatňuje

* Vztlakovou sílu působící na kapku pro jednoduchost neuvažujeme.



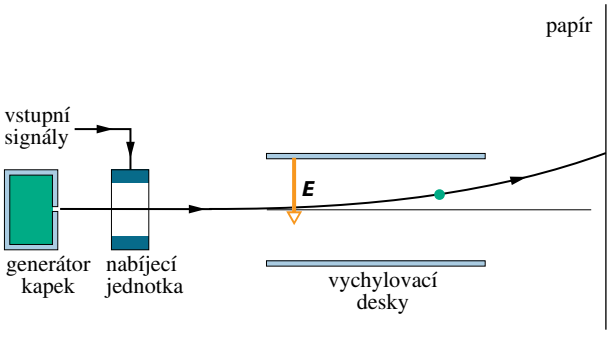


V elektrostatickém odlučovači působí elektrostatické pole na nabité částice popílku. Popílek je zachycen v komíně a neznečistí atmosféru. Odlučovač je v provozu na levé, ale nikoli na pravé fotografii.

např. v mechanickém psacím stroji. Jednou alternativou je tisk nastřikováním drobných inkoustových kapek.

Na obr. 23.15 se záporně nabitá kapka pohybuje mezi dvěma nabitými vychylovacími deskami, mezi kterými je homogenní elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$ směřující svisle dolů. V souladu s rov. (23.28) se kapka vychyluje vzhůru a pak dopadá na papír v místě, které je závislé na velikosti intenzity $\boldsymbol{E}$ a náboje Q.

V praxi se postupuje tak, že $\boldsymbol{E}$ je konstantní a polohu kapky na papíře ovládáme nábojem Q, jenž kapka získá v nabíjecí jednotce, kterou prochází, než vletí do vychylovacího systému. Nabíjecí jednotka je řízena elektronickými signály, v nichž je zakódováno to, co má být vytištěno.



Obr. 23.15 Základní princip inkoustové tiskárny. Vstupním signálem z počítače určujeme náboj předávaný každé kapce a tím polohu na papíře, kam kapka dopadne. K vytvoření jednoho znaku je potřeba asi 100 drobných kapek.

PŘÍKLAD 23.7

V Millikanově zařízení na obr. 23.14 má kapka oleje o poloměru $R = 2{,}76\,\mu\text{m}$ přebytečný náboj tří elektronů. Jaká je velikost a směr intenzity, která způsobí, že kapka zůstává v zařízení v klidu? Hustota ϱ oleje je $920\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (vztlak vzduchu je malý vzhledem k tíhové síle mg a můžeme jej zanedbat).

ŘEŠENÍ: Aby byla kapka v rovnováze, musí elektrostatická síla působící na kapku směřovat vzhůru a mít velikost mg. Z rov. (23.28) a (23.29) plyne velikost elektrostatické síly $F = (3e)E$. Hmotnost kapky vyjádříme jako součin jejího objemu a hustoty. Rovnováha sil pak dává

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 \varrho g = (3e)E.$$

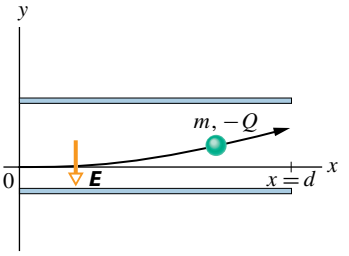
Odtud

$$E = \frac{4\pi R^3 \varrho g}{9e} = \frac{4\pi(2{,}76\cdot10^{-6}\,\text{m})^3(920\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})}{9(1{,}6\cdot10^{-19}\,\text{C})} = 1{,}65\cdot10^{6}\,\text{N}\cdot\text{C}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Protože kapka je nabitá záporně, plyne z rov. (23.28), že $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{F}$ mají opačný směr: $\boldsymbol{F} = -3e\boldsymbol{E}$. Vektor $\boldsymbol{E}$ musí tedy směřovat svisle dolů.

PŘÍKLAD 23.8

Na obr. 23.16 jsou vychylovací desky inkoustové tiskárny se zavedenými souřadnicovými osami. Kapka inkoustu o hmotnosti $m = 1{,}3\cdot10^{-10}\,\text{kg}$ a se záporným nábojem o velikosti $Q = 1{,}5\cdot10^{-13}\,\text{C}$ je vstříknuta do prostoru mezi deskami ve směru osy x rychlostí $v_x = 18\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Délka d desek je 1,6 cm. Desky jsou nabity a budí tedy mezi sebou elektrické pole. Předpokládejme, že pole je homogenní, se svisle dolů orientovanou intenzitou $\boldsymbol{E}$ o velikosti $1{,}4\cdot10^{6}\,\text{N}\cdot\text{C}^{-1}$. Jaká je svislá odchylka kapky od původního směru na úrovni konce desek? (Tíhová síla působící na kapku je malá vzhledem k elektrostatické síle a můžeme ji zanedbat.)



Obr. 23.16 Příklad 23.8. Kapka inkoustu o hmotnosti m se záporným nábojem $-Q$ je vychylována elektrickým polem inkoustové tiskárny.

ŘEŠENÍ: Protože kapka je nabita záporně a elektrické pole směřuje směrem dolů, působí podle rov. (23.28) na kapku směrem *vzhůru* elektrostatická síla o velikosti QE a kapka je urychlována vzhůru s konstantním zrychlením a_y. Použitím druhého Newtonova zákona získáme

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{QE}{m}. \qquad (23.30)$$

Nechť t je doba, kterou potřebuje kapka k tomu, aby prošla oblastí mezi deskami. Za dobu t mají svislá a vodorovná souřadnice kapky hodnotu

$$y = \tfrac{1}{2}a_y t^2 \quad \text{a} \quad d = v_x t, \qquad (23.31)$$

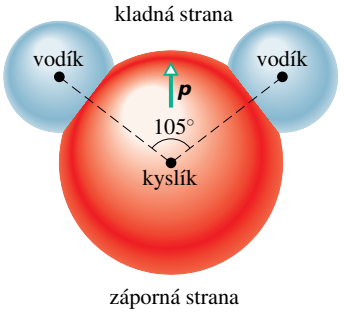
neboť ve směru osy x nepůsobí žádná síla a kapka se tedy pohybuje ve vodorovném směru konstantní rychlostí v_x. Vyloučením t a dosazením z rov. (23.30) za a_y získáme

$$y = \frac{QEd^2}{2mv_x^2} = \frac{(1{,}5\cdot10^{-13}\,\text{C})(1{,}4\cdot10^{6}\,\text{N}\cdot\text{C}^{-1})(1{,}6\cdot10^{-2}\,\text{m})^2}{2(1{,}3\cdot10^{-10}\,\text{kg})(18\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2} = 6{,}4\cdot10^{-4}\,\text{m} = 0{,}64\,\text{mm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

23.9 DIPÓL V ELEKTRICKÉM POLI

Dipólový moment $\boldsymbol{p}$ elektrického dipólu jsme definovali jako vektor, který směřuje od záporného pólu ke kladnému. Uvidíme, že pro popis chování dipólu ve vnějším homogenním elektrickém poli stačí znát vektor $\boldsymbol{p}$.

Jak už bylo uvedeno v př. 23.4, tvoří molekula vody (H_2O) elektrický dipól. Obr. 23.17 ukazuje, proč je tomu tak. Černé body označují jádro kyslíku (mající osm protonů) a dvě jádra vodíku (z nichž každé má jeden proton). Barevné plochy představují oblasti, v nichž se vyskytují elektrony obíhající jádro.



Obr. 23.17 Molekula H_2O: jsou zobrazena tři jádra (reprezentována černými body) a oblasti, v nichž se pohybují elektrony. Dipólový moment $\boldsymbol{p}$ směřuje od (záporné) kyslíkové části molekuly ke (kladné) vodíkové části.

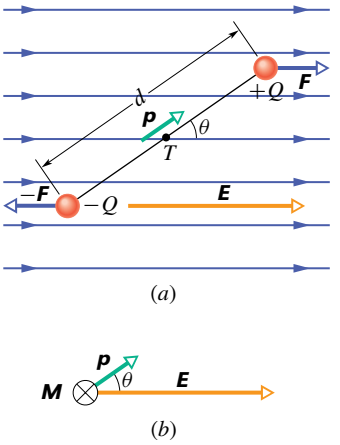
Atomy vodíku a atom kyslíku neleží v molekule vody v jedné přímce, ale svírají úhel 105° (obr. 23.17). V důsledku toho má molekula „kyslíkovou část" a „vodíkovou část". Navíc všech deset elektronů molekuly se pohybuje v blízkosti kyslíkového jádra. Proto je kyslíková část molekuly o něco negativnější než vodíková část, a tak se vytváří elektrický dipólový moment $\boldsymbol{p}$. Je-li molekula vody umístěna do vnějšího elektrického pole, chová se stejně jako dipól na obr. 23.9.

Sledujme, jak se chová dipól ve vnějším homogenním poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$ (obr. 23.18a). Předpokládejme, že se dipól skládá ze dvou opačných nábojů o stejné velikosti Q ve vzdálenosti d, je tuhý vzhledem k působení vnějších elektrostatických sil, ale může se otáčet. Dipólový moment $\boldsymbol{p}$ svírá s vektorem intenzity $\boldsymbol{E}$ úhel θ.

Na nabité konce dipólu působí elektrostatické síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$. Působí v opačném směru a mají stejnou velikost $F = QE$, takže tvoří silovou dvojici.

Výslednice sil, kterými působí pole na dipól, je tedy nulová. Tyto síly však působí na dipól momentem síly. Z rov. (11.30) při $r = d/2$ plyne

$$M = F\frac{d}{2}\sin\theta + F\frac{d}{2}\sin\theta = Fd\sin\theta. \quad (23.32)$$



Obr. 23.18 (a) Dipól v homogenním elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$. Dva stejně velké, ale opačné náboje jsou ve vzdálenosti d. Těžiště T soustavy je uprostřed mezi nimi. Tyč mezi náboji představuje jejich tuhé spojení. (b) Pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$ působí na dipól momentem síly $\boldsymbol{M}$. Vektor $\boldsymbol{M}$ směřuje kolmo od nás, což je znázorněno symbolem ⊗.

Moment síly můžeme také vyjádřit pomocí velikosti intenzity E a dipólového momentu $p = Qd$:

$$M = pE\sin\theta. \quad (23.33)$$

Pro vektor $\boldsymbol{M}$ platí

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} \quad \text{(moment síly působící na dipól)}. \quad (23.34)$$

Vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{E}$ jsou zobrazeny na obr. 23.18b. Moment síly působící na dipól se snaží otočit $\boldsymbol{p}$ do směru $\boldsymbol{E}$, tj. zmenšit úhel θ. Na obr. 23.18 je tato rotace ve směru otáčení hodinových ručiček. Tomu odpovídá podle kap. 11 orientace $\boldsymbol{M}$ proti směru osy z. Platí tedy

$$M_x = M_y = 0, \quad M_z = -pE\sin\theta. \quad (23.35)$$

Potenciální energie dipólu

Potenciální energie dipólu závisí na jeho orientaci v elektrickém poli. Jeho energie je nejmenší, je-li ve své stabilní rovnovážné poloze, tj. jestliže moment $\boldsymbol{p}$ má stejný směr a orientaci jako intenzita $\boldsymbol{E}$ (pak $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$). Při všech ostatních orientacích je potenciální energie dipólu větší. Dipól je tedy podobný kyvadlu, které má nejmenší gravitační potenciální energii ve své rovnovážné poloze — v nejnižším bodě. Pro otočení kyvadla nebo dipólu do libovolné jiné polohy je potřeba práce vnějších sil.

Konfiguraci odpovídající nulové potenciální energii můžeme vždy zvolit zcela libovolně, protože fyzikální význam má pouze *rozdíl* jejích hodnot. Ukazuje se, že výraz

pro potenciální energii dipólu ve vnějším elektrickém poli je nejjednodušší, jestliže zvolíme nulovou hodnotu potenciální energie pro úhel $\theta = 90°$ (obr. 23.18). Potenciální energii E_p dipólu pro libovolnou hodnotu θ pak určíme podle rov. (8.1) ($\Delta E_p = -W$) tak, že vypočteme práci, kterou pole vykoná při otočení dipólu z polohy $\theta' = 90°$ do polohy $\theta' = \theta$. Z rov. (11.44) ($W = \int M\,\mathrm{d}\theta$) a rov. (23.35) dostaneme:

$$E_p = -W = -\int_{90°}^{\theta} M\,\mathrm{d}\theta' = \\ = \int_{90°}^{\theta} pE\sin\theta'\,\mathrm{d}\theta'. \qquad (23.36)$$

Odtud plyne

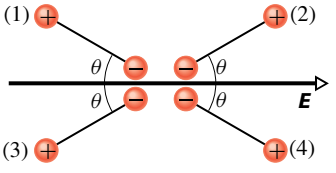
$$E_p = -pE\cos\theta. \qquad (23.37)$$

Ve vektorovém tvaru můžeme zapsat

$$E_p = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} \quad \text{(potenciální energie dipólu).} \qquad (23.38)$$

Z rov. (23.37) a (23.38) plyne, že potenciální energie dipólu je nejmenší ($E_p = -pE$) pro $\theta = 0$, tj. když $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{E}$ mají tentýž směr a orientaci; dipól je ve stabilní rovnováze. A naopak, potenciální energie je největší ($E_p = pE$) pro $\theta = 180°$, tj. když $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{E}$ mají opačnou orientaci; dipól je přitom v rovnováze labilní.

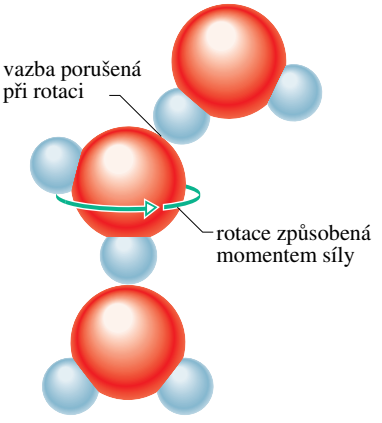
KONTROLA 5: Na obrázku jsou čtyři různé polohy dipólu ve vnějším elektrickém poli. Seřaďte je sestupně (a) podle velikosti momentu sil působícího na dipól, (b) podle potenciální energie dipólu.



Mikrovlnné vaření

Ve vodě, v níž se molekuly mohou relativně volně pohybovat, ovlivňuje elektrické pole buzené každým molekulárním dipólem jiné dipóly v jeho okolí. V důsledku toho se molekuly mohou vázat do skupin po dvou nebo po třech, protože záporný (kyslíkový) konec jednoho dipólu a kladný (vodíkový) konec jiného dipólu se navzájem přitahují. Při vytváření takových skupin se elektrická potenciální energie dipólů přeměňuje na kinetickou energii chaotického pohybu skupin i jejich okolních molekul. Současně se skupiny rozbíjejí srážkami mezi molekulami a přenos energie probíhá také opačně (energie chaotického pohybu se mění v potenciální elektrickou energii molekulárních dipólů). Teplota vody (která souvisí se střední kinetickou energií molekul) se tudíž nemění, protože v průměru je výsledný přenos energie nulový.

V mikrovlnné troubě, v níž jsou generovány mikrovlny, je však situace jiná. Elektrické pole mikrovln rychle osciluje. Je-li v troubě voda, toto oscilující pole působí na molekuly vody časově proměnným momentem síly, který otáčí molekulami tam a zpět ve snaze natočit jejich dipólový moment souhlasně se směrem vektoru intenzity pole. Molekuly, které jsou vázány ve skupinách po dvou, se mohou otáčet kolem osy dané vazbou mezi nimi a zůstávají spojené, ale ve skupině tří spojených molekul se alespoň jedna ze dvou vazeb musí porušit (obr. 23.19).



Obr. 23.19 Skupina tří molekul vody. Moment síly způsobený oscilujícím elektrickým polem v mikrovlnné troubě rozbije jednu z vazeb mezi molekulami a tím celou skupinu.

Energii potřebnou k rozbití těchto vazeb dodává elektrické pole mikrovln. Molekuly, které se odštěpí ze skupin, mohou vytvářet nové skupiny a přenášet tak potenciální elektrickou energii, kterou právě získaly, do kinetické energie chaotického pohybu. Tuto energii voda získává při vytváření skupin, ale neztrácí ji, když jsou skupiny rozbíjeny (působením elektrického pole mikrovln), a proto teplota vody stoupá. Potraviny tedy mohou být uvařeny v mikrovlnné troubě díky ohřívání vody, kterou obsahují. Kdyby molekula vody netvořila elektrický dipól, mikrovlnná trouba by nemohla pracovat. Frekvence mikrovln (2,45 GHz) odpovídá rezonanční frekvenci molekul vody.

PŘÍKLAD 23.9

Neutrální molekula vody má ve svém plynném stavu elektrický dipólový moment $6{,}2{\cdot}10^{-30}$ C·m.

(a) Jaká je vzdálenost středů kladného a záporného náboje v molekule?

ŘEŠENÍ: V této molekule je deset protonů a deset elektronů. Velikost dipólového momentu je tedy

$$p = Qd = (10e)(d),$$

kde d je vzdálenost, kterou hledáme, a e je elementární náboj. Proto

$$d = \frac{p}{10e} = \frac{(6{,}2{\cdot}10^{-30}\ \text{C·m})}{10(1{,}60{\cdot}10^{-19}\ \text{C})} = \\ = 3{,}9{\cdot}10^{-12}\ \text{m} = 3{,}9\ \text{pm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato vzdálenost je velmi malá, je menší než poloměr atomu vodíku.

(b) Jakým maximálním momentem síly může na molekulu působit pole o intenzitě $1{,}5{\cdot}10^4\ \text{N·C}^{-1}$? (Takové pole se dá snadno vytvořit v laboratoři.)

ŘEŠENÍ: Z rov. (23.33) vidíme, že moment síly je maximální pro $\theta = 90°$. Dosazením této hodnoty do rov. (23.33) dostáváme

$$M = pE\sin\theta = \\ = (6{,}2{\cdot}10^{-30}\ \text{C·m})(1{,}5{\cdot}10^4\ \text{N·C}^{-1})\sin 90° = \\ = 9{,}3{\cdot}10^{-26}\ \text{N·m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jakou práci musí vykonat vnější síla, aby otočila molekulu vody o 180°, je-li molekula na počátku ve stabilní rovnovážné poloze $\theta = 0$?

ŘEŠENÍ: Práce je rovna rozdílu potenciální energie v poloze $\theta = 180°$ a $\theta = 0$. Užitím rov. (23.37) dostáváme

$$W_{\text{ext}} = E_{\text{p}}(180°) - E_{\text{p}}(0) = \\ = (-pE\cos 180°) - (-pE\cos 0) = \\ = 2pE = 2(6{,}2{\cdot}10^{-30}\ \text{C·m})(1{,}5{\cdot}10^4\ \text{N·C}^{-1}) = \\ = 1{,}9{\cdot}10^{-25}\ \text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Elektrické pole

Elektrostatické působení nabitých těles vysvětlujeme tím, že každý náboj budí v prostoru kolem sebe elektrické pole. Elektrostatická síla působící na libovolný náboj je způsobena elektrickým polem, které v daném místě budí ostatní náboje.

Definice intenzity elektrického pole

Intenzita elektrického pole $\boldsymbol{E}$ (neboli elektrická intenzita) v daném bodě je definována pomocí elektrostatické síly $\boldsymbol{F}$, kterou v tomto bodě působí pole na kladný testovací náboj Q_0:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q_0}. \qquad (23.1)$$

Elektrické siločáry

Elektrické siločáry slouží k zobrazení směru a velikosti elektrického pole. Vektor elektrické intenzity v určitém bodě leží v tečně k siločáře procházející tímto bodem. Hustota siločár v určitém místě je úměrná velikosti intenzity v tomto místě. Siločáry začínají v kladných nábojích (nebo v nekonečnu) a končí v záporných nábojích (nebo v nekonečnu).

Pole bodového náboje

Velikost E elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$ buzené bodovým nábojem Q je ve vzdálenosti r od tohoto náboje rovna

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q|}{r^2}. \qquad (23.3)$$

Elektrická intenzita $\boldsymbol{E}$ je orientována směrem od budícího náboje, pokud je kladný, a směrem k němu, pokud je záporný.

Pole elektrického dipólu

Elektrický dipól je soustava dvou bodových nábojů stejné velikosti Q, ale opačného znaménka; jejich vzdálenost je d. *Dipólový moment* $\boldsymbol{p}$ má velikost Qd a směřuje od záporného náboje ke kladnému. Velikost elektrické intenzity buzené dipólem ve vzdáleném bodě na ose dipólu (která probíhá oběma náboji) je

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3}, \qquad (23.9)$$

kde z je vzdálenost daného bodu od středu dipólu.

Pole spojitě rozložených nábojů

Intenzitu elektrického pole *spojitě rozloženého náboje* najdeme tak, že nábojové elementy považujeme za bodové náboje a integrací sečteme dílčí pole jimi buzená.

Síla působící na bodový náboj v elektrickém poli

Je-li bodový náboj Q umístěn do elektrického pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$, působí na něj elektrostatická síla

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}. \qquad (23.28)$$

Je-li náboj Q kladný, má $\boldsymbol{F}$ stejnou orientaci jako $\boldsymbol{E}$, pro Q záporné má $\boldsymbol{F}$ orientaci opačnou.

Dipól v elektrickém poli

Je-li elektrický dipól s momentem $\boldsymbol{p}$ umístěn do elektrického pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$, působí na něj pole silovým momentem $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}. \qquad (23.34)$$

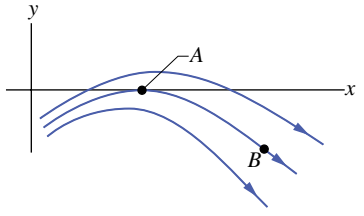
Dipól má potenciální energii E_p, která souvisí s jeho směrem vzhledem k vektoru elektrické intenzity:

$$E_p = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}. \qquad (23.38)$$

Tato potenciální energie je rovna nule, je-li moment dipólu $\boldsymbol{p}$ kolmý k intenzitě $\boldsymbol{E}$; je nejmenší ($E_p = -pE$), má-li $\boldsymbol{p}$ stejný směr a orientaci jako $\boldsymbol{E}$, a je největší ($E_p = pE$), má-li $\boldsymbol{p}$ stejný směr, ale opačnou orientaci než $\boldsymbol{E}$.

OTÁZKY

1. Na obr. 23.20 jsou tři elektrické siločáry. Jaký je směr a orientace elektrostatické síly, která působí na kladný testovací náboj, umístěný (a) v bodě A, (b) v bodě B? (c) Jestliže testovací náboj uvolníme, ve kterém z těchto bodů bude mít větší zrychlení?



Obr. 23.20 Otázka 1

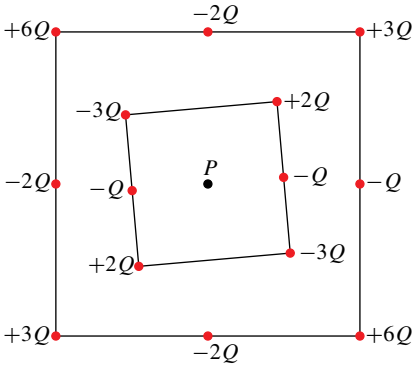
2. Obr. 23.21a zobrazuje dvě nabité částice na přímce. (a) Kde je na ní bod (jinde než v nekonečnu), v němž je výsledné elektrické pole nulové: mezi náboji, vlevo od nich, nebo vpravo? (b) Existuje bod mimo přímku (jiný než v nekonečnu), v němž je výsledné elektrické pole nulové?



Obr. 23.21 Otázky 2 a 3

3. Na obr. 23.21b jsou dva protony a jeden elektron na přímce, ve stejných vzdálenostech. Kde je na této přímce bod (jinde než v nekonečnu), ve kterém je výsledné elektrické pole nulové: vlevo od částic, vpravo od nich, mezi dvěma protony, nebo mezi elektronem a bližším protonem?

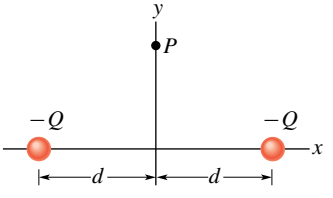
4. Na obr. 23.22 jsou dvě čtvercová uspořádání nabitých částic.



Obr. 23.22 Otázka 4

Čtverce mají společný střed P, ale různoběžné strany. Částice jsou rozložené po obvodu čtverců ve vzdálenostech d nebo $d/2$. Jaká je velikost a směr výsledné intenzity v bodě P?

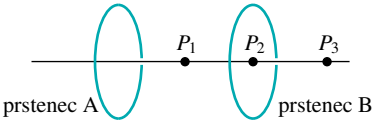
5. Na obr. 23.23 jsou dvě částice s nábojem $-Q$ umístěny symetricky vzhledem k ose y; každá budí v bodě P na této ose elektrické pole. (a) Je velikost intenzit těchto polí v bodě P stejná? (b) Směřuje vektor každé z intenzit směrem k náboji, který ji budí, nebo směrem od něho? (c) Je velikost výsledné intenzity v bodě P rovna součtu velikostí intenzit polí jednotlivých nábojů (tj. je rovna $2E$)? Zesílí se, nebo se vyruší (d) x-ové, (e) y-ové složky vektorů intenzit? (f) Jaký směr má výsledná intenzita v bodě P?



Obr. 23.23 Otázka 5

6. Tři nevodivé rovnoměrně nabité tyče mají tvar segmentů kružnice se stejným poloměrem. Tyč A má náboj $+2Q$ a tvoří oblouk, jemuž odpovídá středový úhel 30°; tyč B má náboj $+6Q$ a tvoří oblouk, jemuž odpovídá středový úhel 90°; tyč C má náboj $+4Q$ a tvoří oblouk se středovým úhlem 60°. Seřaďte tyče sestupně podle velikosti jejich délkové hustoty náboje.

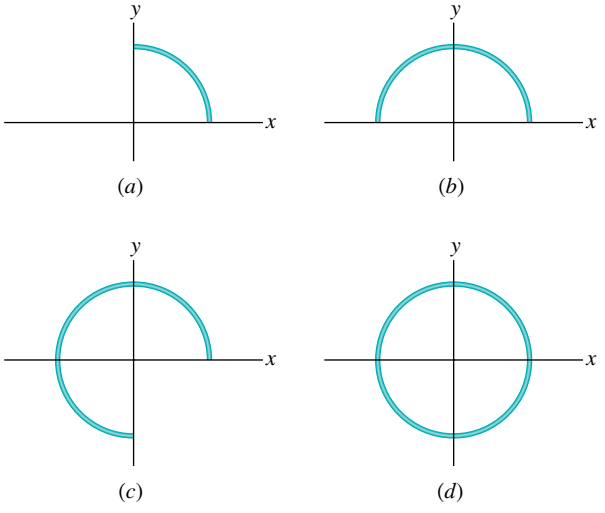
7. Na obr. 23.24 jsou dva stejné kruhové nevodivé prstence se středy na společné ose. Ve třech různých případech jsou na prstencích A a B rovnoměrně rozloženy náboje (1) Q_0 a Q_0, (2) $-Q_0$ a $-Q_0$, (3) $-Q_0$ a Q_0. Seřaďte jednotlivé případy sestupně podle velikosti výsledné intenzity (a) v bodě P_1 uprostřed mezi prstenci, (b) v bodě P_2 ve středu prstence B, (c) v bodě P_3 vpravo od prstence B.



Obr. 23.24 Otázka 7

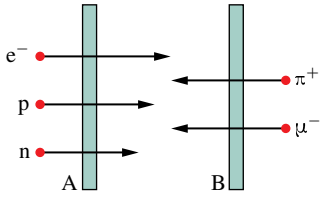
8. Plastiková tyč tvaru čtvrtiny kružnice s rovnoměrně rozloženým nábojem $+Q$ (obr. 23.25a) budí ve středu kružnice (v po-

čátku souřadnicového systému) elektrické pole s intenzitou o velikosti E. Na obr. 23.25b, c, d jsou postupně přidávány další podobné tyče se stejným rovnoměrně rozloženým nábojem $+Q$, až je kružnice úplná. Páté uspořádání (které by mohlo být označeno jako obr. 23.25e) je podobné jako obr. 23.25d s tím rozdílem, že tyč ve čtvrtém kvadrantu má náboj $-Q$. Seřaďte těchto pět uspořádání sestupně podle velikosti elektrické intenzity ve středu kružnice.



Obr. 23.25 Otázka 8

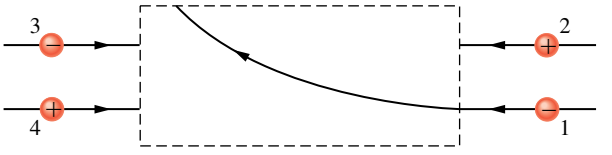
9. Na obr. 23.26 prochází elektron e^- malým otvorem v desce A a pohybuje se směrem k desce B. Homogenní elektrické pole



Obr. 23.26 Otázka 9

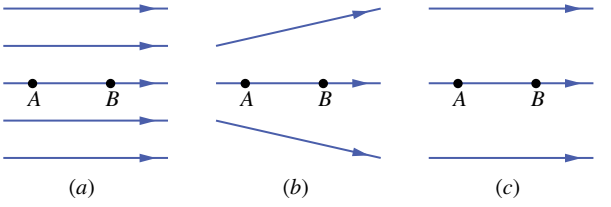
v prostoru mezi deskami zpomaluje elektron, aniž by ho vychylovalo. (a) Jaký je směr pole? (b) Čtyři jiné částice (proton p, pion π^+, mion μ^- a neutron n) procházejí podobně malými otvory buď v desce A, nebo v desce B a pak se pohybují v prostoru mezi deskami. Určete pro každou z těchto částic, zda velikost její rychlosti v oblasti mezi deskami stoupá, klesá, nebo se nemění.

10. Obr. 23.27 ukazuje trajektorii, kterou proletěla nabitá částice 1 v pravoúhlé oblasti s homogenním elektrickým polem; částice byla vychýlena směrem k hornímu okraji stránky. (a) Je intenzita $\boldsymbol{E}$ orientována směrem vlevo, vpravo, k hornímu okraji, nebo k dolnímu okraji stránky? (b) Tři jiné nabité částice vstupují do elektrického pole. Které budou vychýleny směrem k hornímu okraji oblasti a které směrem k dolnímu?



Obr. 23.27 Otázka 10

11. Na obr. 23.28 jsou tři uspořádání elektrických siločár. V každém uspořádání je v bodě A z klidu uvolněn proton, je urychlován elektrickým polem a prochází bodem B. Body A a B mají ve všech třech uspořádáních stejnou vzdálenost. Seřaďte sestupně tato uspořádání podle velikosti hybnosti, které proton dosáhne v bodě B.



Obr. 23.28 Otázka 11

12. (a) V kontrole 5 určete, zda je práce vykonaná polem při otočení dipólu z polohy (1) do polohy (2) kladná, záporná, nebo nulová. (b) Jestliže se místo toho dipól otočí z polohy (1) do polohy (4), je práce vykonaná polem větší, menší, nebo stejná jako v (a)?

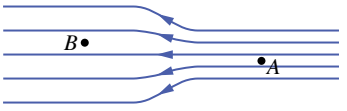
13. Hodnoty potenciální elektrické energie pro čtyři polohy dipólu v elektrickém poli jsou (1) $-5E_p$, (2) $-7E_p$, (3) $3E_p$ (4) $5E_p$, kde E_p je kladné. Seřaďte polohy sestupně podle velikosti (a) úhlu mezi dipólovým momentem $\boldsymbol{p}$ a intenzitou $\boldsymbol{E}$, (b) momentu síly působícího na dipól.

14. Jestliže za suchého dne přejdete po některém druhu koberce a pak se dotknete kovové kliky dveří nebo (pro větší legraci) něčí šíje, může přeskočit jiskra. Proč se tato jiskra objeví? Její jas a hlasitost můžete zvýšit, jestliže dotek provedete nataženým prstem nebo ještě lépe kovovým klíčem.

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 23.3 Elektrické siločáry

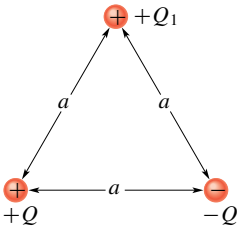
1C. Na obr. 23.29 jsou znázorněny siločáry elektrického pole ležícího v rovině nákresny. V levé části obrázku mají siločáry dvojnásobnou vzdálenost než v části pravé. (a) Jak velká síla působí na proton v bodě A, je-li velikost elektrické intenzity v tomto bodě $40\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$? (b) Jaká je velikost intenzity v bodě B?



Obr. 23.29 Cvičení 1

2C. Načrtněte kvalitativně elektrické siločáry pro dva blízké bodové náboje $+Q$ a $-2Q$.

3C. Na obr. 23.30 jsou tři bodové náboje, které leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Načrtněte siločáry pole, které budí náboje $+Q$ a $-Q$ a určete z nich směr síly, která působí na náboj $+Q_1$ v důsledku přítomnosti ostatních dvou nábojů. (*Tip*: obr. 23.6.)



Obr. 23.30 Cvičení 3

4C. Načrtněte kvalitativně siločáry pole vně a mezi dvěma soustřednými vodivými kulovými slupkami. Na vnitřní slupce je rovnoměrně rozložen kladný náboj Q_1, na vnější slupce je rovnoměrně rozložen záporný náboj $-Q_2$. Uvažujte případy $Q_1 > Q_2$, $Q_1 = Q_2$ a $Q_1 < Q_2$.

5C. Načrtněte kvalitativně siločáry pole, které budí tenký kruhový rovnoměrně nabitý disk o poloměru R. (*Tip*: Uvažujte jako limitní případy body velmi blízké disku, v nichž je vektor elektrické intenzity kolmý k jeho povrchu, a body velmi vzdálené, v nichž je elektrické pole podobné poli bodového náboje.)

ODST. 23.4 Elektrické pole bodového náboje

6C. Jak velký je bodový náboj, který v bodě vzdáleném 1,00 m budí elektrické pole o intenzitě $1{,}00\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$?

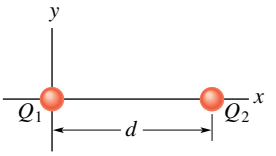
7C. Jak velký je bodový náboj, který v bodě vzdáleném 50 cm budí elektrické pole o intenzitě $2{,}00\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$?

8C. Dva opačné bodové náboje stejné velikosti $2{,}0{\cdot}10^{-7}$ C jsou od sebe vzdáleny 15 cm. Jaká je velikost a směr elektrické intenzity v bodě, který je uprostřed mezi oběma náboji?

9C. Atom plutonia 239 má poloměr jádra 6,64 fm a atomové číslo $Z = 94$. Určete velikost a směr elektrické intenzity na povrchu jádra za předpokladu, že je kladný náboj v jádře rozdělen rovnoměrně.

10Ú. Částice s nábojem $-Q_1$ se nachází v počátku osy x. (a) Kam bychom měli umístit druhou částici s nábojem $-4Q_1$, aby výsledné elektrické pole bylo nulové v bodě $x = 2{,}0$ mm? (b) Jestliže je naopak do nalezeného bodu umístěna částice s nábojem $+4Q_1$, jaký bude v bodě $x = 2{,}0$ mm směr výsledné intenzity?

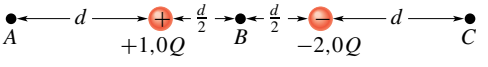
11Ú. Na obr. 23.31 jsou dva bodové náboje $Q_1 = +1{,}0{\cdot}10^{-6}$ C a $Q_2 = +3{,}0{\cdot}10^{-6}$ C ve vzdálenosti $d = 10$ cm od sebe. Zakreslete intenzitu jejich výsledného elektrického pole $E(x)$ jako funkci x pro kladné i záporné hodnoty x. (Považujte E za kladné, směřuje-li vektor $\boldsymbol{E}$ vpravo.)



Obr. 23.31 Úlohy 11 a 12

12Ú. (a) Na obr. 23.31 jsou dva bodové náboje $Q_1 = -5Q$ a $Q_2 = +2Q$ ve vzdálenosti d od sebe. Nalezněte bod (nebo body), v nichž je jejich výsledné elektrické pole nulové. (b) Načrtněte kvalitativně elektrické siločáry.

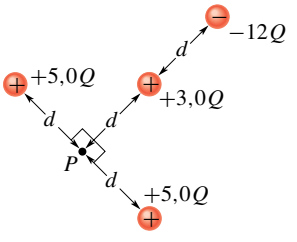
13Ú. Na obr. 23.32 jsou dva bodové náboje $+1{,}0Q$ a $-2{,}0Q$ ve vzdálenosti d od sebe. (a) Určete elektrickou intenzitu $\boldsymbol{E}$ v bodech A, B, C. (b) Načrtněte průběh elektrických siločár.



Obr. 23.32 Úloha 13

14Ú. Dva náboje $Q_1 = 2{,}1{\cdot}10^{-8}$ C a $Q_2 = -4{,}0Q_1$ jsou od sebe vzdáleny 50 cm. Najděte takový bod na přímce procházející oběma náboji, ve kterém je elektrická intenzita nulová.

15Ú. Na obr. 23.33 určete, jaká je v bodě P intenzita pole, buzeného čtyřmi zobrazenými náboji.



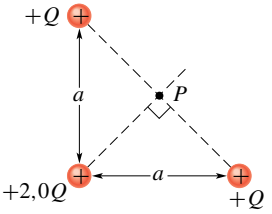
Obr. 23.33 Úloha 15

16Ú. Proton a elektron leží ve dvou vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně délky $2{,}0\cdot10^{-6}$ m. Jaká je velikost elektrické intenzity ve třetím vrcholu?

17Ú. Na hodinovém ciferníku jsou rozmístěny záporné bodové náboje $-Q$, $-2Q$, $-3Q$, …, $-12Q$ v místech odpovídajících číslic (1, 2, …, 12). Hodinové ručičky neovlivňují výsledné elektrické pole buzené bodovými náboji. V kolik hodin ukazuje malá ručička ve směru intenzity pole ve středu ciferníku? (*Tip*: Využijte symetrii úlohy.)

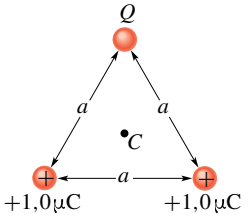
18Ú. V každém vrcholu rovnostranného trojúhelníka o straně délky 20 cm je umístěn jeden elektron. Jaká je velikost elektrické intenzity ve středu jedné strany?

19Ú. Na obr. 23.34 určete směr a velikost elektrické intenzity v bodě P.



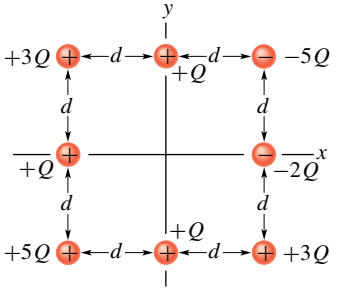
Obr. 23.34 Úloha 19

20Ú. Na obr. 23.35 jsou náboje umístěny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Určete, pro jakou hodnotu Q (velikost i znaménko) je výsledné elektrické pole v bodě C (v těžišti trojúhelníka) nulové.



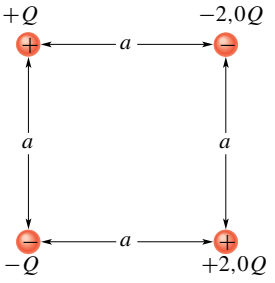
Obr. 23.35 Úloha 20

21Ú. Na obr. 23.36 jsou čtyři náboje umístěné ve vrcholech čtverce a čtyři další leží uprostřed jeho stran. Vzdálenost sousedních nábojů na obvodu čtverce je d. Jaká je velikost a směr vektoru elektrické intenzity ve středu čtverce?



Obr. 23.36 Úloha 21

22Ú. Jaká je velikost a směr elektrické intenzity uprostřed čtverce na obr. 23.37, je-li $Q = 1{,}0\cdot10^{-8}$ C a $a = 5{,}0$ cm?



Obr. 23.37 Úloha 22

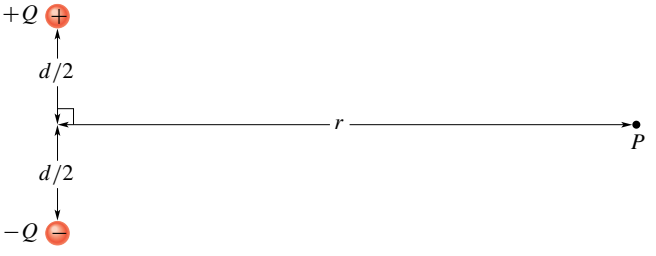
ODST. 23.5 Elektrické pole dipólu

23C. Vypočítejte elektrický dipólový moment soustavy elektronu a protonu, které jsou od sebe vzdáleny 4,30 nm.

24C. Nechť jsou oba náboje na obr. 23.9 kladné. Za předpokladu $z \gg d$ dokažte, že velikost intenzity E v bodě P na obrázku je

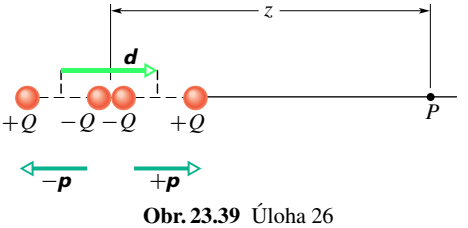
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{z^2}.$$

25Ú. Nalezněte na obr. 23.38 velikost a směr elektrické intenzity buzené dipólem v bodě P, který leží ve vzdálenosti r od středu dipólu. Výsledek zapište pro $r \gg d$ pomocí dipólového momentu $\boldsymbol{p}$.



Obr. 23.38 Úloha 25

26Ú*. *Elektrický kvadrupól*. Elektrický kvadrupól na obr. 23.39



Obr. 23.39 Úloha 26

je vytvořen dvěma elektrickými dipóly, jejichž dipólové momenty $\boldsymbol{p}$, $-\boldsymbol{p}$ jsou stejně velké, opačně orientované a posunuté o $\boldsymbol{d}$ vůči sobě (zde* $\boldsymbol{d} \parallel \boldsymbol{p}$). Dokažte, že intenzita elektrického

* Druhý typ ($\boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{p}$) by odpovídal obr. 23.37 s náboji uvedených znamének, ale stejných velikostí.

pole buzeného kvadrupólem v bodě P, který leží na jeho ose daleko od jeho středu ($z \gg d$), má velikost

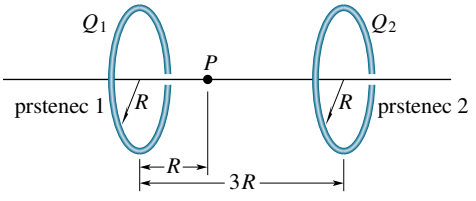
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3{\cdot}2Qd^2}{z^4},$$

kde $2Qd^2$ je kvadrupólový moment tohoto nábojového seskupení.

ODST. 23.6 Elektrické pole nabitého vlákna

27C. Načrtněte zhruba průběh elektrické intenzity na ose nabitého prstence o poloměru 6,0 cm s rovnoměrně rozloženým nábojem úhrnné velikosti $1{,}0{\cdot}10^{-8}$ C.

28C. Na obr. 23.40 jsou dva rovnoběžné nevodivé prstence se společnou osou. Prstenec 1 je rovnoměrně nabit nábojem Q_1 a má poloměr R; prstenec 2 je rovnoměrně nabit nábojem Q_2 a má stejný poloměr R. Vzdálenost prstenců je $3R$. V bodě P na ose ve vzdálenosti R od prstence 1 je výsledné elektrické pole nulové. Jaký je poměr nábojů Q_1/Q_2?



Obr. 23.40 Cvičení 28

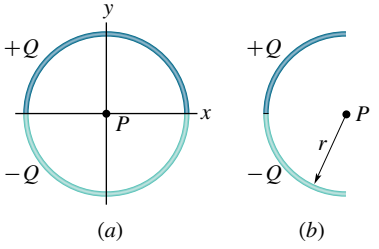
29Ú. V jaké vzdálenosti od středu rovnoměrně nabitého prstence o poloměru R na jeho ose má elektrická intenzita maximální velikost?

30Ú. Nechť je elektron vázán na osu nabitého prstence z čl. 23.6. Ukažte, že pod vlivem elektrostatické síly bude podél osy kmitat s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eQ}{mR^3}},$$

kde Q je náboj prstence a m je hmotnost elektronu.

31Ú. Na obr. 23.41a dvě plastikové tyče ohnuté do tvaru půlkružnice tvoří kružnici o poloměru R ležící v rovině xy. Osa x prochází styčnými body půlkružnic a náboj na obou tyčích je rozložen rovnoměrně. Jedna tyč má kladný náboj $+Q$, druhá záporný náboj $-Q$. Jaká je velikost a směr intenzity $\boldsymbol{E}$ v bodě P ve středu kružnice?

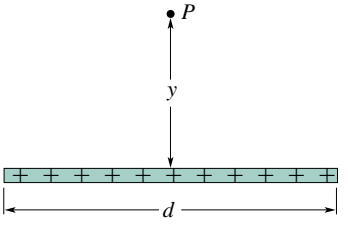


Obr. 23.41 Úlohy 31 a 32

32Ú. Tenká skleněná tyč je ohnuta do tvaru půlkružnice o poloměru r. Na její horní polovině je rovnoměrně rozložen náboj $+Q$, na dolní polovině náboj $-Q$ (obr. 23.41b). Najděte velikost a směr intenzity $\boldsymbol{E}$ ve středu půlkružnice.

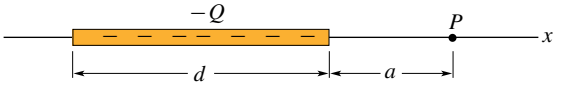
33Ú. Tenká nevodivá tyč konečné délky d je rovnoměrně nabita nábojem Q. Dokažte, že velikost elektrické intenzity E v bodě P na ose kolmé k tyči (obr. 23.42) je

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 y}\frac{1}{(d^2+4y^2)^{1/2}}.$$



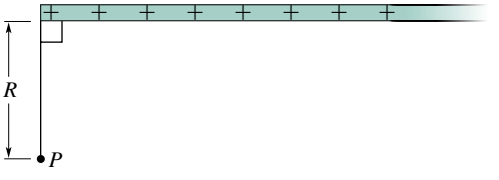
Obr. 23.42 Úloha 33

34Ú. Na obr. 23.43 je nevodivá tyč délky d rovnoměrně nabitá nábojem $-Q$. (a) Určete délkovou hustotu náboje tyče. (b) Určete elektrickou intenzitu v bodě P ve vzdálenosti a od konce tyče. (c) Kdyby byl bod P velmi daleko od tyče vzhledem k její délce d, chovala by se tyč jako bodový náboj. Ukažte, že odpověď na otázku (b) se pro $a \gg d$ redukuje na vztah pro intenzitu pole bodového náboje.



Obr. 23.43 Úloha 34

35Ú*. Na obr. 23.44 je „polonekonečná“ nevodivá tyč rovnoměrně nabitá nábojem o délkové hustotě τ. Ukažte, že vektor elektrické intenzity v bodě P svírá s tyčí úhel 45° a že tento výsledek nezávisí na vzdálenosti R. (*Tip*: Najděte v bodě P složku vektoru intenzity s tyčí rovnoběžnou a k tyči kolmou a porovnejte je.)



Obr. 23.44 Úloha 35

ODST. 23.7 Elektrické pole nabitého disku

36C. Disk o poloměru 2,5 cm má na svém horním povrchu plošnou hustotu náboje $5{,}3\ \mu\text{C}{\cdot}\text{m}^{-2}$. Jaká je velikost elektrické intenzity na ose disku v bodě ve vzdálenosti $z = 12$ cm od disku?

37Ú. (a) Jaký náboj musí mít disk z př. 23.6 (obr. 23.13), aby elektrická intenzita na jeho povrchu měla v jeho středu velikost, při níž dochází k jiskrovému elektrickému průrazu vzduchu (vznik jiskry)? Uvažujte disk o poloměru 2,5 cm a použijte údajů pro vzduch z tab. 23.1. (b) Předpokládejte, že každý atom má efektivní průřez $0{,}015\ \mathrm{nm}^2$. Kolik atomů tvoří povrch disku? (c) Náboj v (a) vzniká v důsledku toho, že některé z povrchových atomů mají jeden přebytečný elektron. Jaká část povrchových atomů musí mít přebytečný elektron, aby došlo k průrazu?

38Ú. V jaké vzdálenosti na ose rovnoměrně nabitého plastikového disku o poloměru R je velikost elektrické intenzity rovna polovině hodnoty, kterou má na povrchu disku v jeho středu?

ODST. 23.8 Bodový náboj v elektrickém poli

39C. Elektron je uvolněn z klidu v homogenním elektrickém poli o intenzitě $2{,}00\cdot10^4\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$. Vypočítejte jeho zrychlení. (Vliv gravitačního pole zanedbejte.)

40C. Elektron je urychlován elektrickým polem východním směrem se zrychlením $1{,}80\cdot10^9\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Určete velikost a směr elektrické intenzity.

41C. Vypočítejte velikost síly, kterou působí elektrický dipól s dipólovým momentem $3{,}6\cdot10^{-29}\ \mathrm{C\cdot m}$ na elektron, který se nachází na ose dipólu ve vzdálenosti 25 nm od jeho středu. Předpokládejte, že tato vzdálenost je velká vzhledem k rozměru dipólu.

42C. K průrazu vlhkého vzduchu (jeho molekuly jsou ionizovány) dochází v elektrickém poli o intenzitě $3{,}0\cdot10^6\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$. Jak velkou elektrostatickou silou působí toto pole na (a) elektron, (b) jednomocný kladný iont (tj. jemuž chybí jeden elektron)?

43C. Částice α (jádro atomu helia) má hmotnost $6{,}64\cdot10^{-27}\ \mathrm{kg}$ a náboj $+2e$. Jaká je velikost a směr elektrické intenzity, která vyrovná účinek tíhové síly?

44C. Nabitý mrak budí ve vzduchu v blízkosti zemského povrchu elektrické pole. Je-li do tohoto pole umístěna částice s nábojem $-2{,}0\cdot10^{-9}\ \mathrm{C}$, působí na ni směrem dolů elektrostatická síla $3{,}0\cdot10^{-6}\ \mathrm{N}$. (a) Jaká je velikost elektrické intenzity? (b) Jaká je velikost a směr elektrostatické síly, která působí na proton umístěný v tomto elektrickém poli? (c) Jaká je velikost gravitační síly působící na proton? (d) Jaký je v tomto případě poměr velikostí elektrostatické síly a síly gravitační?

45C. Vektor elektrické intenzity v atmosféře blízko zemského povrchu směřuje dolů a má velikost asi $150\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$. Chceme nabít kouli ze síry, jejíž váha je 4,4 N tak, aby „plula“ v atmosféře. (a) Jaký náboj (velikost i znaménko) musíme použít? (b) Proč je experiment neproveditelný?

46C. (a) Jaké má zrychlení elektron v homogenním elektrickém poli o intenzitě $1{,}40\cdot10^6\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$? (b) Elektron je na počátku v klidu. Za jak dlouho by dosáhl rychlosti rovné jedné desetině rychlosti světla? (c) Jakou dráhu by za tuto dobu urazil? (Užijte newtonovskou mechaniku.)

47C. Svazky protonů s vysokou energií mohou být vytvářeny v „dělech“, v nichž jsou urychlovány elektrickým polem. (a) Jaké bude zrychlení protonu, je-li intenzita elektrického pole v dělu $2{,}00\cdot10^4\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$? (b) Jakou rychlost proton získá, jestliže ho pole urychluje na dráze 1,00 cm?

48C. Elektron pohybující se rychlostí $5{,}00\cdot10^8\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ vletí do elektrického pole o intenzitě $1{,}00\cdot10^3\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$ ve směru vektoru intenzity, takže se zpomaluje. (a) Jakou dráhu elektron v poli urazí, než se zastaví? (b) Jaká doba přitom uplyne? (c) Oblast, v níž působí elektrické pole, zúžíme na 8,00 mm. Jakou část své počáteční kinetické energie elektron v poli ztratí?

49C. Kulová vodní kapka o průměru $1{,}20\ \mu\mathrm{m}$ se vznáší v nepohyblivém vzduchu v důsledku působení atmosférického elektrického pole o intenzitě $E = 462\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$ s orientací svisle dolů. (a) Jaká je hmotnost kapky? (b) Kolik má kapka přebytečných elektronů?

50C. V Millikanově pokusu (obr. 23.14) se olejová kapka o poloměru $1{,}64\ \mu\mathrm{m}$ a hustotě $851\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ vznáší v komoře C, kde působí směrem dolů elektrické pole o intenzitě $1{,}92\cdot10^5\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$. Vyjádřete náboj kapky pomocí e. Vztlak vzduchu zanedbejte.

51Ú. Při jednom ze svých experimentů zjistil Millikan na jedné kapce v různých okamžicích následující náboje:

$$\begin{array}{lll} 6{,}563\cdot10^{-19}\ \mathrm{C}, & 13{,}13\cdot10^{-19}\ \mathrm{C}, & 19{,}71\cdot10^{-19}\ \mathrm{C}, \\ 8{,}204\cdot10^{-19}\ \mathrm{C}, & 16{,}48\cdot10^{-19}\ \mathrm{C}, & 22{,}89\cdot10^{-19}\ \mathrm{C}, \\ 11{,}50\cdot10^{-19}\ \mathrm{C}, & 18{,}08\cdot10^{-19}\ \mathrm{C}, & 26{,}13\cdot10^{-19}\ \mathrm{C}. \end{array}$$

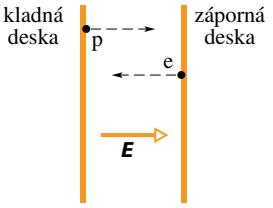
Jakou hodnotu elementárního náboje e mohl odvodit z těchto údajů?

52Ú. V prostoru mezi dvěma opačně nabitými deskami je homogenní elektrické pole. Z povrchu záporně nabité desky se z klidu uvolní elektron a dopadne za dobu $1{,}5\cdot10^{-8}\ \mathrm{s}$ na protější desku, která je ve vzdálenosti 2,0 cm. (a) Jakou má elektron rychlost při dopadu na druhou desku? (b) Jaká je velikost elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$?

53Ú. Těleso o hmotnosti 10,0 g s nábojem $+8{,}00\cdot10^{-5}\ \mathrm{C}$ se nachází v elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$, jejíž složky jsou $E_x = 3{,}00\cdot10^3\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$, $E_y = -600\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$, $E_z = 0$. (a) Jaká je velikost a směr elektrické síly působící na těleso? (b) Určete souřadnice tělesa v čase 3,00 s, je-li pro $t = 0$ v klidu v počátku souřadnicového systému.

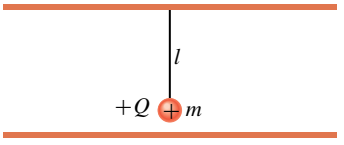
54Ú. V určitém okamžiku jsou složky rychlosti elektronu, pohybujícího se mezi dvěma rovnoběžnými nabitými deskami, $v_x = 1{,}5\cdot10^5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $v_y = 3{,}0\cdot10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Intenzita elektrického pole mezi deskami je $\boldsymbol{E} = (120\ \mathrm{N\cdot C^{-1}})\boldsymbol{j}$. (a) Jaké je zrychlení elektronu? (b) Jaká bude rychlost elektronu poté, co jeho souřadnice x vzroste o 2,0 cm?

55Ú. Na obr. 23.45 jsou dvě velké nabité rovnoběžné měděné desky, jejichž vzdálenost je 5,0 cm. Mezi deskami je homogenní elektrické pole. Ve stejném okamžiku se uvolní elektron ze záporné desky a proton z kladné desky. V jaké vzdálenosti od kladné desky se budou částice míjet? (Zanedbejte sílu, kterou na sebe částice působí navzájem.) Nepřekvapuje vás, že k řešení tohoto problému nepotřebujete znát intenzitu elektrického pole?



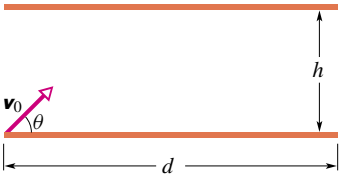
Obr. 23.45 Úloha 55

56Ú. Na obr. 23.46 je kyvadlo, zavěšené na horní ze dvou velkých vodorovných desek. Kyvadlo se skládá z malé nevodivé koule o hmotnosti m s nábojem $+Q$ a z nevodivého vlákna délky l. Jaká je perioda kmitů kyvadla, je-li mezi deskami vytvořeno homogenní elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$ (a) nabitím horní desky záporně a dolní desky kladně, (b) opačným nabitím desek?



Obr. 23.46 Úloha 56

57Ú. Na obr. 23.47 jsou dvě vodorovné desky, dolní je nabita kladně, horní záporně. Mezi deskami je tedy homogenní elektrické pole, jehož intenzita $\boldsymbol{E}$ směřuje vzhůru a má velikost $2{,}00{\cdot}10^3\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$. Délka desek je $d = 10{,}0\,\mathrm{cm}$ a jejich vzdálenost $h = 2{,}00\,\mathrm{cm}$. Z levého okraje dolní desky je mezi desky vstřelen elektron. Jeho počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$ svírá s dolní deskou úhel $\theta = 45{,}0^\circ$ a má velikost $6{,}00{\cdot}10^6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Narazí elektron na jednu z desek? (b) Pokud ano, na kterou desku a v jaké vzdálenosti od jejího levého okraje?



Obr. 23.47 Úloha 57

ODST. 23.9 Dipól v elektrickém poli

58C. Elektrický dipól skládající se z nábojů o velikosti 1,50 nC, jejichž vzdálenost je 6,20 μm, se nachází v elektrickém poli o intenzitě $1\,100\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$. (a) Jak je velký jeho elektrický dipólový moment? (b) Jaký je rozdíl potenciálních energií dipólu, odpovídajících jeho paralelní a antiparalelní orientaci vzhledem k vektoru intenzity elektrického pole?

59C. Elektrický dipól se skládá z nábojů $+2e$ a $-2e$, jejichž vzdálenost je 0,78 nm. Nachází se v elektrickém poli o intenzitě $3{,}4{\cdot}10^6\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$. Vypočítejte velikost momentu sil působícího na dipól, je-li dipólový moment orientován (a) souhlasně rovnoběžně, (b) kolmo, (c) nesouhlasně rovnoběžně vzhledem k elektrickému poli.

60Ú. Vyjádřete práci potřebnou k otočení dipólu o 180° v homogenním elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$ pomocí velikosti p dipólového momentu, velikosti E elektrické intenzity a počátečního úhlu θ_0, který svírají vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{E}$.

61Ú. Najděte úhlovou frekvenci kmitů elektrického dipólu s dipólovým momentem o velikosti p a momentem setrvačnosti I v homogenním elektrickém poli s intenzitou o velikosti E (pro malé úhlové amplitudy oscilací kolem rovnovážné polohy).

62Ú. Elektrický dipól s dipólovým momentem

$$\boldsymbol{p} = (3{,}00\boldsymbol{i} + 4{,}00\boldsymbol{j})(1{,}24{\cdot}10^{-30}\ \mathrm{C{\cdot}m})$$

se nachází v elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E} = (4\,000\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}})\boldsymbol{i}$. (a) Jakou má dipól potenciální energii? (b) Jaký moment síly na něj působí? (c) Jakou práci vykoná vnější síla, která otočí dipólem do polohy, v níž je dipólový moment roven

$$\boldsymbol{p} = (-4{,}00\boldsymbol{i} + 3{,}00\boldsymbol{j})(1{,}24{\cdot}10^{-30}\ \mathrm{C{\cdot}m})?$$

PRO POČÍTAČ

63Ú. Dvě částice, každá s kladným nábojem Q, jsou umístěny pevně na ose y v bodech $y = 0$ a $y = -d$. (a) Napište výraz, který udává velikost výsledné elektrické intenzity v bodech na ose x určených vztahem $x = \alpha d$. (b) Sestrojte graf závislosti $E(\alpha)$ pro oblast $0 < \alpha < 4$. Z grafu určete hodnoty α, které dávají (c) maximální hodnotu E, (d) polovinu maximální hodnoty E.

64Ú. Pro údaje z úlohy 51 předpokládejte, že náboj Q kapky je dán vztahem $Q = ne$, kde n je přirozené číslo a e je elementární náboj. (a) Najděte n pro každé měření Q. (b) Proveďte lineární regresi hodnot $Q = f(n)$ a určete z ní e.

24
Gaussův zákon elektrostatiky



Podívejte se na zářivou krásu blesků při bouřce nad Manhattanem. Každý blesk přitom přenese z mraků na zemský povrch přibližně 10^{20} elektronů. Je možné určit průměr blesku? Vzhledem k tomu, že se na blesk díváme ze vzdálenosti několika kilometrů, můžeme porovnat jeho rozměry např. s rozměry automobilu?

24.1 NOVÝ POHLED NA COULOMBŮV ZÁKON

Chcete-li nalézt těžiště brambory, můžete to provést buď experimentálně, nebo pomocí složitého číselného výpočtu trojného integrálu. Jestliže má však brambora tvar elipsoidu, můžete z její symetrie určit přesně těžiště i bez výpočtu. V tom je značná výhoda symetrie. Se symetrickými situacemi se setkáváme ve všech oborech fyziky. Je-li to možné, snažíme se vyjádřit fyzikální zákony v takovém tvaru, aby se výhody symetrie mohly plně projevit.

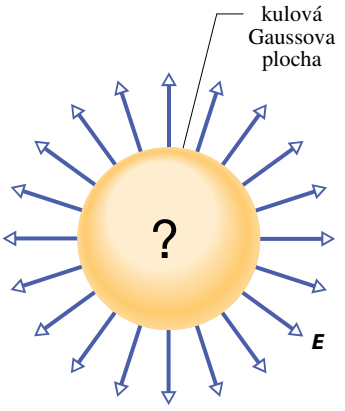
Coulombův zákon je hlavním zákonem elektrostatiky, ale nemá bohužel tvar, který by nám podstatně ulehčoval práci v situacích, které se vyznačují symetrií. Proto v této kapitole zavedeme jinou formulaci Coulombova zákona, kterou odvodil německý matematik a fyzik *Carl Friedrich Gauss* (1777–1855). Tento zákon, zvaný **Gaussův zákon elektrostatiky**, *může* být s výhodou použit v některých případech symetrie v rozložení nábojů. Pro elektrostatické problémy je přitom zcela ekvivalentní *Coulombovu zákonu*. Který z těchto zákonů zvolíme, závisí pouze na povaze zkoumaného problému.

U Gaussova zákona je důležitá volba myšlené uzavřené plochy, zvané **Gaussova plocha**. Ta může mít libovolný tvar, ale nejvýhodnější je takový, který vyjadřuje symetrii zkoumaného problému. Proto volíme za Gaussovu plochu nejčastěji povrch koule, válce či jiného symetrického útvaru. Musí to však být vždy plocha *uzavřená*.

Představme si, že jsme vytvořili Gaussovu plochu kolem jisté konfigurace nábojů. Potom můžeme použít Gaussův zákon elektrostatiky.

Gaussův zákon vyjadřuje vztah mezi intenzitou elektrického pole na (uzavřené) Gaussově ploše a celkovým nábojem, který se nachází uvnitř této plochy.

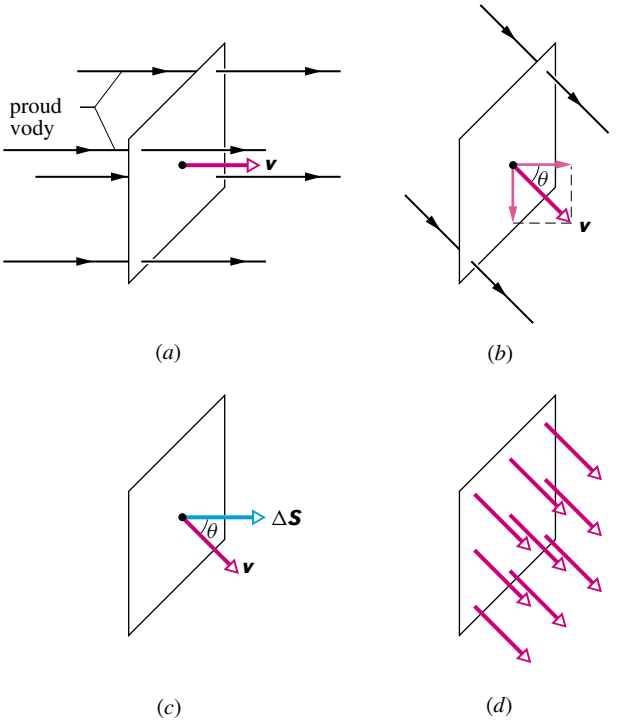
Na obr. 24.1 je znázorněna jednoduchá situace, kdy Gaussovou plochou je kulová plocha. Předpokládejme, že v každém bodě jejího povrchu existuje elektrické pole o intenzitě konstantní velikosti a směřující ven z koule. I bez znalosti Gaussova zákona můžeme usoudit, že uvnitř plochy musí existovat určitý (kladný) náboj. Jestliže *známe* Gaussův zákon, můžeme vypočítat, jak velký náboj se nachází uvnitř plochy. K výpočtu potřebujeme pouze vědět, „jak mnoho pole“ je na povrchu Gaussovy plochy. Toto „jak mnoho“ vyjadřujeme *tokem* elektrické intenzity danou plochou.



Obr. 24.1 Kulová Gaussova plocha. Mají-li vektory elektrické intenzity ve všech bodech povrchu stejnou velikost a míří-li ven z koule, je možné učinit závěr, že v objemu ohraničeném Gaussovou plochou se nachází kulově symetricky rozložený kladný náboj.

24.2 TOK

Předpokládejme podle obr. 24.2a, že proud vody o konstantní rychlosti $\boldsymbol{v}$ prochází malou čtvercovou plochou



Obr. 24.2 (a) Homogenní proud vody pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}$ kolmo k ploše čtverce o obsahu ΔS. (b) Vektor $\boldsymbol{v}$ svírá s kolmicí k ploše čtverce úhel θ; složka vektoru $\boldsymbol{v}$ ve směru této kolmice je rovna $v \cos\theta$. (c) Vektor plochy $\Delta\boldsymbol{S}$ je kolmý k rovině čtverce a svírá s vektorem $\boldsymbol{v}$ úhel θ. (d) Rychlostní pole v ploše čtverce.

o obsahu ΔS. Nechť $\Delta\Phi$ představuje *objemový tok* (objem za jednotku času) vody plochou. Jeho velikost závisí na úhlu, který svírá rychlost $\boldsymbol{v}$ s rovinou plochy. Je-li $\boldsymbol{v}$ kolmá k rovině, je $\Delta\Phi = v\Delta S$. Je-li vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ rovnoběžný s plochou čtverce, pak jím neproudí žádná voda a $\Delta\Phi = 0$. Obecně $\Delta\Phi$ závisí na průmětu vektoru $\boldsymbol{v}$ do kolmice k ploše čtverce (obr. 24.2b). Proto

$$\Delta\Phi = (v\cos\theta)\Delta S. \qquad (24.1)$$

Dříve než budeme diskutovat tok, který se vyskytuje v elektrostatice, přepíšeme rov. (24.1) do vektorového tvaru. Uvažujme plochu $\Delta\mathscr{S}$ a pokládejme ji za rovinnou (obr. 24.2c). Definujeme vektor $\Delta\boldsymbol{S}$ tak, že je k rovině plochy kolmý a jeho velikost je rovna jejímu obsahu ΔS. Potom můžeme napsat rov. (24.1) jako skalární součin vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$ proudu vody a vektoru plochy $\Delta\boldsymbol{S}$ čtverce

$$\Delta\Phi = v\Delta S\cos\theta = \boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{S}, \qquad (24.2)$$

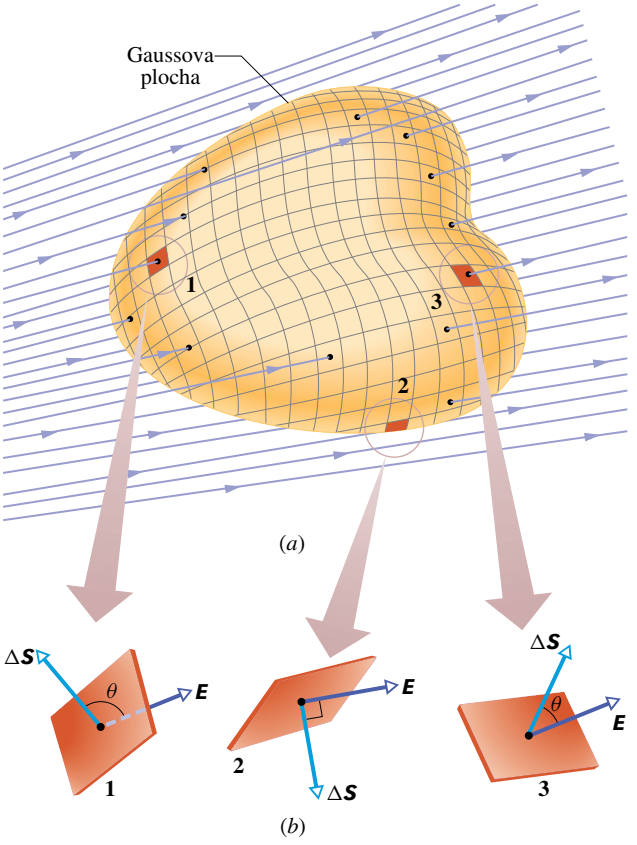
kde θ je úhel mezi $\boldsymbol{v}$ a $\Delta\boldsymbol{S}$.

Slovo „tok“ má smysl, jestliže hovoříme např. o proudu vody plochou. Můžeme se však na rov. (24.2) dívat abstraktněji. Abychom to vysvětlili, uvědomme si, že můžeme přiřadit vektor rychlosti každému bodu v proudu vody. Soubor všech těchto vektorů vytváří *pole rychlostí*. Nyní můžeme interpretovat rov. (24.2) jako *tok rychlostního pole plochou, která je ohraničena uzavřenou křivkou* (obr. 24.2d). Podle této interpretace již tok neznačí, že plochou $\Delta\mathscr{S}$ musí téci něco hmatatelného rychlostí $\boldsymbol{v}$. Místo rychlosti $\boldsymbol{v}$ můžeme použít libovolné vektorové pole $\boldsymbol{a}$ a hovořit o jeho toku $\Delta\Phi = \boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$.

24.3 TOK ELEKTRICKÉ INTENZITY

K definici toku elektrické intenzity uvažujme libovolnou (i nesymetrickou) Gaussovu plochu, nacházející se v nehomogenním elektrickém poli (obr. 24.3a). Rozdělme tuto plochu na plošky (např. čtverečky) $\Delta\mathscr{S}$ natolik malé, abychom mohli zanedbat jejich zakřivení a považovat je za rovinné. Každý z nich popíšeme vektorem $\Delta\boldsymbol{S}$, jehož velikost je rovna obsahu ΔS a jehož směr je ke čtverečku kolmý a je orientován ven z Gaussovy plochy. (Leží-li $\Delta\mathscr{S}$ na uzavřené ploše, orientujeme vektory $\Delta\boldsymbol{S}$ směrem ven.)

Protože čtverečky jsou libovolně malé, můžeme předpokládat, že elektrické pole $\boldsymbol{E}$ na každém z nich je konstantní. Označme θ úhel, který spolu svírají vektory $\Delta\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{E}$. Na obr. 24.3b jsme zvětšili tři ze čtverečků Gaussovy plochy (1, 2, 3) a vyznačili jsme u nich odpovídající úhel θ.



Obr. 24.3 (a) Gaussova plocha libovolného tvaru ležící v elektrickém poli. Plocha je rozdělena na malé čtverečky o obsahu ΔS. (b) Vektory elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$ a vektory $\Delta\boldsymbol{S}$ pro tři vyznačené čtverečky (1, 2, 3).

Tok elektrického pole Gaussovou plochou je součtem toků $\Delta\Phi_E$ jednotlivými čtverečky (obr. 24.3)

$$\Phi_E = \sum\Delta\Phi_E = \sum\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{S}. \qquad (24.3)$$

Tato rovnice nám říká, že je třeba vzít každý čtvereček na Gaussově ploše, pro něj vyjádřit skalární součin obou vektorů $\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$ a algebraicky sečíst (s patřičnými znaménky) příspěvky od všech čtverečků, které tvoří Gaussovu plochu. Znaménko každého skalárního součinu určuje, zda je tok daným čtverečkem kladný, záporný, nebo nulový. Z tab. 24.1 plyne, že v případech typu 1, v nichž $\boldsymbol{E}$ směřuje dovnitř plochy, je příspěvek k celkovému součtu vyjádřenému rov. (24.3) záporný. V případech typu 2, kdy $\boldsymbol{E}$ leží v rovině čtverečku, je příspěvek nulový a v případech typu 3, kdy $\boldsymbol{E}$ směřuje ven z plochy, je příspěvek kladný.

Definici toku elektrického pole uzavřenou plochou zpřesníme tím, že předpokládáme, že obsahy čtverečků v obr. 24.3a jsou stále menší. Vektor plošky se pak blíží v limitě k $d\boldsymbol{S}$. Suma v rov. (24.3) přechází v plošný integrál

Tabulka 24.1 **Tři čtverečky na Gaussově ploše z obr. 24.3**

Č.	θ	SMĚR $\boldsymbol{E}$	SOUČIN $\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$
1	$>90°$	dovnitř plochy	záporný
2	$=90°$	rovnoběžně s plochou	nulový
3	$<90°$	ven z plochy	kladný

a tok intenzity elektrického pole definujeme vztahem

$$\Phi_E = \oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} \quad \text{(tok elektrické intenzity Gaussovou plochou } \mathscr{S}\text{)}. \qquad (24.4)$$

Kroužek na integrálu znamená, že integrace probíhá přes *uzavřenou* plochu $\mathscr{S}$. Tok intenzity elektrického pole je skalární veličinou a jeho jednotkou v SI je $N\cdot m^2\cdot C^{-1}$.

Rov. (24.4) je možné interpretovat ještě jinak, když použijeme hustotu elektrických siločár procházejících plochou jako míru intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$ na této ploše. Velikost E je pak úměrná počtu elektrických siločár připadajících na jednotkovou plochu. Skalární součin $\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$ z rov. (24.4) je tedy úměrný počtu siločár, které procházejí plochou $d\mathscr{S}$. Protože integrace v rov. (24.4) probíhá přes celou uzavřenou Gaussovu plochu, vidíme odtud, že platí:

Tok Φ_E intenzity Gaussovou plochou je úměrný celkovému počtu siločár procházejících touto plochou.

PŘÍKLAD 24.1

Na obr. 24.4 je znázorněna Gaussova plocha tvořená povrchem válce o poloměru R, který se nachází v homogenním elektrickém poli $\boldsymbol{E}$. Osa válce je rovnoběžná se směrem pole. Jaký je tok Φ_E touto plochou?

ŘEŠENÍ: Tok je možno vyjádřit jako součet tří výrazů: toku levou podstavou a válce, pláštěm b válce a pravou podstavou c. Potom z rov. (24.4) plyne

$$\Phi_E = \oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_a \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} + \int_b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} + \int_c \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}. \qquad (24.5)$$

Pro všechny body na levé podstavě je úhel θ mezi $\boldsymbol{E}$ a $d\boldsymbol{S}$ roven $180°$ a velikost intenzity E pole je konstantní. Je tedy

$$\int_a \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_a E(\cos 180°)\,dS = \\ = -E\int_a dS = -ES,$$

kde $\int dS = S$ je obsah podstavy πR^2. Podobně pro pravou podstavu, kde $\theta = 0$:

$$\int_c \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_c E(\cos 0°)\,dS = ES.$$

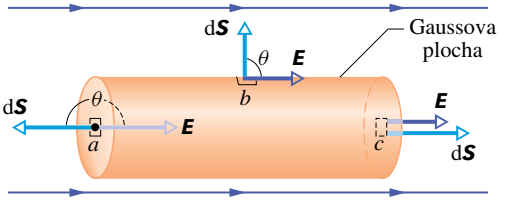
Konečně pro plášť válce, kde úhel $\theta = 90°$ pro každý bod, je

$$\int_b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_b E(\cos 90°)\,dS = 0.$$

Dosazením těchto výsledků do rov. (24.5) dostaneme

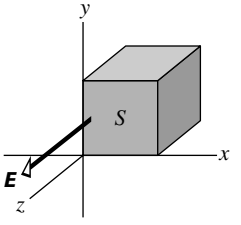
$$\Phi_E = -ES + 0 + ES = 0. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek nás zřejmě nepřekvapí, protože elektrické siločáry, které reprezentují elektrické pole, procházejí Gaussovou plochou tak, že vstupují do válce levou podstavou a vystupují z něj pravou podstavou; jejich celkový tok je tedy nulový.



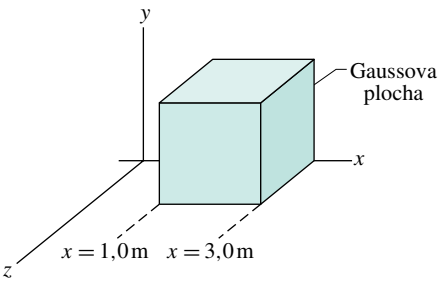
Obr. 24.4 Příklad 24.1. Gaussova plocha (plášť válce + podstavy) se nachází v homogenním elektrickém poli. Osa válce je rovnoběžná se směrem pole.

KONTROLA 1: Na obrázku je Gaussova plocha tvořená povrchem krychle, jejíž jedna stěna má obsah S. Krychle se nachází v homogenním elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$, které směřuje v kladném směru osy z. Vyjádřete pomocí E a S tok (a) čelní stěnou (ležící v rovině xy), (b) zadní stěnou, (c) horní stěnou a (d) celým povrchem krychle.



PŘÍKLAD 24.2

Nehomogenní elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E} = 3{,}0x\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$ prochází Gaussovou plochou ve tvaru povrchu krychle podle obr. 24.5 (E je vyjádřeno v newtonech na coulomb a x v metrech). Jaký je tok intenzity elektrického pole pravou stěnou, levou stěnou a horní stěnou krychle?



Obr. 24.5 Příklad 24.2. Gaussova plocha ve tvaru povrchu krychle, jejíž jedna hrana leží na ose x, se nachází v nehomogenním elektrickém poli.

ŘEŠENÍ: *Pravá stěna*: Vektor plochy je vždy kolmý k této ploše a je orientován směrem ven z krychle (z Gaussovy plochy). To znamená, že vektor $d\boldsymbol{S}$ musí pro pravou stěnu směřovat vždy ve směru $+x$. Při použití jednotkových vektorů je

$$d\boldsymbol{S} = dS\,\boldsymbol{i}.$$

Z rov. (24.4) plyne, že tok $\Phi_{E,\mathrm{p}}$ pravou stěnou je

$$\begin{aligned}\Phi_{E,\mathrm{p}} &= \int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \\ &= \int (3{,}0x\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j})\cdot(dS\cdot\boldsymbol{i}) = \\ &= \int \left[(3{,}0x)(dS)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + (4{,}0)(dS)\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}\right] = \\ &= \int (3{,}0x\,dS + 0) = 3{,}0\int x\,dS.\end{aligned}$$

Protože budeme integrovat přes pravou stěnu, pro niž je v každém bodě hodnota x konstantní ($x = 3{,}0\,\mathrm{m}$), platí

$$\Phi_{E,\mathrm{p}} = 3{,}0\int (3{,}0)\,dS = 9{,}0\int dS.$$

Integrál vyjadřuje obsah pravé stěny $S = 4{,}0\,\mathrm{m}^2$. Tedy

$$\begin{aligned}\Phi_{E,\mathrm{p}} &= (9{,}0\,\mathrm{N\cdot C^{-1}})(4{,}0\,\mathrm{m^2}) = \\ &= 36{,}0\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-1}}.\end{aligned}$$ (Odpověď)

Levá stěna: Postup výpočtu je stejný jako pro pravou stěnu. Při postupu je třeba brát v úvahu dvě odlišnosti. (1) Vektor $d\boldsymbol{S}$ plochy, přes niž integrujeme, směřuje ve směru osy $-x$, tedy $d\boldsymbol{S} = -dS\,\boldsymbol{i}$. (2) Výraz pro x je pro uvažovanou levou stěnu opět konstantní, je však $x = 1{,}0\,\mathrm{m}$. Vezmeme-li v úvahu tyto dva rozdíly, nalezneme tok $\Phi_{E,\mathrm{l}}$ levou stěnou

$$\Phi_{E,\mathrm{l}} = -12\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-1}}.$$ (Odpověď)

Horní stěna: Vektor plochy $d\boldsymbol{S}$, přes niž integrujeme, směřuje ve směru osy y, tedy $d\boldsymbol{S} = dS\,\boldsymbol{j}$. Tok $\Phi_{E,\mathrm{h}}$ horní stěnou je

$$\begin{aligned}\Phi_{E,\mathrm{h}} &= \int (3{,}0x\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j})\cdot(dS\boldsymbol{j}) = \\ &= \int \left[(3{,}0x)(dS)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} + (4{,}0)(dS)\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\right] = \\ &= \int (0 + 4{,}0\,dS) = 4{,}0\int dS = \\ &= 16\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-1}}.\end{aligned}$$ (Odpověď)

24.4 GAUSSŮV ZÁKON ELEKTROSTATIKY

Gaussův zákon vyjadřuje vztah mezi celkovým tokem Φ_E intenzity elektrického pole uzavřenou Gaussovou plochou a *celkovým* nábojem Q *obklopeným* touto plochou:

$$\varepsilon_0\Phi_E = Q \qquad \text{(Gaussův zákon).} \qquad (24.6)$$

Dosazením rov. (24.4), tj. definice toku elektrické intenzity, můžeme přepsat Gaussův zákon do tvaru

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = Q \qquad \text{(Gaussův zákon).} \qquad (24.7)$$

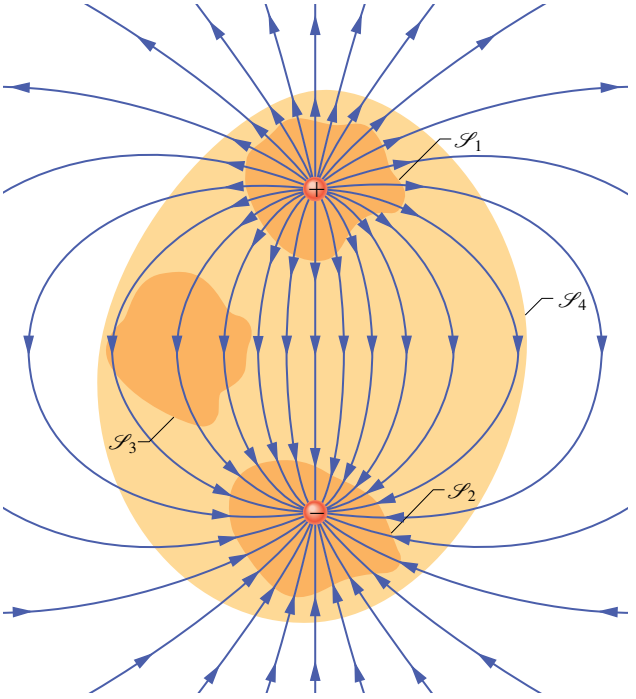
Zatím se budeme zabývat elektrickými náboji a elektrickým polem ve vakuu. V čl. 26.8 ukážeme, v jakém tvaru se zapisuje a používá Gaussův zákon v dielektrickém prostředí, jako jsou např. slída, olej nebo sklo.

V rov. (24.6) a (24.7) je celkový náboj $Q = \sum_k Q_k$ algebraickým součtem všech kladných i záporných nábojů *obklopených Gaussovou plochou* a může být tedy kladný, záporný, nebo nulový. Znaménko výsledného náboje, nacházejícího se uvnitř plochy, určuje znaménko toku elektrické intenzity Gaussovou plochou: je-li $Q > 0$, je celkový tok Φ_E kladný a intenzita $\boldsymbol{E}$ směřuje převážně *ven z plochy*, je-li $Q < 0$, je celkový tok Φ_E záporný a intenzita $\boldsymbol{E}$ směřuje převážně *dovnitř*.

Libovolně velký náboj ležící *vně* Gaussovy plochy, není v Gaussově zákonu zahrnut v Q. Také není rozhodující, jak jsou rozloženy jednotlivé náboje *uvnitř* Gaussovy plochy. Jediné, co je nutno uvažovat na pravé straně rov. (24.7), je velikost a znaménko celkového uzavřeného náboje. Intenzita elektrického pole $\boldsymbol{E}$ na levé straně rov. (24.7) vyjadřuje intenzitu elektrického pole od *všech* nábojů, ať se nacházejí uvnitř či vně Gaussovy plochy. To se může jevit jako rozpor, ale lze dokázat (a ilustruje to př. 24.1), že elektrické pole od nábojů, které se nacházejí

vně Gaussovy plochy, nepřispívá k *celkovému* toku uzavřenou plochou, protože počet siločár od těchto nábojů do plochy vstupujících se rovná počtu siločár z této plochy vystupujících.

Použijme nyní tyto úvahy na případ znázorněný na obr. 24.6, který ukazuje stejně velké, ale opačné náboje a siločáry, zobrazující elektrické pole jimi vytvořené. Na obrázku jsou v řezu vyznačeny čtyři Gaussovy plochy. Budeme je uvažovat jednu po druhé.



Obr. 24.6 Dva stejně velké bodové náboje opačného znaménka a siločáry elektrického pole jimi vytvořeného. V řezu jsou znázorněny čtyři Gaussovy plochy. Plocha $\mathscr{S}_1$ obklopuje kladný náboj, plocha $\mathscr{S}_2$ záporný náboj, plocha $\mathscr{S}_3$ neobklopuje žádný náboj, plocha $\mathscr{S}_4$ obklopuje oba náboje, a celkový náboj uvnitř je tedy nulový.

Plocha $\mathscr{S}_1$: Intenzita elektrického pole směřuje ve všech bodech této plochy směrem ven. Tok intenzity elektrického pole touto plochou je tedy kladný. Kladný je také celkový náboj uvnitř této plochy, jak to vyžaduje Gaussův zákon.

Plocha $\mathscr{S}_2$: Intenzita elektrického pole směřuje dovnitř této plochy ve všech bodech plochy. Tok intenzity elektrického pole a celkový náboj uvnitř plochy jsou tedy záporné, jak to vyžaduje Gaussův zákon.

Plocha $\mathscr{S}_3$: Tato plocha neobsahuje uvnitř žádné náboje, tedy $Q = 0$. Gaussův zákon vyžaduje, aby celkový tok intenzity elektrického pole touto plochou byl roven nule. To platí, protože všechny siločáry, které procházejí plochou, do ní vstupují v horní části a vystupují z ní v její spodní části.

Plocha $\mathscr{S}_4$: Tato plocha obklopuje celkový náboj nulový (kladný a záporný náboj jsou stejně velké). Z Gaussova zákona plyne, že celkový tok intenzity elektrického pole touto plochou je nulový. To je opět pravda, neboť stejný počet siločár, který z plochy $\mathscr{S}_4$ vystupuje, do ní na jiném místě vstupuje.

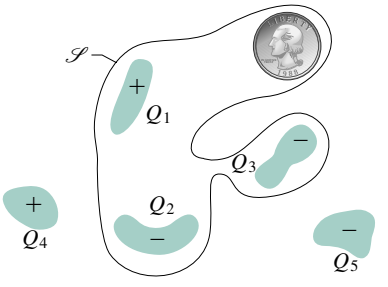
PŘÍKLAD 24.3

Na obr. 24.7 je nakresleno pět nabitých plastových tělísek a elektricky neutrální mince. Je vyznačen i řez jistou Gaussovou plochou $\mathscr{S}$. Určete tok intenzity elektrického pole plochou $\mathscr{S}$, jestliže $Q_1 = Q_4 = +3{,}1\,\text{nC}$, $Q_2 = Q_5 = -5{,}9\,\text{nC}$ a $Q_3 = -3{,}1\,\text{nC}$.

ŘEŠENÍ: Nenabitá mince nijak nepřispívá k celkovému náboji Q obklopenému plochou $\mathscr{S}$ i přesto, že elektrické pole, v němž se mince nachází, v ní může polarizovat kladné a záporné náboje. Náboje Q_4 a Q_5 se nacházejí vně plochy $\mathscr{S}$ a nepřispívají tedy k celkovému náboji Q. Je proto $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$. Z rov. (24.6) dostaneme

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\varepsilon_0} =$$
$$= \frac{(+3{,}1 - 5{,}9 - 3{,}1)\cdot 10^{-9}\,\text{C}}{(8{,}85\cdot 10^{-12}\,\text{C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2})} =$$
$$= -670\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

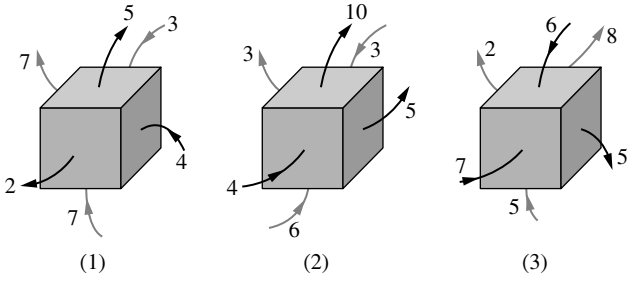
Záporné znaménko značí, že celkový náboj uvnitř uzavřené plochy $\mathscr{S}$ je záporný. Celkový tok pole plochou $\mathscr{S}$ je tedy také záporný.



Obr. 24.7 Příklad 24.3. Pět nabitých plastových tělísek a elektricky neutrální mince. Zvolená Gaussova plocha, znázorněná v řezu, obklopuje tři plastová tělíska a minci.

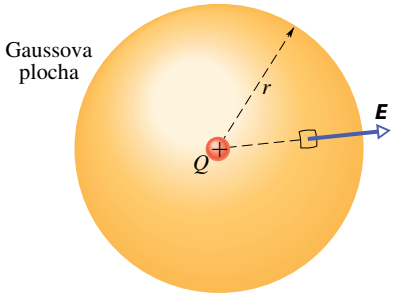
KONTROLA 2: Obrázek znázorňuje tři situace, v nichž se Gaussova plocha tvořená povrchem krychle nachází v elektrickém poli. Šipky ukazují směr intenzity $\boldsymbol{E}$ a číslice vyjadřují velikosti toků (v $\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-1}$) stěnami

každé krychle. Určete, ve kterém případě krychle ohraničuje (a) celkový kladný náboj, (b) celkový záporný náboj, (c) nulový náboj.



24.5 GAUSSŮV ZÁKON A COULOMBŮV ZÁKON

Jsou-li Gaussův zákon a Coulombův zákon ekvivalentní, je možné odvodit jeden z druhého. Zde odvodíme Coulombův zákon ze zákona Gaussova s využitím symetrie v rozložení nábojů a jimi vytvořeného elektrického pole.



Obr. 24.8 Kulová Gaussova plocha, v jejímž středu leží bodový náboj Q.

Na obr. 24.8 je znázorněn bodový kladný náboj Q ležící ve středu Gaussovy kulové plochy o poloměru r. Představme si, že povrch koule rozdělíme na jednotlivé infinitezimální plošky o obsahu $\mathrm{d}S$. Podle definice je vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ kolmý k ploše a směřuje z ní ven ve směru vnější normály. Ze symetrie plyne, že i vektor intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$ v každém bodě kulové plochy je kolmý k povrchu a směřuje ven z plochy ve směru vnější normály. Úhel θ, který svírají $\boldsymbol{E}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, je roven nule. Proto z Gaussova zákona plyne

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 \oint E \,\mathrm{d}S = Q. \qquad (24.8)$$

Protože velikost intenzity je na povrchu koule stejně velká, můžeme E vytknout před integrál. Dostáváme

$$\varepsilon_0 E \oint \mathrm{d}S = Q. \qquad (24.9)$$

Integrál je roven obsahu kulové plochy, tedy $4\pi r^2$. Dosazením do rov. (24.9) získáme

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = Q$$

neboli

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}. \qquad (24.10)$$

Odvozený vztah (24.10) má stejný tvar, jaký jsme získali z Coulombova zákona (23.3).

RADY A NÁMĚTY

Bod 24.1: *Volba vhodné Gaussovy plochy*

Odvození rov. (24.10) z Gaussova zákona bylo jen rozcvičkou pro určení intenzity elektrického pole vytvořeného jinými konfiguracemi nábojů. Vraťme se tedy kousek zpět. Začali jsme s daným kladným bodovým nábojem Q; víme, že elektrické siločáry míří radiálně směrem od něj a pole je kulově symetrické.

Abychom pomocí Gaussova zákona (24.7) určili velikost intenzity elektrického pole E ve vzdálenosti r, zvolili jsme kulovou Gaussovu plochu se středem v náboji Q a o poloměru r. Potom jsme sčítali (pomocí integrace) skalární součiny $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ přes celou Gaussovu plochu. Aby byla tato integrace co nejjednodušší, zvolili jsme Gaussovu plochu ve tvaru povrchu koule; tím vystihujeme kulovou symetrii elektrického pole. Tato volba umožní trojí zjednodušení: (1) Skalární součin $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ je jednoduchý, protože v každém bodě Gaussovy plochy je úhel mezi $\boldsymbol{E}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ roven nule. Skalární součin $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ můžeme proto nahradit součinem skalárů $E\,\mathrm{d}S$. (2) Velikost intenzity elektrického pole E je stejná ve všech bodech kulové Gaussovy plochy, takže při integraci je E konstantní a může se vytknout před integrál. (3) Ve výsledku je velmi jednoduchá integrace — jde pouze o součet obsahů všech infinitezimálních plošek tvořících povrch koule, což je celkový povrch $4\pi r^2$.

Připomeňme, že Gaussův zákon platí bez ohledu na tvar Gaussovy plochy, kterou jsme umístili kolem náboje Q. Kdybychom však např. zvolili Gaussovu plochu ve tvaru povrchu krychle, všechna tři zjednodušení by zmizela a integrace $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ přes plochu krychle by mohla být velmi obtížná. Proto je výhodné zvolit Gaussovu plochu takového tvaru, aby integrace v Gaussově zákoně byla co nejjednodušší.

KONTROLA 3: Gaussovou kulovou plochou o poloměru r, která obklopuje osamocenou nabitou částici, prochází určitý tok Φ_{E1}. Zaměňme tuto Gaussovu plochu za (a) kulovou plochu o větším poloměru, (b) povrch vepsané krychle, (c) povrch opsané krychle. Bude v těchto případech tok větší, menší, nebo stejný jako Φ_{E1}?

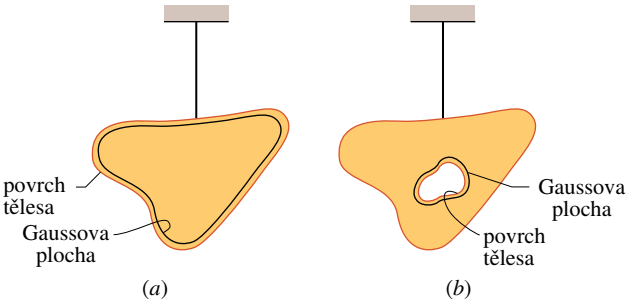
24.6 NABITÝ IZOLOVANÝ VODIČ

Gaussův zákon nám umožňuje dokázat důležitou větu o izolovaných vodičích:

Jestliže na izolovaný vodič přivedeme z vnějšku náboj, pak se všechen rozmístí na vnějším povrchu vodiče. Uvnitř vodiče nezůstane žádný volný náboj.

To vypadá věrohodně, protože náboje stejného znaménka se vzájemně odpuzují. Můžeme si to představit tak, že při pohybu k povrchu se přivedené náboje dostanou tak daleko od sebe, jak je to jen možné. Není to však samozřejmé, protože kvůli každému novému náboji přenesenému na povrch se všechny dosavadní musí trochu „stěsnat". Pro ověření této domněnky se opět vraťme ke Gaussovu zákonu.

Na obr. 24.9a je v řezu znázorněno na nevodivém vlákně zavěšené měděné těleso, na něž je přiveden náboj Q. Zvolme Gaussovu plochu těsně pod povrchem tělesa.



Obr. 24.9 (a) Měděné těleso nesoucí náboj Q je zavěšené na nevodivém vlákně. Gaussova plocha se nachází těsně pod povrchem tělesa. (b) V tělese je nyní vytvořena dutina. Gaussova plocha se nachází v tělese a těsně obepíná dutinu.

Elektrické pole uvnitř vodiče musí být nulové. Kdyby tomu tak nebylo, působilo by silou na vodivostní (volné) elektrony ve vodiči a vyvolalo jejich pohyb a tím proud; náboj by se ve vodiči pohyboval z místa na místo. Ve vodiči v ustáleném stavu takové „věčné" proudy neexistují, a proto intenzita elektrického pole uvnitř vodiče musí být nulová. (Detailní popis děje: přeneseme-li na vodič náboj, vytvoří se tím pole i uvnitř vodiče. To silově působí na volné náboje ve vodiči a pohybuje jimi tak dlouho, až celkové pole uvnitř vodiče vymizí a nastane elektrostatická rovnováha. Celý děj proběhne velice rychle.)

Je-li elektrická intenzita $\boldsymbol{E}$ nulová kdekoli uvnitř vodiče, musí být také nulová ve všech bodech na Gaussově ploše, protože tato plocha, i když se nachází co nejtěsněji pod povrchem, je stále uvnitř vodiče. Z toho plyne, že tok elektrické intenzity Gaussovou plochou je nulový a podle Gaussova zákona je nulový i celkový náboj uvnitř Gaussovy plochy. Důsledkem tedy je, že přivedený náboj musí ležet na povrchu vodiče.

Izolovaný vodič s dutinou

Na obr. 24.9b je znázorněno totéž těleso, tentokrát s dutinou uvnitř. Můžeme oprávněně předpokládat, že když vyjmeme část materiálu, abychom vytvořili dutinu, nezměníme ani rozložení nábojů, ani tvar elektrického pole, které existovalo na obr. 24.9a. Opět můžeme použít Gaussův zákon, abychom provedli kvantitativní důkaz.

Vytvoříme nyní Gaussovu plochu v materiálu tak, aby těsně obklopovala dutinu. Protože uvnitř vodiče je $E = 0$, nepoteče touto novou Gaussovou plochou žádný tok. Dle Gaussova zákona nemůže být uvnitř plochy nenulový náboj. Z toho plyne, že na stěnách dutiny se nenachází žádný náboj; všechen přivedený náboj je tedy rozložen na *vnějším* povrchu vodiče, stejně jako v případě na obr. 24.9a.

Kdyby vodič zmizel...

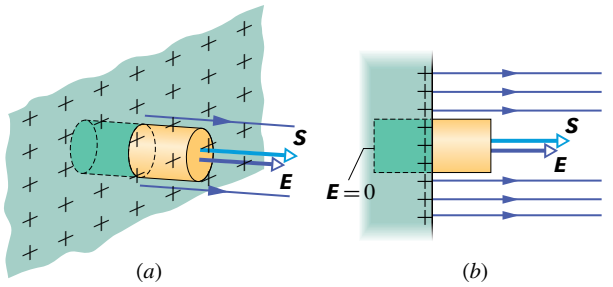
Předpokládejme, že pomocí nějakého kouzla můžeme „zmrazit" náboj na povrchu vodiče, třeba tak, že jej vložíme do tenkého plastového pláště, a poté odstraníme vodič. To je ekvivalentní případu z obr. 24.9b, v němž rozšíříme dutinu na celý vodič, čímž vodič odstraníme a zůstanou nám pouze náboje. Elektrické pole a jeho intenzita se tím vůbec nezmění. Intenzita elektrického pole bude nulová uvnitř tenké vrstvy nábojů a nezměněná pro všechny vnější body. Odtud vyplývá, že elektrické pole je vytvořeno náboji a ne vodičem. Vodič pouze slouží jako „cesta", aby náboje mohly zaujmout své polohy.

Vnější elektrické pole

Viděli jsme již, že se volný náboj na izolovaném vodiči přesouvá tak, aby se dostal na jeho povrch. Vyjma kulového vodiče se však náboj nerozdělí rovnoměrně. Plošná hustota náboje σ je obecně různá v různých bodech na povrchu vodiče. Je proto velmi obtížné určit elektrickou intenzitu obecně.

Elektrické pole těsně nad povrchem nabitého vodiče se však snadno určí pomocí Gaussova zákona. K tomu vybereme část povrchu tak malou, abychom mohli zanedbat její zakřivení a mohli ji pokládat za rovinnou. Poté uvažujme Gaussovu plochu ve tvaru nízkého válečku. Jedna jeho základna je ve vodiči těsně pod povrchem, druhá těsně nad ním a plášť je orientován kolmo k povrchu vodiče (obr. 24.10).

Elektrická intenzita $\boldsymbol{E}$ těsně nad povrchem vodiče musí být kolmá k povrchu vodiče. Kdyby tomu tak nebylo, měla



Obr. 24.10 (a) Prostorové znázornění, (b) řez částí velkého izolovaného vodiče nabitého přivedeným kladným nábojem. Gaussova plocha je uzavřená, obepíná jistý náboj a její plášť je kolmý k povrchu vodiče. Elektrické siločáry procházejí vnější podstavou válečku, ale neprocházejí vnitřní podstavou. Vnější podstava je popsána vektorem $\boldsymbol{S}$.

by složku ve směru povrchu a přesouvala by po povrchu náboj. Takový pohyb by byl ale v rozporu s naším předpokladem elektrostatické rovnováhy.

Vyjádřeme nyní celkový tok Gaussovou plochou. Vnitřní podstavou neprochází žádný tok, protože uvnitř vodiče je elektrické pole nulové. Pláštěm válečku také neprochází žádný tok, protože uvnitř vodiče je elektrické pole nulové a mimo vodič je jeho intenzita rovnoběžná s pláštěm válečku. Jediný nenulový tok je tok podstavou mimo vodič; vektor $\boldsymbol{E}$ je zde kolmý k podstavě válečku. Předpokládáme, že obsah podstavy je dosti malý, abychom na ní mohli považovat E za konstantní. Potom tok touto podstavou je ES, což představuje celkový tok Φ_E uvažovanou Gaussovou plochou.

Náboj Q, který je obklopen Gaussovou plochou, leží na povrchu vodiče na ploše o obsahu S. Je-li σ plošná hustota náboje, pak $Q = \sigma S$. Dosadíme-li σS za Q a ES za Φ_E, bude mít Gaussův zákon tvar

$$\varepsilon_0 ES = \sigma S,$$

z něhož plyne

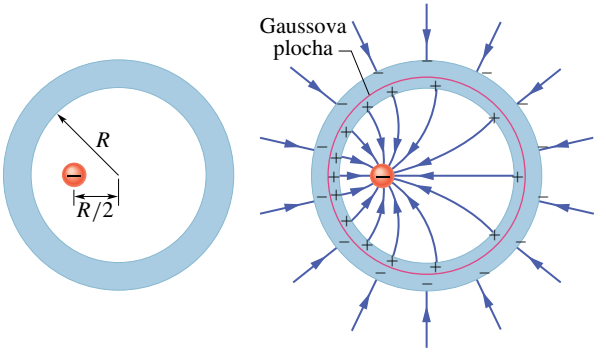
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{(vodivý povrch)}. \qquad (24.11)$$

To znamená, že velikost elektrické intenzity v místě těsně nad povrchem vodiče je přímo úměrná plošné hustotě náboje v tomto místě na vodiči. Je-li vodič nabit kladně, směřují siločáry kolmo od vodiče (obr. 24.10), je-li nabit záporně, směřují kolmo k němu.

Siločáry v obr. 24.10 musí končit v nekonečnu nebo na záporných nábojích někde v okolí vodiče. Jestliže se tyto náboje nacházejí blízko vodiče, změní se plošná hustota náboje v daném místě vodiče, a tím i intenzita elektrického pole v tomto bodě. Mezi veličinami σ a E vztah (24.11) však platí stále.

PŘÍKLAD 24.4

Na obr. 24.11a je příčný řez kovovou kulovou vrstvou o vnitřním poloměru R. Bodový náboj $-5{,}0\,\mu\text{C}$ se nachází ve vzdálenosti $R/2$ od jejího středu. Jaké náboje budou indukovány na její vnitřní a vnější stěně, je-li vrstva elektricky neutrální? Budou tyto náboje rozděleny rovnoměrně? Jak bude vypadat elektrické pole uvnitř a vně kulové vrstvy?



Obr. 24.11 Příklad 24.4. (a) Záporný bodový náboj se nachází uvnitř elektricky neutrální kulové kovové vrstvy. (b) Výsledkem je, že se kladný náboj nerovnoměrně rozloží na vnitřní stěně vrstvy a stejně velký záporný náboj se rovnoměrně rozloží na stěně vnější. Na obrázku je znázorněn i průběh elektrických siločár.

ŘEŠENÍ: Na obr. 24.11b je příčný řez kulovou Gaussovou plochou procházející vrstvou těsně nad její vnitřní stěnou. Protože uvnitř kovu musí být elektrické pole nulové (a tedy i na Gaussově ploše uvnitř kovu), musí být také tok elektrické intenzity Gaussovou plochou roven nule. Z Gaussova zákona plyne, že celkový náboj obklopený Gaussovou plochou musí být také v tomto případě nulový. Jestliže je uvnitř kulové vrstvy bodový náboj $-5{,}0\,\mu\text{C}$, potom na vnitřní stěně vrstvy musí být náboj $+5{,}0\,\mu\text{C}$.

Kdyby se bodový náboj nacházel ve středu kulové vrstvy, byl by náboj rozdělen rovnoměrně na vnitřní stěně vrstvy. Zde však náboj v jejím středu neleží, takže rozdělení indukovaného náboje bude nerovnoměrné (obr. 24.11b): kladný náboj bude přitahován k místům bližším vloženému zápornému náboji.

Poněvadž je vrstva elektricky neutrální, může její vnitřní stěna nést náboj $+5{,}0\,\mu\text{C}$ pouze tehdy, když elektrony o celkovém náboji $-5{,}0\,\mu\text{C}$ se přesunou na vnější stěnu. Na ní pak budou rozloženy rovnoměrně (obr. 24.11b), protože vrstva je kulová. Rovnoměrnost rozložení náboje na vnějším povrchu nemůže být „porušena“ nerovnoměrností na vnitřním povrchu, protože mezi nimi leží vodič — a v něm je elektrické pole nulové.

Přibližný průběh elektrických siločár uvnitř a vně kulové vrstvy je znázorněn na obr. 24.11b. Všechny siločáry jsou ke kulové vrstvě kolmé. Z vnitřního povrchu vrstvy vystupují dovnitř a zakřivují se k náboji v dutině. Uvnitř kovové ku-

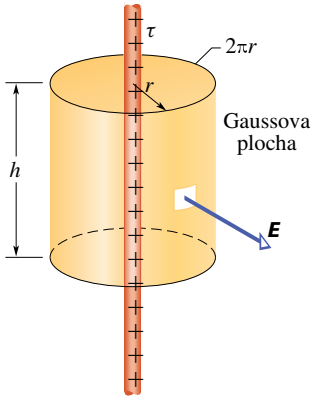
lové vrstvy je pole nulové. Vně kulové vrstvy je průběh elektrických siločár stejný, jako by šlo o pole bodového náboje umístěného ve středu koule a kulová vrstva by neexistovala. Tak je tomu, ať je náboj umístěn uvnitř koule kdekoli.

KONTROLA 4: Náboj $-50e$ leží ve středu duté kulové kovové vrstvy, která je nabita nábojem $-100e$. Jaký náboj se bude nacházet na (a) vnitřní, (b) vnější stěně vrstvy?

24.7 POUŽITÍ GAUSSOVA ZÁKONA: VÁLCOVÁ SYMETRIE

Na obr. 24.12 je znázorněna část nekonečně dlouhé válcové plastové tyčinky nabité rovnoměrně kladným nábojem s délkovou hustotou τ. Chceme najít vztah pro elektrickou intenzitu $\boldsymbol{E}$ ve vzdálenosti r od osy tyčinky.

Gaussovu plochu $\mathscr{S}$ zvolíme tak, aby vystihovala symetrii problému, tedy jako povrch válce (o poloměru r a výšce h), jehož osa splývá s osou plastové tyčinky.



Obr. 24.12 Gaussova plocha ve tvaru povrchu válce obklopuje část velmi dlouhé rovnoměrně nabité válcové plastové tyčinky.

Představme si nyní, že zatímco jsme se nedívali, někdo pootočil plastovou tyčinkou kolem její podélné osy nebo ji otočil tak, že zaměnil konce tyčinky. Když se znovu na tyčinku a její pole podíváme, nezjistíme žádnou změnu. Z toho plyne, že pole tyčinky má rotační neboli válcovou symetrii: vektor $\boldsymbol{E}$ směřuje radiálně od osy válce (v případě, že tyčinka je kladně nabita) a jeho velikost závisí pouze na vzdálenosti od osy válce. Proto je tok podstavami nulový (vektor $\boldsymbol{E}$ je rovnoběžný s podstavami válce) a zůstává nenulový tok pláštěm válce. Poněvadž $2\pi r$ je obvod válce a h jeho výška, je obsah pláště válce $2\pi rh$. Tok intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$ tímto pláštěm je

$$\Phi_E = ES\cos 0 = E(2\pi rh).$$

Náboj obepnutý plochou je $Q = \tau h$, takže Gaussův zákon

$$\varepsilon_0 \Phi_E = Q$$

dává

$$\varepsilon_0 E(2\pi rh) = \tau h.$$

Odtud

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{(nabité vlákno)}, \qquad (24.12)$$

což vyjadřuje velikost elektrické intenzity pole nekonečně dlouhého nabitého vlákna ve vzdálenosti r od osy vlákna. Vektor $\boldsymbol{E}$ směřuje radiálně od vlákna, je-li náboj kladný, a radiálně k němu, je-li záporný.

PŘÍKLAD 24.5

Viditelnému záblesku při úderu blesku předchází neviditelné stádium, v němž vznikne kanál elektronů sahající z mraků až k zemskému povrchu. Tyto elektrony pocházejí jednak z mraků, jednak z molekul tvořících vzduch, které jsou ionizovány v kanálu. Typická hodnota délkové hustoty náboje v kanálu je $\tau = -1{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{C{\cdot}m^{-1}}$. Když blesk udeří na zem, elektrony v jeho vodivém kanálu rychle přecházejí do zemského povrchu. Při srážkách elektronů s molekulami vzduchu dochází k ionizaci, což se projeví jako jasné záblesky světla. Určete poloměr kanálu, jestliže se molekuly vzduchu ionizují, překročí-li elektrická intenzita hodnotu $3{\cdot}10^6\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$.

ŘEŠENÍ: I když kanál není ani přímý, ani nekonečně dlouhý, použijeme model lineárně rozloženého náboje (obr. 24.12). (Protože obsahuje záporný náboj, míří $\boldsymbol{E}$ dovnitř sloupce.) Podle rov. (24.12) klesá velikost intenzity E elektrického pole s rostoucí vzdáleností od osy kanálu. Povrch kanálu je v takové vzdálenosti r, v níž má elektrická intenzita $\boldsymbol{E}$ velikost $3{\cdot}10^6\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$. Molekuly vzduchu uvnitř kanálu jsou ionizovány, molekuly vzdálenější nikoli. Řešením rov. (24.12) dostáváme pro poloměr kanálu

$$r = \frac{|\tau|}{2\pi\varepsilon_0|E|} = \frac{(1{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{C{\cdot}m^{-1}})}{2\pi(8{,}85{\cdot}10^{-12}\ \mathrm{C^2{\cdot}N^{-1}{\cdot}m^{-2}}){\cdot}(3{\cdot}10^6\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}})} =$$
$$= 6\ \mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Poloměr zářivé části blesku je však menší, přibližně jen 0,5 m. Představu o rozměrech blesku si můžete udělat dle obr. 24.13.) I když poloměr sloupce je jen 6 m, nemyslete si, že jste v bezpečí, nacházíte-li se trochu dál od místa dopadu

blesku na zem. Elektrony z blesku putují po zemském povrchu a takové *povrchové zemní proudy* jsou smrtelné. Na obr. 24.14 jsou patrné zřetelné stopy těchto proudů.



Obr. 24.13 Blesk udeřil do 20 m vysoké sekvoje. Protože byl strom mokrý, prošla většina z nábojů vodou po jeho povrchu a strom zůstal nepoškozen.



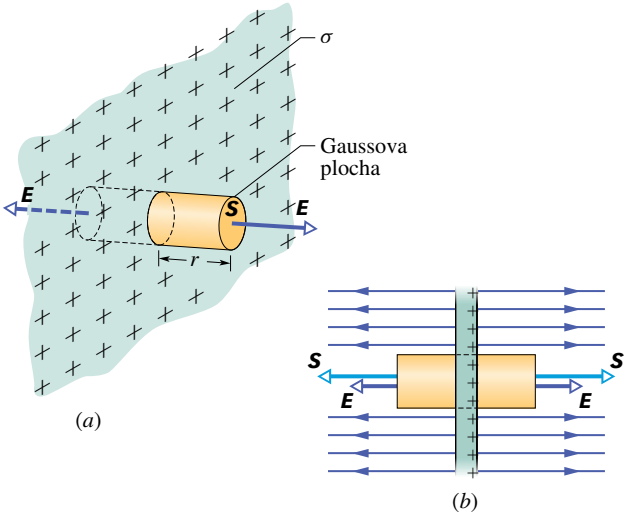
Obr. 24.14 Vypálené stopy zemních proudů blesku na trávníku golfového jamkoviště.

24.8 POUŽITÍ GAUSSOVA ZÁKONA: ROVINNÁ SYMETRIE

Nevodivá vrstva

Na obr. 24.15 je část tenké, nekonečně velké nevodivé vrstvy, na níž je rovnoměrně rozložen kladný náboj s plošnou hustotou σ. Za jednoduchý model nám může posloužit kus tenké plastové fólie. Naším úkolem je určit elektrickou intenzitu $\boldsymbol{E}$ ve vzdálenosti r od vrstvy.

Vhodnou Gaussovou plochou je povrch válce s podstavami o obsahu S, jehož osa je kolmá k vrstvě (obr. 24.15). Z důvodů symetrie je intenzita $\boldsymbol{E}$ kolmá k rovině vrstvy, tzn. i k ploše podstav. Pro kladný náboj směřuje $\boldsymbol{E}$ *od roviny* a prochází tedy oběma podstavami Gaussovy plochy směrem ven z válce. Protože siločáry neprotínají plášť válce, neprochází touto částí Gaussovy plochy žádný tok.



Obr. 24.15 (a) Celkový pohled, (b) boční pohled na část tenké velmi velké plastové vrstvy, rovnoměrně nabité na jedné straně nábojem s plošnou hustotou σ. Osa válcové Gaussovy plochy protíná kolmo vrstvu a je rovnoběžná se směrem pole.

Celkový tok je tedy roven součtu toků oběma podstavami válce; pro každou platí $\int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = ES$. Z Gaussova zákona plyne

$$\varepsilon_0(ES + ES) = \sigma S,$$

kde σS je náboj uzavřený v Gaussově ploše. Odtud dostaneme

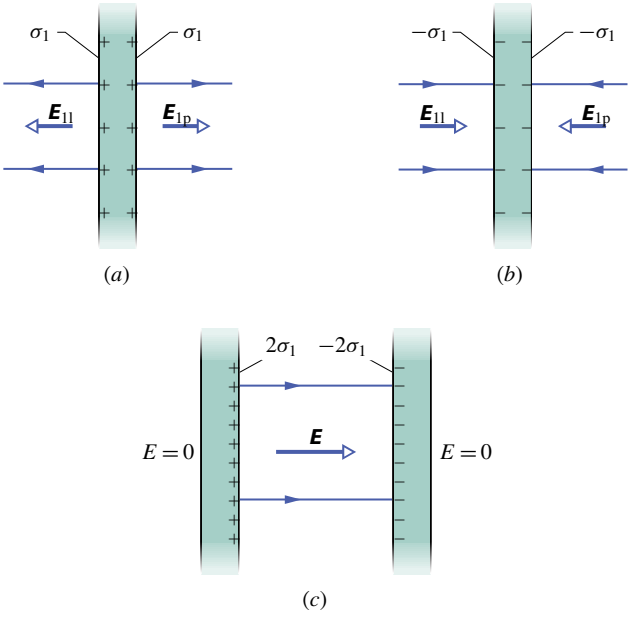
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{(nabitá plocha).} \qquad (24.13)$$

Uvažovali jsme nekonečně velkou rovinu s konstantní plošnou hustotou náboje. Ve výsledku se nevyskytuje r, takže

intenzita má stejnou velikost v každém bodě prostoru. Rov. (24.13) odpovídá rov. (23.25), kterou jsme dostali integrací složek intenzity elektrického pole vyvolaného jednotlivými náboji. (Podívejte se, kolik bylo třeba integrování, a všimněte si, jak snadno lze dostat tentýž výsledek pomocí Gaussova zákona. To je jeden z důvodů, proč věnujeme celou kapitolu Gaussovu zákonu elektrostatiky: pro určitá symetrická rozložení náboje je opravdu mnohem výhodnější jej použít, než integrovat složky pole.)

Dvě vodivé desky

Na obr. 24.16a je řez tenkou, nekonečně velkou vodivou deskou, na niž byl přenesen kladný náboj. Z čl. 24.6 víme, že tento náboj leží na povrchu desky. Protože deska je tenká a velmi velká, můžeme předpokládat, že se v podstatě celý náboj nachází na obou stranách desky.



Obr. 24.16 (a) Tenká, velmi velká, kladně nabitá vodivá deska. (b) Stejná záporně nabitá deska. (c) Dvě desky rovnoběžné a blízko u sebe.

Jestliže není přítomen žádný vnější náboj, který by rozložení náboje ovlivnil, budou náboje rozloženy na obou stranách desky s konstantní plošnou hustotou σ_1. Z rovnice (24.11) plyne, že těsně vedle desky má vzniklé pole intenzitu o velikosti $E_1 = \sigma_1/\varepsilon_0$. Protože náboj je kladný, směřuje pole $\boldsymbol{E}_1$ od desky.

Na obr. 24.16b je znázorněna táž deska, ale záporně nabitá, mající stejnou velikost plošné hustoty náboje σ_1. Jedinou změnou proti předchozí situaci je, že intenzita pole směřuje k desce.

Předpokládejme, že umístíme obě desky tak, aby byly rovnoběžné a blízko u sebe (obr. 24.16c). Protože desky jsou vodivé, začne náboj na jedné desce přitahovat náboj na druhé desce. Proto se všechny náboje přemístí na vnitřní stěny desek (obr. 24.16c). Na každé z vnitřních stěn desek bude nyní dvojnásobně velký náboj, takže nová plošná hustota náboje σ bude dvojnásobkem σ_1. Elektrická intenzita v každém bodě mezi deskami bude mít velikost

$$E = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (24.14)$$

Toto pole směřuje od kladně nabité desky k záporné. Protože na vnější stěnu desek nebyl přiveden žádný náboj, bude elektrické pole vlevo i vpravo od desek rovno nule.

Může se vám zdát podivné, proč se zabýváme tak nepravděpodobnou situací, jako je pole buzené nekonečně dlouhou nabitou přímkou, nekonečnou rovinou či dvojicí nekonečných nabitých desek. Není to *jen* proto, abychom analyzovali takové situace pomocí Gaussova zákona (ačkoli i to je pravda). Podstatnější je, že tyto analýzy případů, v nichž se vyskytují nekonečně velké rozměry, nám poslouží jako velmi dobrá aproximace reálných situací. Tak se např. dá velmi dobře použít rov. (24.13) pro nevodivou vrstvu konečných rozměrů, pokud zjišťujeme velikost pole v blízkosti vrstvy a dosti daleko od jejích okrajů. Podobně rov. (24.14) platí pro dvojici konečných vodivých desek, pokud opět nebereme v úvahu místa v blízkosti jejich hran.

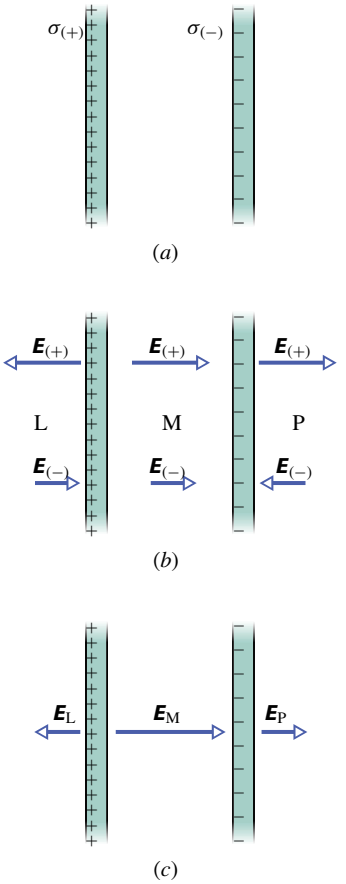
Potíže s okraji vrstev nebo desek a důvody, proč se k nim příliš nepřibližujeme, spočívají v tom, že v jejich blízkosti již není možné použít rovinnou symetrii při určování intenzity polí. Siločáry se zde zakřivují (vlivem okrajů) a detaily pole se pak velmi obtížně počítají.

Při řešení elektrostatických úloh s vodiči nemůžeme jednoduše rozdělit problém na několik úloh, každou s jedním vodičem, a pak sčítat jejich dílčí řešení. Princip superpozice sice platí i zde, ale musíme uvážit, že rozložení náboje na vodiči je výrazně ovlivněno přítomností dalších vodičů či nábojů v jeho okolí. Jinými slovy, kdybychom zmrazili rozložení nábojů na vodičích v soustavě a soustavu rozdělili na části, pak by opravdu pole soustavy bylo součtem polí těchto částí. Jakmile ovšem připustíme, že náboje na vodičích nejsou „zmrazeny“, mohou se pod vlivem ostatních částí přerozdělit jinak, než jak byly rozmístěny.

PŘÍKLAD 24.6

Na obr. 24.17a je znázorněna část dvou velkých rovnoběžných nevodivých desek, z nichž každá nese na jedné stěně rovnoměrně rozložený náboj. Plošné hustoty nábojů jsou $\sigma_{(+)} = 6{,}8\,\mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$ pro kladně nabitou desku a $\sigma_{(-)} = -4{,}3\,\mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$ pro záporně nabitou desku.

Vyjádřete intenzitu elektrického pole $\boldsymbol{E}$ (a) vlevo od desek, (b) mezi deskami, (c) vpravo od desek.



Obr. 24.17 Příklad 24.6. (a) Dvě velké rovnoběžné desky rovnoměrně nabité po jedné straně. (b) Elektrická pole jednotlivých desek. (c) Výsledné pole vytvořené superpozicí polí obou nabitých desek.

ŘEŠENÍ: Protože se náboje nemohou pohybovat, můžeme najít elektrické pole desek z obr. 24.17a tak, že (1) najdeme pole od každé desky samostatně, (2) sečteme pole od samostatných desek pomocí principu superpozice. Z rov. (24.13) plyne, že velikost intenzity elektrického pole $E_{(+)}$ od kladně nabité desky je v libovolném bodě rovna

$$E_{(+)} = \frac{\sigma_{(+)}}{2\varepsilon_0} = \frac{(6{,}8{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{C{\cdot}m^{-2}})}{2(8{,}85{\cdot}10^{-12}\,\mathrm{C^2{\cdot}N^{-1}{\cdot}m^{-2}})} = \\ = 3{,}84{\cdot}10^5\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}.$$

Podobně pro záporně nabitou desku je

$$E_{(-)} = \frac{|\sigma_{(-)}|}{2\varepsilon_0} = \frac{(4{,}3{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{C{\cdot}m^{-2}})}{2(8{,}85{\cdot}10^{-12}\,\mathrm{C^2{\cdot}N^{-1}{\cdot}m^{-2}})} = \\ = 2{,}43{\cdot}10^5\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}.$$

Na obr. 24.17b je konfigurace polí od jednotlivých desek vlevo od desek (L), mezi deskami (M) a vpravo od desek (P). Výsledná pole v těchto oblastech získáme z principu superpozice. Vlevo od desek je velikost intenzity pole

$$E_\mathrm{L} = E_{(+)} - E_{(-)} = \\ = (3{,}84{\cdot}10^5\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}) - (2{,}43{\cdot}10^5\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}) = \\ = 1{,}41{\cdot}10^5\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Protože $E_{(+)}$ je větší než $E_{(-)}$, směřuje výsledná intenzita $\boldsymbol{E}_\mathrm{L}$ vlevo (obr. 24.17c). Vpravo od desek bude elektrické pole $\boldsymbol{E}_\mathrm{P}$ stejně velké, ale bude směřovat vpravo (obr. 24.17c). Mezi deskami mají obě pole stejný směr, a proto

$$E_\mathrm{M} = E_{(+)} + E_{(-)} = \\ = (3{,}84{\cdot}10^5\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}) + (2{,}43{\cdot}10^5\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}) = \\ = 6{,}27{\cdot}10^5\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledné pole $\boldsymbol{E}_\mathrm{M}$ míří vpravo.

Všimněme si, že vně desek je elektrické pole stejné, jako by pocházelo od jediné desky, jejíž plošná hustota náboje by byla $\sigma'_{(+)} = \sigma_{(+)} + \sigma_{(-)} = 2{,}5{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{C{\cdot}m^{-2}}$.

24.9 POUŽITÍ GAUSSOVA ZÁKONA: KULOVÁ SYMETRIE

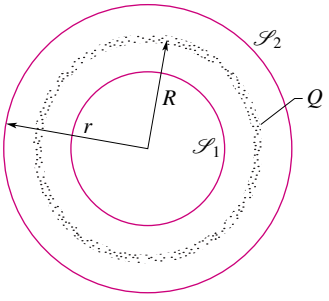
Nyní dokážeme pomocí Gaussova zákona oba slupkové teorémy, které jsme uvedli bez důkazu v čl. 22.4:

Rovnoměrně nabitá kulová vrstva (slupka) přitahuje, nebo odpuzuje nabitou částici *vně* této vrstvy stejnou silou, jako kdyby se celý náboj vrstvy nacházel v jejím středu.
Pro nabitou částici *uvnitř* (v dutině) této vrstvy je výsledná síla, kterou působí vrstva, rovna nule.

Na obr. 24.18 je znázorněna nabitá kulová vrstva o poloměru R, nesoucí celkový náboj Q, a dvě soustředné kulové Gaussovy plochy $\mathscr{S}_1$ a $\mathscr{S}_2$. Pomocí postupu navrženého v čl. 24.5 a použitím Gaussova zákona na plochu $\mathscr{S}_2$, pro niž platí $r > R$, zjistíme, že

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \begin{matrix}\text{(pole kulové vrstvy}\\ \text{ve vzdálenosti } r > R).\end{matrix} \qquad (24.15)$$

Je to stejné pole, jaké by vytvořil bodový náboj, umístěný ve středu nabité kulové vrstvy. Velikost síly, kterou působí kulová vrstva na nabitou částici ležící vně, je tedy stejná jako velikost síly v případě, že by vrstva byla nahrazena bodovým nábojem Q ležícím v jejím středu. Tím je dokázán první slupkový teorém.



Obr. 24.18 Řez tenkou kulovou vrstvou, nesoucí rovnoměrně rozložený náboj Q, a dvěma Gaussovými plochami $\mathscr{S}_1$ a $\mathscr{S}_2$. Plocha $\mathscr{S}_2$ obklopuje kulovou vrstvu, plocha $\mathscr{S}_1$ obklopuje pouze prázdný prostor uvnitř vrstvy.

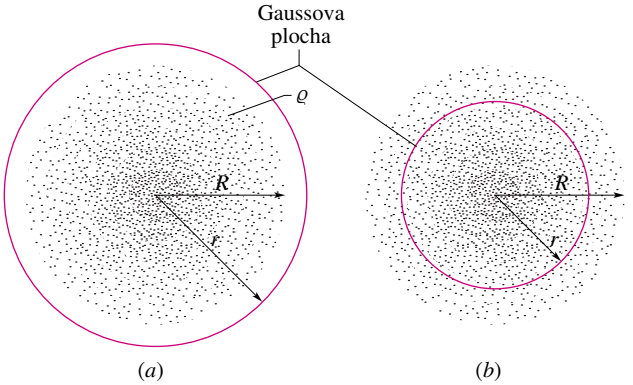
Použijeme-li Gaussův zákon na druhou plochu $\mathscr{S}_1$, pro niž $r < R$, dostaneme

$$E = 0 \quad \begin{matrix}\text{(pole kulové vrstvy}\\ \text{ve vzdálenosti } r < R\text{),}\end{matrix} \qquad (24.16)$$

protože tato Gaussova plocha neobepíná žádný náboj. Výsledná síla působící na náboj uvnitř rovnoměrně nabité kulové vrstvy je tedy rovna nule, což vyjadřuje druhý slupkový teorém.

Libovolné kulově symetrické rozložení náboje, jako je např. na obr. 24.19, může být vytvořeno ze soustředných kulových vrstev. Abychom mohli použít slupkového teorému, musí být koule nabita po vrstvách homogenně; hustota náboje ϱ je tedy funkcí pouze vzdálenosti r od středu koule. Pak můžeme zkoumat vliv rozložení náboje v jednotlivých vrstvách odděleně, vrstvu po vrstvě.

Na obr. 24.19a leží celkový náboj uvnitř Gaussovy plochy tvaru povrchu koule o poloměru $r > R$. Tento náboj



Obr. 24.19 Tečky představují kulově symetrické rozložení náboje v kouli o poloměru R, jehož objemová hustota je funkcí pouze vzdálenosti od středu. Nabitá koule není vodič, takže se v ní náboj nemůže pohybovat. (a) Soustředná kulová Gaussova plocha o poloměru $r > R$. (b) Obdobná Gaussova plocha o poloměru $r < R$.

vytváří stejné elektrické pole na této Gaussově ploše jako stejně velký bodový náboj téhož znaménka, umístěný ve středu kulové plochy.

Na obr. 24.19b je znázorněna Gaussova plocha o poloměru $r < R$. Abychom určili velikost elektrického pole na této ploše, budeme rozlišovat nabité kulové vrstvy uvnitř a vně Gaussovy plochy. Z rov. (24.16) plyne, že náboj ležící *vně* Gaussovy plochy na ní nevytváří žádné elektrické pole. Z rov. (24.15) plyne, že náboj *obklopený uzavřenou* plochou vytváří elektrické pole stejné, jako by tento náboj byl soustředěn ve středu kulové vrstvy. Nechť Q' je náboj obklopený uzavřenou plochou; pak podle rov. (24.15) platí

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{r^2} \quad \begin{matrix}\text{(pole kulové vrstvy}\\ \text{ve vzdálenosti } r < R\text{).}\end{matrix} \qquad (24.17)$$

PŘÍKLAD 24.7

Jádro atomu zlata má poloměr $R = 6{,}2\cdot10^{-15}$ m a nese kladný náboj $Q = Ze$, kde $Z = 79$ je atomové číslo zlata. Nakreslete průběh intenzity elektrického pole od středu jádra až do vzdálenosti $2R$. Předpokládejme, že jádro má kulový tvar s prostorově homogenním rozložením náboje.

ŘEŠENÍ: Celkový náboj jádra je

$$Q = Ze = 79(1{,}602\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}) = 1{,}264\cdot10^{-17}\,\mathrm{C}.$$

Pole vně jádra je popsáno rov. (24.15). Gaussovu plochu zvolíme podle obr. 24.19a. Pro bod na povrchu jádra je elektrická intenzita

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2} = \\ = \frac{(1{,}264\cdot10^{-17}\,\mathrm{C})}{4\pi(8{,}85\cdot10^{-12}\,\mathrm{C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}})(6{,}2\cdot10^{-15}\,\mathrm{m})^2} = \\ = 3\cdot10^{21}\,\mathrm{N\cdot C^{-1}}.$$

Pro výpočet pole uvnitř jádra použijeme rov. (24.17) a Gaussovu plochu podle obr. 24.19b. Nechť Q' je náboj obklopený kulovou Gaussovou plochou o poloměru $r < R$. Poněvadž je náboj rozložen v objemu jádra homogenně, je náboj uvnitř Gaussovy plochy úměrný objemu koule:

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad (24.18)$$

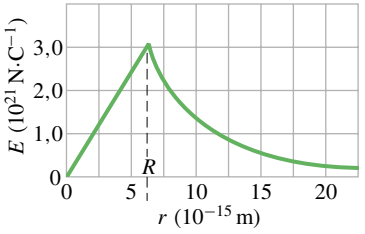
a odtud

$$Q' = Q\frac{r^3}{R^3}.$$

Dosazením tohoto výsledku do rov. (24.17) dostaneme

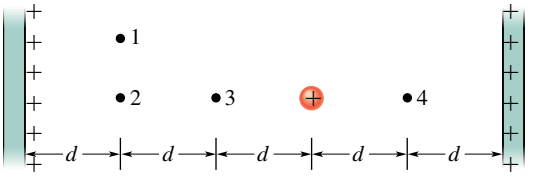
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,r \quad (r < R). \qquad (24.19)$$

Výraz v závorce je konstantní. Uvnitř jádra roste tedy elektrická intenzita přímo úměrně poloměru r, ve středu jádra je $E = 0$. Jak rov. (24.19) pro pole uvnitř jádra, tak i rov. (24.15) pro vnějšek dávají na hranici jádra (pro $r = R$) tutéž hodnotu $E = 3{\cdot}10^{21}\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$. Navazují tedy na hranici jádra spojitě. Na obr. 24.20 je celý výsledek vyjádřen graficky.



Obr. 24.20 Příklad 24.7. Závislost intenzity elektrického pole na vzdálenosti od středu jádra atomu zlata. Předpokládáme homogenní rozdělení kladného náboje v objemu jádra.

KONTROLA 5: Na obrázku jsou dvě rovnoběžné, velké, nevodivé vrstvy se stejnými plošnými hustotami kladného náboje a koule s homogenní objemovou hustotou kladného náboje. Určete intenzity elektrického pole v bodech 1 až 4 a seřaďte tyto body sestupně podle velikosti intenzity.



PŘEHLED & SHRNUTÍ

Gaussův zákon elektrostatiky

Gaussův zákon a Coulombův zákon, ačkoli mají různé tvary, jsou ekvivalentní způsoby pro popis vztahu mezi nábojem a elektrickým polem v elektrostatice. Gaussův zákon zní

$$\varepsilon_0 \Phi_E = Q \quad \text{(Gaussův zákon)}, \tag{24.6}$$

kde Q je celkový náboj uvnitř pomyslné uzavřené plochy $\mathscr{S}$ (*Gaussovy plochy*) a Φ_E je *celkový tok* vektoru elektrické intenzity touto plochou:

$$\Phi_E = \oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad \begin{array}{l}\text{(tok elektrické intenzity}\\ \text{Gaussovou plochou } \mathscr{S}).\end{array} \tag{24.4}$$

Coulombův zákon lze snadno odvodit z Gaussova zákona.

Použití Gaussova zákona

Pomocí Gaussova zákona můžeme při využití podmínek symetrie odvodit některé důležité výsledky pro elektrostatiku. Mezi ně patří např. tyto:

1. Náboj na *izolovaném vodiči* se celý nachází na vnějším povrchu vodiče.

2. Elektrická intenzita *vně nabitého vodiče* v jeho těsné blízkosti je kolmá k povrchu vodiče a má velikost

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{(vodivá plocha)}. \tag{24.11}$$

Uvnitř vodiče je $E = 0$.

3. Elektrická intenzita pole buzeného dlouhým přímým vláknem s rovnoměrně rozloženým nábojem má radiální směr a velikost

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{(nabité vlákno)}, \tag{24.12}$$

kde τ je délková hustota náboje a r je vzdálenost uvažovaného bodu od vlákna.

4. Elektrická intenzita pole *nekonečně velké roviny* s konstantní plošnou hustotou náboje σ je kolmá k této rovině a má velikost

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{(nabitá plocha — vrstva nábojů)}. \tag{24.13}$$

5. Elektrická intenzita *vně rovnoměrně nabité kulové vrstvy* o poloměru R a celkovém náboji Q má radiální směr a velikost

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad \text{(kulová vrstva, } r > R), \tag{24.15}$$

kde r je vzdálenost od středu kulové vrstvy k bodu, v němž určujeme $\boldsymbol{E}$. (Náboj se projevuje tak, jako by byl všechen soustředěn ve středu vrstvy.) Intenzita pole *uvnitř* rovnoměrně nabité kulové vrstvy je rovna nule:

$$E = 0 \quad \text{(kulová vrstva, } r < R). \tag{24.16}$$

6. Elektrická intenzita *uvnitř homogenně nabité koule* o poloměru R, $r < R$, má radiální směr a velikost

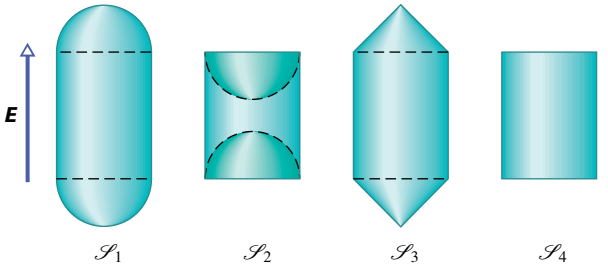
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r. \tag{24.19}$$

OTÁZKY

1. Plocha je charakterizována vektorem $\boldsymbol{S} = (2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}^2$. Jaký je tok intenzity elektrického pole touto plochou, je-li (a) $\boldsymbol{E} = 4\boldsymbol{i}\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$, (b) $\boldsymbol{E} = 4\boldsymbol{k}\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$?

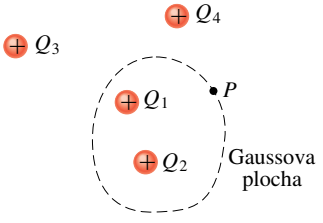
2. Určete $\int \mathrm{d}S$ pro (a) čtvercovou plochu o straně a, (b) kruh o poloměru r, (c) plášť válce o výšce h a poloměru r.

3. Na obr. 24.21 jsou čtyři válcovité Gaussovy plochy se stejným pláštěm a podstavami různého tvaru. Tyto plochy se nacházejí v homogenním elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$, která je rovnoběžná s osou válcových ploch. Podstavy $\mathscr{S}_1$ mají tvar povrchu konvexních polokoulí, podstavy $\mathscr{S}_2$ konkávních polokoulí, podstavy $\mathscr{S}_3$ kuželů a podstavy $\mathscr{S}_4$ tvar kruhů. Seřaďte sestupně tyto plochy podle (a) velikosti celkového toku intenzity elektrického pole, (b) podle toku elektrické intenzity horními podstavami.



Obr. 24.21 Otázka 3

4. Na obr. 24.22 obepíná Gaussova plocha dvě ze čtyř kladně nabitých částic. (a) Určete, které částice přispívají k vytvoření elektrického pole v bodě P na Gaussově ploše. (b) Který z toků elektrické intenzity touto plochou je větší: tok pole buzeného náboji Q_1 a Q_2, nebo tok pole buzeného všemi čtyřmi náboji?

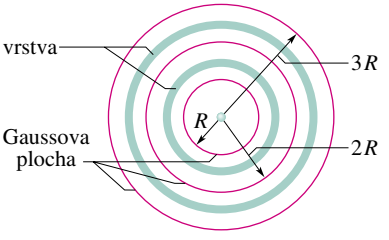


Obr. 24.22 Otázka 4

5. Mějme osm částic s náboji $+2Q$, $+3Q$, $+4Q$, $+5Q$, $-2Q$, $-3Q$, $-4Q$, $-5Q$. Zkuste vytvořit různé Gaussovy plochy obklopující jeden či více z těchto nábojů tak, aby celkový tok plochou byl 0, $+Q/\varepsilon_0$, $+2Q/\varepsilon_0$, … , $+14Q/\varepsilon_0$. Kterou z těchto hodnot není možné dosáhnout?

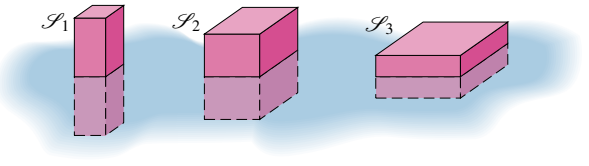
6. Tok elektrického pole kulovou Gaussovou plochou o poloměru r obklopující proton je Φ_E. Určete, ve které z následujících situací je tok menší, roven, či větší než Φ_E: (a) Proton se nachází vně plochy. (b) Uvnitř plochy jsou dva protony. (c) Jeden proton je uvnitř plochy, druhý je vně. (d) Jeden proton a jeden elektron leží uvnitř plochy.

7. Na obr. 24.23 jsou zobrazeny v řezu vnitřní kovová koule, dvě kovové kulové vrstvy a tři soustředné kulové Gaussovy plochy o poloměrech R, $2R$, $3R$. Na vnitřní kouli je náboj Q, na kulové vrstvě o menším poloměru je náboj $3Q$, na vrstvě o větším poloměru je náboj $5Q$. Seřaďte Gaussovy plochy sestupně podle velikosti elektrické intenzity v libovolném bodě na jejich povrchu.



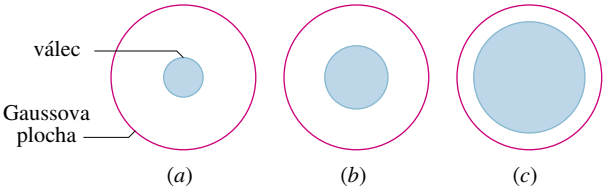
Obr. 24.23 Otázka 7

8. Na obr. 24.24 jsou tři Gaussovy plochy tvořené povrchy kvádrů, které jsou částečně zasunuté do velké tlusté kovové desky s konstantní plošnou hustotou náboje. $\mathscr{S}_1$ má největší výšku a nejmenší čtvercovou základnu, $\mathscr{S}_3$ má nejmenší výšku a největší čtvercovou základnu a rozměry $\mathscr{S}_2$ jsou mezi těmito hodnotami. Seřaďte sestupně Gaussovy plochy podle velikosti (a) náboje, který obklopují, (b) elektrické intenzity na jejich horních podstavách, (c) toku elektrické intenzity horní podstavou, (d) toku spodní podstavou.



Obr. 24.24 Otázka 8

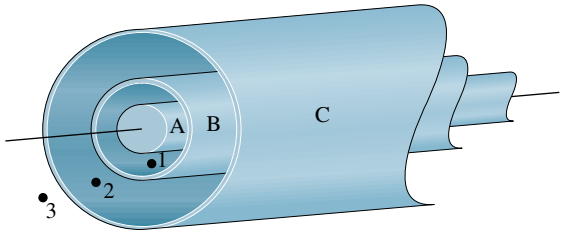
9. Na obr. 24.25 je znázorněn řez třemi válci, z nichž každý nese náboj Q. Gaussova plocha je tvořená povrchem souosého válce a má ve všech třech případech stejný poloměr. Seřaďte v sestupném pořadí tyto případy podle velikosti elektrické intenzity na Gaussově ploše.



Obr. 24.25 Otázka 9

10. Na obr. 24.26 je řez třemi dlouhými souosými dutými válci, na nichž je rovnoměrně rozložen náboj. Na vnitřním válci A je

náboj $Q_A = +3Q_0$. Jaké náboje Q_B a Q_C musí být na válcích B a C, aby (je-li to vůbec možné) elektrická intenzita v bodech 1, 2, 3 byla nulová?



Obr. 24.26 Otázka 10

11. Tři nekonečně velké nevodivé vrstvy s konstantními plošnými hustotami náboje σ, 2σ, 3σ jsou umístěny rovnoběžně, obdobně jako dvě vrstvy na obr. 24.17a. Jaké musí být jejich uspořádání (zleva doprava), aby elektrická intenzita E byla nulová v jedné z oblastí a v jiné oblasti měla velikost $E = 2\sigma/\varepsilon_0$?

12. Malá nabitá kulička leží uvnitř tenké kovové kulové vrstvy o poloměru R. Náboje kuličky a vrstvy jsou: (1) $+4Q$ a 0, (2) $-6Q$ a $+10Q$, (3) $+16Q$ a $-12Q$. Seřaďte sestupně tyto případy podle velikosti náboje na (a) vnitřní, (b) vnější stěně vrstvy.

13. Seřaďte sestupně situace z otázky 12 podle velikosti elektrické intenzity (a) v poloviční vzdálenosti (tj. $R/2$) od středu vrstvy, (b) ve vzdálenosti $2R$ od středu vrstvy.

14. V kontrole 4 určete velikost a směr elektrické intenzity v bodě ležícím ve vzdálenosti r od náboje, který leží ve středu kulové kovové vrstvy, jestliže se tento bod nachází (a) mezi nábojem a vrstvou, (b) v kovu (uvnitř vrstvy), (c) vně vrstvy.

15. Kulový nevodivý balon má na svém povrchu rovnoměrně rozložený kladný náboj. Určete, jak se mění při nafukování balonu velikost elektrické intenzity (zda klesá, roste, nebo zůstává stejná) v bodech, které (a) jsou uvnitř balonu, (b) jsou na povrchu balonu, (c) byly před nafukováním vně, nyní jsou uvnitř balonu, (d) byly a jsou stále vně balonu.

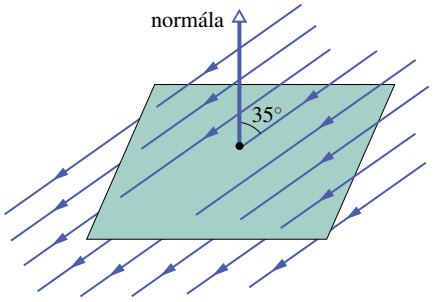
CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 24.2 Tok

1C. Voda v závlahovém kanálu šířky $d = 3{,}22\,\text{m}$ a hloubky $h = 1{,}04\,\text{m}$ teče rychlostí o velikosti $v = 0{,}207\,\text{m·s}^{-1}$. Tok vody uvažovanou plochou je roven součinu hustoty vody ($1\,000\,\text{kg·m}^{-3}$) a jejího objemového toku touto plochou. Určete tok následujícími plochami: (a) plochou o obsahu hd, která je celá ponořená ve vodě a natočená kolmo k toku vody, (b) plochou $3hd/2$, z níž část hd je ve vodě, kolmo k toku, (c) plochou $hd/2$, která je pod hladinou, kolmo k toku, (d) plochou hd, z níž polovina je ve vodě, polovina nad vodou, kolmo k toku, (e) nakloněnou plochou hd, umístěnou ve vodě, přičemž její normála svírá se směrem toku úhel 34°.

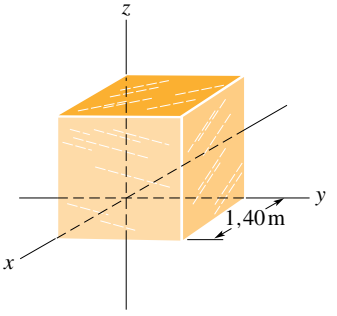
ODST. 24.3 Tok elektrické intenzity

2C. Na obr. 24.27 je čtverec o straně 3,2 mm, který se nachází v homogenním elektrickém poli o intenzitě $1\,800\,\text{N·C}^{-1}$. Siločáry pole svírají s normálou čtvercové plochy úhel 35°. Vypočtěte tok elektrické intenzity touto plochou.



Obr. 24.27 Cvičení 2

3C. V homogenním elektrickém poli je umístěna krychle o hraně 1,40 m (obr. 24.28). Vypočtěte tok elektrické intenzity pravou stěnou krychle, je-li intenzita vyjádřena v N·C^{-1}: (a) $6{,}00\boldsymbol{i}$, (b) $-2{,}00\boldsymbol{j}$, (c) $-3{,}00\boldsymbol{i} + 4{,}00\boldsymbol{k}$. (d) Jaký je celkový tok elektrické intenzity povrchem krychle pro každé z těchto polí?



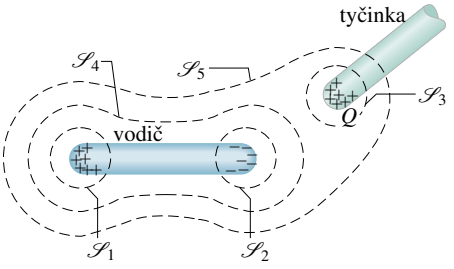
Obr. 24.28 Cvičení 3 a úloha 12

4Ú. V elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E} = 4\boldsymbol{i} - 3(y^2 + 2)\boldsymbol{j}$ (N·C^{-1}) je umístěna krychle (obr. 24.5). Vyjádřete tok intenzity (a) horní podstavou, (b) dolní podstavou, (c) levou stěnou, (d) zadní stěnou krychle. (e) Jaký je celkový tok intenzity všemi stěnami krychle?

ODST. 24.4 Gaussův zákon elektrostatiky

5C. Uvažujme čtyři náboje $2Q$, Q, $-Q$, $-2Q$. Popište, jak umístíte (je-li to vůbec možné) uzavřenou plochu tak, aby obklopovala v každém případě první z nábojů a aby jí procházel tok (a) 0, (b) $+3Q/\varepsilon_0$, (c) $-2Q/\varepsilon_0$.

6C. V obr. 24.29 je náboj izolovaného neutrálního vodiče polarizován kladně nabitou tyčinkou. Jaký je celkový tok každou z pěti Gaussových ploch $\mathcal{S}_1$ až $\mathcal{S}_5$? Předpokládejme, že náboje uvnitř ploch $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ jsou ve všech případech stejně velké.

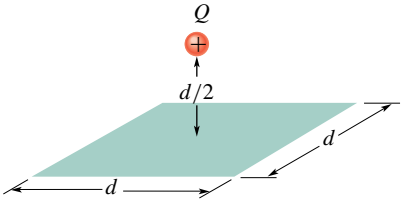


Obr. 24.29 Cvičení 6

7C. Bodový náboj 1,8 μC se nachází uprostřed krychle o hraně 55 cm. Určete celkový tok elektrické intenzity povrchem krychle.

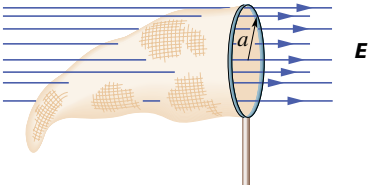
8C. Celkový tok intenzity každou stěnou hrací kostky (v jednotkách $10^3\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-1}}$) má velikost danou počtem N ok na stěně (tj. 1 až 6). Tok pro lichá čísla je záporný, pro sudá čísla je kladný. Určete celkový náboj, který se nachází uvnitř kostky.

9C. Na obr. 24.30 se bodový náboj $+Q$ nachází ve vzdálenosti $d/2$ přímo nad středem čtverce o straně d. Určete tok elektrické intenzity čtvercem. (*Tip*: Považujte čtverec za jednu stěnu krychle o hraně d.)



Obr. 24.30 Cvičení 9

10C. Síťka na motýly se nachází v homogenním elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$ (obr. 24.31). Její kruhový rám o poloměru a je kolmý ke směru pole. Určete tok elektrické intenzity síťkou.



Obr. 24.31 Cvičení 10

11C. Vypočtěte tok Φ_E elektrické intenzity (a) základnou, (b) kulovým povrchem polokoule o poloměru R. Elektrické pole $\boldsymbol{E}$ je homogenní a je orientováno kolmo k základně polokoule, přičemž siločáry do ní vstupují její základnou.

12Ú. Vyjádřete celkový tok povrchem krychle ze cvičení 3 a obr. 24.28, jestliže elektrická intenzita je rovna (a) $\boldsymbol{E} = 3{,}00y\boldsymbol{j}$, (b) $\boldsymbol{E} = -4{,}00\boldsymbol{i} + (6{,}00 + 3{,}00y)\boldsymbol{j}$. Intenzita E je vyjádřena v $\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$, souřadnice y v metrech. (c) Jak velký náboj se v obou případech nachází uvnitř krychle?

13Ú. Jaký celkový náboj se nachází uvnitř Gaussovy plochy tvořené povrchem krychle v úloze 4 (obr. 24.5)?

14Ú. Ve výšce 300 m byla naměřena intenzita elektrického pole o velikosti $60{,}0\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$, ve výšce 200 m pak $100\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$. V obou případech směřovala elektrická intenzita svisle k Zemi. Stanovte celkový náboj uzavřený v krychli o hraně 100 m, jejíž spodní stěna leží ve výšce 200 m. Zakřivení Země zanedbejte.

15Ú. Bodový náboj Q se nachází v jednom rohu krychle o hraně a. Jaký je tok intenzity každou ze stěn krychle? (*Tip*: Použijte Gaussův zákon a využijte symetrie úlohy.)

16Ú. „Gaussův zákon pro gravitační pole“ má tvar:

$$\frac{1}{4\pi G}\Phi_{\mathrm{g}} = \frac{1}{4\pi G}\oint \boldsymbol{g}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -m,$$

kde G je gravitační konstanta a Φ_{g} je tok intenzity $\boldsymbol{g}$ *gravitačního* pole Gaussovou plochou, která obklopuje hmotný bod o hmotnosti m. Intenzita pole $\boldsymbol{g}$ je rovna zrychlení testovací částice, na kterou bodové těleso o hmotnosti m působí gravitační silou. Odvoďte z uvedeného vztahu Newtonův gravitační zákon. Jaký je význam znaménka minus?

ODST. 24.6 Nabitý izolovaný vodič

17C. Intenzita elektrického pole těsně nad povrchem nabitého válce fotokopírky má velikost $E = 2{,}3{\cdot}10^5\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$. Jaká je plošná hustota náboje na válci za předpokladu, že válec je vodivý?

18C. Rovnoměrně nabitá vodivá koule o průměru 1,2 m má plošnou hustotu náboje $8{,}1\ \mu\mathrm{C{\cdot}m^{-2}}$. (a) Určete celkový náboj na jejím povrchu. (b) Jaký je celkový tok intenzity povrchem koule?

19C. Na povrch družic, které prolétají radiačními pásy Země, dopadá značné množství elektronů. Výsledný nahromaděný náboj může poškodit elektronické součástky a rušit jejich činnost. Předpokládejme, že kovová družice ve tvaru koule o průměru 1,3 m nashromáždí při jednom obletu Země náboj 2,4 μC. (a) Určete výslednou plošnou hustotu náboje na povrchu družice. (b) Jaká je těsně nad povrchem družice intenzita pole, které je vytvořeno povrchovým nábojem?

20C. Vodivá koule nesoucí kladný náboj Q je obklopena kulovou vodivou vrstvou. (a) Jak velký náboj je na vnitřní stěně vrstvy? (b) Další kladný náboj Q_1 je umístěn vně vrstvy. Jaký bude nyní náboj na vnitřní stěně vrstvy? (c) Jaký bude náboj na vnitřní stěně vrstvy, jestliže se nyní náboj Q_1 nachází mezi kulovou vrstvou a koulí? (d) Zůstávají naše odpovědi platné, i kdyby koule a kulová vrstva nebyly soustředné?

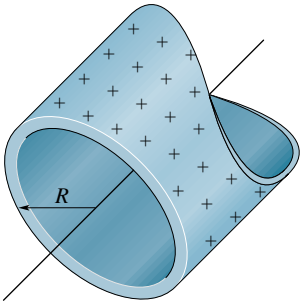
21Ú. Izolovaný vodič libovolného tvaru nese kladný náboj $10{\cdot}10^{-6}$ C. Uvnitř vodiče je dutina, v níž se nachází bodový náboj $Q = 3{,}0{\cdot}10^{-6}$ C. Určete velikost náboje indukovaného (a) na stěnách dutiny, (b) na vnější stěně vodiče.

ODST. 24.7 Použití Gaussova zákona: válcová symetrie

22C. Náboj nekonečně dlouhého vlákna vytváří ve vzdálenosti 2 m elektrostatické pole o intenzitě velikosti $4{,}5{\cdot}10^4\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$. Vypočtěte délkovou hustotu náboje na vlákně.

23C. (a) Válec kopírky ze cvič. 17 má délku 42 cm a průměr 12 cm. Jaký celkový náboj nese? (b) Výrobce si přeje vytvořit desktopovou verzi kopírky. To vyžaduje, aby se zmenšily rozměry válce na délku 28 cm a průměr 8 cm. Přitom se nesmí změnit elektrické pole povrchu válce. Jaký náboj ponese nový válec?

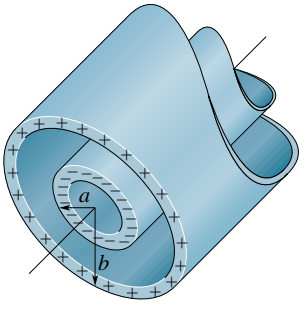
24Ú. Na obr. 24.32 je řez dlouhou tenkostěnnou kovovou trubkou o poloměru R, která nese na povrchu náboj s délkovou hustotou τ. Vyjádřete velikost intenzity E jako funkci vzdálenosti r od osy trubky pro (a) $r > R$, (b) $r < R$. Nakreslete graf této funkce v intervalu od $r = 0$ do $r = 5{,}0\,\text{cm}$, jestliže $\tau = 2{\cdot}10^{-8}\,\text{C}{\cdot}\text{m}^{-1}$ a $R = 3{,}0\,\text{cm}$. (*Tip*: Použijte válcovou Gaussovu plochu, souosou s kovovou trubkou.)



Obr. 24.32 Úloha 24

25Ú. Na obr. 24.33 je řez dvěma dlouhými souosými válci o poloměrech a, b, kde $a < b$. Válce nesou stejně velké, ale opačné náboje rozložené s konstantní délkovou hustotou τ. Užitím Gaussova zákona dokažte, že (a) pro $r < a$ je $E = 0$, (b) mezi válci, tj. pro $a < r < b$, je

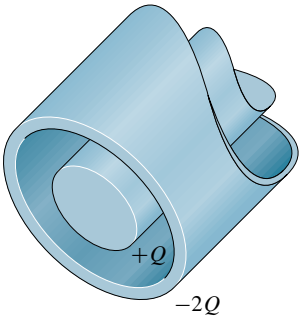
$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}.$$



Obr. 24.33 Úloha 25

26Ú. Dlouhý přímý drát nese záporný náboj s délkovou hustotou $\tau = 3{,}6\,\text{nC}{\cdot}\text{m}^{-1}$. Drát je obklopen souosým nevodivým dutým válcem o vnějším poloměru 1,5 cm. Válec má mít přitom na své vnější stěně kladný náboj s plošnou hustotou σ takovou, aby celkové vnější pole bylo nulové. Vypočtěte potřebnou hodnotu σ.

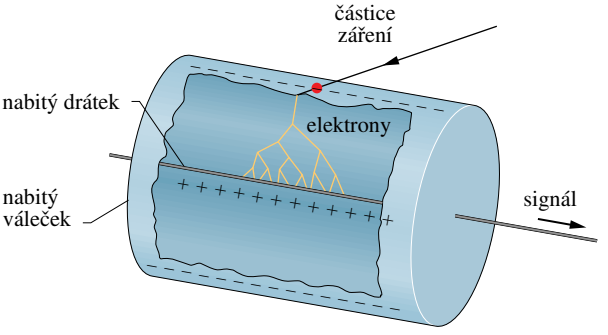
27Ú. Velmi dlouhá vodivá válcová tyčinka délky L nesoucí náboj $+Q$ se nachází uvnitř vodivé válcové trubky (rovněž délky L), která má náboj $-2Q$ (obr. 24.34). Použitím Gaussova zákona najděte (a) elektrickou intenzitu pole v bodech vně vodivé trubky, (b) rozložení náboje na vodivé trubce, (c) elektrickou intenzitu pole mezi tyčinkou a trubkou.



Obr. 24.34 Úloha 27

28Ú. Dva dlouhé nabité souosé válce mají poloměry 3,0 cm a 6,0 cm. Délková hustota náboje na vnitřním válci je $+5{,}0 \cdot 10^{-6}\,\text{C}{\cdot}\text{m}^{-1}$, na vnějším válci $-7{,}0{\cdot}10^{-6}\,\text{C}{\cdot}\text{m}^{-1}$. Určete elektrickou intenzitu ve vzdálenosti (a) $r = 4{,}0\,\text{cm}$, (b) $r = 8{,}0\,\text{cm}$ od osy válců.

29Ú. Na obr. 24.35 je princip Geigerova čítače pro detekci ionizujícího záření. Jeho součástí je tenký, kladně nabitý drátek, kolem něhož je soustředný dutý vodivý váleček nesoucí stejně velký záporný náboj. Tím se uvnitř válečku vytvoří silné radiální



Obr. 24.35 Úloha 29

pole. Uvnitř válečku je inertní plyn pod nízkým tlakem. Vnikne-li záření dovnitř válečku, ionizuje několik atomů plynu. Vzniklé volné elektrony jsou přitahovány směrem ke kladně nabitému drátku. Elektrické pole je tak intenzivní, že volné elektrony získají mezi srážkami s jinými atomy plynu energii dostatečnou pro další ionizaci. Tím narůstá počet volných elektronů a proces se opakuje, dokud elektrony nedorazí k drátku. Výsledná „lavina“ elektronů dopadá na drátek a vytváří signál, který indikuje průchod původní částice záření. Předpokládejte, že drátek má poloměr 25 μm, váleček má poloměr 1,4 cm a délku 16 cm. Určete celkový náboj drátku, je-li intenzita elektrického pole na vnitřní stěně válečku $2{,}9{\cdot}10^{4}\,\text{N}{\cdot}\text{C}^{-1}$.

30Ú. Pozitron s nábojem $1{,}60{\cdot}10^{-19}\,\text{C}$ obíhá po kruhové dráze o poloměru r mezi válci z úlohy 25. Určete jeho kinetickou

energii v elektronvoltech. Předpokládejte, že $a = 2{,}0\,\text{cm}$, $b = 3{,}0\,\text{cm}$, $\tau = 30\,\text{nC}\cdot\text{m}^{-1}$.

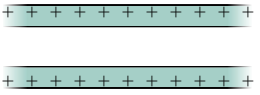
31C. Náboj je rovnoměrně rozložen v objemu nekonečně dlouhého válce o poloměru R. (a) Dokažte, že ve vzdálenosti r od osy válce ($r < R$) platí

$$E = \frac{\varrho r}{2\varepsilon_0},$$

kde ϱ je objemová hustota náboje. (b) Napište výraz pro E, jestliže $r > R$.

ODST. 24.8 Použití Gaussova zákona: rovinná symetrie

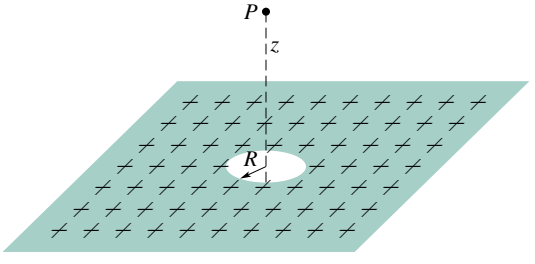
32C. Na obr. 24.36 je řez dvěma velkými, rovnoběžnými nevodivými deskami, na nichž je rovnoměrně rozložen kladný náboj s plošnou hustotou σ. Určete E v bodech (a) nad vrstvami, (b) mezi nimi, (c) pod nimi.



Obr. 24.36 Cvičení 32

33C. Čtvercová kovová deska zanedbatelné tloušťky o straně 8,0 cm nese celkový náboj $6{,}0\cdot10^{-6}$ C. (a) Určete velikost intenzity elektrického pole těsně nad středem desky (např. ve výšce 0,50 mm), je-li náboj rozdělen rovnoměrně po obou stěnách desky. (b) Určete E ve vzdálenosti 30 m, můžeme-li z této vzdálenosti považovat desku za bodový náboj.

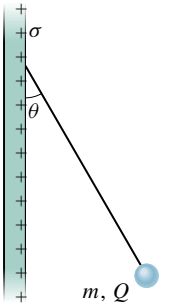
34C. Ve středu velké rovinné nevodivé plochy s plošnou hustotou náboje σ je vyražen malý kruhový otvor o poloměru R (obr. 24.37). Zanedbejte zakřivení siločár kolem okrajů a vypočtěte elektrickou intenzitu v bodě P na ose otvoru ve vzdálenosti z od jeho středu. (*Tip*: Rov. (23.24) a princip superpozice.)



Obr. 24.37 Cvičení 34

35Ú. Na obr. 24.38 je nevodivá kulička o hmotnosti $m = 1{,}0\,\text{mg}$ nesoucí náboj $Q = 2{,}0\cdot10^{-8}$ C rovnoměrně rozložený v celém objemu. Kulička je upevněna na nevodivém závěsu, který svírá úhel $\theta = 30^\circ$ se svislou rovnoměrně nabitou nevodivou deskou. Vypočtěte plošnou hustotu náboje σ na desce, přičemž berte v úvahu hmotnost kuličky a předpokládejte, že deska není prostorově ohraničená.

36Ú. Dvě velké, tenké a rovnoběžné kovové desky leží blízko sebe (obr. 24.16c); levá deska je záporně nabitá. Desky mají na



Obr. 24.38 Úloha 35

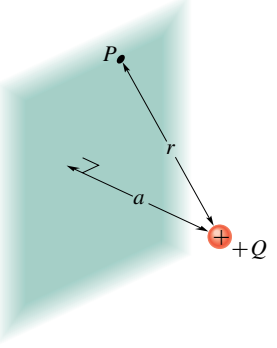
vnitřních stěnách náboje opačných znamének s plošnou hustotou $\sigma = 7{,}0\cdot10^{-22}\,\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Určete velikost a směr elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$ (a) vlevo od desek, (b) vpravo od nich, (c) mezi nimi.

37Ú. Elektron je vystřelen kolmo k velké kovové desce, která nese záporný náboj s plošnou hustotou $2{,}0\cdot10^{-6}\,\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Počáteční kinetická energie elektronu je 100 eV. V důsledku odpudivých sil se elektron zastaví právě v okamžiku, kdy se dotkne desky. Určete vzdálenost, ze které byl vystřelen.

38Ú. Dvě rovnoběžné kovové desky o ploše $1{,}0\,\text{m}^2$ jsou od sebe vzdáleny 5 cm a nesou na vnitřních stěnách stejně velké opačné náboje. Jak velký je náboj na deskách, je-li velikost intenzity elektrostatického pole mezi deskami rovna $55\,\text{N}\cdot\text{C}^{-1}$? Neuvažujte změny pole v blízkosti hran desek.

39Ú. Při laboratorním pokusu je tíhová síla elektronu právě vyvážena silou, kterou na něj působí elektrostatické pole vytvořené dvěma velkými, rovnoběžnými nevodivými opačně nabitými deskami vzdálenými od sebe 2,3 cm. Určete (a) velikost plošné hustoty náboje na deskách (za předpokladu, že je homogenní), (b) směr intenzity pole.

40Ú*. Kladný náboj Q, který se nachází ve vzdálenosti a od nekonečně velké vodivé roviny, indukuje na této rovině záporný náboj s plošnou hustotou $\sigma = -Qa/(2\pi r^3)$, kde r je vzdálenost bodu P od náboje $+Q$ na rovině (obr. 24.39). Určete (a) velikost



Obr. 24.39 Úloha 40

složky elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$ kolmé k vodivé rovině pocházející od indukovaného náboje, (b) celkový záporný náboj indukovaný na této rovině. (c) Jaká je elektrostatická síla mezi nábojem $+Q$ a nábojem indukovaným na vodivé rovině? Je přitažlivá, nebo

odpudivá? (d) Jaký náboj, umístěný ve stejné vzdálenosti, ale na opačné straně roviny, by vytvořil tutéž sílu?

41Ú★. Rovinná vrstva tloušťky d je rovnoměrně nabitá s objemovou hustotou náboje ϱ. Určete velikost elektrické intenzity pole v bodech (a) uvnitř, (b) vně vrstvy, a to jako funkci x, tj. kolmé vzdálenosti měřené od střední roviny vrstvy.

ODST. 24.9 Použití Gaussova zákona: kulová symetrie

42C. Vodivá koule o poloměru 10 cm nese neznámý náboj. Intenzita elektrostatického pole ve vzdálenosti 15 cm od středu koule má velikost $3{,}0{\cdot}10^3\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$ a směřuje ke středu koule. Určete náboj na povrchu koule.

43C. Bodový náboj způsobí tok intenzity elektrického pole $-750\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-1}}$ kulovou Gaussovou plochou o poloměru 10,0 cm se středem v tomto náboji. (a) Určete, jak velký je tok elektrické intenzity Gaussovou plochou, zvětší-li se její poloměr dvakrát. (b) Určete velikost bodového náboje.

44C. Tenkostěnná kovová koule o poloměru 25 cm nese náboj $2{,}0{\cdot}10^{-7}$ C. Určete velikost E pro bod (a) uvnitř koule, (b) těsně nad povrchem koule, (c) ve vzdálenosti 3,0 m od středu koule.

45C. Bodový náboj $Q = 1{,}0{\cdot}10^{-7}$ C je umístěn ve středu kulové dutiny o poloměru 3,0 cm, která je vytvořena v kovovém bloku. Pomocí Gaussova zákona elektrostatiky vyjádřete velikost elektrické intenzity v bodě (a) P_1, který je v poloviční vzdálenosti mezi nábojem a stěnou dutiny, (b) P_2 uvnitř kovu.

46C. Dvě nabité soustředné kulové plochy mají poloměry 10,0 cm a 15,0 cm. Náboj na vnitřní z nich je $4{,}00{\cdot}10^{-8}$ C a náboj na vnější je $2{,}00{\cdot}10^{-8}$ C. Určete velikost elektrické intenzity ve vzdálenosti (a) $r = 12{,}0$ cm, (b) $r = 20{,}0$ cm od jejich středu.

47C. Tenká kovová kulová vrstva o poloměru a nese náboj Q_a. S ní soustředná tenká kulová vrstva o poloměru b ($b > a$) nese náboj Q_b. Vypočtěte velikost elektrické intenzity ve vzdálenosti r od středu, je-li (a) $r < a$, (b) $a < r < b$, (c) $r > b$. (d) Jaké jsou náboje na vnitřních i vnějších stěnách obou vrstev?

48C. V článku z r. 1911 Ernest Rutherford napsal: Abychom si vytvořili určitou představu o silách, které by mohly letící částici α vychýlit, uvažujme atom, který má uprostřed bodový kladný náboj Ze, kolem něhož jsou rovnoměrně rozloženy záporné náboje $-Ze$ v kouli o poloměru R. Elektrická intenzita E ve vzdálenosti r od středu má v bodě nacházejícím se uvnitř atomu velikost

$$E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right).$$

Ověřte tuto rovnici (tzv. *Rutherfordův vztah*).

49C. Rov. (24.11) $E = \sigma/\varepsilon_0$ vyjadřuje elektrickou intenzitu v bodě, který se nachází v blízkosti nabité vodivé plochy. Použijte tuto rovnici na nabitou kouli o poloměru r nesoucí náboj Q a dokažte, že elektrické pole vně koule je stejné jako pole bodového náboje, umístěného ve středu koule.

50Ú. Proton obíhá po kružnici rychlostí $v = 3{\cdot}10^5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ těsně nad nabitou koulí o poloměru $r = 1{,}00$ cm. Určete náboj koule.

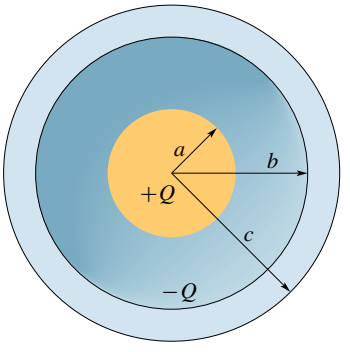
51Ú. Bodový náboj $+Q$ se nachází ve středu elektricky neutrální duté vodivé koule o vnitřním poloměru a a vnějším poloměru b. Jaký náboj se objeví (a) na vnitřní stěně, (b) na vnější stěně koule? Najděte výrazy pro celkovou intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti r od středu koule, jestliže (c) $r < a$, (d) $b > r > a$, (e) $r > b$. Nakreslete siločáry pro tyto tři oblasti. Pro případ $r > b$ určete intenzitu elektrického pole pocházející (f) od středového bodového náboje a náboje vnitřní stěny, (g) od vnější nabité stěny.

Nyní umístěte vně duté koule další bodový náboj $-Q$. Změní tento náboj rozložení nábojů na (h) vnější ploše, (i) vnitřní ploše? Nakreslete pro tyto případy elektrické siločáry. (j) Zjistěte, zda působí na druhý bodový náboj nějaká elektrostatická síla. (k) Působí nějaká další elektrostatická síla na první bodový náboj? (l) Odporuje tato situace třetímu Newtonovu zákonu?

52Ú. V plné nevodivé kouli o poloměru R je nerovnoměrně rozložen náboj s objemovou hustotou $\varrho = \varrho_0 r/R$, kde ϱ_0 je konstanta a r je vzdálenost od středu koule. Dokažte, že (a) celkový náboj na kouli je $Q = \pi\varrho_0 R^3$, (b) intenzita elektrického pole uvnitř koule má velikost

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^4}r^2.$$

53Ú. Na obr. 24.40 je koule o poloměru a a s ní soustředná kulová vodivá vrstva o vnitřním poloměru b a vnějším poloměru c. Koule má náboj $+Q$, který je rovnoměrně rozložen v jejím objemu a vodivá kulová vrstva má náboj $-Q$. Vyjádřete závislost elektrické intenzity na poloměru r (a) uvnitř koule ($r < a$), (b) mezi koulí a vrstvou ($a < r < b$), (c) uvnitř vrstvy ($b < r < c$), (d) vně vrstvy ($r > c$). (e) Jak velký náboj se nachází na vnitřní a vnější stěně vrstvy?

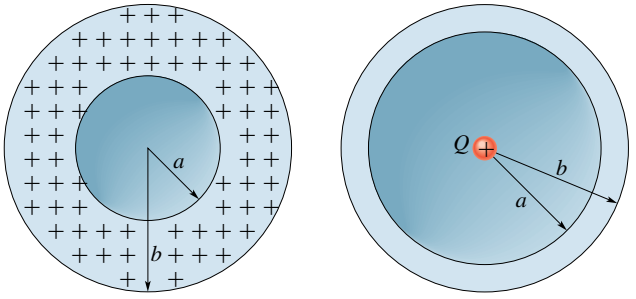


Obr. 24.40 Úloha 53

54Ú. Na obr. 24.41a je znázorněna nabitá kulová vrstva (vnitřní poloměr $a = 10$ cm, vnější poloměr $b = 20$ cm) s objemovou hustotou náboje $\varrho = 1{,}0{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{C{\cdot}m^{-3}}$. Nakreslete závislost velikosti E na vzdálenosti r pro r od 0 do 30 cm.

55Ú. Na obr. 24.41b je nevodivá kulová vrstva o vnitřním poloměru a, vnějším poloměru b s objemovou hustotou náboje $\varrho = A/r$ (uvnitř vrstvy), kde A je konstanta a r je vzdálenost od středu kulové vrstvy. Do středu systému umístěte bodový náboj Q. Jaká by měla být velikost A, aby pole ve vrstvě

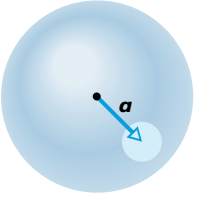
($a \leqq r \leqq b$) bylo homogenní? (*Tip*: Konstanta A závisí na a, ale ne na b.)



Obr. 24.41 Úlohy 54 a 55

56Ú. Atom vodíku můžeme považovat za soustavu, kterou tvoří proton s kladným nábojem $+e$ a obíhající elektron, jehož náboj $-e$ je rozložen kolem protonu s objemovou hustotou $\varrho = Ae^{-2r/a_0}$, kde A je konstanta, $a_0 = 0{,}53{\cdot}10^{-10}$ m je *Bohrův poloměr* a r je vzdálenost od středu atomu. (a) Atom vodíku je elektricky neutrální. Stanovte konstantu A. (b) Poté určete velikost intenzity elektrického pole atomu pro Bohrův poloměr.

57Ú⋆. V nevodivé kouli je rovnoměrně rozložen náboj s objemovou hustotou ϱ. Nechť $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor obecného bodu P uvnitř koule vzhledem k jejímu středu. (a) Dokažte, že intenzita elektrického pole v bodě P je $\boldsymbol{E} = \varrho\boldsymbol{r}/(3\varepsilon_0)$. (Všimněte si, že tento výsledek nezávisí na poloměru koule.) (b) Do koule vyvrtáme nesoustřednou kulovou dutinu (obr. 24.42). Pomocí principu superpozice ukažte, že intenzita elektrického pole v každém bodě dutiny je $\boldsymbol{E} = \varrho\boldsymbol{a}/(3\varepsilon_0)$ (je tedy homogenní), kde $\boldsymbol{a}$ je polohový vektor středu dutiny. (Všimněte si, že výsledek nezávisí ani na poloměru koule, ani na poloměru dutiny.)



Obr. 24.42 Úloha 57

58Ú⋆. Kulově symetrické, ale nehomogenní rozložení nábojů vytváří elektrické pole o intenzitě $E(r) = Kr^4$, které směřuje radiálně od středu koule, přičemž r je vzdálenost od středu. Jaká je objemová hustota nábojů?

PRO POČÍTAČ

59Ú. V Rutherfordově vztahu (cvič. 48) pro velikost elektrické intenzity E uvnitř atomu položte $r = \alpha R$ a nakreslete závislost E na α v intervalu $0 < \alpha < 1$. Nakreslete také závislost E' na α pro případ, kdy elektrické pole je vytvořeno pouze samotným nukleonem. Z těchto dvou křivek určete hodnotu α, pro niž $E = 0{,}500E'$.

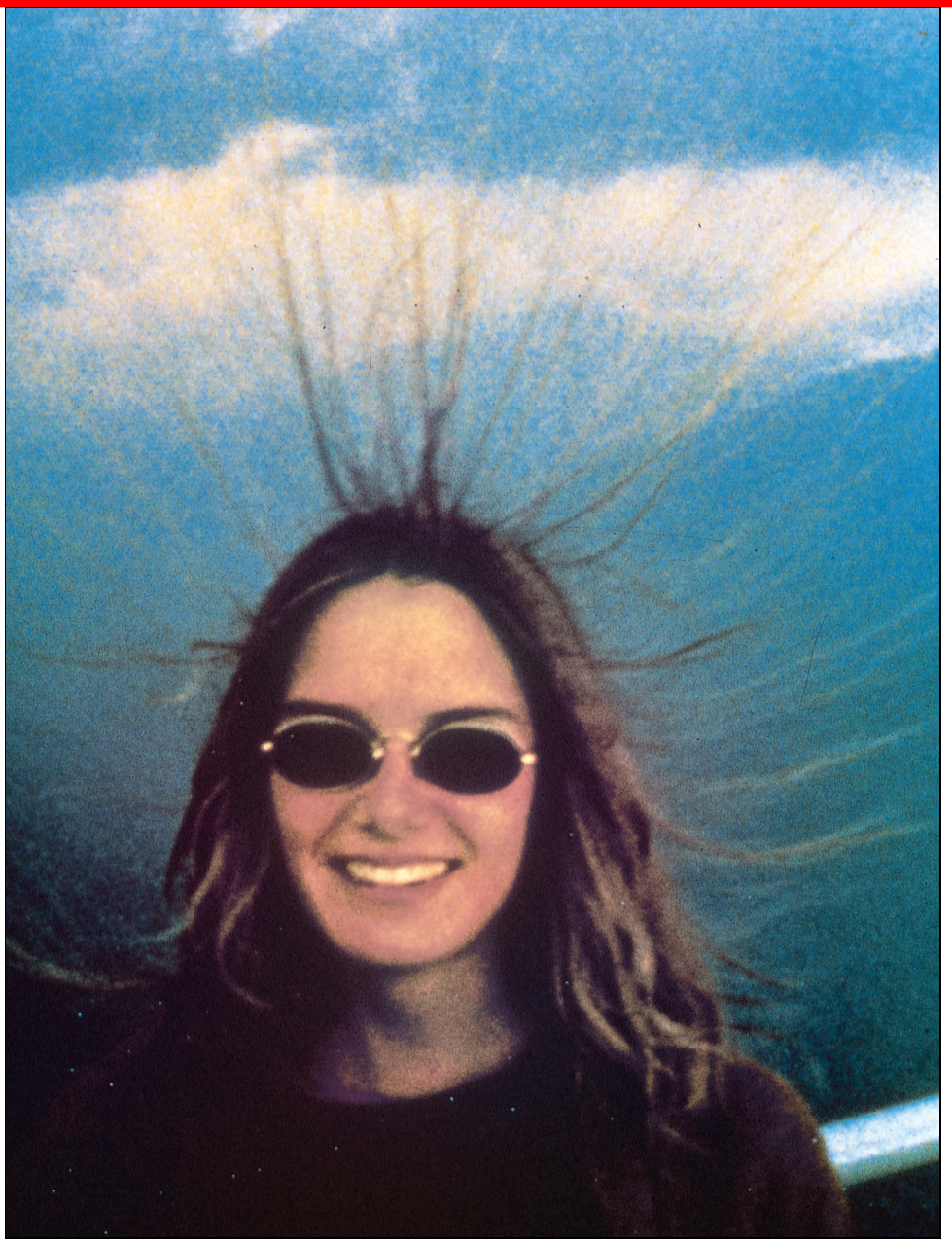
60Ú. Počítačem lze snadno ověřit Gaussův zákon ve všech situacích, nejen v takových, kde lze tok elektrické intenzity snadno určit z vhodné symetrie v rozložení nábojů a podle toho vhodně zvolené Gaussovy plochy. Ukažme to na poli bodového náboje a Gaussově ploše tvaru povrchu krychle. Délku její hrany zvolíme $d = 1{,}000$ m, střed soustavy souřadnic umístíme do středu krychle a osy orientujeme ve směru jejích hran. Na osu y umístíme do polohy y' náboj $1{,}00\,\mu$C.

Rozdělte každou stěnu krychle na malé čtverečky, pokládejte $\boldsymbol{E}$ na celém čtverečku za konstantní, vypočtěte dílčí tok každým tímto čtverečkem a toky sečtěte; tím dostanete tok každou stěnou krychle. Na závěr sečtěte toky všemi stěnami; tím dostanete celkový tok Gaussovou plochou. Porovnejte získaný výsledek s výrazem Q/ε_0 podle Gaussova zákona, v němž Q je celkový náboj uvnitř krychle. Čím menší čtverečky použijete pro výpočet, tím přesnější výsledek můžete očekávat, protože tím výstižněji lze považovat $\boldsymbol{E}$ za konstantní na celém čtverečku. Pro výpočet na tři platná místa stačí rozdělit povrch krychle na čtverečky o straně rovné jedné třicetině hrany krychle. Elektrická intenzita v bodě (x, y, z) má složky

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^3}, \qquad E_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y-y'}{r^3}, \qquad E_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3},$$

kde $r = \sqrt{x^2 + (y-y')^2 + z^2}$. Polohu y' náboje zvolte takto: (a) $y' = 0$ (náboj ve středu krychle), (b) $y' = 0{,}200$ m (náboj uvnitř krychle), (c) $y' = 0{,}400$ m (náboj uvnitř krychle), (d) $y' = 0{,}600$ m (náboj vně krychle).

25
Elektrický potenciál



Blesk zabíjel… Když se na vyhlídkové plošině tato žena těšila z pohledu na okolí, zjistila, že jí na hlavě stojí vlasy. Její bratr ji tak vyfotografoval. Pět minut po jejich odchodu udeřil do plošiny blesk, zabil jednu osobu a sedm dalších zranil. Proč se ženě zježily vlasy? Z jejího pohledu lze soudit, že to nebyl strach — i když k němu byl pádný důvod.

25.1 ELEKTRICKÁ POTENCIÁLNÍ ENERGIE

Newtonův zákon pro gravitační sílu a Coulombův zákon pro elektrostatickou sílu mají stejný matematický tvar, takže některé obecné závěry týkající se gravitační síly, ke kterým jsme došli v kap. 14, mohou být zřejmě použity i pro sílu elektrostatickou. Především je zřejmé, že elektrostatická síla je *silou konzervativní*. Systému složenému ze dvou nebo více nabitých částic lze tedy přiřadit potenciální energii E_p, kterou nazýváme **elektrostatickou** nebo též **elektrickou**. Změní-li se v takovém systému poloha částic z počáteční konfigurace $\mathscr{K}_i$ do koncové $\mathscr{K}_f$, pak elektrostatická síla vykoná na částicích práci W. Z rov. (8.1) plyne, že odpovídající změna ΔE_p potenciální energie systému je

$$\Delta E_p = E_{p,f} - E_{p,i} = -W. \qquad (25.1)$$

Pro elektrostatickou sílu platí stejně jako pro jiné konzervativní síly, že práce touto silou vykonaná *nezávisí na trajektorii*. Předpokládejme, že se jedna z nabitých částic patřících do systému přesune z počáteční polohy $\boldsymbol{r}_i$ do koncové polohy $\boldsymbol{r}_f$ vlivem elektrostatické síly od ostatních nabitých částic. Za předpokladu, že se polohy ostatních částic nemění, je práce vykonaná touto silou stejná při libovolném tvaru (tedy i délce) trajektorie částice mezi body s polohovými vektory $\boldsymbol{r}_i$ a $\boldsymbol{r}_f$ (dále jen mezi body (i) a (f)).

Za *vztažnou (referenční) konfiguraci* dané soustavy nabitých částic je vhodné zvolit takové vzájemné rozmístění částic, při němž jsou částice „v nekonečnu“, tedy tak daleko od sebe, že jejich vzájemné působení můžeme zanedbat. *Potenciální energie*, která takovéto konfiguraci částic odpovídá, se obvykle volí rovna nule. Předpokládejme, že několik nabitých částic přejde z počátečního stavu s nekonečně velkými rozestupy (konfigurace $\mathscr{K}_i$) do nového stavu a vytvoří tak uvažovaný systém částic (v konfiguraci $\mathscr{K}_f$). Nechť počáteční potenciální energie částic $E_{p,i}$ je nulová a nechť symbol W_∞ představuje práci vykonanou elektrostatickými silami působícími mezi částicemi při jejich přesunu z nekonečna do poloh v konfiguraci $\mathscr{K}_f$.* Pak podle rov. (25.1) potenciální energie E_p systému částic v koncové konfiguraci $\mathscr{K}_f$ je

$$E_p = -W_\infty. \qquad (25.2)$$

Elektrickou potenciální energii považujeme stejně jako jiné druhy potenciální energie za jednu z forem energie. Připomeňme z kap. 8, že (mechanická) energie izolovaného systému se zachovává, pokud v systému působí pouze konzervativní síly. Tento fakt náležitě využijeme v další části této kapitoly.

* Abychom mohli elektrické síly považovat za elektrostatické, musí se částice pohybovat natolik pomalu, aby se neuplatnily jevy spjaté s pohybem náboje, např. elektrický proud.

RADY A NÁMĚTY

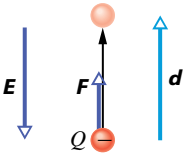
Bod 25.1: *Elektrická potenciální energie. Práce vykonaná elektrickým polem*

Elektrickou potenciální energii spojujeme se systémem částic jako s celkem. Setkáme se však i s výroky (poprvé u př. 25.1), v nichž je tato energie přiřazena pouze jediné částici systému. Například čteme „elektron v elektrickém poli má elektrickou potenciální energii 10^{-7} J.“ I takové výroky jsou přijatelné, ale vždy si musíme uvědomit, že ve skutečnosti je potenciální energie vlastností celého systému — v uvedeném příkladu celé konfigurace elektron+nabité částice, které vytvářejí elektrické pole. Přiřazujeme-li potenciální energii jen jediné částici z celého systému, říkáme často, že práce vykonaná na částici je vykonána *elektrickým polem*. Tím rozumíme, že práci na částici vykoná výsledná síla vyvolaná ostatními částicemi systému prostřednictvím jejich společného elektrického pole.

Zapamatujme si také, že přiřadit hodnotu potenciální energie částici nebo systému částic (jako v uvedeném příkladu hodnotu 10^{-7} J) má smysl *jen* tehdy, zadáme-li hodnotu potenciální energie ve vhodném referenčním stavu.

PŘÍKLAD 25.1

Elektrony se uvolňují náhodnými srážkami molekul vzduchu s částicemi kosmického záření přicházejícího z vesmíru. Uvolněný elektron podléhá působení elektrostatické síly $\boldsymbol{F}$ vyvolané elektrickým polem o intenzitě $\boldsymbol{E}$, které je v atmosféře vytvořeno nabitými částicemi nacházejícími se vždy v nějakém množství na zemském povrchu. Blízko zemského povrchu má elektrická intenzita velikost $E \doteq 150\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$ a směřuje k zemi. Jaká je změna ΔE_p elektrické potenciální energie uvolněného elektronu, jestliže se působením elektrostatické síly posunul vzhůru po svislé dráze délky $d = 520$ m (obr. 25.1)?



Obr. 25.1 Příklad 25.1. Elektron v atmosféře se přemísťuje svisle vzhůru do vzdálenosti $\boldsymbol{d}$ vlivem elektrostatické síly $\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}$.

ŘEŠENÍ: Rov. (25.1) uvádí do vzájemného vztahu změnu elektrické potenciální energie elektronu ΔE_p a práci W vykonanou na elektronu elektrickým polem. Podle kap. 7 je práce

vykonaná konstantní silou $\boldsymbol{F}$, působící na částici a vyvolávající posunutí $\boldsymbol{d}$ částice, rovna

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d}. \qquad (25.3)$$

Podle rov. (23.28) platí $\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}$. Připomeňme, že znaménko náboje Q je do této vektorové rovnice zahrnuto a že Q je náboj elektronu ($Q = -e \doteq -1{,}60{\cdot}10^{-19}$ C). Do rov. (25.3) dosadíme za sílu $\boldsymbol{F}$, čímž dostaneme

$$W = Q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{d} = QEd\cos\theta, \qquad (25.4)$$

kde θ je úhel mezi směry vektorů $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{d}$. Intenzita $\boldsymbol{E}$ směřuje k zemskému povrchu a posunutí $\boldsymbol{d}$ má směr svisle vzhůru. Proto $\theta = 180°$. Dosadíme-li tuto hodnotu spolu s ostatními hodnotami do rov. (25.4), dostaneme

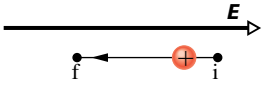
$$W = (-1{,}60{\cdot}10^{-19}\,\text{C})(150\,\text{N}{\cdot}\text{C}^{-1})(520\,\text{m}){\cdot}(-1) = \\ = 1{,}20{\cdot}10^{-14}\,\text{J}.$$

Podle rov. (25.1) pak je

$$\Delta E_\text{p} = -W = -1{,}20{\cdot}10^{-14}\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

To znamená, že během 520 m dlouhého výstupu klesne elektrická potenciální energie elektronu o $1{,}20{\cdot}10^{-14}$ J.

KONTROLA 1: Na obrázku znázorněný proton se pohybuje ve směru šipky v homogenním elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$ z bodu (i) do (f). (a) Koná elektrické pole působící na proton kladnou, nebo zápornou práci? (b) Roste, nebo klesá elektrická potenciální energie protonu při jeho pohybu?



25.2 ELEKTRICKÝ POTENCIÁL, NAPĚTÍ

Z př. 25.1 je vidět, že elektrická potenciální energie nabité částice v elektrickém poli závisí na velikosti jejího náboje. Avšak potenciální energie vztažená na *jednotkový náboj* má jednoznačnou hodnotu, závislou už jen na poloze v elektrickém poli.

Předpokládejme například, že jsme za testovací částici zvolili proton s kladným nábojem $1{,}60{\cdot}10^{-19}$ C a umístili ho do pole v bodě, v němž má tato částice potenciální energii $2{,}40{\cdot}10^{-17}$ J. Potenciální energie připadající na jednotkový náboj je tedy

$$\frac{2{,}40{\cdot}10^{-17}\,\text{J}}{1{,}60{\cdot}10^{-19}\,\text{C}} = 150\,\text{J}{\cdot}\text{C}^{-1}.$$

Dále předpokládejme, že proton nahradíme α-částicí, která má dvakrát větší kladný náboj, tedy $3{,}20{\cdot}10^{-19}$ C. Zjistili bychom, že α částice má energii dvakrát větší než proton, tj. $4{,}80{\cdot}10^{-17}$ J. Energie připadající na jednotkový náboj však zůstává stejná ($150\,\text{J}{\cdot}\text{C}^{-1}$). Energii připadající na jednotkový náboj můžeme zapsat podílem E_p/Q. Je nezávislá na náboji Q částice, kterou jsme k testování použili, a *charakterizuje pouze elektrické pole*, které v bodě s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$ vyšetřujeme. Nazýváme ji **elektrický potenciál** φ (neboli potenciál elektrického pole; v dalším píšeme též jen potenciál, pokud nehrozí záměna s potenciály polí jiných sil — gravitační, pružnosti, …):

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{E_\text{p}}{Q} \quad \text{(definice potenciálu)}. \qquad (25.5)$$

Poznamenejme, že potenciál je *skalární* veličina, nikoli vektorová.

Rozdíl hodnot potenciálu $\Delta\varphi$ mezi dvěma libovolnými body (i) a (f) elektrického pole je roven rozdílu hodnot potenciální energie jednotkového náboje v těchto bodech:

$$\Delta\varphi = \varphi_\text{f} - \varphi_\text{i} = \frac{E_\text{p,f}}{Q} - \frac{E_\text{p,i}}{Q} = \frac{\Delta E_\text{p}}{Q} \qquad (25.6)$$

a nazýváme ho **(elektrické) napětí** U mezi těmito body. Přívlastek „elektrický“ budeme používat tehdy, pokud by hrozilo nedorozumění, např. záměna s *mechanickým* napětím $\tau = F/S$ z kap. 13. Dosadíme-li rov. (25.1) do (25.6), dostaneme

$$U = \Delta\varphi = \varphi_\text{f} - \varphi_\text{i} = -\frac{W}{Q} \quad \text{(definice napětí)}. \qquad (25.7)$$

Napětí mezi dvěma body elektrického pole je tedy rovno záporně vzaté práci vykonané elektrostatickou silou při přemístění náboje jednotkové velikosti mezi těmito body. Může být kladné, záporné, nebo nulové; to záleží na znaménkách náboje Q a práce W. Jestliže za referenční (vztažnou) hodnotu elektrické potenciální energie zvolíme $E_\text{p,i} = 0$ v nekonečnu, pak podle rov. (25.5) bude hodnota potenciálu φ v nekonečnu také nulová. Elektrický potenciál φ_f v libovolném bodě (f) elektrického pole je podle rov. (25.7) dán vztahem

$$\varphi_\text{f} = -\frac{W_\infty}{Q}, \qquad (25.8)$$

kde W_∞ je práce vykonaná elektrickým polem při přemístění částice s nábojem Q z nekonečna do uvažovaného bodu (f). Potenciál tedy může být kladný, záporný, nebo nulový. Z rov. (25.8) vyplývá, že jednotkou pro elektrický potenciál i pro napětí v soustavě SI je $\mathrm{J{\cdot}C^{-1}}$. Tato jednotka se vyskytuje tak často, že pro ni byl zavedený samostatný název *volt* (značka V). Platí tedy

$$1\ \text{volt} = 1\ \text{joule na 1 coulomb}. \qquad (25.9)$$

Tato jednotka pro potenciál umožňuje zavést vhodnější jednotku pro intenzitu elektrického pole $\boldsymbol{E}$, kterou jsme až dosud vyjadřovali v newtonech na coulomb. Přihlédneme-li ke vztahům (25.4) a (25.6), dostaneme

$$1\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}} = (1\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}})(1\,\mathrm{V{\cdot}C{\cdot}J^{-1}})(1\,\mathrm{J{\cdot}N^{-1}{\cdot}m^{-1}}) = \\ = 1\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}. \qquad (25.10)$$

V dalším budeme dávat přednost jednotce $\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$ před dosavadní jednotkou $1\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$.

Nyní můžeme stanovit velikost jednotky energie nazvané **elektronvolt**, která byla zavedena v čl. 7.1 pro měření energie v atomovém a subatomovém světě. Jeden elektronvolt (značka eV) je energie, která se rovná práci nutné k přemístění jednoho elementárního náboje e (tj. náboje velikosti např. jednoho elektronu nebo protonu) mezi dvěma místy elektrického pole, mezi nimiž je napětí jednoho voltu. Z rov. (25.7) vyplývá, že tato práce je určena výrazem $Q\Delta\varphi$, takže

$$1\,\mathrm{eV} = e(1\,\mathrm{V}) \doteq \\ \doteq (1{,}60{\cdot}10^{-19}\,\mathrm{C})(1\,\mathrm{J{\cdot}C^{-1}}) \doteq 1{,}60{\cdot}10^{-19}\,\mathrm{J}.$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 25.2: *Potenciál a potenciální energie*

Elektrický potenciál φ a elektrická potenciální energie E_p jsou rozdílné veličiny a nesmíme je zaměňovat.

Elektrický potenciál charakterizuje elektrické pole jako takové. Hodnota potenciálu se vyjadřuje v joulech na coulomb neboli ve voltech.

Elektrická potenciální energie je energie nabitého tělesa umístěného do vnějšího elektrického pole (nebo přesněji, je to energie systému sestávajícího z nabitého tělesa a vnějšího elektrického pole); vyjadřuje se v joulech.

Práce vykonaná v elektrickém poli vnější silou

Předpokládejme, že se v elektrickém poli vlivem vnější síly přemísťuje částice s nábojem Q z bodu (i) do bodu (f). Při takovém přemístění částice koná vnější síla práci W_ext a elektrické pole koná práci W. Podle rov. (7.15) je změna kinetické energie ΔE_k částice rovna

$$\Delta E_\mathrm{k} = E_\mathrm{k,f} - E_\mathrm{k,i} = W_\mathrm{ext} + W. \qquad (25.11)$$

Předpokládejme, že částice byla před přemístěním v klidu a po něm bude rovněž v klidu. Pak $E_\mathrm{k,f} = E_\mathrm{k,i} = 0$ a rov. (25.11) se zjednoduší:

$$W_\mathrm{ext} = -W. \qquad (25.12)$$

Slovy: práce W_ext vykonaná vnější (neboli externí) silou během přemístění částice je rovna záporně vzaté práci W vykonané elektrickým polem.

Dosadíme-li rov. (25.12) do (25.1), dostaneme vztah mezi prací vnější síly a změnou elektrické potenciální energie částice během jejího pohybu:

$$\Delta E_\mathrm{p} = E_\mathrm{p,f} - E_\mathrm{p,i} = W_\mathrm{ext}. \qquad (25.13)$$

Podobně dosazením rov. (25.12) do rov. (25.7) dostaneme vztah mezi prací vnější síly W_ext a potenciálovým rozdílem $\Delta\varphi$ mezi body v počáteční a výsledné poloze částice:

$$W_\mathrm{ext} = Q\Delta\varphi. \qquad (25.14)$$

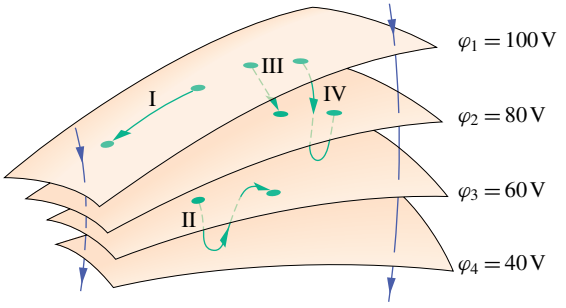
Práce W_ext může zřejmě být také kladná, záporná, nebo nulová. Je to práce, kterou musíme vykonat, abychom přemístili částici s nábojem Q mezi dvěma body, mezi nimiž je napětí $U = \Delta\varphi$, aniž se přitom změní kinetická energie částice.

KONTROLA 2: Na obrázku v kontrole 1 přemísťujeme proton z bodu (i) do bodu (f) v homogenním elektrickém poli naznačeného směru. (a) Koná vnější síla kladnou, nebo zápornou práci? (b) Pohybuje se přitom proton směrem k vyšším, nebo k nižším hodnotám potenciálu?

25.3 EKVIPOTENCIÁLNÍ PLOCHY

Body, ve kterých má elektrický potenciál stejnou hodnotu, tvoří **ekvipotenciální plochu**. Ta může být reálná — fyzická (např. povrch nějakého tělesa) anebo jen myšlená (např. jeho rovina symetrie). Při přemístění částice mezi body (i) a (f), které leží na téže ekvipotenciální ploše, nevykoná elektrické pole žádnou úhrnnou práci. To vyplývá z rov. (25.7): jestliže platí $\varphi_\mathrm{i} = \varphi_\mathrm{f}$, pak $W = 0$. Protože práce elektrostatické síly je nezávislá na trajektorii, je vykonaná práce nulová, a to pro *libovolnou trajektorii* spojující

body (i) a (f), bez ohledu na to, zda celá trajektorie leží, či neleží na ekvipotenciální ploše.



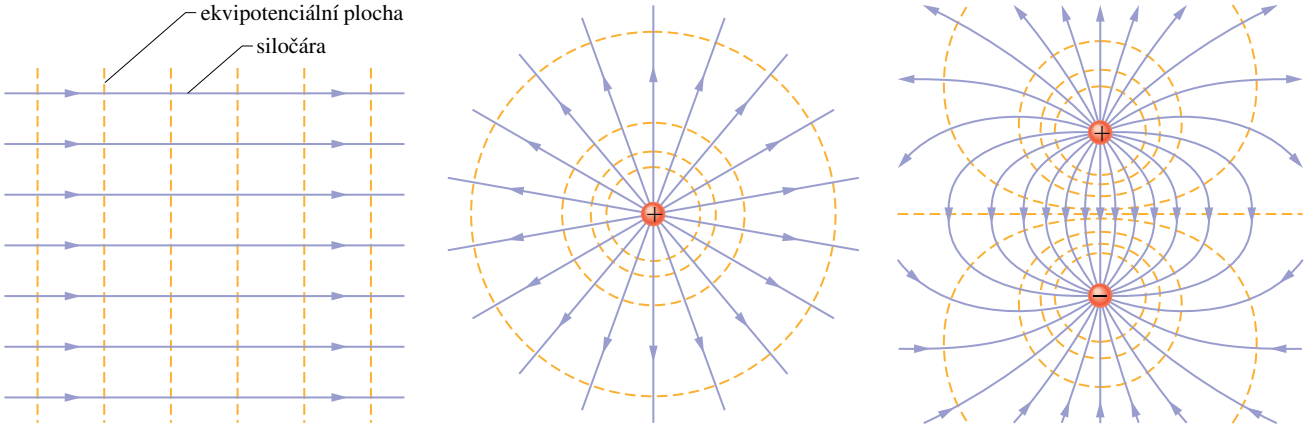
Obr. 25.2 Části čtyř ekvipotenciálních ploch. Jsou zobrazeny čtyři trajektorie, po nichž se může pohybovat testovací nabitá částice. Dále jsou naznačeny dvě elektrické siločáry.

Obr. 25.2 ukazuje svazek ekvipotenciálních ploch v elektrostatickém poli. Práce vykonaná silou tohoto pole při přemístění nabité částice z počátečního do koncového bodu v případě trajektorie I nebo trajektorie II je nulová, protože každá z nich začíná a končí na téže ekvipotenciální ploše. Práce vykonaná při přesunu nabité částice z počátečního bodu do koncového bodu podél trajektorie III i trajektorie IV je nenulová a v obou případech stejně velká, protože potenciál má v počátečních bodech obou trajektorií stejnou hodnotu a rovněž v koncových bodech má stejnou hodnotu. (Trajektorie III a IV spojují stejnou dvojici ekvipotenciálních ploch.)

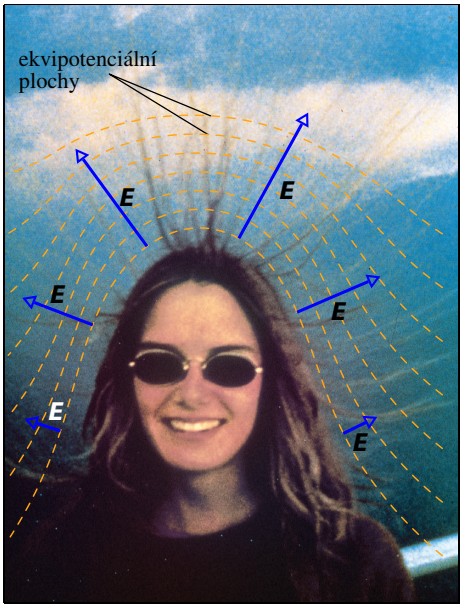
V elektrickém poli bodového náboje stejně jako v poli náboje rozloženého středově symetricky jsou ekvipotenciálními plochami soustředné kulové plochy. Ekvipotenciální plochy v homogenním poli tvoří svazek vzájemně rovnoběžných rovin kolmých k siločárám (obr. 25.3). Ekvipotenciální plochy jsou vždy kolmé k siločárám, a tedy také k elektrické intenzitě $\boldsymbol{E}$ (protože její směr je dán tečnou k elektrickým siločárám). Kdyby totiž vektor $\boldsymbol{E}$ *nebyl* kolmý k příslušné ekvipotenciální ploše, měla by jeho složka ve směru tečném k této ploše nenulovou hodnotu. Tato složka by konala práci na nabité částici při jejím pohybu po ekvipotenciální ploše. Avšak podle rov. (25.7) při posunutí nabité částice po ekvipotenciální ploše nekonají elektrické síly práci. Z toho plyne jediný možný závěr, že vektor $\boldsymbol{E}$ musí být v každém bodě ekvipotenciální plochy k ní kolmý. Obr. 25.3 ukazuje elektrické siločáry a příčné řezy ekvipotenciálních ploch (a) homogenního elektrického pole, (b) pole bodového náboje a (c) pole elektrického dipólu.

Nyní obrátíme svou pozornost k fotografii ženy, uvedené na začátku této kapitoly. Protože žena stála na plošině, která byla vodivě spojena s horským svahem, byla přibližně na stejném potenciálu jako tento svah. Elektricky vysoce nabitý mrak vytvořil elektrostatickou indukcí silné elektrické pole kolem ženy a kolem horského svahu s intenzitou $\boldsymbol{E}$ směřující kolmo k povrchu od ní a od svahu. Elektrostatické síly tohoto pole přinutily některé volné elektrony v těle ženy k pohybu směrem dolů, ponechávajíce prameny jejích vlasů kladně nabité. Intenzita pole byla zřejmě vysoká, ale menší než asi $3{\cdot}10^6\ \mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$, protože ta by vyvolala elektrický průraz molekulami vzduchu. (A k průrazu skutečně o něco později došlo: do plošiny udeřil blesk.)

Ekvipotenciální plochy obklopující ženu stojící na horské plošině lze odhadnout podle jejích vlasů, které jsou nataženy ve směrech vektoru $\boldsymbol{E}$, a jsou tedy kolmé k ekvipotenciálním plochám, jak je znázorněno na obr. 25.4.



Obr. 25.3 Elektrické siločáry (fialově) a příčné řezy ekvipotenciálních ploch (zlatě) (a) v homogenním elektrickém poli, (b) v elektrickém poli bodového náboje, (c) v poli elektrického dipólu.



Obr. 25.4 Schématem doplněná fotografie z úvodní strany této kapitoly ukazuje důsledek působení nabitého mraku, který vytvořil silné elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$ blízko hlavy ženy. Mnohé prameny jejích vlasů se natáhly podél směru elektrického pole, které je vždy kolmé k ekvipotenciálním plochám a silnější je tam, kde jsou tyto ekvipotenciální plochy těsněji u sebe, tj. v tomto případě nad temenem hlavy ženy.

Pole bylo zřejmě nejsilnější právě nad hlavou ženy, protože zde jsou její vlasy nataženy více než po stranách hlavy (proto jsou ekvipotenciální plochy nad hlavou ženy blíž u sebe).

Poučení je jednoduché. Jestliže vám vlivem vnějšího elektrického pole vstanou vlasy na hlavě, běžte raději do úkrytu a nepózujte pro fotografický snímek.

25.4 VÝPOČET POTENCIÁLU ZE ZADANÉ INTENZITY ELEKTRICKÉHO POLE

Potenciálový rozdíl neboli napětí mezi dvěma libovolnými body (i) a (f) v elektrickém poli můžeme vypočítat, známe-li vektor intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$ v každém bodě libovolné spojnice těchto dvou bodů. K výpočtu je třeba určit práci vykonanou elektrickým polem při přemístění kladného testovacího náboje z bodu (i) do bodu (f) a pak použít rov. (25.7).

Uvažujme libovolné elektrické pole, např. pole zobrazené siločárami na obr. 25.5, a kladný testovací náboj Q_0, který se pohybuje podél znázorněné trajektorie z bodu (i) do bodu (f). Pole působí na částici v každém bodě její trajektorie silou $\boldsymbol{F} = Q_0\boldsymbol{E}$ a tato síla koná práci.* Z kap. 7 víme, že elementární práce, kterou vykoná síla $\boldsymbol{F}$ při posunutí částice o $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, je rovna

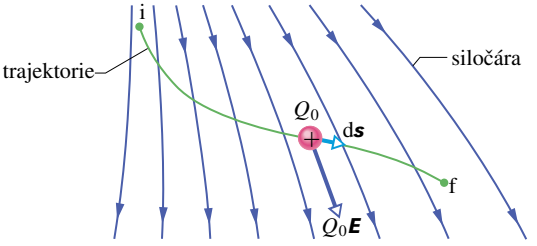
$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{25.15}$$

V našem případě je $\boldsymbol{F} = Q_0\boldsymbol{E}$ a posunutí $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ označíme $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ (obr. 25.5). Rov. (25.15) pak má tvar

$$\mathrm{d}W = Q_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{25.16}$$

Vyjádřit celkovou práci W vykonanou elektrostatickou silou, působící na nabitou částici, která se vlivem tohoto působení pohybuje z bodu (i) do bodu (f), vyžaduje sečíst všechny dílčí práce vykonané při infinitezimálních posunutích $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ podél celé trajektorie $\mathscr{C}$ částice:

$$W = Q_0\int_{\mathscr{C}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{25.17}$$



Obr. 25.5 Testovací částice s kladným nábojem Q_0 se pohybuje (posunutí $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$) v nehomogenním elektrickém poli $\boldsymbol{E}$ z bodu (i) do bodu (f) podél trajektorie $\mathscr{C}$. Působí na ni elektrostatická síla $Q_0\boldsymbol{E}$ ve směru tečny k siločáře; síla koná práci $\mathrm{d}W = Q_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$.

Protože elektrostatická síla je konzervativní, vedou všechny integrační cesty (jednoduché i jakkoli složité) spojující tutéž dvojici bodů ke stejnému výsledku. Proto není nutné u křivkového integrálu v rov. (25.17) pro výpočet práce vyznačovat trajektorii $\mathscr{C}$, stačí uvést jen počáteční a koncový bod. Jestliže práci W z rov. (25.17) dosadíme do rov. (25.7), dostaneme

$$\varphi_\mathrm{f} - \varphi_\mathrm{i} = -\int_\mathrm{i}^\mathrm{f}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{25.18}$$

Rozdíl potenciálů $(\varphi_\mathrm{f} - \varphi_\mathrm{i})$ mezi dvěma libovolnými body (i) a (f) elektrického pole je tedy roven záporné hodnotě

* K tomu, aby se částice pohybovala po znázorněné trajektorii, musí na ni zřejmě působit kromě $\boldsymbol{F}$ ještě i jiná síla $\boldsymbol{F}'$ (např. vazební). Práci této síly neuvažujeme; víme ostatně z čl. 8.2, že vazební síla je vždy k trajektorii kolmá, a práci tedy nekoná.

křivkového integrálu od (i) do (f). Všimněme si, že tento výsledek je nezávislý na velikosti náboje Q_0 testovací částice, kterou jsme použili k určení rozdílu potenciálů (tj. napětí) v elektrickém poli. Je-li intenzita pole v určité části prostoru známa, pak rov. (25.18) umožňuje vypočítat napětí mezi dvěma libovolnými body pole v této části prostoru. Zvolíme-li potenciál φ_i v bodě (i) roven nule, pak rov. (25.18) dává

$$\varphi_f = \varphi = -\int_i^f \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}. \qquad (25.19)$$

V rov. (25.19) už nepíšeme index (f) u potenciálu φ_f. Rov. (25.19) určuje hodnotu elektrického potenciálu φ v libovolném bodě (f) *vzhledem k nulové hodnotě potenciálu* v bodě (i). Nulovou hodnotu potenciálu volíme zpravidla v nekonečnu nebo na některé v daném případě důležité vodivé ploše.

PŘÍKLAD 25.2

(a) Na obr. 25.6a vidíme dva body (i) a (f) v homogenním elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$. Oba body leží na téže elektrické siločáře (která není znázorněna) ve vzdálenosti d. Určete potenciálový rozdíl $(\varphi_f - \varphi_i)$ pomocí kladně nabité testovací částice s nábojem Q_0, pohybující se z bodu (i) do bodu (f) po trajektorii rovnoběžné se směrem pole.

ŘEŠENÍ: Protože se testovací částice pohybuje z bodu (i) do bodu (f) (obr. 25.6a), má vektor jejího infinitezimálního posunutí $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ směr stejný jako intenzita $\boldsymbol{E}$. Úhel θ mezi směry těchto dvou vektorů je roven nule, takže rov. (25.18) dává

$$\varphi_f - \varphi_i = -\int_i^f \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_i^f E(\cos 0)\,\mathrm{d}s = -\int_i^f E\,\mathrm{d}s.$$

Protože pole je homogenní, je vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ konstantní (má konstantní velikost i směr) ve všech bodech integrační cesty a jeho velikost lze vytknout před integrál

$$\varphi_f - \varphi_i = -E\int_i^f \mathrm{d}s = -Ed. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V tomto vztahu je integrál roven délce d trajektorie částice. Záporné znaménko ve výsledku znamená, že elektrický potenciál v bodě (f) má menší hodnotu než v bodě (i). Tento výsledek potvrzuje, že elektrický potenciál klesá ve směru elektrických siločár.

(b) Nyní určeme rozdíl potenciálů $(\varphi_f - \varphi_i)$ sledováním pohybu stejné testovací částice, která se však pohybuje z bodu (i) do bodu (f) přes bod (c) podle obr. 25.6b.

ŘEŠENÍ: Ve všech bodech spojnice bodů (i) a (c) jsou vektory $\boldsymbol{E}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ vzájemně kolmé. Proto platí $\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$ ve všech bodech této části integrační cesty. Podle rov. (25.18) mají body (i) a (c) stejnou hodnotu elektrického potenciálu. Jinými slovy, body (i) a (c) leží na stejné ekvipotenciální ploše.

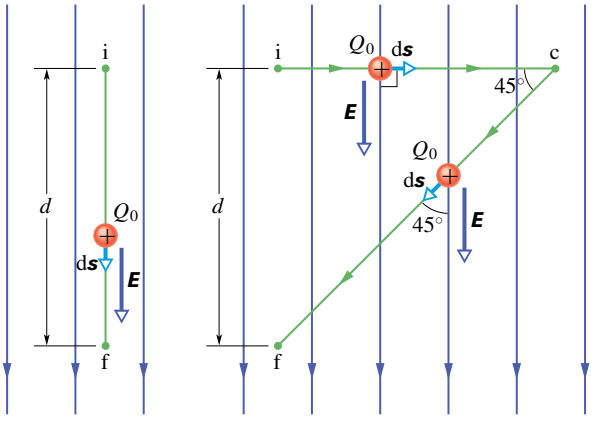
Ve všech bodech spojnice bodů (c) a (f) je $\theta = 45°$, a proto podle rov. (25.18) je

$$\varphi_f - \varphi_c = -\int_c^f \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_c^f E(\cos 45°)\,\mathrm{d}s = -\frac{E}{\sqrt{2}}\int_c^f \mathrm{d}s.$$

Integrál v této rovnici je roven délce spojnice bodů (c) a (f), a má tedy hodnotu $d/\sin 45° = \sqrt{2}d$. Proto

$$\varphi_f - \varphi_c = -\frac{E}{\sqrt{2}}\sqrt{2}d = -Ed. \qquad \text{(Odpověď)}$$

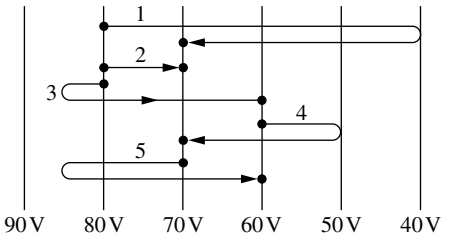
Poněvadž $\varphi_c = \varphi_i$, dostali jsme stejný výsledek jako v otázce (*a*) tohoto příkladu. Tím je opět ověřeno, že napětí mezi dvěma body nezávisí na volbě trajektorie, po které přejdeme od jednoho bodu ke druhému. Poučení: hledáme-li napětí mezi dvěma body elektrického pole pomocí testovací částice pohybující se mezi nimi, pak lze volit takovou trajektorii, pro kterou bude výpočet integrálu v rov. (25.18) co nejjednoduší.



Obr. 25.6 Příklad 25.2. (a) Testovací částice s nábojem Q_0 se pohybuje po přímé dráze z bodu (i) do bodu (f) ve směru intenzity homogenního elektrického pole. (b) Táž částice se pohybuje ve stejném elektrickém poli podél spojnice bodů (i), (c), (f).

KONTROLA 3: Obrázek znázorňuje několik vzájemně rovnoběžných ekvipotenciálních ploch (v příčném řezu) a pět trajektorií, po kterých budeme přemísťovat elektron z jedné plochy na druhou. (a) Jaký je směr vektoru intenzity elektrického pole, které je těmito

ekvipotenciálními plochami zobrazeno? (b) U každé znázorněné trajektorie určete, zda práce námi vykonaná po této trajektorii je kladná, záporná, nebo nulová. (c) Uvedené trajektorie seřaďte sestupně podle práce na nich vykonané.



25.5 POTENCIÁL BODOVÉHO NÁBOJE

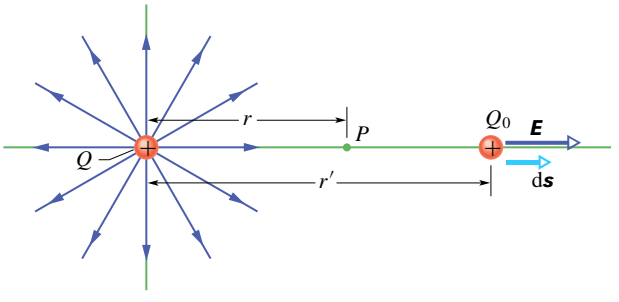
Rov. (25.18) nyní použijeme pro odvození vztahu pro potenciál φ pole bodového náboje. Uvažujme bod P ve vzdálenosti r od pevného kladného bodového náboje Q (obr. 25.7). Představme si, že se kladně nabitá testovací částice Q_0 pohybuje z bodu P do nekonečna. Protože nezáleží na trajektorii, po které se testovací částice pohybuje, zvolíme tu nejjednodušší: vybereme trajektorii směřující z bodu P do nekonečna podél paprsku vycházejícího z bodového náboje Q.

Pole bodového náboje je radiální a pro $Q > 0$ směřuje *od* něj. Z obr. 25.7 je vidět, že vektory $\boldsymbol{E}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ jsou souhlasně rovnoběžné, a také, že $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}'$. Proto

$$\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = E(\mathrm{d}s)(\cos 0^\circ) = E\,\mathrm{d}s = E\,\mathrm{d}r', \quad (25.20)$$

Dosadíme tuto rovnici do rov. (25.18), přičemž položíme $r_\mathrm{i} = r$ a $r_\mathrm{f} = \infty$, dostaneme:

$$\varphi_\mathrm{f} - \varphi_\mathrm{i} = \varphi(\infty) - \varphi(r) = -\int_r^\infty E\,\mathrm{d}r'. \quad (25.21)$$



Obr. 25.7 Kladný bodový náboj Q vyvolává v bodě P elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$ a potenciálu φ. Potenciál v bodě P určujeme s pomocí testovací částice s nábojem Q_0, kterou přemísťujeme z bodu P do nekonečna. Je znázorněno infinitezimální posunutí částice o $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ ve vzdálenosti r' od bodového náboje.

Velikost intenzity elektrického pole v místě testovací částice je dána rov. (23.3) a má hodnotu

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}. \quad (25.22)$$

Dosazením tohoto výsledku do rov. (25.21) a integrováním dostaneme

$$\begin{aligned}\varphi(\infty) - \varphi(r) &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{1}{r'^2}\,\mathrm{d}r' = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r'}\right]_r^\infty = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-0 - \left(-\frac{1}{r}\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}. \end{aligned} \quad (25.23)$$

Nulovou hladinu potenciálu zvolíme v nekonečnu, tedy $\varphi(\infty) = 0$. Potom potenciál φ kladného bodového náboje Q v bodě P je vyjádřen vztahem

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \quad \begin{matrix}\text{(pro kladný}\\ \text{bodový náboj } +Q),\end{matrix} \quad (25.24)$$

kde r je vzdálenost bodu P od náboje Q. To znamená, že potenciál φ v libovolném bodě elektrického pole kladného bodového náboje je kladný vzhledem k nulové hodnotě potenciálu v nekonečnu.

Dosud jsme uvažovali kladný náboj Q. Nyní jej nahradíme nábojem záporným $-Q$. V tomto případě vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ elektrického pole směřuje k náboji $-Q$, a proto jsou vektory $\boldsymbol{E}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ orientovány nesouhlasně. Potom $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -E\,\mathrm{d}r'$ a znaménko před integrálem v rov. (25.21) je kladné. Pro potenciál tedy dostaneme

$$\varphi(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \quad \begin{matrix}\text{(pro záporný}\\ \text{bodový náboj } -Q).\end{matrix} \quad (25.25)$$

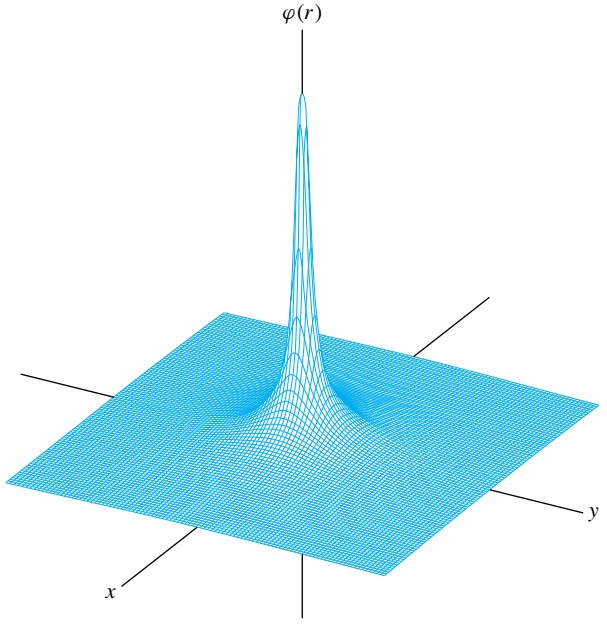
Potenciál φ v libovolném bodě elektrického pole buzeného záporným nábojem je záporný vzhledem k nulové hodnotě potenciálu v nekonečnu.

Pokud symbol Q chápeme tak, že reprezentuje nejen velikost elektrického náboje, ale i jeho znaménko, lze rov. (25.24) a (25.25) pro potenciál bodového náboje ve vzdálenosti r od něj zapsat jedinou rovnicí

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \quad \begin{matrix}\text{(pro kladný i záporný}\\ \text{bodový náboj } Q).\end{matrix} \quad (25.26)$$

Znaménko potenciálu φ je tedy stejné jako znaménko elektrického náboje Q, který pole vytváří.

Obr. 25.8 ukazuje počítačem vytvořený prostorový graf závislosti φ na vzdálenosti r od kladného bodového náboje podle rov. (25.26). Povšimněme si, že velikost φ vzrůstá, jestliže $r \to 0$. Vskutku, podle rov. (25.26) potenciál φ elektrického pole bodového náboje má v bodě $r = 0$ nekonečně velkou hodnotu (i když na obr. 25.8 je graf v tomto bodě pochopitelně ukončen nějakou hodnotou konečnou).



Obr. 25.8 Počítačem vytvořený prostorový diagram průběhu elektrického potenciálu φ v bodech roviny $z = 0$ v závislosti na vzdálenosti r od kladného bodového náboje v počátku roviny xy. Hodnoty potenciálu v bodech této roviny jsou vyneseny svisle. Nekonečná hodnota potenciálu φ, vyplývající z rov. (25.26) pro $r = 0$, není samozřejmě zobrazena.

Rov. (25.26) vyjadřuje také elektrický potenciál kulové vrstvy (slupky) s kulově symetricky rozloženým nábojem, a to na jejím vnějším povrchu i vně této vrstvy. Lze to dokázat s použitím jednoho ze „slupkových teorémů“ uvedených v čl. 22.4 a 24.9 myšleným stažením celkového náboje do středu koule. Rov. (25.26) ovšem nevyjadřuje potenciál ani ve vrstvě, ani v její dutině.

RADY A NÁMĚTY

Bod 25.3: *Určení napětí (neboli potenciálového rozdílu)*

Napětí $\Delta\varphi$ mezi libovolnými dvěma body v elektrickém poli bodového náboje lze určit pomocí rov. (25.26). Nejprve vypočítáme hodnoty potenciálu v obou bodech a poté je od sebe odečteme. Je zřejmé, že hodnota rozdílu $\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i$ bude stejná při kterékoli volbě referenční potenciální energie.

PŘÍKLAD 25.3

(a) Jaký je potenciál φ elektrického pole jádra vodíkového atomu ve vzdálenosti $r = 2{,}12\cdot10^{-10}$ m od jeho středu? (Jádro vodíku tvoří jediný proton.)

ŘEŠENÍ: Dosazením do rov. (25.26) dostaneme

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r} = \frac{(8{,}99\cdot10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}})(1{,}60\cdot10^{-19}\ \mathrm{C})}{(2{,}12\cdot10^{-10}\ \mathrm{m})} = 6{,}78\ \mathrm{V}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou potenciální energii E_p (v elektronvoltech) má elektron v této vzdálenosti? (Tato potenciální energie je energií systému elektron + proton, tj. vodíkového atomu.)

ŘEŠENÍ: Dosazením potenciálu $\varphi = 6{,}78$ V a náboje elektronu do rov. (25.5) dostaneme

$$E_p = Q\varphi = -e\varphi = (-1{,}60\cdot10^{-19}\ \mathrm{C})(6{,}78\ \mathrm{V}) = -1{,}09\cdot10^{-18}\ \mathrm{J} = -6{,}78\ \mathrm{eV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Kdyby se elektron přiblížil k jádru, zvětšila by se, nebo zmenšila jeho potenciální energie?

ŘEŠENÍ: Potenciál φ elektrického pole protonu je vyšší blíže protonu. Podle výsledku části (b) tohoto příkladu tedy energie E_p klesne do větších záporných hodnot. Jinými slovy, přiblížením k jádru potenciální energie E_p elektronu klesne (tím klesne i energie celého systému čili celého atomu).

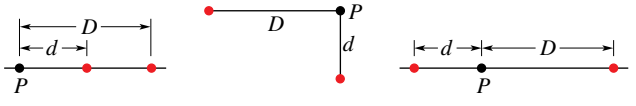
25.6 POTENCIÁL SOUSTAVY BODOVÝCH NÁBOJŮ

Potenciál v libovolném bodě elektrického pole soustavy bodových elektrických nábojů určíme pomocí principu superpozice. Nejprve vypočítáme podle rov. (25.26) potenciály elektrických polí jednotlivých nábojů, samozřejmě s přihlédnutím ke znaménkům nábojů. Potom tyto potenciály sečteme. Soustava n bodových nábojů má potenciál

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{r_i} \quad (n \text{ bodových nábojů}). \qquad (25.27)$$

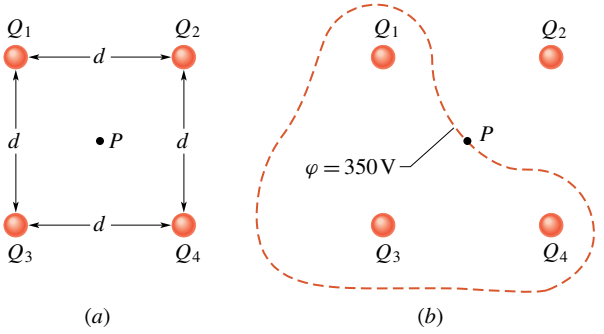
Symbol Q_i zde znamená hodnotu i-tého bodového náboje a r_i jeho vzdálenost od bodu, v němž potenciál určujeme. Součet v rov. (25.27) je *součet algebraický*, nikoli vektorový jako v případě výpočtu intenzity pole soustavy nábojů. V tom spočívá výhoda potenciálu před intenzitou: je mnohem snazší sčítat skaláry než vektory.

KONTROLA 4: Obrázek znázorňuje tři různá uspořádání dvou protonů. Seřaďte tato uspořádání sestupně podle velikosti potenciálu v bodě P jejich elektrického pole.



PŘÍKLAD 25.4

Jaký je potenciál v bodě P uprostřed čtverce, v jehož rozích se nacházejí bodové elektrické náboje (obr. 25.9a)? Délka strany čtverce je $d = 1{,}3\,\text{m}$ a náboje mají velikosti $Q_1 = +12\,\text{nC}$, $Q_2 = -24\,\text{nC}$, $Q_3 = +31\,\text{nC}$, $Q_4 = +17\,\text{nC}$.



Obr. 25.9 Příklad 25.4. (a) Čtyři bodové náboje leží v rozích čtverce. (b) Uzavřená křivka je průsečnicí roviny čtverce a ekvipotenciální plochy, která prochází bodem P.

ŘEŠENÍ: Bod P leží ve stejné vzdálenosti r od každého bodového náboje, takže podle rov. (25.27) dostaneme:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{r}.$$

Protože $r = d/\sqrt{2} \doteq 0{,}919\,\text{m}$ a součet nábojů je

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = (12 - 24 + 31 + 17)\cdot 10^{-9}\,\text{C} = 36\cdot 10^{-9}\,\text{C},$$

dostaneme

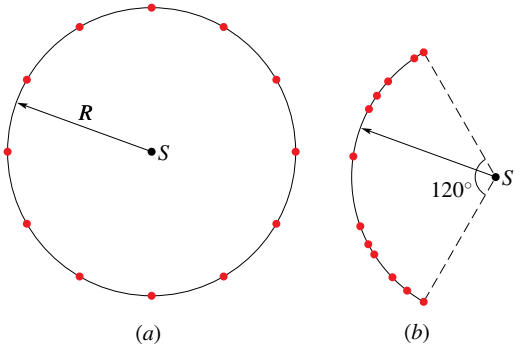
$$\varphi = \frac{(8{,}99\cdot 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2})(36\cdot 10^{-9}\,\text{C})}{(0{,}919\,\text{m})} \doteq$$

$$\doteq 350\,\text{V}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Poznámka: Uvážíme-li pouze tři kladné bodové náboje v obr. 25.9a, bude mít potenciál jejich společného elektrického pole kladné hodnoty. Uvážíme-li pouze jediný záporný náboj, bude mít potenciál jeho elektrického pole záporné hodnoty. Proto v rovině uvedeného čtverce musí existovat body, v nichž má potenciál stejnou hodnotu jako v bodě P. Křivka na obr. 25.9b ukazuje průsečnici roviny čtverce a ekvipotenciální plochy procházející bodem P. Libovolný bod této průsečnice má stejnou hodnotu potenciálu jako bod P.

PŘÍKLAD 25.5

(a) Dvanáct elektronů na obr. 25.10a (s náboji $-e$) je rovnoměrně rozloženo na kružnici o poloměru R. Jaká je hodnota elektrického potenciálu a intenzity elektrického pole ve středu S kružnice, je-li referenční hodnota potenciálu $\varphi = 0$ zvolena v nekonečnu?



Obr. 25.10 Příklad 25.5. (a) Dvanáct elektronů rovnoměrně rozmístěných na kružnici. (b) Tytéž elektrony jsou nyní nepravidelně rozmístěny na oblouku původní kružnice.

ŘEŠENÍ: Jelikož všechny elektrony mají stejný (záporný) náboj a jsou ve stejné vzdálenosti R od bodu S, bude podle rov. (25.27) platit

$$\varphi = -12\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e}{R}. \qquad \text{(Odpověď)} \qquad (25.28)$$

Protože potenciál je veličina skalární, není orientace polohových vektorů nábojů vzhledem k bodu S pro výpočet potenciálu φ podstatná. Intenzita elektrického pole je však veličina vektorová, proto orientace polohových vektorů elektrických nábojů pro výpočet $\boldsymbol{E}$ podstatná *je*. Protože elektrony jsou na kružnici rozloženy symetricky, je v bodě S vektor intenzity elektrického pole libovolného elektronu vykompenzován vektorem intenzity elektrického pole toho elektronu, který je umístěn symetricky vzhledem ke středu kružnice. Proto v bodě S je

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

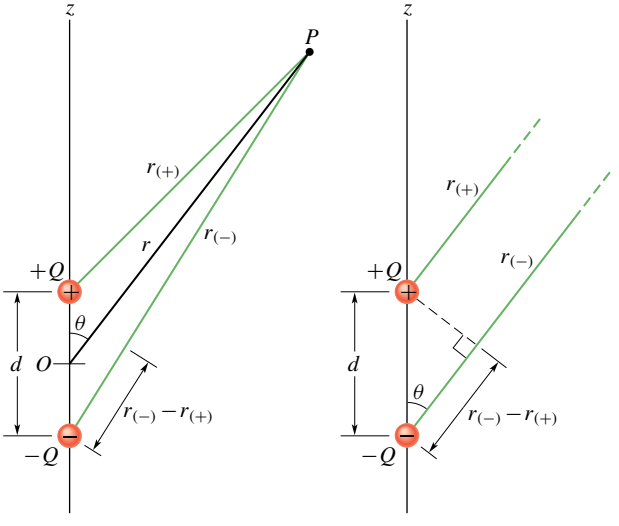
(b) Jak se změní (změní-li se vůbec) potenciál a intenzita v bodě S, jestliže elektrony rozmístíme nerovnoměrně na oblouku kružnice se středovým úhlem 120° podle obr. 25.10b?

ŘEŠENÍ: Potenciál je i zde dán rov. (25.28), protože vzdálenosti mezi bodem S a každým elektronem se nezměnily, a orientace polohových vektorů elektronů je pro potenciál bezvýznamná. Avšak intenzita je nyní nenulová, protože uspořádání elektronů již není symetrické. Výsledná intenzita směřuje k oblouku s náboji.

25.7 POTENCIÁL ELEKTRICKÉHO POLE DIPÓLU

Použijme rov. (25.27), abychom našli potenciál dipólu v bodě P podle obr. 25.11a. Podle rov. (25.26) kladný náboj budí ve vzdálenosti $r_{(+)}$ potenciál $\varphi_{(+)}$, záporný náboj ve vzdálenosti $r_{(-)}$ budí potenciál $\varphi_{(-)}$. Výsledný potenciál je podle rov. (25.27) součtem:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{2} \varphi_i = \varphi_{(+)} + \varphi_{(-)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_{(+)}} + \frac{-Q}{r_{(-)}}\right) = \\ = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)} r_{(+)}}. \qquad (25.29)$$



(a) (b)

Obr. 25.11 (a) Bod P je ve vzdálenosti r od středu O elektrického dipólu. Úsečka OP svírá s osou dipólu úhel θ. (b) Je-li bod P velmi daleko od dipólu, jsou úsečky $r_{(+)}$ a $r_{(-)}$ přibližně rovnoběžné s úsečkou OP a čárkovaná černá úsečka je přibližně kolmá k úsečce $r_{(-)}$.

Často se zajímáme o pole dipólu ve vzdálenosti r mnohem větší než délka d dipólu, tj. $r \gg d$. (Pak mluvíme o elementárním dipólu; to je např. polární molekula, pro kterou platí prakticky vždy $r \gg d$.) Pak podle obr. 25.11b platí: $r_{(-)} - r_{(+)} \doteq d\cos\theta$ a $r_{(-)} r_{(+)} \doteq r^2$. Po dosazení do rov. (25.29) dostaneme pro potenciál φ pole dipólu

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2},$$

kde θ je úhel měřený od osy dipólu (obr. 25.11a). Je tedy

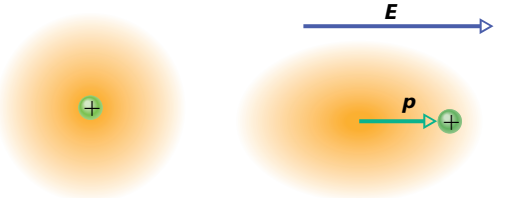
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \quad \text{(elektrický dipól)}, \qquad (25.30)$$

kde p je velikost dipólového momentu $\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d}$ definovaného v čl. 23.5. Připomeňme, že vektor $\boldsymbol{p}$ leží na ose dipólu a je orientován od záporného ke kladnému pólu a úhel θ měříme od směru $\boldsymbol{p}$.

KONTROLA 5: Předpokládejme, že tři body jsou rozmístěny ve stejných (velkých) vzdálenostech r od středu dipólu (obr. 25.11): bod A leží na ose dipólu nad jeho kladným nábojem, bod B leží na ose dipólu pod záporným nábojem a bod C leží na kolmici k ose dipólu procházející středem O dipólu. Seřaďte tyto body sestupně podle velikosti jejich elektrického potenciálu.

Indukovaný dipólový moment

Mnohé molekuly, např. molekuly vody, jsou *polární*, tj. mají *permanentní* (*trvalé*) elektrické dipólové momenty. U molekul *nepolárních* a také v každém atomu splývá střed všech kladných nábojů se středem nábojů záporných (obr. 25.12a). Proto elektrický dipólový moment takových molekul a atomů je nulový.



(a) (b)

Obr. 25.12 (a) Atom s kladně nabitým jádrem (zeleně) a záporně nabitými elektrony (zlatě stínované). Střed kladného náboje jádra splývá se středem záporně nabitého elektronového obalu atomu. (b) Je-li atom umístěn do vnějšího elektrického pole, jsou elektronové orbity deformovány a tím se středy kladného a záporného náboje oddálí. Atom tak získá elektrický dipólový moment. Deformace elektronových drah je značně přehnána.

Umístíme-li však atom nebo nepolární molekulu do vnějšího elektrického pole, deformují se vlivem elektrických sil elektronové orbity, a tím se střed všech záporných

nábojů nepatrně posune vůči středu všech kladných nábojů (obr. 25.12b). Protože elektrony jsou záporně nabité, posunou se proti směru vektoru intenzity vnějšího elektrického pole. Tím vznikne dipól, jehož dipólový moment $\boldsymbol{p}$ má směr souhlasný s vnějším elektrickým polem. Říkáme, že takový dipólový moment je *indukovaný* elektrickým polem a atom nebo molekula je tímto polem *polarizována* (získá kladný a záporný pól). Je-li vnější elektrické pole odstraněno, indukovaný dipólový moment a polarizace zanikají.

25.8 POTENCIÁL SPOJITĚ ROZLOŽENÉHO NÁBOJE

Je-li náboj Q rozložen spojitě (např. na vodivé tyči, disku apod.), je nutno pro výpočet elektrického potenciálu φ v rov. (25.27) sčítání nahradit integrací. Zvolíme infinitezimální elementy $\mathrm{d}Q$ náboje, vyjádříme v bodě P jejich potenciály $\mathrm{d}\varphi$, a poté integrujeme přes celý spojitě rozložený náboj.

Infinitezimální náboj $\mathrm{d}Q$ považujeme vždy za bodový. Zvolíme-li nulovou hodnotu potenciálu v nekonečnu, je podle rov. (25.26) potenciál jeho pole v bodě P dán vztahem

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r}, \tag{25.31}$$

kde r je vzdálenost bodu P od náboje $\mathrm{d}Q$. Abychom určili celkový potenciál φ v bodě P, musíme integrovat přes všechen spojitě rozložený náboj:

$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}Q}{r}. \tag{25.32}$$

Dále vyšetříme dva případy spojitě rozloženého náboje: na úsečce a na disku.

Náboj spojitě rozložený na úsečce

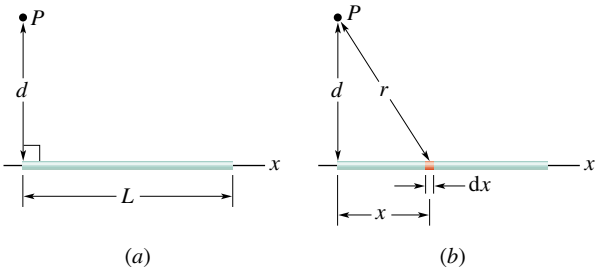
Na obr. 25.13a je tenká nevodivá tyč délky L, rovnoměrně nabitá kladným elektrickým nábojem o délkové hustotě náboje $\tau = konst$. Určíme potenciál φ elektrického pole buzeného v bodě P nábojem na tyči. Bod P se nachází v kolmé vzdálenosti d od levého konce tyče.

Infinitezimální délkový element $\mathrm{d}x$ tyče (obr. 25.13b) nese infinitezimální náboj

$$\mathrm{d}Q = \tau\,\mathrm{d}x. \tag{25.33}$$

Tento náboj budí v bodě P (který leží ve vzdálenosti $r = \sqrt{x^2 + d^2}$ od $\mathrm{d}Q$) elektrické pole o potenciálu $\mathrm{d}\varphi$. Určíme jej podle rov. (25.31):

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + d^2}}. \tag{25.34}$$



Obr. 25.13 (a) Tenká, rovnoměrně nabitá tyč budí v bodě P elektrické pole o potenciálu φ. (b) Element náboje $\mathrm{d}Q$ vyvolává v bodě P pole o potenciálu $\mathrm{d}\varphi$.

Jelikož náboj tyče je kladný a nulová hodnota potenciálu byla zvolena v nekonečnu, je podle čl. 25.5 potenciál $\mathrm{d}\varphi$ v rov. (25.34) také kladný.

Potenciál φ elektrického pole buzeného nábojem celé tyče dostaneme integrací rov. (25.34) přes celou délku tyče, od $x = 0$ do $x = L$. Dostaneme tak (dodatek E)

$$\begin{aligned}\varphi = \int \mathrm{d}\varphi &= \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{\sqrt{x^2 + d^2}}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \\ &= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\ln\big(x + \sqrt{x^2 + d^2}\big)\Big]_0^L = \\ &= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\ln\big(L + \sqrt{L^2 + d^2}\big) - \ln d\Big].\end{aligned}$$

Protože platí $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$, je

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 + d^2}}{d}\right). \tag{25.35}$$

Protože argument funkce logaritmus je větší než 1, je logaritmus kladný, a potenciál φ je také kladný, jak bylo možné očekávat.

Rovnoměrně nabitý disk

V čl. 23.7 jsme počítali velikost intenzity elektrického pole v bodech na ose nevodivého disku o poloměru R, který je rovnoměrně nabit nábojem s plošnou hustotou σ. Nyní odvodíme výraz pro potenciál $\varphi(z)$ elektrického pole v libovolném bodě na ose tohoto disku.

Nejprve uvažujme plošný element tvaru nekonečně tenkého mezikruží poloměru R' a radiální šířky $\mathrm{d}R'$ (obr. 25.14). Náboj na něm má velikost

$$\mathrm{d}Q = \sigma(2\pi R')(\mathrm{d}R'),$$

kde $(2\pi R')(\mathrm{d}R')$ je obsah mezikruží. Všechny body tohoto mezikruží jsou ve stejné vzdálenosti r od bodu P na ose

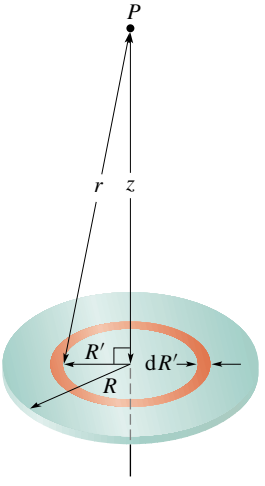
disku, a proto příspěvek náboje na tomto mezikruží k celkové hodnotě elektrického potenciálu v bodě P můžeme vyjádřit vztahem

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(2\pi R')(dR')}{\sqrt{z^2+R'^2}}. \quad (25.36)$$

Potenciál elektrického pole buzeného v bodě P všemi náboji na disku vypočítáme integrací příspěvků od všech proužků mezikruží s poloměry od $R' = 0$ do $R' = R$:

$$\varphi = \int d\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{R'\,dR'}{\sqrt{z^2+R'^2}} = \\ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2}-z\right). \quad (25.37)$$

Povšimněme si, že proměnnou ve druhém integrálu rovnice (25.37) je R', a nikoli vzdálenost z, která zůstává konstantní v průběhu integrace přes plochu disku. (Poznamenejme, že při výpočtu integrálu jsme předpokládali, že $z \geqq 0$.)



Obr. 25.14 Nevodivý disk poloměru R je na horní ploše rovnoměrně nabit elektrickým nábojem s plošnou hustotou náboje σ. Hledáme potenciál φ elektrického pole v bodě P na ose disku.

PŘÍKLAD 25.6

Potenciál ve středu rovnoměrně nabitého kruhového disku o poloměru $R = 3{,}5$ cm je $\varphi_0 = 550$ V.

(a) Jak velký je celkový náboj Q na disku?

ŘEŠENÍ: Ve středu disku je $z = 0$, a proto se rov. (25.37) redukuje na

$$\varphi_0 = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0},$$

z čehož plyne

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_0\varphi_0}{R}. \quad (25.38)$$

Protože σ je plošná hustota náboje, je celkový náboj na disku $\sigma\pi R^2$. Použijeme-li rov. (25.38), dostaneme

$$Q = \sigma\pi R^2 = 2\pi\varepsilon_0 R\varphi_0 = \\ = 2\pi(8{,}85\cdot10^{-12}\,\mathrm{C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}})(0{,}035\,\mathrm{m})(550\,\mathrm{V}) = \\ = 1{,}1\cdot10^{-9}\,\mathrm{C} = 1{,}1\,\mathrm{nC}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Při úpravě jednotek ve výsledku jsme použili rov. (25.9), tj. $1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{J\cdot C^{-1}} = 1\,\mathrm{N\cdot m\cdot C^{-1}}$.

(b) Jaký potenciál je na ose disku ve vzdálenosti $z = 5{,}0R$ od disku?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (25.37) je

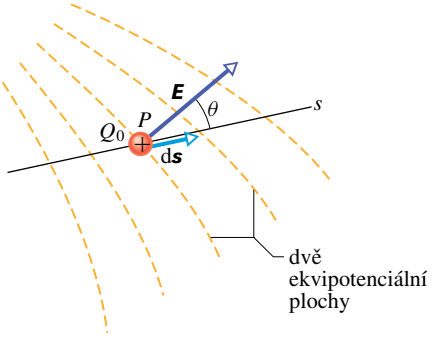
$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{(5{,}0R)^2+R^2}-5{,}0R\right).$$

Dosazením za σ z rov. (25.38) dostaneme

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{R}\left(\sqrt{26R^2}-5{,}0R\right) = \varphi_0\left(\sqrt{26}-5{,}0\right) = \\ = (550\,\mathrm{V})(0{,}099) = 54\,\mathrm{V}. \quad \text{(Odpověď)}$$

25.9 VÝPOČET INTENZITY ZE ZADANÉHO POTENCIÁLU

V čl. 25.4 jsme se seznámili s tím, jak určit elektrický potenciál, jestliže známe intenzitu elektrického pole v každém bodě trajektorie spojující tento bod s referenčním bodem. V tomto článku budeme postupovat obráceně, tj. budeme hledat intenzitu elektrického pole pomocí známého potenciálu. Jak naznačuje obr. 25.3, grafické řešení tohoto problému je snadné: je-li znám potenciál φ všude v okolí nábojů, lze sestrojit ekvipotenciální plochy. Elektrické siločáry, které vždy protínají ekvipotenciální plochy kolmo, pak naznačují průběh vektoru intenzity $\boldsymbol{E}$. Nyní najdeme k této grafické metodě její matematický ekvivalent.



Obr. 25.15 Testovací náboj Q_0 se posune o $d\boldsymbol{s}$ od jedné ekvipotenciální plochy ke druhé. Vektor posunutí $d\boldsymbol{s}$ svírá úhel θ se směrem vektoru intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$.

Na obr. 25.15 je zachycen příčný řez soustavou ekvipotenciálních ploch. Potenciálový rozdíl mezi každou dvojicí sousedních ploch je $d\varphi$. Na obr. 25.15 je znázorněno, že vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ v libovolném bodě P je kolmý k ekvipotenciální ploše, která bodem P prochází.

Předpokládejme, že kladný testovací náboj Q_0 se posune o $d\boldsymbol{s}$ od jedné ekvipotenciální plochy k ploše sousední. Podle rov. (25.7) práce vykonaná elektrickým polem při posunutí testovacího náboje je $-Q_0\,d\varphi$. Podle rov. (25.16) a obr. 25.15 práce vykonaná elektrickým polem může být vyjádřena také skalárním součinem $Q_0\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}$. Proto

$$-d\varphi = \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}. \tag{25.39}$$

Vyjádříme-li skalární součin $\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}$ výrazem $E\cos\theta\,ds$, dostaneme z rov. (25.39)

$$-d\varphi = E\cos\theta\,ds.$$

Protože $E\cos\theta$ je složka vektoru $\boldsymbol{E}$ ve směru posunutí $d\boldsymbol{s}$, lze tuto rovnici vyjádřit ve tvaru

$$E_s = -\frac{d\varphi}{ds}. \tag{25.40}$$

Rov. (25.40), která je v podstatě obráceným vztahem k rovnici (25.18), vyjadřuje:

Složka intenzity pole $\boldsymbol{E}$ v libovolném směru je rovna poklesu potenciálu v tomto směru (tj. záporně vzatému přírůstku) připadajícímu na jednotkovou vzdálenost.

Za směr $\boldsymbol{s}$ zvolíme postupně osy x, y a z. Dostaneme tak příslušné tři složky intenzity elektrického pole:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}; \tag{25.41}$$

vektor $\boldsymbol{E}$ elektrické intenzity pak můžeme vyjádřit vektorovým vztahem

$$\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j} + E_z\boldsymbol{k} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = -\boldsymbol{grad}\,\varphi.$$

Známe-li tedy funkci $\varphi = \varphi(x, y, z)$ ve všech bodech pole, pak lze určit složky E_x, E_y, E_z (a tím také vektor intenzity $\boldsymbol{E}$) v libovolném bodě pomocí uvedených parciálních derivací.

Máme tedy dva způsoby jak určit $\boldsymbol{E}$ pro dané rozložení nábojů. V prvním z nich určíme přímo vektor $\boldsymbol{E}$ tak, jak bylo ukázáno v kap. 23. Ve druhém z nich nejprve určíme (skalární) potenciál $\varphi(x, y, z)$ a intenzitu elektrického pole určíme z rov. (25.41). Druhý způsob bývá zpravidla snazší.

V homogenním elektrickém poli (kde $\boldsymbol{E}$ je vektor konstantní co do velikosti i co do směru), můžeme použít i konečná posunutí $\Delta\boldsymbol{s}$ a rov. (25.40) má tvar:

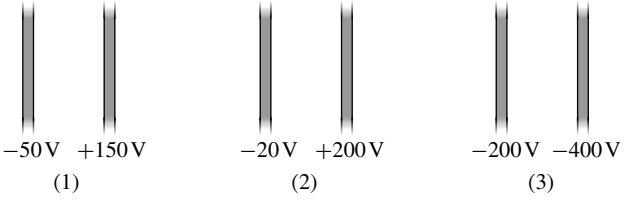
$$E_s = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Volíme-li $\Delta\boldsymbol{s}$ kolmo k ekvipotenciální ploše ve směru poklesu potenciálu φ, je $\Delta\varphi < 0$ a dostáváme

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \tag{25.42}$$

pro velikost vektoru $\boldsymbol{E}$. Složka intenzity ve směru *rovnoběžném* s ekvipotenciální plochou je vždy nulová.

KONTROLA 6: Na obrázku jsou tři dvojice rovnoběžných desek stejně vzdálených. Každá deska má určitý elektrický potenciál. Elektrické pole mezi deskami je homogenní a vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ je kolmý k deskám. (a) Seřaďte dvojice těchto desek sestupně podle velikosti intenzity elektrického pole mezi deskami. (b) Ve které dvojici desek směřuje vektor intenzity elektrického pole vpravo? (c) Co se stane, umístíme-li elektron doprostřed mezi třetí dvojice desek: zůstane na místě? Bude se pohybovat konstantní rychlostí vpravo, nebo vlevo? Bude se pohybovat zrychleně vpravo, nebo vlevo?



PŘÍKLAD 25.7

Elektrický potenciál v libovolném bodě na ose nabitého disku je určen rov. (25.37)

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right).$$

Vyjděte z tohoto výrazu a odvoďte vztah pro intenzitu elektrického pole v libovolném bodě na ose disku.

ŘEŠENÍ: Vektor intenzity elektrického pole musí ležet v ose disku, protože rozložení náboje na disku je prostorově symetrické. Zvolíme-li směr s tak, aby splýval s osou z, pak podle

rov. (25.40) dostaneme

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sqrt{z^2+R^2}-z\right) =$$
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right). \qquad \text{(Odpověď)}$$

Toto je stejný výraz jako výraz odvozený v čl. 23.7 integrací s použitím Coulombova zákona.

25.10 ELEKTRICKÁ POTENCIÁLNÍ ENERGIE SOUSTAVY BODOVÝCH NÁBOJŮ

V čl. 25.1 jsme se zabývali potenciální energií testovacího náboje jako funkcí jeho polohy ve *vnějším* elektrickém poli. Předpokládali jsme, že náboje, které elektrické pole vyvolávají, mají pevné polohy, neovlivněné přítomností testovacího náboje. V tomto článku vyšetříme jinou situaci; najdeme vztah pro konfigurační potenciální energii *soustavy* nábojů v poli vytvořeném *těmito* náboji.

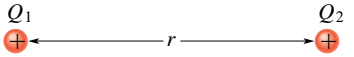
Uveďme jednoduchý příklad. Jestliže k sobě přiblížíme dvě nabitá tělesa s náboji stejného znaménka, pak práce, kterou přitom musíme vykonat (tj. vynaložit na překonání odpudivých elektrických sil), se přemění v potenciální energii soustavy dvou nabitých těles (za předpokladu, že se jejich kinetická energie nemění). Jestliže poté tělesa uvolníme, začnou se pohybovat a nahromaděnou elektrickou potenciální energii můžeme získat zpět jako kinetickou energii nabitých těles (vzdalujících se od sebe).

Elektrickou potenciální energii *soustavy elektrických nábojů* zaujímajících určité polohy, tedy energii určité konfigurace nábojů, definujeme takto:

Potenciální energie soustavy nábojů je rovna práci W_{ext}, kterou musela vykonat vnější síla proti silám pole při sestavování této konfigurace nábojů, tj. při přemístění každého náboje „z nekonečna“ do jeho polohy v dané konfiguraci.

Přitom předpokládáme, že náboje jsou ve výchozí i v koncové poloze v klidu. Formulací „náboje v nekonečnu“ myslíme, stejně jako v čl. 25.1, náboje umístěné tak daleko od sebe, abychom jejich vzájemné působení mohli v dané úloze zanedbat.

Obr. 25.16 znázorňuje dva bodové náboje Q_1 a Q_2, ve vzdálenosti r. Představme si, že ve snaze najít elektrickou potenciální energii tohoto systému dvou nábojů uskutečníme následující proces. Předpokládejme, že oba náboje jsou nejprve nekonečně vzdálené a v klidu. Přeneseme-li náboj Q_1 z nekonečna do jeho koncové polohy, nekonáme práci, protože nemusíme překonávat žádnou elektrostatickou sílu. Vezmeme-li však další náboj Q_2 a přeneseme-li ho do daného místa, práci již konáme, protože přítomnost náboje Q_1 se projevuje elektrostatickou silou působící na náboj Q_2 během jeho přemísťování.



Obr. 25.16 Dva náboje držené v neměnné vzdálenosti r. Jaká je elektrická potenciální energie této konfigurace?

Práci při tomto procesu námi vykonanou (tj. vnější silou) určíme podle rov. (25.8) a (25.12). Označíme-li přenášený náboj jako Q_2, bude tato práce rovna $Q_2\varphi$, kde φ je potenciál elektrického pole vyvolaného nábojem Q_1 v bodě, do kterého byl náboj Q_2 přemístěn. Podle rov. (25.26) má tento potenciál hodnotu

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r}.$$

Dvojice bodových elektrických nábojů má tedy elektrickou potenciální energii

$$E_{\text{p}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r}. \qquad (25.43)$$

Mají-li oba náboje stejná znaménka, pak při jejich vzájemném přibližování se překonává odpudivá síla mezi nimi působící a práce námi vykonaná je kladná. Potenciální energie systému je pak kladná, což je zřejmé i z rov. (25.43), a vzájemným přibližováním obou nábojů se zvyšuje. Mají-li náboje opačná znaménka, musíme vykonat stejně velkou, ale zápornou práci proti vzájemné přitažlivé síle působící mezi náboji. Potenciální energie takového systému dvou nábojů se jejich vzájemným přibližováním snižuje. V př. 25.8 je naznačeno, jak tento postup výpočtu rozšířit na soustavu libovolného počtu nábojů.

PŘÍKLAD 25.8

Obr. 25.17 ukazuje tři náboje držené v pevných polohách silami, které na obrázku nejsou znázorněné. Jaká je elektrická potenciální energie této soustavy nábojů? Je dána vzdálenost $d = 12\,\text{cm}$ a náboje $Q_1 = +Q$, $Q_2 = -4Q$, $Q_3 = +2Q$, kde $Q = 150\,\text{nC}$.

ŘEŠENÍ: Představme si, že soustavu tří nábojů na obr. 25.17 teprve sestavujeme. Dejme tomu, že na začátku je již na svém místě jeden z nábojů, řekněme Q_1, a ostatní dva jsou ještě v nekonečnu. Nyní přeneseme další náboj, třeba Q_2, z nekonečna na jeho místo v soustavě. Dosadíme-li d místo r

do rov. (25.43), dostaneme potenciální energii $E_{p,12}$ dvojice nábojů Q_1 a Q_2

$$E_{p,12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{d}.$$

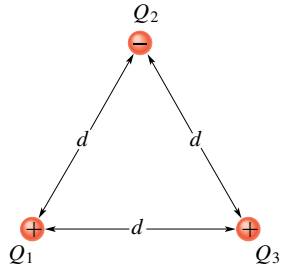
Nakonec přemístíme třetí (poslední) náboj Q_3 z nekonečna na jeho místo v soustavě. Práce, kterou musíme vykonat v tomto posledním kroku, je rovna součtu dvou prací: práce $W_{ext,13}$, kterou musíme vykonat, abychom náboj Q_3 přiblížili z nekonečna k náboji Q_1, a práce $W_{ext,23}$, kterou musíme vykonat, abychom náboj Q_3 současně přiblížili k náboji Q_2. Práce, kterou vykonáme při přemístění náboje Q_3, je tedy

$$W_{ext,13} + W_{ext,23} = E_{p,13} + E_{p,23} = \\ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{d} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 Q_3}{d}.$$

Celková elektrická potenciální energie soustavy tří nábojů je rovna součtu potenciálních energií tří dvojic nábojů, které lze z nábojů vytvořit. Tento součet (který je nezávislý na pořadí nábojů ve dvojicích) je roven

$$E_p = E_{p,12} + E_{p,13} + E_{p,23} = \\ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q(-4Q)}{d} + \frac{Q(2Q)}{d} + \frac{(-4Q)(2Q)}{d}\right) = \\ = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{10Q^2}{d} = \\ = -\frac{(8{,}99\cdot 10^9\cdot \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}})\cdot 10\cdot(150\cdot 10^{-9}\cdot \mathrm{C})^2}{(0{,}12\ \mathrm{m})} = \\ = -1{,}7\cdot 10^{-2}\ \mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

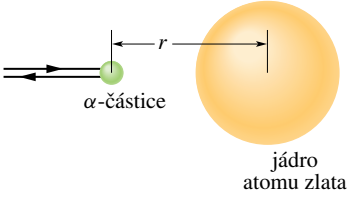
Energie je záporná, tzn., že je záporná i celková práce vynaložená na přemístění těchto tří nábojů z nekonečna do poloh podle obr. 25.17. A obráceně, abychom úplně rozrušili tuto strukturu a vzdálili náboje od sebe do nekonečna, musíme vykonat práci 17 mJ, ta je rovna *vazební energii* soustavy.



Obr. 25.17 Příklad 25.8. Tři náboje jsou umístěny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Jaká je jejich potenciální energie?

PŘÍKLAD 25.9

Částice α (která se skládá ze dvou protonů a dvou neutronů) letí z velké dálky k atomu zlata, prolétá jeho elektronovým obalem a míří přímo na jeho jádro, které je tvořeno 79 protony a 118 neutrony. Zpomaluje se, až se zastaví ve vzdálenosti $r = 9{,}23$ fm od středu atomového jádra* a pak se vrací zpět po původní dráze (obr. 25.18). Jaká byla její počáteční kinetická energie E_k? (Protože jádro atomu zlata je mnohem hmotnější než α-částice, můžeme předpokládat, že poloha jádra se při této interakci prakticky nezmění.) Uvažujte pouze elektrickou interakci, vliv silné jaderné interakce vzhledem k uvedené vzdálenosti zanedbejte.



Obr. 25.18 Příklad 25.9. Částice α, pohybující se přímo na střed jádra atomu zlata, se zastavila v okamžiku, kdy se její kinetická energie celá přeměnila v elektrickou potenciální energii.

ŘEŠENÍ: Během celého procesu se zachovává mechanická energie systému *α-částice + atom zlata*. Pokud je α-částice vně atomu, je elektrická potenciální energie systému nulová, protože atom má stejný počet elektronů jako protonů, a je tedy navenek elektricky neutrální, nevytváří vnější elektrické pole. Jakmile však α-částice pronikne elektronovým obalem atomu, působí již jen odpudivá elektrostatická síla, zpočátku slabá, ale rychle se zesilující se zmenšující se vzdáleností středů částice a jádra atomu. Je vyvolána odpuzováním protonů α-částice protony atomového jádra. (Neutrony, které jsou elektricky neutrální, k této odpudivé síle nepřispívají a jejich silnou interakci lze vzhledem k uvedené vzdálenosti zanedbat. Elektrony, nyní vně oblasti výskytu α-částice, působí jako homogenně nabitá kulová vrstva, jejíž pole uvnitř je nulové.)

Vlivem odpudivé síly se α-částice zpomaluje a její kinetická energie se přeměňuje v elektrickou potenciální energii celého systému. Tato přeměna je ukončena v okamžiku, kdy rychlost α-částice klesne na nulu. Ze zákona zachování mechanické energie plyne, že počáteční kinetická energie E_k částice α se musí rovnat elektrické potenciální energii E_p systému v okamžiku, kdy se α-částice zastaví:

$$E_k = E_p, \qquad (25.44)$$

kde E_p je dáno rov. (25.43). Dosazením $Q_1 = 2e$, $Q_2 = 79e$ (kde e je elementární náboj, jehož velikost je $1{,}60\cdot 10^{-19}$ C)

* Můžeme také říci, že se v této vzdálenosti částice odrazila od jádra.

a $r = 9{,}23$ fm dostaneme

$$E_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(2e)(79e)}{(9{,}23\,\text{fm})} = \\ = \frac{(8{,}99\cdot10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2})(158)(1{,}60\cdot10^{-19}\,\text{C})^2}{(9{,}23\cdot10^{-15}\,\text{m})} = \\ = 3{,}94\cdot10^{-12}\,\text{J} = 24{,}6\,\text{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 7: Zaměňme v př. 25.9 částici α jedním protonem se stejnou kinetickou energií. Odrazí se tento proton od jádra ve stejné vzdálenosti jako α-částice (tj. 9,23 fm od jádra atomu zlata), dále od něho, nebo blíž k němu?

25.11 POTENCIÁL NABITÉHO VODIČE

V čl. 24.6 jsme došli k závěru, že ve všech vnitřních bodech izolovaného vodiče je $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$. Pomocí Gaussova zákona elektrostatiky jsme dokázali, že volný náboj je rozložen na jeho vnějším povrchu. (To platí i v případě, že vodič má uvnitř prázdnou dutinu.) Z toho, že $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ ve všech vnitřních bodech vodiče, odvodíme další poznatek:

Volný náboj na izolovaném vodiči se samovolně rozprostře po vnějším povrchu vodiče tak, že všechny body vodiče — a je jedno zda na povrchu nebo uvnitř — mají stejný potenciál. To platí bez ohledu na to, zda vodič má či nemá dutinu.

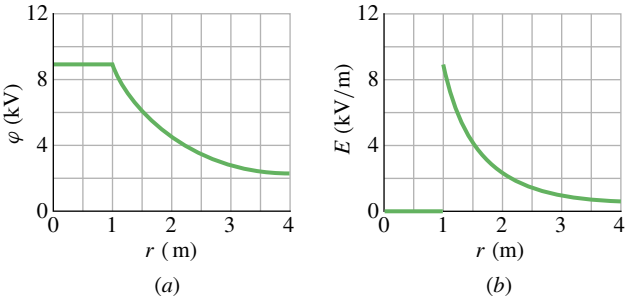
Důkaz vyplývá přímo z rov. (25.18), tj. ze vztahu

$$\varphi_f - \varphi_i = -\int_i^f \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}.$$

Jelikož $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ ve všech bodech ve vodiči, vyplývá odtud, že $\varphi_f = \varphi_i$ pro všechny možné dvojice bodů (i) a (f) vodiče.

Obr. 25.19a ukazuje závislost potenciálu na vzdálenosti r od středu izolované kulové vodivé plochy o poloměru 1,0 m mající náboj 1,0 μC. V bodech vně koule můžeme potenciál $\varphi(r)$ vypočítat z rov. (25.26), protože vzhledem k nim se celkový náboj projevuje jako bodový, umístěný ve středu koule. Tato rovnice platí i pro body na povrchu koule. Nyní vsuňme malý testovací náboj malým otvorem dovnitř koule. Přitom nekonáme práci, protože na testovací náboj uvnitř vodivé koule elektrická síla nepůsobí. Potenciál ve všech bodech uvnitř koule má tedy stejnou hodnotu jako v bodech na povrchu, jak ukazuje obr. 25.19a.

Obr. 25.19b ukazuje průběh závislosti velikosti elektrické intenzity E téže nabité koule na vzdálenosti r od jejího středu. Všimněme si, že uvnitř koule platí $E = 0$. Křivku na obr. 25.19b lze odvodit derivováním funkce z obr. 25.19a podle r, viz rov. (25.40). Naopak křivka na obr. 25.19a může být odvozena integrováním funkce z obr. 25.19b přes proměnnou r podle rov. (25.19).



Obr. 25.19 (a) Průběh potenciálu $\varphi(r)$ nabité kulové plochy. (b) Průběh velikosti intenzity elektrického pole $E(r)$ stejné kulové plochy. Na povrchu koule je intenzita nespojitá.

Na povrchu vodičů, které nejsou kulově symetrické, se náboj nerozdělí rovnoměrně. Hustota náboje roste se zakřivením, takže na hrotech a hranách může hustota náboje — a tím i intenzita vnějšího elektrického pole, která je jí úměrná — dosahovat velmi vysokých hodnot. Vzduch se může kolem takových hrotů ionizovat a vytvořit koronový výboj; ten mohou vidět při blížících se letních bouřkách např. hráči golfu na koncích golfových holí, horolezci na koncích svých cepínů a na skalních útesech, turisté např. na koncích větví keřů. Takové koronové výboje, vypadající jako zježené vlasy, jsou často předzvěstí úderu blesku. Za takových okolností je rozumné schovat se v dutině nějakého vodivého předmětu, kde je intenzita elektrického pole zaručeně nulová. Auto se svou kovovou karoserií (obr. 25.20) je k tomu téměř ideální (pokud nejde o auto se skládací střechou).

Je-li izolovaný vodič vložen do *vnějšího elektrického pole* (obr. 25.21), pak bude ve všech jeho bodech stejný potenciál bez ohledu na to, zda vodič je či není nabit. Volné vodivostní elektrony se totiž rozdělí po povrchu vodiče takovým způsobem, že elektrické pole, které vyvolají, zruší ve vnitřních bodech vodiče to elektrické pole, které do vodiče proniklo z vnějšku (a které by tam jinak zůstalo nezrušeno, kdyby ve vodiči nebyly volné náboje). Rozložení elektronů po povrchu vodiče také způsobí, že siločáry výsledného pole budou v každém bodě povrchu vodiče k němu kolmé. Kdybychom mohli vodič na obr. 25.21 z vnějšího elektrického pole vyjmout tak, aby jeho povrchové náboje zůstaly fixovány na svých místech, zůstalo by elektrické pole vně i uvnitř vodiče zcela nezměněné (a tedy i průběh siločár by zůstal stejný).



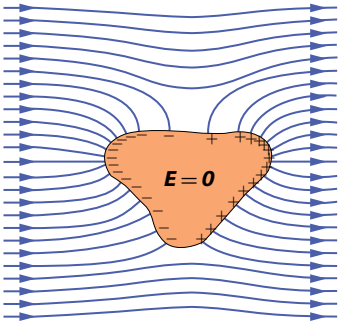
Obr. 25.20 Do karosérie auta udeřila mohutná elektrická jiskra a pak přeskočila přes izolující levou přední pneumatiku do země (všimněme si záblesku v tomto místě), aniž zranila osobu uvnitř auta.

Určení intenzity $\boldsymbol{E}$, potenciálu φ a plošné hustoty náboje σ na nabitých vodivých plochách obecného tvaru není jednoduché a vymyká se našemu rozsahu látky. Zpravidla je nutno použít počítače a vhodné numerické metody. Obecně lze říci:

(a) Povrch vodiče je vždy ekvipotenciální plochou, tj. každý bod na povrchu vodiče (i uvnitř vodiče) má týž potenciál φ. Ten je úměrný úhrnnému náboji Q tohoto vodiče, konstanta úměrnosti však závisí nejen na tvaru vodiče, ale i na tvaru a vzájemné poloze všech vodičů v jeho okolí.

(b) Veškerý náboj Q vodiče se nachází pouze na jeho vnějším povrchu S, a to s proměnnou plošnou hustotou náboje $\sigma(\boldsymbol{r})$. Platí $Q = \oint \sigma \, \mathrm{d}S$. Hustota σ závisí na zakřivení vodiče, v místech s velkou křivostí (hrany, hroty) je zvláště vysoká.

(c) Intenzita $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{grad}\,\varphi$ elektrického pole je uvnitř vodiče nulová, vně vodiče se spojitě mění a na povrchu se její normálová složka E_n mění skokem (tečná složka E_t zůstává spojitá). Platí zde $E_{\mathrm{n}1} - E_{\mathrm{n}2} = \sigma/\varepsilon_0$, $E_{\mathrm{t}1} - E_{\mathrm{t}2} = 0$. Poblíž hrotů a hran nabitého vodiče je proto intenzita elektrického pole velmi vysoká.



Obr. 25.21 Nenabitý vodič je vsunut do vnějšího elektrického pole. Volné elektrony vodiče se rozdělí po jeho povrchu tak, jak je naznačeno, a zcela zruší elektrické pole uvnitř vodiče. Siločáry výsledného pole těsně nad povrchem vodiče jsou kolmé k jeho povrchu.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Elektrická potenciální energie

Přemístí-li se bodový elektrický náboj v elektrickém poli z bodu (i) do libovolného bodu (f), je změna ΔE_p jeho potenciální energie rovna

$$\Delta E_\mathrm{p} = E_{\mathrm{p,f}} - E_{\mathrm{p,i}} = -W, \tag{25.1}$$

kde W je práce vykonaná polem při přemístění náboje z bodu (i) do bodu (f). Jestliže nulovou hodnotu potenciální energie zvolíme v nekonečnu, pak *elektrická potenciální energie* E_p náboje v uvažovaném bodě pole bude rovna

$$E_\mathrm{p} = -W_\infty. \tag{25.2}$$

Veličina W_∞ znamená práci vykonanou elektrickým polem při přemístění bodového náboje z nekonečna do daného bodu.

Napětí a potenciál

Napětí U neboli rozdíl potenciálů $\Delta\varphi$ mezi dvěma body pole je definováno vztahem

$$U = \Delta\varphi = \varphi_\mathrm{f} - \varphi_\mathrm{i} = -\frac{W}{Q}, \tag{25.7}$$

kde Q je náboj testovací částice, při jejímž přemístění vykoná elektrické pole práci W. *Elektrický potenciál* v libovolném bodě pole je roven

$$\varphi = -\frac{W_\infty}{Q}. \tag{25.8}$$

V soustavě SI je jednotka potenciálu i napětí *volt*: $1\ \mathrm{V} = 1\ \mathrm{J{\cdot}C^{-1}}$.

Potenciál a napětí mohou být vyjádřeny také pomocí potenciální energie E_p, kterou by měla částice s nábojem Q v uvažovaném místě elektrického pole:

$$\varphi = \frac{E_\mathrm{p}}{Q}, \tag{25.5}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_\mathrm{f} - \varphi_\mathrm{i} = \frac{E_{\mathrm{p,f}}}{Q} - \frac{E_{\mathrm{p,i}}}{Q} = \frac{\Delta E_\mathrm{p}}{Q}. \tag{25.6}$$

Ekvipotenciální plochy

Všechny body na *ekvipotenciální ploše* mají stejný potenciál. Ani práce W_ext vykonaná vnější silou, ani práce W vykonaná elektrickým polem při přemístění testovací částice s nábojem Q z jedné ekvipotenciální plochy na jinou není závislá na poloze

počátečního ani koncového bodu na těchto plochách, ani na trajektorii (tj. na její délce a tvaru) spojující počáteční a koncový bod a je rovna $W_{\text{ext}} = -W = Q(\varphi_{\text{f}} - \varphi_{\text{i}})$. Intenzita $\boldsymbol{E}$ je vždy kolmá k ekvipotenciálním plochám.

Výpočet potenciálu φ ze zadané intenzity pole $\boldsymbol{E}$

Rozdíl hodnot potenciálů (tj. napětí) mezi libovolnými dvěma body je určen vztahem

$$\varphi_{\text{f}} - \varphi_{\text{i}} = -\int_{\text{i}}^{\text{f}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{25.18}$$

v němž křivkový integrál počítáme podél libovolné křivky spojující oba zmíněné body. Jestliže zvolíme $\varphi_{\text{i}} = 0$, dostaneme vztah pro potenciál v bodě (f)

$$\varphi = -\int_{\text{i}}^{\text{f}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{25.19}$$

Potenciál soustavy bodových nábojů

Elektrický potenciál bodového náboje Q ve vzdálenosti r od něj je roven

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}. \tag{25.26}$$

Potenciál φ má stejné znaménko jako náboj Q. Potenciál pole vyvolaného soustavou nábojů je součtem potenciálů dílčích polí:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{r_i}. \tag{25.27}$$

Potenciál elektrického dipólu

Ve velké vzdálenosti $r \gg d$ od dipólu s dipólovým momentem $p = Qd$ je potenciál roven

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}. \tag{25.30}$$

Význam úhlu θ je zřejmý z obr. 25.11.

Potenciál spojitě rozloženého náboje

Při spojitě rozloženém náboji má rov. (25.27) tvar

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}Q}{r}. \tag{25.32}$$

Integrál v této rovnici zahrnuje všechny náboje dané soustavy.

Výpočet intenzity pole $\boldsymbol{E}$ ze zadaného potenciálu φ

Složka E_s vektoru intenzity $\boldsymbol{E}$ v libovolném směru $\boldsymbol{s}$ je rovna

$$E_s = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}. \tag{25.40}$$

Pravoúhlé složky vektoru intenzity E_x, E_y, E_z můžeme vypočítat takto:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{25.41}$$

Je-li elektrické pole homogenní, lze rov. (25.40) použít i pro změny konečné. Volíme-li $\Delta\boldsymbol{s}$ kolmo k ekvipotenciální ploše ve směru poklesu potenciálu φ, platí

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \tag{25.42}$$

pro velikost vektoru $\boldsymbol{E}$. Intenzita pole je k ekvipotenciální ploše kolmá; její složka rovnoběžná s ekvipotenciální plochou je tedy nulová.

Potenciální energie soustavy bodových nábojů

Potenciální energie soustavy bodových nábojů se rovná práci potřebné na vytvoření této konfigurace nábojů z nábojů, které byly původně v nekonečnu (tj. v klidu a tak daleko od sebe, abychom mohli jejich vzájemné působení zanedbat). Pro dva náboje ve vzájemné vzdálenosti r je potenciální energie rovna

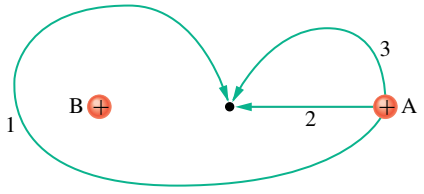
$$E_{\text{p}} = W_{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r}. \tag{25.43}$$

Potenciál nabitého vodiče

Elektrický náboj přenesený na vodič bude v rovnovážném stavu rozložen výhradně po povrchu vodiče s proměnnou plošnou hustotou. Rozloží se tak, že celý vodič (povrch i vnitřek) má týž potenciál. Plošná hustota náboje je největší v místech s velkým zakřivením (hrany, hroty). Elektrická intenzita vně vodiče je v těchto místech rovněž největší, uvnitř vodiče je nulová.

OTÁZKY

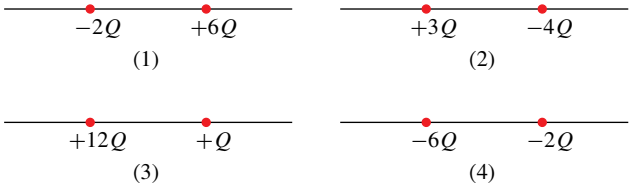
1. Obr. 25.22 znázorňuje tři trajektorie, po kterých můžeme přemístit kladně nabitou kouli A blíž k nepohyblivé kladně nabité kouli B. (a) Bude koule A přemístěna na místo s vyšším, nebo nižším potenciálem? Je práce vykonaná (b) naší (tj. vnější) silou, (c) silou elektrického pole (vyvolaného nabitou koulí B) kladná, záporná, nebo nulová? (d) Seřaďte znázorněné trajektorie sestupně podle velikosti práce vykonané naší silou.



Obr. 25.22 Otázka 1

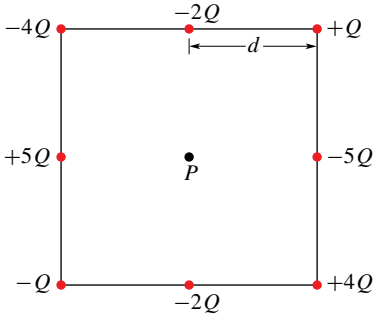
2. (a) Stoupá hodnota potenciálu elektrického pole, které je znázorněné na obr. 25.3a, směrem vpravo, nebo směrem vlevo? (b) Určete potenciál levé krajní plochy, jestliže se sousední znázorněné ekvipotenciální plochy liší o 10 V a pravá krajní plocha má potenciál −100 V. Jestliže přemístíme elektron směrem vpravo, je práce takto vykonaná (c) naší silou, (d) silou elektrického pole, kladná, nebo záporná?

3. Obr. 25.23 zobrazuje čtyři dvojice nabitých částic. Nechť $\varphi = 0$ v nekonečnu. Pro které dvojice těchto částic má jejich potenciál rovněž nulovou hodnotu v některých jiných bodech na jejich spojnici, a to (a) mezi částicemi, (b) vpravo od nich? (c) Jestliže takový bod existuje, má v něm intenzita pole také nulovou hodnotu? (d) Pro kterou dvojici nabitých částic existují body ležící mimo osu, v nichž je $\varphi = 0$ (samozřejmě mimo body ležící v nekonečnu)?



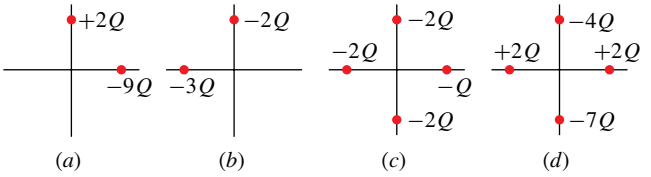
Obr. 25.23 Otázky 3 a 14

4. Obr. 25.24 ukazuje nabité částice na obvodu čtverce. Vzdálenost mezi sousedními částicemi je d. Jaký je potenciál ve středu P čtverce, jestliže nulovou hodnotu potenciálu jsme zvolili v nekonečnu?



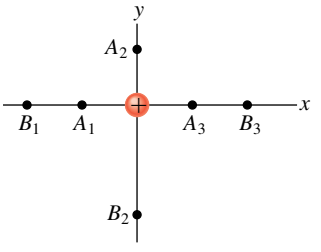
Obr. 25.24 Otázka 4

5. Obr. 25.25 znázorňuje čtyři různé konfigurace nabitých částic, přičemž všechny částice jsou stejně daleko od počátku souřadnic. Seřaďte tyto konfigurace sestupně podle hodnoty potenciálu v počátku souřadnic. Nulovou hodnotu potenciálu zvolte v nekonečnu.



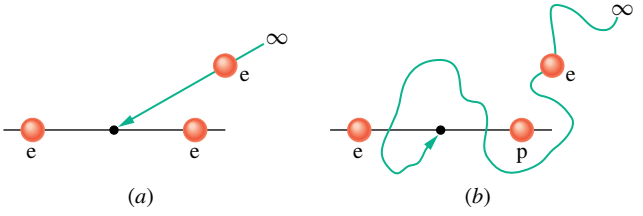
Obr. 25.25 Otázka 5

6. Na obr. 25.26 je zobrazen proton, nacházející se v počátku souřadnic, a tři možné polohy bodu A ve vzdálenosti r od počátku a tři možné polohy bodu B ve vzdálenosti $2r$ od počátku. Existuje devět různých způsobů, jak vybrat dvojici bodů A a B. Seřaďte těchto devět možných výběrů sestupně podle rozdílu potenciálů $\varphi_A - \varphi_B$ mezi body A a B.



Obr. 25.26 Otázka 6

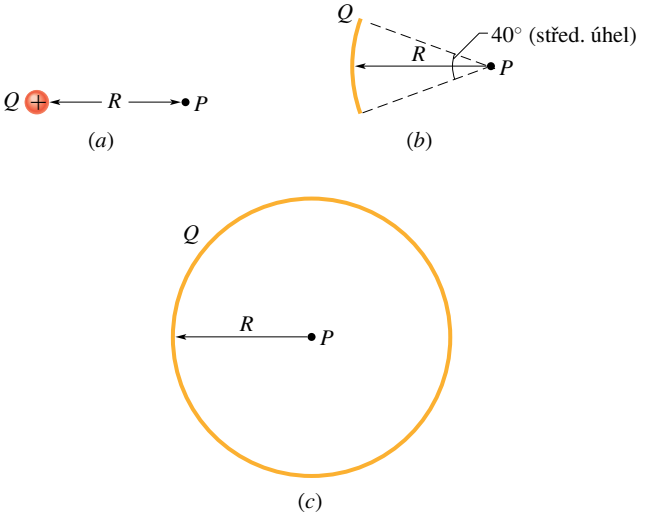
7. Obr. 25.27 znázorňuje dvě situace, v nichž přemísťujeme elektron z nekonečné vzdálenosti do bodu uprostřed spojnice dvou nepohyblivých nabitých částic (mezi dva elektrony, resp. mezi elektron a proton). V obou případech určete, zda práce vykonaná při přemístění elektronu silou elektrického pole nepohyblivých částic je kladná, záporná, nebo nulová.



Obr. 25.27 Otázka 7

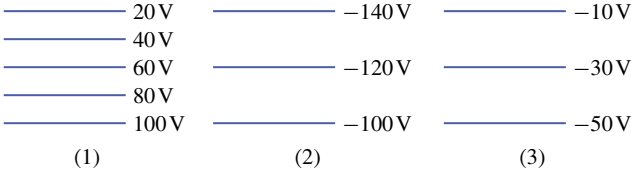
8. (a) Určete potenciál v bodě P elektrického pole buzeného bodovým nábojem Q umístěným ve vzdálenosti R od bodu P

(obr. 25.28a). Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu. (b) Na obr. 25.28b je tentýž náboj Q rovnoměrně rozložen na kruhovém oblouku o poloměru R se středovým úhlem 40°. Vypočítejte hodnotu elektrického potenciálu v bodě P, tj. ve středu kruhového oblouku. (c) Na obr. 25.28c je tentýž náboj Q rovnoměrně rozložen na kružnici o poloměru R. Jaká je hodnota elektrického potenciálu v bodě P ve středu kružnice? (d) Seřaďte tyto tři situace sestupně podle velikosti intenzity elektrického pole v bodě P.



Obr. 25.28 Otázka 8

9. Obr. 25.29 ukazuje tři skupiny ekvipotenciálních ploch v příčném řezu. Všechny tři řezy pokrývají prostorově stejně velikou oblast. (a) Seřaďte uvedené skupiny sestupně podle velikostí intenzit elektrických polí. (b) Ve kterém poli směřuje vektor intenzity dolů?



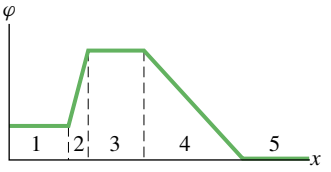
Obr. 25.29 Otázka 9

10. Potenciál elektrického pole je určen (v jednotkách SI) vztahem $\varphi = 2x - 3y + 4z$. Seřaďte složky vektoru intenzity elektrického pole E_x, E_y, E_z v bodě o souřadnicích $x = 2\,\text{m}, y = 0{,}5\,\text{m}$, $z = 0{,}2\,\text{m}$ sestupně podle jejich velikostí.

11. Je velikost intenzity E elektrického pole znázorněného na obr. 25.2 větší na levé, či pravé straně?

12. Obr. 25.30 znázorňuje průběh elektrického potenciálu jako funkci vzdálenosti v pěti intervalech na ose x. (a) Seřaďte tyto intervaly sestupně podle velikosti x-ové složky elektrické intenzity v příslušném intervalu. Jaký je směr intenzity (b) v intervalu 2 a (c) v intervalu 4?

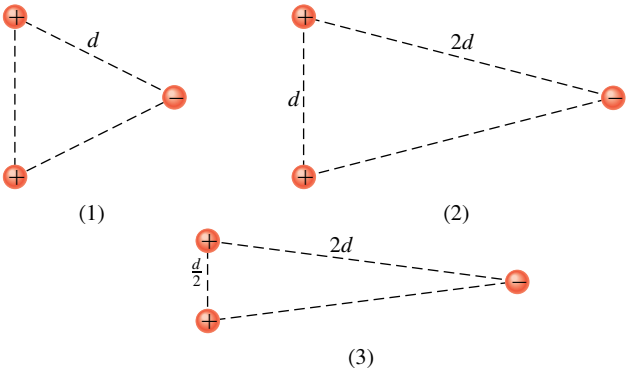
13. Seřaďte uspořádání v kontrole 4 sestupně podle velikosti elektrické potenciální energie systému.



Obr. 25.30 Otázka 12

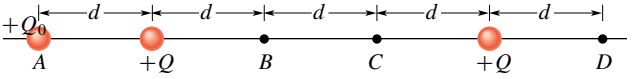
14. Obr. 25.23 ukazuje čtyři páry nabitých částic ve stejných vzájemných vzdálenostech. (a) Seřaďte tyto páry sestupně podle velikosti jejich potenciální energie. (b) U každé dvojice určete, zda její potenciální energie stoupne, nebo klesne, když vzdálenost mezi částicemi vzroste.

15. Obr. 25.31 zobrazuje částice s náboji $+Q$ a $-Q$ ležící ve vrcholech (1) rovnostranného trojúhelníku, (2), (3) rovnoramenného trojúhelníku. (a) Seřaďte tyto konfigurace sestupně podle jejich elektrické potenciální energie. (b) Jak velikou práci bychom museli vykonat, abychom vytvořili konfiguraci (2), jestliže částice byly zpočátku v nekonečnu?



Obr. 25.31 Otázka 15

16. Obr. 25.32 ukazuje soustavu tří nabitých částic. V ní přemístíme částici s nábojem $+Q$ z bodu A do bodu D. Rozhodněte, zda následující veličiny jsou kladné, záporné, nebo nulové: (a) Změna potenciální energie soustavy. (b) Práce vykonaná silou celkového elektrického pole při přemístění částice. (c) Práce vykonaná naší (tj. vnější) silou při přemístění částice. (d) Jaké budou odpovědi (a) až (c), kdyby náboj Q_0 byl původně v bodě B a poté byl přemístěn do bodu C?



Obr. 25.32 Otázka 16 a 17

17. Uvažujme opět o situaci z otázky 16. Je práce vykonaná vnější silou kladná, záporná, nebo nulová, jestliže přemístění proběhne (a) z bodu A do bodu B, (b) z bodu A do bodu C, (c) z bodu B do bodu D? (d) Seřaďte tato přemístění sestupně podle velikosti vykonané práce.

18. Kdyby α-částice z př. 25.9 měla menší počáteční energii než vypočítaných 24,6 MeV, odrazila by se od jádra dále, blíže, nebo

ve stejné vzdálenosti 9,23 fm? (Opět neuvažujte silnou interakci mezi α-částicí a atomovým jádrem.)

19. (a) Povrch nabitého vodiče je ekvipotenciální plochou. Znamená to, že elektrický náboj je na něm rozložen rovnoměrně? (b) Jestliže blízko nad povrchem nabitého vodiče má intenzita elektrického pole konstantní velikost, znamená to, že elektrický náboj je rozložen po povrchu vodiče rovnoměrně?

20. Zjistili jsme, že vnitřek dutého vodiče je odstíněn od elektrických polí vnějších elektrických nábojů. Budeme odstíněni od vlivu elektrického pole také v tom případě, jestliže budeme *vně* dutého vodiče, v jehož dutině jsou elektrické náboje?

21. Mohou se dvě ekvipotenciální plochy rozdílných potenciálů protínat? Odpověď zdůvodněte.

22. Vodivá dutá osamocená koule má kladný náboj (1) Q, (2) $2Q$, (3) $3Q$. Seřaďte tyto případy sestupně podle velikosti následujících veličin: (a) potenciálu na povrchu koule, (b) potenciálu ve středu koule, (c) velikosti intenzity na povrchu, (d) velikosti intenzity ve středu koule. Nulovou hodnotu potenciálu zvolte v nekonečnu.

23. Zopakujte otázku 22, avšak nulovou hodnotu elektrického potenciálu zvolte vždy ve středu koule.

24. Částice A o hmotnosti m a s nábojem $+Q$ a částice B o hmotnosti m a s nábojem $-Q$ jsou zpočátku v klidu ve vzdálenosti d. V situaci č. 1 obě částice současně uvolníme. V situaci č. 2 uvolníme pouze částici A. Ve které z těchto dvou situací bude mít částice A větší kinetickou energii v okamžiku, kdy vzdálenost mezi částicemi klesne na polovinu? Nebo částice A získá v obou případech stejnou kinetickou energii?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 25.2 Elektrický potenciál, napětí

1C. Napětí mezi Zemí a mrakem při místní bouřce je $1{,}2\cdot10^9$ V. O kolik eV se změní energie elektronu, který přeletěl mezi Zemí a mrakem?

2C. Automobilová baterie 12 V může dodat celkový náboj 84 A·h (ampérhodin) do elektrického obvodu automobilu. (a) Jak velký je tento náboj v coulombech? (b) Jak velká energie je nahromaděna v baterii?

3Ú. Při blesku je napětí mezi mrakem a zemí $1{,}0\cdot10^9$ V a přenesený náboj 30 C. (a) Jak se výbojem změní potenciální energie přeneseného náboje? (b) Kdyby všechna energie uvolněná při tomto přenosu mohla být použita k urychlení automobilu o hmotnosti 1 000 kg z klidu, jak velké rychlosti by dosáhl? (Všechny ztráty energie zanedbejte.) (c) Kdyby tato energie mohla být použita k rozpuštění ledu, kolik ledu teploty 0 °C by se rozpustilo na vodu téže teploty? Měrné skupenské teplo tání ledu je $3{,}33\cdot10^5$ J·kg^{-1}.

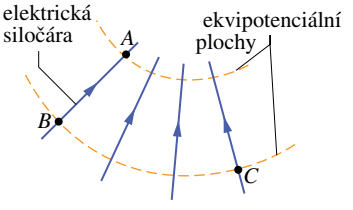
ODST. 25.4 Výpočet potenciálu ze zadané intenzity elektrického pole

4C. Dvě tenká nekonečná vlákna jsou rovnoběžná s osou z a leží symetricky k ní ve vzdálenosti a. Vlákno vpravo je nabito s délkovou hustotou náboje τ, vlákno vlevo s hustotou $-\tau$. Načrtněte několik ekvipotenciálních ploch jejich pole.

5C. Při Millikanově pokusu s mikroskopickou olejovou kapičkou (čl. 23.8) je v prostoru mezi dvěmi elektrodami, vzdálenými 1,50 cm, udržováno elektrické pole o intenzitě $1{,}92\cdot10^5$ N·C^{-1}. Určete napětí mezi elektrodami.

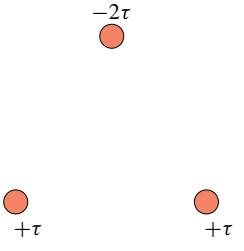
6C. Jestliže se elektron pohybuje podél elektrické siločáry z bodu A do bodu B podle obr. 25.33, vykonají síly elektrického pole práci $3{,}94\cdot10^{-19}$ J. Jak velké jsou rozdíly potenciálů (a) $\varphi_B - \varphi_A$, (b) $\varphi_C - \varphi_A$, (c) $\varphi_C - \varphi_B$?

7C. Na obr. 25.34 jsou tři vzájemně rovnoběžná vlákna, kolmá



Obr. 25.33 Cvičení 6

k nákresné rovině, nabitá s uvedenými délkovými hustotami náboje. Načrtněte několik elektrických siločár a několik ekvipotenciálních čar (tj. průsečnic ekvipotenciálních ploch s nákresnou).

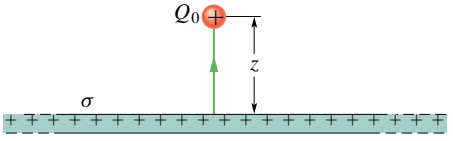


Obr. 25.34 Cvičení 7

8C. Dvě velké vodivé a rovnoběžné desky jsou vzdáleny 12 cm od sebe a nesou na plochách k sobě přivrácených stejně velké elektrické náboje opačných znamének. Na elektron mezi těmito deskami (daleko od jejich okrajů) působí elektrostatická síla o velikosti $3{,}9\cdot10^{-15}$ N. (a) Vypočítejte intenzitu elektrického pole v místě, kde je elektron. (b) Jak velké je napětí mezi deskami?

9C. Nekonečně velká nevodivá vrstva je po jedné straně nabita elektrickým nábojem s plošnou hustotou $\sigma = 0{,}10\,\mu$C·m^{-2}. Jak daleko od ní se nachází ekvipotenciální plocha mající potenciál o 50 V nižší?

10Ú. Na obr. 25.35 je znázorněn boční pohled na nekonečně velkou nevodivou vrstvu nabitou rovnoměrně po jedné straně s plošnou hustotou σ. (a) Jak velikou práci vykonají síly pole při přemístění malého testovacího náboje Q_0 z počáteční polohy na vrstvě do koncové polohy ve vzdálenosti z od ní? (b) Použijte rov. (25.18) a výsledku z části (a) této úlohy a dokažte, že potenciál nekonečně velké nabité vrstvy je dán vztahem $\varphi = \varphi_0 - \sigma z/(2\varepsilon_0)$, kde φ_0 je potenciál nabitého povrchu.



Obr. 25.35 Úloha 10

11Ú. Součástí Geigerova počítače je plášť dutého kovového válce o vnitřním průměru 2,00 cm, v jehož ose leží drát o průměru $1{,}30\cdot10^{-4}$ cm. Určete velikost intenzity elektrického pole na povrchu (a) drátu, (b) pláště válce, je-li napětí mezi drátem a pláštěm 850 V. (*Tip*: Použijte výsledku úlohy 29 v kap. 24.)

12Ú. Uvnitř nevodivé koule poloměru R, homogenně elektricky nabité v celém objemu, má intenzita elektrického pole radiální směr a její velikost je

$$E(r) = \frac{|Q|r}{4\pi\varepsilon_0 R^3},$$

kde Q značí celkový náboj koule (kladný nebo záporný) a r je vzdálenost od středu koule. (a) Zvolte $\varphi = 0$ ve středu koule a určete potenciál $\varphi(r)$ uvnitř koule. (b) Jaké je napětí mezi povrchem koule a jejím středem? (c) Ve kterém z předešlých dvou bodů je potenciál vyšší, je-li náboj Q kladný?

13Ú*. Náboj Q je rovnoměrně rozložen v celém objemu koule o poloměru R. (a) Dokažte, že při volbě $\varphi = 0$ v nekonečnu je potenciál ve vzdálenosti $r < R$ od středu koule roven

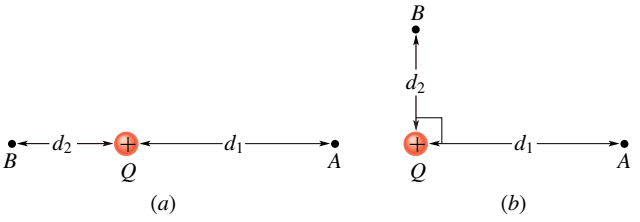
$$\varphi = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

(*Tip*: Viz př. 24.7.) (b) Proč se tento výsledek liší od výsledku úlohy 12a? (c) Jak velké je napětí mezi povrchem a středem koule? (d) Proč se tento výsledek neliší od výsledku úlohy 12b?

14Ú*. Tlustá kulová slupka s vnitřním poloměrem r_1 a vnějším r_2 je nabita nábojem Q rovnoměrně rozloženým v celém jejím objemu s hustotou ϱ. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete elektrický potenciál $\varphi(r)$ jako funkci vzdálenosti r od středu kulové slupky. Uvažujte samostatně oblasti: (a) $r > r_2$, (b) $r_2 > r > r_1$, (c) $r < r_1$. (d) Shodují se dílčí řešení v bodech $r = r_2$, resp. $r = r_1$? (*Tip*: Viz př. 24.7.)

ODST. 25.6 Potenciál soustavy bodových nábojů

15C. Na obr. 25.36 je bodový náboj $Q = 1{,}0\,\mu$C. Ve vzdálenosti $d_1 = 2{,}0$ m napravo od něj je bod A a ve dvou různých polohách ve vzdálenosti $d_2 = 1{,}0$ m od náboje je bod B. Určete rozdíl potenciálů $\varphi_A - \varphi_B$, jsou-li body A, B umístěny (a) podle obr. 25.36a, (b) podle obr. 25.36b.



Obr. 25.36 Cvičení 15

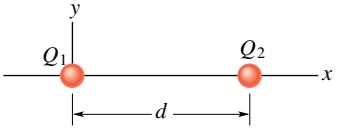
16C. Uvažujme osamocený bodový náboj $Q = 1{,}5\cdot10^{-8}$ C a zvolme $\varphi = 0$ v nekonečnu. (a) Jaký tvar a rozměry má ekvipotenciální plocha s potenciálem 30 V? (b) Mají ekvipotenciální plochy, jejichž potenciály se liší o konstantní hodnotu (řekněme o 1,0 V), mezi sebou stále stejnou vzdálenost?

17C. Náboj $1{,}50\cdot10^{-8}$ C je rozložen na izolované kovové kouli o poloměru 16,0 cm. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete potenciál na povrchu koule.

18C. Když se umělá družice Země pohybuje zředěným ionizovaným plynem zemské atmosféry, změní se její elektrický potenciál během jednoho oběhu o $-1{,}0$ V. Předpokládejte, že družice má kulový tvar poloměru 10 m. Odhadněte množství náboje, které během jednoho oběhu nasbírá.

19C. Většinu materiálu, z něhož jsou Saturnovy prstence, tvoří drobná prachová zrnka o poloměrech řádově 10^{-6} m. Ta se nacházejí v oblasti obsahující ionizovaný plyn a nabírají na sebe volné elektrony. Předpokládejte, že každé zrnko má tvar kuličky o poloměru $R = 1{,}0\cdot10^{-6}$ m. Kolik elektronů musí jedno zrnko prachu na sebe nasbírat, aby se nabilo na -400 V? (Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.)

20C. Na obr. 25.37 jsou dvě elektricky nabité částice nacházející se na ose x. Načrtněte siločáry a ekvipotenciální křivky (tj. průsečnice ekvipotenciálních ploch s nákresnou), jestliže (a) $Q_1 = +Q$ a $Q_2 = +2Q$, (b) $Q_1 = +Q$ a $Q_2 = -3Q$.



Obr. 25.37 Cvičení 20 až 23

21C. Částice na obr. 25.37 mají náboje $Q_1 = +Q$ a $Q_2 = -3Q$. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete na ose x všechny body, v nichž je potenciál jimi vytvořeného elektrického pole roven nule.

22C. Vzdálenost mezi částicemi na obr. 25.37 je 1,0 m a jejich náboje jsou $Q_1 = +Q$ a $Q_2 = +2Q$. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu. Určete body na ose x (jsou-li jinde než v nekonečnu), v nichž má nulovou hodnotu (a) potenciál, (b) elektrická intenzita.

23C. Dvě částice s náboji Q_1 a Q_2 (obr. 25.37) mají vzdálenost d. Intenzita jejich výsledného elektrického pole je nulová

v bodě $x = d/4$. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete body na ose x (jinde než v nekonečnu), v nichž je potenciál nulový.

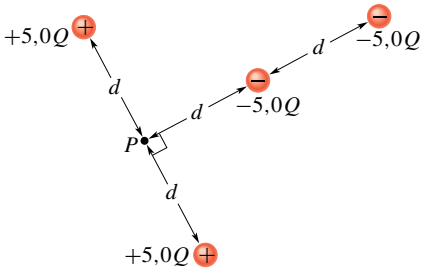
24C. (a) Osamocená vodivá koule o poloměru 10 cm je nabita nábojem 4,0 μC. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete potenciál na povrchu této koule. (b) Může tato situace skutečně nastat, víme-li, že ve vzduchu obklopujícím kouli dojde k elektrickému výboji, jakmile elektrická intenzita překročí hodnotu $3{,}0\,\mathrm{MV\cdot m^{-1}}$?

25Ú. Jak velký je (a) úhrnný elektrický náboj, (b) hustota náboje na povrchu vodivé koule o poloměru 0,15 m, je-li její potenciál vzhledem k nekonečnu 200 V?

26Ú. Kulová kapka vody nesoucí náboj 30 pC má potenciál 500 V vzhledem k nekonečnu. (a) Jaký má kapka poloměr? (b) Jestliže dvě stejně velké kapky se stejným nábojem splynou, vytvoří jednu větší. Jaký bude mít potenciál?

27Ú. V blízkosti Země je elektrická intenzita zhruba $100\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$. Jak velký potenciál by měl povrch Země, jestliže by pole o této intenzitě bylo nad celým jejím povrchem? (Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.)

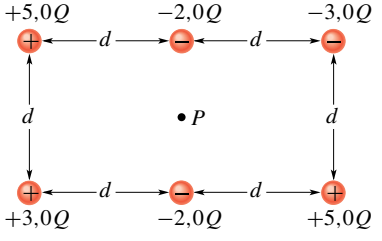
28Ú. Jaký potenciál v bodě P budí soustava čtyř bodových nábojů podle obr. 25.38? Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.



Obr. 25.38 Úloha 28

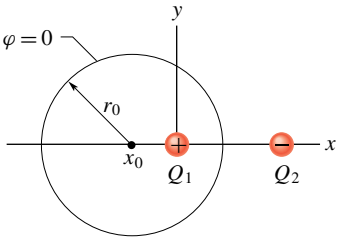
29Ú. Představte si, že záporný náboj z mince podle př. 22.4 jsme přemístili daleko od Země — třeba do některé vzdálené galaxie — a že zbylý kladný náboj se rozložil rovnoměrně po zemském povrchu. O kolik by se tím změnil jeho elektrický potenciál?

30Ú. Bod P je střed obdélníku. Jaký potenciál v něm budí soustava šesti nábojů podle obr. 25.39? Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.



Obr. 25.39 Úloha 30

31Ú. Bodový náboj $Q_1 = +6{,}0e$ leží v počátku pravoúhlého souřadnicového systému a druhý náboj $Q_2 = -10e$ má souřadnice $x = 8{,}6$ nm a $y = 0$. Všechny body v rovině xy, v nichž $\varphi = 0$ (neuvažujeme body v nekonečnu), tvoří kružnici se středem v bodě x_0 na ose x a s poloměrem r_0 (obr. 25.40). Vypočtěte (a) x_0, (b) r_0. (c) Leží body roviny xy s potenciálem 5 V také na kružnici?



Obr. 25.40 Úloha 31

32Ú. Plná měděná koule o poloměru 1,0 cm je tence poniklována. Některé atomy niklu jsou radioaktivní a při rozpadu uvolňují po jednom elektronu. Polovina takto uvolněných elektronů vletí do měděné koule a každý z nich přinese do koule energii 100 keV. Druhá polovina elektronů unikne a každý z nich odnáší náboj $-e$. Niklový plášť vykazuje aktivitu $3{,}70\cdot10^{8}$ Bq. (Jednotka *becquerel* je jednotkou aktivity radioaktivních látek; 1 Bq je aktivita takového preparátu, v němž nastává v průměru jeden radioaktivní rozpad za sekundu.) Koule je zavěšena na dlouhém, nevodivém vlákně a je izolována od svého okolí. (a) Za jak dlouho stoupne její potenciál o 1 000 V? (b) Za jak dlouho stoupne její teplota o 5,0 K? Tepelná kapacita koule je $14{,}3\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$.

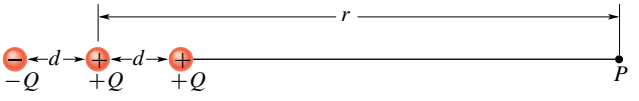
ODST. 25.7 Potenciál elektrického pole dipólu

33C. Molekula čpavku NH_3 má stálý elektrický dipólový moment o velikosti 1,47 D, kde příležitostně používaná jednotka *debye* má hodnotu $1\ \mathrm{D} = 3{,}34\cdot10^{-30}$ C·m. Vypočítejte potenciál molekuly v bodě na ose dipólu ve vzdálenosti 52,0 nm od jejího středu. (Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.)

34Ú. Dokažte, že potenciál $\varphi(r)$ tří nábojů ležících na přímce podle obr. 25.41 je v dostatečně vzdálených bodech $r \gg d$ dán vztahem

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}\left(1 + \frac{2d}{r}\right).$$

(*Tip*: Dané uspořádání lze považovat za soustavu tvořenou bodovým nábojem a elektrickým dipólem.)

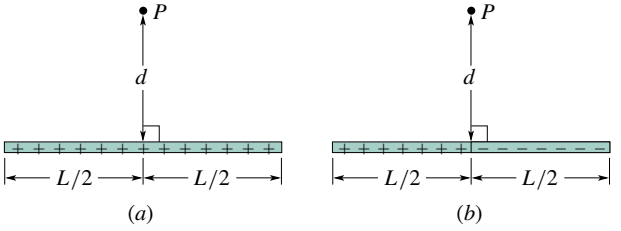


Obr. 25.41 Úloha 34

ODST. 25.8 Potenciál spojitě rozloženého náboje

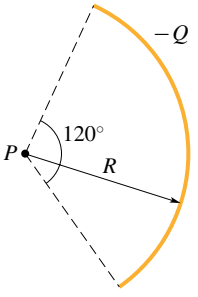
35C. (a) Obr. 25.42a znázorňuje nevodivou tyč délky L, která je rovnoměrně nabitá kladným nábojem s délkovou hustotou τ. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a vezměte v úvahu obr. 25.13 a rov. (25.35). Určete potenciál v bodě P. (b) Tyč na obr. 25.42b

se od předchozí liší jen tím, že její pravá polovina má náboj záporný. Jaký bude nyní potenciál v bodě P na obr. 25.42b? Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.



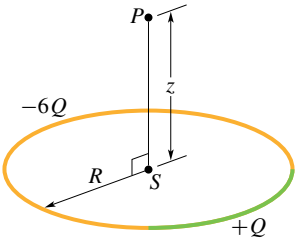
Obr. 25.42 Cvičení 35

36C. Plastiková tyč na obr. 25.43, nesoucí rovnoměrně rozložený elektrický náboj $-Q$, má tvar kruhového oblouku o poloměru R se středovým úhlem 120°. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete potenciál ve středu P kruhového oblouku.



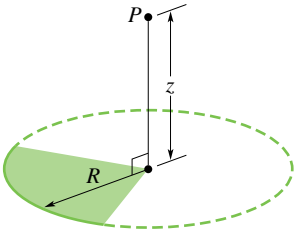
Obr. 25.43
Cvičení 36

37C. Tyč z plastu, stočená do tvaru kružnice o poloměru R, nese kladný náboj $+Q$ rovnoměrně rozložený na jedné čtvrtině obvodu a záporný náboj $-6Q$ rovnoměrně rozložený na zbytku kružnice (obr. 25.44). Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a vypočítejte hodnotu potenciálu (a) ve středu S kružnice, (b) v bodě P na ose symetrie kružnice kolmé k její rovině ve vzdálenosti z od jejího středu.



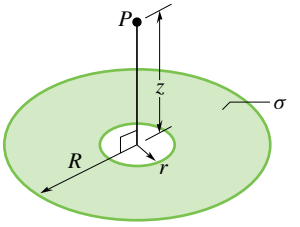
Obr. 25.44
Cvičení 37

38C. Disk z nevodivého plastu byl nabit s konstantní plošnou hustotou σ. Poté byly tři kvadranty disku odstraněny. Zbývající čtvrtina disku je zobrazena na obr. 25.45. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete potenciál v bodě P, který leží na ose disku ve vzdálenosti z od jeho středu.



Obr. 25.45
Cvičení 38

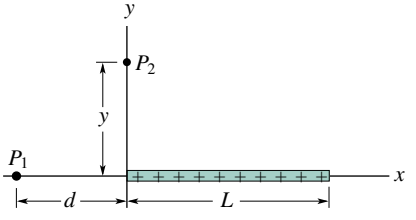
39Ú. Na obr. 25.46 je plochý prstenec o vnějším poloměru R a vnitřním poloměru $r = 0{,}200R$, na němž je rozložen elektrický náboj s konstantní plošnou hustotou σ. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete potenciál v bodě P na ose prstence ve vzdálenosti $z = 2{,}00R$ od jeho středu.



Obr. 25.46
Úloha 39

40Ú. Disk o poloměru $R = 2{,}20\,\text{cm}$ je nabit od svého středu $r = 0$ až do vzdálenosti $r = R/2$ s konstantní plošnou hustotou náboje $1{,}50{\cdot}10^{-6}\,\text{C}{\cdot}\text{m}^{-2}$ a od $r = R/2$ až do $r = R$ s konstantní hustotou $8{,}00{\cdot}10^{-7}\,\text{C}{\cdot}\text{m}^{-2}$. (a) Jaký je úhrnný náboj disku? (b) Jaký je potenciál na ose disku ve vzdálenosti $z = R/2$ od jeho středu, jestliže zvolíme $\varphi = 0$ v nekonečnu?

41Ú. Na obr. 25.47 je plastová tyč délky L, ležící v ose x, rovnoměrně nabitá kladným elektrickým nábojem Q. Je-li $\varphi = 0$ v nekonečnu, vypočítejte potenciál v bodě P_1.



Obr. 25.47 Úlohy 41, 42, 50 a 51

42Ú. Plastová tyč na obr. 25.47 má délku L a je nerovnoměrně nabitá s délkovou hustotou náboje $\tau = cx$, kde c je kladná konstanta. Je-li $\varphi = 0$ v nekonečnu, určete potenciál v bodě P_1.

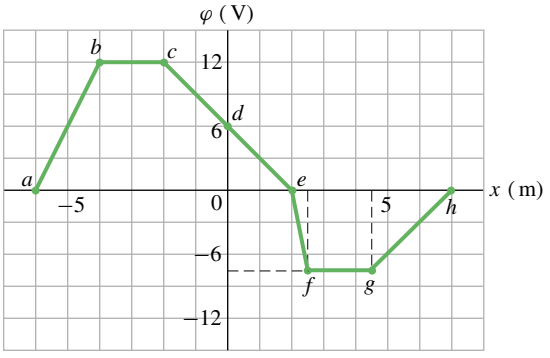
ODST. 25.9 Výpočet intenzity ze zadaného potenciálu

43C. Dvě velké rovnoběžné kovové desky jsou vzdálené 1,5 cm. Na stranách k sobě přivrácených jsou nabity stejně velkými náboji s opačnými znaménky. Na záporně nabité desce zvolte $\varphi = 0$. Určete intenzitu pole mezi deskami, víte-li, že potenciál uprostřed vzdálenosti mezi deskami je $+5{,}0\,\text{V}$.

44C. Graf na obr. 25.48 znázorňuje průběh potenciálu podél osy x. Určete hodnotu složky E_x elektrické intenzity a zakreslete ji do grafu. (Nezabývejte se chováním E_x v hraničních bodech dílčích intervalů.)

45C. Vyjděte z rov. (25.30) a určete intenzitu pole dipólu v obecném bodě na jeho ose.

46C. Elektrický potenciál v bodech roviny xy je určen vztahem $\varphi = (2{,}0\,\text{V}{\cdot}\text{m}^{-2})x^2 - (3{,}0\,\text{V}{\cdot}\text{m}^{-2})y^2$. Jaká je velikost a směr intenzity pole v bodě (3,0 m; 2,0 m)?



Obr. 25.48 Cvičení 44

47C. V prostoru mezi rovnoběžnými rovinnými deskami je elektrický potenciál určen vztahem $\varphi = 1\,500x^2$, kde x je vzdálenost od jedné z desek (vše v jednotkách SI). Vypočítejte velikost a určete směr intenzity elektrického pole v bodě $x = 1{,}3$ cm.

48C. V kap. 24 pojednává cvič. 48 o Rutherfordově výpočtu intenzity elektrického pole uvnitř atomu. Rutherford navrhl potenciál uvnitř atomu ve tvaru

$$\varphi(r) = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3}\right),$$

kde Ze je náboj jádra a r vzdálenost od středu atomu; předpokládá se, že záporný náboj elektronů je rovnoměrně rozprostřen v celém objemu atomu až do vzdálenosti R. (a) Ukažte, jak z tohoto vztahu vyplývá vztah pro intenzitu elektrického pole, uvedený ve cvič. 48, kap. 24. (b) Proč zde pro $r \to \infty$ neplatí $\varphi \to 0$?

49Ú. (a) Pomocí rov. (25.32) dokažte, že elektrický potenciál v bodě na ose nabitého tenkého prstence poloměru R je ve vzdálenosti z od jeho středu určen vztahem

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{z^2 + R^2}}.$$

(b) Z tohoto výsledku odvoďte vztah pro E v bodech na ose prstence; porovnejte tento výsledek s výsledkem výpočtu E v čl. 23.6.

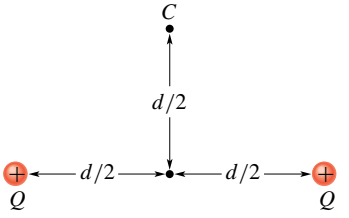
50Ú. (a) Použijte výsledku z úlohy 41 a určete x-ovou složku E_x intenzity elektrického pole v bodě P_1 na obr. 25.47. (*Tip*: Nejprve zaměňte vzdálenost d ve výsledku proměnnou veličinou x.) (b) Využijte symetrie úlohy a určete složku E_y v tomtéž bodě.

51Ú. Nevodivá tyč délky L na obr. 25.47 je nabita s proměnnou délkovou hustotou náboje $\tau = cx$, kde c je kladná konstanta. (a) Je-li $\varphi = 0$ v nekonečnu, určete potenciál v bodě P_2 na ose y. (b) Pomocí tohoto výsledku určete složku E_y intenzity elektrického pole v bodě P_2. (c) Proč nelze při výpočtu E_x v bodě P_2 použít výsledku z části (a) této úlohy?

ODST. 25.10 Elektrická potenciální energie soustavy bodových nábojů

52C. (a) Jakou elektrickou potenciální energii má soustava dvou elektronů vzdálených od sebe 2,00 nm? (b) Vzrůstá, nebo klesá tato energie se zvětšující se vzdáleností elektronů?

53C. Dva nepohyblivé náboje velikosti $Q = +2{,}0\,\mu$C jsou od sebe vzdáleny $d = 2{,}0$ cm (obr. 25.49). (a) Je-li $\varphi = 0$ v nekonečnu, určete hodnotu elektrického potenciálu v bodě C. (b) Přenesme třetí náboj $Q_0 = +2{,}0\,\mu$C z nekonečna do bodu C. Jak velkou práci musíme vykonat? (c) Jak velká je poté elektrická potenciální energie soustavy těchto tří nábojů?

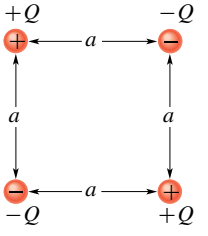


Obr. 25.49 Cvičení 53

54C. Řešte cvič. 53 pro případ, že $Q_0 = -2{,}0\,\mu$C.

55C. Náboj $Q_1 = +3{,}0\cdot10^{-6}$ C leží v bodě (3,50; 0,50; 0) cm, náboj $Q_2 = -4{,}0\cdot10^{-6}$ C v bodě (−2,00; 1,50; 0) cm. Jak velká práce musela být vykonána při jejich přemístění z nekonečna do daných poloh?

56C. Odvoďte vztah pro práci potřebnou na sestavení konfigurace čtyř bodových elektrických nábojů podle obr. 25.50. Předpokládejte, že náboje byly zpočátku v nekonečnu.



Obr. 25.50 Cvičení 56

57C. Podle kvarkového modelu je proton složen ze tří kvarků; ze dvou kvarků „up“, z nichž každý má elektrický náboj $+2e/3$ a z jednoho kvarku „down“ s nábojem $-e/3$. Předpokládejte, že všechny tři kvarky jsou stejně daleko od sebe. Za tuto vzdálenost dosaďte hodnotu $1{,}32\cdot10^{-15}$ m a vypočítejte (a) elektrickou potenciální energii podsystému dvou kvarků „up“, (b) celkovou elektrickou potenciální energii systému všech tří kvarků.

58C. Jakou elektrickou potenciální energii má soustava nábojů na obr. 25.9a? Použijte číselné hodnoty uvedené v př. 25.4.

59Ú. Tři elektrické náboje +0,12 C leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku o délce strany 1,7 m. Kolik dnů by vyžadovalo přemístění jednoho z těchto nábojů do středu úsečky spojující ostatní dva náboje, je-li k dispozici výkon 0,83 kW?

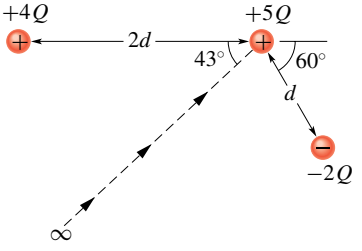
60Ú. Obdélník na obr. 25.51 má strany dlouhé 5,0 cm a 15,0 cm, náboje jsou $Q_1 = -5{,}0\,\mu$C a $Q_2 = +2{,}0\,\mu$C. Jestliže $\varphi = 0$ v nekonečnu, určete hodnotu potenciálu (a) ve vrcholu A, (b) ve vrcholu B. (c) Kolik práce by bylo třeba vykonat na přemístění třetího náboje $Q_3 = +3{,}0\,\mu$C z bodu B do bodu A po úhlopříčce obdélníka? (d) Zvýší, nebo sníží tato práce energii soustavy těchto tří nábojů? Byla by práce vykonaná při přemístění náboje Q_3 větší, menší, nebo stejná, kdyby byl tento náboj

přemísťován (e) vnitřkem obdélníka, ale nikoli po úhlopříčce, (f) vně obdélníka z bodu B do bodu A?



Obr. 25.51
Úloha 60

61Ú. Kolik práce je nutné vynaložit na přenesení elektrického náboje $+5Q$ z nekonečna podél čárkované čáry (obr. 25.52) do místa poblíž dvou pevně umístěných bodových nábojů $+4Q$ a $-2Q$? Položte $d = 1{,}40\,\text{cm}$ a $Q = 1{,}60\cdot10^{-19}\,\text{C}$.



Obr. 25.52
Úloha 61

62Ú. Částice s kladným nábojem Q_0 je upevněna v bodě P. Jiná částice o hmotnosti m se záporným nábojem $-Q$ se pohybuje stále stejně velkou rychlostí po kružnici o poloměru r_1 se středem v bodě P. Odvoďte výraz pro práci W_{ext}, která musí být vykonána vnějším zásahem, aby se poloměr oběžné dráhy druhé částice zvětšil na hodnotu r_2.

63Ú. Vypočítejte (a) potenciál elektrického pole jádra atomu vodíku ve vzdálenosti $r = 5{,}29\cdot10^{-11}\,\text{m}$, kde se elektron nachází s velkou pravděpodobností (viz čl. 40.6), (b) elektrickou potenciální energii atomu, když se elektron nachází v uvedené vzdálenosti, (c) kinetickou energii elektronu, který obíhá po kružnici uvedeného poloměru kolem jádra. (d) Kolik energie je nutné vynaložit na ionizaci atomu vodíku, tzn. na oddálení elektronu od jádra atomu do nekonečna? Vyjádřete všechny hodnoty energie v elektronvoltech.

64Ú. Částice s elektrickým nábojem Q je fixována v bodě P. Jiná částice o hmotnosti m se stejným nábojem Q je nejprve držena ve vzdálenosti r_1 od bodu P a poté uvolněna. Určete velikost rychlosti druhé částice ve vzdálenosti r_2 od bodu P. Nechť $Q = 3{,}1\,\mu\text{C}$, $m = 20\,\text{mg}$, $r_1 = 0{,}90\,\text{mm}$ a $r_2 = 2{,}5\,\text{mm}$.

65Ú. Elektrický náboj $-9{,}0\,\text{nC}$ je rovnoměrně rozložen na prstenci o poloměru $1{,}5\,\text{m}$, který se nachází v rovině yz se středem v počátku O souřadnicového systému. Bodový náboj $-6{,}0\,\text{pC}$ je umístěn na ose x v bodě $x = 3{,}0\,\text{m}$. Vypočítejte práci, kterou vykonáme, přemístíme-li bodový náboj do počátku O.

66Ú. Dvě malé kovové kuličky A a B o hmotnostech $m_\text{A} = 5{,}00\,\text{g}$ a $m_\text{B} = 10{,}0\,\text{g}$ nesou stejně velké kladné elektrické náboje $Q = 5{,}00\,\mu\text{C}$. Jsou spojeny nehmotným a nevodivým vláknem délky $d = 1{,}00\,\text{m}$, které je mnohem delší než poloměry kuliček. (a) Jaká je elektrická potenciální energie systému? (b) Předpokládejte, že vlákno přerušíme. Určete v tomto okamžiku zrychlení každé kuličky. (c) Jakou mají obě kuličky rychlost po uplynutí velmi dlouhé doby od přerušení vlákna?

67Ú. Mezi rovnoběžnými kovovými deskami vzdálenými $d = 1{,}00\,\text{cm}$ je napětí $U = 625\,\text{V}$. Jakou nejmenší rychlostí musíme vystřelit elektron z kladné desky, aby doletěl na zápornou?

68Ú. (a) Proton s kinetickou energií $4{,}80\,\text{MeV}$ letí přímo na střed jádra atomu olova. Předpokládejte, že proton nevnikne do jádra, a uvažujte proto pouze elektrostatickou interakci. Vypočítejte nejmenší vzdálenost od středu jádra, které proton může dosáhnout. (b) Kdyby místo protonu letěla α-částice se stejnou počáteční kinetickou energií, kam nejblíž by se k jádru dostala ve srovnání s protonem z části (a)?

69Ú. Částice o hmotnosti m s kladným elektrickým nábojem Q_0 a počáteční kinetickou energií E_k je vystřelena (z velké vzdálenosti) na střed velmi hmotného atomového jádra majícího elektrický náboj Q. Jádro považujte za nehybné. Jak nejblíže ke středu jádra se částice přiblíží?

70Ú. Tenká vodivá kulová slupka poloměru R je připevněna na izolační podpěru a nabita na potenciál $-\varphi$. Elektron je vystřelen z bodu P ke středu slupky ze vzdálenosti r, kde $r \gg R$. Jakou nejmenší velikost počáteční rychlosti v_0 musí mít elektron, aby se slupky dotkl?

71Ú. Dva elektrony jsou pevně umístěny ve vzdálenosti $2{,}0\,\text{cm}$. Jiný elektron, který byl vystřelen z nekonečné vzdálenosti, se zastavil právě uprostřed spojnice obou elektronů. Jaká byla jeho počáteční rychlost?

72Ú. Uvažujte o elektronu na povrchu koule o poloměru $1{,}0\,\text{cm}$ homogenně nabité celkovým nábojem $1{,}60\cdot10^{-15}\,\text{C}$. Jak velká je jeho *úniková rychlost*? Jinými slovy, jakou nejmenší rychlostí musí vyletět z koule, aby se už nevrátil? (Podobně je v kap. 14 definována úniková rychlost pro únik z gravitačního pole. Zde však gravitační sílu zanedbáme, proč?)

73Ú. Elektron je vystřelen z velké dálky počáteční rychlostí $3{,}2\cdot10^5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ přímo proti protonu, který je pevně vázán v daném místě. Určete, v jaké vzdálenosti od protonu bude rychlost elektronu dvojnásobně velká než jeho rychlost počáteční.

ODST. 25.11 Potenciál nabitého vodiče

74C. Elektrický potenciál duté kovové koule vzhledem k zemi je $+400\,\text{V}$ (při volbě $\varphi = 0$ na zemském povrchu). Celkový náboj koule je $5{,}0\cdot10^{-9}\,\text{C}$. Určete potenciál v jejím středu.

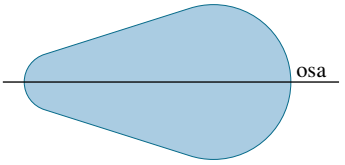
75C. Tenká vodivá kulová vrstva vnějšího poloměru $20\,\text{cm}$ je nabita elektrickým nábojem $+3{,}0\,\mu\text{C}$. Načrtněte graf závislosti (a) velikosti intenzity elektrického pole E a (b) potenciálu φ na vzdálenosti r od středu kulové vrstvy. (Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.)

76C. Jak velkým elektrickým nábojem byla nabita vodivá koule o poloměru $r = 0{,}15\,\text{m}$, jestliže její elektrický potenciál má hodnotu $1\,500\,\text{V}$ vzhledem k nekonečnu?

77C. Uvažujme dvě od sebe velmi vzdálené vodivé koule o poloměrech r_1 a r_2, kde $r_2 = 2r_1$. Menší koule byla na počátku nabita kladným elektrickým nábojem Q; větší zůstala nenabitá.

Představme si, že obě koule spojíme dlouhým tenkým drátem. (a) V jakém vzájemném vztahu budou výsledné elektrické potenciály φ_1 a φ_2 obou koulí? (b) Jaké budou výsledné náboje Q_1 a Q_2 na koulích? (c) Jak velký je poměr výsledných plošných hustot nábojů na obou koulích?

78Ú. Kovový předmět, zobrazený v příčném řezu na obr. 25.53, vznikl rotací kolem osy. Předpokládejte, že je nabit záporně a načrtněte několik ekvipotenciálních ploch a elektrických siločár. Jde jen o fyzikální úvahu, nikoli o matematický výpočet.



Obr. 25.53 Úloha 78

79Ú. (a) Kdybychom na povrch nenabité Země položili 1 elektron na každý čtverečný metr, jaký by byl její potenciál? Uvažujte $\varphi = 0$ v nekonečnu. (b) Jaká by byla intenzita elektrického pole těsně nad zemským povrchem?

80Ú. Středy dvou kovových koulí o poloměru 3,0 cm jsou od sebe vzdáleny 2,0 m. Jedna koule nese elektrický náboj $+1{,}0\cdot10^{-8}$ C, druhá $-3{,}0\cdot10^{-8}$ C. Vzdálenost mezi koulemi považujme za dostatečně velkou vzhledem k poloměrům obou koulí, což nám dovoluje vyslovit předpoklad, že náboj na každé kouli je rozložen rovnoměrně. Koule jsou od sebe elektricky izolovány. Při volbě $\varphi = 0$ v nekonečnu vypočítejte (a) elektrický potenciál v bodě uprostřed spojnice středů obou koulí, (b) elektrický potenciál každé koule.

81Ú. Kovová koule o poloměru 15 cm nese celkový náboj $3{,}0\cdot10^{-8}$ C. (a) Jaká je velikost elektrické intenzity těsně nad jejím povrchem? (b) Určete velikost potenciálu na povrchu koule, jestliže hodnotu $\varphi = 0$ zvolíme v nekonečnu. (c) V jaké vzdálenosti od povrchu koule klesne potenciál na 500 V?

82Ú. Dvě tenké, izolované, soustředné vodivé kulové plochy o poloměrech R_1 a R_2 nesou elektrické náboje Q_1 a Q_2. Jak závisí velikost intenzity $E(r)$ a potenciál $\varphi(r)$ na vzdálenosti r od středu koulí? (Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.) Sestrojte grafy $E(r)$ a $\varphi(r)$ pro $r = 0$ až $r = 4{,}0$ cm, jestliže $R_1 = 0{,}50$ m, $R_2 = 1{,}0$ m, $Q_1 = +2{,}0\,\mu$C a $Q_2 = +1{,}0\,\mu$C.

PRO POČÍTAČ

83Ú. Elektrický náboj $Q_1 = -1{,}2\cdot10^{-9}$ C se nachází v počátku souřadnicového systému a náboj $Q_2 = 2{,}5\cdot10^{-9}$ C je na ose y v bodě o souřadnici $y = 0{,}50$ m. Potenciál v nekonečnu považujte za nulový. (a) Sestrojte průsečnici ekvipotenciální plochy $\varphi = 5{,}0$ V s rovinou xy. Tato průsečnice obepíná jeden z obou nábojů. (b) V tomto elektrickém poli existují dvě ekvipotenciální plochy $\varphi = 3{,}0$ V. Jedna z nich obklopuje jeden náboj a druhá obklopuje oba náboje. Sestrojte jejich průsečnice s rovinou xy. (c) Určete hodnotu potenciálu, při které se ekvipotenciální plocha právě rozpadá na dvě nesouvislé části.

84Ú. Předpokládejte, že N elektronů má být umístěno na prstenci poloměru R a že elektrony mohou být rozloženy dvěma způsoby. Při prvním jsou všechny elektrony rozmístěny rovnoměrně po obvodu prstence; vzdálenost mezi sousedními elektrony je tedy všude stejná. Při druhém rozmístění je $(N - 1)$ elektronů rozmístěno opět rovnoměrně po obvodu prstence a jeden elektron je umístěn do středu prstence. Při kterém uspořádání elektronů je jejich celková elektrická potenciální energie menší? Uveďte odpovědi pro hodnoty N rovnající se celým číslům od 2 do 15.

26
Kapacita



Srdeční příhoda… Během komorové fibrilace, častého typu srdečního záchvatu, přestanou srdeční komory pumpovat krev, protože stahy a uvolnění jejich svalových vláken přestanou být koordinovány. Pacienta však lze zachránit, když jeho srdeční sval dostane elektrický šok. Hrudní dutinou pacienta musí projít elektrický proud asi 20 A a přenést přibližně 200 J elektrické energie v průběhu asi 2 ms. Tomu odpovídá krátkodobý elektrický výkon kolem 100 kW. Tak vysoký příkon můžeme poměrně snadno zajistit v nemocnici, ale jak ho dosáhnout v případě, že by nás fibrilace překvapila např. při cestování? Na to určitě nestačí ani elektrický systém automobilu, ani pojízdné ambulance, i kdyby byly po ruce.

26.1 UŽITÍ KONDENZÁTORŮ

Napnutím tětivy luku, natažením pružiny, stlačením plynu, zvednutím knihy a jinými podobnými úkony lze mechanickou energii akumulovat ve formě energie potenciální. Také energii elektrického pole lze takto uchovat v **kondenzátorech**.*

Kondenzátor je např. součástí fotoblesku. Během relativně pomalého nabíjení se v kondenzátoru hromadí elektrický náboj a tím se v něm vytváří elektrické pole. Kondenzátor uchovává elektrické pole a jeho energii až do spuštění fotoblesku, kdy se elektrická energie velmi rychle uvolní.

Kondenzátory slouží v současném elektronickém a mikroelektronickém světě všestranně, a to nejen jako zásobárny elektrické energie. Uveďme alespoň dva příklady za mnohé. (1) Kondenzátory jsou regulačními prvky v obvodech a ladíme jimi rádiové a televizní vysílače i přijímače. (2) Kondenzátory mikroskopických rozměrů tvoří paměťové bloky počítačů. Tato drobounká zařízení jsou zde důležitá ani ne tak pro svou schopnost akumulovat energii, jako pro poskytování informace typu ANO-NE (ON-OFF) danou přítomností či nepřítomností náboje v kondenzátoru.

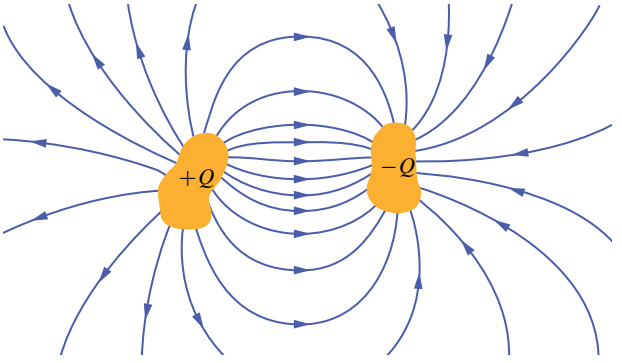
26.2 KAPACITA

Obr. 26.1 ukazuje různá konkrétní provedení kondenzátorů.



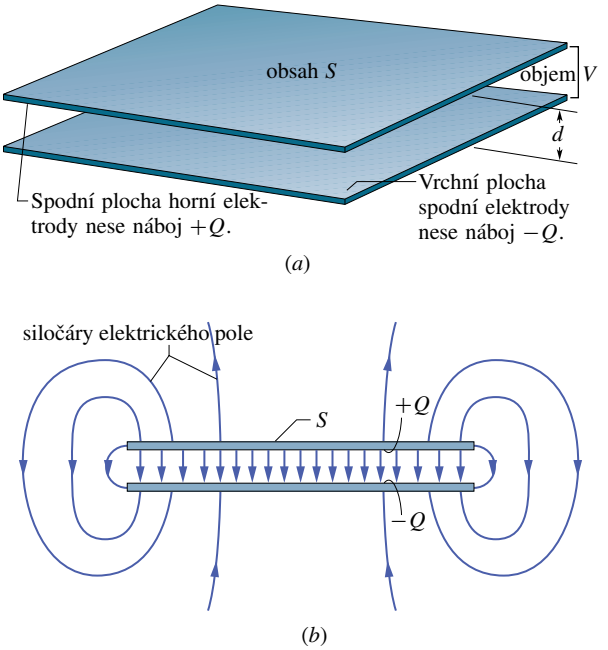
Obr. 26.1 Různé druhy kondenzátorů

Na obr. 26.2 vidíme základní prvky *každého* kondenzátoru: jsou to dva vodiče, zvané **elektrody**, které jsou blízko u sebe, ale přitom jsou od sebe elektricky izolovány (odděleny). Někdy se jim říká „desky“, a to bez ohledu na jejich skutečný tvar.



Obr. 26.2 Dva vodiče, zvané elektrody, elektricky izolované navzájem od sebe i od svého okolí, tvoří *kondenzátor*. Je-li kondenzátor nabit, nesou elektrody náboje Q stejně velké, ale opačných znamének.

Obr. 26.3a ukazuje velmi časté uspořádání vodičů, kterému říkáme *deskový kondenzátor*. Tvoří ho dva rovnoběžné rovinné vodiče ve vzdálenosti d, každý o obsahu S. Znak ⊣⊢, kterým kondenzátor znázorňujeme ve schéma-



Obr. 26.3 (a) Deskový kondenzátor tvoří dvě rovinné elektrody ve vzdálenosti d, každá má obsah S. Na přilehlých plochách nesou stejně velké elektrické náboje Q navzájem opačných znamének. (b) Elektrické pole v prostoru mezi elektrodami deskového kondenzátoru je homogenní. Taková pole zobrazujeme rovnoběžnými a stejně hustými siločárami. Zakřivené siločáry při okraji elektrod znázorňují nehomogenní elektrické pole.

* Česká terminologie používá v blízkém významu slovo **kapacitor**. Rozdíl mezi oběma pojmy spočívá v tom, že kondenzátor představuje konkrétní fyzickou součástku, zatímco kapacitor je idealizovaný prvek, u nějž zanedbáváme vedlejší jevy (např. svod) a uvažujeme jen kapacitu. Protože se nezabýváme elektrotechnikou hlouběji, nepotřebujeme zatím rozlišovat mezi reálným a modelovým prvkem. Pro jednoduchost budeme proto užívat jen jediný, běžnější termín kondenzátor.

tech, je odvozen právě od tvaru deskového kondenzátoru; užívá se však pro kondenzátory všech geometrických tvarů.

Je-li kondenzátor *nabitý*, mají jeho elektrody stejně velké náboje, avšak opačných znamének $+Q$ a $-Q$. Mluvíme-li tedy o *náboji Q kondenzátoru*, rozumíme tím absolutní hodnotu náboje jedné z jeho elektrod, tedy $|Q|$, a nikoli *celkový* náboj, který je roven nule: $(+Q) + (-Q) = 0$.

Protože elektrody kondenzátoru jsou vodivé, jsou tudíž i ekvipotenciálními plochami. Všechny body na téže elektrodě mají tedy stejnou hodnotu elektrického potenciálu. Mezi oběma elektrodami nabitého kondenzátoru existuje *potenciálový rozdíl* neboli *napětí*. Neznáme-li pořadí elektrod, je přirozené brát tento rozdíl (napětí) kladný.

Náboj Q a napětí U libovolného kondenzátoru jsou navzájem přímo úměrné. Platí tedy

$$Q = CU. \tag{26.1}$$

Součinitel úměrnosti C je pro libovolný kondenzátor konstantní a nazývá se **kapacita** kondenzátoru,

$$C = \frac{Q}{U}. \tag{26.2}$$

Hodnota kapacity je závislá pouze na geometrii obou elektrod kondenzátoru (na velikosti, tvaru a jejich vzájemné vzdálenosti), *nikoli* na náboji nebo na napětí na kondenzátoru, a je vždy kladná. *Čím větší* je kapacita kondenzátoru, *tím větší* náboj musí být přenesen na jeho elektrody, abychom na něm dosáhli požadovaného napětí $U = Q/C$. Kapacita je číselně rovna náboji kondenzátoru při napětí 1 V mezi jeho elektrodami.

Z rov. (26.2) vyplývá, že jednotkou kapacity v mezinárodní soustavě jednotek (SI) je $\mathrm{C{\cdot}V^{-1}}$. Tato jednotka se vyskytuje velmi často, a proto dostala vlastní pojmenování **farad** (značka F):

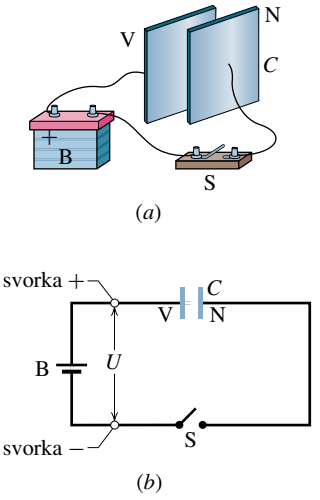
$$1\ \text{farad} = 1\ \text{coulomb na volt},$$
$$1\ \mathrm{F} = 1\ \mathrm{C{\cdot}V^{-1}}.$$

Farad je jednotka pro praxi příliš velká. Častěji proto používáme jednotky menší, zvláště mikrofarad ($1\ \mu\mathrm{F} = 10^{-6}\ \mathrm{F}$), nanofarad ($1\ \mathrm{nF} = 10^{-9}\ \mathrm{F}$) a pikofarad ($1\ \mathrm{pF} = 10^{-12}\ \mathrm{F}$).

Nabíjení kondenzátoru

Chceme-li kondenzátor nabít, můžeme ho zapojit do elektrického obvodu se zdrojem stejnosměrného elektrického napětí (např. s baterií). Elektrický obvod je cesta, kterou může procházet elektrický náboj. Baterie je zařízení, ve kterém probíhají určité elektrochemické reakce, které dodávají na jeho výstupní svorky náboje a vytvářejí tak mezi nimi elektrické napětí.

Baterie B, spínač S, kondenzátor C a spojovací dráty tvoří elektrický obvod na obr. 26.4a. Tentýž obvod je znázorněn jako schéma na obr. 26.4b s použitím značek pro baterii, spínač a kondenzátor. Předpokládejme, že baterie udržuje stálé napětí U mezi svými svorkami. Svorku s vyšším potenciálem značíme „+“ a nazýváme ji *kladný pól*; druhou svorku značíme „−“ a nazýváme ji *záporný pól*.



Obr. 26.4 (a) Baterie B, spínač S a elektrody V a N kondenzátoru tvoří elektrický obvod. (b) Schéma elektrického obvodu s *obvodovými prvky*, které jsou reprezentovány svými symboly.

Obvod znázorněný na obr. 26.4a, b není uzavřený, protože spínač S je *vypnutý*, tj. nespojuje vodivě ty spojovací dráty, ke kterým je připojen. Když spínač zapneme, propojí je, obvod se uzavře a spínačem i spojovacími dráty může procházet elektrický náboj. V kap. 22 jsme se dozvěděli, že nosiče elektrického náboje, které mohou procházet takovým vodičem, jako je měděný drát, jsou elektrony. Je-li obvod na obr. 26.4 uzavřen, pak elektrické pole (vytvořené baterií podél vodičů) přinutí elektrony pohybovat se těmito vodiči od elektrody V kondenzátoru ke kladné svorce baterie; tím se elektroda V, ztrácející elektrony, nabíjí kladně (tj. bude mít vyšší potenciál). Zároveň toto elektrické pole nutí elektrony pohybovat se ze záporné svorky baterie na elektrodu N kondenzátoru; tím se elektroda N, získávající elektrony, nabíjí záporně (na nižší potenciál). Obě elektrody kondenzátoru se těmito procesy nabíjejí současně, takže v každém okamžiku mají stejně velké náboje opačných znamének.

Napětí mezi původně nenabitými elektrodami kondenzátoru bylo nulové. Protože se elektrody kondenzátoru nabíjejí opačnými náboji, napětí mezi nimi vzrůstá, dokud se

nevyrovná s napětím U mezi svorkami baterie. Když se napětí vyrovnají, mají elektroda V a kladná svorka baterie stejný potenciál; elektrické pole ve spojovacím drátu mezi nimi vymizí. Podobně elektroda N a záporná svorka mají také stejný potenciál a elektrické pole v drátu, který je spojuje, vymizí. S vymizením elektrického pole zanikne i síla, která uváděla elektrony do pohybu. V tomto stavu je kondenzátor *nabit* a jeho napětí U je rovno napětí baterie B před sepnutím spínače S. Elektrický náboj Q je určen rov. (26.1).

RADY A NÁMĚTY

Bod 26.1: *Napětí a potenciál*

V této knize i jinde se rovněž setkáme s různými výrazy vztahujícími se k pojmům „potenciál“ a „rozdíl potenciálů“ neboli „napětí“. *Potenciál* se vždy vztahuje pouze k *jednomu* bodu, přitom však musí být z kontextu jasné, kde jsme zvolili hladinu nulového potenciálu. *Napětím* neboli *rozdílem potenciálů* rozumíme rozdíl hodnot potenciálu mezi dvěma danými body, přičemž potenciál jednoho z nich může být určen předběžnou dohodou (např. v přístroji „nulový vodič“, „uzemnění“, „kostra přístroje“ apod.)

Tak např. výrok „kondenzátor je nabit na 5 V“ znamená, že napětí mezi jeho elektrodami je 5 V. Baterie může být charakterizována napětím, např. jako „9 V baterie“. Elektrická síť v automobilu má 12 V (rozumí se vůči kovové kostře vozidla) atp.

KONTROLA 1: Co se stane s kapacitou C kondenzátoru, když se (a) náboj Q kondenzátoru zdvojnásobí, nebo (b) napětí U na kondenzátoru ztrojnásobí? Stoupne kapacita kondenzátoru, klesne, či zůstane nezměněna?

26.3 VÝPOČET KAPACITY

Máme vypočítat kapacitu kondenzátoru, známe-li jeho tvar a rozměry. Protože kondenzátory mohou mít nejrůznější provedení i velikost, uvedeme nejprve obecný postup pro výpočet: (1) předpokládáme, že na kondenzátoru je náboj Q; (2) pomocí Gaussova zákona elektrostatiky určíme intenzitu $\boldsymbol{E}$ elektrického pole mezi elektrodami kondenzátoru a vyjádříme ji pomocí náboje Q; (3) známe-li $\boldsymbol{E}$, můžeme vypočítat napětí U mezi elektrodami kondenzátoru podle rov. (25.18); (4) vypočítáme C z rov. (26.2).

Výpočet jak intenzity elektrického pole, tak i napětí můžeme zpravidla zjednodušit přijetím vhodných předpokladů, odpovídajících konkrétní situaci.

Výpočet intenzity elektrického pole

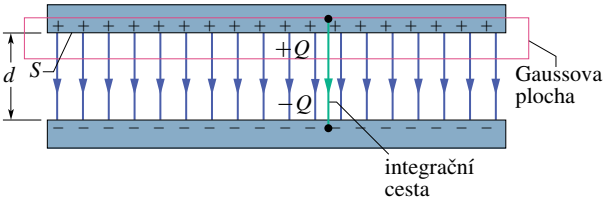
Intenzita $\boldsymbol{E}$ elektrického pole mezi elektrodami kondenzátoru souvisí s nábojem Q kondenzátoru podle Gaussova zákona elektrostatiky vztahem

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q, \tag{26.3}$$

kde Q je celkový náboj uvnitř (uzavřené) Gaussovy plochy a $\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ je tok intenzity elektrického pole touto plochou. Jsou-li vektory $\boldsymbol{E}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ rovnoběžné a je-li Gaussova plocha volena tak, že na ní má intenzita $\boldsymbol{E}$ konstantní velikost E, pak se rov. (26.3) redukuje na tvar

$$Q = \varepsilon_0 E S \quad \text{(zvl. případ rov. (26.3))}. \tag{26.4}$$

Veličina S v rov. (26.4) je obsah té části Gaussovy plochy, kterou prochází vektor intenzity elektrického pole. Pro zjednodušení výpočtu budeme volit Gaussovu plochu tak, aby zcela obklopila náboj kladně nabité elektrody kondenzátoru; viz obr. 26.5 jako příklad. (Připomeňme z čl. 24.1, že Gaussova plocha je *vždy* uzavřená.)



Obr. 26.5 Nabitý deskový kondenzátor. Gaussova plocha zcela obklopuje náboj kladně nabité elektrody. V rov. (26.6) se integruje podél trajektorie vedoucí nejkratší cestou mezi oběma elektrodami.

Výpočet napětí

V kap. 25 je uvedena rov. (25.18), podle které napětí mezi elektrodami kondenzátoru souvisí s vektorem intenzity $\boldsymbol{E}$ elektrického pole vztahem

$$\varphi_\mathrm{f} - \varphi_\mathrm{i} = -\int_\mathrm{i}^\mathrm{f} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{26.5}$$

v němž integrační cesta musí začínat na jedné a končit na druhé elektrodě kondenzátoru; jinak je libovolná. Vybereme takovou integrační cestu, která bude sledovat některou elektrickou siločáru začínající na kladně nabité elektrodě a končící na záporné. Na takové cestě mají vektory intenzity $\boldsymbol{E}$ a posunutí $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ v každém bodě stejný směr i orientaci, takže skalární součin $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ je roven součinu $E\,\mathrm{d}s$. Podle rov. (26.5) je veličina $\varphi_\mathrm{f} - \varphi_\mathrm{i}$ záporná. Jelikož hledáme

absolutní hodnotu napětí U mezi elektrodami, napíšeme $\varphi_f - \varphi_i = -U$. Takto se rov. (26.5) upraví na tvar

$$U = \int_{(+)}^{(-)} E \, \mathrm{d}s \quad \text{(zvl. případ rov. (26.5))}. \qquad (26.6)$$

Integračními mezemi v rov. (26.6) jsou znaky (+) a (−), které nám připomínají, že integrační cesta začíná na kladně nabité a končí na záporně nabité elektrodě.

Nyní můžeme použít rov. (26.4) a (26.6) na několik konkrétních případů.

Deskový kondenzátor

Budeme předpokládat, že elektrody deskového kondenzátoru jsou tak velké a tak blízko u sebe, že lze zanedbat rozptyl elektrického pole na jejich okrajích (obr. 26.5). Předpokládáme tedy, že vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ je konstantní (co do velikosti i směru) v celém prostoru mezi elektrodami; všude jinde nechť je roven nule.

Představme si Gaussovu plochu, obklopující pouze náboj Q kladně nabité elektrody kondenzátoru (obr. 26.5). Podle rov. (26.4) můžeme napsat

$$Q = \varepsilon_0 E S, \qquad (26.7)$$

kde S je obsah plochy elektrody.

Rov. (26.6) vede k výsledku

$$U = \int_{(+)}^{(-)} E \, \mathrm{d}s = E \int_0^d \mathrm{d}s = Ed. \qquad (26.8)$$

V rov. (26.8) lze vytknout před integrál velikost intenzity E, protože je konstantní; takto zjednodušený integrál pak vyjadřuje vzdálenost d elektrod. Dosadíme-li Q z rov. (26.7) a U z rov. (26.8) do rov. (26.2), dostaneme

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad \text{(deskový kondenzátor)}. \qquad (26.9)$$

Vidíme, že kapacita C deskového kondenzátoru skutečně závisí pouze na jeho geometrických parametrech, konkrétně na obsahu plochy S elektrod a na vzdálenosti d mezi nimi. Všimněme si, že kapacita C vzrůstá se zvětšováním S a se zmenšováním d.

Dodejme, že v důsledku volby konstanty v Coulombově zákonu ve tvaru $1/(4\pi\varepsilon_0)$ vychází často používaný vzorec (26.9) v jednoduchém tvaru. Dále poznamenejme, že rov. (26.9) nám dovoluje vyjádřit permitivitu vakua ε_0 v jednotkách vhodnějších pro úlohy o kondenzátorech, totiž

$$\varepsilon_0 \doteq 8{,}85 \cdot 10^{-12} \,\mathrm{F \cdot m^{-1}} = 8{,}85 \,\mathrm{pF \cdot m^{-1}}. \qquad (26.10)$$

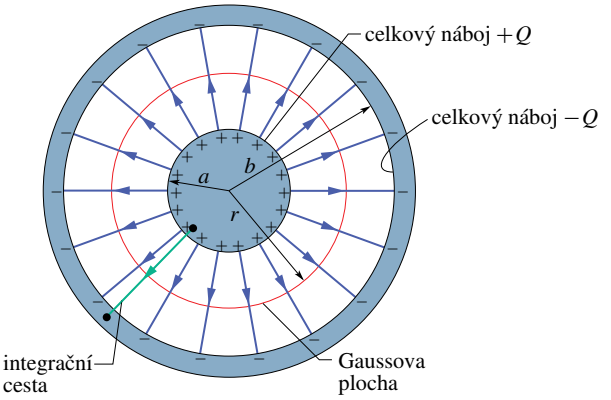
Tuto konstantu jsme v úlohách týkajících se Coulombova zákona (čl. 22.4) vyjadřovali v jiných jednotkách, a to

$$\varepsilon_0 \doteq 8{,}85 \cdot 10^{-12} \,\mathrm{C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}}. \qquad (26.11)$$

V základních jednotkách SI je vyjádření jednotky permitivity ε_0 málo přehledné: $\varepsilon_0 \doteq 8{,}85 \cdot 10^{-12} \,\mathrm{kg^{-1} \cdot m^{-3} \cdot s^4 \cdot A^2}$.

Válcový kondenzátor

Obr. 26.6 ukazuje příčný řez válcovým kondenzátorem délky L, jehož vnitřní elektroda má tvar válce o poloměru a a vnější elektrodu tvoří souosý dutý válec o vnitřním poloměru b.



Obr. 26.6 Příčný řez dlouhým válcovým kondenzátorem ukazuje válcovou Gaussovu plochu poloměru r a radiální integrační cestu pro výpočet integrálu v rov. (26.6). Týž obrázek zároveň poslouží k ilustraci příčného řezu vedeného středem kulového kondenzátoru.

Předpokládejme, že $L \gg b$, takže lze zanedbat rozptyl elektrického pole, ke kterému dochází na koncích elektrod. Obě elektrody kondenzátoru nesou stejně velké elektrické náboje Q opačných znamének.

Zvolme Gaussovu plochu ve tvaru souosé válcové plochy délky L o poloměru r, uzavřenou z obou stran základnami a umístěnou tak, jak je znázorněno na obr. 26.6. Pak podle rov. (26.4) platí

$$Q = \varepsilon_0 E S = \varepsilon_0 E (2\pi r L),$$

kde $2\pi r L$ je obsah pláště válce. Elektrický tok oběma základnami zvolené Gaussovy plochy je nulový. Z této rovnice dostaneme

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r}. \qquad (26.12)$$

Dosazením tohoto výsledku do rov. (26.6) obdržíme

$$U = \int_{(+)}^{(-)} E \, \mathrm{d}s = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \\ = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}. \qquad (26.13)$$

Při úpravě jsme využili toho, že v tomto případě platí $\mathrm{d}s = \mathrm{d}r$. Pomocí vztahu $C = Q/U$ určíme kapacitu

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)} \quad \text{(válcový kondenzátor).} \qquad (26.14)$$

Kapacita válcového kondenzátoru (stejně jako deskového) tedy závisí pouze na geometrických parametrech, v tomto případě konkrétně na poloměrech a, b a na délce L válcových elektrod.

Kulový kondenzátor

Obr. 26.6 může posloužit také jako příčný řez vedený středem kulového kondenzátoru, skládajícího se z plné koule poloměru a a s ní soustředné kulové vrstvy o vnitřním poloměru $b > a$.

Gaussova plocha má tvar soustředné kulové plochy poloměru r, kde $a < r < b$. Použitím rov. (26.4) na tuto plochu dostaneme

$$Q = \varepsilon_0 E S = \varepsilon_0 E(4\pi r^2),$$

kde $4\pi r^2$ je obsah Gaussovy plochy. Řešení této rovnice dává vztah

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \qquad (26.15)$$

který vyjadřuje velikost intenzity elektrického pole, vyvolaného nábojem rovnoměrně rozloženým na vnitřní elektrodě (rov. (24.15)).

Dosadíme-li tento vztah do rov. (26.6), dostaneme

$$\begin{aligned} U &= \int_{(+)}^{(-)} E\,\mathrm{d}s = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}. \end{aligned} \qquad (26.16)$$

Porovnáním s rov. (26.1) zjistíme, že

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad \text{(kulový kondenzátor).} \qquad (26.17)$$

Osamocená vodivá koule

I jedinému osamocenému vodiči lze přiřadit kapacitu, představíme-li si, že byl původně obklopen dalším vodičem — dutou koulí, kterou jsme poté „nafukovali“ tak, že její vnitřní poloměr b rostl nade všechny meze. Během „nafukování“ kapacita soustavy klesala, ale ne až k nule. Konec konců, všechny elektrické silokřivky, které mají jeden konec na povrchu nabitého osamoceného vodiče, musí někde mít i druhý konec; stěny místnosti, ve které je vodič umístěn, mohou docela dobře nahradit onu pomyslnou dutou kouli.

Představme si, že osamoceným vodičem je koule, která má poloměr R. Abychom určili její kapacitu, upravíme nejprve rov. (26.17) do tvaru

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{1 - a/b}.$$

Jestliže poloměr b poroste nade všechny meze a místo a dosadíme R, pak v limitě dostaneme

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \quad \text{(kapacita osamocené koule).} \qquad (26.18)$$

Poznamenejme, že podle tohoto vzorce i všech ostatních, které byly odvozeny pro kapacitu (rov. (26.9), (26.14) a (26.17)), má kapacita rozměr rovný rozměru konstanty ε_0 vynásobené rozměrem délky.

KONTROLA 2: Tři různé kondenzátory jsou zapojeny k téže baterii. Zjistěte, zda a jak se změní náboj na jejich elektrodách, jestliže (a) vzdálenost mezi elektrodami deskového kondenzátoru zvětšíme, (b) poloměr vnitřní válcové elektrody válcového kondenzátoru zvětšíme, (c) poloměr vnější kulové elektrody kulového kondenzátoru zvětšíme.

PŘÍKLAD 26.1

Elektrody deskového kondenzátoru mají vzdálenost $d = 1{,}0\,\mathrm{mm}$. Jak velká by musela být jejich plocha, aby měl kondenzátor kapacitu $1{,}0\,\mathrm{F}$?

ŘEŠENÍ: Pomocí rov. (26.9) vypočítáme

$$S = \frac{Cd}{\varepsilon_0} = \frac{(1{,}0\,\mathrm{F})(1{,}0\cdot10^{-3}\,\mathrm{m})}{(8{,}85\cdot10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}})} = 1{,}1\cdot10^{8}\,\mathrm{m^2}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Je to obsah čtverce o straně delší než 10 km. Kapacita 1 farad je opravdu velká. Moderní technologie však umožnila sestrojit kondenzátory i o tak velké kapacitě a přitom velmi skromných rozměrů. Tyto „superkondenzátory“ se používají jako zdroje napětí např. pro kritické situace počítačů; mohou např. při výpadku proudu v síti uchovat data v paměti počítače až po dobu 30 dnů.

PŘÍKLAD 26.2

Paměťový prvek dynamické paměti RAM na čipu má kapacitu 55 fF. Kolik elektronů je nutno dodat na jeho zápornou elektrodu, aby získal napětí 5,3 V?

ŘEŠENÍ: Počet n elektronů je dán podílem Q/e, kde e je elementární náboj. Z rov. (26.1) plyne

$$n = \frac{Q}{e} = \frac{CU}{e} = \frac{(55{\cdot}10^{-15}\,\mathrm{F})(5{,}3\,\mathrm{V})}{(1{,}60{\cdot}10^{-19}\,\mathrm{C})} = \\ = 1{,}8{\cdot}10^{6}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

To je opravdu velmi malý počet elektronů. Např. smítko prachu tak malé, že se v podstatě nikdy neusadí a většinou se vznáší, obsahuje asi 10^{17} elektronů (a stejný počet protonů).

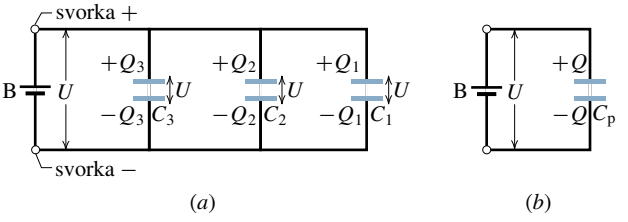
26.4 KONDENZÁTORY SPOJENÉ PARALELNĚ A SÉRIOVĚ

Jakkoli složité seskupení kondenzátorů v elektrickém obvodu můžeme považovat za spojení bloků, v nichž jsou jednotlivé kondenzátory zapojeny sériově nebo paralelně. Probereme proto tato dvě základní spojení.

Paralelní spojení (vedle sebe)

Obr. 26.7a ukazuje skupinu tří kondenzátorů připojených *paralelně* k baterii B. (České označení *vedle sebe* vystihuje jejich spojení výstižně.) Protože baterie udržuje na svých svorkách napětí U, je totéž napětí U na každém kondenzátoru.

Při spojení kondenzátorů paralelně (neboli vedle sebe) je napětí na celé skupině kondenzátorů stejné jako napětí na každém z nich.



Obr. 26.7 (a) Tři kondenzátory připojené paralelně (vedle sebe) k baterii B. Baterie udržuje na svých svorkách a na *každém* kondenzátoru napětí U. (b) Výsledná (neboli ekvivalentní) kapacita C_p nahrazuje kapacitu paralelní kombinace. Náboj Q na C_p je roven součtu nábojů Q_1, Q_2 a Q_3 na kondenzátorech zobrazených na obr. 26.7a.

Hledáme kapacitu C_p skupiny paralelně spojených kondenzátorů (jak je znázorněno na obr. 26.7b). Jinými slovy hledáme kapacitu jediného (ekvivalentního) kondenzátoru, kterým můžeme nahradit tuto skupinu kondenzátorů v tom smyslu, že při téže hodnotě napětí U přiloženého na kondenzátor o kapacitě C_p na něm bude náboj Q stejně velký jako na celé nahrazované skupině.

Podle rov. (26.1) pro tyto tři kondenzátory platí:

$$Q_1 = C_1U, \quad Q_2 = C_2U \quad \text{a} \quad Q_3 = C_3U.$$

Celkový náboj paralelní kombinace je:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)U.$$

Výsledná kapacita soustavy paralelně spojených kondenzátorů je pak

$$C_p = \frac{Q}{U} = C_1 + C_2 + C_3.$$

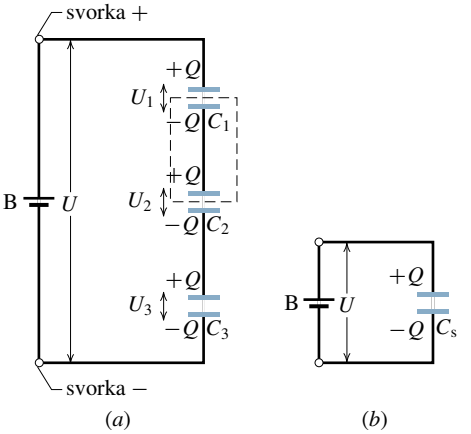
To je výsledek, který můžeme snadno rozšířit na libovolný počet n kondenzátorů:

$$C_p = \sum_{j=1}^{n} C_j \qquad (n \text{ kondenzátorů spojených paralelně}). \qquad (26.19)$$

Sériové spojení (za sebou)

Obr. 26.8a ukazuje skupinu tří kondenzátorů připojených **sériově** k baterii B. (I zde je český termín **za sebou** výstižný.) Baterie udržuje napětí U mezi levou a pravou svorkou bloku kondenzátorů. V tomto uspořádání vzniknou na jednotlivých kondenzátorech o kapacitách C_1, C_2 a C_3 různá napětí U_1, U_2 a U_3; zřejmě však platí $U_1 + U_2 + U_3 = U$.

Při spojení kondenzátorů do série (neboli za sebou) je napětí na celé skupině kondenzátorů rovno součtu napětí na jednotlivých kondenzátorech.



Obr. 26.8 (a) Tři kondenzátory připojené sériově (za sebou) k baterii B. Baterie udržuje napětí U mezi krajními svorkami této sériové kombinace. (b) Výsledná kapacita C_s nahrazuje sériovou kombinaci. Napětí U na C_s je rovno součtu napětí U_1, U_2 a U_3 na kondenzátorech.

Hledáme kapacitu C_s sériové kombinace. Jinými slovy hledáme kapacitu jediného (ekvivalentního) kondenzátoru, kterým můžeme celou skupinu nahradit podle obr. 26.8b v tom smyslu, že při stejném přiloženém napětí U bude na ekvivalentním kondenzátoru stejně velký náboj Q jako na celé nahrazované skupině.

Když k sériové kombinaci kondenzátorů na obr. 26.8a připojíme baterii, pak musí být na každém kondenzátoru stejně velký náboj Q, a to i tehdy, jsou-li kondenzátory různé a mají-li různé kapacity. Abychom tomuto faktu porozuměli, povšimněme si, že část elektrického obvodu označená přerušovanou čárou na obr. 26.8a je elektricky izolovaná od zbytku obvodu. Tato část obvodu nemůže získat ani ztratit žádný elektrický náboj. Baterie může v izolované části náboj pouze *indukovat*, tedy přerozdělit ten náboj, který tam již je: když baterie dodá náboj $+Q$ na horní elektrodu kondenzátoru C_1, pak tento náboj přitáhne elektrony z izolované části, tj. přerozdělí je. Toto přerozdělení způsobí, že spodní elektroda kondenzátoru C_1 získá náboj $-Q$ a horní elektroda kondenzátoru C_2 získá náboj $+Q$. Zároveň baterie, která spodní elektrodě kondenzátoru C_3 dodá náboj $-Q$, vyvolá přerozdělení nábojů na vodivě spojených elektrodách kondenzátorů C_2 a C_3.

Konečným výsledkem je stejný náboj Q na každém kondenzátoru. Celkový náboj dodaný baterií je ovšem Q, nikoli snad $3Q$. Baterie dodala náboj $+Q$, který přímo přešel na nejvrchnější elektrodu (obr. 26.8a), a odebrala náboj $-Q$ z nejspodnější elektrody celé kombinace. Ostatní elektrody kondenzátorů se nabily pouze tím, že se přerozdělily náboje mezi vodivě spojenými elektrodami sousedních kondenzátorů.

Použitím rov. (26.1) na každý kondenzátor v sérii dostaneme

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2} \quad \text{a} \quad U_3 = \frac{Q}{C_3}.$$

Celkové napětí na sériové kombinaci kondenzátorů je

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \\ = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right).$$

Výsledná kapacita soustavy sériově spojených kondenzátorů má tedy hodnotu

$$C_s = \frac{Q}{U} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

neboli

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Tento výsledek lze snadno rozšířit na libovolný počet n kondenzátorů:

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j} \quad \text{(pro kondenzátory spojené sériově).} \qquad (26.20)$$

Podle rov. (26.20) je výsledná kapacita sériové kombinace kondenzátorů vždy menší než kapacita kteréhokoli z nich.

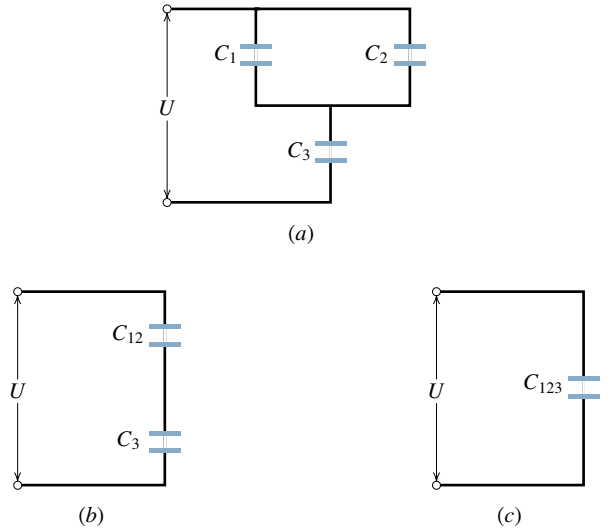
V př. 26.3 uvidíme, jak lze složitou kombinaci kondenzátorů zjednodušit rozložením na menší části s paralelním nebo sériovým řazením kondenzátorů. Každá taková menší část pak může být nahrazena výslednou kapacitou. To zjednodušuje původní kombinaci kondenzátorů i analýzu elektrických obvodů.

KONTROLA 3: Baterie o napětí U udržuje náboj Q na kombinaci dvou stejných kondenzátorů. Jaké je napětí a náboj na každém z obou kondenzátorů, když jsou spojeny (a) paralelně, (b) sériově?

PŘÍKLAD 26.3

(a) Určete výslednou kapacitu kombinace kondenzátorů na obr. 26.9a. Je dáno

$$C_1 = 12{,}0\,\mu\text{F}, \quad C_2 = 5{,}30\,\mu\text{F}, \quad C_3 = 4{,}50\,\mu\text{F}.$$



Obr. 26.9 Příklad 26.3. (a) Kombinace tří kondenzátorů. (b) Paralelní kombinace kondenzátorů C_1 a C_2 je nahrazena ekvivalentním kondenzátorem C_{12}. (c) Sériová kombinace kondenzátorů C_{12} a C_3 je nahrazena ekvivalentním kondenzátorem C_{123}.

ŘEŠENÍ: Kondenzátory C_1 a C_2 jsou spojeny paralelně. Z rov. (26.19) vyplývá vztah pro jejich výslednou kapacitu

$$C_{12} = C_1 + C_2 = (12{,}0\,\mu\text{F}) + (5{,}30\,\mu\text{F}) = 17{,}3\,\mu\text{F}.$$

Podle obr. 26.9b kondenzátory C_{12} a C_3 tvoří sériovou kombinaci. Z rov. (26.20) pro jejich ekvivalentní kapacitu C_{123} (zobrazenou na obr. 26.9c) dostáváme

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{(17{,}3\,\mu\text{F})} + \frac{1}{(4{,}50\,\mu\text{F})} = 0{,}280(\mu\text{F})^{-1},$$

z čehož plyne

$$C_{123} = \frac{1}{0{,}280\,(\mu\text{F})^{-1}} = 3{,}57\,\mu\text{F}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Na vstupní svorky kombinace kondenzátorů, zobrazené na obr. 26.9a, je připojeno napětí $U = 12{,}5$ V. Jaký náboj je na kondenzátoru C_1?

ŘEŠENÍ: Pro náboj na ekvivalentním kondenzátoru C_{123} (obr. 26.9c) dostaneme

$$Q_{123} = C_{123}U = (3{,}57\,\mu\text{F})(12{,}5\text{ V}) = 44{,}6\,\mu\text{C}.$$

Stejně velký náboj je na každém kondenzátoru sériové kombinace zobrazené na obr. 26.9b. Označme Q_{12} náboj na kondenzátoru C_{12} (platí $Q_{12} = Q_{123}$). Napětí na svorkách ekvivalentního kondenzátoru C_{12} je tedy

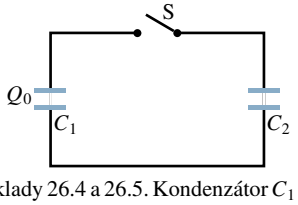
$$U_{12} = \frac{Q_{12}}{C_{12}} = \frac{(44{,}6\,\mu\text{C})}{(17{,}3\,\mu\text{F})} = 2{,}58\text{ V}.$$

Stejné napětí se objeví na svorkách kondenzátorů C_1 a C_2 (obr. 26.9a). Označme U_1 napětí mezi svorkami kondenzátoru C_1. Pak

$$Q_1 = C_1U_1 = (12{,}0\,\mu\text{F})(2{,}58\text{ V}) = 31{,}0\,\mu\text{C}. \quad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 26.4

Kondenzátor o kapacitě $C_1 = 3{,}55\,\mu$F je nabit baterií na napětí 6,30 V. Poté je baterie odpojena a kondenzátor je spojen přes spínač S s nenabitým kondenzátorem o kapacitě $C_2 = 8{,}95\,\mu$F (obr. 26.10). Sepneme-li spínač, začne náboj přecházet od kondenzátoru C_1 ke kondenzátoru C_2, a to tak dlouho, dokud se napětí U na obou kondenzátorech nevyrovnají. Jaké bude nakonec napětí U na kondenzátorech?



Obr. 26.10 Příklady 26.4 a 26.5. Kondenzátor C_1 je nabit na napětí U_0 a nabíjecí baterie je odstraněna. Poté je zapnut spínač S, takže část náboje přejde z kondenzátoru C_1 na kondenzátor C_2.

ŘEŠENÍ: Původní náboj Q_0 kondenzátoru C_1 je nyní rozdělen mezi oba kondenzátory tak, že platí

$$Q_0 = Q_1 + Q_2.$$

Použijeme vztah $Q = CU$ a dostaneme

$$C_1U_0 = C_1U + C_2U.$$

Odtud vyplývá

$$U = U_0\frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{(6{,}30\text{ V})(3{,}55\,\mu\text{F})}{(3{,}55\,\mu\text{F} + 8{,}95\,\mu\text{F})} = 1{,}79\text{ V}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Jakmile kondenzátory dosáhnou tohoto napětí, pohyb náboje ustane.

RADY A NÁMĚTY

Bod 26.2: *Obvody s více kondenzátory*

Rozebereme postup, který jsme použili při řešení př. 26.3, v němž bylo několik kondenzátorů zapojeno do bloku. Abychom nalezli výslednou kapacitu bloku, zjednodušujeme dané uspořádání kondenzátorů postupně a použijeme rov. (26.19) při paralelním spojení a rov. (26.20) při spojení sériovém. Náboj nahromaděný na ekvivalentním kondenzátoru vypočítáme z rov. (26.1), kde napětí U je napětí dané připojenou baterií. Součin CU vyjadřuje celkový náboj nahromaděný na všech kondenzátorech daného uspořádání.

Chceme-li však určit náboj nebo napětí na kterémkoli kondenzátoru zvlášť, je nutné postupovat v opačném pořadí. Při každém obráceném kroku používáme těchto dvou pravidel: Jsou-li kondenzátory spojeny paralelně, je na každém z nich stejné napětí U jako na jejich ekvivalentním kondenzátoru a pro výpočet náboje na každém kondenzátoru použijeme rov. (26.1). Jsou-li kondenzátory spojeny do série, je na každém z nich stejně velký náboj jako na jejich ekvivalentním kondenzátoru a pomocí rov. (26.1) či (26.2) určíme napětí na každém z nich.

Bod 26.3: *Baterie a kondenzátory*

Baterie udržuje určité napětí na svých svorkách. Připojíme-li kondenzátor o kapacitě C_1 (mnohdy stručněji jen kondenzátor C_1) z př. 26.4 k baterii o napětí 6,30 V, budou mezi oběma elektrodami kondenzátoru a baterií procházet náboje tak dlouho, dokud kondenzátor nezíská stejné napětí, jaké by bylo na nezapojené baterii.

Kondenzátor se liší od baterie v tom, že v něm neprobíhají vnitřní elektrochemické reakce, které by uvolňovaly nabité částice (elektrony) z jeho atomů a molekul. Když tedy nabitý kondenzátor C_1 z př. 26.4 odpojíme od baterie a potom spojíme s nenabitým kondenzátorem C_2 (spínač S je zapnutý), napětí na kondenzátoru C_1 se neudrží. Jedinou veličinou,

která se zachovává, je celkový náboj Q_0 soustavy těchto dvou kondenzátorů. Zákon zachování platí pro elektrický náboj, *nikoli* pro elektrický potenciál.

Nyní si vysvětlíme, co se děje s nábojem. Když je spínač S vypnutý tak jako na obr. 26.10, náboj Q_0 je jen na kondenzátoru C_1. Náboj nemůže přecházet mezi kondenzátory, aniž by byl obvod vodivě uzavřen. Sepnutím spínače S se obvod uzavře a část náboje Q_0 přejde z kondenzátoru C_1 na kondenzátor C_2. Tím se zvýší napětí na C_2 a současně sníží napětí na C_1. To probíhá tak dlouho, dokud se napětí U obou kondenzátorů nevyrovnají. Potenciály propojených horních elektrod obou kondenzátorů na obr. 26.10 si jsou rovny a také potenciály propojených spodních elektrod si jsou rovny. Obvodem již dále náboj neprochází, říkáme, že kondenzátory jsou v rovnovážném stavu. (Celý uvedený proces proběhne velice rychle, jak je vyloženo v čl. 28.8.)

KONTROLA 4: Předpokládejte, že v příkladu 26.4 a na obr. 26.10 je kondenzátor C_2 nahrazen sériovou kombinací kondenzátorů C_3 a C_4. (a) Jaký vztah platí mezi celkovým počátečním nábojem Q_0, nábojem Q_1 na kondenzátoru C_1 a nábojem Q_{34} na ekvivalentním kondenzátoru C_{34} po zapnutí spínače a ustálení náboje? (b) Jestliže $C_3 > C_4$, je náboj Q_3 na C_3 větší, menší, nebo roven náboji Q_4 na C_4?

26.5 ENERGIE ELEKTRICKÉHO POLE

K nabití kondenzátoru musí být vykonána práce vnějším působením. Představme si například, že použitím „kouzelné pinzety“ přemísťujeme elektrony, jeden po druhém, z jedné elektrody na druhou elektrodu původně nenabitého kondenzátoru. Elektrické pole, které se přitom vytváří v prostoru mezi nimi, má takový směr, že brání dalšímu přenosu náboje. Čím větší náboj se shromažďuje na elektrodách kondenzátoru, tím více práce je nutné vykonat k přenosu dalších elektronů. V praxi není tato práce konána „kouzelnou pinzetou“, ale baterií na úkor její chemické energie.

Práce, která byla potřebná k nabití kondenzátoru, je obsažena v elektrickém poli mezi jeho elektrodami ve formě **elektrické potenciální energie*** E_p. Tuto energii můžeme uvolnit vybitím kondenzátoru v elektrickém obvodu obdobně, jako můžeme uvolnit mechanickou potenciální energii nahromaděnou v nataženém luku uvolněním tětivy, aby se tato energie přeměnila na kinetickou energii šípu.

* Dejte prosím pozor na značení v tomto článku: elektrická intenzita $\boldsymbol{E}$ je vektor a má velikost E (obojí je bez indexů), energie je skalár a má zde vždy nějaký index: E_p, $E_{p,i}$, $E_{p,f}$, E_{el}, $E_{el,i}$, $E_{el,f}$ apod.

Předpokládejme, že v určitém okamžiku byl přemístěn elektrický náboj Q' z jedné elektrody na druhou. Napětí U' mezi elektrodami v tomto okamžiku bude Q'/C. Jestliže přemístíme další infinitezimální náboj $\mathrm{d}Q'$, musíme na to podle rov. (25.7) vynaložit práci

$$\mathrm{d}W_{ext} = U'\,\mathrm{d}Q' = \frac{Q'}{C}\,\mathrm{d}Q'.$$

Práce potřebná k přenesení celkového náboje Q pak je

$$W_{ext} = \int \mathrm{d}W_{ext} = \frac{1}{C}\int_0^Q Q'\,\mathrm{d}Q' = \frac{Q^2}{2C}.$$

Tato práce je uložena (obsažena) v elektrickém poli kondenzátoru jako jeho elektrická energie, takže

$$E_{el} = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{(elektrická energie kondenzátoru).} \qquad (26.21)$$

Tento vztah můžeme s přihlédnutím k rov. (26.1) zapsat ve tvaru

$$E_{el} = \tfrac{1}{2}CU^2 \quad \text{(elektrická energie kondenzátoru).} \qquad (26.22)$$

Rov. (26.21) a (26.22) platí nezávisle na geometrickém tvaru kondenzátoru.

Abychom získali fyzikální představu o uložení energie, uvažujme dva deskové kondenzátory C_1 a C_2 se stejně velkou plochou elektrod, ale lišící se tím, že kondenzátor C_2 má dvojnásobnou vzdálenost elektrod než kondenzátor C_1. Kondenzátor C_2 má proto podle rov. (26.9) dvakrát menší kapacitu než kondenzátor C_1. Jestliže oba kondenzátory mají stejný náboj, z rov. (26.21) plyne, že kondenzátor C_2 má dvojnásobnou elektrickou energii než C_1. Ze dvou kondenzátorů se stejně velkým nábojem má tedy ten kondenzátor, který má dvojnásobný objem mezi svými elektrodami, dvojnásobnou elektrickou energii. Uvědomme si současně, že podle rov. (26.4) jsou intenzity elektrických polí mezi elektrodami obou kondenzátorů stejné. To vše nás vede k následujícímu závěru:

Energie nabitého kondenzátoru je soustředěna v elektrickém poli mezi jeho elektrodami.

To je podstatou *polního pojetí*: energii nabitého kondenzátoru nepřisuzujeme nábojům rozloženým na deskách, ale přísluší poli mezi deskami.

Lékařský defibrilátor

Schopnost kondenzátoru akumulovat elektrickou energii je základem *defibrilačních* zařízení, která používají lékaři

k potlačení srdečních fibrilací pacienta. Baterie nabíjí v přenosném zařízení kondenzátor na vysoké napětí a ten akumuluje v době kratší než jedna minuta velkou energii. Baterie sama má jen nevelké napětí; elektronický obvod ho však opakovaně převádí na vyšší napětí a nabíjí jím kondenzátor, přičemž potřebný výkon během tohoto procesu je malý.

Vodivé elektrody se přiloží na hrudník postiženého. Po zapnutí ovládacího spínače vyšle kondenzátor dávku své akumulované energie z jedné elektrody tělem pacienta do druhé elektrody. Je-li např. kondenzátor o kapacitě 70 μF v defibrilátoru nabit na 5 000 V, pak podle rov. (26.22) je energie kondenzátoru

$$E_{\mathrm{el}} = \tfrac{1}{2}CU^2 = \tfrac{1}{2}(70{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{F})(5{\cdot}10^{3}\,\mathrm{V})^2 = 875\,\mathrm{J}.$$

Řekněme, že z ní projde tělem postiženého energie $E'_{\mathrm{el}} = 200\,\mathrm{J}$ během pulzu trvajícího 2,0 ms. Tento pulz má tedy výkon

$$P = \frac{E'_{\mathrm{el}}}{t} = \frac{(200\,\mathrm{J})}{(2{,}0{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{s})} = 100\,\mathrm{kW},$$

který je o mnoho řádů větší než je výkon samotné baterie.

Hustota energie elektrického pole

Zanedbáme-li rozptyl, má elektrické pole ve všech bodech mezi elektrodami deskového kondenzátoru stejnou intenzitu. **Objemová hustota elektrické energie** w_{el}, tj. elektrická energie v objemu jednotkové velikosti, má proto v celém prostoru mezi elektrodami také stejnou velikost. Hodnotu w_{el} získáme vydělením celkové elektrické energie objemem $V = Sd$ prostoru mezi elektrodami, takže

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{E_{\mathrm{el}}}{V} = \frac{CU^2}{2Sd}.$$

Dosazením z rov. (26.9) obdržíme

$$w_{\mathrm{el}} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2.$$

Protože podle rov. (25.42) je podíl U/d roven intenzitě elektrického pole, dostáváme pro objemovou hustotu energie vztah

$$w_{\mathrm{el}} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad \text{(hustota energie).} \qquad (26.23)$$

Ačkoli jsme tento výsledek odvodili pro zvláštní případ deskového kondenzátoru, je platný obecně pro jakékoli elektrické pole.



Při fotografování střely prorážející banán vybil vynálezce stroboskopie Harold Edgerton elektrickou energii kondenzátoru do jedné ze svých stroboskopických lamp. Ta pak jasně ozářila banán v krátkém intervalu 0,3 μs.

PŘÍKLAD 26.5

Jaká je elektrická energie soustavy dvou kondenzátorů na obr. 26.10 v př. 26.4 v okamžicích před a po zapojení spínače S?

ŘEŠENÍ: Na začátku je nabit pouze kondenzátor C_1 na napětí $U_0 = 6{,}30\,\mathrm{V}$. Jeho počáteční elektrická energie je podle rov. (26.22)

$$E_{\mathrm{el,i}} = \tfrac{1}{2}C_1{U_0}^2 = \tfrac{1}{2}(3{,}55{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{F})(6{,}30\,\mathrm{V})^2 = 7{,}04{\cdot}10^{-5}\,\mathrm{J} = 70{,}4\,\mu\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Po sepnutí spínače bude na obou kondenzátorech stejné napětí $U = 1{,}79\,\mathrm{V}$. Konečná elektrická energie obou kondenzátorů je pak

$$E_{\mathrm{el,f}} = \tfrac{1}{2}C_1U^2 + \tfrac{1}{2}C_2U^2 = \tfrac{1}{2}(C_1 + C_2)U^2 = \tfrac{1}{2}(3{,}55{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{F} + 8{,}95{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{F})(1{,}79\,\mathrm{V})^2 = 2{,}00{\cdot}10^{-5}\,\mathrm{J} = 20{,}0\,\mu\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Je tedy $E_{\mathrm{el,f}} < E_{\mathrm{el,i}}$, asi o 72 % $E_{\mathrm{el,i}}$.

Tento závěr není v rozporu se zákonem zachování energie. Zdánlivě „chybějící“ energie byla především disipována ve vodičích (jak bude diskutováno v kap. 27) a část se vyzářila.

PŘÍKLAD 26.6

Izolovaná vodivá koule o poloměru $R = 6{,}85\,\mathrm{cm}$ má náboj $Q = 1{,}25\,\mathrm{nC}$.

(a) Jak velkou elektrickou energii má její elektrické pole?

ŘEŠENÍ: Z rov. (26.21) a (26.18) plyne

$$E_{\mathrm{el}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \\ = \frac{(1{,}25\cdot10^{-9}\ \mathrm{C})^2}{8\pi(8{,}85\cdot10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}})(0{,}068\,5\ \mathrm{m})} = \\ = 1{,}03\cdot10^{-7}\ \mathrm{J} = 103\ \mathrm{nJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je hustota energie těsně nad povrchem koule?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (26.23) je

$$w_{\mathrm{el}} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

Proto musíme nejprve určit velikost intenzity E těsně nad povrchem koule, tj. pro $r \to R$ ($r > R$). Ta je podle rov. (24.15) rovna výrazu

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}.$$

Hustota energie pak je

$$w_{\mathrm{el}} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} = \qquad (26.24)$$
$$= \frac{(1{,}25\cdot10^{-9}\ \mathrm{C})^2}{32\pi^2(8{,}85\cdot10^{-12}\ \mathrm{C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}})(0{,}068\,5\ \mathrm{m})^4} = \\ = 2{,}54\cdot10^{-5}\ \mathrm{J\cdot m^{-3}} = 25{,}4\ \mu\mathrm{J\cdot m^{-3}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaký je poloměr R_0 pomyslné kulové plochy, která by uvnitř obsahovala polovinu celkové elektrické energie nabité koule?

ŘEŠENÍ: Při uvedeném požadavku platí

$$\int_R^{R_0} \mathrm{d}E_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\int_R^{\infty} \mathrm{d}E_{\mathrm{el}}. \qquad (26.25)$$

Dolní mez integrálů je R a nikoli 0, protože uvnitř vodivé koule je konstantní potenciál, tedy nulová intenzita elektrického pole, a tím i nulová elektrická energie.

Energie $\mathrm{d}E_{\mathrm{el}}$, která je v pomyslné infinitezimálně tenké kulové vrstvě mezi jejím vnitřním a vnějším poloměrem r a $r + \mathrm{d}r$ (pro $r > R$), je

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{el}} = w_{\mathrm{el}}(4\pi r^2)\,\mathrm{d}r, \qquad (26.26)$$

kde w_{el} je hustota energie a výraz $4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ je objem kulové vrstvy. Dosadíme-li rov. (26.24) do rov. (26.26) a zaměníme-li R za r v rov. (26.24), dostaneme

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{el}} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}. \qquad (26.27)$$

Dosazením rov. (26.27) do rov. (26.25) dostaneme po zjednodušení

$$\int_R^{R_0} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{1}{2}\int_R^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2},$$

což po integraci dává

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{2R}.$$

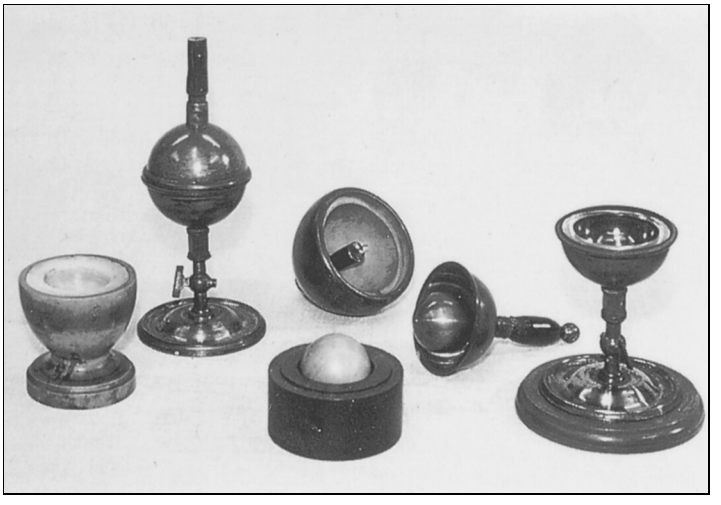
Odtud

$$R_0 = 2R = 2(6{,}85\ \mathrm{cm}) = 13{,}7\ \mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Polovina elektrické energie je tedy obsažena uvnitř kulové plochy, jejíž poloměr R_0 je dvojnásobkem poloměru nabité vodivé koule.

26.6 KONDENZÁTOR S DIELEKTRIKEM

Co se však stane s kapacitou kondenzátoru, jestliže vyplníme prostor mezi jeho elektrodami *dielektrikem*, tedy izolačním (elektricky nevodivým) materiálem, např. minerálním olejem nebo plastickou hmotou? Tímto problémem se poprvé zabýval Michael Faraday v r. 1837. Faraday má hlavní zásluhu na zavedení pojmu kapacita, a proto po něm byla jednotka kapacity v SI pojmenována. Užitím jednoduchých zařízení velice podobných těm, která jsou znázorněna na obr. 26.11, zjistil, že dielektrika lze charakterizovat veličinou ε_{r}, kterou nazval dielektrická konstanta a kterou nyní nazýváme **relativní permitivita**. Relativní permitivita



Obr. 26.11 Jednoduché elektrostatické přístroje používané Faradayem. Složený přístroj (druhý zleva) se skládá z vnitřní mosazné koule a z vnější soustředné mosazné kulové vrstvy. Do prostoru mezi kouli a kulovou vrstvu vložil Faraday vrstvu dielektrika.

udává, kolikrát vzroste kapacita kondenzátoru, vyplníme-li prostor mezi jeho elektrodami zkoumaným izolátorem. (Pro vakuum plyne z definice $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 1$, pro vzduch je nepatrně

vyšší.) V tab. 26.1 jsou uvedena některá dielektrika a jejich relativní permitivity.

Tabulka 26.1 **Některé vlastnosti dielektrik**[a]

MATERIÁL	ε_r	E_{max} / kV·mm^{-1}
vzduch[b]	1,000 54	3
polystyren	2,6	24
papír	3,5	16
transformátorový olej	4,5	
pyrex (varné sklo)	4,7	14
slída	5,4	
porcelán	6,5	
křemík	12	
germanium	16	
ethanol	25	
voda (20 °C)	80,4	
voda (25 °C)	78,5	
titanová keramika	130	
titaničitan strontnatý	310	8

Pro vakuum je $\varepsilon_r = 1$.

[a] měřeno při 20 °C, není-li uvedeno jinak
[b] za normálních podmínek

Jinou veličinou, která charakterizuje dielektrikum, je *průrazné napětí*. Je to při dané tloušťce dielektrika nejnižší napětí, při němž nastane elektrický průraz dielektrika. Při průrazu se vytvoří v dielektriku vodivá dráha mezi elektrodami, dielektrikum ztrácí své izolační vlastnosti, poškodí se. Každé dielektrikum má charakteristickou *dielektrickou pevnost*; ta je rovna maximální intenzitě E_{max} elektrického pole, při níž ještě k průrazu nedojde. Několik těchto hodnot je uvedeno v tab. 26.1.

Jak jsme uvedli v souvislosti s rov. (26.18), může být kapacita každého kondenzátoru zapsána ve tvaru

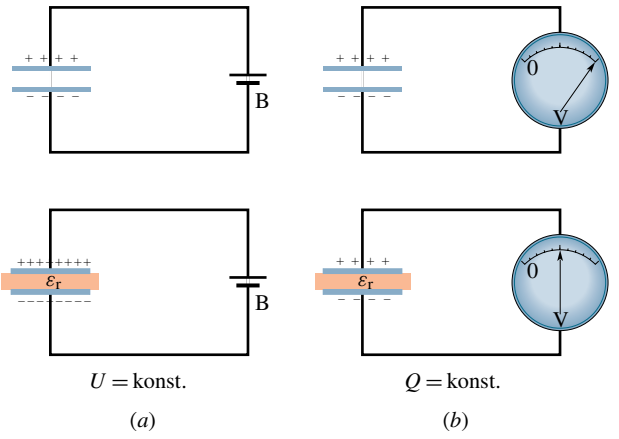
$$C = \varepsilon_0 L, \tag{26.28}$$

kde L má rozměr délky. Např. v případě deskového kondenzátoru je $L = S/d$. Už Faraday zjistil, že pro kondenzátor, který má prostor mezi elektrodami *zcela* vyplněný dielektrikem, lze rov. (26.28) upravit na tvar

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 L = \varepsilon_r C_0, \tag{26.29}$$

kde C_0 je kapacita kondenzátoru bez dielektrika, tj. s vakuem mezi elektrodami (anebo, pro nepříliš náročná měření, se vzduchem). Veličina $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ se nazývá (*absolutní*) **permitivita**.

Obr. 26.12 poskytuje představu o Faradayových experimentech. Podle obr. 26.12a baterie udržuje konstantní napětí U mezi elektrodami kondenzátoru. Faraday objevil,



Obr. 26.12 (a) Je-li mezi elektrodami kondenzátoru udržováno konstantní napětí (např. pomocí baterie), pak vlivem vloženého dielektrika vzroste náboj na elektrodách. (b) Jestliže na elektrodách kondenzátoru zůstává nezměněný náboj, pak dielektrikum vložené mezi elektrody způsobí pokles napětí mezi nimi. Tento pokles napětí vidíme na stupnici *elektrometru* (elektrostatického voltmetru), kterým můžeme měřit napětí, aniž jím prochází proud (tj. aniž se elektrický náboj mezi měřenými místy přesunuje). Kondenzátor se tedy nemůže přes takový elektrometr vybít.

že je-li mezi elektrody kondenzátoru vložena deska dielektrika, pak náboj Q vzroste ε_r-krát a baterie dodá na elektrody kondenzátoru další náboj. V situaci znázorněné na obr. 26.12b však baterie připojena není a náboj Q se tedy nezmění. Je-li nyní vložena dielektrická deska, pak napětí U mezi elektrodami kondenzátoru klesne ε_r-krát. Obě tato pozorování (vzhledem k platnosti vztahu $Q = CU$) potvrzují závěr, že vložením dielektrika vzroste kapacita kondenzátoru.

Porovnání rov. (26.28) a (26.29) ukazuje, že vliv dielektrika můžeme zahrnout do našich dosavadních rovnic obecněji:

V prostoru zcela vyplněném dielektrikem s relativní permitivitou ε_r platí i nadále všechny rovnice elektrostatiky vakua, pokud výraz ε_0 nahradíme výrazem $\varepsilon_0 \varepsilon_r$.

Bodový náboj vložený do (rozlehlého) dielektrika v něm tedy vytváří elektrické pole, jehož intenzita má velikost

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}. \tag{26.30}$$

Vztah pro intenzitu elektrického pole těsně nad povrchem osamoceného vodiče umístěného v dielektriku (viz rov. (24.11)) pak zní

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}. \tag{26.31}$$

Oba tyto vztahy ukazují, že *při neměnném rozložení nábojů* je účinek dielektrika takový, že *zmenšuje intenzitu* elektrického pole v porovnání s vakuem. Mohli bychom říci, že dielektrikum vložené mezi náboje částečně odstíní jejich vzájemné silové působení.

PŘÍKLAD 26.7

Deskový kondenzátor s kapacitou $C = 13{,}5\,\text{pF}$ je nabit na napětí $U = 12{,}5\,\text{V}$. Odpojíme baterii a mezi jeho elektrody zasuneme porcelánovou desku ($\varepsilon_r = 6{,}50$). Jaká je elektrická energie kondenzátoru před vsunutím desky a po něm?

ŘEŠENÍ: Počáteční elektrická energie je vyjádřena vztahem (26.22), tedy

$$E_{el,i} = \tfrac{1}{2}CU^2 = \tfrac{1}{2}(13{,}5\cdot 10^{-12}\,\text{F})(12{,}5\,\text{V})^2 = \\ = 1{,}055\cdot 10^{-9}\,\text{J} = 1\,055\,\text{pJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tuto veličinu můžeme podle rov. (26.21) vyjádřit též ve tvaru

$$E_{el,i} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Tento vztah je v této situaci zvláště vhodný, protože podle zadání zůstává po vložení desky konstantní Q (a nikoli U). Protože kapacita C vzroste po vložení desky ε_r-krát, je

$$E_{el,f} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_r C} = \frac{E_{el,i}}{\varepsilon_r} = \frac{(1\,055\,\text{pJ})}{(6{,}50)} = \\ = 162\,\text{pJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Energie kondenzátoru se tedy po vsunutí desky zmenší ε_r-krát. Pokles energie je vyvolán tím, že se část energie spotřebovala na práci spojenou se zasunutím desky. Elektrické pole kondenzátoru vtahuje desku mezi elektrody kondenzátoru a vykoná při tom práci

$$W = E_{el,i} - E_{el,f} = (1055 - 162)\,\text{pJ} = 893\,\text{pJ}.$$

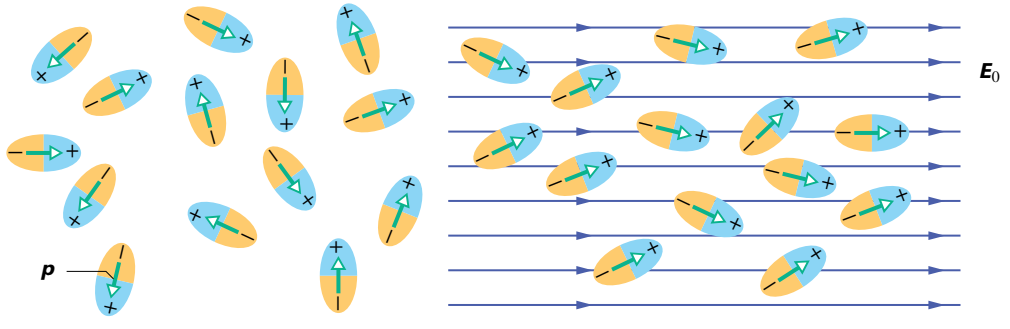
Jestliže by se např. deska mohla posouvat mezi elektrodami bez jakéhokoli odporu a bez tření, kmitala by tam a zpět, jak by byla vtahována do prostoru mezi elektrodami kondenzátoru a setrvačností vždy překmitem vystoupila druhou stranou ven. Mechanická energie kmitů 893 pJ by se zachovávala. Kinetická energie pohybující se desky by se stále měnila na energii elektrického pole a obráceně.

KONTROLA 5: Jaký důsledek bude mít vložení desky pro níže uvedené veličiny, jestliže baterie v př. 26.7 zůstane zapojena: zvětší se, zmenší, či zůstane beze změny hodnota (a) napětí na elektrodách kondenzátoru, (b) kapacity kondenzátoru, (c) náboje kondenzátoru, (d) elektrické energie kondenzátoru, (e) intenzity elektrického pole mezi elektrodami? (*Tip*: Pro odpověď (e) vezměte v úvahu, že náboj na kondenzátoru nezůstává konstantní.)

26.7 DIELEKTRIKA

Co probíhá v dielektriku z hlediska atomové a molekulové struktury, vložíme-li ho do vnějšího elektrického pole? Podle typu molekul, které ho tvoří, mohou nastat dvě situace:

1. ***Polární dielektrika.*** Molekuly některých dielektrik, např. vody, mají stálé (permanentní) elektrické dipólové momenty. V takových materiálech (zvaných *polární dielektrika*) se elektrické dipóly natáčejí do směru vnějšího elektrického pole, jak je znázorněno na obr. 26.13. Protože se však molekuly nepřetržitě navzájem srážejí v důsledku svého nahodilého tepelného pohybu, nejsou uspořádány úplně (orientace elektrických dipólů ne zcela souhlasí se směrem pole). Přitom je orientace tím úplnější, čím větší je intenzita působícího pole a čím nižší je teplota dielektrika



(*a*) (*b*)

Obr. 26.13 (a) Molekuly se stálým elektrickým dipólovým momentem mají náhodnou orientaci elektrických dipólů, nenachází-li se dielektrikum ve vnějším elektrickém poli. (b) Nacházejí-li se molekuly v elektrickém poli, dochází k částečnému uspořádání dipólů. Neuspořádaný (tepelný) pohyb brání úplnému uspořádání.

(a tudíž i intenzita srážek molekul). Uspořádáním elektrických dipólů se vytváří elektrické pole, které má opačnou orientaci než přiložené vnější pole, a má menší intenzitu než pole vnější.

2. ***Nepolární dielektrika.*** Nezávisle na tom, zda mají, či nemají permanentní dipólové momenty, získávají molekuly umístěné do vnějšího elektrického pole *indukované* dipólové momenty. V čl. 25.7 (obr. 25.12) jsme viděli, že se vnější pole projeví „protažením" molekuly, oddálením středů oblastí kladného a záporného náboje v molekule. Tyto indukované momenty jsou však ve srovnání s vlastními dipólovými momenty o několik řádů menší ($\approx 10^{-35}$ C·m); atomy a molekuly se významněji deformují až ve velmi silných elektrických polích.

Na obr. 26.14a je deska z nepolárního dielektrika. Na obr. 26.14b na tuto desku působí vnější elektrické pole kondenzátoru o intenzitě $\boldsymbol{E}_0$, s polaritou vyznačenou na obrázku. Vlivem pole $\boldsymbol{E}_0$ se trochu oddálí středy oblastí kladných a záporných nábojů v atomech (molekulách) dielektrika; to se projeví vznikem kladného povrchového náboje na jedné straně desky a záporného na straně opačné. Desku tak můžeme považovat za velký makroskopický dipól. Deska jako celek však zůstává elektricky neutrální, neboť uvnitř desky nepřevládá náboj ani kladného, ani záporného znaménka ve kterémkoli objemovém elementu obsahujícím dostatečný počet molekul.

Z obr. 26.14c vidíme, že indukovaný povrchový náboj na čelních plochách desky vytváří elektrické pole $\boldsymbol{E}'$, které je orientováno opačně než přiložené vnější pole $\boldsymbol{E}_0$. Výsledné pole $\boldsymbol{E}$ uvnitř dielektrika ($\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$) má směr pole $\boldsymbol{E}_0$, ale je slabší (má menší velikost intenzity než vnější pole, $E < E_0$).

Jak pole $\boldsymbol{E}'$ vytvořené povrchovými náboji, tak i pole tvořené permanentními elektrickými dipóly na obr. 26.13 mají to společné, že jsou orientována proti poli $\boldsymbol{E}_0$. Jak polární, tak i nepolární dielektrika po vložení do vnějšího elektrického pole, které dielektrikem proniká, toto pole v sobě zeslabují.

Nyní je zřejmé, proč je porcelánová deska v př. 26.7 vtahována do prostoru mezi elektrodami kondenzátoru; nachází-li se deska (alespoň částečně) v prostoru mezi elektrodami, indukují se na jejích stěnách přilehlých k elektrodám náboje opačných znamének, než mají náboje na těchto přilehlých elektrodách kondenzátoru. V důsledku přitažlivých sil mezi náboji na elektrodách a náboji indukovanými na desce vzniká síla, která vtahuje desku do prostoru mezi elektrodami.

26.8 DIELEKTRIKA A GAUSSŮV ZÁKON ELEKTROSTATIKY

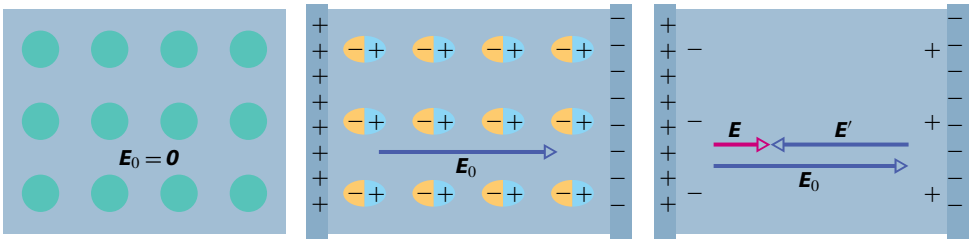
Při našem výkladu o Gaussově zákonu elektrostatiky v kapitole 24 jsme uvažovali náboje ve vakuu. Nyní budeme sledovat, jak se změní a zobecní tento zákon v dielektrickém prostředí, např. v některém z dielektrik uvedených v tab. 26.1. Obr. 26.15 znázorňuje deskový kondenzátor s elektrodami o ploše S. Předpokládejme, že volný náboj Q na elektrodách kondenzátoru je stejný jak v případě s vloženým dielektrikem, tak i bez něj. Připomeňme, že pole mezi elektrodami indukuje vázané náboje na čelních plochách dielektrika jedním z procesů popsaných v čl. 26.7.

V případě kondenzátoru bez dielektrika (obr. 26.15a) můžeme stanovit elektrické pole $\boldsymbol{E}_0$ mezi elektrodami tak, jak to bylo vysvětleno u obr. 26.5: obklopíme náboj $+Q$ na horní elektrodě Gaussovou plochou a použijeme Gaussův zákon elektrostatiky. Je-li E_0 velikost intenzity elektrického pole, můžeme psát

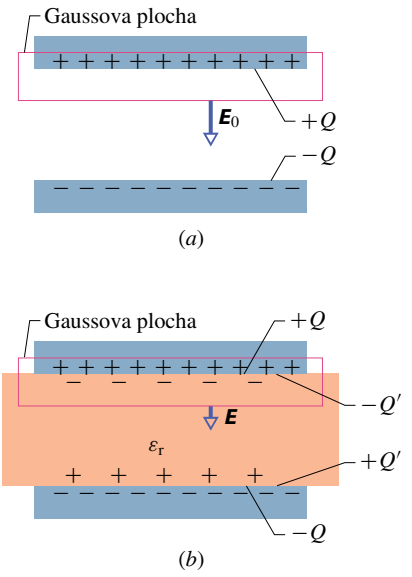
$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 E_0 S = Q \qquad (26.32)$$

a odtud

$$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}. \qquad (26.33)$$



Obr. 26.14 (a) Dielektrická deska. Kroužky znázorňují elektricky neutrální atomy uvnitř desky. (b) Elektrické pole je vytvořeno nabitými elektrodami kondenzátoru; pole mírně „protáhne atomy", oddělí od sebe středy oblastí kladných a záporných nábojů. (c) Uvedené oddělení vede ke vzniku povrchových nábojů na čelech desky. Tyto náboje vytvářejí pole o intenzitě $\boldsymbol{E}'$ orientované opačně než vnější pole o intenzitě $\boldsymbol{E}_0$. Intenzita výsledného pole uvnitř dielektrika $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$ má směr pole $\boldsymbol{E}_0$ avšak menší velikost.



Obr. 26.15 Deskový kondenzátor (a) bez dielektrika, (b) s vloženou deskou dielektrika. O nábojí Q na elektrodách se předpokládá, že je stejný v obou případech.

Pro případ podle obr. 26.15b, tedy za přítomnosti dielektrika, můžeme určit elektrické pole mezi elektrodami (tedy uvnitř dielektrika) pomocí téže Gaussovy plochy. Uvnitř uzavřené Gaussovy plochy jsou však nyní náboje dvojího druhu; je to jednak volný náboj $+Q$ na horní elektrodě, jednak indukovaný náboj $-Q'$ na horní ploše dielektrika. Náboj na vodivé elektrodě je *volný náboj*, protože se může pohybovat, jestliže změníme elektrický potenciál elektrody. Indukovaný náboj na povrchu dielektrika není volný, protože nemůže být z této plochy odveden.

Celkový náboj uvnitř Gaussovy plochy je tedy $Q - Q'$ (obr. 26.15b). Proto podle Gaussova zákona elektrostatiky platí

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 E S = Q - Q' \qquad (26.34)$$

a odtud

$$E = \frac{Q - Q'}{\varepsilon_0 S}. \qquad (26.35)$$

Z předchozích výkladů víme, že vložené dielektrikum zmenšuje intenzitu E_0 původního pole ε_r-krát. Proto platí

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}. \qquad (26.36)$$

Porovnání rov. (26.35) a (26.36) dává

$$Q - Q' = \frac{Q}{\varepsilon_r}. \qquad (26.37)$$

Rov. (26.37) ukazuje, že velikost indukovaného povrchového náboje Q' je menší než velikost volného náboje Q a je rovna nule za nepřítomnosti dielektrika, tj. je-li v rov. (26.37) bráno $\varepsilon_r = 1$.

Po dosazení za $Q - Q'$ z rov. (26.37) do (26.34) můžeme zapsat Gaussův zákon elektrostatiky ve tvaru

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q \qquad \text{(Gaussův zákon elektrostatiky pro dielektrikum).} \qquad (26.38)$$

Tuto významnou rovnici jsme sice odvodili pro elektrické pole deskového kondenzátoru, ale platí obecně a je nejobecnějším tvarem Gaussova zákona elektrostatiky. Doplňme k tomu následující:

1. Plošný integrál v rov. (26.38) nevyjadřuje tok vektoru $\boldsymbol{E}$, nýbrž tok vektoru $\varepsilon_r \boldsymbol{E}$. Vektor $\varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$ se nazývá **elektrická indukce** $\boldsymbol{D}$ a rov. (26.38) pak může být zapsána v jednodušším tvaru $\oint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$.

2. Náboj Q, který je uvnitř Gaussovy plochy, je *pouze volný náboj*. Indukovaný (vázaný) povrchový náboj není na pravé straně rov. (26.38) záměrně explicitně vyjádřen; jeho vliv na elektrické pole je započten zavedením relativní permitivity na levé straně rov. (26.38).

3. Rov. (26.38) se liší od rov. (24.7) tím, že obsahuje výraz $\varepsilon_r \varepsilon_0$ namísto ε_0. Výraz ε_r zahrnujeme do integrandu, čímž se umožní postihnout i takové případy, ve kterých ε_r není konstantní na Gaussově ploše, protože je funkcí souřadnic: $\varepsilon_r = \varepsilon_r(x, y, z)$.

PŘÍKLAD 26.8

Obr. 26.16 znázorňuje deskový kondenzátor s elektrodami o obsahu S, které jsou ve vzdálenosti d. Na elektrodách je napětí U_0. Po nabití kondenzátoru byla baterie odpojena a mezi elektrody byla vsunuta deska z dielektrika tloušťky b o relativní permitivitě ε_r tak, jak je znázorněno na obr. 26.16. Uvažujme hodnoty $S = 115\,\mathrm{cm}^2$, $d = 1{,}24\,\mathrm{cm}$, $U_0 = 85{,}5\,\mathrm{V}$, $b = 0{,}780\,\mathrm{cm}$, $\varepsilon_r = 2{,}61$.

(a) Jaká byla kapacita C_0 kondenzátoru před vložením dielektrika?

ŘEŠENÍ: Z rov. (26.9) dostáváme

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{(8{,}85{\cdot}10^{-12}\,\mathrm{F{\cdot}m^{-1}})(115{\cdot}10^{-4}\,\mathrm{m}^2)}{(1{,}24{\cdot}10^{-2}\,\mathrm{m})} =$$
$$= 8{,}21{\cdot}10^{-12}\,\mathrm{F} = 8{,}21\,\mathrm{pF}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

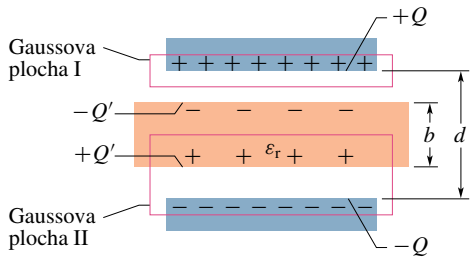
(b) Jak velký je volný náboj kondenzátoru?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (26.1) je

$$Q = C_0 U_0 = (8{,}21{\cdot}10^{-12}\,\mathrm{F})(85{,}5\,\mathrm{V}) =$$
$$= 7{,}02{\cdot}10^{-10}\,\mathrm{C} = 702\,\mathrm{pC}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Protože baterie byla před vložením dielektrické desky odpojena, zůstává volný náboj nezměněn i po vložení této desky.

(c) Jaká je intenzita E_0 v mezeře mezi elektrodami a dielektrickou deskou?



Obr. 26.16 Příklad 26.8. Mezi elektrodami deskového kondenzátoru je deska dielektrika, která jen částečně vyplňuje prostor mezi elektrodami.

ŘEŠENÍ: Použijme Gaussova zákona elektrostatiky ve tvaru (26.38) s Gaussovou plochou I podle obr. 26.16. Tato Gaussova plocha obklopuje pouze volný náboj na horní elektrodě kondenzátoru. Skalární součin $\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ je nenulový jen v mezeře a v ní jsou tyto vektory souhlasně orientované směrem dolů. Proto

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varepsilon_0(1)E_0 S = Q$$

a odtud

$$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{(7{,}02\cdot10^{-10}\,\mathrm{C})}{(8{,}85\cdot10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}})(115\cdot10^{-4}\,\mathrm{m^2})} = \\ = 6\,900\,\mathrm{V\cdot m^{-1}} = 6{,}90\,\mathrm{kV\cdot m^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Poznamenejme, že v této rovnici bereme $\varepsilon_r = 1$, protože ta část Gaussovy plochy, přes kterou integrujeme a kterou prochází nenulový tok vektoru intenzity, nevede dielektrikem. Poznamenejme ještě, že hodnota E_0 se vložením desky nemění, protože se nemění velikost volného náboje uvnitř Gaussovy plochy I.

(d) Jaká je velikost intenzity elektrického pole E_1 v dielektriku?

ŘEŠENÍ: Použijme rov. (26.38) při volbě Gaussovy plochy II podle obr. 26.16. Uvnitř plochy je volný náboj $-Q$ a indukovaný náboj $+Q'$; při použití rov. (26.38) uvažujeme jen volný náboj $-Q$. Skalární součin $\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ je nenulový jen v prostoru mezi elektrodami a zároveň jsou v tomto prostoru tyto vektory opačně orientované. Proto

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\varepsilon_0\varepsilon_r E_1 S = -Q. \qquad (26.39)$$

(První záporné znaménko zleva plyne ze skalárního součinu $\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, protože vektor $\boldsymbol{E}_1$ směřuje dolů a vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ směřuje vzhůru — vektory jsou opačně orientovány.) Rov. (26.39) dává

$$E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_r\varepsilon_0 S} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{(6{,}90\,\mathrm{kV\cdot m^{-1}})}{(2{,}61)} = \\ = 2{,}64\,\mathrm{kV\cdot m^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(e) Jaké je napětí U mezi elektrodami po vsunutí desky dielektrika?

ŘEŠENÍ: Vyjdeme z rov. (26.6), přičemž budeme integrovat podél přímé integrační cesty kolmé k oběma elektrodám. Uvnitř dielektrika je délka integrační cesty b a intenzita elektrického pole je zde E_1. Uvnitř obou štěrbin nad a pod dielektrikem má integrační cesta délku $d-b$ a intenzita elektrického pole je zde E_0. Rov. (26.6) pak dává

$$U = \int_{(+)}^{(-)} E\,\mathrm{d}s = E_0(d-b) + E_1 b = \\ = (6\,900\,\mathrm{V\cdot m^{-1}})(0{,}012\,4\,\mathrm{m} - 0{,}007\,80\,\mathrm{m}) + \\ + (2\,640\,\mathrm{V\cdot m^{-1}})(0{,}007\,80\,\mathrm{m}) = \\ = 52{,}3\,\mathrm{V}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato hodnota se liší od původního napětí, které bylo 85,5 V.

(f) Jaká je kapacita kondenzátoru s vloženým dielektrikem?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (26.1) je

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{(7{,}02\cdot10^{-10}\,\mathrm{C})}{(52{,}3\,\mathrm{V})} = \\ = 1{,}34\cdot10^{-11}\,\mathrm{F} = 13{,}4\,\mathrm{pF}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato hodnota je větší než původní hodnota $C_0 = 8{,}21$ pF.

KONTROLA 6: Nechme v př. 26.8 tloušťku b desky dielektrika vzrůstat. Budou se v důsledku toho následující veličiny zvětšovat, zmenšovat, či zůstanou beze změny? (a) Intenzita elektrického pole E_1, (b) napětí mezi elektrodami, (c) kapacita kondenzátoru.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Kondenzátor, kapacita

Kondenzátor se skládá ze dvou vzájemně elektricky oddělených vodičů (elektrod), které v případě, že je kondenzátor nabit, mají stejně velké náboje opačných znamének $+Q$ a $-Q$. Jeho *kapacita* je definována vztahem

$$C = \frac{Q}{U}, \tag{26.2}$$

kde U je napětí mezi elektrodami. Jednotka kapacity v SI je farad (1 farad $= 1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C{\cdot}V^{-1}}$).

Určení kapacity

Obecně můžeme určit kapacitu každého kondenzátoru tak, že: (1) vyjádříme náboj Q kondenzátoru, (2) určíme intenzitu $\boldsymbol{E}$ elektrického pole vytvořeného náboji na elektrodách kondenzátoru, (3) určíme napětí U na kondenzátoru, (4) vypočteme C podle vztahu (26.2).

Kapacity některých typů kondenzátorů:

Deskový kondenzátor je tvořen rovinnými rovnoběžnými elektrodami. Je-li vzdálenost elektrod d a má-li každá elektroda plochu o obsahu S, je kapacita deskového kondenzátoru

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \tag{26.9}$$

Válcový kondenzátor je tvořen dvěma elektrodami tvaru souosých válcových ploch délky L, z nichž vnitřní má poloměr a a vnější b. (Předpokládáme $b > a$, $L \gg b$.) Kapacita válcového kondenzátoru je

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}. \tag{26.14}$$

Kulový kondenzátor je tvořen dvěma elektrodami ve tvaru soustředných kulových ploch, z nichž vnitřní má poloměr a a vnější b ($b > a$). Kapacita kulového kondenzátoru je

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}. \tag{26.17}$$

Jestliže v rov. (26.17) $b \to \infty$ a současně položíme $a = R$, obdržíme vztah pro kapacitu osamocené vodivé koule poloměru R:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R. \tag{26.18}$$

Paralelně a sériově spojené kondenzátory

Výsledná kapacita C_p, resp. C_s *paralelního*, resp. *sériového* spojení kondenzátorů je

$$C_\mathrm{p} = \sum_{j=1}^{n} C_j \quad (n \text{ kondenzátorů spojených paralelně}), \tag{26.19}$$

resp.

$$\frac{1}{C_\mathrm{s}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j} \quad (n \text{ kondenzátorů spojených sériově}). \tag{26.20}$$

Tyto vzorce můžeme použít i k výpočtu kapacit komplikovanějších sériově-paralelních spojení.

Elektrická energie a hustota energie elektrického pole

Elektrická energie E_el nabitého kondenzátoru je

$$E_\mathrm{el} = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2}CU^2. \tag{26.21, 26.22}$$

Je rovna práci potřebné k nabití kondenzátoru. Tato energie je uložena v elektrickém poli kondenzátoru. *Hustota energie* w_el elektrického pole je vyjádřena vztahem

$$w_\mathrm{el} = \frac{E_\mathrm{el}}{V} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2, \tag{26.23}$$

kde V je objem oblasti, v níž je elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$.

Kapacita kondenzátoru s dielektrikem

Jestliže je prostor mezi elektrodami kondenzátoru zcela vyplněn dielektrikem, zvětší se jeho kapacita ε_r-krát, kde ε_r je *relativní permitivita* charakterizující materiál (dielektrikum). V prostoru zcela vyplněném dielektrikem musíme ve všech rovnicích elektrostatiky nahradit veličinu ε_0 výrazem $\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0$.

Procesům probíhajícím v dielektriku nacházejícím se ve vnějším elektrickém poli můžeme fyzikálně porozumět na základě výkladu o působení elektrického pole na permanentní nebo na indukovaný elektrický dipól v dielektriku. Jako výsledek tohoto působení se objeví indukované náboje na povrchu dielektrika, což vede k tomu, že intenzita výsledného elektrického pole v dielektriku je menší než intenzita vnějšího elektrického pole.

Gaussův zákon elektrostatiky v dielektriku

Za přítomnosti dielektrika má *Gaussův zákon elektrostatiky* tvar

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_\mathrm{r}\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q, \tag{26.38}$$

resp.

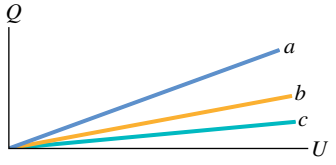
$$\oint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q,$$

kde $\boldsymbol{D}$ je elektrická indukce a Q je volný náboj uvnitř Gaussovy plochy. Vliv indukovaného povrchového náboje je vyjádřen relativní permitivitou ε_r, která je zahrnuta do integrálu v rov. (26.38).

OTÁZKY

1. Grafy na obr. 26.17 vyjadřují závislost náboje na napětí u tří deskových kondenzátorů. Velikosti ploch elektrod a jejich vzdálenosti jsou uvedeny v tabulce. Ke každému grafu z obr. 26.17 přiřaďte odpovídající kondenzátor podle tabulky.

KONDENZÁTOR	PLOCHA	VZDÁLENOST
1	S	d
2	$2S$	d
3	S	$2d$



Obr. 26.17 Otázka 1

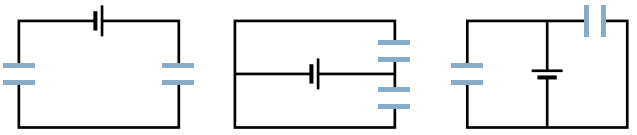
2. Obr. 26.18 ukazuje příčný řez osamocenou plnou kovovou koulí A o poloměru R a dvěma kulovými kondenzátory B a C s vnitřními poloměry R a vnějšími poloměry $2R$. Vnitřní kulová elektroda kondenzátoru B je kulová plocha, zatímco vnitřní kulová elektroda kondenzátoru C je plná koule. Seřaďte objekty A, B a C sestupně podle velikosti jejich kapacit.



Obr. 26.18 Otázka 2

3. Rozhodněte, zda kapacita deskového kondenzátoru vzroste, klesne, nebo se nezmění, když mezi elektrody kondenzátoru vsuneme plochou velmi tenkou aluminiovou fólii tak, že (a) fólie je vodivě spojena s jednou elektrodou, (b) fólie je od elektrod izolována. (*Tip*: V části (b) uvažujte výslednou kapacitu.)

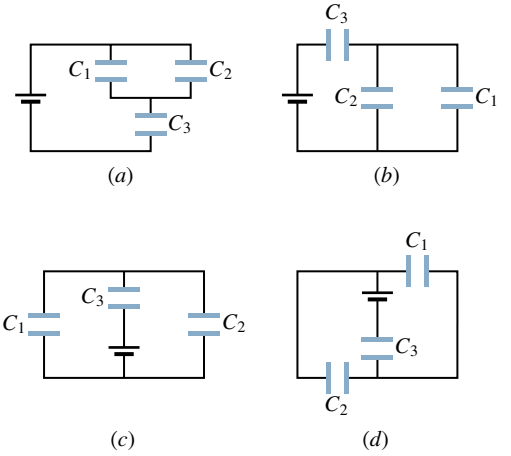
4. Jsou v elektrických obvodech znázorněných na obr. 26.19, kondenzátory spojeny sériově, paralelně, nebo jiným způsobem?



Obr. 26.19 Otázka 4

5. Dva kondenzátory jsou připojeny k baterii: (a) Při kterém spojení kondenzátorů (paralelním, nebo sériovém) je napětí na obou kondenzátorech stejné a rovno napětí na ekvivalentním kondenzátoru? (b) Při které kombinaci kondenzátorů je náboj na obou kondenzátorech stejný a roven náboji na jejich ekvivalentním kondenzátoru?

6. (a) Jsou kondenzátory C_1 a C_3 na obr. 26.20a spojeny do série? (b) Jsou kondenzátory C_1 a C_2 na tomtéž obrázku spojeny paralelně? (c) Čtyři elektrické obvody na obr. 26.20 seřaďte sestupně podle velikosti výsledné kapacity.



Obr. 26.20 Otázka 6

7. Vypočítejte výslednou kapacitu tří kondenzátorů o stejných kapacitách C, jsou-li spojeny (a) sériově, (b) paralelně. (c) Při kterém spojení těchto kondenzátorů bude na jejich ekvivalentním kondenzátoru větší náboj?

8. Kondenzátory o kapacitách C_1 a C_2 ($C_1 > C_2$) jsou připojeny k baterii, nejprve jednotlivě, potom sériově a nakonec paralelně. Seřaďte tato spojení sestupně podle velikosti náboje na nich uloženého.

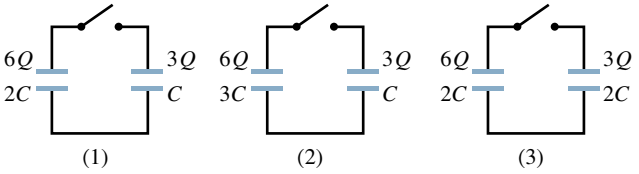
9. (a) Je v př. 26.3 napětí na kondenzátoru C_2 ve srovnání s napětím na kondenzátoru C_1 větší, menší, nebo je stejné? (b) Je náboj kondenzátoru C_2 ve srovnání s nábojem kondenzátoru C_1 větší, menší, nebo stejný?

10. K baterii byl nejprve připojen kondenzátor C_1, potom byl k němu paralelně připojen kondenzátor C_2. (a) Je napětí na kondenzátoru C_1 po této změně větší, menší, či stejně velké? (b) Je náboj Q_1 na kondenzátoru C_1 po této změně větší, menší, či zůstal stejně velký? (c) Je kapacita C_{12} paralelně spojených kondenzátorů C_1 a C_2 větší, menší, či stejně velká ve srovnání s kapacitou C_1? (d) Je celkový náboj akumulovaný kondenzátory C_1 a C_2 větší, menší, či stejně velký ve srovnání s nábojem, který měl kondenzátor C_1 před připojením kondenzátoru C_2?

11. Řešte otázku 10 pro případ, že kondenzátor C_2 byl připojen ke kondenzátoru C_1 sériově.

12. V př. 26.4 zvětšíme kapacitu C_2. Zjistěte, co se stane s níže uvedenými veličinami: zvětší se, zmenší se, či zůstanou beze změny? (a) Výsledné napětí na každém z kondenzátorů, (b) část celkového náboje Q uložená na kondenzátoru C_1, (c) část celkového náboje Q uložená na kondenzátoru C_2.

13. Na obr. 26.21 jsou tři obvody, z nichž každý obsahuje spínač a dva kondenzátory, které jsou na počátku nabité tak, jak je znázorněno. Ve kterém z těchto obvodů náboj na levém kondenzátoru po sepnutí spínače (a) vzroste, (b) klesne, (c) zůstane beze změny?

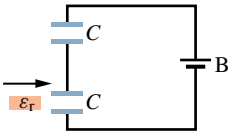


Obr. 26.21 Otázka 13

14. Dvě osamocené kovové koule A a B mají poloměry R a $2R$ a jsou nabité stejně velkými náboji. Porovnejte velikosti následujících veličin: (a) kapacity koulí, (b) objemové hustoty energie v blízkosti povrchů vně koulí, (c) hustoty energie ve vzdálenosti $3R$ od středu koulí, (d) celkové energie elektrických polí vytvořených nabitými koulemi.

15. Olejový deskový kondenzátor má mít kapacitu C a má být bezpečně funkční až do napětí U_m. Nebyl však navržen dobře a občas dochází k průrazu. Jak máme návrh změnit, aby s týmž olejem byl plně funkční při stejných hodnotách U_m a C?

16. Deska dielektrika je vsunuta mezi elektrody jednoho ze dvou stejných kondenzátorů (obr. 26.22). Rozhodněte, zda se hodnoty níže uvedených veličin tohoto kondenzátoru zvětší, zmenší, či zda se nezmění: (a) kapacity, (b) náboje, (c) napětí, (d) elektrické energie. (e) Jak budou znít odpovědi na tytéž otázky pro druhý kondenzátor?



Obr. 26.22 Otázka 16

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 26.2 Kapacita

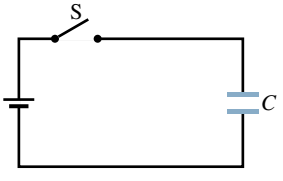
1C. Elektrometr je zařízení na měření statického náboje. Je to vlastně kondenzátor, na jehož elektrody přeneseme náboj neznámé velikosti a přečteme napětí. Jakou minimální hodnotu náboje můžeme změřit elektrometrem o kapacitě 50 pF a napěťové citlivosti 0,15 V?

2C. Kovová pilka a klíč (obr. 26.23) nesou náboje $+70$ pC a -70 pC, které mezi nimi vyvolávají napětí 20 V. (a) Jaká je kapacita systému těchto dvou předmětů? (b) Co se stane s kapacitou systému, změní-li se hodnoty nábojů na $+200$ pC a -200 pC? (c) Jak se změní napětí?



Obr. 26.23 Cvičení 2

3C. Kondenzátor na obr. 26.24 má kapacitu 25 μF a je nenabitý. Baterie poskytuje napětí 120 V. Jak velký elektrický náboj projde spínačem S po jeho zapnutí?



Obr. 26.24 Cvičení 3

ODST. 26.3 Výpočet kapacity

4C. Vyjádříme-li ε_0 z rov. (26.9), zjistíme, že v mezinárodní soustavě jednotek (SI) je jednotkou této veličiny $F{\cdot}m^{-1}$. Dokažte, že tato jednotka je ekvivalentní jednotce, kterou jsme pro ε_0 uvedli dříve, tj. jednotce $C^2{\cdot}N^{-1}{\cdot}m^{-2}$.

5C. Deskový kondenzátor má elektrody kruhového tvaru o poloměru 8,2 cm vzdálené od sebe 1,3 mm. (a) Vypočítejte jeho kapacitu. (b) Jak velký náboj se objeví na elektrodách, když na kondenzátor vložíme napětí 120 V?

6C. Máme k dispozici dvě ploché kovové desky, každá má obsah 1,00 m^2. Máme z nich zkonstruovat deskový kondenzátor. V jaké vzdálenosti by se musely nacházet jeho elektrody, měla-li být kapacita kondenzátoru 1,00 F? Můžeme takový kondenzátor skutečně zkonstruovat?

7C. Elektrody kulového kondenzátoru mají poloměry 38,0 mm a 40,0 mm. (a) Vypočítejte jeho kapacitu. (b) Jak velký obsah by musely mít elektrody deskového kondenzátoru se stejnou vzdáleností elektrod, aby měl stejnou kapacitu jako tento kulový kondenzátor?

8C. Chlapec přešel po koberci za suchého počasí a rukou se přiblížil ke kovové klice dveří. Mezi jeho rukou a klikou přeskočila 5 mm dlouhá elektrická jiskra. Tak velká jiskra signalizuje, že mezi jeho tělem a klikou musí být napětí okolo 15 kV. Jak velký náboj se nahromadil na jeho těle chůzí po koberci, když napětí mezi tělem a kobercem dosáhlo uvedené hodnoty? V úvaze zhruba nahraďte chlapcovo tělo rovnoměrně nabitou vodivou koulí o poloměru 25 cm, elektricky izolovanou od okolí.

9C. Dva stejně velké archy hliníkové fólie jsme umístili rovnoběžně 1,0 mm od sebe. Takto vzniklý kondenzátor o kapacitě 10 pF byl nabit na napětí 12 V. (a) Vypočítejte obsah každého archu. Poté jsme archy přiblížili na vzdálenost 0,10 mm při nezměněném náboji. (b) Jaká je nová hodnota kapacity? (c) Jak se změnilo napětí? Vysvětlete, jak na základě těchto změn by mohl být konstruován mikrofon.

10C. Kulová kapka rtuti o poloměru R má kapacitu $C = 4\pi\varepsilon_0 R$. Dvě takové kapky spojíme do jedné. Jaká bude její kapacita?

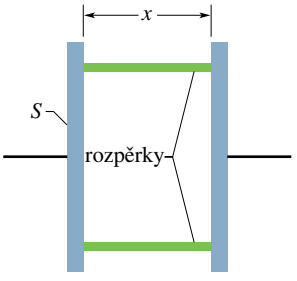
11Ú. Použijte přibližného vztahu $\ln(1+x) \doteq x$ pro $x \ll 1$ (viz dodatek E), a dokažte, že vzorec pro výpočet kapacity válcového kondenzátoru přejde ve vzorec pro výpočet kapacity deskového kondenzátoru, když je vzdálenost mezi elektrodami velmi malá.

12Ú. Předpokládejte, že elektrody kulového kondenzátoru mají přibližně stejné poloměry a, b, kde $a < b$. Za této podmínky se kapacita kulového kondenzátoru blíží kapacitě deskového kondenzátoru se vzdáleností elektrod $d = b - a$. Dokažte, že v takovém případě rov. (26.17) v limitě získá tvar rov. (26.9).

13Ú. Kondenzátor má být zkonstruován tak, aby pracoval s konstantní kapacitou v prostředí s kolísavou teplotou. Na obr. 26.25 je znázorněn kondenzátor deskového typu s dielektrickými rozpěrnými vložkami, které mají udržet elektrody navzájem rovnoběžné. (a) Dokažte, že poměr změny kapacity C a změny teploty T je dán vztahem:

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T} = C\left(\frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T} - \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}T}\right),$$

kde S je plocha jedné elektrody a x je vzdálenost elektrod. (b) Kdyby byly elektrody hliníkové, jakou hodnotu by měl mít součinitel teplotní délkové roztažnosti rozpěrek, aby bylo zaručeno, že se kapacita kondenzátoru nebude měnit s teplotou? (Zanedbejte vliv rozpěrek na permitivitu prostředí mezi elektrodami.)

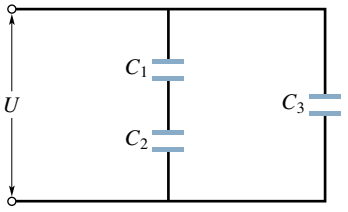


Obr. 26.25 Úloha 13

ODST. 26.4 Kondenzátory spojené paralelně a sériově

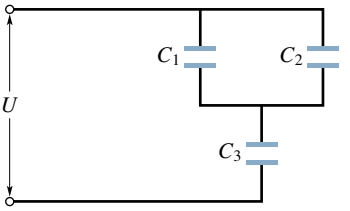
14C. Kolik kondenzátorů o kapacitě 1,00 μF musí být spojeno paralelně, aby celkový náboj na nich byl 1,00 C? Napětí vložené na každý kondenzátor je 110 V.

15C. Vypočítejte výslednou kapacitu bloku tří kondenzátorů spojených podle obr. 26.26. Jejich kapacity mají hodnoty $C_1 = 10{,}0\,\mu\mathrm{F}$, $C_2 = 5{,}00\,\mu\mathrm{F}$ a $C_3 = 4{,}00\,\mu\mathrm{F}$.



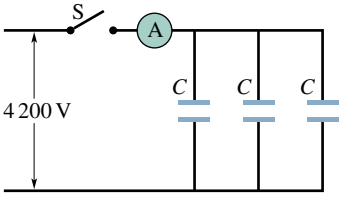
Obr. 26.26 Cvičení 15 a úloha 47

16C. Určete výslednou kapacitu bloku kondenzátorů na obrázku 26.27. Jejich kapacity jsou: $C_1 = 10{,}0\,\mu\mathrm{F}$, $C_2 = 5{,}00\,\mu\mathrm{F}$ a $C_3 = 4{,}00\,\mu\mathrm{F}$.



Obr. 26.27 Cvičení 16, úlohy 24 a 45

17C. Každý ze tří nenabitých kondenzátorů na obr. 26.28 má kapacitu 25,0 μF. Po zapnutí spínače se na kondenzátorech ustálí napětí 4 200 V. Jak velký elektrický náboj (v coulombech) prošel ampérmetrem?

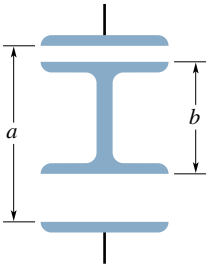


Obr. 26.28 Cvičení 17

18C. Kondenzátor o kapacitě $C_1 = 6{,}00\,\mu\mathrm{F}$ je spojen do série s kondenzátorem o kapacitě $C_2 = 4{,}00\,\mu\mathrm{F}$. Vstupní svorky této sestavy kondenzátorů byly připojeny ke zdroji napětí 200 V. (a) Vypočítejte výslednou kapacitu této sestavy. (b) Jak velký náboj je na každém kondenzátoru? (c) Jaké je napětí na každém kondenzátoru?

19C. Zopakujte cvič. 18 se stejnou dvojicí kondenzátorů spojených paralelně.

20Ú. Na obr. 26.29 jsou dva kondenzátory spojené do série.



Obr. 26.29 Úloha 20

Střední část této sestavy kondenzátorů má délku b a je svisle pohyblivá. Dokažte, že výsledná kapacita této sestavy je nezávislá na poloze střední části a má velikost $C = \varepsilon_0 S/(a-b)$.

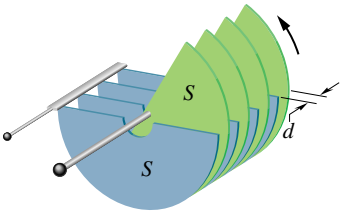
21Ú. (a) Tři stejné kondenzátory jsou spojeny paralelně. Elektrody každého z nich jsou ve vzdálenosti d a mají obsah S. Jakou vzdálenost by musely mít elektrody jednoho kondenzátoru, aby kapacita tohoto jediného kondenzátoru byla rovna kapacitě paralelní kombinace všech tří kondenzátorů? (b) Jakou vzdálenost

elektrod by musel mít jediný kondenzátor, aby se jeho kapacita rovnala kapacitě sériového spojení všech tří kondenzátorů?

22Ú. (a) Dva kondenzátory o kapacitách $C_1 = 2{,}0\,\mu\text{F}$ a $C_2 = 8{,}0\,\mu\text{F}$ jsou spojeny do série a připojeny ke zdroji napětí 300 V. Jaký náboj a jaké napětí je na každém z nich? (b) Nabité kondenzátory byly rozpojeny a odpojeny od zdroje napětí. Poté byly opět spolu spojeny: kladná elektroda jednoho s kladnou elektrodou druhého kondenzátoru a záporná elektroda jednoho se zápornou elektrodou druhého. Jaký náboj a jaké napětí je na každém kondenzátoru nyní? (c) Předpokládejte, že nabité kondenzátory v části (a) této úlohy byly spolu spojeny v uzavřený okruh tak, že spolu byly spojeny elektrody s opačnými znaménky nábojů. Jaký náboj a jaké napětí bude na každém kondenzátoru po ustálení stavu?

23Ú. Na obr. 26.30 vidíme otočný vzduchový kondenzátor, typ používaný k ručnímu ladění rozhlasových přijímačů. Jsou v něm navzájem propojeny jednak všechny sudé elektrody, jednak všechny liché elektrody. Sudé elektrody jsou pevné, liché se mohou otáčet. Uvažujte blok n elektrod střídavé polarity. Každá elektroda má obsah S a mezi sousedními elektrodami je vzduchová mezera šířky d. Dokažte, že maximální kapacita tohoto kondenzátoru je

$$C = \frac{(n-1)\varepsilon_0 S}{d}.$$



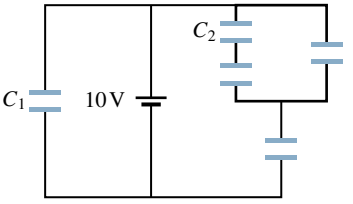
Obr. 26.30 Úloha 23

24Ú. V kondenzátoru C_3 (obr. 26.27) došlo k elektrickému průrazu a kondenzátor se stal pro elektrický proud průchodným. Jaké změny (a) náboje a (b) napětí následovaly na kondenzátoru C_1? Předpokládejte, že napětí na svorkách uvedené sestavy kondenzátorů je $U = 100\,\text{V}$.

25Ú. Je dáno několik kondenzátorů o kapacitách $2{,}0\,\mu\text{F}$. Kondenzátory vydrží napětí maximálně 200 V bez elektrického průrazu. Jak byste z těchto kondenzátorů vytvořili sestavu kondenzátorů o výsledné kapacitě (a) $0{,}40\,\mu\text{F}$, (b) $1{,}2\,\mu\text{F}$, má-li být přitom každá z těchto sestav schopna vydržet napětí až do 1 000 V včetně?

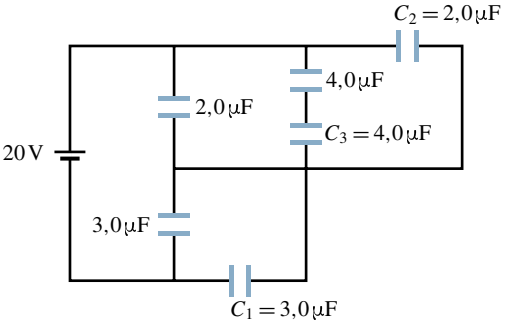
26Ú. Sestava na obr. 26.31 je připojena na napětí 10 V a každý z pěti kondenzátorů má kapacitu $10\,\mu\text{F}$. Jaký náboj je na (a) kondenzátoru C_1 a (b) na kondenzátoru C_2?

27Ú. Kondenzátor o kapacitě 100 pF je nabit na napětí 50 V a poté odpojen od nabíjecí baterie. Nabitý kondenzátor je paralelně připojen k jinému, nenabitému kondenzátoru. Vypočítejte kapacitu připojeného, původně nenabitého kondenzátoru, jestliže napětí na spojených kondenzátorech kleslo z původních 50 V na 35 V.



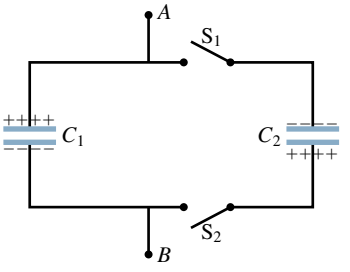
Obr. 26.31 Úloha 26

28Ú. Napětí baterie na obr. 26.32 má hodnotu 20 V. (a) Stanovte výslednou kapacitu sestavy kondenzátorů spojených podle obr. 26.32. (b) Vypočítejte náboj odpovídající této výsledné kapacitě. Určete napětí a náboj na kondenzátoru (c) C_1, (d) C_2, (e) C_3.



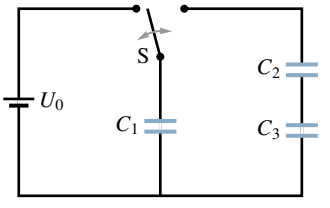
Obr. 26.32 Úloha 28

29Ú. Kondenzátory na obr. 26.33 o kapacitách $C_1 = 1{,}0\,\mu\text{F}$ a $C_2 = 3{,}0\,\mu\text{F}$ jsou nabity každý na napětí 100 V, avšak s opačnou polaritou elektrod. (a) Jaké napětí bude mezi body A a B po zapnutí spínačů S_1 a S_2? Jak velký náboj bude na kondenzátoru (b) C_1, (c) C_2?



Obr. 26.33 Úloha 29

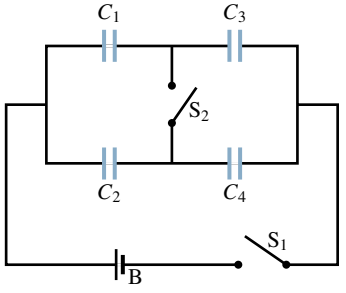
30Ú. Přepínač S na obr. 26.34 byl přepnut do levé polohy. Kondenzátor C_1 se nabil a napětí na jeho elektrodách dosáhlo hodnoty U_0. Kondenzátory C_2 a C_3 byly zpočátku nenabité. Poté



Obr. 26.34 Úloha 30

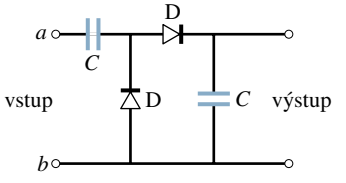
byl přepínač přepnut do pravé krajní polohy. Určete náboje Q_1, Q_2 a Q_3 na odpovídajících kondenzátorech.

31Ú. Baterie B na obr. 26.35 poskytuje napětí 12 V. (a) Určete náboje na kondenzátorech v případě, že je zapnut pouze spínač S_1. (b) Určete náboje na kondenzátorech v případě, že jsou sepnuty oba spínače S_1 i S_2. Kapacity kondenzátorů mají hodnoty $C_1 = 1{,}0\,\mu\text{F}$, $C_2 = 2{,}0\,\mu\text{F}$, $C_3 = 3{,}0\,\mu\text{F}$ a $C_4 = 4{,}0\,\mu\text{F}$.



Obr. 26.35 Úloha 31

32Ú. Na obr. 26.36 jsou dva stejné kondenzátory o kapacitě C v obvodu se dvěma ideálními diodami D. (Ideální diodou teče kladný náboj pouze ve směru šipky a záporný náboj teče pouze ve směru opačném.) Baterie o napětí 100 V je připojena na vstupní svorky nejprve tak, že svorka a je připojena ke kladnému pólu baterie a svorka b k zápornému. Potom je odpojena a zapojena obráceně, tj. ke kladnému pólu baterie je připojena svorka b. V obou případech určete napětí na výstupních svorkách.



Obr. 26.36 Úloha 32

ODST. 26.5 Energie elektrického pole

33C. Kolik elektrické energie obsahuje jeden krychlový metr vzduchu za „pěkného počasí“, kdy velikost intenzity elektrického pole bývá $150\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$?

34C. Reaktor s řízenou termonukleární fúzí by mohl v případě úspěšné realizace dodávat obrovské množství energie z těžkého vodíku obsaženého v mořské vodě. Chod reaktoru obvykle vyžaduje značné elektrické proudy, které v krátkých časových intervalech procházejí vinutím vytvářejícím magnetické pole. Např. u reaktoru ZT-40 v Los Alamoské laboratoři mají místnosti zaplněné kondenzátory. Kondenzátorový blok má kapacitu 61,0 mF a napětí 10,0 kV. Vypočtěte jeho energii (a) v joulech, (b) v kilowatthodinách.

35C. Jakou kapacitu by musel mít kondenzátor, aby akumuloval energii 10 kW·h při napětí 1 000 V?

36C. Deskový vzduchový kondenzátor má kapacitu 130 pF. (a) Jaká je energie jeho elektrického pole, je-li napětí na kondenzátoru 56,0 V? (b) Lze v tomto případě vypočítat hustotu energie elektrického pole v prostoru mezi elektrodami? Vysvětlete to.

37C. Kondenzátor je nabit na napětí U. O kolik procent je nutno zvýšit toto napětí, chceme-li zvýšit jeho energii (tj. energii jeho elektrického pole) o 10 %?

38C. Deskový vzduchový kondenzátor o ploše elektrod $40\,\text{cm}^2$ a vzdálenosti elektrod 1,0 mm je nabit na napětí 600 V. Určete (a) jeho kapacitu, (b) velikost náboje na každé z elektrod, (c) jeho energii, (d) intenzitu elektrického pole mezi elektrodami, (e) hustotu energie elektrického pole mezi elektrodami.

39C. Dva kondenzátory s kapacitami $2{,}0\,\mu\text{F}$ a $4{,}0\,\mu\text{F}$ jsou připojeny paralelně ke zdroji napětí 300 V. Vypočtěte celkovou energii elektrických polí obou kondenzátorů.

40C. (a) Vypočtěte hustotu energie elektrického pole elektronu ve vzdálenosti r od jeho středu. (b) Jaká by byla podle tohoto vztahu hustota energie v limitě pro $r \to 0$, kdybychom elektron považovali za bodový náboj?

41Ú. Nabitá osamocená kovová koule o průměru 10 cm má potenciál 8 000 V vzhledem k hodnotě $\varphi = 0$ v nekonečnu. Vypočtěte hustotu energie elektrického pole blízko povrchu koule.

42Ú. Blok paralelně spojených kondenzátorů o kapacitách $5{,}00\,\mu\text{F}$ se používá k akumulování elektrické energie. Kolik stojí nabití 2 000 kondenzátorů v bloku na napětí 50 000 V za předpokladu, že cena 1 kW·h je 1,75 Kč?

43Ú. Jeden kondenzátor je nabit tak, že jeho energie je 4,0 J. Druhý nenabitý kondenzátor je pak k němu připojen paralelně. (a) Vypočtěte, zda došlo tímto připojením ke změně celkové energie elektrického pole kondenzátorů. (b) Jestliže ano, jak tento rozdíl vysvětlíte?

44Ú. Vypočtěte akumulovanou elektrickou energii v případech tří různých spojení kondenzátorů z úlohy 22. Porovnejte tyto elektrické energie a vysvětlete, proč se liší.

45Ú. Podle obr. 26.27 určete pro každý z kondenzátorů jeho (a) náboj, (b) napětí, (c) energii. Uvažujte číselné hodnoty ze cvič. 16 a napětí $U = 100$ V.

46Ú. Deskový kondenzátor mající elektrody o obsahu S ve vzdálenosti d byl nabit na napětí U. Nabíjecí baterie pak byla odpojena a elektrody oddáleny do vzdálenosti $2d$. Prostřednictvím veličin S, d, U vyjádřete (a) nové napětí na elektrodách, (b) počáteční a koncovou energii kondenzátoru, (c) práci potřebnou k oddálení elektrod.

47Ú. V situaci znázorněné na obr. 26.26 určete pro každý z kondenzátorů jeho (a) náboj, (b) napětí, (c) energii. Uvažujte číselné hodnoty ze cvič. 15 při napětí $U = 100$ V.

48Ú. Válcový kondenzátor má poloměry elektrod a, b, jak je znázorněno na obr. 26.6. Ukažte, že polovina jeho elektrické energie se nachází uvnitř válce, jehož poloměr je $r = \sqrt{ab}$.

49Ú. Dokažte, že se elektrody deskového kondenzátoru navzájem přitahují silou $F = Q^2/(2\varepsilon_0 S)$. Nejdříve vypočtěte práci potřebnou ke zvětšení vzdálenosti elektrod z hodnoty x na hodnotu $x + \mathrm{d}x$ při nezměněné velikosti náboje Q.

50Ú. Užitím výsledku z úlohy 49 dokažte, že síla působící na jednotku plochy každé elektrody kondenzátoru (tzv. *elektrostatický tlak*) má velikost $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$. (Tento vztah je platný obecně pro vodič libovolného tvaru s intenzitou velikosti E v blízkosti jeho povrchu.)

51Ú*. Na mýdlovou bublinu poloměru R_0 je pomalu předáván náboj Q. V důsledku vzájemného odpuzování povrchových nábojů se poloměr bubliny mírně zvětší na velikost R. Následkem expanze se tlak vzduchu uvnitř bubliny sníží na velikost $p = p_0 V_0 / V$, kde p_0 je atmosférický tlak, V_0 je počáteční objem a V je koncový objem. Dokažte, že mezi uvedenými veličinami platí vztah

$$Q^2 = 32\pi^2 \varepsilon_0 p_0 R(R^3 - R_0^3).$$

(*Tip*: Uvažujte síly působící na malou plošku nabité bubliny. Tyto síly jsou vyvolány tlakem plynu, atmosférickým tlakem a elektrostatickým tlakem — viz úlohu 50.)

ODST. 26.6 Kondenzátor s dielektrikem

52C. Vzduchový deskový kondenzátor má kapacitu 1,3 pF. Zdvojnásobení vzdálenosti jeho elektrod a současné vložení vosku mezi ně vede ke zvětšení jeho kapacity na 2,6 pF. Určete relativní permitivitu vosku.

53C. Vzduchový kondenzátor o kapacitě 7,4 pF má zvětšit svou kapacitu tak, aby akumuloval energii 7,4 μJ při napětí 652 V. Které dielektrikum z tab. 26.1 lze využít pro vyplnění prostoru mezi jeho elektrodami, aby se dosáhlo uvedené hodnoty energie s nejmenší odchylkou?

54C. Ke zhotovení deskového kondenzátoru máte k dispozici dvě měděné destičky (jako elektrody), list slídy (tloušťky 0,1 mm, $\varepsilon_r = 5{,}4$), destičku skla (tloušťky 2,0 mm, $\varepsilon_r = 7{,}0$) a destičku parafinu (tloušťky 1,0 cm, $\varepsilon_r = 2{,}0$). Které z těchto dielektrik vložíte mezi měděné elektrody, chcete-li dosáhnout největší kapacity?

55C. Deskový vzduchový kondenzátor má kapacitu 50 pF. (a) Jaká je vzdálenost jeho elektrod, jestliže obsah každé z elektrod je 0,35 m^2? (b) Jak velkou kapacitu bude mít tento kondenzátor, bude-li prostor mezi jeho elektrodami zcela vyplněn materiálem s relativní permitivitou $\varepsilon_r = 5{,}6$?

56C. Koaxiální kabel dálkového vedení má vnitřní poloměr 0,10 mm a vnější poloměr 0,60 mm. Vypočtěte jeho kapacitu připadající na 1 m délky. Předpokládejte, že prostor mezi vodiči je zcela vyplněn polystyrenem.

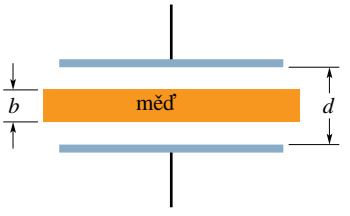
57Ú. Určitý materiál má relativní permitivitu 2,8 a dielektrickou pevnost 18 MV·m^{-1}. Tento materiál je použit jako dielektrikum v deskovém kondenzátoru. Jaký minimální obsah musí mít elektrody kondenzátoru, aby měl kapacitu $7{,}0 \cdot 10^{-2}$ μF a vydržel přitom bez elektrického průrazu napětí 4,0 kV?

58Ú. Máte vyrobit kondenzátor o kapacitě přibližně 1 nF s průrazným napětím ne menším než 10 000 V. Můžete k tomu použít stěnu vysoké sklenice z Pyrexu (varného skla) jako dielektrika tak, že pokryjete vnitřní a vnější zakřivený povrch skla hliníkovou fólií. Sklenice má výšku 15 cm, vnitřní poloměr 3,6 cm a vnější poloměr 3,8 cm. Jaká bude (a) kapacita, (b) průrazné napětí takového kondenzátoru?

59Ú. Máte navrhnout přenosný deskový kondenzátor s dielektrikem, který může akumulovat energii 250 kJ. (a) Jaký minimální objem musí mít kondenzátor, jestliže použijete jedno z dielektrik, jejichž dielektrické pevnosti jsou uvedeny v tab. 26.1? (b) Moderní kondenzátor může akumulovat energii 250 kJ při objemu 0,087 0 m^3. Jakou relativní permitivitu musí mít jeho dielektrikum, jestliže by mělo dielektrickou pevnost stejnou jako dielektrikum v případě (a)?

60Ú. Dva deskové kondenzátory mají stejně velkou plochu elektrod S a stejnou vzdálenost elektrod d. Relativní permitivita dielektrika mezi elektrodami jednoho z nich je $\varepsilon_r + \Delta\varepsilon_r$ a u druhého kondenzátoru je $\varepsilon_r - \Delta\varepsilon_r$. (a) Určete jejich výslednou kapacitu, jsou-li spojeny paralelně. (b) Jaký je náboj kondenzátoru s větší kapacitou, je-li na obou paralelně spojených kondenzátorech náboj Q?

61Ú. Měděná deska tloušťky b je vsunuta doprostřed mezi elektrody deskového kondenzátoru s elektrodami o obsahu S tak, jak ukazuje obr. 26.37. (a) Jaká je kapacita kondenzátoru po vsunutí desky? (b) Jaký je poměr akumulované energie před a po vsunutí desky, jestliže náboj na elektrodách zůstane nezměněn? (c) Jak velká práce je vykonána při vsunutí desky? Je deska vtahována dovnitř, nebo musí být do uvedeného prostoru vnější silou vtlačována?



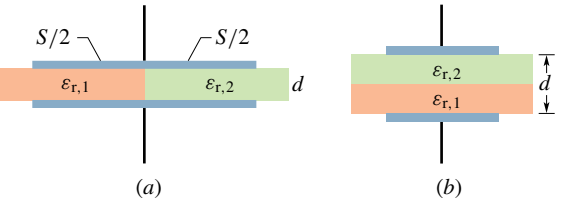
Obr. 26.37 Úloha 61

62Ú. Řešte úlohu 61 za předpokladu, že nikoli náboj, ale napětí na elektrodách je udržováno konstantní.

63Ú. Deskový kondenzátor s elektrodami o obsahu S je vyplněn dvěma dielektriky tak, jak je znázorněno na obr. 26.38a. Dokažte, že pro jeho kapacitu platí vztah

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \frac{\varepsilon_{r,1} + \varepsilon_{r,2}}{2}.$$

Ověřte tento vztah pro limitní případy. (*Tip*: Odůvodněte, že toto spojení odpovídá paralelnímu spojení dvou kondenzátorů.)



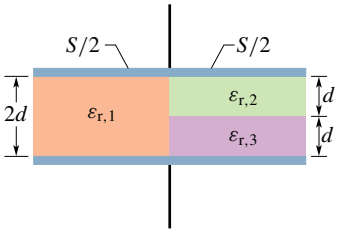
Obr. 26.38 Úlohy 63 a 64

64Ú. Deskový kondenzátor s elektrodami o obsahu S je vyplněn dvěma dielektriky tak, jak ukazuje obr. 26.38b. Dokažte, že pro jeho kapacitu platí

$$C = \frac{2\varepsilon_0 S}{d}\,\frac{\varepsilon_{r,1}\varepsilon_{r,2}}{\varepsilon_{r,1}+\varepsilon_{r,2}}.$$

Ověřte platnost tohoto vztahu pro limitní případy. (*Tip*: Odůvodněte, že toto spojení odpovídá sériovému spojení dvou kondenzátorů.)

65Ú. Jaká je kapacita kondenzátoru s elektrodami o obsahu S, který je znázorněn na obr. 26.39? (*Tip*: Viz úlohy 63 a 64.)



Obr. 26.39 Úloha 65

ODST. 26.8 Dielektrika a Gaussův zákon elektrostatiky

66C. Deskový kondenzátor má kapacitu 100 pF, obsah elektrod 100 cm^2 a slídové dielektrikum ($\varepsilon_r = 5{,}4$). Vypočtěte (a) velikost intenzity elektrického pole ve slídě, (b) velikost volných nábojů na elektrodách, (c) velikost indukovaného povrchového náboje na slídě.

67C. V př. 26.8 předpokládejte, že při vsouvání desky dielektrika mezi elektrody deskového kondenzátoru zůstává baterie připojena. Po jejím vsunutí mezi elektrody vypočtěte (a) kapacitu, (b) náboje na elektrodách kondenzátoru, (c) velikost intenzity elektrického pole v mezeře, (d) velikost intenzity elektrického pole v desce dielektrika.

68Ú. Prostor mezi dvěma soustřednými vodivými kulovými velmi tenkými vrstvami o poloměrech b a a (kde $b > a$) je vyplněn látkou o relativní permitivitě ε_r. Mezi vnitřní a vnější vrstvou je napětí U. Určete (a) kapacitu této soustavy, (b) volný náboj Q na vnitřní vrstvě, (c) náboj Q' indukovaný podél povrchu vnitřní vrstvy.

69Ú. Na dvě rovnoběžné desky o obsahu 100 cm^2 byly přeneseny náboje stejných velikostí $8{,}9\cdot10^{-7}$ C, ale opačných znamének. Intenzita elektrického pole uvnitř dielektrika, vyplňujícího prostor mezi deskami, je $1{,}4\cdot10^{6}$ V·m^{-1}. (a) Vypočtěte relativní permitivitu dielektrika, (b) určete velikost náboje indukovaného na povrchu dielektrika.

70Ú. Deskový kondenzátor má elektrody o obsahu 0,12 m^2, které jsou od sebe vzdáleny 1,2 cm. Baterie nabije kondenzátor na napětí 120 V a pak je odpojena. Deska dielektrika, mající tloušťku 4,0 mm a relativní permitivitu 4,8, je pak umístěna symetricky mezi elektrody. (a) Jakou kapacitu má kondenzátor před vložením desky? (b) Jakou kapacitu má kondenzátor s vloženou deskou? (c) Jak velký je volný náboj Q kondenzátoru před vložením a po vložení desky dielektrika? (d) Jaká je velikost intenzity elektrického pole v prostoru mezi elektrodami a dielektrikem? (e) Jaká je velikost intenzity elektrického pole v dielektriku? (f) Jaké je napětí na elektrodách při vložené desce dielektrika? (g) Jak velká je práce vnějších sil potřebná pro vložení desky?

71Ú. Uvažujte kondenzátor z př. 26.8 (obr. 26.16): (a) Jaká část energie je uložena ve vzduchových mezerách? (b) Jaká část energie je uložena v desce?

72Ú. Deska dielektrika o tloušťce b je vložena mezi elektrody deskového kondenzátoru, jejichž vzdálenost je d. Dokažte, že kapacita tohoto kondenzátoru je vyjádřena vztahem

$$C = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{\varepsilon_r d - b(\varepsilon_r - 1)}.$$

(*Tip*: Odvoďte tento vztah podle postupu v př. 26.8.) Dává uvedený vztah správný číselný výsledek př. 26.8? Ověřte, že tento vztah je platný i pro speciální případy, je-li $b = 0$, $\varepsilon_r = 1$, $b = d$.

27
Proud a odpor



Chlouba Německa a technický zázrak své doby, vzducholoď ***Hindenburg****, byla téměř tak dlouhá jako tři fotbalová hřiště — byl to největší létající stroj, který kdy byl postaven. Ačkoli ho nadnášelo šestnáct nádrží naplněných vysoce hořlavým a ve směsi se vzduchem výbušným vodíkem, mnohokrát přeletěl Atlantický oceán bez nehody. Avšak 6. května 1937 krátce po 19.21 h, právě když se Hindenburg chystal přistát na námořní a letecké základně Lakehurst ve státě New Jersey v USA, došlo ke katastrofě. Posádka nejprve čekala, až se zklidní bouřka, a potom spustila námořníkům z pozemní obsluhy manévrovací lana. Najednou bylo vidět, jak se asi ve třetině délky směrem od zádi vnější plášť vzducholodi vlní. O několik sekund později z tohoto místa vyšlehly plameny a červená záře oslnila celé okolí. Za 32 s spadla hořící vzducholoď na zem. Proč po tolika úspěšných letech vzducholodí plněných vodíkem právě tato vzducholoď shořela v plamenech?*

27.1 POHYBUJÍCÍ SE NÁBOJE A ELEKTRICKÉ PROUDY

V kap. 22 až 26 jsme se podrobně zabývali *elektrostatikou*, tedy elektrickými náboji v klidu a jejich polem. V této kapitole začneme studovat *elektrické proudy*, tedy elektrické náboje v pohybu.

Elektrické proudy se vyskytují všude kolem nás, od obrovských proudů při úderu blesku až k nepatrným proudům v nervových vláknech, které řídí pohyby našich svalů. Každý dobře zná elektrický proud v domovní elektroinstalaci, v žárovkách a v elektrických spotřebičích. Svazek elektronů se pohybuje ve vakuu v obrazovce televizního přijímače — i to je elektrický proud. Nabité částice *obou* znamének protékají v ionizovaném plynu zářivek, v bateriích tranzistorových radiopřijímačů nebo v automobilových bateriích. Elektrické proudy najdeme také v polovodičových součástkách kapesních kalkulaček a v čipech, které řídí mikrovlnné trouby nebo elektrické pračky.

Nabité částice zachycené ve Van Allenových radiačních pásech se jako vlny převalují tam a zpět nad zemskou atmosférou mezi severním a jižním magnetickým pólem. Ohromné toky protonů, elektronů a iontů letí směrem od Slunce celou sluneční soustavou jako *sluneční vítr*. Kosmické paprsky, tvořené hlavně protony o velmi vysoké energii, prolétávají naší Galaxií a některé zasahují Zemi.

Přestože jakýkoli elektrický proud je vždy proudem pohybujících se nábojů, ne všechny pohybující se náboje vytvářejí elektrický proud. Abychom mohli říci, že určitou plochou prochází elektrický proud, musí vzniknout výsledný tok náboje touto plochou, jak si vysvětlíme v následujících dvou příkladech.

1. Volné, vodivostní elektrony se v izolovaném kusu měděného drátu chaoticky pohybují rychlostí řádově $10^6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Představíme-li si rovinu protínající takový drát, budou elektrony rovinou procházet *v obou směrech* miliardkrát za sekundu. Žádný výsledný tok náboje nevzniká, a žádný proud tedy drátem neprochází. Připojíme-li však konce drátu k baterii, i její malé napětí mírně upřednostní tok elektronů v jednom směru, takže vyvolá výsledný tok náboje průřezem drátu a drátem tedy začne procházet elektrický proud.

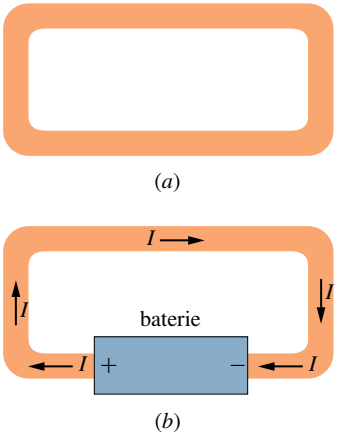
2. Tok vody v zahradní hadici můžeme považovat za usměrněný tok kladných nábojů (protonů v molekulách vody) řádově několika milionů coulombů za sekundu. Žádný výsledný tok náboje však neexistuje, protože současně ve stejném množství a ve stejném směru teče záporný náboj (elektrony v molekulách vody).

V této kapitole výrazně omezíme předmět našeho studia a v rámci klasické fyziky se budeme zabývat *ustálenými proudy vodivostních elektronů* pohybujících se v *kovovém* vodiči, jako je například měděný drát.

27.2 ELEKTRICKÝ PROUD

Na obr. 27.1a vidíme izolovanou vodivou smyčku. Jak už víme, má celá smyčka tentýž potenciál, bez ohledu na to, zda nese nějaký náboj. Žádné elektrické pole nemůže existovat ani uvnitř vodiče smyčky ani vně smyčky rovnoběžně s jejím povrchem. Ačkoli jsou ve smyčce přítomny *vodivostní elektrony*, nepůsobí na ně žádná výsledná elektrická síla a nevzniká tedy žádný proud.

Vložíme-li do vodivé smyčky baterii podle obr. 27.1b, nebude už potenciál smyčky všude stejný. Elektrické pole uvnitř materiálu, z něhož je smyčka vyrobena, působí elektrickou silou na vodivostní elektrony, vyvolává jejich pohyb a způsobuje vznik **proudu**. Za velmi krátkou dobu dosáhne tok elektronů jisté konstantní hodnoty a proud ve smyčce pak bude **ustálený** (stacionární, tj. nezávislý na čase).



Obr. 27.1 (a) Smyčka z měděného drátu v elektrostatické rovnováze. Celá smyčka má tentýž potenciál, takže intenzita elektrického pole je nulová ve všech bodech měděného drátu. (b) Vložením baterie vyvoláme rozdíl potenciálů, tedy napětí mezi konci smyčky připojenými ke svorkám baterie. Tím se vytváří uvnitř smyčky elektrické pole, které vyvolává pohyb nábojů ve smyčce, a tak vzniká proud I.

Obr. 27.2 znázorňuje část vodiče, část vodivé smyčky, kterou prochází proud. Jestliže náboj $\mathrm{d}Q$ projde např. rovinným řezem a za dobu $\mathrm{d}t$, pak proud protékající průřezem vodiče je definován vztahem

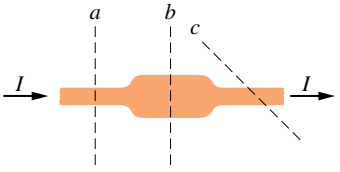
$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \quad \text{(definice proudu).} \qquad (27.1)$$

Náboj, který proteče průřezem vodiče během časového in-

tervalu od 0 do t, určíme integrací

$$Q = \int \mathrm{d}Q = \int_0^t I \,\mathrm{d}t, \qquad (27.2)$$

přitom proud I může být funkcí času.



Obr. 27.2 Ustálený proud I ve vodiči má stejnou velikost v průřezech a, b a c.

V *ustáleném* stavu teče stejný proud I všemi průřezy b a c i všemi rovinami, které protínají celý vodič, bez ohledu na jejich polohu nebo orientaci, neboť elektrický náboj se zachovává. Za každý elektron, který do vodiče na jednom jeho konci vstoupí, vystoupí jiný elektron na jeho druhém konci. Podobně je tomu např. při ustáleném toku vody v zahradní hadici. Za každou kapku vody, která vteče do hadice na jejím začátku, musí jiná kapka vystříknout ven tryskou na jejím konci a celkové množství vody v hadici se zachovává.

Jednotkou proudu v soustavě SI je coulomb za sekundu a tato jednotka se nazývá **ampér** (A): 1 ampér = 1 A = = 1 C·s^{-1}. Ampér je jednou ze základních jednotek SI. Jak jsme řekli v kap. 22, coulomb je definován pomocí ampéru. S přesnou definicí ampéru se seznámíme v kap. 30.

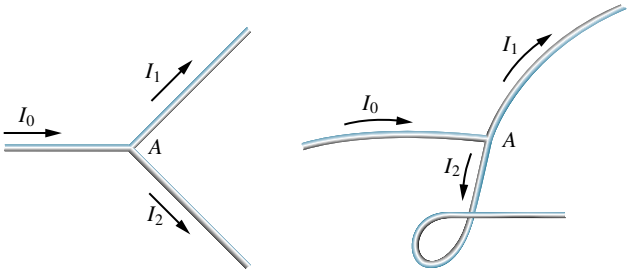
Proud definovaný rov. (27.1) je skalár, protože elektrický náboj i čas jsou skaláry. Proud často znázorňujeme šipkami jako na obr. 27.1b, abychom vyznačili směr pohybu nábojů. Tyto šipky však nepopisují nějaké vektory. Na obr. 27.3a je vodič, který se rozvětvuje do dvou větví. Protože se náboj zachovává, proudy ve větvích musí být takové, aby jejich součet dal proud v nerozvětveném vodiči, tedy

$$I_0 = I_1 + I_2. \qquad (27.3)$$

Obr. 27.3b ukazuje, že ohnutí nebo otočení vodiče nemá vliv na platnost rov. (27.3). Proudové šipky ukazují jen jeden ze dvou možných směrů toku ve vodiči, ne směr v prostoru.

Směr proudu

Na obr. 27.1b jsme nakreslili proudové šipky ve směru, ve kterém by se vlivem elektrického pole pohybovaly smyčkou kladně nabité částice. Byly by to nosiče kladného náboje a pohybovaly by se směrem od kladného pólu baterie



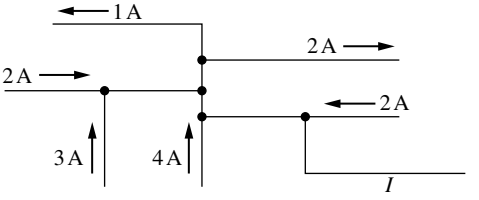
Obr. 27.3 Vztah $I_0 = I_1 + I_2$ platí v bodě A nezávisle na tom, jak jsou vodiče orientovány v prostoru. Proudy jsou skaláry, nikoli vektory.

k jejímu zápornému pólu. Ve skutečnosti však nosiči náboje v měděné smyčce na obr. 27.1b jsou elektrony se záporným nábojem. V elektrickém poli se pohybují v opačném směru, než ukazují šipky, tedy od záporného pólu ke kladnému. Z historických důvodů však používáme tuto konvenci:

> Proudové šipky kreslíme ve směru, ve kterém by se pohyboval kladný náboj. Děláme to i v případě, kdy skutečné nosiče náboje jsou záporné a pohybují se tedy v opačném směru.

Tuto konvenci můžeme používat proto, že ve *většině* situací předpokládaný pohyb nosičů kladného náboje v jednom směru je ekvivalentní skutečnému pohybu nosičů záporného náboje v opačném směru. (Pokud by ovšem ekvivalentní nebyl, museli bychom samozřejmě uvažovat skutečný pohyb nosičů náboje. Tak je tomu např. při Hallově jevu v polovodičích, čl. 29.4.)

KONTROLA 1: Obrázek znázorňuje část obvodu. Jaká je velikost a směr proudu I ve vodiči na obr. vpravo dole?



PŘÍKLAD 27.1

Voda protéká zahradní hadicí s objemovým průtokem R = = 450 cm^3·s^{-1}. Jaký je odpovídající proud záporného náboje?

ŘEŠENÍ: Proud záporného náboje neseného molekulami vody je dán rychlostí, kterou molekuly vody procházejí libovolným průřezem hadice, vynásobené záporným nábojem,

který nese každá molekula vody. Jestliže ϱ je hustota vody a m_m je její molární hmotnost, pak počet molů za sekundu, který protéká průřezem vymezeným rovinou, je $R\varrho/m_m$. Jestliže N je počet molekul vody a N_A je Avogadrova konstanta, pak počet dN/dt molekul za sekundu, který prochází průřezem, je

$$\frac{dN}{dt} = \frac{R\varrho N_A}{m_m} = \\ = (450\cdot10^{-6}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}})(1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}})\cdot \\ \cdot\frac{(6{,}02\cdot10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}})}{(0{,}018\,\mathrm{kg\cdot mol^{-1}})} = \\ = 1{,}51\cdot10^{25}\,\mathrm{s^{-1}}.$$

Každá molekula vody má 10 elektronů (8 v atomu kyslíku a 1 v každém ze dvou vodíkových atomů). Každý elektron nese náboj $-e$, takže proud odpovídající tomuto pohybu záporného náboje je

$$I = \frac{dQ}{dt} = 10e\frac{dN}{dt} = \\ = 10(1{,}60\cdot10^{-19}\,\mathrm{C})(1{,}51\cdot10^{25}\,\mathrm{s^{-1}}) = \\ = 2{,}42\cdot10^{7}\,\mathrm{C\cdot s^{-1}} = 2{,}42\cdot10^{7}\,\mathrm{A} = \\ = 24{,}2\,\mathrm{MA}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento proud záporného náboje je přesně vykompenzován proudem kladného náboje, který se nachází v jádrech atomů, jimiž je tvořena molekula vody. Výsledný tok elektrického náboje hadicí je tedy roven nule.

27.3 HUSTOTA PROUDU

Někdy nás zajímá úhrnný proud I, jindy dáme přednost lokálnímu pohledu a studujeme tok náboje v určitém bodě uvnitř vodiče. Kladný nosič náboje v daném bodě se pohybuje ve směru intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$ v tomto bodě. Abychom popsali pohyb nosičů náboje, zavedeme **hustotu (elektrického) proudu** $\boldsymbol{J}$. Je to vektorová veličina a má stejný směr jako intenzita elektrického pole v daném bodě průřezu vodiče. Její velikost J je rovna proudu procházejícímu elementární ploškou průřezu vodiče kolmou ke směru proudu, dělenému velikostí této plošky. Proud dI protékající elementární ploškou je $\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}$, kde $d\boldsymbol{S}$ je vektor elementu plochy (kolmý k dané plošce). Celkový proud celým průřezem vodiče pak je

$$I = \int \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}. \qquad (27.4)$$

Jestliže je proud v celém průřezu vodiče konstantní a jeho směr je rovnoběžný s vektorem $d\boldsymbol{S}$, pak hustota proudu $\boldsymbol{J}$ je také konstantní a rovnoběžná s $d\boldsymbol{S}$. V takovém případě lze rov. (27.4) upravit do tvaru

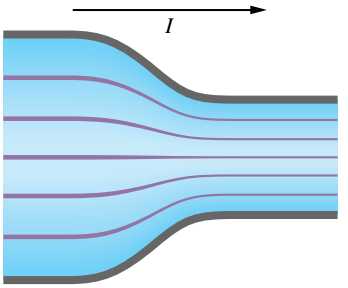
$$I = \int J\,dS = J\int dS = JS,$$

což dává

$$J = \frac{I}{S}, \qquad (27.5)$$

kde S je obsah celého průřezu vodiče. Z rov. (27.4), resp. (27.5) vidíme, že jednotkou hustoty proudu v soustavě SI je ampér na metr čtverečný, $\mathrm{A\cdot m^{-2}}$.

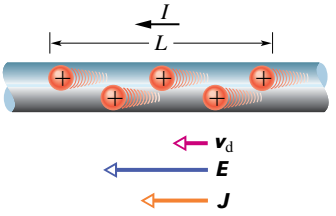
V kap. 23 jsme ukázali, že průběh vektoru intenzity elektrického pole můžeme znázornit pomocí siločár. Na obr. 27.4 je znázorněno, jak se průběh vektoru hustoty proudu dá znázornit obdobnými čárami, nazývanými **proudové čáry**. Proud, který na obr. 27.4 teče směrem doprava, přechází z vodiče o větším průřezu do vodiče o menším průřezu. Protože se elektrický náboj zachovává, náboj, který prochází libovolným průřezem, a tedy ani celkový proud jím procházející se nemění. Změní se však hustota proudu, a to tak, že ve vodiči o menším průřezu je větší. Vzdálenost mezi proudovými čárami odpovídá hustotě proudu — jsou-li proudové čáry těsněji u sebe, je hustota proudu větší.



Obr. 27.4 Proudové čáry znázorňující vektory hustoty proudu při toku elektrického náboje zužujícím se vodičem.

Driftová rychlost

Jestliže vodičem neprochází žádný proud, pohybují se jeho vodivostní elektrony chaoticky a nepřevládá žádný výsledný pohyb v nějakém směru. Jestliže vodičem prochází proud, elektrony se také pohybují chaoticky, ale navíc jsou unášeny **driftovou rychlostí** $\boldsymbol{v}_d$ ve směru opačném, než je směr intenzity elektrického pole, která vyvolává jejich pohyb. Driftová rychlost je nepatrná ve srovnání s rychlostí chaotického pohybu. Například v měděném vodiči v domovní instalaci je driftová rychlost elektronů nanejvýš $10^{-5}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, zatímco rychlost chaotického pohybu je asi $10^{6}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (Názorný příklad nám dává roj rychlých komárů, zvolna unášený vánkem.)



Obr. 27.5 Kladný nosič náboje se pohybuje driftovou rychlostí $\boldsymbol{v}_d$ ve směru přiloženého elektrického pole $\boldsymbol{E}$. Podle používané konvence je orientace vektoru hustoty proudu $\boldsymbol{J}$ stejná jako orientace šipky znázorňující směr proudu I.

Pomocí obr. 27.5 najdeme vztah mezi driftovou rychlostí $\boldsymbol{v}_d$ vodivostních elektronů ve vodiči protékaném proudem a hustotou proudu $\boldsymbol{J}$. Podle zmíněné konvence je na obr. 27.5 znázorněn pohyb kladně nabitých nosičů ve směru intenzity $\boldsymbol{E}$. Předpokládejme, že všechny tyto náboje se pohybují stejnou driftovou rychlostí $\boldsymbol{v}_d$ a že hustota proudu $\boldsymbol{J}$ je konstantní v celém průřezu vodiče, jehož obsah je S. Počet nosičů náboje na úseku vodiče délky L je nLS, kde n je počet nosičů v jednotkovém objemu, tedy **koncentrace nosičů**. Nese-li každý nosič náboj e, je na úseku délky L celkový náboj

$$Q = (nSL)e.$$

Protože všechny náboje ve vodiči se pohybují rychlostí v_d, projde tento celkový náboj libovolným průřezem vodiče za dobu

$$t = \frac{L}{v_d}.$$

Podle rov. (27.1) je proud I roven náboji, který projde průřezem vodiče za jednotku času. Odtud plyne

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{nSLe}{L/v_d} = nSev_d. \qquad (27.6)$$

Z této rovnice vypočítáme driftovou rychlost v_d a užitím rov. (27.5) dostaneme

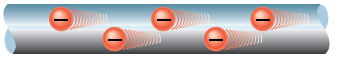
$$v_d = \frac{I}{nSe} = \frac{J}{ne}.$$

Užitím vektorů můžeme psát

$$\boldsymbol{J} = (ne)\boldsymbol{v}_d. \qquad (27.7)$$

Součin ne, jehož jednotkou v soustavě SI je coulomb na krychlový metr ($\mathrm{C{\cdot}m^{-3}}$), je objemová hustota náboje. Pro kladné nosiče náboje, jaké předpokládáme, je hustota náboje (ne) kladná a rov. (27.7) vyjadřuje, že vektory $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{v}_d$ mají stejný směr.

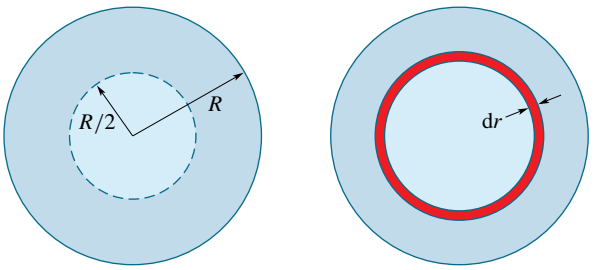
KONTROLA 2: Na obrázku jsou nakresleny vodivostní elektrony pohybující se vodičem zprava doleva. Určete, které z těchto veličin jsou orientovány doleva a které doprava: (a) proud I, (b) hustota proudu $\boldsymbol{J}$, (c) intenzita elektrického pole $\boldsymbol{E}$ ve vodiči.



PŘÍKLAD 27.2

Hustota proudu ve válcovém vodiči o poloměru $R = 2{,}0\,\mathrm{mm}$ má velikost $J = 2{,}0{\cdot}10^5\,\mathrm{A{\cdot}m^{-2}}$ a je konstantní v celém průřezu vodiče.

(a) Jak velký proud I protéká vnější částí vodiče vymezenou poloměry $R/2$ a R (obr. 27.6a)?



Obr. 27.6 Příklad 27.2. (a) Průřez vodiče o poloměru R. (b) Tenký prstenec o šířce $\mathrm{d}r$ a obvodu $2\pi r$. Jeho plocha je $\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r$.

ŘEŠENÍ: Protože hustota proudu je konstantní v celém průřezu vodiče, můžeme k výpočtu proudu použít rov. (27.5), $J = I/S$. Počítáme však jen proud procházející částí S' celého průřezu, kde

$$S' = \pi R^2 - \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{3R^2}{4}\right) =$$
$$= \frac{3\pi}{4}(0{,}002\,\mathrm{m})^2 = 9{,}424{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{m^2}.$$

Z rov. (27.5) plyne

$$I = JS'$$

a po dosazení dostaneme

$$I = (2{,}0{\cdot}10^5\,\mathrm{A{\cdot}m^{-2}})(9{,}424{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{m^2}) =$$
$$= 1{,}9\,\mathrm{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Předpokládejme nyní, že hustota proudu v průřezu vodiče se mění s poloměrem r podle vztahu $J = ar^2$, kde $a = 3{,}0{\cdot}10^{11}\,\mathrm{A{\cdot}m^{-4}}$ a poloměr r je dán v metrech. Jak velký proud protéká nyní stejnou částí vodiče jako v úloze (a)?

ŘEŠENÍ: Protože hustota proudu není konstantní v celém průřezu vodiče, musíme použít obecnější rov. (27.4) a integrovat hustotu proudu přes vymezenou část vodiče od $r = R/2$ do $r = R$. Vektor hustoty proudu $\boldsymbol{J}$ (ve směru osy vodiče) a vektor elementu plochy $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ (kolmý k průřezu vodiče) mají stejnou orientaci, takže

$$\boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = J\,\mathrm{d}S\cos 0 = J\,\mathrm{d}S.$$

Nyní potřebujeme vyjádřit $\mathrm{d}S$ tak, abychom mohli integrovat v mezích od $r = R/2$ do $r = R$. Protože velikost hustoty proudu J je dána jako funkce poloměru r, vyjádříme velikost $\mathrm{d}S$ plochy jako $2\pi r\,\mathrm{d}r$, kde $2\pi r$ je obvod kruhového prstence o šířce $\mathrm{d}r$ (obr. 27.6b). Integrační proměnnou je tedy poloměr r a z rov. (27.4) plyne

$$\begin{aligned} I &= \int \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int J\,\mathrm{d}S = \\ &= \int_{R/2}^{R} ar^2\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r = 2\pi a\int_{R/2}^{R} r^3\,\mathrm{d}r = \\ &= 2\pi a\left[\frac{r^4}{4}\right]_{R/2}^{R} = \frac{\pi a}{2}\left(R^4 - \frac{R^4}{16}\right) = \\ &= \frac{15}{32}\pi a R^4 = \frac{15}{32}\pi(3{,}0\cdot 10^{11}\ \mathrm{A\cdot m^{-4}})(0{,}002\ \mathrm{m})^4 = \\ &= 7{,}1\ \mathrm{A}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 27.3

Jeden konec hliníkového drátu o průměru 2,5 mm je přivařen ke konci měděného drátu o průměru 1,8 mm. Takto vyrobeným vodičem protéká ustálený proud $I = 17$ mA.

(a) Jaká je hustota proudu v každé z obou částí vodiče?

ŘEŠENÍ: Hustotu proudu v každé části vodiče můžeme považovat za konstantní (s výjimkou nejbližšího okolí kontaktu, kde se mění průměr vodiče). Průřez S_{Al} hliníkového vodiče je

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{Al}} &= \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(2{,}5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})^2 = \\ &= 4{,}91\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2} \end{aligned}$$

a hustota proudu podle rov. (27.5) je

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{Al}} &= \frac{I}{S_{\mathrm{Al}}} = \frac{(17\cdot 10^{-3}\ \mathrm{A})}{(4{,}91\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2})} = \\ &= 3{,}5\cdot 10^{3}\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}. \end{aligned}$$

Snadno spočítáme, že průřez měděného vodiče je $S_{\mathrm{Cu}} = 2{,}54\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2}$, takže hustota proudu je

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{Cu}} &= \frac{I}{S_{\mathrm{Cu}}} = \frac{(17\cdot 10^{-3}\ \mathrm{A})}{(2{,}54\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2})} = \\ &= 6{,}7\cdot 10^{3}\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

(b) Jaká je driftová rychlost vodivostních elektronů v měděném drátu? Předpokládejme, že každý atom mědi přispívá v průměru jedním vodivostním elektronem.

ŘEŠENÍ: Driftovou rychlost vypočítáme pomocí rov. (27.7) ($\boldsymbol{J} = ne\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}$), nejprve však musíme určit n, tedy počet elektronů v jednotce objemu. Za uvedeného předpokladu, že na jeden atom připadá jeden vodivostní elektron, se n rovná počtu atomů v jednotce objemu a vypočte se ze vztahu

$$\frac{n}{N_{\mathrm{A}}} = \frac{\varrho}{m_{\mathrm{m}}},$$

tj.

$$\frac{\text{počet atomů v jednom m}^3}{\text{počet atomů v jednom molu}} = \frac{\text{hmotnost jednoho m}^3}{\text{hmotnost jednoho molu}},$$

kde ϱ je hustota mědi, N_{A} je Avogadrova konstanta a m_{m} je molární hmotnost mědi. Tedy

$$\begin{aligned} n &= \frac{N_{\mathrm{A}}\varrho}{m_{\mathrm{m}}} = \\ &= \frac{(6{,}02\cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}})(9{,}0\cdot 10^{3}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}})}{(64\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot mol^{-1}})} = \\ &= 8{,}47\cdot 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}, \text{ tj. } 8{,}47\cdot 10^{28} \text{ elektronů v jednom m}^3. \end{aligned}$$

Užitím rov. (27.7) pak vypočteme

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{d}} &= \frac{J_{\mathrm{Cu}}}{ne} = \frac{(6{,}7\cdot 10^{3}\ \mathrm{A\cdot m^{-2}})}{(8{,}47\cdot 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}})(1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})} = \\ &= 4{,}9\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 1{,}8\ \mathrm{mm\cdot h^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Můžeme se zeptat: Jestliže se elektron pohybuje tak pomalu, jak to, že se světla v místnosti rozsvítí okamžitě, když vypínačem zapojíme proud? Tento zdánlivý rozpor vzniká tehdy, když neodlišujeme driftovou rychlost elektronů od rychlosti, kterou se šíří podél vodiče změny elektrického pole. Změny pole se šíří rychlostí, která se prakticky rovná rychlosti světla. Elektrony všude ve vodiči i v žárovce se začnou pohybovat prakticky současně driftovou rychlostí. Je to podobné, jako když otevřete kohoutek, ke kterému je připojena zahradní hadice plná vody. Tlaková vlna podél hadice se šíří rychlostí zvuku ve vodě. Přitom však rychlost, kterou se voda pohybuje v hadici (měřená například pomocí značkovacího barviva) je mnohem menší.

PŘÍKLAD 27.4

Křemíkovou tyčinkou o obdélníkovém průřezu šířky $d = 3{,}2$ mm a výšky $h = 250\ \mu$m protéká proud $I = 5{,}2$ mA, s konstantní hustotou v celém průřezu. Křemík je polovodič typu n a je dopován přesně stanoveným množstvím fosforu. Jak uvidíme v čl. 27.8, dopování způsobuje výrazný vzrůst počtu n nosičů náboje v jednotce objemu ve srovnání s čistým křemíkem. V tomto příkladě je $n = 1{,}5\cdot 10^{23}\ \mathrm{m^{-3}}$.

(a) Jaká je hustota proudu v křemíkové tyčince?

ŘEŠENÍ: Z rov. (27.5) plyne

$$J = \frac{I}{dh} = \frac{(5{,}2\cdot10^{-3}\ \mathrm{A})}{(3{,}2\cdot10^{-3}\ \mathrm{m})(250\cdot10^{-6}\ \mathrm{m})} = \\ = 6\,500\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je driftová rychlost elektronů?

ŘEŠENÍ: Z rov. (27.7) plyne

$$v_\mathrm{d} = \frac{J}{ne} = \frac{(6\,500\ \mathrm{A\cdot m^{-2}})}{(1{,}5\cdot10^{23}\ \mathrm{m^{-3}})(1{,}60\cdot10^{-19}\ \mathrm{C})} = \\ = 0{,}27\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 27\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že hustota proudu ($6\,500\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}$) v tomto polovodiči je srovnatelná s hustotou proudu v měděném vodiči ($6\,700\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}$) v př. 27.3. To znamená, že množství náboje protékajícího jednotkovou plochou za stejnou dobu je v obou případech zhruba stejné. Avšak driftová rychlost elektronů v polovodiči ($0{,}27\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$) je mnohem větší než driftová rychlost elektronů v měděném vodiči ($4{,}9\cdot10^{-7}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$).

Pokud si znovu tento příklad projdete, uvidíte, že velký rozdíl driftových rychlostí je způsoben tím, že počet nosičů náboje v jednotce objemu je v polovodiči mnohem menší. Jestliže jsou tedy hustoty proudu srovnatelné, pak je to tím, že v polovodiči je sice vodivostních elektronů méně než ve vodiči, ale pohybují se rychleji než ve vodiči.

27.4 ODPOR A REZISTIVITA

Jestliže ke koncům měděné a skleněné tyče stejného tvaru přiložíme stejné napětí, naměříme velmi odlišné proudy. Je to způsobeno tím, že měděná a skleněná tyč mají různý elektrický odpor. **Odpor** neboli **rezistanci** mezi libovolnými dvěma body vodiče určíme tak, že přiložíme napětí U mezi tyto body a změříme proud, který vodičem prochází. Odpor R pak je

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{(definice } R\text{)}. \qquad (27.8)$$

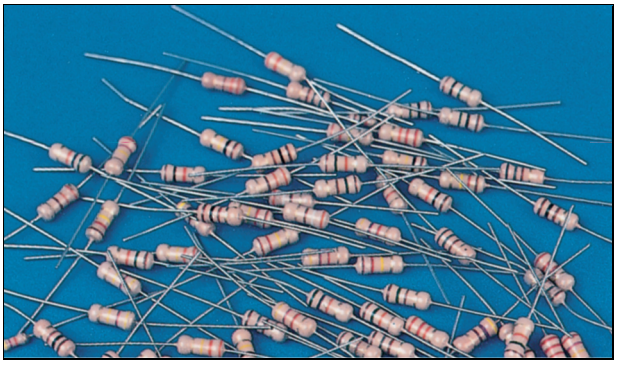
Z rov. (27.8) plyne, že jednotkou odporu v soustavě SI je volt na ampér. Tato jednotka se vyskytuje tak často, že dostala svůj zvláštní název **ohm** (označení Ω). Tedy

$$1\ \Omega = 1\ \mathrm{V\cdot A^{-1}}. \qquad (27.9)$$

Součástka, jejíž funkcí v elektrickém obvodu je vytvářet určitý odpor, se nazývá **rezistor** (obr. 27.7). Ve schématu elektrického obvodu znázorňujeme rezistor podle normy ISO ▭, podle americké normy -WW-. Jestliže rov. (27.8) napíšeme ve tvaru

$$I = \frac{U}{R},$$

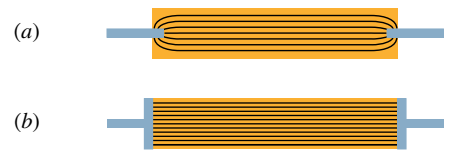
vidíme, že slovo „odpor“ je výstižné. Pro dané napětí totiž platí, že čím větší je odpor, který proudu klade vodič, tím menší proud vodičem prochází. Je zřejmé, že odpor je *vlastnost* rezistoru. Dříve se užíval termín **odpor** i pro součástku, tedy pro sám rezistor. Takové nedůslednosti lze běžně tolerovat v zájmu stručnosti vyjadřování, pokud nehrozí nedorozumění. Zde se však zabýváme problematikou natolik detailně, že rozlišení mezi veličinou (odpor, rezistance) a objektem (rezistor) je funkční, a budeme ho proto dodržovat.



Obr. 27.7 Rezistory. Barevné proužky na rezistorech označují hodnotu jejich odporu.

Převrácenou hodnotou odporu je **vodivost** (konduktance) $G = 1/R$; její jednotkou v SI je **siemens**, $\mathrm{S} = \Omega^{-1}$.

Odpor vodiče může být ovlivněn způsobem, jakým je k němu napětí přiloženo. Na obr. 27.8 vidíme, jak totéž napětí může být přiloženo k vodiči dvěma různými způsoby. Jak napovídá hustota proudových čar, bude proud a tedy i naměřený odpor v obou případech jiný. Pokud neřekneme výslovně jinak, budeme předpokládat, že napětí je k vodiči přiloženo podle obr. 27.8b.



Obr. 27.8 Dva způsoby jak přiložit napětí k vodivé tyči. Předpokládáme, že tmavě šedé přívody mají zanedbatelný odpor. Jestliže jsou připojeny podle (a), je naměřený odpor větší než při připojení podle (b).

Nezabývejme se nyní určitým rezistorem, ale materiálem, z něhož je rezistor vyroben. Namísto napětí přiloženého k rezistoru použijeme intenzitu elektrického pole ***E***

v určitém bodě materiálu rezistoru. Namísto celkového proudu I procházejícího rezistorem budeme pracovat s hustotu proudu $\boldsymbol{J}$ ve sledovaném bodě. Namísto odporu R celého vodiče použijeme veličinu nazvanou **rezistivita** (dříve *měrný odpor*) materiálu, označovanou ϱ a definovanou vztahem

$$\varrho = \frac{E}{J} \quad \text{(definice rezistivity).} \tag{27.10}$$

(Srovnejte tento vztah s definicí (27.8).)

Dosadíme-li do definičního vztahu (27.10) jednotky E a J v soustavě SI, odvodíme, že jednotkou rezistivity ϱ je $\Omega\cdot$m:

$$\frac{\text{jednotka } E}{\text{jednotka } J} = \frac{\text{V}\cdot\text{m}^{-1}}{\text{A}\cdot\text{m}^{-2}} = \frac{\text{V}}{\text{A}}\cdot\text{m} = \Omega\cdot\text{m}.$$

(Nezaměňujte jednotku rezistivity *ohm·metr* a měřicí přístroj *ohmmetr*, který se používá k měření odporu.) V tab. 27.1 jsou uvedeny rezistivity některých materiálů.

Tabulka 27.1 **Rezistivity ϱ a teplotní součinitelé rezistivity α některých materiálů při pokojové teplotě** (20 °C)

MATERIÁL	ϱ / $\Omega\cdot$m	α / K^{-1}
	typické kovy	
stříbro	$1{,}62\cdot10^{-8}$	$4{,}1\cdot10^{-3}$
měď	$1{,}69\cdot10^{-8}$	$4{,}3\cdot10^{-3}$
hliník	$2{,}75\cdot10^{-8}$	$4{,}4\cdot10^{-3}$
wolfram	$5{,}25\cdot10^{-8}$	$4{,}5\cdot10^{-3}$
železo	$9{,}68\cdot10^{-8}$	$6{,}5\cdot10^{-3}$
platina	$10{,}6\cdot10^{-8}$	$3{,}9\cdot10^{-3}$
manganin[a]	$48{,}2\cdot10^{-8}$	$0{,}002\cdot10^{-3}$
	typické polovodiče	
křemík čistý	$2{,}5\cdot10^{3}$	$-70\cdot10^{-3}$
křemík typu[b] n	$8{,}7\cdot10^{-4}$	
křemík typu[c] p	$2{,}8\cdot10^{-3}$	
	typické izolanty	
sklo	10^{10}–10^{14}	
tavený křemen	$\doteq 10^{16}$	

[a] Speciální slitina s malou hodnotou α.
[b] Čistý křemík dopovaný fosforem tak, že počet nosičů náboje v jednotkovém objemu je $10^{23}\,\text{m}^{-3}$.
[c] Čistý křemík dopovaný hliníkem tak, že počet nosičů náboje v jednotkovém objemu je $10^{23}\,\text{m}^{-3}$.

Rov. (27.10) můžeme přepsat do vektorového tvaru

$$\boldsymbol{E} = \varrho\boldsymbol{J}. \tag{27.11}$$

Vztahy (27.10) a (27.11) platí jen pro elektricky **izotropní** materiály, tedy materiály, jejichž elektrické vlastnosti jsou stejné ve všech směrech.

Často používáme také veličinu nazývanou **konduktivita** materiálu, označovanou σ. Je definována jako převrácená hodnota rezistivity

$$\sigma = \frac{1}{\varrho} \quad \text{(definice konduktivity).} \tag{27.12}$$

Jednotkou konduktivity v SI je $(\Omega\cdot\text{m})^{-1}$. Definice konduktivity σ nám umožňuje napsat rov. (27.11) v ekvivalentním tvaru

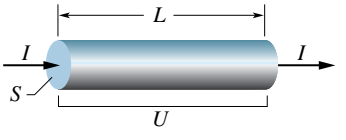
$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}. \tag{27.13}$$

Výpočet odporu pomocí rezistivity

Nejprve musíme upozornit na významný rozdíl:

Odpor (neboli rezistance) je vlastnost objektu (vodiče, rezistoru). Rezistivita je vlastnost materiálu.

Známe-li rezistivitu látky, jako je například měď, můžeme vypočítat odpor vodiče z této látky vyrobeného. Nechť S je průřez vodiče, L jeho délka a nechť mezi jeho konci je napětí U (obr. 27.9). Jestliže proudové čáry znázorňující hustotu proudu jsou stejnoměrně rozloženy v celém



Obr. 27.9 Napětí U přiložené mezi konce vodiče o délce L a průřezu S způsobí, že vodičem prochází proud I.

průřezu vodiče, budou elektrické pole a hustota proudu ve všech bodech uvnitř vodiče konstantní a podle rov. (25.42) a (27.5) platí

$$E = \frac{U}{L} \qquad \text{a} \qquad J = \frac{I}{S}. \tag{27.14}$$

Z rov. (27.14) dosadíme do rov. (27.10):

$$\varrho = \frac{E}{J} = \frac{U/L}{I/S}. \tag{27.15}$$

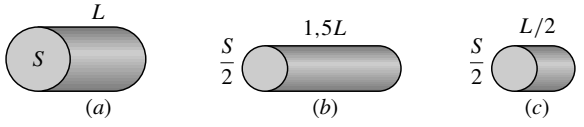
Avšak U/I je odpor R, takže z rov. (27.15) plyne

$$R = \varrho\frac{L}{S}. \tag{27.16}$$

Vztah (27.16) je použitelný pouze v případě homogenního izotropního vodiče konstantního průřezu, k němuž je přiloženo napětí v souladu s obr. 27.8b.

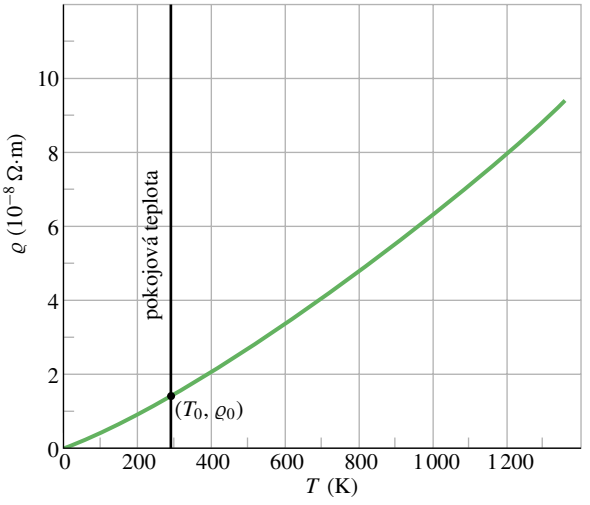
Makroskopické veličiny U, I a R jsou veličiny, které odečítáme přímo na měřicích přístrojích, když měříme na určitém vodiči v elektrickém obvodu. Mikroskopické veličiny $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$ a ϱ používáme, když se zabýváme elektrickými vlastnostmi materiálu.

KONTROLA 3: Na obrázku jsou nakresleny tři válcové měděné vodiče a je vyznačen jejich průřez a délka. Uspořádejte vodiče sestupně podle proudu, který jimi bude protékat, jestliže k jejich koncům přiložíme napětí U.



Závislost na teplotě

Hodnoty většiny fyzikálních veličin se mění s teplotou a ani rezistivita není výjimkou. Na obr. 27.10 je jako příklad znázorněna rezistivita mědi v širokém rozsahu teplot.



Obr. 27.10 Rezistivita mědi v závislosti na teplotě. Tečka na křivce vyznačuje obvyklý referenční bod ($T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$, $\varrho_0 = 1{,}69\cdot10^{-8}\ \Omega\cdot\mathrm{m}$).

Vztah mezi teplotou a rezistivitou mědi je téměř lineární v širokém teplotním rozsahu a toto tvrzení platí i pro jiné kovy. Znázorněnou závislost můžeme aproximovat lineárním vztahem

$$\varrho - \varrho_0 = \varrho_0\alpha(T - T_0), \qquad (27.17)$$

který je dostatečně přesný pro většinu inženýrských výpočtů. Zde T_0 je určitá zvolená referenční teplota a ϱ_0 je rezistivita při této teplotě. Obvykle volíme $T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$, což je tzv. pokojová teplota; při ní je rezistivita mědi $\varrho_0 = 1{,}69\cdot10^{-8}\ \Omega\cdot\mathrm{m}$.

V rov. (27.17) vystupuje jen rozdíl teplot a nezáleží tedy na tom, zda použijeme Celsiovu nebo Kelvinovu teplotní stupnici, protože velikost teplotního stupně je v obou stupnicích stejná. Veličina α v rov. (27.17) se nazývá **teplotní součinitel rezistivity** a její hodnota se určí tak, aby se rezistivita vypočtená z rov. (27.17) co nejvíce blížila rezistivitě určené experimentálně ve zvoleném rozsahu teplot. Hodnoty α pro některé kovy jsou uvedeny v tab. 27.1.

Vzducholoď Hindenburg

Když se zepelín* *Hindenburg* připravoval k přistání, manévrovací lana byla spuštěna dolů k pozemní obsluze. Protože pršelo, lana byla mokrá a mohla tedy vést proud. Lana tak uzemnila kovovou konstrukci vzducholodi, k níž byla upevněna. Mokrá lana tím vytvořila vodivou dráhu mezi konstrukcí vzducholodi a zemí, takže elektrostatický potenciál kovové konstrukce byl stejný jako potenciál země. Nebyl však uzemněn vnější plášť vzducholodi. Přitom *Hindenburg* byl první zepelín, jehož vnější plášť byl natřen těsnicím materiálem o vysoké rezistivitě. Tak se stalo, že plášť měl stále elektrický potenciál atmosféry ve výšce asi 43 m. Protože byla právě bouřka, byl tento potenciál poměrně vysoký vzhledem k potenciálu země.

Při manévrování s lany se pravděpodobně roztrhla jedna z nádrží vodíku, ten unikl do prostoru mezi nádrž a vnější plášť a způsobil pozorované vlnění pláště. To byla nebezpečná situace. Plášť byl vlhký, pokrytý vodivou dešťovou vodou a jeho potenciál byl výrazně odlišný od potenciálu kostry vzducholodi. Podél vlhkého pláště zřejmě protekl elektrický náboj a potom přeskočila jiskra ke kovové konstrukci vzducholodi přes prostor vyplněný uniklým vodíkem a vodík zapálila. Oheň se během okamžiku rozšířil k ostatním nádržím s vodíkem a vzducholoď padala k zemi. Kdyby měl těsnicí materiál vnějšího pláště *Hindenburgu* menší rezistivitu, jak tomu bylo u zepelínů před ním a po něm, žádná katastrofa by *Hindenburg* pravděpodobně nepotkala.

* Hrabě Ferdinand von Zeppelin (1838–1917) byl německý inženýr a průkopník letectví. Zkonstruoval úspěšné vzducholodi doutníkového tvaru, vyztužené hliníkovou konstrukcí, plněné plynem a poháněné benzinovými motory. Společnost Luftschiffsbau Zeppelin, kterou založil, vyrobila přes sto vzducholodí nazývaných zepelíny.

PŘÍKLAD 27.5

(a) Jaká je intenzita elektrického pole v měděném vodiči v příkladu 27.3?

ŘEŠENÍ: V př. 27.3a jsme vypočítali, že hustota proudu J je $6{,}7{\cdot}10^3\ \mathrm{A{\cdot}m^{-2}}$. V tab. 27.1 najdeme rezistivitu mědi $1{,}69{\cdot}10^{-8}\ \Omega{\cdot}\mathrm{m}$. Pomocí rov. (27.11) vypočteme

$$E = \varrho J = (1{,}69{\cdot}10^{-8}\ \Omega{\cdot}\mathrm{m})(6{,}7{\cdot}10^3\ \mathrm{A{\cdot}m^{-2}}) = \\ = 1{,}1{\cdot}10^{-4}\ \mathrm{V{\cdot}m^{-1}} \quad \text{(měď)}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je intenzita elektrického pole v křemíku typu n z př. 27.4?

ŘEŠENÍ: V př. 27.4 jsme vypočítali, že $J = 6\,500\ \mathrm{A{\cdot}m^{-2}}$. V tab. 27.1 najdeme $\varrho = 8{,}7{\cdot}10^{-4}\ \Omega{\cdot}\mathrm{m}$. Pomocí rov. (27.11) vypočteme

$$E = \varrho J = (8{,}7{\cdot}10^{-4}\ \Omega{\cdot}\mathrm{m})(6\,500\ \mathrm{A{\cdot}m^{-2}}) = \\ = 5{,}7\ \mathrm{V{\cdot}m^{-1}} \quad \text{(křemík typu } n\text{)}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že intenzita elektrického pole v polovodiči je mnohem větší než intenzita elektrického pole v měděném vodiči. Jestliže si sami příklad přepočítáte, zjistíte, že tento rozdíl je způsoben velmi odlišnou rezistivitou obou materiálů. Příčina, proč je v polovodiči mnohem větší intenzita elektrického pole, je obdobná příčině toho, že driftová rychlost elektronů v polovodiči je mnohem větší než driftová rychlost elektronů v kovu (viz př. 27.4). Jsou-li hustoty proudu v obou vzorcích srovnatelné, musí být intenzita elektrického pole v polovodiči mnohem větší, aby elektrony byly elektrickým polem více urychleny a získaly vyšší driftovou rychlost.

PŘÍKLAD 27.6

Kus železa má tvar kvádru o rozměrech $1{,}2\ \mathrm{cm} \times 1{,}2\ \mathrm{cm} \times 15\ \mathrm{cm}$.

(a) Jaký je odpor tohoto kvádru měřený mezi protilehlými čtvercovými stěnami?

ŘEŠENÍ: Podle tab. 27.1 je rezistivita železa při pokojové teplotě $9{,}68 \cdot 10^{-8}\ \Omega{\cdot}\mathrm{m}$. Čtvercové plochy na koncích kvádru mají obsah $(1{,}2{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{m})^2 = 1{,}44{\cdot}10^{-4}\ \mathrm{m^2}$. Pro odpor dostáváme z rov. (27.16)

$$R = \varrho\frac{L}{S} = \frac{(9{,}68{\cdot}10^{-8}\ \Omega{\cdot}\mathrm{m})(0{,}15\ \mathrm{m})}{(1{,}44{\cdot}10^{-4}\ \mathrm{m^2})} = \\ = 1{,}0{\cdot}10^{-4}\ \Omega = 100\ \mu\Omega. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaký je odpor železného kvádru měřený mezi dvěma protilehlými obdélníkovými stěnami?

ŘEŠENÍ: Obsah obdélníka je $(1{,}2{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{m})(0{,}15\ \mathrm{m}) = 1{,}80{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{m^2}$. Z rov. (27.16) plyne

$$R = \varrho\frac{L}{S} = \frac{(9{,}68{\cdot}10^{-8}\ \Omega{\cdot}\mathrm{m})(1{,}2{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{m})}{(1{,}80{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{m^2})} = \\ = 6{,}5{\cdot}10^{-7}\ \Omega = 0{,}65\ \mu\Omega. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento odpor je mnohem menší než v předcházejícím případě, protože vzdálenost L je menší a plocha S je větší. V obou částech příkladu předpokládáme, že hustota proudu v železe je homogenní (jako na obr. 27.8b). V opačném případě by rov. (27.16) nebyla platná.

27.5 OHMŮV ZÁKON

Jak jsme již uvedli v čl. 27.4, rezistor je vodič o určitém odporu nezávislém na tom, jaká je velikost nebo polarita přiloženého napětí. Některé vodivé součástky však mohou mít odpor, který na přiloženém napětí závisí.

Obr. 27.11a naznačuje, jak takovou součástku poznáme. Přiložíme k ní napětí U, měníme jeho velikost a polaritu a měříme proud I procházející součástkou. Dohodneme se, že polaritu napětí označíme jako kladnou, jestliže levá svorka na obr. 27.11 bude mít vyšší potenciál než pravá svorka. Směr proudu zleva doprava budeme považovat za kladný a označíme znaménkem plus (+). Opačnou polaritu napětí U (kdy pravá svorka má vyšší potenciál) pak označíme jako zápornou a odpovídající proud označíme znaménkem minus (−).

Na obr. 27.11b je nakreslen graf závislosti proudu I na napětí U pro jistou součástku. Grafem této závislosti je přímka procházející počátkem, takže poměr I/U (což je směrnice této přímky) je stejný pro všechny hodnoty napětí U. To znamená, že odpor $R = U/I$ součástky nezávisí na velikosti a polaritě přiloženého napětí U.

Na obr. 27.11c je nakreslen graf pro jinou součástku. Proud touto součástkou prochází pouze tehdy, když polarita přiloženého napětí je kladná a napětí je větší než asi 1,5 V. Závislost mezi proudem I a napětím U u této součástky je výrazně nelineární.

Oba uvedené typy součástek odlišíme tak, že řekneme, že některé se řídí Ohmovým zákonem a jiné součástky nikoli.

Pro součástku řídící se Ohmovým zákonem je proud jí protékající přímo úměrný přiloženému napětí.

(Ohmův „zákon“, jak jsme viděli, je splněn jen v určitých situacích, z historických důvodů se však přesto označuje jako zákon.) Součástka charakterizovaná grafem na

obr. 27.11b splňuje Ohmův zákon (je to rezistor o odporu 1 000 Ω). Součástka z obr. 27.11c je polovodičová dioda s přechodem *p-n*; ta se Ohmovým zákonem neřídí. V moderní mikroelektronice se téměř všude používají součástky, pro které Ohmův zákon neplatí. Každá kalkulačka je takových součástek plná.

Často se míní, že vztahem $U = RI$ je vyjádřen Ohmův zákon. To však *není* přesné. Tato rovnice je *definiční rovnicí* pro odpor a dá se použít pro všechny vodiče, ať už pro ně Ohmův zákon platí nebo ne. Jestliže měříme napětí U na nějaké součástce a proud I, který součástkou prochází (může to být i dioda), vždy můžeme spočítat její odpor při daném napětí U podle vztahu $R = U/I$; ten obecně nemusí být konstantní. Podstatou Ohmova zákona je tvrzení, že odpor R konstantní *je*, tedy že graf závislosti proudu na napětí je lineární neboli že odpor R nezávisí* na napětí U.

Ohmův zákon tvrdí, že odpor R je vlastností *součástky* a nezávisí na velikosti ani polaritě přiloženého napětí.

Ohmův zákon můžeme vyjádřit obecněji, když se zaměříme na vodivé *materiály*, nikoli pouze na vodiče nebo součástky. Analogií vztahu $U = RI$ je materiálový vztah (27.11), tj. $\boldsymbol{E} = \varrho \boldsymbol{J}$.

Vodivý *materiál* splňuje Ohmův zákon, jestliže jeho rezistivita nezávisí na velikosti a směru intenzity přiloženého elektrického pole.

Všechny homogenní materiály, ať už to jsou vodiče, jako měď, nebo polovodiče, jako je křemík (dopovaný nebo čistý), splňují velmi dobře Ohmův zákon, není-li intenzita elektrického pole příliš silná. Odchylky od Ohmova zákona se projeví až ve velmi silných polích. Ovšem různé *součástky* z těchto materiálů sestavené v různém uspořádání (např. přechod *p-n*) se již Ohmovým zákonem neřídí.

* Obecně zavádíme *diferenciální odpor* $R_d = \mathrm{d}U/\mathrm{d}I$. Pro součástku neřídící se Ohmovým zákonem není totožný s odporem $R = U/I$. Pro součástku řídící se Ohmovým zákonem platí $R_d = R$ vždy.

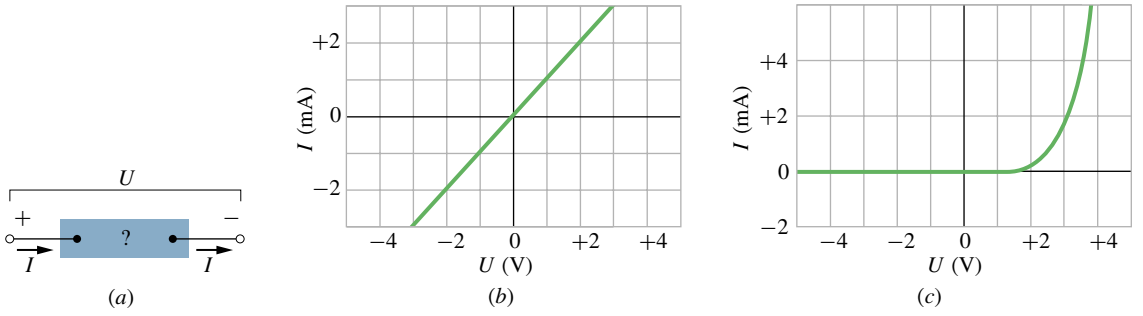
KONTROLA 4: V tabulce jsou uvedeny hodnoty proudu I (v ampérech) procházejícího dvěma různými součástkami pro několik hodnot napětí U (ve voltech). Pomocí těchto údajů určete, pro kterou součástku neplatí Ohmův zákon.

SOUČÁSTKA 1		SOUČÁSTKA 2	
U / V	I / A	U / V	I / A
2,00	4,50	2,00	1,50
3,00	6,75	3,00	2,20
4,00	9,00	4,00	2,80

27.6 MIKROSKOPICKÝ POHLED NA OHMŮV ZÁKON

Abychom zjistili, *proč* pro určité materiály platí Ohmův zákon, musíme se podívat podrobně na proces vedení proudu na atomární úrovni. Zde se budeme zabývat pouze vodivostí kovů, jako je např. měď. Náš rozbor bude založen na *modelu volných elektronů*. Podle tohoto modelu se vodivostní elektrony mohou volně pohybovat v celém objemu kovu podobně jako molekuly plynu v uzavřené nádobě. Pro vysvětlení vodivosti budou podstatné srážky elektronů s atomy kovu, zatímco vzájemné srážky mezi elektrony nemění celkovou energii ani hybnost elektronového plynu a nejsou tedy pro vodivost podstatné.

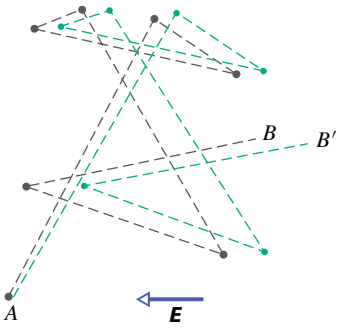
Podle klasické fyziky by rychlosti elektronů měly odpovídat Maxwellovu rozdělení rychlostí podobně jako rychlosti molekul v plynu. Při takovém rozdělení (viz čl. 20.7) by střední rychlost elektronů byla úměrná odmocnině z absolutní teploty. Pohyb elektronů se však neřídí zákony fyziky klasické, ale kvantové. Ukazuje se, že



Obr. 27.11 (a) Součástka, k jejímž svorkám je přiloženo napětí U, které vyvolá průchod proudu I. (b) Graf závislosti proudu I na napětí U, je-li součástkou rezistor o odporu 1 000 Ω. (c) Stejný graf, je-li součástkou polovodičová dioda s přechodem *p-n*.

kvantové realitě odpovídá mnohem více předpoklad, že se všechny elektrony pohybují stejnou rychlostí v_F (Fermiho rychlost) téměř nezávislou na teplotě. Pro měď je $v_F = 1{,}6{\cdot}10^6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Jestliže přiložíme elektrické pole ke kovovému vodiči, poněkud se změní chaotický pohyb elektronů a elektrony se začnou velmi pomalu pohybovat *driftovou rychlostí* v_d ve směru opačném, než je směr intenzity elektrického pole. Jak jsme viděli v př. 27.3b, driftová rychlost v typickém kovovém vodiči je asi $4{\cdot}10^{-7}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, tedy o mnoho řádů menší než Fermiho rychlost ($1{,}6{\cdot}10^6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$). Obr. 27.12 naznačuje souvislost mezi oběma rychlostmi. Šedé čáry znázorňují možné náhodné dráhy elektronu bez vnějšího elektrického pole. Elektron se šestkrát srazí, než se dostane z bodu A do bodu B. Zelené čáry znázorňují, jak by se mohl elektron pohybovat v elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$. Vidíme, že elektron je vytrvale unášen doprava a dostane se nakonec do bodu B', a ne do bodu B. Obr. 27.12 byl nakreslen za předpokladu, že $v_d \doteq 0{,}02 v_F$. Ve skutečnosti je $v_d \doteq 10^{-13} v_F$ a drift znázorněný na obrázku je tedy mnohonásobně zvětšen.



Obr. 27.12 Šedé čáry znázorňují chaotický pohyb elektronu z bodu A do bodu B bez přiloženého elektrického pole. Zelené čáry ukazují, jak by mohla trajektorie elektronu vypadat v elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$. V obou případech se elektron šestkrát srazí. Všimněte si stálého unášení elektronu ve směru $-\boldsymbol{E}$. (Ve skutečnosti by zelené čáry měly být lehce zakřiveny, aby mezi srážkami odpovídaly parabolickým dráhám elektronu v elektrickém poli.)

Pohyb elektronu v elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$ je tedy kombinací chaotického pohybu způsobeného náhodnými srážkami a unášivého pohybu vyvolaného elektrickým polem. Když uvážíme všechny volné elektrony, vidíme, že se (v každém okamžiku) neuspořádaně pohybují ve všech možných směrech, takže se jejich chaotické pohyby navzájem vykompenzují (přesněji: vektorový součet rychlostí chaotického pohybu všech elektronů je v každém okamžiku roven nule) a nepřispívají k unášivému pohybu driftovou rychlostí. Driftová rychlost je tedy dána jen působením elektrického pole na elektrony (mezi srážkami).

Nachází-li se elektron o hmotnosti m v elektrickém poli, jehož intenzita má velikost E, pohybuje se podle druhého Newtonova zákona se zrychlením o velikosti

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}. \tag{27.18}$$

Elektrony se srážejí tak, že po typické srážce elektron úplně „zapomene“ — můžeme-li to tak říci — na svůj předcházející pohyb. Každý elektron se tedy po každé nahodilé srážce začíná znovu pohybovat úplně náhodným směrem. Je-li střední doba mezi srážkami τ, elektrony získají střední driftovou rychlost $v_d = a\tau$. A nejen to — kdybychom stanovili driftové rychlosti všech elektronů v libovolném časovém okamžiku, zjistili bychom, že jejich střední driftová rychlost je rovněž $a\tau$. V libovolném okamžiku tedy mají elektrony střední driftovou rychlost $v_d = a\tau$. Pomocí rov. (27.18) vypočteme

$$v_d = a\tau = \frac{eE\tau}{m}. \tag{27.19}$$

Dosadíme-li tento výsledek do rov. (27.7) ($J = nev_d$), dostaneme

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{eE\tau}{m}$$

a odtud plyne

$$E = \left(\frac{m}{e^2 n\tau}\right) J.$$

Porovnáním s rov. (27.11) ($E = \varrho J$) dostaneme

$$\varrho = \frac{m}{e^2 n\tau}. \tag{27.20}$$

Vztah (27.20) můžeme považovat za potvrzení toho, že pro kovy platí Ohmův zákon, pokud prokážeme, že pro kovy je rezistivita ϱ nezávislá na intenzitě přiloženého elektrického pole $\boldsymbol{E}$. Protože n, m a e jsou konstanty, zbývá nám zdůvodnit, že střední doba mezi srážkami τ je konstantní, nezávislá na intenzitě přiloženého elektrického pole. Dobu τ však můžeme opravdu považovat za konstantní, protože driftová rychlost v_d, kterou elektrony získají působením elektrického pole, je řádově 10^{13}krát menší než Fermiho rychlost v_F, takže přiložené pole prakticky neovlivní rychlost elektronů, a tedy ani τ.

K popisu elektronů v kovu z hlediska *kvantové* teorie se ještě vrátíme v čl. 42.5.

PŘÍKLAD 27.7

(a) Jaká je střední volná doba τ mezi srážkami pro vodivostní elektrony v mědi?

ŘEŠENÍ: Z rov. (27.20) plyne

$$\tau = \frac{m}{ne^2\varrho}.$$

Počet n vodivostních elektronů v jednotce objemu mědi jsme spočítali v př. 27.3b, rezistivitu mědi ϱ najdeme v tab. 27.1. Jmenovatel zlomku má tedy hodnotu

$$(8{,}47{\cdot}10^{28}\,\mathrm{m^{-3}})(1{,}60{\cdot}10^{-19}\,\mathrm{C})^2(1{,}69{\cdot}10^{-8}\,\Omega{\cdot}\mathrm{m}) = \\ = 3{,}66{\cdot}10^{-17}\,\mathrm{C^2{\cdot}\Omega{\cdot}m^{-2}} = 3{,}66{\cdot}10^{-17}\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}},$$

kde jsme výslednou jednotku určili takto:

$$\frac{\mathrm{C^2{\cdot}\Omega}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{C^2\cdot V}}{\mathrm{m^2{\cdot}A}} = \frac{\mathrm{C^2\cdot J{\cdot}C^{-1}}}{\mathrm{m^2\cdot C{\cdot}s^{-1}}} = \frac{\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}}}{\mathrm{m^2{\cdot}s^{-1}}} = \mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}.$$

Pro střední volnou dobu τ mezi srážkami vychází

$$\tau = \frac{(9{,}1{\cdot}10^{-31}\,\mathrm{kg})}{(3{,}66{\cdot}10^{-17}\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}})} = 2{,}5{\cdot}10^{-14}\,\mathrm{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je střední volná dráha λ elektronu mezi dvěma srážkami? Předpokládejme, že Fermiho rychlost je $v_\mathrm{F} = 1{,}6{\cdot}10^6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

ŘEŠENÍ: V čl. 20.6 jsme definovali střední volnou dráhu jako střední vzdálenost, kterou částice proběhne mezi dvěma srážkami. V tomto příkladě je doba mezi dvěma srážkami volného elektronu τ a rychlost pohybu elektronu je v_F, takže

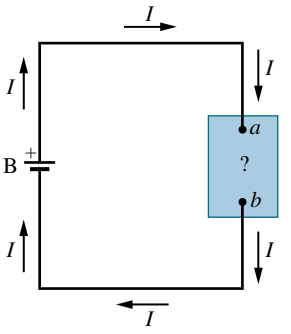
$$\lambda = \tau v_\mathrm{F} = (2{,}5{\cdot}10^{-14}\,\mathrm{s})(1{,}6{\cdot}10^6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = \\ = 4{,}0{\cdot}10^{-8}\,\mathrm{m} = 40\,\mathrm{nm}. \quad \text{(Odpověď)}$$

To je asi 150krát větší délka než vzdálenost mezi nejbližšími sousedními atomy v krystalové mřížce mědi.

27.7 VÝKON V ELEKTRICKÝCH OBVODECH

V elektrickém obvodu na obr. 27.13 je baterie B spojena s nějakou blíže neurčenou vodivou součástkou pomocí vodičů, o nichž předpokládáme, že jejich odpor je zanedbatelný. Součástkou může být rezistor, akumulátorová baterie nebo cokoli jiného. Na svorkách baterie je napětí U, a protože baterie je spojena vodiči se součástkou, je stejné napětí i na svorkách součástky, přičemž svorka a má vyšší potenciál než svorka b.

Protože vývody baterie jsou *vně* baterie vodivě spojeny a napětí baterie je konstantní, prochází obvodem ustálený proud I od svorky a ke svorce b. Náboj, který projde mezi těmito svorkami za dobu $\mathrm{d}t$, je $I\,\mathrm{d}t$. Podél trajektorie, po



Obr. 27.13 Baterie B dodává proud I do obvodu s nějakou blíže neurčenou vodivou součástkou.

níž se tento náboj $\mathrm{d}Q$ pohybuje, poklesne elektrický potenciál o hodnotu U, a proto elektrická potenciální energie poklesne o hodnotu

$$\mathrm{d}E_\mathrm{p} = \mathrm{d}Q\,U = I\,\mathrm{d}t\,U.$$

Zákon zachování energie nám říká, že pokles elektrické potenciální energie podél trajektorie od a do b musí být doprovázen přeměnou energie do nějaké jiné formy. **Výkon** P s tímto přenosem spojený se definuje jako rychlost přenosu energie, tj. $\mathrm{d}E_\mathrm{p}/\mathrm{d}t$, takže

$$P = UI \quad \text{(výkon = rychlost přenosu elektrické energie).} \qquad (27.21)$$

Jednotkou výkonu podle rov. (27.21) je voltampér. Platí

$$1\,\mathrm{V{\cdot}A} = \left(1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right)\left(1\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}\right) = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{W}.$$

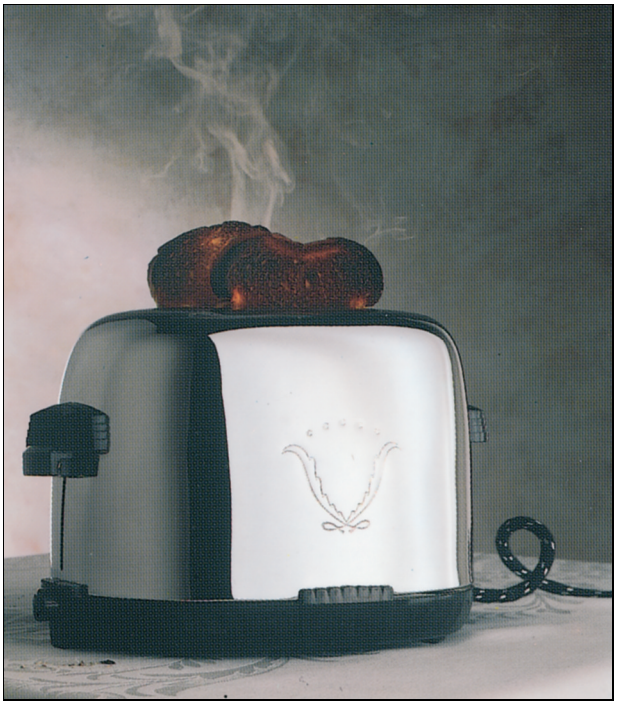
Výkon daný rov. (27.21) udává rychlost přenosu energie od baterie k součástce. Je-li součástkou elektromotor připojený k nějakému mechanickému zařízení, elektrická energie se přeměňuje v práci tohoto zařízení. Je-li součástkou akumulátorová baterie, nabíjí se a elektrická energie se přeměňuje v chemickou energii uloženou v akumulátoru. Je-li součástkou rezistor, elektrická energie je v něm disipována.

Pro rezistor můžeme pomocí rov. (27.8) ($R = U/I$) a (27.21) napsat vztah pro rychlost disipace energie, tedy disipovaný výkon, ve tvaru

$$P = I^2R \quad \text{(disipace energie rezistorem)} \qquad (27.22)$$

neboli

$$P = \frac{U^2}{R} \quad \text{(disipace energie rezistorem).} \qquad (27.23)$$



Spirála z drátu uvnitř opékače topinek má značný odpor. Když spirálou prochází proud, elektrická energie se přeměňuje v teplo a teplota spirály vzrůstá. Ze spirály pak vychází viditelné světlo i infračervené záření, které chléb opeče (nebo připálí).

Co se stane s touto energií? Pohybující se náboje se srážejí s atomy v rezistoru a předávají část své energie těmto atomům, a tím se zvětšuje vnitřní energie materiálu. To vede ke zvyšování teploty rezistoru a ten se stává zdrojem tepelného toku. Tomuto nevratnému procesu říkáme **disipace energie**.

Musíme však odlišovat rov. (27.22) a (27.23) od rov. (27.21). Vztah $P = IU$ se dá použít vždy, když jde o přenos elektrické energie v obecné situaci, zatímco vztahy $P = I^2R$, či $P = U^2/R$ platí pouze v případě přeměny elektrické potenciální energie v rezistoru. (V elektrotechnice se zpravidla mluví o Joulově teple nebo s ohledem na funkci rezistoru o ztrátovém, resp. tepelném výkonu rezistoru.)

KONTROLA 5: K rezistoru o odporu R je přiloženo napětí U a prochází jím proud I. Seřaďte sestupně ztrátové výkony (rychlosti přeměny elektrické energie v teplo) v rezistoru při těchto změnách v obvodu: (a) napětí U se zdvojnásobí a odpor R se nezmění, (b) proud I se zdvojnásobí a odpor R se nezmění, (c) odpor R se zdvojnásobí a napětí U se nezmění, (d) odpor R se zdvojnásobí a proud I se nezmění.

PŘÍKLAD 27.8

Vodič zhotovený ze slitiny niklu, chromu a železa (nazývané nichrom) má odpor $R = 72\,\Omega$. Určete výkon elektrické energie v těchto případech: (1) napětí na celém vodiči je 120 V, (2) vodič rozpůlíme a napětí 120 V je přiloženo ke každé polovině vodiče.

ŘEŠENÍ: Užitím rov. (27.23) v prvním případě dostaneme

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{(120\,\mathrm{V})^2}{(72\,\Omega)} = 200\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Ve druhém případě je odpor poloviny drátu $(72\,\Omega)/2 = 36\,\Omega$, takže rychlost disipace energie pro každou polovinu drátu je

$$P' = \frac{(120\,\mathrm{V})^2}{(36\,\Omega)} = 400\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Celkový výkon v obou polovinách je 800 W, tedy čtyřikrát větší než v celém vodiči v prvním případě. Mohlo by vás tedy napadnout, že byste si koupili ohřívací spirálu, rozpůlili ji, znovu zapojili paralelně a získali čtyřikrát více tepla. Proč to nejde?

PŘÍKLAD 27.9

Vodičem o délce $L = 2{,}35\,\mathrm{m}$ a průměru $d = 1{,}63\,\mathrm{mm}$ prochází proud $I = 1{,}24\,\mathrm{A}$. Ztrátový výkon ve vodiči je $P = 48{,}5\,\mathrm{mW}$. Z čeho je vodič vyroben?

ŘEŠENÍ: Materiál vodiče určíme podle jeho rezistivity. Užitím rov. (27.16) a (27.22) dostaneme

$$P = I^2R = \frac{I^2\varrho L}{S} = \frac{4I^2\varrho L}{\pi d^2},$$

kde $S = \pi d^2/4$ je průřez vodiče. Rezistivita materiálu, z něhož je vodič vyroben, tedy je

$$\varrho = \frac{\pi P d^2}{4I^2L} = \frac{\pi(48{,}5\cdot10^{-3}\,\mathrm{W})(1{,}63\cdot10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{4(1{,}24\,\mathrm{A})^2(2{,}35\,\mathrm{m})} =$$
$$= 2{,}80\cdot10^{-8}\,\Omega\cdot\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V tab. 27.1 zjistíme, že takovou rezistivitu má hliník.

27.8 POLOVODIČE

Polovodičové součástky jsou srdcem mikroelektronické revoluce, která tak výrazně ovlivnila náš život. V tab. 27.2 jsou porovnány vlastnosti křemíku, typického polovodiče, a vlastnosti mědi, typického kovového vodiče. Vidíme, že čistý křemík má mnohem méně nosičů náboje, mnohem větší rezistivitu a velký záporný teplotní součinitel rezistivity. S rostoucí teplotou rezistivita mědi roste a rezistivita čistého křemíku naopak klesá.

Tabulka 27.2 **Některé elektrické vlastnosti mědi a křemíku**[a]

VLASTNOST	MĚĎ	KŘEMÍK
druh materiálu	kov	polovodič
koncentrace nosičů náboje n/m^{-3}	$9{\cdot}10^{28}$	$1{\cdot}10^{16}$
rezistivita $\varrho/\ \Omega{\cdot}\mathrm{m}$	$2{\cdot}10^{-8}$	$3{\cdot}10^{3}$
teplotní součinitel rezistivity α/K^{-1}	$+4{\cdot}10^{-3}$	$-70{\cdot}10^{-3}$

[a] Kvůli snadnějšímu porovnání jsou hodnoty zaokrouhleny na jednu platnou číslici.

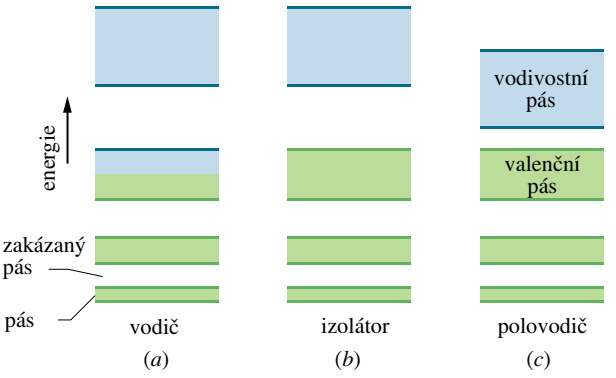
Rezistivita čistého křemíku je tak vysoká, že je to prakticky izolátor, a v mikroelektronice se téměř nepoužívá. Použití křemíku umožňuje okolnost, že se jeho rezistivita dá snížit kontrolovatelným způsobem přidáním nepatrného množství určitých cizích, *příměsových atomů* (viz tab. 27.1). Tento proces se nazývá **dopování**.

Rozdíl v rezistivitě (a tedy i v konduktivitě) polovodičů a kovových vodičů se dá pochopit, jestliže se podrobněji podíváme na **energiové hladiny** jejich elektronů. V čl. 8.9 jsme viděli, že energie elektronů v izolovaném atomu je *kvantována*, to znamená, že je omezena jen na určité hodnoty neboli *hladiny*, jak je nakresleno na obr. 8.17. Elektron může *obsadit* kteroukoli z těchto energiových hladin (tzn. může mít jí odpovídající energii), ale nemůže mít žádnou energii mezi hladinami.

Elektrony v pevných látkách také obsazují kvantované hladiny, ale vzájemná blízkost atomů způsobuje „rozmazání" nesmírného počtu jejich energiových hladin do několika **pásů** (obr. 27.14). Elektron může obsadit energiovou hladinu uvnitř pásu, ale nemůže mít žádnou energii připadající do **zakázaných pásů**, které energiové pásy oddělují. Počet elektronů, které mohou obsadit jednu energiovou hladinu, je navíc omezen zákony kvantové fyziky. Elektron může získat větší energii *jedině* tak, že dostane energii dostačující k obsazení nezaplněné vyšší energiové hladiny buď v témže, nebo ve vyšším pásu.

V kovu, jako je měď (obr. 27.14a), se nejvyšší obsazená hladina energie nachází blízko středu energiového pásu. Elektrony tak mohou snadno přejít na velké množství volných hladin výše v pásu, i když dostanou jen malé množství energie. Energii jim může dodat elektrické pole přiložené k vodiči. Elektrické pole uvádí některé z elektronů tohoto pásu do pohybu vodičem, zvyšuje jejich kinetickou energii, a tak je pozvedá na vyšší energiové hladiny. Takové elektrony jsou tedy **vodivostní elektrony** a tvoří proud vodičem. Elektrony v nižších pásech se nemohou podílet na vedení proudu, protože přiložené elektrické pole jim nedokáže poskytnout energii potřebnou k přechodu na prázdné hladiny.

V izolátoru (obr. 27.14b) je nejvyšší obsazený pás úplně zaplněn. Nejbližší vyšší dostupné prázdné energiové



Obr. 27.14 Energiové hladiny elektronu v pevné látce tvoří pásy dovolených a zakázaných energií. Zelenou barvou jsou nakresleny částečně nebo úplně zaplněné pásy. (a) V kovovém vodiči leží nejvyšší energiová hladina uprostřed energiového pásu (pás je částečně zaplněn). (b) V izolátoru je nejvyšší obsazený pás úplně zaplněn a zakázaný pás mezi ním a prázdným pásem umístěným nad ním je poměrně široký. (c) Polovodič připomíná izolátor s tím rozdílem, že zakázaný pás mezi valenčním a vodivostním pásem je poměrně úzký.

hladiny leží v prázdném pásu, který je oddělen od nejvyššího zaplněného pásu značně širokým zakázaným pásem. Dokud přiložené elektrické pole nedodá elektronům energii dostatečnou k přeskoku na prázdné hladiny, nemůže procházet žádný proud.

Polovodič (obr. 27.14c) se podobá izolátoru s tím rozdílem, že zakázaný pás mezi nejvyšším zaplněným pásem (nazývaným **valenční pás**) a prázdným pásem umístěným nad ním (nazývaným **vodivostním pás**) je poměrně úzký, takže pravděpodobnost, že tepelně excitovaný elektron přeskočí přes zakázaný pás, není zanedbatelně malá. Mnohem významnější však je, že určité záměrně přidané příměsi mohou dodávat nosiče náboje do vodivostního pásu. Většina polovodičových součástek, jako např. tranzistory nebo diody, se skládá z několika oblastí křemíku dopovaných různými příměsovými atomy.

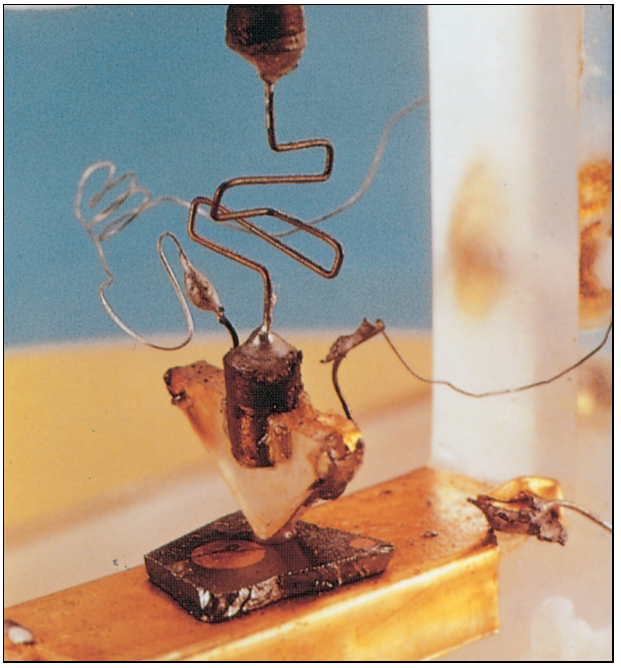
Vraťme se zpět k rov. (27.20) pro rezistivitu vodiče

$$\varrho = \frac{m}{e^2 n \tau}, \tag{27.24}$$

kde n je počet nosičů náboje v jednotkovém objemu a τ je střední volná doba mezi srážkami. (Tuto rovnici jsme odvodili pro vodiče, ale dá se použít i pro polovodiče.) Položme si nyní otázku, jak se veličiny n a τ mění, když roste teplota.

Ve vodiči je koncentrace n velká a prakticky konstantní, její hodnota se s teplotou významně nemění. Vzrůst rezistivity kovů s teplotou (obr. 27.10) je způsoben vzrůstem frekvence srážek nosičů náboje, a tedy snížením střední volné doby τ mezi srážkami v rov. (27.24).

V polovodiči je *n* malé, ale s rostoucí teplotou se zvětšuje velmi rychle, protože teplem je excitováno stále více nosičů náboje. Rezistivita polovodiče tedy s rostoucí teplotou klesá, což vyjadřuje záporné znaménko teplotního součinitele rezistivity v tab. 27.2. Podobně jako v kovu se i v polovodiči zvyšuje frekvence srážek, ale tento jev je překryt rychlým nárůstem počtu nosičů elektrického náboje.

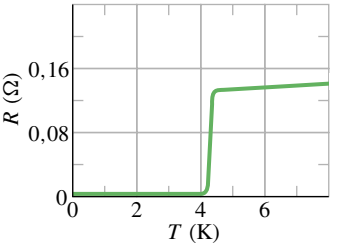


První tranzistor, elektronická součástka vyrobená z polovodičového materiálu. Dnes najdeme tisíce a miliony takových součástek na tenké polovodičové destičce o velikosti několika milimetrů nebo centimetrů.

27.9 SUPRAVODIČE

Holandský fyzik Kamerlingh Onnes v roce 1911 objevil, že při velmi nízkých teplotách, nižších než asi 4 K, rezistivita rtuti úplně vymizí (obr. 27.15). Tento jev, nazývaný **supravodivost**, v sobě skrývá velké možnosti využití v moderních zařízeních, protože by bylo velice užitečné, kdyby mohl elektrický náboj téci bez jakýchkoli ztrát. Například proud vybuzený v supravodivém prstenci přetrvává několik roků, aniž by se významněji snižoval. Elektrony, které tvoří tento proud, potřebují zdroj energie jen v počátečním okamžiku a už nikdy více.

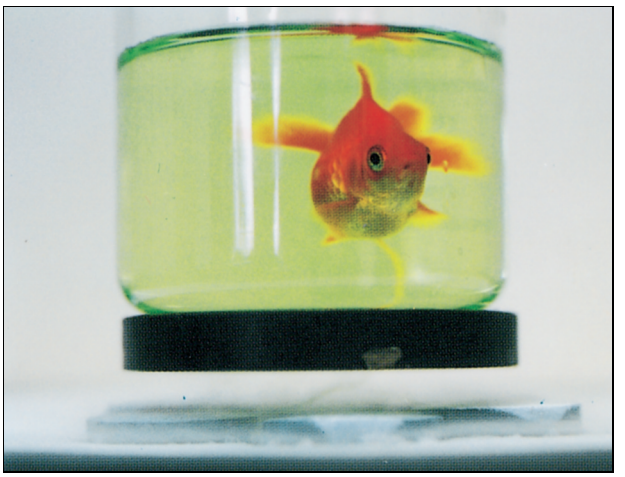
Před rokem 1986 brzdily rozvoj supravodivých technologií vysoké náklady potřebné k dosažení extrémně nízkých teplot. V roce 1986 však byly objeveny nové keramické materiály, které se stávají supravodivými při výrazně vyšších teplotách (a takové teploty jsou dosažitelné snadněji a levněji, např. kapalným vzduchem). Praktické použití supravodivých součástek při pokojové teplotě se může brzo stát skutečností.



Obr. 27.15 Odpor rtuti klesne prudce k nule při teplotě kolem 4 K.

Supravodivost se v mnohém liší od obyčejné vodivosti. Nejlepší běžné vodiče, jako je stříbro a měď, se nemohou stát supravodivými při žádné teplotě. Nové keramické supravodiče jsou vlastně izolátory, pokud nemají dostatečně nízkou teplotu k tomu, aby přešly do supravodivého stavu.

Supravodivost se dá vysvětlit tak, že se elektrony, které vedou elektrický proud, pohybují v párech. Jeden z elektronů z páru elektricky naruší molekulární strukturu supravodivého materiálu tak, že v jeho nejbližším okolí vznikne na krátký okamžik nadbytek kladného náboje. Druhý elektron z páru je potom k tomuto kladnému náboji přitahován. Teorie říká, že taková koordinace mezi elektrony jim brání srážet se s molekulami, a tak zanikne elektrický odpor. Před rokem 1986 tato teorie dobře vysvětlovala vlastnosti *nízkoteplotních supravodičů*. Ukázalo se však, že k vysvětlení vlastností *vysokoteplotních supravodičů* jsou potřebné nové teorie.



Magnet ve tvaru disku se vznáší nad supravodivým materiálem chlazeným kapalným dusíkem. Zlatá rybka se diví, co všechno už lidé umějí.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Elektrický proud

Elektrický proud I ve vodiči je definován vztahem

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}. \tag{27.1}$$

Zde $\mathrm{d}Q$ je náboj, který za dobu $\mathrm{d}t$ projde průřezem vodiče. Podle konvence je směr elektrického proudu určen jako směr pohybu kladného náboje. Jednotkou elektrického proudu v soustavě SI je *ampér* (A).

Hustota proudu

Proud (skalár) souvisí s vektorem *hustoty proudu* $\boldsymbol{J}$ vztahem

$$I = \int \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{27.4}$$

kde $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ je vektor kolmý k elementu plochy o obsahu $\mathrm{d}S$ a integruje se přes průřez vodiče. Orientace $\boldsymbol{J}$ je stejná jako orientace intenzity elektrického pole, která vyvolává proud.

Driftová rychlost nosičů náboje

Je-li ve vodiči elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$, (kladné) nosiče náboje se pohybují *driftovou rychlostí* $\boldsymbol{v}_\mathrm{d}$ ve směru intenzity $\boldsymbol{E}$. Rychlost $\boldsymbol{v}_\mathrm{d}$ souvisí s hustotou proudu vztahem

$$\boldsymbol{J} = (ne)\boldsymbol{v}_\mathrm{d}, \tag{27.7}$$

kde ne je objemová hustota náboje.

Odpor vodiče

Odpor neboli rezistance R vodiče (součástky) je definován vztahem

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{(definice } R\text{)}, \tag{27.8}$$

kde U je napětí přiložené na vodič a I proud procházející vodičem. Jednotkou odporu v soustavě SI je *ohm* (Ω): $1\,\Omega = 1\,\mathrm{V{\cdot}A^{-1}}$. *Rezistivita* ϱ a *konduktivita* σ materiálu jsou definovány takto:

$$\varrho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{J} \quad \text{(definice } \varrho \text{ a } \sigma\text{)}, \tag{27.12}$$

kde E je velikost intenzity elektrického pole. Jednotkou rezistivity v soustavě SI je $\Omega{\cdot}\mathrm{m}$. Zobecněním uvedeného vztahu je vektorová rovnice

$$\boldsymbol{E} = \varrho\boldsymbol{J}. \tag{27.11}$$

Odpor R vodiče o délce L a průřezu S určíme podle vztahu

$$R = \varrho\frac{L}{S}. \tag{27.16}$$

Změna rezistivity s teplotou

Rezistivita ϱ většiny materiálů se mění s teplotou. Pro řadu materiálů, včetně kovů, lze závislost rezistivity ϱ na teplotě T aproximovat lineárním vztahem

$$\varrho - \varrho_0 = \varrho_0\alpha(T - T_0). \tag{27.17}$$

Zde T_0 je referenční teplota, ϱ_0 je rezistivita při teplotě T_0 a α je teplotní součinitel rezistivity (v určitém teplotním intervalu).

Ohmův zákon

Pro *vodič* (součástku) platí *Ohmův zákon* tehdy, jestliže jeho odpor R definovaný rov. (27.8), $R = U/I$, nezávisí na přiloženém napětí U. Pro *materiál* platí Ohmův zákon tehdy, jestliže jeho rezistivita definovaná rov. (27.10), $\varrho = E/J$, nezávisí na velikosti a směru elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$.

Rezistivita kovů

Za předpokladu, že vodivostní elektrony kovu se volně pohybují jako molekuly plynu, lze odvodit vztah pro rezistivitu kovu:

$$\varrho = \frac{m}{e^2 n\tau}. \tag{27.20}$$

Zde n je počet elektronů v jednotkovém objemu (koncentrace elektronů) a τ je střední doba mezi srážkami elektronu s atomy kovu. Protože τ je prakticky nezávislé na E, platí pro kovy Ohmův zákon.

Výkon

Výkon P přenosu energie v součástce, na níž je napětí U a kterou prochází proud I, je roven

$$P = UI \quad \text{(výkon při přenosu elektrické energie)}. \tag{27.21}$$

Disipace energie rezistorem

Je-li součástkou rezistor, lze psát rov. (27.21) ve tvaru

$$P = I^2R = \frac{U^2}{R} \quad \text{(disipace energie rezistorem)}. \tag{27.22, 27.23}$$

V rezistoru je elektrická potenciální energie disipována prostřednictvím srážek nosičů náboje s atomy.

Polovodiče

Polovodiče jsou materiály s malým počtem vodivostních elektronů a s neobsazenými energiovými hladinami ve vodivostním pásu, který leží poměrně blízko valenčního pásu. Rezistivita polovodiče může být blízká rezistivitě kovu, je-li polovodič do-

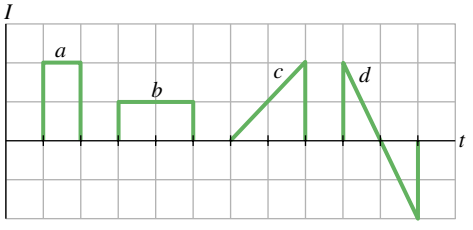
pován jinými atomy, které dodávají elektrony do vodivostního pásu.

Supravodiče

Supravodiče jsou materiály, jejichž rezistivita při velmi nízkých teplotách zcela vymizí. Nedávno byly objeveny materiály, které jsou supravodivé i při poměrně „vysokých“ teplotách (např. v kapalném vzduchu).

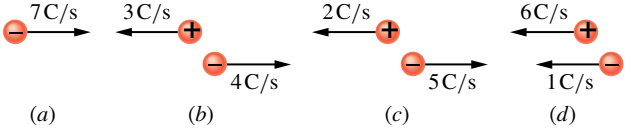
OTÁZKY

1. Na obr. 27.16 je znázorněn proud I ve vodiči ve čtyřech různých časových intervalech. Uspořádejte tyto případy sestupně podle velikosti celkového náboje, který projde vodičem.



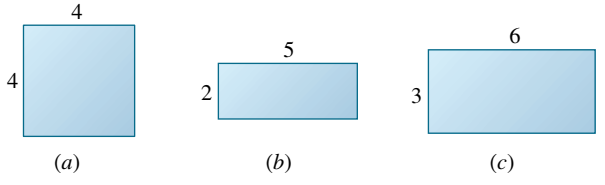
Obr. 27.16 Otázka 1

2. Na obr. 27.17 jsou nakresleny čtyři situace, kdy se kladné a záporné náboje pohybují ve vodorovném směru, a jsou uvedeny velikosti rychlostí přenosu náboje. Uspořádejte tyto situace sestupně podle velikosti výsledného procházejícího proudu.



Obr. 27.17 Otázka 2

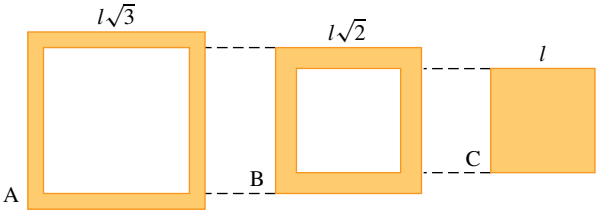
3. Na obr. 27.18 jsou nakresleny průřezy tří stejně dlouhých vodičů zhotovených ze stejného materiálu. Rozměry vodičů jsou dány v milimetrech. Uspořádejte vodiče sestupně podle jejich odporu (měřeného v podélném směru mezi konci vodičů).



Obr. 27.18 Otázka 3

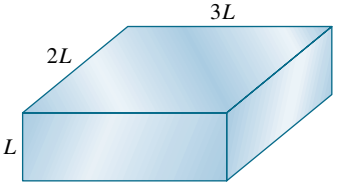
4. Natahujeme válcový vodič tak, že zůstává stále válcový. Co se stane s odporem měřeným mezi konci vodiče v podélném směru: zvětší se, zmenší se, nebo se nezmění?

5. Na obr. 27.19 jsou nakresleny čtvercové průřezy tří stejně dlouhých vodičů zhotovených ze stejného materiálu. Vodič B se dá těsně vložit do vodiče A, vodič C se dá těsně vložit do vodiče B. Uspořádejte sestupně podle odporu (měřeného v podélném směru) uvedené kombinace vodičů: jednotlivé vodiče A, B, C, kombinace A + B, B + C, A + B + C.



Obr. 27.19 Otázka 5

6. Na obr. 27.20 je vodič ve tvaru kvádru o rozměrech L, $2L$, $3L$. Ke dvěma protilehlým stěnám vodiče je přiloženo napětí U, podobně jako na obr. 27.8b. Uspořádejte dvojice stěn levá-pravá, horní-dolní, přední-zadní sestupně podle (a) intenzity elektrického pole ve vodiči, (b) hustoty proudu uvnitř vodiče, (c) proudu procházejícího vodičem, (d) driftové rychlosti elektronů ve vodiči.



Obr. 27.20 Otázka 6

7. V tabulce jsou uvedeny délky tří měděných tyčí, jejich průměry a napětí mezi jejich konci. Uspořádejte tyče sestupně podle (a) intenzity elektrického pole v tyčích, (b) hustoty proudu v tyčích, (c) driftové rychlosti elektronů.

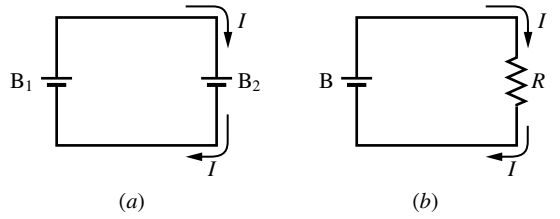
TYČ	DÉLKA	PRŮMĚR	NAPĚTÍ
1	L	$3d$	U
2	$2L$	d	$2U$
3	$3L$	$2d$	$2U$

8. V tabulce jsou uvedeny konduktivity a koncentrace elektronů čtyř materiálů A, B, C, D. Uspořádejte materiály sestupně podle střední doby mezi srážkami vodivostních elektronů.

MATERIÁL	A	B	C	D
konduktivita	σ	2σ	2σ	σ
koncentrace elektronů	n	$2n$	n	$2n$

9. Tři dráty stejného průměru postupně zapojíme mezi dva body, mezi nimiž je stále stejné napětí. Rezistivity a délky vodičů jsou ϱ a L (u drátu A), $1{,}2\varrho$ a $1{,}2L$ (u drátu B), $0{,}9\varrho$ a L (u drátu C). Uspořádejte dráty sestupně podle výkonu, s jakým se v nich vyvíjí teplo.

10. V obvodu na obr. 27.21a nabíjí baterie B_1 baterii B_2. Proud procházející baterií B_2 a napětí na baterii B_2 mohou být (a) 3 A a 4 V, (b) 2 A a 5 V, (c) 6 A a 2 V. Uspořádejte uvedené dvojice hodnot proudu a napětí sestupně podle rychlosti přenosu elektrické energie z baterie B_1 do baterie B_2.

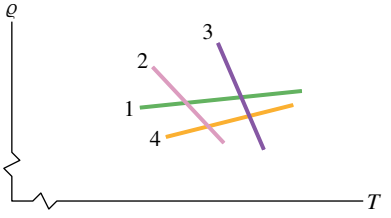


Obr. 27.21 Otázky 10 a 11

11. V obvodu na obr. 27.21b je spojena baterie B a rezistor o odporu R. Odpor R a proud I rezistorem mohou být (a) 4 Ω a 2 A, (b) 3 Ω a 3 A, (c) 3 Ω a 2 A. Uspořádejte tyto možnosti sestupně podle rychlosti, jakou je elektrická energie disipována v rezistoru.

12. Je odpor vlákna žárovky značené 500 W/230 V větší, nebo menší než odpor vlákna žárovky značené 100 W/230 V?

13. Na obr. 27.22 jsou vyznačeny závislosti rezistivity čtyř materiálů na teplotě. (a) Které materiály jsou kovy a které jsou polovodiče? U kterých materiálů způsobí zvýšení teploty (b) zvýšení koncentrace vodivostních elektronů, (c) zvětšení počtu srážek vodivostních elektronů?



Obr. 27.22 Otázka 13

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 27.2 Elektrický proud

1C. Svazek elektronů dopadajících na stínítko televizní obrazovky odpovídá proudu 200 μA. Kolik elektronů dopadá na stínítko obrazovky za sekundu?

2C. Rezistorem o odporu 10 Ω prochází po dobu 4,0 min proud 5,0 A. Kolik (a) coulombů, (b) elektronů projde za tuto dobu průřezem rezistoru?

3Ú. Pás van der Graafova generátoru široký 50 cm se pohybuje rychlostí 30 $m \cdot s^{-1}$ mezi zdrojem náboje a dutou koulí. Přenos náboje na kouli odpovídá proudu 100 μA. Vypočtěte povrchovou hustotu náboje pásu.

4Ú. Izolovaná vodivá koule má poloměr 10 cm. Jeden vodič do ní přivádí proud 1,000 002 0 A, druhý vodič z ní odvádí proud 1,000 000 0 A. Za jak dlouho potenciál koule vzroste o 1 000 V?

ODST. 27.3 Hustota proudu

5C. V tabulce je uveden výpis z normy (USA), která udává maximální bezpečný (přípustný) proud I_m pro měděné vodiče různých průměrů d s pryžovou izolací. Nakreslete graf závislosti maximální bezpečné hustoty proudu jako funkci průměru vodiče. Který typ vodiče má největší bezpečnou hustotu proudu?

Typ vodiče (CW)	4	6	8	10	12	14	16	18
d/mm	5,20	4,13	3,28	2,60	2,06	1,64	1,30	1,03
I_m/A	70	50	35	25	20	15	6	3

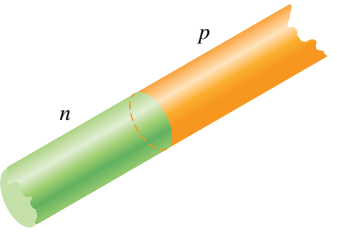
6C. Svazek iontů obsahuje $2{,}0 \cdot 10^8$ kladně nabitých iontů v krychlovém centimetru, každý iont nese náboj $+2e$. Všechny ionty se pohybují k severu rychlostí $1{,}0 \cdot 10^5$ $m \cdot s^{-1}$. (a) Jakou velikost a směr má hustota proudu $\boldsymbol{J}$? (b) Můžete vypočítat celkový proud I v tomto iontovém svazku? Jestliže ne, jakou další informaci byste k tomu potřebovali?

7C. Malý, ale měřitelný proud $1{,}2 \cdot 10^{-10}$ A prochází měděným drátem o průměru 2,5 mm. Předpokládejte, že proud je v celém průřezu vodiče konstantní, a vypočtěte (a) hustotu proudu, (b) driftovou rychlost elektronů (viz př. 27.3).

8C. Pojistka v elektrickém obvodu je v podstatě tenký drátek, který se má přetavit a tak rozpojit obvod, jestliže proud překročí danou hodnotu. Předpokládejte, že se drátek přetaví, když hustota proudu dosáhne 440 $A \cdot cm^{-2}$. Jaký průměr musí mít (válcový) drátek, aby vydržel bez přetavení maximální proud 0,50 A?

9C. V plynové výbojce poteče proud, je-li napětí mezi elektrodami uvnitř trubice dostatečně velké. Plyn se ionizuje, elektrony se pohybují směrem ke kladné elektrodě a kladně nabité ionty směrem k záporné elektrodě. Jaká je velikost a směr proudu ve vodíkové výbojce, v níž $3{,}1 \cdot 10^{18}$ elektronů a $1{,}1 \cdot 10^{18}$ protonů projde za sekundu průřezem trubice?

10C. Přechod p-n je vytvořen ze dvou polovodičů ve tvaru válce o poloměru 0,165 mm (obr. 27.23). Při určitém zapojení prochází přechodem $3{,}50 \cdot 10^{15}$ elektronů za sekundu z polovodiče n do polovodiče p a $2{,}25 \cdot 10^{15}$ děr za sekundu z polovodiče p do polovodiče n. (Díra se chová jako částice s nábojem $+e$.) Vypočtěte (a) celkový proud, (b) hustotu proudu procházejícího přechodem.



Obr. 27.23 Cvičení 10

11Ú. Protony ve slunečním větru se v blízkosti Země pohybují rychlostí 470 km·s^{-1} a jejich koncentrace je 8,70 cm^{-3}. (a) Vypočtěte hustotu proudu protonů. (b) Kdyby magnetické pole Země protony nevychylovalo, dopadly by na Zemi. Jak velký elektrický proud by na Zemi dopadal?

12Ú. Svazek letících α-částic, z nichž každá nese náboj $Q = +2e$ a má energii 20 MeV, vytváří proud 0,25 μA. (a) Kolik α-částic dopadne na rovinný povrch za 3,0 s, jestliže svazek směřuje kolmo k němu? (b) Kolik α-částic se v každém okamžiku nachází ve 20 cm dlouhém úseku svazku? (c) Jakým napětím musela být α-částice urychlena z klidu, aby získala energii 20 MeV?

13Ú. Jak dlouho elektronům trvá, než se dostanou z autobaterie do startéru? Předpokládejte, že prochází proud 300 A a elektrony se pohybují měděným vodičem o průřezu 0,21 cm^2 a délce 0,85 m. (Viz př. 27.3).

14Ú. V hypotetické výzkumné laboratoři jaderných reakcí je při velmi vysoké teplotě helium úplně ionizováno, takže každý heliový atom je rozdělen na kladně nabité jádro (α-částici) a dva volné elektrony. Vnější elektrické pole způsobí, že α-částice se pohybují driftovou rychlostí 25 m·s^{-1} směrem na východ a elektrony rychlostí 88 m·s^{-1} na západ. Koncentrace α-částic je $2{,}8\cdot10^{15}$ cm^{-3}. Vypočtěte výslednou hustotu proudu a určete směr proudu.

15Ú. (a) Hustota proudu ve válcovém vodiči o poloměru R se mění podle vztahu

$$J = J_0\left(1 - \frac{r}{R}\right),$$

kde r je vzdálenost od osy válce. Hustota proudu tedy dosahuje maximální hodnoty J_0 v ose vodiče ($r = 0$) a lineárně klesá k nule na povrchu vodiče ($r = R$). (a) Vypočtěte proud ve vodiči a vyjádřete ho pomocí proudové hustoty J_0 a průřezu vodiče $S = \pi R^2$. (b) Uvažujte jinou situaci: hustota proudu má největší hodnotu J_0 na povrchu válcového vodiče a lineárně klesá k nule v ose vodiče podle vztahu $J = J_0 r/R$. Opět vypočtěte proud. Proč vychází jiný proud než v otázce (a)?

ODST. 27.4 Odpor a rezistivita

16C. Ocelová tramvajová kolejnice má průřez 56,0 cm^2. Jaký je odpor 10,0 km kolejí? Rezistivita oceli je $3{,}00\cdot10^{-7}$ Ω·m.

17C. Drát má průměr 1,0 mm, délku 2,0 m a odpor 50 mΩ. Jaká je rezistivita materiálu?

18C. Nichromový drát (slitina niklu, chromu a železa užívaná často v topných článcích) je 1,0 m dlouhý a má průřez 1,0 mm^2. Při napětí 2,0 V jím prochází proud 4,0 A. Vypočtěte konduktivitu σ nichromu.

19C. Člověka může zabít už elektrický proud 50 mA, pokud prochází v blízkosti jeho srdce. Opravář uchopí upocenýma rukama dva vodiče a propojí je tak svým tělem. Jaké napětí mu může být osudné, je-li odpor jeho těla 2 000 Ω?

20C. Cívka je vytvořena navinutím 250 závitů izolovaného měděného drátu o průměru 1,3 mm v jedné vrstvě na válcové jádro o poloměru 12 cm. Jaký je její odpor? Tloušťku izolace zanedbejte. (Použijte údajů z tab. 27.1.)

21C. Drát dlouhý 4,00 m o průměru 6,00 mm má odpor 15,0 mΩ a je k němu přiloženo napětí 23,0 V. (a) Jaký proud prochází drátem? (b) Jaká je hustota proudu v drátu? (c) Vypočtěte rezistivitu materiálu drátu a určete, co je to za materiál (použijte údajů v tab. 27.1).

22C. Měděné vinutí motoru má odpor 50 Ω při teplotě 20 °C, když motor neběží. Je-li motor několik hodin v chodu, odpor se zvýší na 58 Ω. Jakou teplotu má přitom vinutí? Zanedbejte změny rozměrů vinutí. (Použijte údajů v tab. 27.1.)

23C. (a) Při jaké teplotě by byl odpor měděného vodiče dvakrát větší než jeho odpor při teplotě 20 °C? (Považujte teplotu 20 °C za referenční teplotu v rov. (27.17) a porovnejte svoji odpověď s obr. 27.10.) (b) Platí výsledek pro všechny měděné vodiče, bez ohledu na jejich tvar nebo velikost?

24C. Použijte údaje z obr. 27.11c a nakreslete graf závislosti odporu polovodičové diody na přiloženém napětí.

25C. Housenka dlouhá 4,0 cm se plazí ve směru pohybu elektronů po neizolovaném měděném drátu o průměru 5,2 mm, kterým prochází proud 12 A. (a) Jaké je napětí mezi konci housenky? (b) Má její ocas vyšší, nebo nižší potenciál než její hlava? (c) Jak dlouho by housence trvalo, než by se odplazila o 1,0 cm, kdyby rychlost jejího plazení byla stejná jako driftová rychlost elektronů v drátu?

26C. Válcovou měděnou tyč délky L a průřezu S vytáhneme na dvojnásobnou délku, aniž by se změnil její objem. (a) Jaký je její nový průřez? (b) Jaký odpor má po vytažení, jestliže původně měla odpor R?

27C. Drát o odporu 6,0 Ω je protažen otvorem matrice tak, že se jeho délka ztrojnásobí. Vypočtěte odpor vytaženého drátu za předpokladu, že rezistivita a hustota materiálu se nezměnily.

28C. Určitý drát má odpor R. Jaký odpor má jiný drát ze stejného materiálu, jsou-li jeho délka a průměr poloviční?

29Ú. Drát A a trubice B jsou vyrobeny ze stejného materiálu a mají stejnou délku 1 m. Drát má průměr 1,0 mm, trubice má vnější průměr 2,0 mm a vnitřní průměr 1,0 mm. Vypočtěte poměr jejich odporů R_A/R_B.

30Ú. Měděný a železný drát mají stejnou délku a je k nim přiloženo stejné napětí. (a) Jaký musí být poměr jejich poloměrů, aby jimi procházel stejný proud? (b) Je možné najít takové poloměry drátů, aby hustota proudu byla stejná?

31Ú. Hliníková tyč je 1,3 m dlouhá a má čtvercový průřez o straně 5,2 mm. (a) Jaký odpor naměříme mezi jejími konci? (b) Jaký by musel být průměr válcové měděné tyče téže délky, aby měla stejný odpor?

32Ú. Kovová válcová tyč o průměru 5,50 mm je 1,60 m dlouhá. Odpor (měřený mezi jejími konci) při teplotě 20 °C je $1{,}09\cdot10^{-3}$ Ω. (a) Z jakého je materiálu? (b) Ze stejného materiálu je vyroben kotouč o průměru 2,00 cm a tloušťce 1,00 mm. Jaký je jeho odpor měřený mezi protějšími kruhovými plochami za předpokladu, že obě jsou ekvipotenciálními plochami?

33Ú. Elektrický kabel je tvořen svazkem 125 tenkých drátů, každý z nich má odpor 2,65 μΩ. Prochází jím celkový proud 0,750 A. (a) Jaký proud prochází každým drátem kabelu? (b) Jaké je napětí na kabelu? (c) Jaký je odpor kabelu?

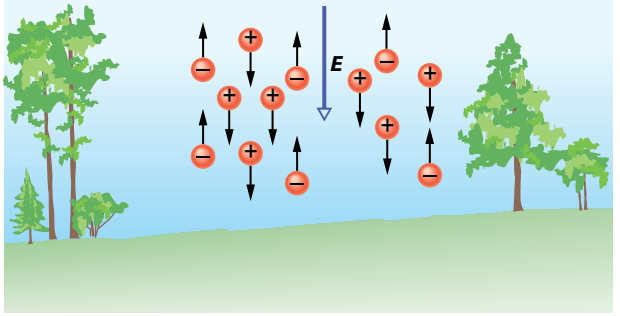
34Ú. Je-li k válcovému vodiči o délce 10 m a poloměru 0,30 mm přiloženo napětí 115 V, je hustota proudu ve vodiči $1{,}4\cdot10^4\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}$. Vypočtěte odpor vodiče.

35Ú. Zábleskovou žárovkou prochází proud 0,30 A při napětí 2,9 V. Odpor vlákna žárovky při pokojové teplotě (20 °C) je 1,1 Ω. Jaká je teplota vlákna při záblesku? Vlákno je z wolframu.

36Ú. Vzdálenost mezi přední a zadní stěnou kvádru je 15,8 cm, obsah každé z nich je $3{,}50\ \mathrm{cm^2}$ a odpor (měřený mezi nimi) je 935 Ω. Koncentrace vodivostních elektronů v materiálu, z něhož je kvádr vyroben, je $5{,}33\cdot10^{22}\ \mathrm{m^{-3}}$. Mezi přední a zadní stěnu kvádru je přiloženo napětí 35,8 V. (a) Jaký proud prochází kvádrem? (b) Jaká je hustota proudu (předpokládáme-li, že je konstantní v celém průřezu)? (c) Jaká je driftová rychlost vodivostních elektronů? (d) Jaká je intenzita elektrického pole v kvádru?

37Ú. Z mědi i z hliníku se vyrábějí vysokonapěťové vodiče, kterými může procházet proud až 60,0 A. Odpor jednoho kilometru takového vodiče má být $0{,}150\ \Omega\cdot\mathrm{km^{-1}}$. Vypočtěte pro oba materiály (a) hustotu proudu, (b) hmotnost jednoho metru kabelu. Hustota mědi je $8\,960\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, hliníku je $2\,700\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

38Ú. V nižších vrstvách zemské atmosféry jsou záporné a kladné ionty vznikající ionizačním účinkem záření radioaktivních prvků v zemské kůře a kosmických paprsků. V určité oblasti má intenzita atmosférického elektrického pole velikost $120\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$ a je orientována svisle dolů. Elektrické pole způsobuje, že kladné jednomocné ionty o koncentraci $620\ \mathrm{cm^{-3}}$ se pohybují směrem dolů a záporné jednomocné ionty o koncentraci $550\ \mathrm{cm^{-3}}$ se pohybují nahoru (obr. 27.24). Naměřená konduktivita je $2{,}70\cdot10^{-14}\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m^{-1}}$. Vypočtěte (a) driftovou rychlost iontů za předpokladu, že je stejná pro kladné i záporné ionty, (b) hustotu proudu.

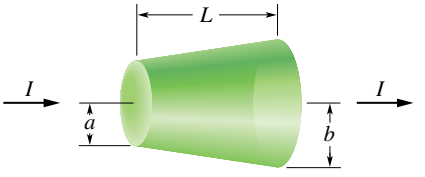


Obr. 27.24 Úloha 38

39Ú. Typové číslo CW určuje průměr drátu takto: zvětší-li se o 6, průměr drátu se zmenší na polovinu, zvětší-li se o 1, průměr drátu se zmenší faktorem $2^{1/6}$ (viz cvič. 5). Určete odpor 10 m měděného drátu typu CW22, víte-li, že 400 m dlouhý měděný drát typu CW10 má odpor 1,00 Ω.

40Ú. Jestliže se kovová tyč zahřívá, nemění se jen její odpor, ale také její délka a průřez. Vztah $R = \varrho L/S$ napovídá, že při měření rezistivity ϱ při různých teplotách je třeba vzít v úvahu změny všech tří veličin s teplotou. (a) O kolik procent se změní odpor R, délka L a průřez S měděného vodiče, změní-li se jeho teplota o 1 °C? Teplotní součinitel délkové roztažnosti mědi je $1{,}7\cdot10^{-5}\ \mathrm{K^{-1}}$. (b) Jaký závěr z toho můžete vyvodit?

41Ú. Rezistor má tvar komolého kužele (obr. 27.25). Poloměry jeho kruhových podstav jsou a, b a jeho výška je L. Jestliže se kužel zužuje jen málo, můžeme předpokládat, že zvolíme-li libovolný průřez kolmý k ose, bude v něm hustota proudu konstantní (a ovšem jiná než v jiném průřezu). (a) Vypočtěte odpor rezistoru. (b) Ověřte si, že váš vzorec pro odpor se zjednoduší na $\varrho(L/S)$ ve zvláštním případě, že se kužel vůbec nezužuje (tedy pro $a = b$, tj. pro válec).



Obr. 27.25 Úloha 41

ODST. 27.6 Mikroskopický pohled na Ohmův zákon

42Ú. Ukažte, že podle modelu elektrické vodivosti volných elektronů v kovu a klasické fyziky by rezistivita kovů byla úměrná $\sqrt{T}$, kde T je teplota měřená v kelvinech (viz rovnici (20.27)).

ODST. 27.7 Výkon v elektrických obvodech

43C. Student poslouchá radiopřijímač napájený ze zdroje o napětí 9,0 V, puštěný na plný výkon 7,0 W od 9.00 h ráno do 14.00 h odpoledne. Jak velký elektrický náboj projde za tu dobu radiopřijímačem?

44C. Rentgenovou lampou prochází proud 7,0 mA při napětí 80 kV. Jaký je odpovídající výkon ve wattech?

45C. Při průchodu proudu 3,0 A rezistorem se v něm vyvíjí teplo s výkonem $100\ \mathrm{J\cdot s^{-1}}$. Jaký je jeho odpor?

46C. Naplno svítící světlomety jedoucího automobilu odebírají proud 10 A při napětí 12 V z generátoru poháněného motorem. Předpokládejte, že účinnost generátoru je 80 % (to znamená, že výstupní elektrický výkon je roven 80 % vstupního mechanického výkonu). Vypočtěte, jaký výkon musí mít motor, aby světlomety naplno svítily.

47C. Topná spirála je připojena na napětí 230 V, odpor rozpálené spirály je 14 Ω. (a) S jakým výkonem se ve spirále vyvíjí teplo? (b) Jestliže jedna kilowatthodina elektrické energie stojí 1,75 Kč, kolik zaplatíme, budeme-li spirálou topit 5,0 h?

48C. Topná spirála o výkonu 500 W je připojena na napětí 230 V. (a) Jaký je odpor rozpálené spirály? (b) Jakou rychlostí (měřenou v $C{\cdot}s^{-1}$) je přenášen elektrický náboj elektronů libovolným průřezem spirály?

49C. Rezistor o neznámém odporu je připojen ke svorkám 3,00 V baterie. Elektrická energie je v rezistoru disipována rychlostí 0,540 W. Tentýž rezistor je připojen ke svorkám 1,50 V baterie. Jakým výkonem je pak disipována elektrická energie?

50C. Měděný drát s pryžovou izolací typu CW10 o průměru 2,6 mm má normou stanovený maximální bezpečný proud 25 A (viz cvič. 5). Při tomto proudu vypočtěte: (a) hustotu proudu, (b) intenzitu elektrického pole, (c) napětí mezi konci drátu, je-li jeho délka 300 m, (d) výkon, s jakým se v 300 m dlouhém drátu vyvíjí teplo.

51C. Ke koncům měděného drátu o průměru 1 mm a délce 33,0 m je přiloženo napětí 1,20 V. Vypočtěte: (a) proud, (b) hustotu proudu, (c) intenzitu elektrického pole, (d) výkon, s jakým se v drátu vyvíjí teplo.

52Ú. Ke koncům vodiče o délce L, průřezu S a rezistivitě ϱ je přiloženo napětí U. Vaším úkolem je změnit přiložené napětí U a současně protáhnout drát tak, aby se disipovaný výkon elektrické energie v drátu zvětšil 30krát a proud 4krát. Jaká bude nová délka a nový průřez drátu?

53Ú. Válcový rezistor o poloměru 5,0 mm a délce 2,0 cm je vyroben z materiálu o rezistivitě $3{,}5{\cdot}10^{-5}\ \Omega{\cdot}m$. Vypočtěte (a) hustotu proudu, (b) přiložené napětí, je-li výkon disipovaný rezistorem roven 1,0 W.

54Ú. Jednoduchý topný článek je zhotoven tak, že ke koncům drátu z nichromu o průřezu $2{,}60{\cdot}10^{-6}\ m^2$ a rezistivitě $5{,}00{\cdot}10^{-7}\ \Omega{\cdot}m$ je přiloženo napětí 75,0 V. (a) Jak dlouhý je drát, je-li elektrická energie v článku disipována s výkonem 5 000 W? (b) Jaká musí být délka drátu, jestliže přiložené napětí se změní na 100 V a rychlost disipace má zůstat stejná?

55Ú. Žárovka o příkonu 100 W je připojena na napětí 230 V. (a) Kolik bychom zaplatili, kdyby žárovka svítila nepřetržitě celý měsíc? Předpokládejte, že 1 kW·h elektrické energie stojí 1,75 Kč. (b) Jaký je odpor svítící žárovky? (c) Jaký proud prochází žárovkou? (d) Je odpor zhasnuté žárovky větší, stejný, nebo menší?

56Ú. Teplomet o příkonu 1 250 W pracuje při napětí 230 V. (a) Jaký proud prochází teplometem? (b) Jaký je odpor topné spirály? (c) Kolik tepla se vyvine v teplometu za 1 hodinu?

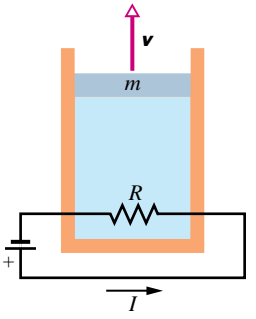
57Ú. Topný článek z nichromového drátu je připojen na napětí 110 V. Elektrická energie je v něm disipována výkonem 500 W. Teplota drátu je 800 °C. Jaká by byla rychlost disipace energie, kdyby byl drát ponořen do chladicí olejové lázně a jeho teplota udržována na 200 °C? Přiložené napětí se nemění, teplotní součinitel rezistivity nichromu při 800 °C je $4{,}0{\cdot}10^{-4}\ K^{-1}$.

58Ú. Na měděný terč dopadá svazek deuteronů urychlených v cyklotronu tak, že každý deuteron ve svazku má energii 16 MeV. Elektrický proud přenášený svazkem je 15 μA. (a) Jakou rychlostí vnikají deuterony do mědi? (b) S jakým výkonem se v měděném terči vyvíjí teplo?

59Ú. V lineárním urychlovači vzniká pulzující svazek elektronů, proud pulzu je 0,50 A, délka pulzu je 0,10 μs. (a) Kolik urychlených elektronů je v každém pulzu? (b) Jaká je střední hodnota proudu při 500 pulzech za sekundu? (c) Jaký je střední a špičkový výkon urychlovače, je-li energie každého urychleného elektronu 50 MeV?

60Ú. Spirála navinutá z nichromového drátu je ponořena do kapaliny v kalorimetru. Ke spirále je přiloženo napětí 12 V a prochází jí proud 5,2 A. Kapalina v kalorimetru vře a vypařuje se stálou rychlostí $21\ mg{\cdot}s^{-1}$. Vypočtěte měrné skupenské teplo varu kapaliny (vyjádřené v jednotce $J{\cdot}kg^{-1}$). (Viz čl. 19.7.)

61Ú. Na obr. 27.26 je nakreslen elektrický obvod se spirálou umístěnou uvnitř tepelně izolovaného válce s ideálním plynem. Válec je uzavřen pístem, který se pohybuje bez tření. Spirálou prochází proud 240 mA, její odpor je 550 Ω, hmotnost pístu je 12 kg. Jak velkou rychlostí v se musí píst zvedat, aby se teplota plynu ve válci neměnila?



Obr. 27.26 Úloha 61

62Ú. Topné těleso o příkonu 500 W pracuje při napětí 115 V. (a) O kolik procent se sníží jeho tepelný výkon, jestliže napětí klesne na 110 V? Předpokládejte, že odpor se nezmění. (b) Nyní vezměte v úvahu i změnu odporu s teplotou. Bude pokles tepelného výkonu větší, nebo menší, než jste vypočítali v části (a)?

PRO POČÍTAČ

63Ú. Odpor rezistoru byl měřen při několika teplotách, výsledky jsou uvedeny v tabulce. Zadejte údaje z tabulky do počítače a proveďte lineární regresi závislosti odporu R na teplotě T. Pomocí parametrů lineární regrese vypočtěte odpor při teplotě (a) 20 °C, (b) 0 °C. Určete teplotní součinitel odporu při referenční teplotě (c) 20 °C, (d) 0 °C. (e) Určete odpor rezistoru při teplotě 265 °C.

T/°C	50	100	150	200	250	300
R/Ω	139	171	203	234	266	298

28
Obvody

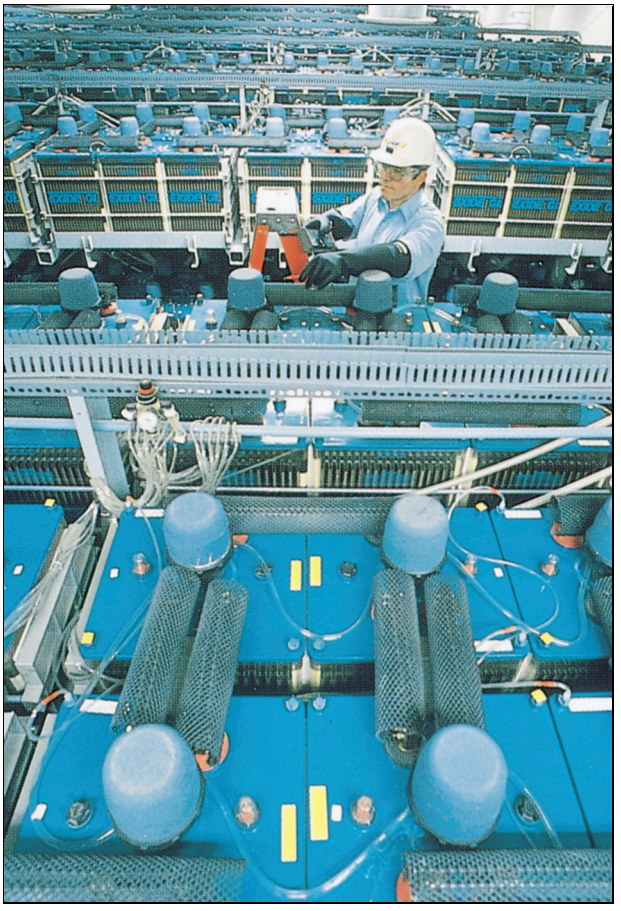


Paúhoř elektrický (Electrophorus electricus) číhá v řekách Jižní Ameriky a ryby, jimiž se živí, zabíjí pulzem elektrického proudu. Dělá to tak, že podél svého těla vytvoří napětí až několika set voltů, takže elektrický proud tekoucí okolní vodou, od úhořovy hlavy k ocasu, může dosáhnout až jednoho ampéru. Kdybyste se při plavání k paúhoři neopatrně přiblížili, asi byste se velice divili (samozřejmě až poté, co byste se vzpamatovali z velmi bolestivého zážitku): Jak je možné, že tento tvor dokáže vyprodukovat tak velký proud a sám sobě neublíží?

28.1 „PUMPOVÁNÍ“ NÁBOJŮ

Chceme-li přinutit nosiče náboje, aby protékaly rezistorem, musíme vytvořit napětí (tedy rozdíl potenciálů) mezi jeho konci. Můžeme to udělat tak, že vezmeme dvě vodivé koule, jednu nabitou kladným nábojem a druhou záporným, a spojíme je přes rezistor. To má ale velkou vadu: jak teče náboj, koule se vybíjejí a za krátkou dobu budou mít obě koule stejný potenciál a tok náboje se zastaví.

Aby náboje tekly neustále, potřebujeme mít nějakou „nábojovou pumpu“, tedy zařízení, které udržuje napětí mezi svými svorkami a přitom je za tím účelem schopné konat práci při přemísťování nosičů náboje. Takové zařízení se nazývá zdroj elektromotorického napětí. Říkáme pak, že zdroj vytváří **elektromotorické napětí** (zkratka emn). Elektromotorické napětí jako veličinu označujeme symbolem $\mathscr{E}$.



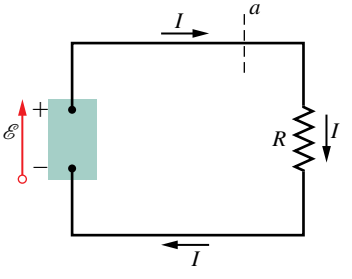
Největší baterie na světě v Chino v Kalifornii je schopna dodávat výkon až 10 MW. Používá se ve špičkách v elektrické síti společnosti Southern California Edison.

Běžnými zdroji emn jsou *baterie* používané jako zdroje energie, od náramkových hodinek až po ponorky. Náš život však nejvíce ovlivňují jiné zdroje emn, a to *elektrické generátory*, které vytvářejí napětí pro domácnost i pro pracoviště. Jinými zdroji emn jsou *sluneční články*. Známe je např. z fotografií umělých družic (tam jsou navzájem pospojovány a sestavovány do velkých panelů). Postupně však pronikají i do domácností. Méně známými zdroji emn jsou *palivové články* sloužící jako zdroj energie v raketoplánu nebo *termoelektrické baterie* používané v některých kosmických lodích nebo na vzdálených polárních stanicích v Antarktidě. Zdrojem emn však nemusí vždy být nějaký přístroj. Některé živé organismy, například električtí paúhoři, ale i lidé, ba i určité rostliny, mají *fyziologické zdroje* emn.

Přestože se vyjmenovaná zařízení výrazně liší způsobem své činnosti, všechna mají tutéž základní funkci: mohou konat práci přemísťováním nosičů náboje a udržují napětí mezi svými svorkami.

28.2 PRÁCE, ENERGIE A ELEKTROMOTORICKÉ NAPĚTÍ

Na obr. 28.1 je nakreslen zdroj emn $\mathscr{E}$ (předpokládejme, že je to baterie) zapojený do jednoduchého obvodu s rezistorem R. Svorka zdroje o vyšším elektrickém potenciálu se nazývá kladný pól a označuje se symbolem $+$, druhá svorka se nazývá záporný pól a označuje se symbolem $-$. Elektromotorické napětí zdroje znázorňujeme šipkou, která vychází ze záporného pólu a směřuje ke kladnému pólu (obr. 28.1). Orientace šipky udává směr, kterým se uvnitř zdroje pohybují kladné náboje. Ve vnějším obvodu protéká elektrický proud ve stejném směru (na obr. 28.1 ve směru otáčení hodinových ručiček).*



Obr. 28.1 Jednoduchý elektrický obvod, v němž zdroj emn koná práci na nosičích náboje a udržuje ustálený proud I rezistorem.

Uvnitř zdroje emn se kladné náboje pohybují z oblasti nižšího elektrického potenciálu, a tedy nižší potenciální

* Ve fyzice tedy mají všechny šipky směr proudu. V elektrotechnice obvykle značí šipky směr poklesu potenciálů (úbytků napětí). Směry šipek jsou tedy ve fyzice oproti elektrotechnice opačné uvnitř zdrojů emn. Na ostatních prvcích obvodů se směry šipek shodují.

energie (u záporného pólu), do oblasti vyššího potenciálu, a tedy vyšší potenciální energie u kladného pólu. Pohybují se tedy právě v *opačném* směru, než v jakém by je intenzita elektrického pole mezi svorkami (orientovaná od kladného pólu k zápornému) uváděla do pohybu.

Z toho vyplývá, že ve zdroji emn musí být nějaký zdroj energie, který mu umožňuje konat práci při přemísťování nábojů do míst, kde je potřebujeme mít. Zdroj energie může být chemický, např. v bateriích nebo v palivových článcích. Může užívat mechanickou práci, jak je tomu u elektrických generátorů. Teplotního rozdílu se využívá v termočláncích, a konečně zářivé (elektromagnetické) energie dodávané Sluncem ve slunečních článcích.

Rozeberme si nyní obvod na obr. 28.1 z hlediska práce a přenosu energie. V každém časovém intervalu dt prochází libovolným řezem protínajícím obvod — např. rovinou a — (kladný) náboj dQ. Stejně velký náboj prochází i libovolným jiným řezem; musí také vstoupit do zdroje emn jeho záporným pólem a vystoupit z něj pólem kladným. Aby se náboj dQ takto pohyboval, musí zdroj vykonat práci dW_z. Pomocí této práce definujeme emn zdroje

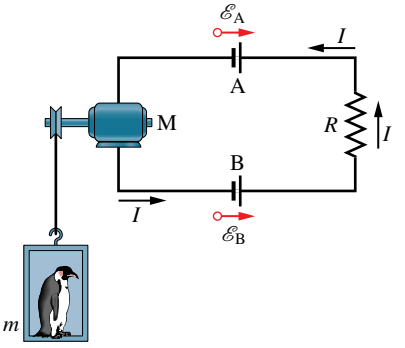
$$\mathscr{E} = \frac{\mathrm{d}W_z}{\mathrm{d}Q} \quad \text{(definice emn zdroje).} \qquad (28.1)$$

Vidíme, že emn zdroje je rovno práci, kterou zdroj vykoná při přemístění kladného jednotkového náboje uvnitř zdroje od záporného pólu ke kladnému. Jednotkou emn v soustavě SI je joule na coulomb, $\mathrm{J{\cdot}C^{-1}}$; tuto jednotku jsme v kap. 25 nazvali **volt**.

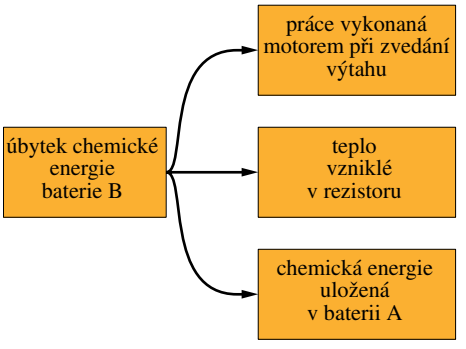
Ideální zdroj emn je takový, který neklade žádný odpor pohybu nosičů náboje uvnitř zdroje od pólu k pólu, nemá tedy žádný vnitřní odpor. Napětí mezi jeho póly je rovno $\mathscr{E}$, tedy jeho emn. Např. ideální baterie o $\mathscr{E} = 12{,}0\ \mathrm{V}$ má vždy napětí 12,0 V mezi svými póly bez ohledu na zátěž.

Reálný zdroj emn, například reálná baterie, klade určitý odpor nosičům náboje pohybujícím se uvnitř zdroje, má tedy určitý vnitřní odpor. Pokud reálný zdroj emn není zapojen do obvodu, neprotéká jím proud a jeho vnitřní odpor se neprojeví: napětí mezi jeho svorkami, tzv. **svorkové napětí**, je rovno jeho emn. Prochází-li však zdrojem proud, liší se napětí mezi jeho svorkami od emn. Vlastnostmi skutečných baterií se budeme zabývat v čl. 28.4.

Je-li zdroj zapojen do obvodu, předává energii nosičům náboje, které jím procházejí. Nosiče náboje pak předávají získanou energii jinému zařízení zapojenému do obvodu, například svítící žárovce. Na obr. 28.2a je nakreslen obvod se dvěma ideálními akumulátorovými bateriemi A a B, rezistorem R a elektromotorem M, který zvedá výtah a používá přitom energii, kterou dostává od nosičů náboje v obvodu. Všimněte si, že baterie jsou zapojeny tak, že by vyvolávaly pohyb nosičů náboje v obvodu každá v opačném směru. Výsledný směr proudu v obvodu určuje baterie o větším emn, což je v našem případě baterie B. Chemická energie v baterii B se tedy postupně zmenšuje tak, jak se předává energie nosičům náboje procházejících baterií. Avšak chemická energie baterie A se zvětšuje, protože proud uvnitř ní teče od kladného pólu k zápornému. Baterie B tedy nabíjí baterii A. Baterie B také dodává energii motoru M a rezistoru R. Na obr. 28.2b jsou znázorněny všechny toky energií z baterie B, z nichž každý snižuje její chemickou energii.



(*a*)



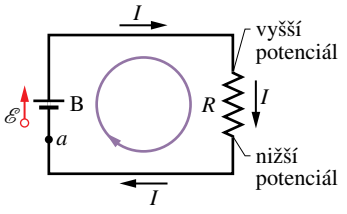
(*b*)

Obr. 28.2 (a) Baterie B určuje směr proudu v obvodu, neboť $\mathscr{E}_B > \mathscr{E}_A$. (b) Přenos energie v obvodu (za předpokladu, že v motoru nedochází k žádným ztrátám energie).

28.3 VÝPOČET PROUDU V JEDNODUCHÉM OBVODU

Vysvětlíme si dva způsoby, jak vypočítat proud v jednoduchém obvodu na obr. 28.3 tvořeném jedinou smyčkou. První způsob je založen na úvahách o zachování energie, druhý používá pojmu potenciál. Obvod se skládá z ideální baterie B o emn $\mathscr{E}$, rezistoru o odporu R a ze dvou spojovacích vodičů. (Nebude-li řečeno jinak, předpokládáme

vždy, že spojovací vodiče mají nulový odpor. Jejich jediným úkolem je vytvořit vodivou dráhu, po níž se mohou pohybovat nosiče náboje.)



Obr. 28.3 Jednoduchý obvod, v němž je rezistor o odporu R připojen k ideální baterii B o elektromotorickém napětí $\mathscr{E}$. Všemi částmi obvodu protéká stejný proud I.

Energiová metoda

Z rov. (27.22), $P = I^2 R$, plyne, že za časový interval $\mathrm{d}t$ je v rezistoru na obr. 28.3 disipována energie $I^2 R\,\mathrm{d}t$. (Protože předpokládáme, že spojovací vodiče mají nulový odpor, neztrácí se v nich žádná energie.) Během téhož časového intervalu projde baterií B náboj $\mathrm{d}Q = I\,\mathrm{d}t$, takže podle rov. (28.1) baterie vykoná práci

$$\mathrm{d}W_z = \mathscr{E}\,\mathrm{d}Q = \mathscr{E} I\,\mathrm{d}t.$$

Podle zákona zachování energie se práce vykonaná baterií musí rovnat Joulovu teplu vzniklému v rezistoru, tedy

$$\mathscr{E} I\,\mathrm{d}t = I^2 R\,\mathrm{d}t.$$

Odtud plyne

$$\mathscr{E} = IR.$$

Interpretujme tuto rovnici. Elektromotorické napětí $\mathscr{E}$ je energie připadající na jednotkový náboj, kterou baterie předá nábojům. Veličina IR je energie připadající na jednotkový náboj odevzdaná pohybujícími se náboji do rezistoru. Energie, kterou nábojům předá baterie, je pak rovna energii, kterou náboje odevzdají do rezistoru. Z poslední rovnice pro proud I v obvodu plyne

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}. \qquad (28.2)$$

Potenciálová metoda

Zvolme libovolný bod obvodu na obr. 28.3 za počáteční, postupujme obvodem v určitém směru a sčítejme algebraicky (tj. s přihlédnutím ke znaménku) úbytky napětí podél obvodu. Když se vrátíme zpět do počátečního bodu, dostaneme se i k počátečnímu potenciálu. Dříve než to skutečně provedeme, vyslovíme obecné tvrzení, které platí nejen pro jednoduchý obvod, jaký je např. na obr. 28.3, ale i pro libovolný obvod složený z mnoha **smyček**, o nichž budeme mluvit v čl. 28.6.

Smyčkové pravidlo: Algebraický součet úbytků napětí při průchodu libovolnou uzavřenou smyčkou je nulový.

Toto tvrzení se často označuje jako *Kirchhoffův zákon o napětí* nebo též *druhý Kirchhoffův zákon* podle německého fyzika Gustava Roberta Kirchhoffa. Pravidlo má analogii ve výroku, že každý bod na svahu hory má jen jedinou nadmořskou výšku. Jestliže vyjdeme z kteréhokoli bodu, obejdeme horu a vrátíme se do výchozího bodu, musí být algebraický součet změn nadmořských výšek během cesty roven nule.

Začněme v bodě a (obr. 28.3), jehož potenciál označme φ_a, a postupujme např. ve směru otáčení hodinových ručiček podél obvodu, dokud nepřijdeme opět do bodu a. Při postupu zaznamenávejme změny potenciálu. Náš výchozí bod má potenciál záporného pólu baterie. Protože baterie je ideální, napětí mezi jejími póly je rovno jejímu elektromotorickému napětí $\mathscr{E}$. Projdeme-li baterií k jejímu kladnému pólu, je změna potenciálu rovna $+\mathscr{E}$.

Když postupujeme podél horního spojovacího vodiče k hornímu konci rezistoru, potenciál se nemění, protože vodič má zanedbatelný odpor. Celý spojovací vodič má tedy stejný potenciál jako kladný pól baterie a stejný potenciál má i horní konec rezistoru. Když však projdeme rezistorem, změní se potenciál o hodnotu $-IR$.

Podél dolního spojovacího vodiče se vrátíme do bodu a. Protože tento vodič má také zanedbatelný odpor, potenciál se přitom opět nemění. V bodě a musí být opět potenciál φ_a. Protože jsme obešli celou uzavřenou smyčku, musí se potenciál ve výchozím bodě změněný o algebraický součet úbytků potenciálu podél smyčky rovnat potenciálu v koncovém bodě, tedy

$$\varphi_a + \mathscr{E} - IR = \varphi_a.$$

Potenciál φ_a na obou stranách rovnice se vyruší, takže dostaneme

$$\mathscr{E} - IR = 0.$$

Proud vypočtený z této rovnice, $I = \mathscr{E}/R$, je stejný jako při použití energiové metody, viz rov. (28.2).

Použijeme-li smyčkové pravidlo při postupu proti směru otáčení hodinových ručiček podél obvodu, dostaneme

$$-\mathscr{E} + IR = 0$$

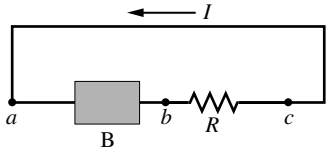
a opět vychází $I = \mathscr{E}/R$. Uzavřenou smyčkou tedy můžeme procházet v libovolném směru.

Abychom se připravili na složitější obvody, zformulujeme dvě pravidla, jak určit změny potenciálu při postupu podél smyčky:

Smyčkové pravidlo pro rezistory: Při průchodu rezistorem ve směru proudu I se potenciál změní o hodnotu $-IR$, při průchodu rezistorem v opačném směru o hodnotu $+IR$.

Smyčkové pravidlo pro zdroje emn: Při průchodu ideálním zdrojem emn ve směru šipky znázorňující toto napětí se potenciál změní o hodnotu $+\mathscr{E}$, při průchodu v opačném směru o hodnotu $-\mathscr{E}$.

KONTROLA 1: Na obrázku je jednoduchý obvod s baterií B a rezistorem R, kterým prochází proud I (spojovací vodiče mají zanedbatelný odpor). (a) Má šipka znázorňující emn baterie ukazovat doleva, nebo doprava? Určete (b) proud, (c) elektrický potenciál, (d) elektrickou potenciální energii nosiče náboje v bodech a, b, c a uspořádejte je sestupně podle jejich velikosti.



28.4 JINÉ JEDNODUCHÉ OBVODY

V tomto odstavci si rozšíříme poznatky o jednoduchých obvodech.

Vnitřní odpor

Na obr. 28.4a je reálná baterie o vnitřním odporu r spojená s rezistorem o odporu R. Vnitřní odpor baterie je vlastně elektrický odpor materiálu baterie, a proto je neodstranitelnou vlastností baterie. Na obr. 28.4a je reálná baterie symbolicky nakreslena tak, jako by ji šlo rozdělit na ideální baterii o elektromotorickém napětí $\mathscr{E}$ a rezistor o odporu r. Na pořadí, v jakém tyto symboly zakreslíme, nezáleží.

Použijeme smyčkové pravidlo tak, že vyjdeme z bodu a a budeme postupovat ve směru otáčení hodinových ručiček. Sestavíme tak rovnici

$$\mathscr{E} - Ir - IR = 0 \qquad (28.3)$$

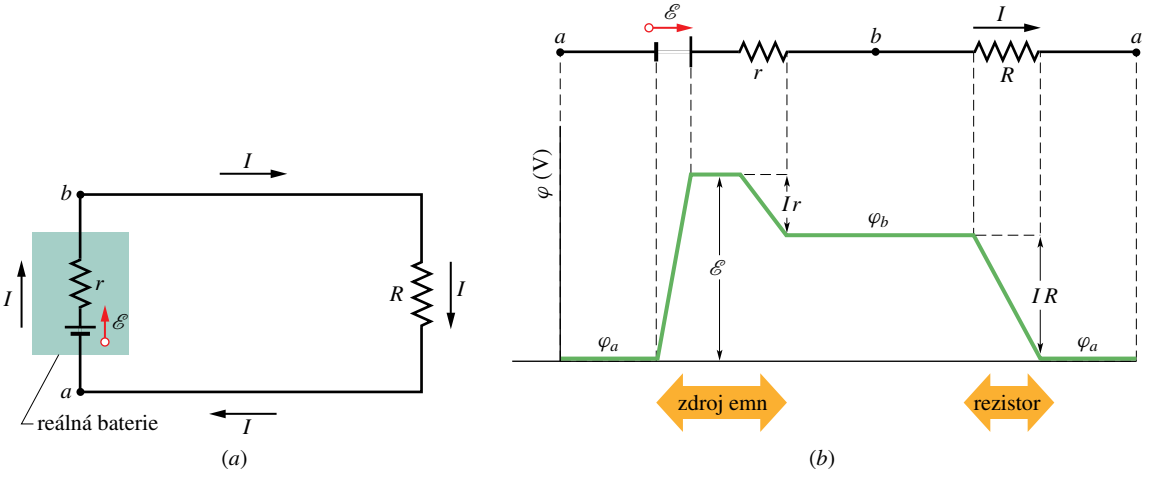
a z ní vypočteme proud

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}. \qquad (28.4)$$

Všimněte si, že tento vztah přechází v rov. (28.2), je-li baterie ideální, tj. je-li $r = 0$.

Na obr. 28.4b je průběh elektrického potenciálu podél obvodu. (Aby graf na obr. 28.4b lépe vystihoval *uzavřený obvod*, představme si ho stočený do ruličky tak, že bod a vlevo splyne s bodem a vpravo.) Uvědomte si, že průchod obvodem a návrat do výchozího bodu je podobný putování kolem (potenciálové) hory a návratu do počáteční nadmořské výšky.

Pokud výslovně neřekneme, že jde o reálnou baterii, nebo pokud nebude zadán vnitřní odpor baterie, budeme v této knize vždy předpokládat, že baterie je ideální. Baterie v reálném světě jsou ovšem reálné a ne vždy můžeme jejich vnitřní odpor zanedbat.

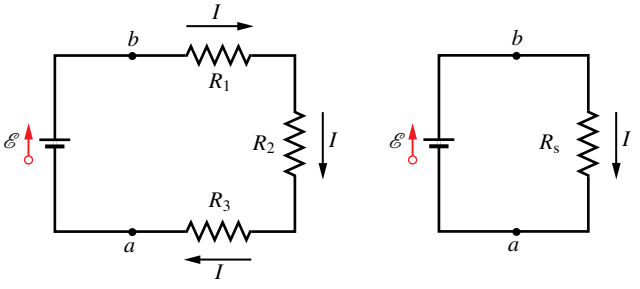


Obr. 28.4 (a) Jednoduchý obvod s reálnou baterií o vnitřním odporu r a elektromotorickém napětí $\mathscr{E}$. (b) Nahoře je nakreslen obvod rozvinutý do úsečky. V grafu vidíme změny potenciálu při průchodu obvodem ve směru otáčení hodinových ručiček. Potenciál φ_a je zvolen jako nulový a ostatní potenciály v obvodu jsou vztaženy k této nulové hladině.

Sériové zapojení rezistorů

Na obr. 28.5a jsou tři rezistory zapojené **sériově** neboli **za sebou** a připojené k ideální baterii o elektromotorickém napětí $\mathscr{E}$.

Při **sériovém zapojení** prochází všemi rezistory stejný proud a celkové napětí přiložené na rezistory je rovno součtu napětí na jednotlivých rezistorech.



Obr. 28.5 (a) Tři rezistory jsou zapojeny sériově mezi body a a b. (b) Ekvivalentní obvod, v němž je trojice rezistorů nahrazena rezistorem o odporu R_s.

Hledáme odpor R_s sériové kombinace tří rezistorů na obr. 28.5a. Jinými slovy, hledáme odpor jediného (ekvivalentního) rezistoru, kterým můžeme nahradit trojici rezistorů, aniž by se při stálém napětí mezi body a, b změnil proud I v obvodu. Použijeme smyčkové pravidlo, vyjdeme z bodu a a obejdeme obvod ve směru otáčení hodinových ručiček. Dostaneme

$$\mathscr{E} - IR_1 - IR_2 - IR_3 = 0,$$

tedy

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + R_2 + R_3}. \qquad (28.5)$$

Kdybychom trojici rezistorů nahradili jediným rezistorem o odporu R_s podle obr. 28.5b, dostali bychom

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_s}. \qquad (28.6)$$

Porovnáme-li rov. (28.5) a (28.6), obdržíme

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3.$$

Výsledek lze snadno rozšířit na sériovou kombinaci n rezistorů:

$$R_s = \sum_{j=1}^{n} R_j \quad (n \text{ rezistorů zapojených sériově}). \qquad (28.7)$$

Je zřejmé, že při sériovém zapojení rezistorů je ekvivalentní odpor R_s větší než odpor kteréhokoli z rezistorů.

28.5 NAPĚTÍ V OBVODECH

Často chceme určit rozdíl potenciálů (tedy napětí) mezi dvěma body obvodu. Jaké je například napětí mezi body b a a v obvodu na obr. 28.4a? Abychom ho vypočítali, vyjděme z bodu b a postupujme obvodem ve směru otáčení hodinových ručiček k bodu a přes rezistor R. Jestliže φ_a a φ_b jsou potenciály v bodech a, b, pak

$$\varphi_b - IR = \varphi_a,$$

protože podle pravidla pro rezistory se při průchodu rezistorem ve směru toku proudu potenciál sníží. Odvozenou rovnici přepíšeme ve tvaru

$$\varphi_b - \varphi_a = U = +IR, \qquad (28.8)$$

z něhož je zřetelně vidět, že potenciál v bodě b je vyšší než potenciál v bodě a. Dosazením z rov. (28.4) dostaneme

$$U = \mathscr{E}\frac{R}{R + r}, \qquad (28.9)$$

kde r je vnitřní odpor zdroje emn.

Napětí mezi libovolnými dvěma body elektrického obvodu určíme takto: Vyjdeme z jednoho z těchto bodů, postupujeme po libovolné cestě obvodem ke druhému bodu a přitom algebraicky sčítáme dílčí napětí.

Vypočteme znovu rozdíl $\varphi_b - \varphi_a$, tak, že vyjdeme z bodu b, ale do bodu a budeme postupovat přes baterii proti směru otáčení hodinových ručiček. Tak obdržíme

$$\varphi_b + Ir - \mathscr{E} = \varphi_a$$

neboli

$$U = \mathscr{E} - Ir. \qquad (28.10)$$

Dosazením rov. (28.4) dojdeme opět k výsledku (28.9).

Rozdíl $\varphi_b - \varphi_a$ je podle obr. 28.4 roven napětí U na svorkách baterie. Jak jsme řekli už dříve, rozdíl $\varphi_b - \varphi_a$ je roven elektromotorickému napětí $\mathscr{E}$ baterie jedině tehdy, když baterie má nulový vnitřní odpor (tj. $r = 0$ v rov. (28.9)) nebo je-li obvod rozpojen (tj. $I = 0$ v rov. (28.10)). Předpokládejme, že v obvodu na obr. 28.4 je $\mathscr{E} = 12\,\text{V}$, $R = 10\,\Omega$ a $r = 2{,}0\,\Omega$. Pomocí rov. (28.9) vypočteme, že napětí na svorkách baterie je

$$U = \varphi_b - \varphi_a = (12\,\text{V})\frac{(10\,\Omega)}{(10\,\Omega + 2{,}0\,\Omega)} = 10\,\text{V}.$$

Při „pumpování nábojů“ uvnitř sebe samé vykoná baterie (v důsledku elektrochemických reakcí) na jednotkovém náboji práci, která je rovna jejímu elektromotorickému napětí $\mathscr{E} = 12\,\mathrm{J{\cdot}C^{-1}} = 12\,\mathrm{V}$. Protože však baterie má nenulový vnitřní odpor $r = 2{,}0\,\Omega$, je na jejích svorkách napětí pouze $U = 10\,\mathrm{J{\cdot}C^{-1}} = 10\,\mathrm{V}$.

Výkon, napětí a elektromotorické napětí

Jestliže baterie nebo nějaký jiný zdroj emn koná práci na nosičích elektrického náboje tvořících proud I, přenáší energii ze svého vlastního zdroje energie (jako je např. chemický zdroj energie v baterii) na nosiče nábojů. Protože reálný zdroj emn má vnitřní odpor r, je část energie zdroje disipována přímo uvnitř zdroje na vnitřním odporu r (o disipaci jsme mluvili v čl. 27.7). Sledujme tyto přeměny.

Výkon, který dodává zdroj emn prostřednictvím nosičů náboje do zbytku obvodu, je vyjádřen rov. (27.21):

$$P = IU, \tag{28.11}$$

kde U je napětí na svorkách zdroje. Z rov. (28.10) dosadíme $U = \mathscr{E} - Ir$ do rov. (28.11) a tím dostaneme

$$P = I(\mathscr{E} - Ir) = I\mathscr{E} - I^2 r. \tag{28.12}$$

Člen $I^2 r$ v rov. (28.12) udává výkon P_r disipovaný uvnitř zdroje emn:

$$P_r = I^2 r \quad \text{(ztrátový výkon zdroje na jeho vnitřním odporu).} \tag{28.13}$$

Člen $I\mathscr{E}$ v rov. (28.12) musí odpovídat výkonu zdroje emn P_{emn}, tedy rychlosti, s jakou ubývá chemická energie baterie. Tedy

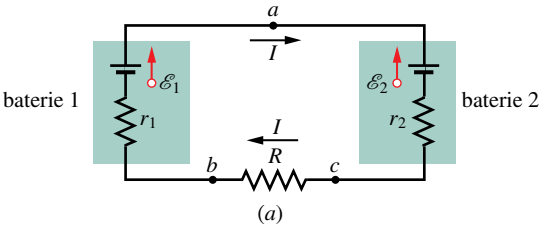
$$P_{\mathrm{emn}} = I\mathscr{E} \quad \text{(výkon zdroje emn).} \tag{28.14}$$

Jestliže se baterie nabíjí (proud jí protéká opačným směrem, než když se vybíjí), nosiče nábojů přenášejí energii do baterie. Přitom se část energie přeměňuje v chemickou energii baterie a část je disipována na jejím vnitřním odporu. Rychlost změny (přírůstku) chemické energie je dána rov. (28.14); rychlost, s níž je energie disipována ve zdroji, je dána rov. (28.13); rychlost, s níž nosiče náboje dodávají baterii energii, je dána rov. (28.11).

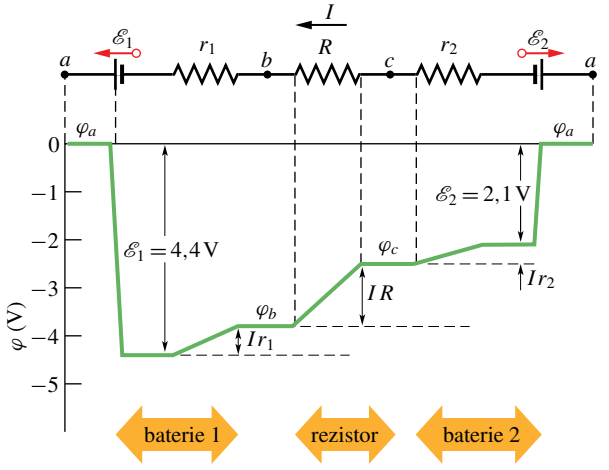
KONTROLA 2: Pro rezistory na obr. 28.5a platí $R_1 > R_2 > R_3$. Uspořádejte rezistory sestupně podle (a) velikosti proudu, který jimi prochází, (b) napětí na jejich svorkách.

PŘÍKLAD 28.1

Vypočtěte proud v obvodu na obr. 28.6a. Elektromotorická napětí a odpory rezistorů jsou: $\mathscr{E}_1 = 4{,}4\,\mathrm{V}$, $\mathscr{E}_2 = 2{,}1\,\mathrm{V}$, $r_1 = 2{,}3\,\Omega$, $r_2 = 1{,}8\,\Omega$, $R = 5{,}5\,\Omega$.



(a)



(b)

Obr. 28.6 Příklady 28.1 a 28.2. (a) Jednoduchá smyčka obsahující dvě reálné baterie a rezistor. Baterie jsou zapojeny „proti sobě“ — to znamená, že by samy o sobě vyvolávaly proudy v obvodu v opačných směrech. (b) Graf průběhu potenciálu podél obvodu při průchodu obvodem od bodu a proti směru otáčení hodinových ručiček, přičemž potenciál bodu a je zvolen jako nulový. (Aby vztah mezi obvodem a grafem byl zřetelnější, představme si, že obvod přerušíme v bodě a, potom rozevřeme levou část obvodu směrem doleva a pravou část obvodu směrem doprava.) Protože přes baterii 1 procházíme od vyššího potenciálu k nižšímu proti směru proudu, potenciál se sníží o hodnotu $\mathscr{E}_1$ a zvýší o hodnotu Ir_1. Protože přes rezistor R procházíme proti směru proudu, potenciál se zvýší o hodnotu IR. Protože přes baterii 2 procházíme od nižšího potenciálu k vyššímu proti směru proudu, potenciál se zvýší o hodnotu $\mathscr{E}_2$ a poté o hodnotu Ir_2.

ŘEŠENÍ: Baterie jsou zapojeny „proti sobě“; protože však $\mathscr{E}_1$ je větší než $\mathscr{E}_2$, určuje směr proudu v obvodu baterie 1. Použijeme-li smyčkové pravidlo a projdeme-li obvodem proti směru otáčení hodinových ručiček od bodu a, dostaneme

$$-\mathscr{E}_1 + Ir_1 + IR + Ir_2 + \mathscr{E}_2 = 0.$$

Ověřte si, že ke stejné rovnici dospějete, i když projdete obvodem ve směru otáčení hodinových ručiček a začnete

v nějakém jiném bodě. Porovnejte si také jednotlivé členy této rovnice s obr. 28.6b, na němž je znázorněn průběh potenciálu graficky (potenciál v bodě a je zvolen jako nulový). Vyřešením sestavené rovnice vypočteme hledaný proud

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{(4{,}4\,\mathrm{V} - 2{,}1\,\mathrm{V})}{(5{,}5\,\Omega + 2{,}3\,\Omega + 1{,}8\,\Omega)} = \\ = 0{,}239\,6\,\mathrm{A} \doteq 240\,\mathrm{mA}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 28.1: *Jak se volí směr proudu*

Při řešení příkladů s elektrickými obvody nepotřebujeme znát předem správný směr proudu. Směr proudu si můžeme zvolit libovolně. Zvolíme-li směr správně, vyjde proud kladný, zvolíme-li ho opačně, vyjde proud záporný. Předpokládejme, že proud v obvodu na obr. 28.6a teče proti směru otáčení hodinových ručiček, tedy opačně, než ukazuje proudová šipka na obrázku. Smyčkové pravidlo použité od bodu a proti směru otáčení hodinových ručiček vede k rovnici

$$-\mathscr{E}_1 - Ir_1 - IR - Ir_2 + \mathscr{E}_2 = 0,$$

odkud

$$I = -\frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{R + r_1 + r_2}.$$

Dosazením číselných hodnot (viz př. 28.1) zjistíme, že proud $I = -240\,\mathrm{mA}$. Znaménko minus znamená, že proud má opačný směr, než který jsme zvolili.

PŘÍKLAD 28.2

(a) Jaké je napětí na svorkách baterie 1 v obvodu na obr. 28.6a?

ŘEŠENÍ: Vyjděme z bodu b (který má stejný potenciál jako záporný pól baterie), projděme baterií 1 do bodu a (který má potenciál kladného pólu baterie) a sledujme úbytky potenciálu; dostaneme

$$\varphi_b - Ir_1 + \mathscr{E}_1 = \varphi_a$$

a po úpravě

$$\varphi_a - \varphi_b = -Ir_1 + \mathscr{E}_1 = \\ = -(0{,}239\,6\,\mathrm{A})(2{,}3\,\Omega) + (4{,}4\,\mathrm{V}) = \\ = +3{,}84\,\mathrm{V} \doteq 3{,}8\,\mathrm{V}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledek si můžeme zkontrolovat tak, že vyjdeme z bodu b a projdeme obvodem proti směru otáčení hodinových ručiček do bodu a. Pro tuto druhou cestu obdržíme

$$\varphi_b + IR + Ir_2 + \mathscr{E}_2 = \varphi_a$$

a z toho

$$\varphi_a - \varphi_b = I(R + r_2) + \mathscr{E}_2 = \\ = (0{,}239\,6\,\mathrm{A})(5{,}5\,\Omega + 1{,}8\,\Omega) + (2{,}1\,\mathrm{V}) = \\ = +3{,}84\,\mathrm{V} \doteq 3{,}8\,\mathrm{V}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledky obou postupů jsou tedy stejné. Napětí mezi dvěma body je stejné pro všechny cesty, které tyto dva body spojují.

(b) Jaké je napětí na svorkách baterie 2 v obvodu na obr. 28.6a?

ŘEŠENÍ: Vyjděme z bodu c (který má stejný potenciál jako záporný pól baterie 2), projděme baterií do bodu a (který má potenciál kladného pólu baterie) a zaznamenávejme napětí; dostaneme

$$\varphi_c + Ir_2 + \mathscr{E}_2 = \varphi_a,$$

resp.

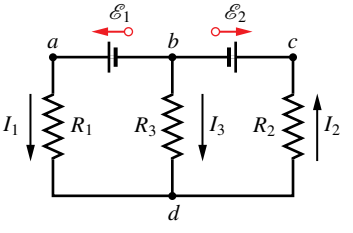
$$\varphi_a - \varphi_c = Ir_2 + \mathscr{E}_2 = \\ = (0{,}239\,6\,\mathrm{A})(1{,}8\,\Omega) + (2{,}1\,\mathrm{V}) = \\ = +2{,}5\,\mathrm{V}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Napětí na svorkách této baterie (2,5 V) je větší než její emn (2,1 V). Je to proto, že baterie 1 způsobí, že elektrický náboj prochází baterií 2 v opačném směru, než by procházel, kdyby baterie 1 v obvodu nebyla.

KONTROLA 3: Baterie má emn $\mathscr{E} = 12\,\mathrm{V}$ a vnitřní odpor $2\,\Omega$. Je napětí na svorkách baterie větší, menší, nebo rovno 12 V, jestliže proud baterií (a) prochází od záporného pólu ke kladnému pólu, (b) prochází od kladného pólu k zápornému pólu, (c) je nulový?

28.6 OBVODY S VÍCE SMYČKAMI

Na obr. 28.7 je příklad obvodu s více než jednou smyčkou. Pro zjednodušení předpokládejme, že baterie jsou ideální. Obvod má dva **uzly** (místa vodivého spojení) označené b a d a tři **větve** spojující tyto uzly: levou (bad), pravou (bcd) a střední (bd). Jaké proudy jimi procházejí?



Obr. 28.7 Obvod složený ze tří větví: z levé bad, pravé bcd a střední bd. Obvod také obsahuje tři smyčky: levou $badb$, pravou $bcdb$ a velkou $badcb$.

Označíme proudy ve větvích libovolně, přičemž pro každou větev použijeme jiný symbol. Proud I_1 je stejný v celé větvi bad, proud I_2 je stejný v celé větvi bcd, proud I_3 protéká větví bd. Směry proudů zvolíme libovolně. Uvažujme uzel d. Elektrický náboj přinášejí do uzlu proudy I_1 a I_3 a z uzlu ho odnáší odtékající proud I_2. Náboj v uzlu se nezvětšuje ani nezmenšuje, takže musí platit

$$I_1 + I_3 = I_2. \tag{28.15}$$

Můžete si ověřit, že použití této podmínky pro uzel b vede ke stejné rovnici. Rov. (28.15) zobecníme v obecné pravidlo:

Uzlové pravidlo: Součet proudů vstupujících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vystupujících.

Toto pravidlo se nazývá *Kirchhoffův zákon o proudech* nebo též *první Kirchhoffův zákon*. Je to prostě zákon zachování elektrického náboje při ustáleném proudu: v uzlu náboj ani nevzniká, nehromadí se, ani se neztrácí. Našimi hlavními nástroji pro řešení složených obvodů tedy jsou *smyčkové pravidlo* (které je důsledkem zákona zachování energie) a *uzlové pravidlo* (které je důsledkem zákona zachování elektrického náboje).

V rov. (28.15) jsou tři neznámé veličiny. Abychom mohli vyřešit náš problém (tj. určit všechny tři proudy), potřebujeme další dvě rovnice s týmiž neznámými. Získáme je tak, že dvakrát použijeme smyčkové pravidlo. V obvodu na obr. 28.7 máme na výběr tři smyčky: levou smyčku ($badb$), pravou smyčku ($bcdb$) a velkou smyčku ($badcb$). Je jedno, které dvě z těchto tří smyček zvolíme — zvolme tedy levou a pravou smyčku.

Jestliže projdeme levou smyčkou od bodu b proti směru otáčení hodinových ručiček, dostaneme

$$\mathscr{E}_1 - I_1R_1 + I_3R_3 = 0. \tag{28.16}$$

Při průchodu pravou smyčkou od bodu b proti směru otáčení hodinových ručiček dostaneme

$$-I_3R_3 - I_2R_2 - \mathscr{E}_2 = 0. \tag{28.17}$$

Nyní máme tři rovnice (28.15), (28.16) a (28.17) se třemi neznámými proudy, které dokážeme vyřešit.

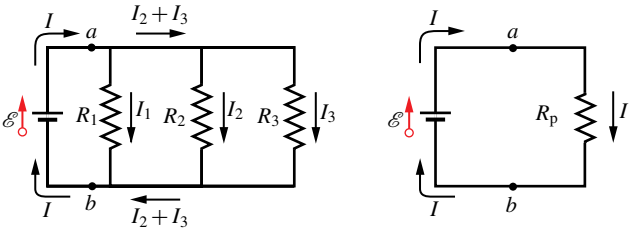
Kdybychom použili smyčkového pravidla pro velkou smyčku, dostali bychom (při průchodu smyčkou z bodu b proti směru otáčení hodinových ručiček) rovnici

$$\mathscr{E}_1 - I_1R_1 - I_2R_2 - \mathscr{E}_2 = 0.$$

Na první pohled se zdá, že tato rovnice přináší novou informaci, ale ve skutečnosti je pouze součtem rov. (28.16) a (28.17).

Paralelní zapojení rezistorů

Na obr. 28.8 jsou nakresleny tři rezistory připojené **paralelně** neboli **vedle sebe** k ideální baterii o elektromotorickém napětí $\mathscr{E}$. Ke každému rezistoru v této paralelní kombinaci je tak přiloženo napětí $U = \mathscr{E}$.



Obr. 28.8 (a) Tři rezistory zapojené paralelně mezi body a, b. (b) Ekvivalentní obvod, v němž jsou tři rezistory nahrazeny ekvivalentním rezistorem o odporu R_p.

Při paralelním zapojení je napětí na každém rezistoru stejné jako napětí přiložené k celému zapojení a celkový proud procházející kombinací rezistorů je roven součtu proudů procházejících jednotlivými rezistory.

Hledáme odpor R_p soustavy rezistorů zapojených paralelně. Jinými slovy, hledáme odpor jediného (ekvivalentního) rezistoru, který může nahradit paralelní kombinaci rezistorů, aniž by se při stálém napětí U na této kombinaci změnil proud I do ní vtékající. Proudy ve třech větvích v obvodu na obr. 28.8a jsou

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2}, \quad I_3 = \frac{U}{R_3},$$

kde U je napětí mezi body a a b. Použijeme-li uzlového pravidla pro uzel ležící vpravo od bodu a a dosadíme-li za proudy, dostaneme

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right). \tag{28.18}$$

Kdybychom nahradili paralelní kombinaci tří rezistorů jediným rezistorem o odporu R_p (obr. 28.8b), dostali bychom

$$I = \frac{U}{R_p}. \tag{28.19}$$

Porovnáním rovnic (28.18) a (28.19) dospějeme k závěru, že

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \tag{28.20}$$

Rozšíříme-li tento výsledek na n rezistorů zapojených paralelně, obdržíme vztah

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j} \quad (n \text{ rezistorů zapojených paralelně}). \tag{28.21}$$

Jsou-li paralelně zapojeny *jen dva* rezistory, je výsledný odpor tedy roven součinu odporů obou rezistorů dělenému jejich součtem

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{28.22}$$

Všimněte si, že pokud dva nebo více rezistorů zapojíme paralelně, je ekvivalentní odpor menší než odpor libovolného ze zapojených rezistorů. V tab. 28.1 jsou shrnuty vztahy pro hodnoty ekvivalentních odporů a kapacit pro rezistory a kondenzátory zapojené sériově nebo paralelně.

Tabulka 28.1 **Sériové a paralelní zapojení rezistorů a kondenzátorů**

SÉRIOVÉ ZAPOJENÍ (ZA SEBOU)		PARALELNÍ ZAPOJENÍ (VEDLE SEBE)	
Rezistory			
$R_s = \sum_{j=1}^{n} R_j$	(28.7)	$\frac{1}{R_p} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j}$	(28.21)
stejný proud každým z rezistorů		stejné napětí na každém rezistoru	
Kondenzátory			
$\frac{1}{C_s} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j}$	(26.20)	$C_p = \sum_{j=1}^{n} C_j$	(26.19)
stejný náboj na každém z kondenzátorů		stejné napětí na každém kondenzátoru	

KONTROLA 4: Baterie, na jejichž svorkách je napětí U a kterou protéká proud I, je připojena ke dvěma stejným rezistorům. Jaké je napětí na jednotlivých rezistorech a jaký proud jimi protéká, jsou-li zapojeny (a) sériově, (b) paralelně?

PŘÍKLAD 28.3

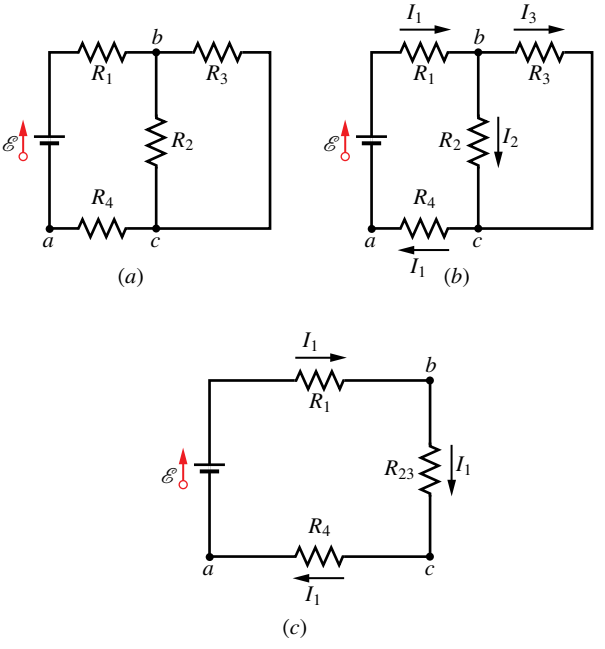
Na obr. 28.9a je obvod s jednou ideální baterií $\mathscr{E} = 12\,\text{V}$ a čtyřmi rezistory o odporech $R_1 = 20\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 30\,\Omega$, $R_4 = 8{,}0\,\Omega$.

(a) Jaký proud prochází baterií?

ŘEŠENÍ: Proud procházející baterií protéká také rezistorem R_1. Abychom mohli vypočítat proud, musíme napsat Kirchhoffův zákon pro nějakou smyčku obsahující rezistor R_1; může to být buď levá smyčka, nebo celková smyčka. Šipka znázorňující emn baterie je orientována nahoru a proud, který baterie dodává do obvodu, teče ve směru otáčení hodinových ručiček. Pokud bychom použili smyčkového pravidla pro levou smyčku, a to ve směru otáčení hodinových ručiček s výchozím bodem a, mohli bychom napsat

$$+\mathscr{E} - IR_1 - IR_2 - IR_4 = 0 \quad \text{(nesprávně)}.$$

Tato rovnice je však nesprávná, protože se v ní předpokládá, že rezistory R_1, R_2 a R_4 prochází stejný proud I. Rezistory R_1 a R_4 opravdu prochází stejný proud, protože proud protékající rezistorem R_4 musí projít baterií a také rezistorem R_1, aniž by se změnila jeho hodnota. Avšak tento proud se dělí v uzlu b na dvě části, jedna část teče do rezistoru R_2 a zbytek do rezistoru R_3.



Obr. 28.9 Příklad 28.3. (a) Obvod složený z několika smyček s ideální baterií o elektromotorickém napětí $\mathscr{E}$ a se čtyřmi rezistory. (b) Proudy procházející rezistory. (c) Zjednodušený obvod. Rezistory R_2 a R_3 jsou nahrazeny rezistorem o ekvivalentním odporu R_{23}. Proud procházející rezistorem R_{23} je stejný jako proud rezistory R_1 a R_4.

Abychom odlišili různé proudy v obvodu, musíme je označit různými symboly jako na obr. 28.9b. Pomocí smyčkového pravidla pak napíšeme rovnici pro levou smyčku ve tvaru

$$+\mathscr{E} - I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_1 R_4 = 0.$$

Tato rovnice však obsahuje dvě neznámé veličiny I_1 a I_2. Proto potřebujeme ještě jednu rovnici, abychom mohli proudy vypočítat.

Druhá a mnohem snadnější cesta k výsledku je zjednodušit obvod na obr. 28.9b pomocí ekvivalentního rezistoru. Všimněte si, že rezistory R_1 a R_2 *nejsou* zapojeny sériově, takže

nemohou být nahrazeny ekvivalentním rezistorem. Rezistory R_2 a R_3 jsou však zapojeny paralelně, takže můžeme použít buď rov. (28.21), nebo rov. (28.22) a vypočítat odpovídající ekvivalentní odpor R_{23}:

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{(20\,\Omega)(30\,\Omega)}{(50\,\Omega)} = 12\,\Omega.$$

Nyní překreslíme obvod do podoby na obr. 28.9c. Všimněte si, že rezistorem R_{23} musí procházet proud I_1, protože tento proud teče rezistory R_1 a R_4 a musí tedy spojitě pokračovat i rezistorem R_{23}. Máme tedy jednoduchý obvod s jedinou smyčkou a použitím smyčkového pravidla (ve směru otáčení hodinových ručiček od výchozího bodu a) dostaneme

$$+\mathscr{E} - I_1 R_1 - I_1 R_{23} - I_1 R_4 = 0.$$

Po dosazení číselných hodnot vyjde

$$(12\,\mathrm{V}) - I_1(20\,\Omega) - I_1(12\,\Omega) - I_1(8{,}0\,\Omega) = 0$$

a odtud proud

$$I_1 = \frac{(12\,\mathrm{V})}{(40\,\Omega)} = 0{,}30\,\mathrm{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaký proud I_2 prochází rezistorem R_2?

ŘEŠENÍ: Podívejme se opět na obr. 28.9c. Z předcházející části příkladu víme, že proud procházející rezistorem R_{23} je $I_1 = 0{,}30\,\mathrm{A}$. Můžeme tedy použít rov. (27.8) ($R = U/I$), abychom vypočítali napětí U_{23} na rezistoru R_{23}:

$$U_{23} = I_1 R_{23} = (0{,}30\,\mathrm{A})(12\,\Omega) = 3{,}6\,\mathrm{V}.$$

Stejné napětí je také na rezistorech R_2 a R_3. Pomocí rov. (27.8) nyní dostaneme

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{(3{,}6\,\mathrm{V})}{(20\,\Omega)} = 0{,}18\,\mathrm{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

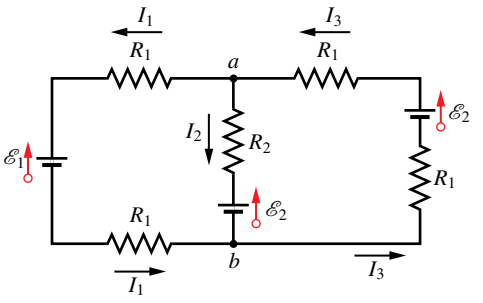
(c) Jaký proud I_3 prochází rezistorem R_3?

ŘEŠENÍ: Použijeme uzlového pravidla pro uzel b na obr. 28.9b a pomocí předcházejících výsledků vyjde

$$I_3 = I_1 - I_2 = (0{,}30\,\mathrm{A}) - (0{,}18\,\mathrm{A}) = \\ = 0{,}12\,\mathrm{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 28.4

Na obr. 28.10 je obvod, jehož prvky mají hodnoty $\mathscr{E}_1 = 3{,}0\,\mathrm{V}$, $\mathscr{E}_2 = 6{,}0\,\mathrm{V}$, $R_1 = 2{,}0\,\Omega$, $R_2 = 4{,}0\,\Omega$. Tři baterie v obvodu jsou ideální zdroje. Určete velikost a směr proudu v každé ze tří větví obvodu.



Obr. 28.10 Příklad 28.4. Obvod se třemi smyčkami, v němž jsou zapojeny tři ideální baterie a pět rezistorů.

ŘEŠENÍ: V tomto případě není příliš užitečné pokoušet se obvod zjednodušit, protože žádné dva rezistory nejsou zapojeny paralelně a rezistory zapojené sériově (v pravé větvi nebo v levé větvi) nepředstavují žádný problém. Použijeme tedy smyčkové a uzlové pravidlo a budeme řešit získanou soustavu rovnic.

Označíme libovolně směry proudů (obr. 28.10) a pomocí uzlového pravidla pro uzel a napíšeme

$$I_3 = I_1 + I_2. \qquad (28.23)$$

Použití uzlového pravidla pro uzel b by vedlo ke stejné rovnici. Dále užijeme smyčkového pravidla pro libovolné dvě ze tří smyček obvodu. Vezměme třeba levou smyčku, zvolme bod a za výchozí a rozhodněme se projít touto smyčkou proti směru otáčení hodinových ručiček. Obdržíme tak rovnici

$$-I_1 R_1 - \mathscr{E}_1 - I_1 R_1 + \mathscr{E}_2 + I_2 R_2 = 0,$$

kterou můžeme ihned zjednodušit dosazením číselných hodnot do tvaru

$$I_1(4{,}0\,\Omega) - I_2(4{,}0\,\Omega) = 3{,}0\,\mathrm{V}. \qquad (28.24)$$

Jako druhou zvolíme pravou smyčku. Projdeme-li jí z bodu a ve směru otáčení hodinových ručiček, dostaneme rovnici

$$+I_3 R_1 - \mathscr{E}_2 + I_3 R_1 + \mathscr{E}_2 + I_2 R_2 = 0$$

a po dosazení:

$$I_2(4{,}0\,\Omega) + I_3(4{,}0\,\Omega) = 0. \qquad (28.25)$$

Pomocí rov. (28.23) vyloučíme proud I_3 z rov. (28.25), což dává

$$I_1(4{,}0\,\Omega) + I_2(8{,}0\,\Omega) = 0. \qquad (28.26)$$

Nyní máme soustavu dvou rovnic (28.24) a (28.26) se dvěma neznámými proudy I_1 a I_2, kterou můžeme velmi snadno vyřešit. Nejprve vypočteme

$$I_2 = -0{,}25\,\mathrm{A}.$$

Záporné znaménko napovídá, že proud I_2 teče opačným směrem, než který jsme zvolili. Teče tedy vzhůru baterií $\mathscr{E}_2$ a rezistorem R_2. Nyní dosadíme proud $I_2 = -0{,}25\,\text{A}$ do rov. (28.26) a vypočteme

$$I_1 = 0{,}50\,\text{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Užitím rov. (28.23) určíme

$$I_3 = I_1 + I_2 = 0{,}25\,\text{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kladné znaménko vypočtených proudů I_1 a I_3 potvrzuje, že jsme směr těchto proudů zvolili správně. Na závěr opravíme směr proudu I_2 a dostaneme

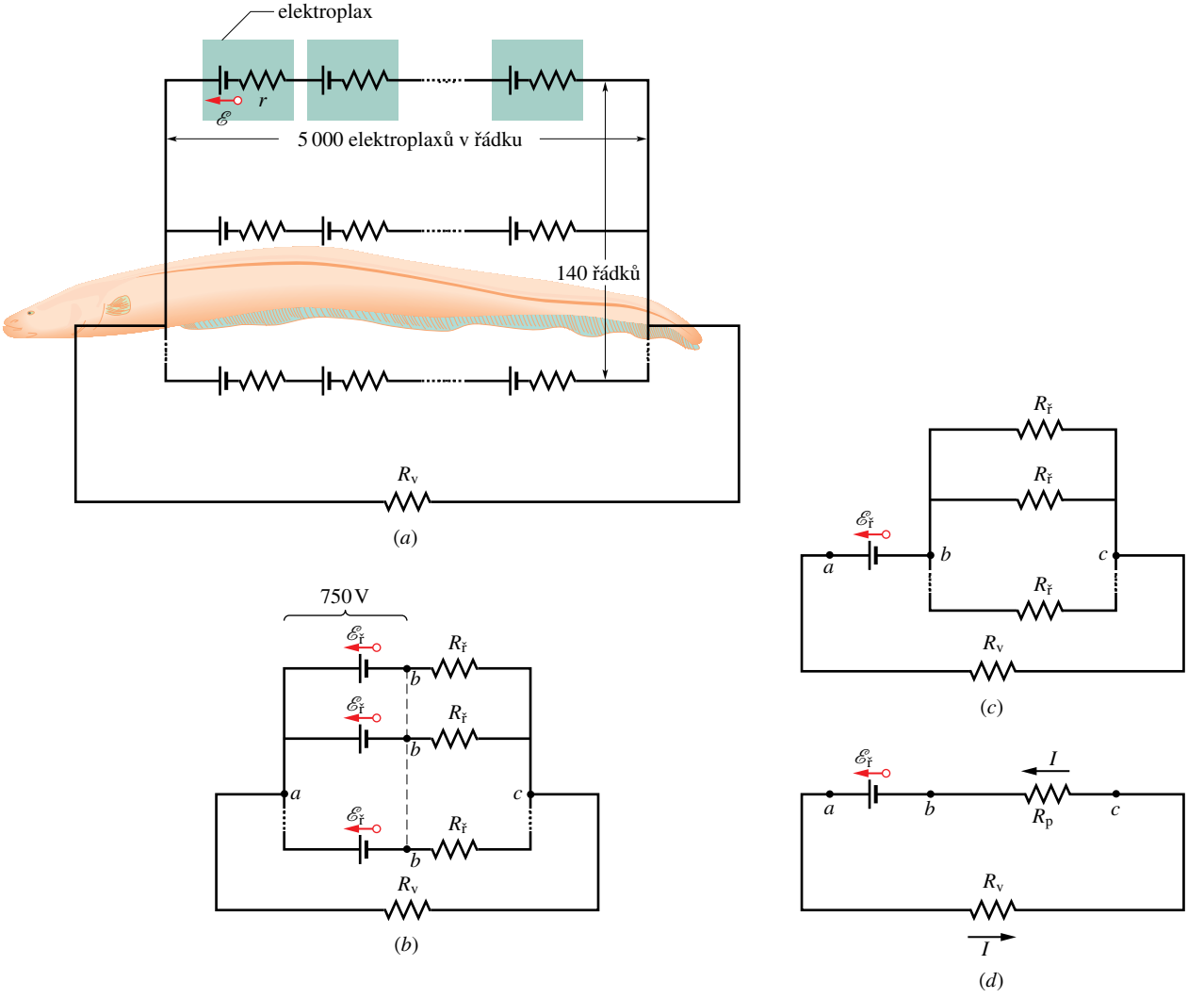
$$I_2 = 0{,}25\,\text{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 28.5

Elektrické ryby vytvářejí elektrické napětí ve zvláštních biologických buňkách nazývaných *elektroplaxy*, které jsou fyziologickými zdroji emn. Elektroplaxy jihoamerického *paúhoře elektrického* zobrazeného na fotografii na začátku této kapitoly jsou uspořádány ve 140 řádcích podél jeho těla, přičemž každý řádek obsahuje asi 5 000 elektroplaxů. Uspořádání je znázorněno na obr. 28.11a. Každý elektroplax má elektromotorické napětí $\mathscr{E} = 0{,}15\,\text{V}$ a vnitřní odpor $0{,}25\,\Omega$.

(a) Jaký proud prochází vodou od paúhořovy hlavy k ocasu, je-li odpor vody v okolí paúhoře $R_\text{v} = 800\,\Omega$?

ŘEŠENÍ: Nejprve zjednodušíme obvod na obr. 28.11a. Celkové emn 5 000 elektroplaxů v jednom řádku je součtem



Obr. 28.11 Příklad 28.5. (a) Elektrický obvod znázorňující paúhoře ve vodě. Každý elektroplax paúhoře má elektromotorické napětí $\mathscr{E}$ a vnitřní odpor r. Každý ze 140 řádků, táhnoucích se od hlavy k ocasu, obsahuje 5 000 elektroplaxů. Odpor okolní vody je R_v. (b) Elektromotorické napětí $\mathscr{E}_\text{ř}$ a odpor $R_\text{ř}$ každého řádku. (c) Elektromotorické napětí mezi body a, b je $\mathscr{E}_\text{ř}$. Mezi body b, c je 140 paralelně zapojených rezistorů $R_\text{ř}$. (d) Zjednodušený obvod s R_p nahrazující paralelní kombinaci.

jejich elektromotrických napětí $\mathscr{E}$, takže

$$\mathscr{E}_{\check{r}} = 5\,000\mathscr{E} = (5\,000)(0{,}15\ \mathrm{V}) = 750\ \mathrm{V}.$$

Celkový odpor jednoho řádku elektroplaxů je součtem vnitřních odporů 5 000 elektroplaxů,

$$R_{\check{r}} = 5\,000r = (5\,000)(0{,}25\ \Omega) = 1\,250\ \Omega.$$

Každý ze 140 stejných řádků můžeme nyní znázornit jedním zdrojem elektromotorického napětí $\mathscr{E}_{\check{r}}$ a jedním odporem $R_{\check{r}}$, jak je nakresleno na obr. 28.11b.

Elektromotorické napětí mezi bodem a a bodem b v libovolném řádku na obr. 28.11b je $\mathscr{E}_{\check{r}} = 750$ V. Protože všechny řádky jsou stejné a všechny jsou spojeny vlevo v uzlu a, mají všechny body b na obr. 28.11b stejný potenciál. Můžeme si tedy představit, že všechny body b jsou spojeny do jediného bodu b. Elektromotorické napětí mezi bodem a a tímto jediným bodem b je $\mathscr{E}_{\check{r}} = 750$ V, takže můžeme obvod překreslit do podoby na obr. 28.11c.

Mezi body b a c na obr. 28.11c je 140 rezistorů o odporu $R_{\check{r}} = 1\,250\ \Omega$ zapojených paralelně. Ekvivalentní odpor tohoto zapojení je podle rov. (28.21)

$$\frac{1}{R_{\mathrm{p}}} = \sum_{j=1}^{140} \frac{1}{R_j} = 140\frac{1}{R_{\check{r}}}$$

neboli

$$R_{\mathrm{p}} = \frac{R_{\check{r}}}{140} = \frac{(1\,250\ \Omega)}{140} = 8{,}93\ \Omega.$$

Nahradíme-li tuto paralelní kombinaci rezistorem o ekvivalentním odporu R_{p}, dostaneme zjednodušený obvod na obrázku 28.11d. Pomocí smyčkového pravidla (vyjdeme z bodu b a postupujeme proti směru otáčení hodinových ručiček) dostaneme

$$\mathscr{E}_{\check{r}} - IR_{\mathrm{v}} - IR_{\mathrm{p}} = 0.$$

Odtud vypočteme proud vodou:

$$I = \frac{\mathscr{E}_{\check{r}}}{R_{\mathrm{v}} + R_{\mathrm{p}}} = \frac{(750\ \mathrm{V})}{(800\ \Omega) + (8{,}93\ \Omega)} = \\ = 0{,}927\ \mathrm{A} \doteq 0{,}93\ \mathrm{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Je-li hlava nebo ocas paúhoře v blízkosti nějaké ryby, většina tohoto proudu projde rybou a omráčí ji nebo usmrtí.

(b) Jaký proud $I_{\check{r}}$ prochází každým řádkem elektroplaxů na obr. 28.11a?

ŘEŠENÍ: Protože jsou všechny řádky stejné, rozdělí se proud procházející vodou vně paúhoře mezi ně rovnoměrně, tedy

$$I_{\check{r}} = \frac{I}{140} = \frac{0{,}927\ \mathrm{A}}{140} = 6{,}6{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Elektrický proud procházející každým řádkem elektroplaxů je tedy malý, asi o dva řády menší než proud okolní vodou. Proto paúhoř sám sebe ani neomráčí ani nezabije, když omračuje nebo zabíjí rybu ve své blízkosti.

RADY A NÁMĚTY

Bod 28.2: *Řešení obvodů s bateriemi a rezistory*

Uvedeme dvě obecné metody použitelné pro řešení obvodů a pro výpočet neznámých proudů nebo napětí.

(1) Je-li možné obvod zjednodušit nahrazením rezistorů zapojených sériově nebo paralelně pomocí rezistorů o odpovídajících ekvivalentních odporech, udělejte to. Podaří-li se vám zjednodušit obvod na jedinou smyčku, můžete vypočítat proud procházející touto smyčkou jako v př. 28.3a. Pak se vraťte k původnímu nezjednodušenému obvodu (s původními rezistory) a vypočtěte proud nebo napětí na každém z rezistorů jako v př. 28.3b.

(2) Jestliže se obvod nedá zjednodušit na jedinou smyčku, použijte uzlové pravidlo a smyčkové pravidlo k sestavení soustavy rovnic jako v př. 28.4. Potřebujete jen tolik nezávislých rovnic, kolik je neznámých v těchto rovnicích. Potřebujete-li vypočítat proud nebo napětí na určitém rezistoru, musíte zvolit alespoň jednu smyčku tak, aby procházela tímto rezistorem; tak si zajistíte, že se hledaný proud nebo napětí objeví ve vaší soustavě rovnic.

Bod 28.3: *Co lze zvolit libovolně při řešení obvodů*

Při řešení př. 28.4 jsme několikrát volili libovolně:

(1) Libovolně jsme zvolili směry proudů na obr. 28.10.

(2) Libovolně jsme vybrali smyčky, pro které jsme psali rovnice.

(3) Libovolně jsme zvolili směr, kterým jsme procházeli smyčkami.

(4) Libovolně jsme zvolili počáteční a koncový bod při průchodu smyčkami.

Tolik libovůle často znepokojuje začátečníka v řešení obvodů, ale zkušený odborník se nezalekne. Zapamatujme si především dvě pravidla. Za prvé, každou zvolenou smyčku musíme projít celou. Za druhé, jakmile jsme jednou zvolili určitý směr některého proudu, nesmíme ho změnit, dokud nevypočítáme číselně hodnoty všech proudů. Zvolíme-li směr obráceně, znaménko minus (−) ve výsledku vás na to upozorní. Opravu provedeme jednoduše vypuštěním znaménka minus a obrácením šipky znázorňující původně zvolený směr proudu na obrázku obvodu. *Nikdy však nesmíme provést tuto opravu dříve, než vypočítáme všechny potřebné proudy a napětí* (tak jsme postupovali v př. 28.4).



Bod 28.4: *Řešení složitého obvodu s mnoha smyčkami*

Není příliš pravděpodobné, že by složitý obvod s mnoha smyčkami potřeboval řešit někdo jiný než odborník — elektrotechnik. Přesto snad čtenáře potěší, uvidí-li, že si se svými

dosavadními znalostmi může poradit s *libovolně* složitou strukturou elektrického obvodu.

Podle předchozího bodu již víme, jak převést řešení obvodu na řešení soustavy rovnic pro neznámé proudy I ve větvích, z nichž určíme napětí U na součástkách (rezistorech, bateriích, …). Každá rovnice bude popisovat jednu uzavřenou smyčku. Mohli bychom vypsat *všechny* rovnice pro *všechny* smyčky ve schématu; dostali bychom ovšem pro naše neznámé zbytečně mnoho rovnic. (Soustava by tedy byla *přeurčená*.) Rovnice by si však určitě neodporovaly — prostě by jich jen bylo zbytečně mnoho, některé by totiž byly součtem či rozdílem ostatních rovnic. Abychom vybrali úplný soubor všech N nezávislých rovnic pro N neznámých proudů, můžeme postupovat takto:

(1) Podle zadaného schématu s vodiči, rezistory a zdroji emn vytvoříme *graf*, který sice zachová všechny *uzly*, tj. body, kde se stýkají 3 nebo více vodičů, ale jeho *hrany*, tj. spojnice mezi uzly, budou pouhé úsečky, které budou nahrazovat skutečné větve, tedy jak vodiče, tak i všechny součásti původního obvodu. Na poloze libovolného uzlu na papíře samozřejmě nezáleží, pokud ovšem neměníme počet hran do něj vcházejících a přiřazení každé hrany původní větvi se součástkami. Kdybychom kolem grafu nakreslili kružnici a všechny uzly na ni přesunuli, získali bychom mnohoúhelník s mnoha diagonálami.

(2) V grafu vyznačíme libovolný úplný *strom*. Bude obsahovat *všechny* uzly, ale jen *některé* hrany, tj. takové, které by nikde nevytvořily uzavřenou smyčku. Strom je *úplný*, když mu už nejde doplnit žádnou další hranu, aniž by se vytvořila uzavřená smyčka. Pro daný graf lze vytvořit mnoho různých úplných stromů, všechny však mají stejný počet hran. Všechny také mají stejný počet N ve stromu nepoužitých hran. Ten je roven počtu neznámých proudů ve smyčkách a počtu rovnic, které pro ně nakonec získáme. Hrany tvořící strom budeme pokládat za hrany „použité“.

(3) Nyní do grafu s úplným stromem přidáme jednu z nepoužitých hran. Tím se nutně vytvoří jedna smyčka (jinak by nebyl strom úplný) a dá se dokázat, že se tím uzavře právě jedna smyčka — ne více. Této smyčce odpovídá jedna rovnice podle smyčkového pravidla z čl. 28.3. Zapíšeme ji do našeho seznamu nezávislých rovnic. Odpovídající hranu zařadíme mezi „použité“.

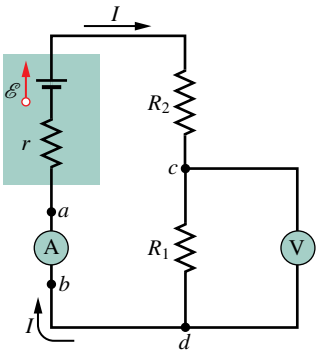
(4) Předchozí krok opakujeme tolikrát, až vyčerpáme všechny nepoužité hrany sítě. S každou dostáváme jednu rovnici; získané rovnice jsou nezávislé a právě postačují pro vyřešení naší úlohy.

28.7 AMPÉRMETR A VOLTMETR

Přístroj používaný k měření proudu se nazývá **ampérmetr**. Abychom mohli změřit proud ve vodiči, musíme obvod přerušit a vložit ampérmetr, takže proud prochází měřicím přístrojem (obr. 28.12).

Je důležité, aby odpor R_A ampérmetru byl velmi malý ve srovnání s ostatními odpory v obvodu. V opačném případě by přítomnost ampérmetru zmenšila měřený proud.

Přístroj používaný k měření napětí (rozdílu potenciálů) se nazývá **voltmetr**. Při měření napětí mezi dvěma body obvodu připojujeme voltmetr mezi tyto body a měřený obvod nepřerušujeme (obr. 28.12).



Obr. 28.12 Jednoduchý obvod znázorňující zapojení ampérmetru a voltmetru.

Odpor voltmetru R_V musí být mnohem větší než odpor kteréhokoli prvku obvodu, k němuž je voltmetr připojen. V opačném případě by proud tekoucí měřicím přístrojem již nebyl zanedbatelný a zmenšil by měřené napětí.

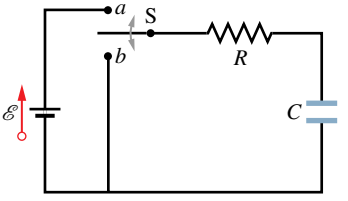
Často se můžeme setkat s měřicím přístrojem vybaveným přepínačem, který může sloužit (podle polohy přepínače) jako ampérmetr nebo jako voltmetr a obvykle i jako **ohmmetr** pro měření odporu připojeného mezi jeho svorky. Takový univerzální přístroj se nazývá **multimetr**.

28.8 OBVODY *RC*

Až dosud jsme se zabývali pouze obvody, v nichž se proud neměnil s časem. Nyní začneme studovat *proudy proměnné v čase*.

Nabíjení kondenzátoru

Kondenzátor o kapacitě C na obr. 28.13 nejprve není nabit. Abychom ho nabili, přepneme přepínač S do polohy a. Po přepnutí dostáváme uzavřený **sériový** *RC* **obvod** obsahující kondenzátor o kapacitě C, rezistor o odporu R a ideální baterii o elektromotorickém napětí $\mathscr{E}$.



Obr. 28.13 Je-li přepínač S přepnut do polohy a, kondenzátor C se *nabíjí* přes rezistor R. Dáme-li potom přepínač do polohy b, kondenzátor se *vybíjí* přes rezistor R.

Z čl. 26.2 už víme, že jakmile je přepínačem připojena baterie, začne na obou koncích kondenzátoru přecházet elektrický náboj (a tedy protékat proud) mezi elektrodou

kondenzátoru a svorkou baterie. Proud zvětšuje náboj Q na kondenzátoru a tím napětí $U_C = Q/C$ na jeho elektrodách. Když se toto napětí vyrovná s napětím na svorkách baterie (to je v našem případě rovno elektromotorickému napětí $\mathscr{E}$), proud klesne na nulu. Z rov. (26.1) ($Q = CU$) plyne, že ustálený (koncový) náboj nabitého kondenzátoru má velikost $C\mathscr{E}$.

Nyní se budeme podrobně zabývat procesem *nabíjení*. Bude nás zejména zajímat, jak se v průběhu nabíjení mění *s časem* náboj $Q(t)$ na deskách kondenzátoru, napětí $U_C(t)$ na kondenzátoru a proud $I(t)$ v obvodu. Začneme tím, že použijeme smyčkové pravidlo a projdeme obvodem od záporného pólu baterie ve směru otáčení hodinových ručiček; dostaneme tak rovnici

$$\mathscr{E} - IR - \frac{Q}{C} = 0. \tag{28.27}$$

Poslední člen na levé straně je napětí na kondenzátoru. Tento člen má záporné znaménko, protože horní deska kondenzátoru připojená ke kladnému pólu baterie má vyšší potenciál než dolní deska a průchodem kondenzátorem se tedy potenciál sníží.

Samotnou rov. (28.27) nemůžeme vyřešit, protože obsahuje dvě neznámé I a Q. Tyto veličiny však nejsou nezávislé, protože pro ně platí

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}. \tag{28.28}$$

Dosazením za proud I do rov. (28.27) obdržíme

$$R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = \mathscr{E} \quad \text{(rovnice pro nabíjení kondenzátoru).} \tag{28.29}$$

Tato diferenciální rovnice popisuje časovou změnu náboje Q kondenzátoru na obr. 28.13. Řešit tuto rovnici znamená najít funkci času $Q(t)$, která splňuje tuto rovnici a splňuje také počáteční podmínku, že na počátku byl kondenzátor nenabitý: $Q = 0$ pro $t = 0$.

Později ukážeme, že řešení rov. (28.29) je

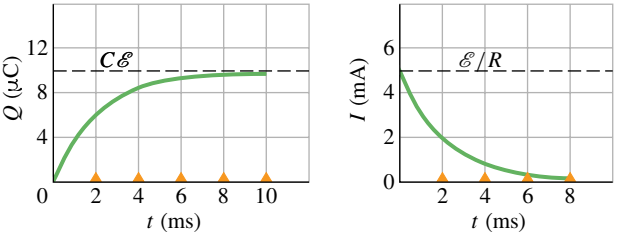
$$Q = C\mathscr{E}(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)}) \quad \text{(náboj při nabíjení kondenzátoru).} \tag{28.30}$$

(Zde e je základ přirozených logaritmů, $\mathrm{e} = 2{,}718\ldots$, a nikoli elementární náboj e.) Rov. (28.30) opravdu vyhovuje našim počátečním podmínkám. Pro $t = 0$ je exponenciální člen $\mathrm{e}^{-t/(RC)}$ roven jedné, takže náboj Q je roven nule. Pro $t \to \infty$ (tj. prakticky vzato po dostatečně dlouhé době) je člen $\mathrm{e}^{-t/(RC)}$ roven nule a rovnice dává správnou hodnotu ustáleného náboje kondenzátoru, a to $Q = C\mathscr{E}$. Na obr. 28.14a je graf funkce $Q(t)$ při nabíjení kondenzátoru.

Derivováním náboje $Q(t)$ podle času dostaneme časový průběh proudu při nabíjení kondenzátoru

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathscr{E}}{R}\mathrm{e}^{-t/(RC)} \quad \text{(proud při nabíjení kondenzátoru).} \tag{28.31}$$

Graf funkce $I(t)$ při nabíjecím procesu je na obr. 28.14b. Počáteční hodnota proudu je $\mathscr{E}/R$ a klesá postupně k nule, jak se kondenzátor nabíjí. Z této počáteční hodnoty proudu můžeme také usoudit, že v okamžiku $t = 0$ se kondenzátor chová jako vodič se zanedbatelným odporem.



Obr. 28.14 (a) Závislost náboje kondenzátoru na čase podle rov. (28.30). Je vidět, jak se kondenzátor z obr. 28.13 postupně nabíjí. (b) Závislost nabíjecího proudu na čase podle rov. (28.31). Nabíjecí proud postupně klesá k nule. Křivky jsou nakresleny pro hodnoty $R = 2\,000\,\Omega$, $C = 1\,\mu\mathrm{F}$, $\mathscr{E} = 10\,\mathrm{V}$. Malé trojúhelníčky vymezují intervaly o délce časové konstanty $\tau_C = RC$.

Pomocí rov. (26.1) ($Q = CU$) a rov. (28.30) vypočítáme časový průběh napětí na kondenzátoru během nabíjení

$$U_C = \frac{Q}{C} = \mathscr{E}(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)}) \quad \text{(napětí při nabíjení kondenzátoru).} \tag{28.32}$$

Pro $t = 0$ je $U_C = 0$ a pro $t \to \infty$, kdy je kondenzátor úplně nabit, je $U_C = \mathscr{E}$.

Časová konstanta

Součin RC v exponenciálních funkcích v rov. (28.30), (28.31) a (28.32) má rozměr času (jednoduše to plyne z toho, že argument exponenciální funkce musí být bezrozměrový), tedy $(1\,\Omega)(1\,\mathrm{F}) = 1\,\mathrm{s}$. Součin RC se nazývá **časová konstanta sériového RC obvodu** a označuje se symbolem τ_C:

$$\tau_C = RC \quad \text{(časová konstanta).} \tag{28.33}$$

Z rov. (28.30) plyne, že v okamžiku $t = \tau_C$ se náboj původně nenabitého kondenzátoru zvětšil na hodnotu

$$Q = C\mathscr{E}(1 - \mathrm{e}^{-1}) \doteq 0{,}63C\mathscr{E}. \tag{28.34}$$

Řečeno slovně, během prvního intervalu o délce časové konstanty τ_C se náboj zvětšil z nuly asi na 63 % své koncové hodnoty $C\mathscr{E}$. Malé trojúhelníčky na časové ose na obr. 28.14 vyznačují intervaly o délce jedné časové konstanty během nabíjení kondenzátoru. Nabíjecí doba pro RC obvody se často udává pomocí veličiny τ_C: čím delší je τ_C, tím delší je nabíjecí doba.

Vybíjení kondenzátoru

Nyní budeme předpokládat, že kondenzátor na obr. 28.13 je již nabit na napětí U_0, které se rovná elektromotorickému napětí $\mathscr{E}$ baterie. V okamžiku $t = 0$ přepneme spínač S z polohy a do polohy b, takže se kondenzátor začne *vybíjet* přes rezistor R. Jak se mění náboj kondenzátoru $Q(t)$ a vybíjecí proud $I(t)$ tekoucí kondenzátorem a rezistorem v závislosti na čase?

Protože nyní v obvodu není baterie, bude v rov. (28.29) $\mathscr{E} = 0$, a proto platí

$$R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0 \quad \text{(rovnice pro vybíjení kondenzátoru).} \tag{28.35}$$

Její řešení je

$$Q = Q_0 \mathrm{e}^{-t/(RC)} \quad \text{(náboj při vybíjení kondenzátoru),} \tag{28.36}$$

kde $Q_0 = CU_0$ je počáteční náboj kondenzátoru v okamžiku $t = 0$. Ověřte si dosazením, že rov. (28.36) je skutečně řešením diferenciální rovnice rov. (28.35).

Z rov. (28.36) plyne, že náboj Q klesá exponenciálně s časem a rychlost poklesu je určena časovou konstantou $\tau_C = RC$. V okamžiku $t = \tau_C$ se náboj kondenzátoru zmenší na hodnotu $Q_0\mathrm{e}^{-1}$, tedy přibližně na 37 % své počáteční hodnoty. Je-li časová konstanta větší, je vybíjecí doba delší.

Derivováním rov. (28.36) podle času odvodíme vztah pro proud při vybíjení kondenzátoru

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{Q_0}{RC}\right)\mathrm{e}^{-t/(RC)} \quad \text{(proud při vybíjení kondenzátoru).} \tag{28.37}$$

Proud také klesá exponenciálně, rychlost poklesu je opět určena časovou konstantou τ_C. Počáteční proud I_0 je $Q_0/(RC)$. Všimněte si, že proud I_0 se dá snadno vypočítat, jestliže pro okamžik $t = 0$ použijete smyčkové pravidlo: kondenzátor s počátečním napětím U_0 je spojen s rezistorem R, takže proud musí být $I_0 = U_0/R = (Q_0/C)/R = Q_0/(RC)$. Znaménko minus v rov. (28.37) vyjadřuje, že náboj kondenzátoru s časem klesá.

Odvození rov. (28.30)

Abychom mohli řešit rov. (28.29), přepíšeme ji nejprve do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{RC} = \frac{\mathscr{E}}{R}. \tag{28.38}$$

Obecné řešení této diferenciální rovnice má tvar

$$Q = Q_\mathrm{p} + K\mathrm{e}^{-at}, \tag{28.39}$$

kde Q_p je její *partikulární řešení*, K je konstanta, která se určí z počátečních podmínek, a $a = 1/(RC)$ je koeficient u proměnné Q v rov. (28.38). Abychom vypočetli Q_p, položíme v rov. (28.38) $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$ (to odpovídá koncovému stavu, kdy už se kondenzátor dále nenabíjí a jeho náboj se nemění). Tím obdržíme

$$Q_\mathrm{p} = C\mathscr{E}. \tag{28.40}$$

Abychom určili K, dosadíme rov. (28.40) do rov. (28.39), a tak dostaneme

$$Q = C\mathscr{E} + K\mathrm{e}^{-at}.$$

Po dosazení počáteční podmínky $Q = 0$ pro $t = 0$ získáme

$$0 = C\mathscr{E} + K,$$

odkud $K = -C\mathscr{E}$. Když nyní obě vypočtené hodnoty Q_p a K dosadíme do rov. (28.39), dospějeme ke konečnému výsledku

$$Q = C\mathscr{E} - C\mathscr{E}\mathrm{e}^{-t/(RC)},$$

který je totožný s rov. (28.30).

KONTROLA 5: V tabulce jsou uvedeny čtyři soubory hodnot prvků z obvodu na obr. 28.13. Uspořádejte tyto soubory sestupně podle (a) počáteční hodnoty proudu (když se spínač přepne do polohy a), (b) podle času potřebného k poklesu proudu na polovinu počáteční hodnoty.

	1	2	3	4
$\mathscr{E}$/V	12	12	10	10
R/Ω	2	3	10	5
C/μF	3	2	0,5	2

PŘÍKLAD 28.6

Kondenzátor o kapacitě C se vybíjí přes rezistor o odporu R.

(a) Vyjádřete pomocí časové konstanty $\tau_C = RC$, za jak dlouho klesne náboj kondenzátoru na polovinu své počáteční hodnoty.

ŘEŠENÍ: Náboj kondenzátoru se mění podle vztahu (28.36)

$$Q = Q_0\,\mathrm{e}^{-t/(RC)},$$

kde Q_0 je počáteční náboj. Hledáme takový okamžik t, kdy $Q = Q_0/2$, tedy

$$\tfrac{1}{2}Q_0 = Q_0\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}. \qquad (28.41)$$

Náboj Q_0 na obou stranách rovnice se zkrátí a hledaný čas t je v exponentu. Proto musíme obě strany rovnice logaritmovat (přirozený logaritmus je inverzní funkcí k exponenciální funkci) a dostaneme

$$\ln\tfrac{1}{2} = \ln(\mathrm{e}^{-t/(RC)}) = -t/(RC),$$

tj.

$$t = (-\ln\tfrac{1}{2})RC = 0{,}69RC = 0{,}69\tau_C. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Za jak dlouho klesne elektrická potenciální energie kondenzátoru na polovinu své počáteční hodnoty?

ŘEŠENÍ: Elektrická potenciální energie kondenzátoru je podle rov. (26.21) a (28.36)

$$E_\mathrm{p} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C}\,\mathrm{e}^{-2t/(RC)} = E_{\mathrm{p},0}\,\mathrm{e}^{-2t/(RC)}, \qquad (28.42)$$

kde $E_{\mathrm{p},0}$ je jeho počáteční energie. Hledáme takový čas t, kdy $E_\mathrm{p} = E_{\mathrm{p},0}/2$, tedy

$$\tfrac{1}{2}E_{\mathrm{p},0} = E_{\mathrm{p},0}\,\mathrm{e}^{-2t/(RC)}.$$

Člen $E_{\mathrm{p},0}$ se zkrátí a logaritmováním obou stran rovnice dostaneme

$$\ln\tfrac{1}{2} = -2t/(RC),$$

tj.

$$t = -RC\,\frac{\ln\frac{1}{2}}{2} = 0{,}35RC = 0{,}35\tau_C. \quad \text{(Odpověď)}$$

Náboj kondenzátoru tedy klesne na polovinu své počáteční hodnoty za delší dobu ($0{,}69\tau_C$) než elektrická potenciální energie kondenzátoru ($0{,}35\tau_C$). Nepřekvapil vás tento výsledek?

(c) Jak rychle (tj. s jakým výkonem P_R) se v rezistoru vyvíjí teplo během procesu vybíjení? Jak rychle (tj. s jakým výkonem P_C) se při vybíjení zmenšuje elektrická potenciální energie kondenzátoru?

ŘEŠENÍ: Vybíjecí proud je dán rov. (28.37). Pomocí vztahu (27.22) ($P = I^2R$) dostaneme

$$P_R = I^2R = \left(-\frac{Q_0}{RC}\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}\right)^2 R = \\ = \frac{Q_0^2}{RC^2}\,\mathrm{e}^{-2t/(RC)}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Elektrická potenciální energie kondenzátoru se zmenšuje rychlostí $P_C = \mathrm{d}E_\mathrm{p}/\mathrm{d}t$. Pomocí rov. (28.42) dostaneme

$$P_C = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_{\mathrm{p},0}\,\mathrm{e}^{-2t/(RC)}) = -\frac{2E_{\mathrm{p},0}}{RC}\,\mathrm{e}^{-2t/(RC)}$$

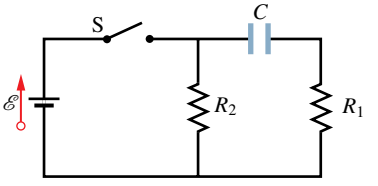
a po dosazení $E_{\mathrm{p},0} = Q_0^2/2C$ vyjde

$$P_C = -\frac{Q_0^2}{RC^2}\,\mathrm{e}^{-2t/(RC)}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že $P_C + P_R = 0$, což znamená, že elektrická potenciální energie kondenzátoru je v rezistoru zcela disipována.

PŘÍKLAD 28.7

Obvod na obr. 28.15 se skládá z ideální baterie o elektromotorickém napětí $\mathscr{E} = 12\,\mathrm{V}$, dvou rezistorů o odporech $R_1 = 4{,}0\,\Omega$, $R_2 = 6{,}0\,\Omega$ a z původně nenabitého kondenzátoru o kapacitě $C = 6{,}0\,\mu\mathrm{F}$. V okamžiku $t = 0$ je obvod uzavřen sepnutím spínače S.



Obr. 28.15 Příklad 28.7. Po sepnutí spínače se obvod uzavře a baterie začne nabíjet kondenzátor.

(a) Jaké je napětí na deskách kondenzátoru v okamžiku $t = 2{,}0\tau_C$?

ŘEŠENÍ: Kondenzátor na obr. 28.15 se nabíjí přes rezistor R_1 z baterie o elektromotorickém napětí $\mathscr{E}$, tedy stejně jako v obvodu na obr. 28.13 (rezistor R_2 nemá na nabíjení vliv). Napětí U_C na kondenzátoru můžeme tedy vypočítat pomocí rov. (28.32), pouze místo R dosadíme R_1, tedy

$$U_C = \mathscr{E}(1 - \mathrm{e}^{-t/(R_1C)}).$$

Dosadíme-li $t = 2{,}0\tau_C = 2{,}0R_1C$ a další číselné hodnoty, dostaneme

$$U_C = (12\,\mathrm{V})\big(1 - \mathrm{e}^{-2{,}0R_1C/(R_1C)}\big) = \\ = 12\,\mathrm{V}\big(1 - \mathrm{e}^{-2{,}0}\big) = 10\,\mathrm{V}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká jsou v okamžiku $t = 2{,}0\tau_C$ napětí U_{R_1} a U_{R_2} na rezistorech R_1 a R_2? Jak se tato napětí mění (zvětšují se, zmenšují se, nebo zůstávají stejná), když se kondenzátor nabíjí?

ŘEŠENÍ: Použijeme smyčkové pravidlo na velkou smyčku na obr. 28.15; projdeme-li jí ve směru otáčení hodinových ručiček od záporného pólu baterie, dostaneme rovnici

$$\mathscr{E} - U_C - U_{R_1} = 0. \qquad (28.43)$$

V části (a) jsme vypočítali, že v okamžiku $t = 2{,}0\tau_C$ je napětí na kondenzátoru $U_C = 10\,\mathrm{V}$. Dosadíme-li ještě $\mathscr{E} = 12\,\mathrm{V}$, máme výsledek

$$U_{R_1} = 2{,}0\,\mathrm{V}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V průběhu nabíjení kondenzátoru zůstává emn baterie $\mathscr{E}$ konstantní a napětí U_C na kondenzátoru se zvyšuje. Přepíšeme-li rov. (28.43) do tvaru $U_{R_1} = \mathscr{E} - U_C$, vidíme, že napětí U_{R_1} musí při nabíjení klesat.

Nyní použijeme smyčkové pravidlo pro levou smyčku na obr. 28.15a; projdeme-li jí také ve směru otáčení hodinových ručiček od záporného pólu baterie, obdržíme

$$\mathscr{E} - U_{R_2} = 0,$$

tedy

$$U_{R_2} = \mathscr{E} = 12\,\mathrm{V}.$$

Napětí U_{R_2} se tedy při nabíjení kondenzátoru nemění.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Elektromotorické napětí

Zdroj elektromotorického napětí (neboli zdroj emn) udržuje jisté napětí mezi svými svorkami; aby ho udržel i při odběru proudu (při zatížení), musí být schopen konat práci na nosičích náboje. Je-li $\mathrm{d}W_z$ práce, kterou zdroj vykoná při průchodu kladného náboje $\mathrm{d}Q$ vnitřkem zdroje od záporného pólu ke kladnému, je jeho elektromotorické napětí $\mathscr{E}$ (práce vztažená na jednotkový náboj) rovno

$$\mathscr{E} = \frac{\mathrm{d}W_z}{\mathrm{d}Q} \quad \text{(definice emn)}. \qquad (28.1)$$

Jednotkou emn v soustavě SI je volt, tedy stejná jednotka jako pro napětí. *Ideální zdroj* emn má nulový vnitřní odpor. Napětí na jeho svorkách je stále rovno elektromotorickému napětí $\mathscr{E}$. *Reálný zdroj* emn má nenulový vnitřní odpor. Napětí na jeho svorkách je rovno elektromotorickému napětí $\mathscr{E}$ pouze v případě, že zdrojem neprochází žádný proud.

Analýza obvodů

Procházíme-li elektrickým obvodem (smyčkou) ve zvoleném směru, platí: Při průchodu rezistorem o odporu R ve směru proudu se potenciál změní o hodnotu $-IR$, při průchodu v opačném směru o hodnotu $+IR$. Při průchodu ideálním zdrojem emn ve směru šipky znázorňující toto napětí se potenciál změní o hodnotu $+\mathscr{E}$ a při průchodu v opačném směru o hodnotu $-\mathscr{E}$.

Ze zákona zachování energie plyne smyčkové pravidlo:

Smyčkové pravidlo: *Algebraický součet úbytků napětí při průchodu libovolnou uzavřenou smyčkou je nulový.*

Ze zákona zachování elektrického náboje plyne uzlové pravidlo:

Uzlové pravidlo: *Součet proudů vstupujících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vystupujících.*

Jednoduché obvody

Proud v jednoduchém obvodu tvořeném jedinou smyčkou, kde je zapojen rezistor o odporu R a zdroj elektromotorického napětí $\mathscr{E}$ s vnitřním odporem r, je

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}. \qquad (28.4)$$

V případě ideálního zdroje emn ($r = 0$) přechází tento vztah do tvaru $I = \mathscr{E}/R$.

Výkon

Jestliže reálnou baterií o elektromotorickém napětí $\mathscr{E}$ a vnitřním odporu r protéká proud I, pak výkon P, který dodává baterie prostřednictvím nosičů náboje do zbytku celého zapojení, je

$$P = IU, \qquad (28.11)$$

kde U je napětí na svorkách baterie. Ztrátový výkon P_r (uvnitř baterie) je

$$P_r = I^2 r. \qquad (28.13)$$

Výkon zdroje emn P_{emn} (tj. rychlost, s jakou ubývá chemická energie baterie) je roven

$$P_{\mathrm{emn}} = I\mathscr{E}. \qquad (28.14)$$

Sériové zapojení rezistorů

Jsou-li rezistory zapojeny *sériově* neboli *za sebou*, prochází jimi stejný proud a celkové napětí na ně přiložené je rovno součtu napětí na jednotlivých rezistorech. Celkový odpor sériové kombinace rezistorů je

$$R_{\mathrm{s}} = \sum_{j=1}^{n} R_j \quad (n \text{ rezistorů zapojených sériově}). \qquad (28.7)$$

(I jiné součástky než rezistory je možné zapojovat sériově.)

Paralelní zapojení rezistorů

Jsou-li rezistory zapojeny *paralelně* neboli vedle sebe, je napětí na každém rezistoru stejné jako napětí přiložené k jejich kombinaci a celkový proud procházející kombinací rezistorů je roven

součtu proudů procházejících jednotlivými rezistory. Celkový odpor paralelní kombinace rezistorů je

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j} \quad (n \text{ rezistorů zapojených paralelně}). \qquad (28.21)$$

(I jiné součástky než rezistory je možné zapojovat paralelně.)

Obvody RC

Jsou-li ideální zdroj elektromotorického napětí $\mathscr{E}$, rezistor R a kondenzátor C zapojeny sériově (obr. 28.13) a spínač S je přepnut do polohy a, kondenzátor se *nabíjí*. Jeho náboj vzrůstá s časem podle vztahu

$$Q = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/(RC)}) \quad \text{(náboj při nabíjení kondenzátoru)}, \qquad (28.30)$$

kde $C\mathscr{E} = Q_0$ je ustálený (koncový) náboj a $RC = \tau_C$ je *časová konstanta sériového RC obvodu*. Při nabíjení klesá proud s časem podle vztahu

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{-t/(RC)} \quad \text{(proud při nabíjení kondenzátoru)}. \qquad (28.31)$$

Jestliže se kondenzátor vybíjí přes rezistor R, jeho náboj se zmenšuje podle vztahu

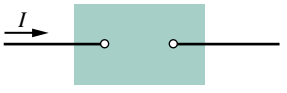
$$Q = Q_0 e^{-t/(RC)} \quad \text{(náboj při vybíjení kondenzátoru)} \qquad (28.36)$$

a proud klesá podle vztahu

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\left(\frac{Q_0}{RC}\right) e^{-t/(RC)} \quad \text{(proud při vybíjení kondenzátoru)}. \qquad (28.37)$$

OTÁZKY

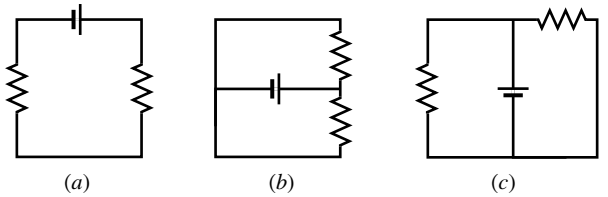
1. Na obr. 28.16 je znázorněn proud I procházející baterií. V následující tabulce jsou uvedeny čtyři soubory hodnot proudu I, emn baterie $\mathscr{E}$, jejího vnitřního odporu r a polarita svorek baterie. Uspořádejte tyto soubory sestupně podle rychlosti přenosu energie (příkonu) od baterie k nosičům náboje.



Obr. 28.16 Otázka 1

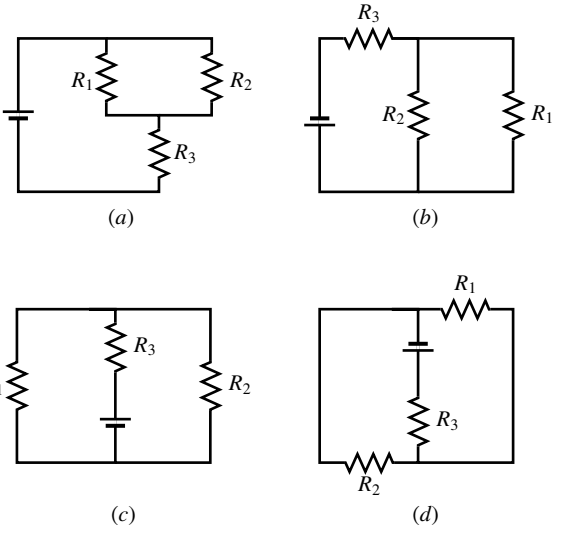
	$\mathscr{E}$	r	I	POLARITA
(1)	$15\mathscr{E}_1$	0	I_1	+ vlevo
(2)	$10\mathscr{E}_1$	0	$2I_1$	+ vlevo
(3)	$10\mathscr{E}_1$	0	$2I_1$	− vlevo
(4)	$10\mathscr{E}_1$	r_1	$2I_1$	− vlevo

2. Rozhodněte, zda rezistory v obvodech na obr. 28.17 jsou zapojeny sériově, paralelně, nebo žádným z těchto způsobů.



Obr. 28.17 Otázka 2

3. (a) Jsou rezistory R_1 a R_3 v obvodu na obr. 28.18a zapojeny sériově? (b) Jsou rezistory R_1 a R_2 zapojeny paralelně? (c) Uspořádejte sestupně hodnoty ekvivalentních odporů pro všechny čtyři obvody na obr. 28.18.



Obr. 28.18 Otázky 3 a 7

4. Určete ekvivalentní odpor trojice rezistorů, je-li odpor každého z nich R a jsou-li připojeny k ideální baterii (a) sériově, (b) paralelně. (c) Je napětí na sériové kombinaci rezistorů větší, menší, nebo stejné jako napětí na paralelní kombinaci rezistorů?

5. Připojte dva rezistory R_1 a R_2 (kde $R_1 > R_2$) k baterii, nejprve každý zvlášť, potom oba sériově a nakonec oba paralelně. Uspořádejte tato zapojení sestupně podle velikosti proudu procházejícího baterií.

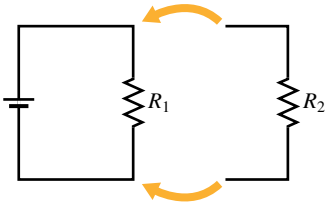
6. Dva rezistory jsou připojeny k baterii. (a) Při jakém zapojení (sériovém nebo paralelním) je stejné napětí na každém rezistoru i na ekvivalentním rezistoru? (b) Při jakém zapojení teče stejně velký proud každým rezistorem i ekvivalentním rezistorem?

7. (a) Je-li v obvodu na obr. 28.18a $R_1 > R_2$, je napětí na rezistoru R_2 větší, menší, nebo stejné jako napětí na rezistoru R_1? (b) Je proud procházející rezistorem R_2 větší, menší, nebo stejný jako proud procházející rezistorem R_1?

8. K baterii nejprve připojíme samotný rezistor R_1. Potom k němu připojíme paralelně další rezistor R_2. Rozhodněte, zda se po připojení rezistoru R_2 zvětší, zmenší, nebo nezmění (a) napětí na rezistoru R_1, (b) proud I_1 rezistorem R_1. (c) Je odpor R_{12} ekvivalentní odporu paralelně zapojených rezistorů R_1, R_2 větší, menší, nebo stejný jako R_1? (d) Je celkový proud kombinací rezistorů R_1 a R_2 větší, menší, nebo stejný ve srovnání s původním proudem rezistorem R_1?

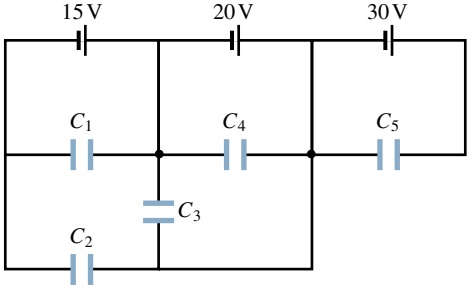
9. K baterii nejprve připojíme samotný rezistor R_1. Potom do obvodu zapojíme sériově další rezistor R_2. Rozhodněte, zda se po připojení rezistoru R_2 (a) napětí na rezistoru R_1, (b) proud I_1 rezistorem R_1 zvětší, zmenší, nebo nezmění. (c) Je odpor R_{12} sériově zapojených rezistorů větší, menší, nebo stejný jako R_1?

10. K obvodu na obr. 28.19 připojíme další větev s rezistorem R_2. (a) Jak se změní rychlost disipace elektrické energie v rezistoru R_1: zvětší se, zmenší se, nebo zůstane stejná? (b) Jak se změní rychlost, jakou baterie dodává elektrickou energii do obvodu: zvýší se, sníží se, nebo zůstane beze změny? (c) Opakujte úlohy (b) a (c), je-li rezistor R_2 připojen sériově k rezistoru R_1.



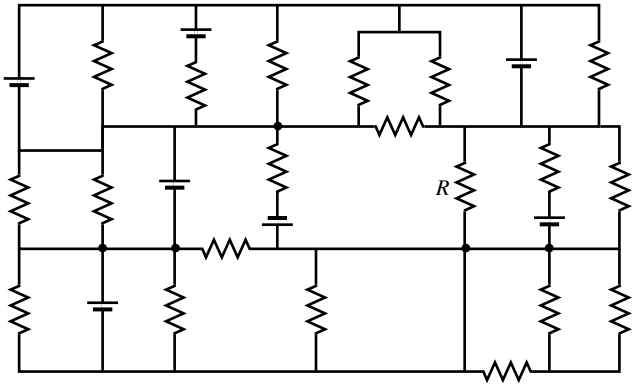
Obr. 28.19 Otázka 10

11. Určete napětí na každém z kondenzátorů na obr. 28.20.



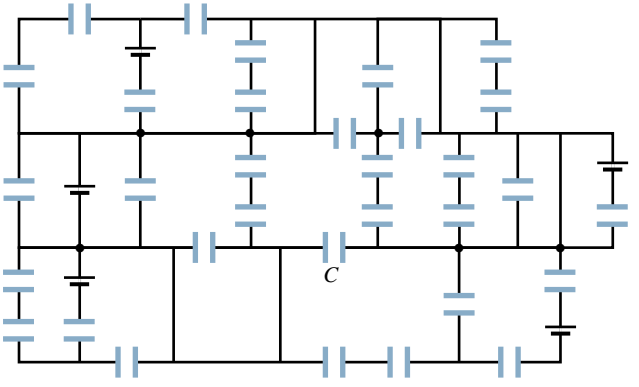
Obr. 28.20 Otázka 11

12. *Labyrint rezistorů.* Všechny rezistory na obr. 28.21 mají odpor 4,0 Ω, všechny baterie jsou ideální a mají elektromotorické napětí $\mathscr{E} = 4{,}0$ V. Jaký proud prochází rezistorem R? (Podaří-li se vám objevit v labyrintu vhodnou smyčku, dokážete na otázku odpovědět okamžitě a skoro bez počítání.)



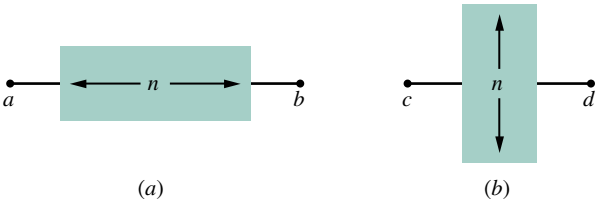
Obr. 28.21 Otázka 12

13. *Labyrint kondenzátorů.* Všechny kondenzátory na obr. 28.22 mají kapacitu 6,0 μF, všechny baterie jsou ideální a mají elektromotorické napětí $\mathscr{E} = 10$ V. Jaký náboj má kondenzátor C? (Podaří-li se vám objevit v labyrintu vhodnou smyčku, dokážete na otázku odpovědět okamžitě a skoro bez počítání.)



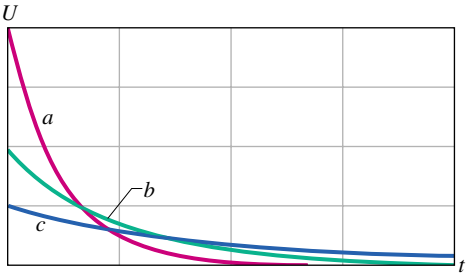
Obr. 28.22 Otázka 13

14. Mezi uzly a, b obvodu na obr. 28.23a máte zapojit za sebou n stejných reálných baterií: $n = 14, 12, 16$. Uspořádejte tato zapojení sestupně podle (a) celkového emn mezi uzly a a b, (b) celkového odporu mezi uzly a, b. Mezi uzly c, d obvodu na obr. 28.23b máte zapojit tyto baterie vedle sebe. Opět uspořádejte zapojení sestupně podle (c) celkového emn mezi uzly c a d, (d) celkového odporu mezi uzly c, d.



Obr. 28.23 Otázka 14

15. Na obr. 28.24 je nakreslen průběh napětí $U(t)$ pro tři kondenzátory, které se vybíjejí (každý samostatně) přes stejný rezistor R. Uspořádejte křivky a, b, c sestupně podle kapacit kondenzátorů.

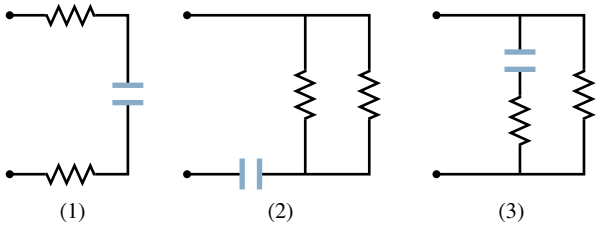


Obr. 28.24 Otázka 15

16. V tabulce je uveden počáteční náboj kondenzátoru a odpor rezistoru, přes nějž se kondenzátor vybíjí. Uspořádejte uvedené možnosti 1, 2, 3 sestupně podle (a) proudu procházejícího rezistorem na počátku vybíjení, (b) doby potřebné k poklesu náboje kondenzátoru na polovinu.

	1	2	3
Počáteční náboj	$12Q$	$12Q$	$6Q$
Odpor	$2R$	$3R$	R

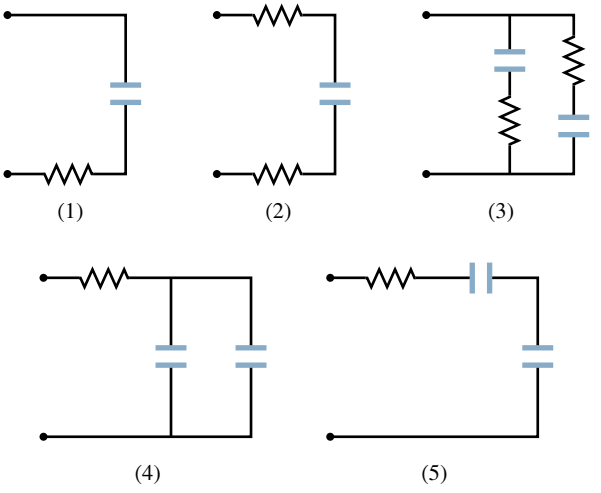
17. Na obr. 28.25 jsou nakresleny tři části elektrických obvodů,



Obr. 28.25 Otázka 17

které postupně připojujeme ke stejné baterii pomocí spínače S podobně jako na obr. 28.13. Všechny rezistory a kondenzátory jsou stejné. Uspořádejte části obvodů sestupně podle (a) konco-vého (ustáleného) náboje kondenzátoru, (b) doby potřebné k tomu, aby náboj kondenzátoru dosáhl 50 % své koncové hodnoty.

18. Na obr. 28.26 je nakresleno pět částí elektrických obvodů, které postupně připojujeme ke stejné 12 V baterii pomocí spínače S jako na obr. 28.13. Všechny rezistory a kondenzátory jsou stejné. Uspořádejte části obvodů sestupně podle doby potřebné k nárůstu napětí na kondenzátorech na 50 % koncové hodnoty.



Obr. 28.26 Otázky 18 a 19

19. Uspořádejte pět částí obvodů z otázky 18 sestupně podle napětí, které bude na libovolném rezistoru, když napětí na libovolném kondenzátoru dosáhne 4 V.

20. (a) Závisí doba potřebná k tomu, aby náboj kondenzátoru v RC obvodu dosáhl určitého procenta své ustálené hodnoty, na velikosti přiloženého emn? (b) Závisí doba potřebná k tomu, aby se náboj kondenzátoru změnil o ΔQ, na velikosti přiloženého emn? (c) Závisí množství náboje potřebné k úplnému nabití kondenzátoru na vnitřním odporu baterie, která ho nabíjí?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 28.5 Napětí v obvodech

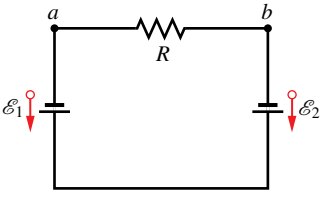
1C. Obyčejná baterie do kapesní svítilny může dodat asi 2,0 W·h energie, než se úplně vybije. (a) Kolik by stálo svícení 100 W žárovkou po dobu 8 h, kdybychom ji napájeli takovými bateriemi, pokud jedna baterie stojí 12 Kč? (b) Kolik stojí svícení žárovkou připojenou na veřejnou elektrickou síť, jestliže si elektrárna účtuje 1,75 Kč za kilowatthodinu?

2C. (a) Jakou práci vykoná ideální baterie o elektromotorickém napětí $\mathscr{E} = 12{,}0$ V na elektronech, které jí procházejí od kladného pólu k zápornému? (b) Jaký je výkon baterie, projde-li baterií $3{,}4{\cdot}10^{18}$ elektronů za sekundu?

3C. Akumulátorová baterie o $\mathscr{E} = 6{,}0$ V zapojená do obvodu způsobí, že obvodem prochází po dobu 6,0 min proud 5,0 A. O kolik se tím sníží chemická energie baterie?

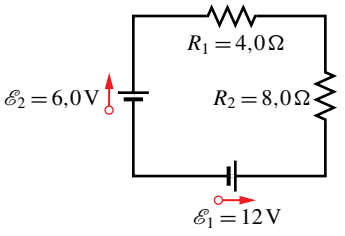
4C. Automobilová baterie o $\mathscr{E} = 12$ V má počáteční náboj 120 A·h. Kolik hodin může dodávat energii při výkonu 100 W? Předpokládejte (nepříliš realisticky), že napětí na svorkách baterie zůstává konstantní, dokud se baterie úplně nevybije.

5C. Na obr. 28.27 je $\mathscr{E}_1 = 12$ V, $\mathscr{E}_2 = 8$ V. (a) Jaký je směr proudu v rezistoru? (b) Která baterie koná kladnou práci? (c) Má vyšší potenciál bod a, nebo bod b?



Obr. 28.27
Cvičení 5

6C. Předpokládejte, že baterie na obr. 28.28 mají zanedbatelný vnitřní odpor. Určete (a) proud v obvodu, (b) výkon disipovaný každým rezistorem, (c) výkon každé baterie i to, zda energii dodává, nebo přijímá.



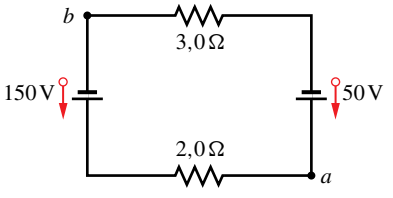
Obr. 28.28
Cvičení 6

7C. Vodič o odporu 5,0 Ω je připojen k baterii o elektromotorickém napětí $\mathscr{E} = 2{,}0\,\mathrm{V}$ a vnitřním odporu 1,0 Ω. (a) Jaké množství chemické energie se přemění na energii elektrickou za 2,0 min? (b) Kolik tepla se za 2,0 min vyvine ve vodiči? (c) Vysvětlete rozdíl mezi odpověďmi na otázku (a) a (b).

8C. V obvodu na obr. 28.4a je $\mathscr{E} = 2{,}0\,\mathrm{V}$ a $r = 100\,\Omega$. Nakreslete do jednoho grafu, jak závisí na velikosti odporu R v intervalu 0 až 500 Ω (a) proud, (b) napětí na rezistoru R. (c) Nakreslete další graf tak, že pro danou hodnotu R vynásobíte spolu proud a napětí z grafů (a), (b). Co vyjadřuje graf z části (c)?

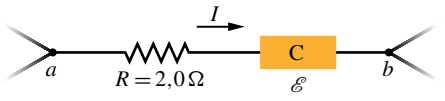
9C. Automobilová baterie s emn $\mathscr{E} = 12\,\mathrm{V}$ a vnitřním odporem 0,040 Ω se nabíjí proudem 50 A. (a) Jaké je napětí na jejích svorkách? (b) Jakou rychlostí je elektrická energie disipována uvnitř baterie v teplo? (c) Jakou rychlostí se elektrická energie přeměňuje v chemickou energii? (d) Jak by se změnila odpověď na otázky (a) a (b), kdyby byla baterie použita jako zdroj proudu 50 A pro startér motoru?

10C. V obvodu na obr. 28.29 má bod a potenciál 100 V. Jaký je potenciál bodu b?



Obr. 28.29
Cvičení 10

11C. Úsek obvodu ab na obr. 28.30 spotřebovává výkon 50 W, jestliže jím prochází proud $I = 1{,}0\,\mathrm{A}$ v naznačeném směru. (a) Jaké je napětí mezi body a a b? (b) Zdroj emn C má nulový vnitřní odpor. Jaké je jeho elektromotorické napětí $\mathscr{E}$? (c) Jaká je jeho *polarita* (tj. kde je kladná a záporná svorka zdroje)?

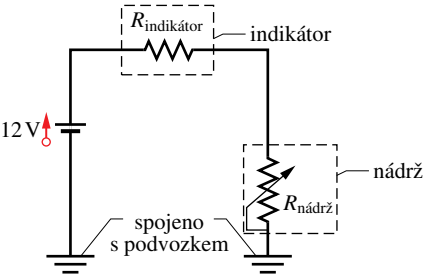


Obr. 28.30 Cvičení 11

12C. V obvodu na obr. 28.5a vypočtěte napětí na rezistoru R_2, je-li $\mathscr{E} = 12\,\mathrm{V}$, $R_1 = 3{,}0\,\Omega$, $R_2 = 4{,}0\,\Omega$, $R_3 = 5{,}0\,\Omega$.

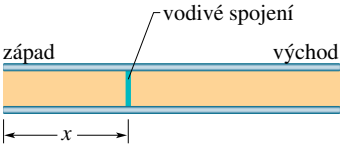
13C. V obvodu na obr. 28.6a vypočtěte napětí mezi body a, c tak, že projdete po cestě přes R, r_2 a $\mathscr{E}_2$ (viz př. 28.2).

14C. Na obr. 28.31 je schematicky nakreslena automobilová benzinová měrka. Indikátor (na přístrojové desce) má odpor 10 Ω. Plovák v nádrži je spojen s potenciometrem, jehož odpor se mění lineárně s objemem benzinu v nádrži — má hodnotu 140 Ω, je-li nádrž prázdná, a 20 Ω při plné nádrži. Vypočtěte proud v obvodu, je-li nádrž (a) prázdná, (b) naplněná do poloviny, (c) plná.



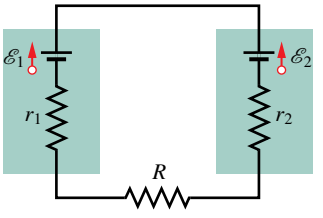
Obr. 28.31 Cvičení 14

15Ú. Deset kilometrů dlouhý podzemní kabel vede od východu na západ a je tvořen dvěma paralelními vodiči, z nichž každý má odpor 13 Ω na 1 km. Ve vzdálenosti x od západního konce dojde ke zkratu a k propojení vodičů vodivým spojem o odporu R (obr. 28.32). Celkový odpor vodičů a vodivého spoje je 100 Ω při měření z východního konce a 200 Ω při měření ze západního konce. Určete (a) vzdálenost x, (b) odpor R.



Obr. 28.32
Úloha 15

16Ú. (a) Jak velký odpor musí mít rezistor R v obvodu na obr. 28.33, má-li obvodem procházet proud 1,0 mA? Elektromotorická napětí baterií jsou $\mathscr{E}_1 = 2{,}0\,\mathrm{V}$, $\mathscr{E}_2 = 3{,}0\,\mathrm{V}$ a jejich vnitřní odpory $r_1 = r_2 = 3{,}0\,\Omega$. (b) S jakým výkonem se v rezistoru R vyvíjí teplo?



Obr. 28.33
Úloha 16

17Ú. Jednoduchou smyčkou obsahující rezistor R prochází proud 5,0 A. Jestliže do série s rezistorem R zapojíme další rezistor o odporu 2,0 Ω, proud klesne na 4,0 A. Určete odpor rezistoru R.

18Ú. Rezistor o odporu 0,10 Ω je připojen k baterii o elektromotorickém napětí $\mathscr{E} = 1{,}5\,\mathrm{V}$, tepelný výkon rezistoru má být 10 W. (a) Jaké napětí musí být na rezistoru? (b) Jaký musí být vnitřní odpor baterie?

19Ú. Zdroj elektromotorického napětí $\mathscr{E}$ napájí telekomunikační vedení o odporu R. Vypočtěte poměr výkonů disipovaných na vedení pro $\mathscr{E} = 110\,000$ V a pro $\mathscr{E} = 110$ V za předpokladu, že výkon dodávaný zdrojem je v obou případech stejný.

20Ú. Dva vodiče A, B o stejných délkách 40,0 m a stejných průměrech 2,60 mm jsou spojeny sériově a na celou sériovou kombinaci je přiloženo napětí 60,0 V. Odpory vodičů jsou 0,127 Ω a 0,729 Ω. Vypočtěte (a) hustotu proudu v každém vodiči, (b) napětí na každém vodiči. (c) Pomocí údajů v tab. 27.1 určete materiál, z něhož jsou vodiče vyrobeny.

21Ú. Startér automobilu má příliš nízké otáčky a mechanici mají rozhodnout, zda vymění startér, kabel, nebo baterii. V dílenském manuálu je uvedeno, že 12 V baterie by neměla mít větší vnitřní odpor než 0,020 Ω, startér by neměl mít větší odpor než 0,200 Ω a kabel nejvýše 0,040 Ω. Mechanici spustili startér a naměřili napětí 11,4 V na baterii, 3,0 V na kabelu a proud 50 A. Která část je vadná?

22Ú. Dvě baterie o stejném elektromotorickém napětí $\mathscr{E}$, ale o různých vnitřních odporech r_1, r_2 ($r_1 > r_2$) jsou spojeny sériově a připojeny k vnějšímu rezistoru R. (a) Určete takovou hodnotu odporu R, aby napětí na svorkách jedné baterie bylo rovno nule. (b) Která baterie to bude?

23Ú. Sluneční článek dává napětí 0,10 V, je-li k němu připojen rezistor o odporu 500 Ω, a napětí 0,15 V, je-li použit rezistor o odporu 1 000 Ω. Určete (a) vnitřní odpor, (b) emn slunečního článku. (c) Plocha slunečního článku je 5,0 cm^2, hustota toku energie dopadajícího světla (tj. výkon dopadající na jednotku plochy) je 2,0 $\mathrm{mW{\cdot}cm^{-2}}$. Jaká je účinnost článku při přeměně světelné energie v teplo ve vnějším rezistoru o odporu 1 000 Ω?

24Ú. (a) Pro obvod na obr. 28.4a dokažte, že rychlost disipace energie v rezistoru R je maximální při $R = r$. (b) Dokažte, že tento maximální výkon je $P = \mathscr{E}^2/4r$.

25Ú. Baterie o elektromotorickém napětí 2,00 V a vnitřním odporu 0,500 Ω pohání elektromotor. Ten zvedá závaží 2,00 N konstantní rychlostí 0,500 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Předpokládejte, že nedochází k žádným ztrátám energie. Vypočtěte (a) proud v obvodu, (b) napětí na svorkách motoru. (c) Vysvětlete, proč existují dvě řešení této úlohy.

26Ú. Rezistor, jehož odpor téměř nezávisí na teplotě, je zhotoven jako sériová kombinace rezistoru křemíkového a rezistoru železného. Vypočtěte odpory těchto dvou rezistorů, má-li být výsledný odpor 1 000 Ω v širokém teplotním intervalu kolem 20 °C. Potřebné údaje najdete v tab. 27.1.

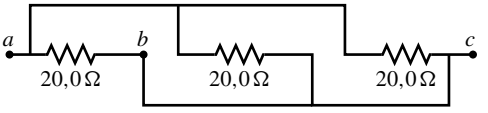
ODST. 28.6 Obvody s více smyčkami

27C. Čtyři rezistory o odporu 18,0 Ω jsou připojeny paralelně k ideální 25,0 V baterii. Jak velký proud prochází baterií?

28C. Rezistor o odporu 3,00 Ω má vzniknout spojením neznámého rezistoru a 12,0 Ω rezistoru. Jaký musí být odpor neznámého rezistoru a jak má být připojen (sériově, nebo paralelně)?

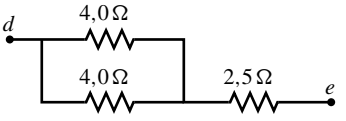
29C. Pomocí dvou rezistorů R_1, R_2 zapojených samostatně, sériově, nebo paralelně můžete dostat odpory 3,0 Ω, 4,0 Ω, 12 Ω, 16 Ω. Jaké jsou hodnoty odporů R_1, R_2?

30C. Pro obvod na obr. 28.34 najděte hodnotu ekvivalentního odporu mezi body (a) a a b, (b) a a c, (c) b a c. (*Tip*: Představte si, že k bodům a, c je připojena baterie.)



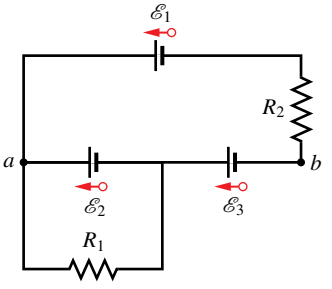
Obr. 28.34 Cvičení 30

31C. Pro obvod na obr. 28.35 najděte hodnotu ekvivalentního odporu mezi body d a e. (*Tip*: Představte si, že k bodům d, e je připojena baterie.)



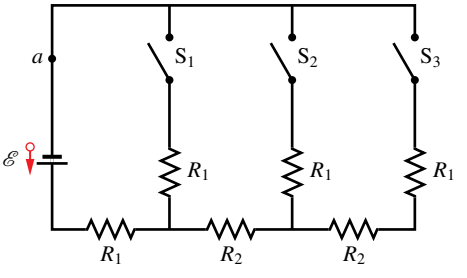
Obr. 28.35 Cvičení 31

32C. V obvodu na obr. 28.36 vypočtěte proudy procházející oběma rezistory a napětí mezi body a a b. Je dáno $\mathscr{E}_1 = 6{,}0$ V, $\mathscr{E}_2 = 5{,}0$ V, $\mathscr{E}_3 = 4{,}0$ V, $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 50\,\Omega$.



Obr. 28.36 Cvičení 32

33C. Na obr. 28.37 je obvod se třemi spínači S_1, S_2 a S_3. Vypočtěte proud v bodě a pro všechny možné kombinace poloh spínačů. Je dáno $\mathscr{E} = 120$ V, $R_1 = 20{,}0\,\Omega$, $R_2 = 10{,}0\,\Omega$, vnitřní odpor baterie je nulový.



Obr. 28.37 Cvičení 33

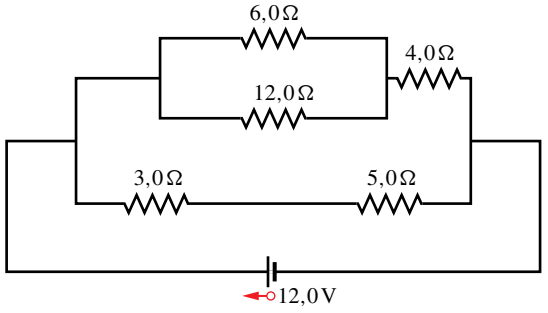
34C. Dvě žárovky o odporech R_1, R_2 ($R_1 > R_2$) jsou připojeny k baterii (a) paralelně, (b) sériově. Která žárovka svítí jasněji?

35C. V obvodu na obr. 28.7 vypočtěte napětí mezi body c a d všemi možnými způsoby volby smyček. Hodnoty emn a odporů jsou: $\mathscr{E}_1 = 4{,}0$ V, $\mathscr{E}_2 = 1{,}0$ V, $R_1 = R_2 = 10\,\Omega$, $R_3 = 5{,}0\,\Omega$.

36C. Devět měděných drátů délky l a průměru d je spojeno paralelně, takže dohromady tvoří jediný vodič o odporu R. Jaký by musel být průměr D jednoho měděného drátu téže délky l, aby měl stejný odpor?

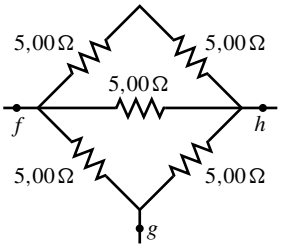
37C. Elektrický rozvod o napětí 230 V je jištěn 16 A pojistkou. Jaký největší počet 500 W reflektorů můžeme současně zapojit paralelně, aby se pojistka nepřepálila?

38C. Na obr. 28.38 je obvod s pěti rezistory připojenými k ideální baterii o elektromotorickém napětí $\mathscr{E} = 12{,}0$ V. Jaké napětí je na rezistoru o odporu 5,0 Ω?



Obr. 28.38 Cvičení 38

39Ú. Pro obvod na obr. 28.39 najděte hodnotu ekvivalentního odporu mezi body (a) f a h, (b) f a g. (*Tip*: Představte si, že k dané dvojici bodů je připojena baterie.)



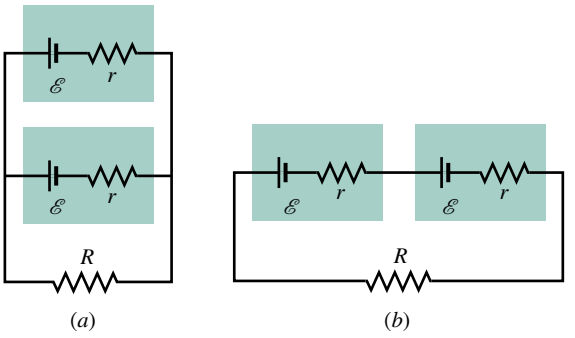
Obr. 28.39
Úloha 39

40Ú. Dva rezistory R_1, R_2 mohou být připojeny sériově, nebo paralelně k ideální baterii o elektromotorickém napětí $\mathscr{E}$. Požadujeme, aby ztrátový výkon při jejich paralelním zapojení byl pětinásobkem ztrátového výkonu při jejich sériovém zapojení. Jaký odpor má rezistor R_2, je-li $R_1 = 100\ \Omega$? (*Tip*: Existují dvě řešení.)

41Ú. Máte k dispozici rezistory o odporu 10 Ω, každý z nich má maximální ztrátový výkon 1,0 W. Kolik takových rezistorů potřebujete a jak je musíte zapojit, aby vznikl rezistor o odporu 10 Ω se ztrátovým výkonem alespoň 5,0 W?

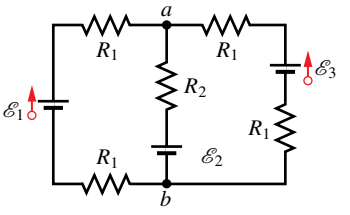
42Ú. Dvě baterie o elektromotorickém napětí $\mathscr{E}$ a vnitřním odporu r jsou připojeny paralelně k rezistoru R podle obr. 28.40a. (a) Jaký má být odpor R, aby rychlost disipace elektrické energie rezistorem byla maximální? (b) Jaká je největší rychlost disipace energie?

43Ú. (a) Vypočtěte proudy procházející ideálními bateriemi v obvodu na obr. 28.41. Hodnoty odporů a emn jsou $R_1 = 1{,}0\ \Omega$,



Obr. 28.40 Úlohy 42 a 44

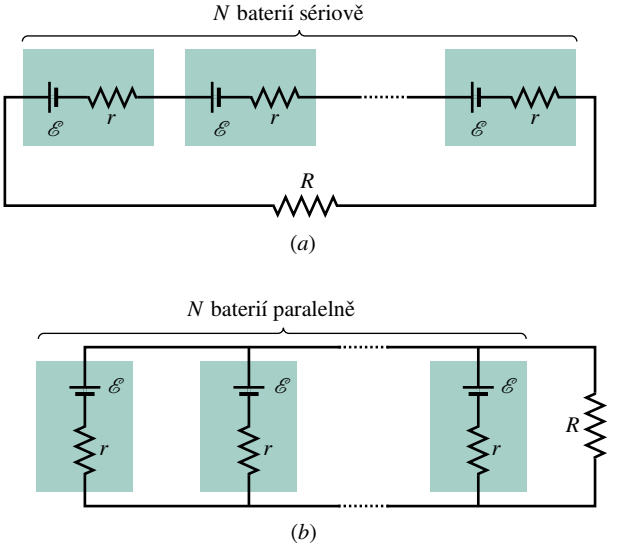
$R_2 = 2{,}0\ \Omega$, $\mathscr{E}_1 = 2{,}0$ V, $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_3 = 4{,}0$ V. (b) Vypočtěte rozdíl potenciálů $\varphi_a - \varphi_b$.



Obr. 28.41
Úloha 43

44Ú. Máte k dispozici dvě baterie o elektromotorickém napětí $\mathscr{E}$ a vnitřním odporu r. Baterie mohou být spojeny paralelně (obr. 28.40a), nebo sériově (obr. 28.40b) a připojeny k rezistoru R. (a) Odvoďte vztah pro proud rezistorem R pro obě zapojení. Bude proud větší, když (b) $R > r$, nebo (c) $R < r$?

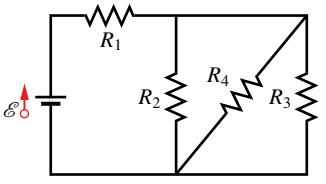
45Ú. N stejných baterií o elektromotorickém napětí $\mathscr{E}$ a vnitřním odporu r je spojeno buď sériově (obr. 28.42a), nebo paralelně (obr. 28.42b) a poté jsou připojeny k rezistoru R. Ukažte, že proud rezistorem R je stejný v obou případech, je-li $R = r$.



Obr. 28.42 Úloha 45

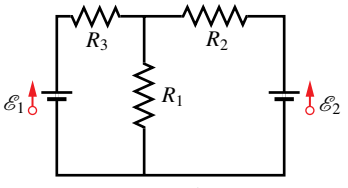
46Ú. Speciální žárovka se dvěma vlákny je konstruována na napětí 230 V a na výkony 100 W, 200 W, 300 W. Jedno vlákno se přepálilo. Žárovka potom svítí se stejnou intenzitou, je-li přepínač nastaven do polohy nejnižšího a nejvyššího výkonu, ale vůbec nesvítí, je-li přepínač v prostřední poloze. (a) Jak jsou vlákna žárovky propojena se třemi polohami přepínače? (b) Vypočtěte odpory vláken.

47Ú. (a) Vypočtěte ekvivalentní odpor rezistorové sítě na obr. 28.43. (b) Jaké proudy procházejí jednotlivými rezistory? Údaje: $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = R_3 = 50\,\Omega$, $R_4 = 75\,\Omega$, $\mathscr{E} = 6{,}0\,\mathrm{V}$, baterie je ideální.



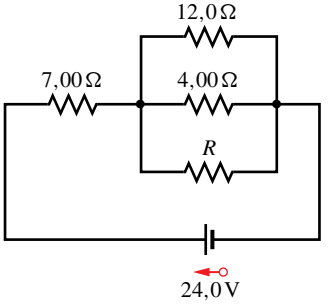
Obr. 28.43 Úloha 47

48Ú. V obvodu na obr. 28.44 je $\mathscr{E}_1 = 3{,}00\,\mathrm{V}$, $\mathscr{E}_2 = 1{,}00\,\mathrm{V}$, $R_1 = 5{,}00\,\Omega$, $R_2 = 2{,}00\,\Omega$, $R_3 = 4{,}00\,\Omega$, obě baterie jsou ideální. (a) S jakým výkonem je elektrická energie disipována v rezistorech R_1, R_2, R_3? (b) Jaký je výkon baterie 1 a 2?



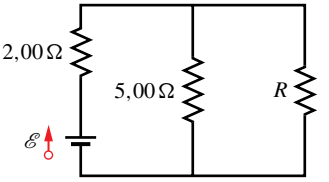
Obr. 28.44 Úloha 48

49Ú. Je dán obvod na obr. 28.45. Jaký odpor musí mít rezistor R, aby ideální baterie dodávala energii do rezistoru s výkonem (a) 60,0 W, (b) maximálně možným, (c) minimálně možným? Vypočtěte výkon v případech (b) a (c).



Obr. 28.45 Úloha 49

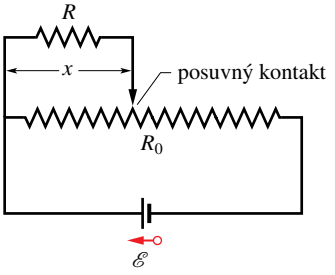
50Ú. V obvodu na obr. 28.46 má elektromotorické napětí $\mathscr{E}$ konstantní hodnotu a rezistor R má proměnný odpor. Určete jeho hodnotu tak, aby se co nejvíce zahříval. Baterie je ideální.



Obr. 28.46 Úloha 50

51Ú. Měděný drát o poloměru $a = 0{,}250\,\mathrm{mm}$ má hliníkový obal o vnějším poloměru $b = 0{,}380\,\mathrm{mm}$. (a) Celým vodičem prochází proud $I = 2{,}00\,\mathrm{A}$. Pomocí údajů v tab. 27.1 vypočtěte proud v každém materiálu. (b) Jak musí být vodič dlouhý, aby tento proud tekl při přiloženém napětí 12,0 V?

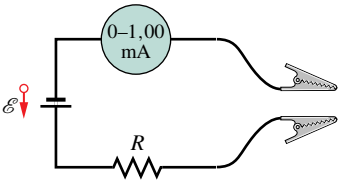
52Ú. Na obr. 28.47 je baterie připojena k potenciometru o celkovém odporu R_0. Jeho jezdec se může pohybovat od polohy $x = 0$ vlevo do polohy $x = 10\,\mathrm{cm}$ vpravo. Pohybem jezdce se mění odpor částí potenciometru vlevo a vpravo od jezdce, přičemž odpor každé části je úměrný její délce. Odvoďte vztah pro výkon disipovaný rezistorem R v závislosti na poloze x posuvného kontaktu. Nakreslete graf této funkce pro $\mathscr{E} = 50\,\mathrm{V}$, $R = 2\,000\,\Omega$, $R_0 = 100\,\Omega$.



Obr. 28.47 Úloha 52

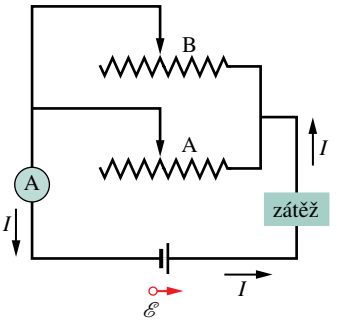
ODST. 28.7 Ampérmetr a voltmetr

53C. Jednoduchý ohmmetr na obr. 28.48 vznikne sériovým spojením baterie o napětí 1,50 V, rezistoru o odporu R a ampérmetru o rozsahu 0 až 1,00 mA. Odpor rezistoru R je takový, aby při zkratovaných svorkách přívodních kabelů ukazoval ampérmetr maximální hodnotu 1,00 mA. Jak velký odpor připojený ke svorkám způsobí výchylku ručičky ampérmetru na (a) 10 %, (b) 50 %, (c) 90 % maximální hodnoty? (d) Jaký je odpor rezistoru R, je-li odpor ampérmetru 20,0 Ω a vnitřní odpor baterie je zanedbatelný?



Obr. 28.48 Cvičení 53

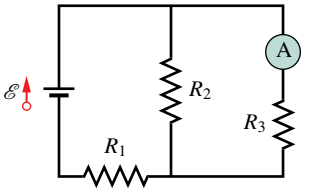
54C. K citlivému ručnímu nastavení proudu v obvodu můžete použít dva reostaty zapojené paralelně podle obr. 28.49. Předpokládejte, že celkový odpor R_1 reostatu A je dvacetkrát větší



Obr. 28.49 Cvičení 54

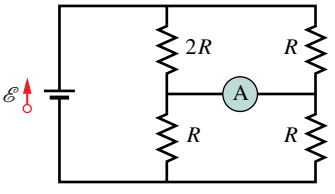
než celkový odpor R_2 reostatu B. (a) Jak budete postupovat při nastavování určitého proudu I? (b) Proč je toto zapojení dvou reostatů lepší než reostat jediný?

55Ú. (a) Určete proud, který naměří ampérmetr v obvodu na obr. 28.50, je-li $\mathscr{E} = 5{,}0\,\mathrm{V}$, baterie je ideální, $R_1 = 2{,}0\,\Omega$, $R_2 = 4{,}0\,\Omega$, $R_3 = 6{,}0\,\Omega$. (b) Dokažte, že se při vzájemné výměně ampérmetru a zdroje emn nezmění proud naměřený ampérmetrem.



Obr. 28.50 Úloha 55

56Ú. Jaký proud naměří ampérmetr v obvodu na obr. 28.51? Předpokládejte, že jeho odpor je nulový a baterie je ideální.

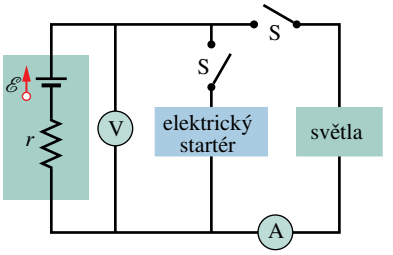


Obr. 28.51 Úloha 56

57Ú. V obvodu na obr. 28.12 je $\mathscr{E} = 5{,}0\,\mathrm{V}$, $r = 2{,}0\,\Omega$, $R_1 = 5{,}0\,\Omega$, $R_2 = 4{,}0\,\Omega$. Jaké relativní chyby (v %) se dopustíme při měření proudu, je-li odpor ampérmetru $R_\mathrm{A} = 0{,}10\,\Omega$? Předpokládejte, že voltmetr není v obvodu zapojen.

58Ú. V obvodu na obr. 28.12 je $\mathscr{E} = 3{,}0\,\mathrm{V}$, $r = 100\,\Omega$, $R_1 = 250\,\Omega$, $R_2 = 300\,\Omega$. Jaké relativní chyby (v %) se dopustíme při měření napětí na rezistoru R_1, je-li odpor voltmetru $R_\mathrm{V} = 5\,\mathrm{k}\Omega$? Vliv ampérmetru v obvodu neuvažujte.

59Ú. Když se rozsvítí světla automobilu, ampérmetr ukazuje proud 10 A a voltmetr měří napětí 12 V (obr. 28.52). Když se zapne elektrický startér, ampérmetr ukáže 8,0 A a světla poněkud pohasnou. Vnitřní odpor baterie je $0{,}050\,\Omega$ a odpor ampérmetru je zanedbatelný. (a) Jaké je emn baterie? (b) Jaký proud prochází startérem při rozsvícených světlech?

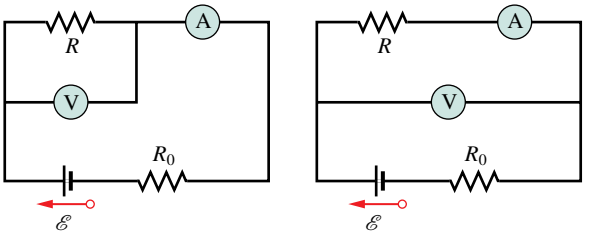


Obr. 28.52 Úloha 59

60Ú. Voltmetrem o odporu R_V a ampérmetrem o odporu R_A měříme odpor rezistoru R v obvodu na obr. 28.53a. Odpor $R = U/I$, kde U je napětí měřené voltmetrem a I je proud procházející rezistorem. Část I' proudu měřeného ampérmetrem však prochází voltmetrem, takže poměr naměřených hodnot U/I' dává odpor R', který se liší od skutečného odporu R rezistoru. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R_\mathrm{V}}.$$

Všimněte si, že pro $R_\mathrm{V} \to \infty$ je $R' \to R$.



Obr. 28.53 Úlohy 60, 61 a 62

61Ú. Viz úloha 60. Při měření odporu mohou být přístroje také zapojeny jako na obr. 28.53b. Poměr naměřeného napětí a proudu dává odpor R', který se opět liší od skutečného odporu rezistoru R. Dokažte, že platí

$$R = R' - R_\mathrm{A},$$

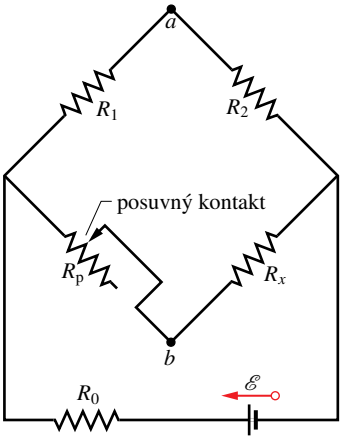
kde R_A je odpor ampérmetru. Všimněte si, že pro $R_\mathrm{A} \to 0$ je $R' \to R$.

62Ú. Viz úlohy 60 a 61. Odpory ampérmetru a voltmetru na obr. 28.53 jsou $3{,}00\,\Omega$ a $300\,\Omega$. Položte $\mathscr{E} = 12{,}0\,\mathrm{V}$ pro ideální baterii, $R_0 = 100\,\Omega$, $R = 85{,}0\,\Omega$. (a) Jaké hodnoty budou přístroje ukazovat v obou zapojeních? (b) Jaký odpor R' vypočteme z naměřených hodnot?

63Ú. Odpor termostatu R_p v obvodu na obr. 28.54 má být pomocí jezdce nastaven tak, aby potenciál bodů a, b byl stejný. (Dá se to ověřit tak, že mezi body a, b připojíme citlivý ampérmetr; mají-li stejný potenciál, ampérmetr neukáže žádný proud.) Dokažte, že je-li tato podmínka splněna, platí vztah

$$R_x = R_\mathrm{p}\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Užitím tohoto zapojení nazývaného **Wheatstoneův můstek** se tak dá změřit neznámý odpor R_x.



Obr. 28.54 Úlohy 63 a 64

64Ú. (a) Jsou-li body a, b na obr. 28.54 spojeny vodičem o odporu r, dokažte, že proud procházející vodičem je

$$I = \frac{\mathscr{E}(R_p - R_x)}{(R + 2r)(R_p + R_x) + 2R_pR_x},$$

kde $\mathscr{E}$ je emn ideální baterie a $R = R_1 = R_2$. Předpokládejte, že $R_0 = 0$. (b) Je odvozený vztah v souladu s výsledkem úlohy 63?

ODST. 28.8 Obvody *RC*

65C. Kondenzátor s počátečním nábojem Q_0 se vybíjí přes rezistor. Za jak dlouho kondenzátor ztratí (a) třetinu svého náboje, (b) dvě třetiny svého náboje (vyjádřete v násobcích časové konstanty τ_C).

66C. V sériovém RC obvodu je $\mathscr{E} = 12{,}0\,\text{V}$, $R = 1{,}40\,\text{M}\Omega$, $C = 1{,}80\,\mu\text{F}$. (a) Vypočtěte časovou konstantu. (b) Určete maximální náboj, který kondenzátor získá během nabíjení. (c) Za jak dlouho se kondenzátor nabije nábojem $16\,\mu\text{C}$?

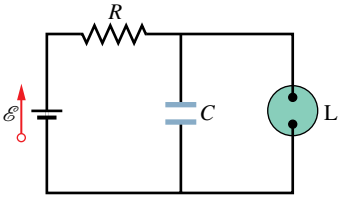
67C. Vyjádřete v násobcích časové konstanty, za jak dlouho se původně nenabitý kondenzátor v sériovém RC obvodu nabije na 99,0 % koncového (ustáleného) náboje.

68C. Rezistor o odporu $15{,}0\,\text{k}\Omega$ a kondenzátor jsou zapojeny do série a potom je k nim přiloženo napětí 12,0 V. Napětí na kondenzátoru se za $1{,}30\,\mu\text{s}$ zvýší na 5,00 V. (a) Vypočtěte časovou konstantu obvodu. (b) Vypočtěte kapacitu kondenzátoru.

69Ú. Rezistor o odporu $3\,\text{M}\Omega$ a kondenzátor o kapacitě $1{,}00\,\mu\text{F}$ jsou spojeny sériově s ideální baterií o elektromotorickém napětí $\mathscr{E} = 4{,}00\,\text{V}$. Za 1,00 s po připojení baterie vypočtěte (a) rychlost nárůstu náboje kondenzátoru, (b) rychlost nárůstu elektrické potenciální energie kondenzátoru, (c) rychlost disipace energie v rezistoru, (d) rychlost, jakou baterie dodává energii do obvodu.

70Ú. V okamžiku $t = 0$ je sepnut spínač a kondenzátor o počátečním napětí 100 V se začne vybíjet přes rezistor. V okamžiku $t = 10{,}0\,\text{s}$ je napětí na kondenzátoru 1,00 V. (a) Jaká je časová konstanta obvodu? (b) Jaké bude napětí na kondenzátoru v čase $t = 17{,}0\,\text{s}$?

71Ú. Na obr. 28.55 je elektrický obvod zábleskové lampy, používané např. k označení opravovaných úseků dálnice. Výbojka L (zanedbatelné kapacity) je připojena paralelně ke kondenzátoru C sériového RC obvodu. Výbojkou prochází proud pouze tehdy, když napětí na ní dosáhne vybíjecího napětí U_L. Kondenzátor se pak přes ni vybije (předpokládejme, že úplně, tj. na nulové napětí) a ta zableskne. Předpokládejte, že zableskne dvakrát za sekundu. Jaký odpor R musí mít rezistor, je-li vybíjecí napětí $U_L = 72{,}0\,\text{V}$, emn ideální baterie $\mathscr{E} = 95{,}0\,\text{V}$ a kapacita kondenzátoru $C = 0{,}150\,\mu\text{F}$?



Obr. 28.55 Úloha 71

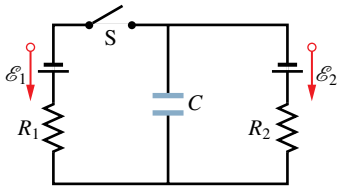
72Ú. Kondenzátor o kapacitě $1{,}0\,\mu\text{F}$ a počáteční energii 0,50 J se vybíjí přes rezistor o odporu $1{,}0\,\text{M}\Omega$. (a) Jaký je počáteční náboj kondenzátoru? (b) Jaký proud prochází rezistorem v okamžiku, kdy vybíjení kondenzátoru začíná? (c) Vyjádřete napětí na kondenzátoru U_C a napětí na rezistoru U_R jako funkci času. (d) Vypočtěte rychlost disipace energie v rezistoru jako funkci času.

73Ú. Napětí na deskách částečně probitého kondenzátoru (tj. takového, že náboj může procházet z jedné desky na druhou) o kapacitě $2{,}0\,\mu\text{F}$ klesne na čtvrtinu své počáteční hodnoty za 2,0 s. Jaký je odpor vodivého spojení desek?

74Ú. Původně nenabitý kondenzátor o kapacitě C se plně nabije pomocí baterie o konstantním elektromotorickém napětí $\mathscr{E}$ zapojeném do série s rezistorem R. (a) Ukažte, že koncová energie nabitého kondenzátoru je rovna polovině energie dodané zdrojem emn. (b) Integrováním výrazu I^2R podle času ukažte, že energie disipovaná rezistorem je také rovna polovině energie dodané zdrojem emn.

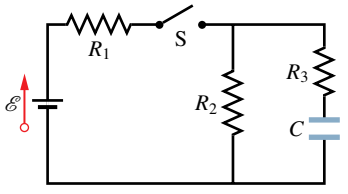
75Ú. Elektronická řídicí jednotka, která ovládá spínání světel ve světelné reklamě, obsahuje rezistor o proměnném odporu připojený ke kondenzátoru o kapacitě $0{,}220\,\mu\text{F}$. Kondenzátor se nabije na napětí 5,00 V a potom se vybíjí přes rezistor. Doba, za kterou napětí na jeho deskách klesne na 0,800 V, se měří vestavěnými elektronickými hodinami. V jakém intervalu má být možné nastavit odpor rezistoru, aby se doba vybíjení mohla měnit od $10{,}0\,\mu\text{s}$ do 6,00 ms?

76Ú. V obvodu na obr. 28.56 je kondenzátor, dvě ideální baterie, dva rezistory a spínač S. Spínač byl nejprve dlouhou dobu rozpojen a potom byl na dlouhou dobu zase sepnut. O kolik se změnil náboj kondenzátoru po sepnutí? Předpokládejte $C = 10\,\mu\text{F}$, $\mathscr{E}_1 = 1{,}0\,\text{V}$, $\mathscr{E}_2 = 3{,}0\,\text{V}$, $R_1 = 0{,}20\,\Omega$, $R_2 = 0{,}40\,\Omega$.



Obr. 28.56 Úloha 76

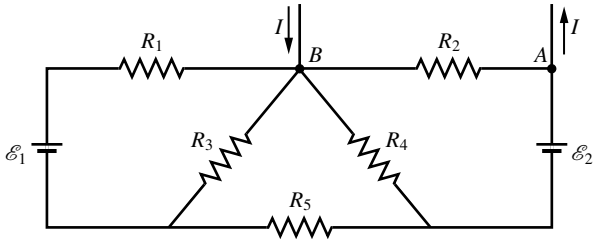
77Ú*. V obvodu na obr. 28.57 je $\mathscr{E} = 1{,}2\,\text{kV}$, $C = 6{,}5\,\mu\text{F}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 0{,}73\,\text{M}\Omega$. Kondenzátor C je bez náboje, v okamžiku $t = 0$ je sepnut spínač S. (a) Vypočtěte proud procházející každým z rezistorů pro $t = 0$ a pro $t \to \infty$. (b) Načrtněte graf časové závislosti napětí $U_2(t)$ na rezistoru R_2 v intervalu od $t = 0$ do $t \to \infty$. (c) Vypočtěte hodnotu napětí U_2 pro $t = 0$ a pro $t \to \infty$. (d) Jaký fyzikální význam má v tomto případě podmínka $t \to \infty$?



Obr. 28.57 Úloha 77

PRO POČÍTAČ

78Ú. Na obr. 28.58 je část elektronického obvodu. Do nenakreslené části obvodu přitéká uzlem A proud I a uzlem B z ní odtéká stejný proud I. Položte $\mathscr{E}_1 = 10\,\text{V}$, $\mathscr{E}_2 = 15\,\text{V}$, $R_1 = R_2 = 5{,}0\,\Omega$, $R_3 = R_4 = 8{,}0\,\Omega$, $R_5 = 12\,\Omega$. (a) Pro každou ze čtyř zadaných hodnot proudu I (0; 4,0 A; 8,0 A; 12 A) vypočtěte proud procházející ideálními bateriemi a rozhodněte, zda se baterie vybíjejí, nebo nabíjejí. Vypočtěte také napětí U_{AB}. (b) Část obvodu, která není na obrázku nakreslena, obsahuje sériově zapojený zdroj emn a rezistor. Jaké jsou jejich hodnoty?



Obr. 28.58 Úloha 78

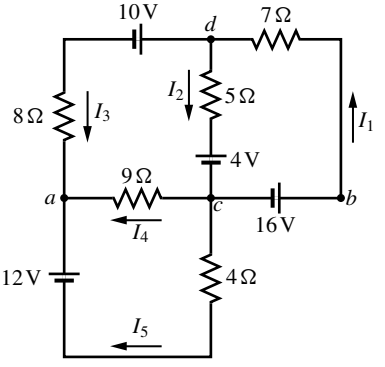
79Ú. V tabulce jsou uvedeny hodnoty napětí U_s na svorkách baterie v závislosti na proudu I odebíraném z baterie. (a) Napište matematický vztah, který popisuje závislost mezi svorkovým napětím baterie a odebíraným proudem I. Zadejte údaje z tabulky do počítače a proveďte lineární regresi. Z parametrů lineární regrese určete (b) emn baterie a (c) její vnitřní odpor.

I/A	50	75	100	125	150	175	200
U_s/V	10,7	9,0	7,7	6,0	4,8	3,0	1,7

80Ú. Uvažujte obvod na obr. 28.59. (a) Použijte uzlové pravidlo pro uzly a a d a smyčkové pravidlo pro tři smyčky a sestavte soustavu lineárně nezávislých rovnic. (b) Soustavu rovnic napište v maticovém tvaru $[A][B] = [C]$, kde

$$[B] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix}.$$

Jaké jsou prvky matic $[A]$ a $[C]$? (c) Vypočtěte proudy I_1, I_2, I_3, I_4, I_5.



Obr. 28.59 Úlohy 80 a 81

81Ú. Po určení všech pěti proudů v úloze 80 pokračujte dále ve vyšetřování obvodu na obr. 28.59. (a) Vypočtěte napětí na rezistoru o odporu 9 Ω. (b) Vypočtěte výkon ztracený na rezistoru o odporu 7 Ω. (c) Vypočtěte výkon 12 V baterie v obvodu. (d) Vypočtěte výkon 4 V baterie v obvodu. (e) Který z uzlů a, c má vyšší potenciál?

82Ú. Kondenzátor o kapacitě C_0 byl nejprve dlouhou dobu připojen k baterii o elektromotorickém napětí $\mathscr{E}_0$ a v okamžiku $t = 0$ se začal vybíjet přes rezistor o odporu 200 kΩ. Při vybíjení bylo měřeno napětí na kondenzátoru v závislosti na čase. Výsledky jsou uvedeny v tabulce. (a) Napište matematický vztah pro napětí na kondenzátoru jako funkci času. Zadejte údaje z tabulky do počítače a proveďte lineární regresi závislosti přirozeného logaritmu napětí $\ln(u_C)$ na čase. Z parametrů regrese určete (b) elektromotorické napětí baterie $\mathscr{E}_0$, (c) časovou konstantu τ_C obvodu, (d) kapacitu C_0.

u_C/V	9,9	7,2	5,7	4,4	3,4	2,7	2,0
t/s	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4

29
Magnetické pole



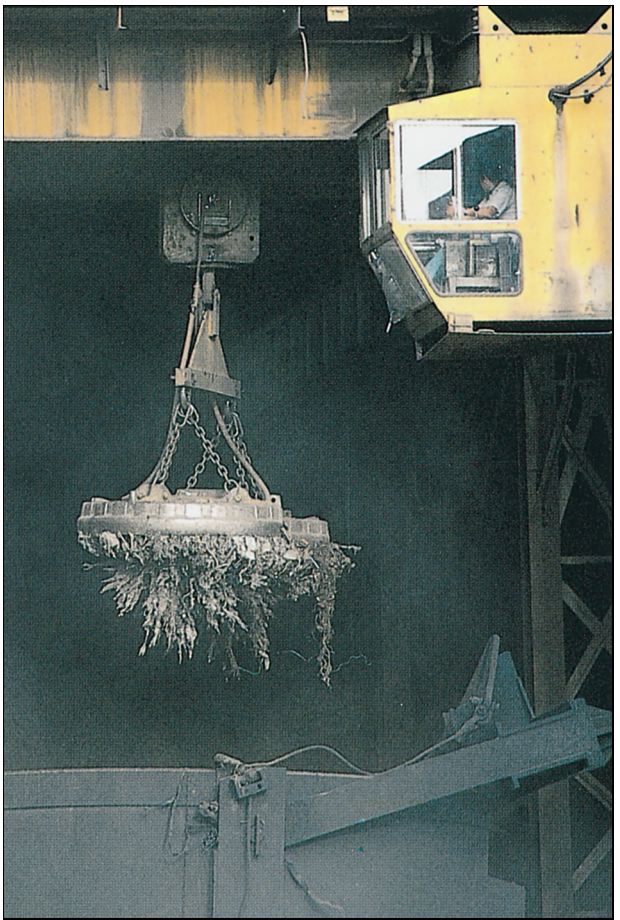
Budete-li pozorovat za bezměsíčné noci oblohu, nejlépe za polárním kruhem, můžete spatřit nezapomenutelný jev, polární záři. Vypadá jako jemná svítící záclona, která visí dolů z oblohy. Její rozměry jsou obrovské, je několik tisíc kilometrů dlouhá, několik set kilometrů vysoká a tvoří oblouk téměř kilometr široký. Čemu vděčíme za tuto grandiózní podívanou a proč je tak vzácná?

29.1 MAGNETICKÉ POLE

V kap. 22 jsme se zabývali vznikem a vlastnostmi elektrického pole vytvořeného například nabitou plastikovou tyčí. Toto pole existuje v celém prostoru kolem tyče a můžeme ho popsat vektorem elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$. Podobně i magnet vytváří pole v každém bodě prostoru kolem sebe a uvidíme, že ho můžeme popsat vektorovou veličinou $\boldsymbol{B}$, kterou nazýváme **magnetická indukce**. S magnetickým polem se můžeme setkat v běžném životě například tehdy, když přidržujeme papírky se vzkazy na dveřích ledničky malými magnety nebo když náhodou smažeme disketu, přiblížíme-li ji neopatrně k magnetu. Takový magnet, ať už na dveřích ledničky nebo poblíž diskety, působí *prostřednictvím* svého magnetického pole.

Častý typ magnetu je tvořen cívkou navinutou z drátu kolem ocelového jádra, kterou prochází elektrický proud, tzv. elektromagnet. Čím větší je proud, tím silnější je magnetické pole. V průmyslu se takové **elektromagnety** používají ke třídění železného šrotu (obr. 29.1) a v mnoha dalších případech. V každodenním životě jsou ještě běžnější **permanentní magnety** — magnety stejného typu jako na dveřích ledničky. Ty vytvářejí magnetické pole, aniž k tomu potřebují dodávat elektrický proud.

Obr. 29.1 Třídění kovů elektromagnetem v ocelárnách



V kap. 23 jsme objasnili, jak *elektrický náboj* ve svém okolí vytváří elektrické pole, které působí na ostatní elektrické náboje. Bylo by proto přirozené analogicky očekávat, že existuje *magnetický náboj*, který vytváří ve svém okolí magnetické pole působící na jiné magnetické náboje. Ačkoli takové magnetické náboje, zvané *magnetické monopóly*, vystupují v některých teoriích, nebyla jejich existence experimentálně potvrzena. Magnetická pole, s nimiž se běžně setkáváme, tedy vznikají nějak jinak.

Původ kteréhokoli magnetického pole kolem nás můžeme vysvětlit jedním z těchto dvou mechanismů: (1) Pohybující se elektricky nabité částice, jako jsou nosiče náboje ve vodičích, vytvářejí ve svém okolí magnetické pole. (2) Některé elementární částice (např. elektrony) mají kolem sebe také magnetické pole; toto pole je jejich základní charakteristikou stejně jako hmotnost či elektrický náboj. V kap. 32 si podrobně všimneme toho, že v určitých látkách se skládají magnetická pole elektronů a vytvářejí navenek výrazné magnetické pole. Tak je tomu u látek, z nichž jsou vyrobeny permanentní magnety. V ostatních látkách se magnetická pole všech elektronů vyruší a žádné výraznější magnetické pole jako výsledek nevznikne. To platí třeba pro látky, z nichž se skládá lidské tělo.

Experimentálně je potvrzeno, že na nabitou částici (ať už jedinou, nebo jako jednu z mnoha, které vytvářejí elektrický proud v drátu) pohybující se v magnetickém poli, působí pole jistou silou. V této kapitole se soustředíme na vztah mezi magnetickým polem a touto silou.

29.2 DEFINICE MAGNETICKÉ INDUKCE

Intenzitu elektrického pole $\boldsymbol{E}$ v určitém místě prostoru jsme určili tak, že jsme do tohoto místa vložili testovací částici s nábojem Q_0 a měřili elektrickou sílu $\boldsymbol{F}_E$, která na ni působí. Potom jsme definovali *elektrickou intenzitu* $\boldsymbol{E}$ vztahem:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}_E}{Q_0}. \tag{29.1}$$

Pokud by existoval magnetický monopól, mohli bychom definovat magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ podobně. Poněvadž však žádné monopóly nebyly dosud nalezeny, musíme definovat $\boldsymbol{B}$ jinak. Použijeme k tomu magnetickou sílu $\boldsymbol{F}_B$, působící na pohybující se elektricky nabitou částici.

To můžeme v principu udělat tak, že vstřelujeme s různými rychlostmi v různých směrech nabité částice do místa, kde chceme $\boldsymbol{B}$ změřit. Přitom vždy určíme sílu působící na částici v tomto místě. Po mnoha takových zkouškách bychom zjistili, že existuje takový směr rychlosti $\boldsymbol{v}_{F=0}$, že síla $\boldsymbol{F}_B$ je nulová. Pro všechny ostatní směry rychlosti $\boldsymbol{v}$ je

velikost síly $\boldsymbol{F}_B$ vždy úměrná součinu $v \sin\varphi$, kde φ je úhel mezi směry $\boldsymbol{v}_{F=0}$ a $\boldsymbol{v}$. Kromě toho platí, že směr síly $\boldsymbol{F}_B$ je vždy kolmý na směr rychlosti $\boldsymbol{v}$. (Tyto výsledky naznačují, že uvedené veličiny budou mezi sebou vázány vektorovým součinem.)

Definujme proto **magnetickou indukci** jako vektor, který má směr $\boldsymbol{v}_{F=0}$. Pro rychlost $\boldsymbol{v}$ kolmou k $\boldsymbol{v}_{F=0}$ je $\varphi = 90°$ a síla působící na částici má maximální velikost $F_{B,\max}$. Velikost magnetické indukce B definujeme pomocí velikosti této síly vztahem

$$B = \frac{F_{B,\max}}{|Q|v},$$

kde Q je náboj částice.

Všechny dosavadní výsledky můžeme shrnout do jediné vektorové rovnice pro **Lorentzovu sílu**:

$$\boldsymbol{F}_B = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{29.2}$$

Síla $\boldsymbol{F}_B$ působící na nabitou částici je tedy rovna součinu jejího náboje Q a vektorového součinu její rychlosti $\boldsymbol{v}$ a magnetické indukce $\boldsymbol{B}$. Použijeme-li rov. (3.20) pro velikost vektorového součinu, můžeme pro velikost Lorentzovy síly $\boldsymbol{F}_B$ psát

$$F_B = |Q|vB\sin\varphi, \tag{29.3}$$

kde φ je úhel mezi směry rychlosti $\boldsymbol{v}$ a magnetické indukce $\boldsymbol{B}$.

Určení magnetické (Lorentzovy) síly působící na částici

Rov. (29.3) nám říká, že velikost Lorentzovy síly $\boldsymbol{F}_B$, která působí na částici v magnetickém poli, je úměrná náboji Q a velikosti rychlosti v částice. Síla je rovna nule, je-li náboj nulový nebo je-li částice v klidu. Z tohoto vztahu rovněž plyne, že síla je také rovna nule, jsou-li vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$ rovnoběžné, ať už souhlasně ($\varphi = 0°$) nebo nesouhlasně ($\varphi = 180°$), a je maximální, jsou-li $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$ na sebe kolmé.

Rov. (29.2) určuje navíc i směr $\boldsymbol{F}_B$. Z čl. 3.7 víme, že vektorový součin $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ v rov. (29.2) je kolmý na oba vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$. Pravidlo pravé ruky (obr. 29.2) nám říká, že vztyčený palec pravé ruky ukazuje směr $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, jestliže zahnuté prsty ukazují směr otáčení vektoru $\boldsymbol{v}$ do vektoru $\boldsymbol{B}$ přes menší z obou úhlů, které oba vektory svírají.* Jestliže je náboj Q kladný, potom podle rov. (29.2) má síla $\boldsymbol{F}_B$ stejný směr jako součin $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. To znamená, že pro kladný náboj Q má $\boldsymbol{F}_B$ směr vztyčeného palce, jak je ukázáno na obr. 29.2b. Je-li náboj Q záporný, mají síla $\boldsymbol{F}_B$ a vektorový součin $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ opačná znaménka a tedy i opačný směr. Jinými slovy, pro záporný náboj Q má $\boldsymbol{F}_B$ směr opačný, než ukazuje palec na obr. 29.2c.

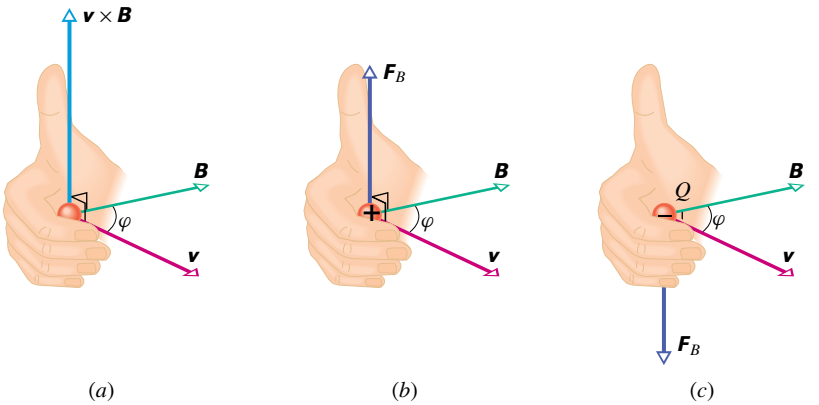
Bez ohledu na znaménko náboje však platí:

> Lorentzova síla $\boldsymbol{F}_B$, která působí na nabitou částici pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}$ v magnetickém poli $\boldsymbol{B}$, je *vždy* kolmá na oba vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$.

Síla $\boldsymbol{F}_B$ tedy nemá *nikdy* nenulovou složku do směru vektoru $\boldsymbol{v}$ a nemůže tedy měnit velikost rychlosti částice (a tedy ani její kinetickou energii). Může měnit pouze *směr* rychlosti $\boldsymbol{v}$ (a tím směr pohybu); jenom v tomto smyslu urychluje síla $\boldsymbol{F}_B$ nabitou částici.

Abychom lépe ocenili důležitost rov. (29.2), podívejme se na obr. 29.3, který znázorňuje stopy nabitých částic, pohybujících se v *bublinkové komoře*, umístěné v Lawrencově laboratoři v Berkeley. Komora, která je naplněna tekutým vodíkem, se nachází v silném homogenním magnetickém poli kolmém na rovinu obrázku a směřujícím k nám. Z levé strany přilétla γ-částice; nezanechala stopu, neboť

* Místo otáčení můžeme ukázat ukazováčkem $\boldsymbol{v}$ a prostředníkem $\boldsymbol{B}$; palec pak míří ve směru $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$.



Obr. 29.2 (a) Pravidlo pravé ruky určuje směr vektorového součinu $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ takto: ohnuté prsty pravé ruky orientujeme tak, abychom otočili vektor $\boldsymbol{v}$ do směru vektoru $\boldsymbol{B}$ o menší z obou možných úhlů, které tyto vektory svírají. Vztyčený palec potom ukazuje směr vektoru $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$. (b) Je-li náboj Q kladný, potom síla $\boldsymbol{F}_B = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ má směr stejný jako součin $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. (c) Je-li náboj Q záporný, je směr síly $\boldsymbol{F}_B$ opačný než směr součinu $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$.



Obr. 29.3 Trajektorie dvou elektronů e^- a pozitronu e^+ v bublinkové komoře umístěné v homogenním magnetickém poli (směr pole je kolmý k rovině obrázku směrem k pozorovateli).

nemá náboj. Poté při srážce vyrazila elektron z vodíkového atomu (dlouhá, jenom mírně zakřivená dráha, označená e^-), a sama se přeměnila na dvojici elektron (spirálovitá dráha, označená e^-) a pozitron (dráha e^+). Za pomoci rov. (29.2) a obr. 29.2 se přesvědčte o tom, že trajektorie obou záporných a jedné kladné částice jsou zakřiveny ve správném směru.

Z rov. (29.2) a (29.3) plyne jednotka magnetické indukce. Nazýváme ji **tesla** (T):

$$1 \text{ tesla} = 1\,\text{T} = \text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{C}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}.$$

Protože coulomb za sekundu je ampér, platí

$$1\,\text{T} = \text{N}\cdot\text{A}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}. \qquad (29.4)$$

Starší jednotkou, ktará nepatří do soustavy SI, ale dosud se příležitostně užívá, je **gauss** (G). Platí, že

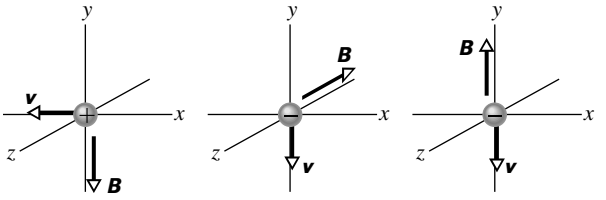
$$1\,\text{T} = 10^4\,\text{G}. \qquad (29.5)$$

V tab. 29.1 jsou uvedeny velikosti indukcí B některých magnetických polí. Všimněte si, že magnetické pole Země má u zemského povrchu indukci asi $10^{-4}\,\text{T} = 100\,\mu\text{T} = 1\,\text{G}$.

Tabulka 29.1 **Přibližné velikosti magnetických indukcí některých polí**

Povrch neutronové hvězdy	10^8 T
Blízko velkého elektromagnetu	1,5 T
Blízko malého tyčového magnetu	10^{-2} T
Na povrchu Země	10^{-4} T
V mezihvězdném prostoru	10^{-10} T
Nejnižší hodnota v magneticky stíněné místnosti	10^{-14} T

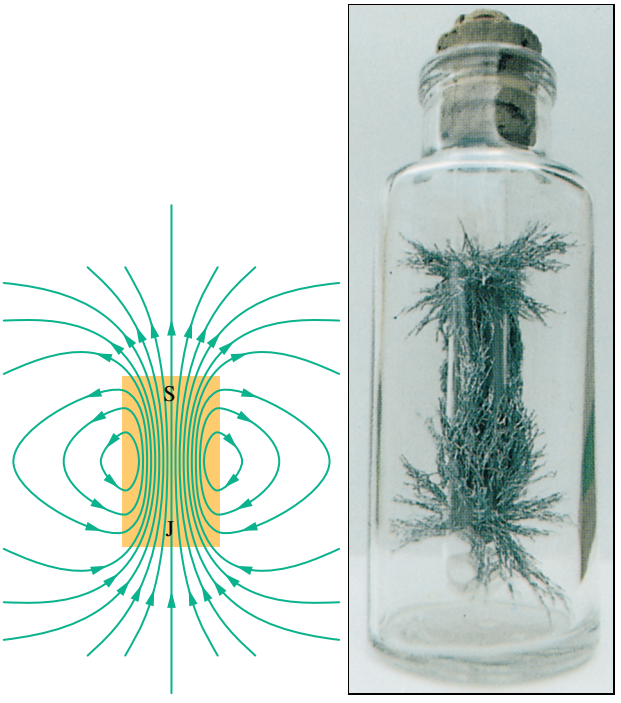
KONTROLA 1: Na třech obrázcích se nabitá částice pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ v homogenním magnetickém poli $\boldsymbol{B}$. Jaký směr má Lorentzova síla $\boldsymbol{F}_B$, která na ni působí?



Indukční čáry

Podobně jako znázorňujeme elektrické pole pomocí elektrických siločár, znázorňujeme magnetické pole magnetickými indukčními čárami. Vytváříme je obdobně, to znamená, že v každém bodě pole platí, že směr magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ je určen tečnou k indukční čáře. Velikost vektoru $\boldsymbol{B}$ můžeme vystihnout hustotou indukčních čar v dané oblasti.

Obr. 29.4a ukazuje, jak lze znázornit magnetické pole *tyčového magnetu* (tj. permanentního magnetu ve tvaru tyče) pomocí indukčních čar. Indukční čáry procházející magnetem vytvářejí uzavřené křivky (a to i ty čáry, které na obrázku nejsou zakresleny jako uzavřené). Vnější magnetické pole tyčového magnetu je nejsilnější poblíž jeho konců, kde jsou indukční čáry nejhustší. Experimentálně to lze ověřit pomocí železných pilin, které se nastavují podél indukčních čar a shromažďují se hlavně na koncích magnetu (obr. 29.4b).

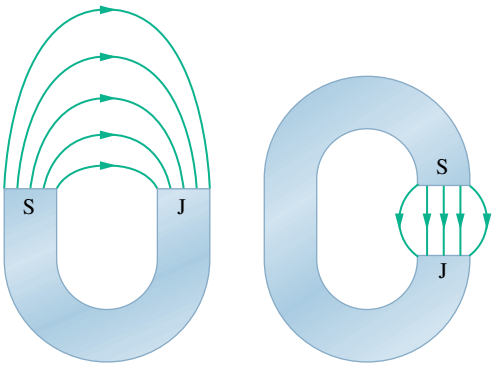


Obr. 29.4 (a) Indukční čáry tyčového magnetu. (b) „Kravský magnet“: tyčový magnet, který se nechá krávě spolknout, aby zůstal v jejím bachoru. Tam pak přitahuje a drží všechny náhodně spolknuté železné předměty (např. hřebíky), aby neporanily další vnitřnosti.

Protože indukční čáry tvoří uzavřené křivky, musí vycházet z jednoho konce magnetu a vcházet do druhého (a pokračovat dál uvnitř magnetu). Ten konec, ze kterého indukční čáry vycházejí, se nazývá *severní pól* magnetu; opačný konec, kde vcházejí do magnetu, se nazývá *jižní pól*. Magnety, kterými si lepíme vzkazy na ledničku nebo oznámení na magnetickou tabuli, mají právě tvar takových krátkých tyčových magnetů. Na obr. 29.5 jsou další dva typické tvary magnetu: *podkovovitý magnet* a *magnet tvaru písmene* C, jehož konce, zvané *čela*, někdy dále upravená *pólovými nástavci*, jsou blízko sebe a jsou navzájem rovnoběžná; magnetické pole mezi nimi je pak silné a přibližně homogenní. Když k sobě magnety přiblížíme, tak bez ohledu na jejich tvar zjistíme:

Opačné póly magnetu se navzájem přitahují, souhlasné se odpuzují.

Země má vlastní magnetické pole, které vzniká v jejím jádře, ale zatím přesně nevíme jak. Na zemském povrchu ho můžeme zjistit kompasem, jehož podstatou je střelka — tenký tyčový magnet, volně otáčivý ve vodorovné rovině. Střelka se otočí, protože její severní pól je přitahován k Arktidě. Tedy *jižní* pól zemského magnetického pole se musí nacházet v oblasti Arktidy a logicky bychom ho potom měli nazývat jižním pólem. Protože však se v Arktidě nachází severní geografický pól, bylo dohodnuto užívat pro tento jižní magnetický pól termín *severní geomagnetický pól*.*



Obr. 29.5 (a) Podkovovitý magnet a (b) magnet tvaru C (jsou zakresleny pouze některé indukční čáry).

Tedy na severní polokouli vcházejí magnetické indukční čáry zemského magnetického pole do Země směrem k Arktidě. Naopak na jižní polokouli vycházejí indukční čáry ze Země v oblasti Antarktidy z místa, které nazýváme *jižním geomagnetickým pólem*.

PŘÍKLAD 29.1

Magnetická indukce homogenního magnetického pole má velikost 1,2 mT a vektor $\boldsymbol{B}$ míří svisle vzhůru, takže indukční čáry procházejí celým objemem komůrky měřicího zařízení. Proton s kinetickou energií 5,3 MeV vletí vodorovně do komůrky směrem od jihu k severu. Jaká vychylující síla na něj působí?

ŘEŠENÍ: Magnetická vychylující síla závisí na rychlosti protonu, kterou můžeme určit ze vztahu pro kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2}mv^2$; z něj plyne

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2(5{,}3\ \mathrm{MeV})(1{,}60\cdot10^{-13}\ \mathrm{J/MeV})}{(1{,}67\cdot10^{-27}\ \mathrm{kg})}} = \\ = 3{,}2\cdot10^{7}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

* Magnetické pole Země se pomalu mění. Na rozdíl od geografických pólů, které mají prakticky neměnnou polohu, se poloha magnetických pólů mění. V geologických časových měřítkách (10^5 až 10^7 let) dokonce mění magnetické pole Země i svůj směr („přemagnetování“). Viz čl. 32.3.

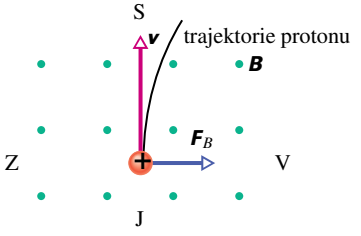
Z rov. (29.3) potom dostaneme

$$\begin{aligned} F_B &= |Q|vB\sin\varphi = \\ &= (1{,}60\cdot10^{-19}\,\mathrm{C})(3{,}2\cdot10^{7}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\cdot \\ &\quad\cdot(1{,}2\cdot10^{-3}\,\mathrm{T})(\sin 90^\circ) = \\ &= 6{,}1\cdot10^{-15}\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

Tato síla se může zdát velmi malá, ale protože působí na částici s velmi malou hmotností, udělí jí velké zrychlení:

$$a = \frac{F_B}{m} = \frac{(6{,}1\cdot10^{-15}\,\mathrm{N})}{(1{,}67\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg})} = 3{,}7\cdot10^{12}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Zbývá určit směr magnetické síly $\boldsymbol{F}_B$. Víme, že rychlost $\boldsymbol{v}$ má směr vodorovný z jihu na sever a $\boldsymbol{B}$ směřuje svisle vzhůru. Použitím pravidla pravé ruky (obr. 29.2b) určíme, že síla $\boldsymbol{F}_B$ směřuje vodorovně od západu na východ, jak je vidět na obr. 29.6. (Tečky na obrázku znázorňují magnetické pole kolmé k rovině obrázku směřující k nám. Kdyby měla částice záporný náboj, měla by magnetická síla opačný směr, to znamená od východu na západ. Plyne to přímo z rov. (29.2), dosadíme-li $-Q$ místo Q.



Obr. 29.6 Příklad 29.1. Pohled shora na proton pohybující se z jihu na sever v komůrce měřicího zařízení. Magnetické pole má směr k nám (jak je znázorněno řadou teček, připomínajících špičky šípů letících směrem k nám). Proton je vychylován směrem na východ.

RADY A NÁMĚTY

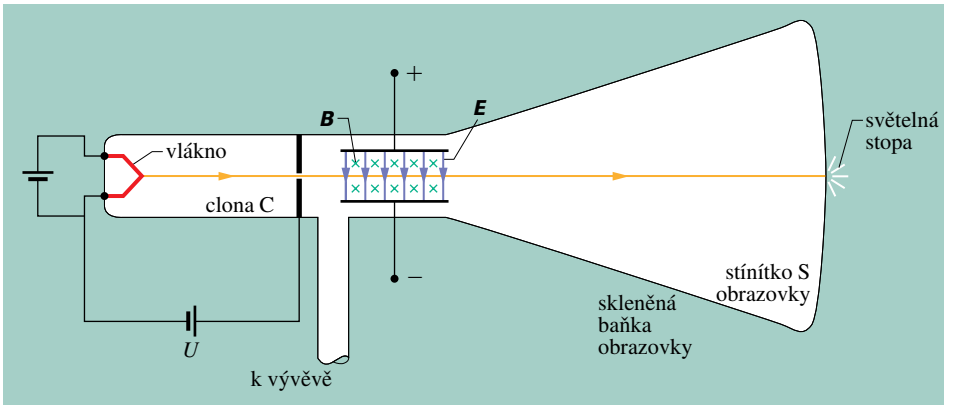
Bod 29.1: *Klasické a relativistické vztahy pro kinetickou energii*

V př. 29.1 jsme pro kinetickou energii protonu použili (přibližný) klasický vztah $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ místo (přesného) relativistického výrazu (7.51). Kritériem pro oprávněnost použití klasického výrazu je podmínka $E_k \ll mc^2$, kde mc^2 je klidová energie částice. V našem případě je $E_k = 5{,}3\,\mathrm{MeV}$, zatímco $mc^2 = 938\,\mathrm{MeV}$. Proton tedy splňuje výše uvedenou podmínku a můžeme bez obav použít vztah $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. To však nemůžeme udělat vždy, zejména ne tehdy, jedná-li se o lehké částice s vysokou energií.

29.3 OBJEV ELEKTRONU

Může se stát, že na nabitou částici působí současně jak elektrické, tak i magnetické pole. Zajímavý a celkem snadno řešitelný je případ, když jsou obě pole na sebe *navzájem kolmá*; jde o tzv. zkřížená pole. V dalším zjistíme, co se v takové situaci stane s nabitou částicí, konkrétně s elektronem. Rozebereme to na pokusu, který vedl v roce 1897 k objevu elektronu (J. J. Thomson na Universitě v Cambridgi).

Na obr. 29.7 je znázorněna moderní zjednodušená verze Thomsonova experimentálního zařízení — *katodová trubice* (podobná obrazovce televizního přijímače). Nabité částice (které nyní nazýváme *elektrony*) jsou emitovány ze žhavého vlákna na konci vyčerpané trubice a jsou urychlovány napětím U. Průchodem štěrbinou ve cloně C se z nich vymezí úzký svazek. Poté elektrony projdou oblastí zkřížených polí $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ a nakonec dopadnou na fluorescenční stínítko S, na němž vytvoří světelnou skvrnu (televizní obraz je složen z mnoha takových skvrn). Síly působící na nabité částice v oblasti zkřížených polí je mohou vychýlit od středu stínítka. Změnou velikostí a směrů obou polí mohl Thomson posunovat světelnou stopu na stínítku. V konkrétním případě zobrazeném na obr. 29.7 jsou



Obr. 29.7 Moderní verze zařízení, pomocí něhož J. J. Thomson změřil poměr hmotnosti a náboje elektronu. Elektrické pole $\boldsymbol{E}$ vytvořil připojením baterie na vodorovné vychylovací destičky. Magnetické pole $\boldsymbol{B}$ vytvořil pomocí proudu procházejícího soustavou cívek (na obrázku nejsou zakresleny). Je kolmé k rovině obrázku a směřuje od nás (jak ukazují křížky).

elektrony vychylovány v rovině obrázku směrem nahoru elektrickým polem $\boldsymbol{E}$ a směrem dolů magnetickým polem $\boldsymbol{B}$, což znamená, že příslušné síly *působí v opačných směrech*. Thomson postupoval ve třech krocích:

1. Nastavil $E = 0$ a $B = 0$ a označil polohu svítící stopy na stínítku S obrazovky (pro nevychýlený paprsek).
2. Zapnul elektrické pole a změřil výchylku paprsku.
3. Udržoval stálou intenzitu elektrického pole a magnetickou indukci měnil tak dlouho, dokud se paprsek nevrátil do původní, na stínítku označené polohy.

V př. 23.8 jsme počítali výchylku y nabité částice pohybující se mezi dvěma rovnoběžnými destičkami (krok 2), mezi nimiž bylo vytvořeno elektrické pole $\boldsymbol{E}$. Zjistili jsme, že je rovna

$$y = \frac{QEL^2}{2mv^2}, \tag{29.6}$$

kde L je délka destiček a v velikost rychlosti, s níž částice s hmotností m a nábojem Q vletěla do elektrického pole.

Téhož vztahu můžeme použít i pro paprsek elektronů na obr. 29.7: změříme polohu místa dopadu paprsku na obrazovce S a z ní vypočítáme výchylku y na konci destiček. Poněvadž směr posunutí záleží na znaménku náboje částice, dokázal tím Thomson, že částice, které dopadaly na obrazovku, měly záporný náboj.

Jsou-li obě pole na obr. 29.7 nastavena tak, že se síly, kterými působí na náboj, vyruší (krok 3), dostaneme z rovnic (29.1) a (29.3)

$$|Q|E = |Q|vB \sin 90^\circ$$

a odtud

$$v = \frac{E}{B}. \tag{29.7}$$

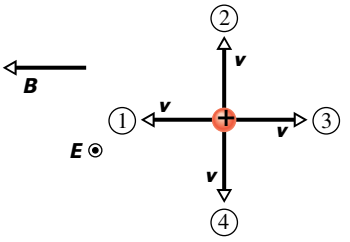
Zkřížená pole nám tedy umožňují změřit rychlost nabitých částic. Dosazením za v z rov. (29.7) do rov. (29.6) dostaneme po úpravě

$$\frac{Q}{m} = \frac{2yE}{B^2L^2}. \tag{29.8}$$

Všechny veličiny na pravé straně tohoto vztahu můžeme přímo měřit. Uspořádání zkřížených polí nám tedy umožňuje změřit měrný náboj Q/m částic vyletujících ze žhavého vlákna.

Thomson došel k závěru, že tyto částice — elektrony — se vyskytují v každé látce a že mají hmotnost více než 1 000krát menší než nejlehčí známý atom — vodík. (Přesný poměr hmotností, zjištěný později, je 1 836,15.) Thomsonova měření poměru Q/m spolu se smělostí jeho dvou tvrzení můžeme považovat za „objev elektronu“.

KONTROLA 2: Na obrázku jsou zakresleny čtyři směry rychlosti $\boldsymbol{v}$ kladně nabité částice pohybující se v homogenním elektrickém poli $\boldsymbol{E}$ (je kolmé k obrázku a má směr k nám, což je znázorněno tečkou v kroužku) a homogenním magnetickém poli $\boldsymbol{B}$. (a) Seřaďte směry 1, 2, 3 a 4 sestupně podle velikosti výsledné síly působící na částici. (b) Pro který z nich je výsledná síla nulová?



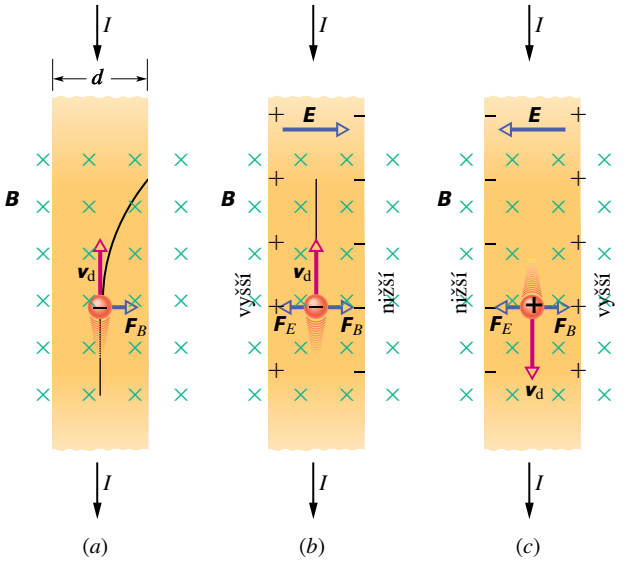
29.4 HALLŮV JEV

Jak jsme ukázali, může být paprsek elektronů ve vakuu vychýlen magnetickým polem. Naskýtá se otázka: mohou být magnetickým polem vychylovány také vodivostní elektrony pohybující se driftovou rychlostí např. v měděném vodiči? Že to je opravdu možné, ukázal v roce 1879 Edwin H. Hall, v té době 24letý absolvent University Johna Hopkinse. Tento **Hallův jev** umožňuje nejen zjistit, zda náboj nosičů proudu je kladný nebo záporný, ale můžeme s jeho pomocí změřit i počet těchto nosičů v objemové jednotce vodiče.

Na obr. 29.8a je měděný vodič ve tvaru proužku o šířce d, kterým protéká elektrický proud I od horní části proužku směrem dolů. Nosiče náboje jsou elektrony, a jak víme, pohybují se (s driftovou rychlostí v_d) směrem opačným, tedy od dolní části proužku nahoru. V určitém okamžiku (obr. 29.8a) bylo zapnuto vnější magnetické pole $\boldsymbol{B}$, kolmé k rovině obrázku směřující od nás. Z rov. (29.2) plyne, že magnetická síla $\boldsymbol{F}_B$ bude působit na každý elektron pohybující se driftovou rychlostí tak, že ho bude „tlačit“ k pravé straně proužku.

Během jisté doby se elektrony pohybující se doprava nakupí na pravé straně proužku, takže zanechají na levé straně proužku nevykompenzované kladné náboje. Tím vzniká elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$ uvnitř proužku. Toto pole má směr zleva doprava (obr. 29.8b), takže elektrická síla $\boldsymbol{F}_E$ tlačí každý elektron doleva.

Během velmi krátké doby se ustaví rovnováha: elektrická síla působící na každý elektron poroste tak dlouho, až se vyrovná opačně působící magnetické síle. Tím se



Obr. 29.8 Měděný proužek, kterým protéká proud I, je umístěn do magnetického pole $\boldsymbol{B}$. (a) Situace okamžitě po zapnutí magnetického pole. Je zakreslena zakřivená trajektorie, po níž se bude elektron pohybovat. (b) Ustálená situace, která se vytvoří brzy po zapnutí. Všimněte si, že záporné náboje se budou shromažďovat na pravé straně proužku, takže na levé straně zůstane nevykompenzovaný kladný náboj. Levá strana proužku tedy bude mít vyšší elektrický potenciál než strana pravá. (c) Pokud budou mít nosiče nábojů kladné znaménko, budou se shromažďovat na pravé straně proužku a ta bude mít vyšší potenciál než strana levá.

obě síly navzájem vyruší: $\boldsymbol{F}_E + \boldsymbol{F}_B = \boldsymbol{0}$. Nadále se elektrony budou pohybovat driftovou rychlostí ve směru délky proužku k jeho hornímu okraji a náboj nahromaděný na pravé straně, a tedy i pole $\boldsymbol{E}$ jím vytvořené napříč proužku už více neporostou.

Rozdíl potenciálů U_H vzniklý podle rov. (25.42) na vzdálenosti d se nazývá *Hallovo napětí*:

$$U_\mathrm{H} = Ed. \tag{29.9}$$

Připojením voltmetru k bočním okrajům proužku můžeme Hallovo napětí přímo změřit. Zjistíme tím také, který z okrajů má vyšší potenciál. V situaci na obr. 29.8b má levá strana proužku vyšší potenciál, což souhlasí s naším předpokladem, že nosiče náboje mají záporné znaménko.

Předpokládejme na chvíli, že nosiče náboje mají kladný náboj (obr. 29.8c). Jestliže by se tyto kladné nosiče náboje pohybovaly od horního konce proužku k dolnímu, byly by tlačeny k pravé straně proužku silou $\boldsymbol{F}_B$, a tedy jeho *pravá* strana by měla vyšší potenciál. Protože je tento výsledek v protikladu s údaji našeho voltmetru, musí mít nosiče náboje znaménko záporné.

Nyní doplníme naše úvahy kvantitativními výpočty. Velikost náboje nosiče označíme Q; pro elektron je $Q = |-e|$. Je-li elektrická síla v rovnováze se silou magnetickou (obr. 29.8b), dostaneme z rov. (29.1) a (29.3) rovnici

$$QE = Qv_\mathrm{d}B. \tag{29.10}$$

Z rov. (27.7) plyne pro driftovou rychlost v_d

$$v_\mathrm{d} = \frac{J}{nQ} = \frac{I}{nQS}, \tag{29.11}$$

kde $J = I/S$ je velikost hustoty proudu v proužku, S je obsah příčného průřezu proužku a n je *počet nosičů náboje v objemové jednotce vodiče* (koncentrace nosičů náboje).

Vyjádříme-li n z rov. (29.11), dostáváme po dosazení z rov. (29.9) a (29.10) vztah

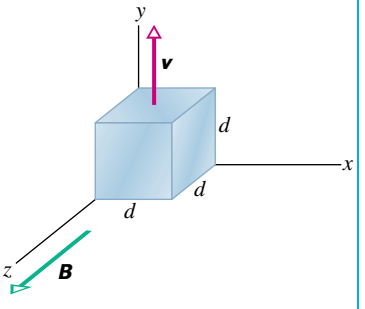
$$n = \frac{BId}{U_\mathrm{H}SQ}. \tag{29.12}$$

Vidíme, že koncentraci n můžeme vyjádřit pomocí veličin, které lze přímo měřit.

Hallova jevu je také možno využít k přímému měření driftové rychlosti v_d nosičů náboje, která je, jak jsme již uvedli, řádově centimetry za hodinu. Tento nápaditý experiment je sestaven tak, že se kovový proužek pohybuje v magnetickém poli v opačném směru, než je směr driftové rychlosti nosičů náboje. Rychlost pohybujícího se proužku lze měnit tak, aby Hallovo napětí bylo právě rovno nule. Za tohoto stavu musí být rychlost nosičů náboje *vůči magnetickému poli* nulová. Rychlost proužku tedy musí být co do velikosti rovna driftové rychlosti nosičů záporného náboje (ale opačně orientovaná).

PŘÍKLAD 29.2

Na obr. 29.9 je kovová krychlička s délkou hrany $d = 1{,}5\,\mathrm{cm}$, která se pohybuje v kladném směru osy y konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ o velikosti $4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ v homogenním magnetickém poli s indukcí $\boldsymbol{B}$ o velikosti $0{,}050\,\mathrm{T}$ ve směru osy z.



Obr. 29.9 Příklad 29.2. Kovová krychlička o délce hrany d se pohybuje konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ v homogenním magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$.

(a) Která stěna bude mít díky pohybu krychličky elektrický potenciál vyšší a která nižší?

ŘEŠENÍ: Když se krychlička bude pohybovat v magnetickém poli, budou se její vodivostní elektrony pohybovat spolu s ní. Proto na ně bude působit magnetická síla $\boldsymbol{F}_B$ daná rov. (29.2). Na obr. 29.9 působí síla $\boldsymbol{F}_B$ v záporném směru osy x. To znamená, že některé elektrony budou vychýleny silou $\boldsymbol{F}_B$ k (nezakreslené) levé stěně krychličky, čímž dojde k tomu, že tato stěna bude nabita záporně, a tedy pravá stěna bude naopak kladná. Tím vznikne elektrické pole $\boldsymbol{E}$ směřující od pravé stěny k levé, takže levá stěna bude mít nižší potenciál než stěna pravá.

(b) Určete napětí U mezi stěnami s vyšším a nižším potenciálem.

ŘEŠENÍ: Elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$, které takto vzniklo, způsobí, že na elektrony bude působit elektrická síla $\boldsymbol{F}_E$ orientovaná k pravé stěně krychličky (tedy opačně než magnetická síla $\boldsymbol{F}_B$). Rovnováhy, při níž $F_E = F_B$, bude dosaženo rychle poté, co se krychlička začne pohybovat v magnetickém poli. Z rov. (29.1) a (29.3) dostaneme

$$eE = evB.$$

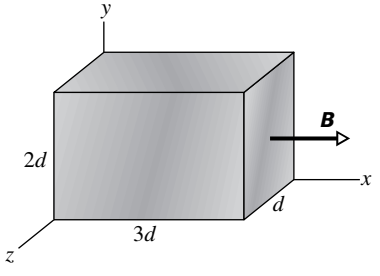
Po dosazení za E z rov. (29.9) ($U = Ed$) dostaneme

$$U = dvB. \tag{29.13}$$

Dosazením dostaneme výsledek

$$U = (0{,}015\,\mathrm{m})(4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(0{,}050\,\mathrm{T}) = \\ = 0{,}003\,0\,\mathrm{V} = 3{,}0\,\mathrm{mV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 3: Na obrázku je kovový kvádr, který se pohybuje rychlostí o velikosti v v homogenním magnetickém poli $\boldsymbol{B}$. Jeho rozměry jsou celistvé násobky délky d, jak je vidět z obrázku. Máte šest možností pro výběr směru rychlosti kvádru: může být rovnoběžná s osami x, y, nebo z, a mířit buď v jejich kladném, nebo záporném směru. (a) Seřaďte sestupně oněch šest možností podle velikosti napětí, které vznikne mezi protilehlými stěnami. (b) Ve kterém případě má čelní stěna nižší potenciál?



29.5 POHYB NABITÉ ČÁSTICE PO KRUŽNICI

Pohybuje-li se částice rovnoměrně po kružnici, pak výsledná síla, která na ni působí, musí mít stálou velikost a musí být orientována do středu kružnice. Je tedy stále kolmá k rychlosti $\boldsymbol{v}$ částice. Představme si kámen, upevněný na vlákně a obíhající rovnoměrně po kružnici ve vodorovné rovině, nebo družici, pohybující se po kruhové trajektorii kolem Země. V prvním případě vytváří tuto dostředivou sílu tah vlákna; ve druhém případě je to gravitační přitažlivá síla mezi Zemí a družicí.

Na obr. 29.10 je ukázán jiný příklad: svazek elektronů je vstřelován *elektronovým dělem* (ED) do měřicí komůrky. Elektrony do ní vlétají v rovině obrázku rychlostí $\boldsymbol{v}$ a dostávají se do oblasti homogenního magnetického pole o indukci $\boldsymbol{B}$, která je kolmá k rovině obrázku a má směr k nám. Výsledkem je, že magnetická síla $\boldsymbol{F}_B = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ stále vychyluje elektrony, a protože vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou na sebe stále kolmé, budou se elektrony pohybovat po kružnici. Stopu elektronů vidíme na fotografii, neboť atomy plynu v komůrce vyzařují světlo, kdykoli se s nimi některý z letících elektronů srazí.

Nyní určíme parametry, které charakterizují kruhový pohyb elektronů (nebo jakýchkoli jiných částic s nábojem o velikosti Q a hmotností m) pohybujících se kolmo ke směru homogenního magnetického pole $\boldsymbol{B}$ rychlostí o velikosti v. Podle rov. (29.3) má síla působící na částici velikost QvB. Pro rovnoměrný pohyb po kružnici (rov. (6.20)) platí podle druhého Newtonova zákona

$$F = ma = \frac{mv^2}{r}, \tag{29.14}$$

odkud po dosazení za $F = QvB$ dostáváme

$$QvB = \frac{mv^2}{r}. \tag{29.15}$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit poloměr kružnice, po níž se částice pohybuje:

$$r = \frac{mv}{QB} \quad \text{(poloměr)}. \tag{29.16}$$

Perioda T (tj. doba, potřebná pro jeden oběh) je rovna obvodu kružnice dělenému rychlostí částice, takže

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v}\frac{mv}{QB} = \frac{2\pi m}{QB} \quad \text{(perioda)}. \tag{29.17}$$

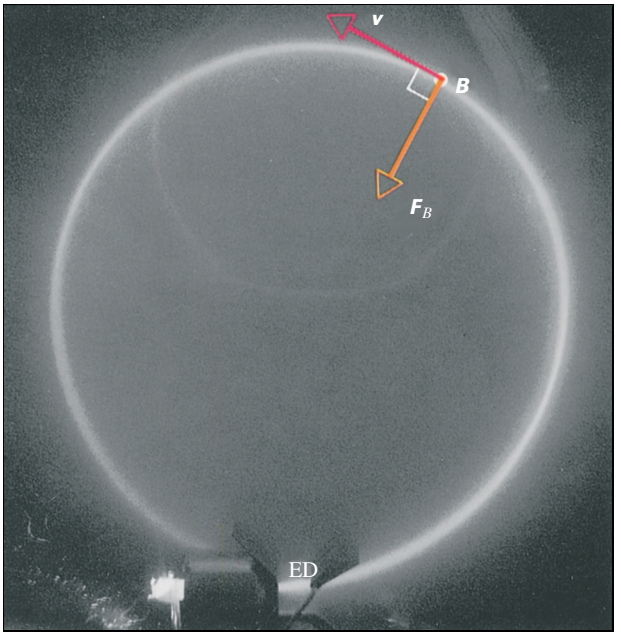
Frekvence f je

$$f = \frac{1}{T} = \frac{QB}{2\pi m} \quad \text{(frekvence)}. \tag{29.18}$$

Úhlová frekvence ω je tedy

$$\omega = 2\pi f = \frac{QB}{m} \quad \text{(úhlová frekvence).} \qquad (29.19)$$

Vidíme, že veličiny T, f a ω nezávisejí na velikosti rychlosti částice (za předpokladu, že její rychlost je mnohem menší, než je rychlost světla). Rychlé, resp. pomalé částice se pohybují po kružnicích o velkém, resp. malém poloměru, ale všechny částice se stejným poměrem Q/m potřebují stejnou dobu T (periodu) k vykonání jednoho oběhu. S využitím rov. (29.2) se můžeme přesvědčit o tom, že díváme-li se ve směru indukce $\boldsymbol{B}$, obíhá kladná částice vždycky v kladném smyslu (tj. proti směru otáčení hodinových ručiček), zatímco částice se záporným nábojem obíhá ve směru opačném.



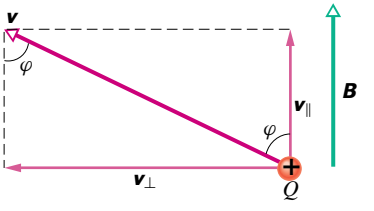
Obr. 29.10 Elektrony obíhají v komůrce obsahující plyn za nízkého tlaku (stopa elektronů je kruhová). Magnetické pole $\boldsymbol{B}$, které je kolmé k rovině obrázku a směřuje k nám, je homogenní v celém objemu komůrky. Všimněte si radiálně působící magnetické síly $\boldsymbol{F}_B$: protože se částice pohybuje rovnoměrným pohybem po kružnici, síla $\boldsymbol{F}_B$ míří stále do jejího středu. Použijte pravidla pravé ruky a přesvědčete se, že síla $\boldsymbol{F}_B = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ má příslušný směr.

Trajektorie ve tvaru šroubovice

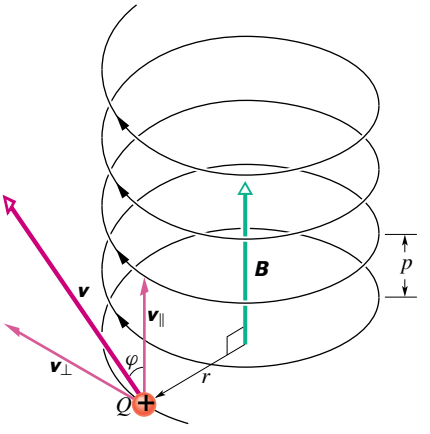
Ukážeme, že má-li nabitá částice letící v homogenním magnetickém poli $\boldsymbol{B}$ nenulovou složku rychlosti ve směru $\boldsymbol{B}$, bude se pohybovat po šroubovici s osou ve směru pole. Na obr. 29.11a je vektor rychlosti částice $\boldsymbol{v}$ rozložen vzhledem ke směru $\boldsymbol{B}$ do dvou průmětů — rovnoběžného $\boldsymbol{v}_\parallel$ a kolmého $\boldsymbol{v}_\perp$ a platí

$$v_\parallel = v\cos\varphi \qquad \text{a} \qquad v_\perp = v\sin\varphi. \qquad (29.20)$$

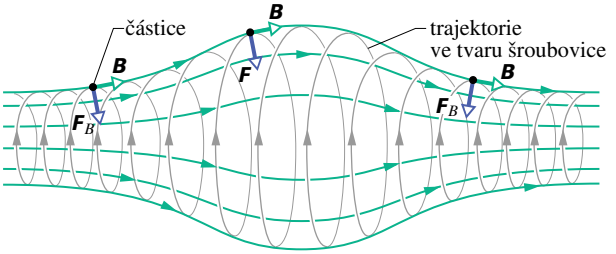
Rovnoběžná složka $v_\parallel$ určuje *stoupání* p šroubovice, což je vzdálenost mezi dvěma sousedními závity (obr. 29.11b), a je rovno vzdálenosti, o kterou se částice posune za dobu jedné periody (jedné otočky) ve směru magnetické indukce $\boldsymbol{B}$. Kolmá složka $v_\perp$ určuje poloměr šroubovice a je právě tou veličinou, kterou musíme dosadit do rov. (29.16) za v.



(*a*)



(*b*)



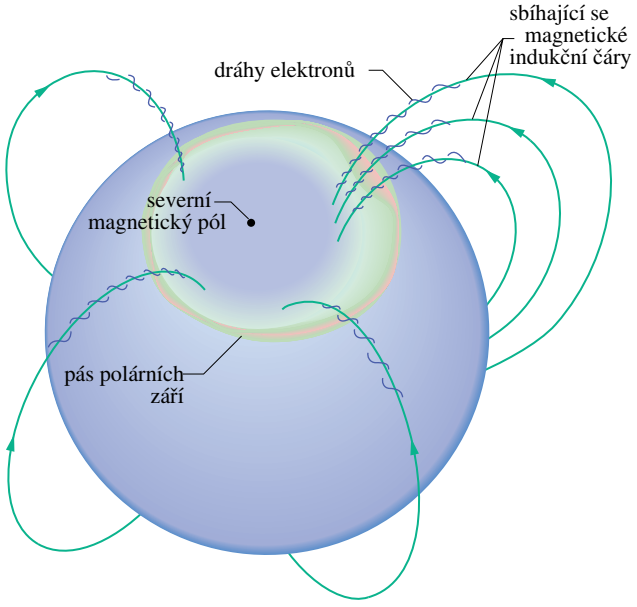
(*c*)

Obr. 29.11 (a) Nabitá částice se pohybuje v magnetickém poli tak, že její rychlost svírá úhel φ s vektorem magnetické indukce. (b) Částice se pohybuje po šroubovici, která má poloměr r a stoupání p. (c) Nabitá částice se pohybuje po šroubovici v nehomogenním magnetickém poli. (Létá tam a zpátky mezi konci, v nichž je magnetické pole dostatečně silné.) Všimněte si, že vektory magnetické síly na obou stranách magnetické pasti mají složku směřující do středu pasti.

Na obr. 29.11c je znázorněna nabitá částice pohybující se po šroubovici v nehomogenním magnetickém poli. Z větší hustoty indukčních čar na obou krajích je vidět, že magnetické pole je zde silnější. Je-li magnetické pole na konci trubice dostatečně silné, částice se od něj odrazí. Odráží-li se částice od obou konců, říkáme, že je zachycena v *magnetické pasti*, případně v *magnetické nádobě*.

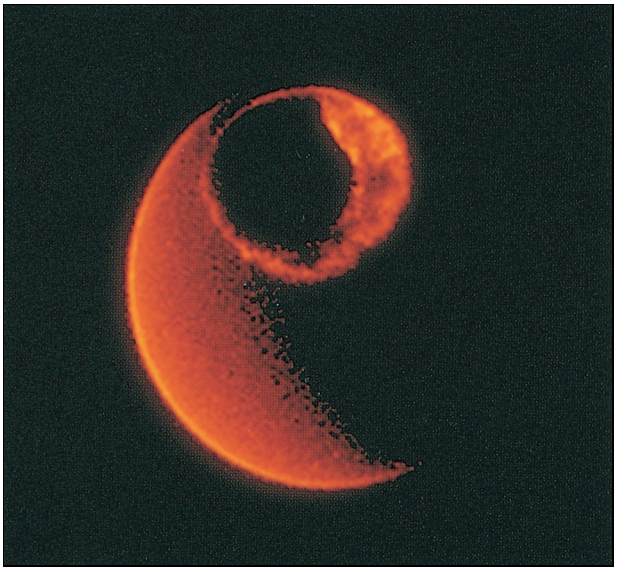
Magnetické pole Země takto zachytává elektrony a protony, a tak se vytvářejí *Van Allenovy radiační pásy* nad hranicí atmosféry mezi severním a jižním geomagnetickým pólem Země. Zachycené částice se odrážejí tam a zpět mezi oběma konci této magnetické pasti (trvá jim to zhruba několik sekund).

Když mohutná sluneční erupce vymrští velké množství elektronů a protonů s vysokými energiemi a ty doletí do Van Allenových radiačních pásů, vznikne v místech, kde se elektrony odrážejí, elektrické pole. Toto pole ruší odraz a žene elektrony dolů do atmosféry, kde se srážejí s atomy a molekulami kyslíku a dusíku a tím vyvolávají jejich záření. Tak vzniká *polární záře* — jev, připomínající svítící záclonu, která visí dolů a sahá až do výšky asi 100 km nad Zemí. Zelené světlo je emitováno atomy kyslíku a růžové světlo molekulami dusíku. Často je však světlo tak mdlé, že je vnímáme pouze jako bílé.



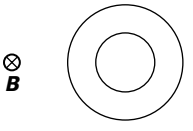
Obr. 29.12 Pás polárních září obklopující zemský magnetický severní pól (nachází se nyní na Kanadském ostrově Bathurst). Indukční čáry magnetického pole Země se sbíhají k tomuto pólu. Elektrony pohybující se směrem k Zemi jsou zachyceny a pohybují se po šroubovicích podél indukčních čar a ve vysokých výškách vstupují do zemské atmosféry vytvářejí polární záři (uvnitř prstence).

Polární záře se vyskytuje v určité oblasti — v prstenci obepínajícím Zemi, který nazýváme *pásem polárních září* (obr. 29.12 a 29.13). Ačkoli je tato oblast velmi dlouhá, nepřesahuje její tloušťka 1 km (od severu k jihu), protože dráhy elektronů, které ji vytvářejí, se sbíhají. Elektrony se totiž pohybují dolů po zužujících se šroubovicích navinutých na sbíhající se magnetické indukční čáry.



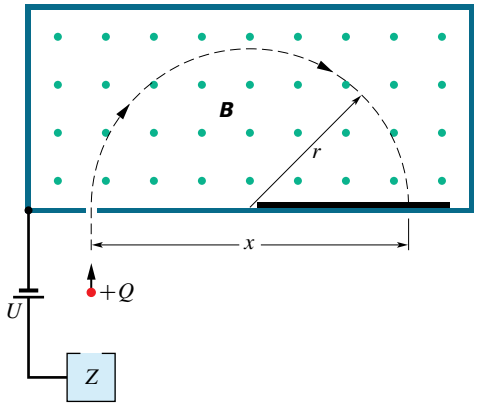
Obr. 29.13 Obrázek polární záře uvnitř severního pásu polárních září pořídila družice *Dynamic Explorer*, která využívá ultrafialového světla, emitovaného kyslíkovými atomy, jež jsou vybuzeny v oblasti polární záře (obrázek je v „umělých barvách“). Sluneční světlo dopadající na Zemi tvoří půlměsíc v levé části obrázku.

KONTROLA 4: Na obrázku jsou kruhové stopy dvou částic pohybujících se stejně velkou rychlostí v homogenním magnetickém poli, jehož indukce $\boldsymbol{B}$ je kolmá k rovině obrázku a směřuje od nás. Jednou z částic je proton a druhou elektron. (a) Která částice se pohybuje po kružnici s menším poloměrem? (b) Bude se tato částice pohybovat proti, nebo po směru otáčení hodinových ručiček?



PŘÍKLAD 29.3

Na obr. 29.14 je schematicky znázorněn princip *hmotnostního spektrometru*, který slouží k měření hmotností iontů: iont o hmotnosti m (která má být změřena) s nábojem Q vzniká ve zdroji Z a poté je urychlen elektrickým polem vytvořeným napětím U. Iont opustí zdroj Z a vlétá štěrbinou do separační komory, ve které na něj působí homogenní magnetické pole $\boldsymbol{B}$, kolmé k jeho rychlosti ($\boldsymbol{B}$ je kolmé k rovině obrázku a směřuje k nám). Magnetické pole způsobí, že se iont bude pohybovat po půlkružnici, dopadne na fotografickou desku ve vzdálenosti x od štěrbiny a exponuje ji tam. Nechť $B = 80{,}000\,\mathrm{mT}$, $U = 1\,000{,}0\,\mathrm{V}$ a $Q = +1{,}602\,2\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}$. Iont dopadne ve vzdálenosti $x = 1{,}625\,4\,\mathrm{m}$ od štěrbiny. Jaká je jeho hmotnost m, vyjádřená pomocí atomové hmotnostní jednotky ($\mathrm{u} = 1{,}660\,5\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg}$)?



Obr. 29.14 Příklad 29.3. Podstata hmotnostního spektrometru. Kladný iont je emitován zdrojem Z a po urychlení napětím U vlétá do komory nacházející se v homogenním magnetickém poli s indukcí $\boldsymbol{B}$. Iont se bude vlivem magnetické síly pohybovat po půlkružnici o poloměru r a dopadne na fotografickou desku ve vzdálenosti x od štěrbiny, kterou do komory vlétl.

ŘEŠENÍ: Nejdříve bude užitečné najít vztah mezi hmotností m iontu a naměřenou vzdáleností x. Z obr. 29.14 je patrné, že $x = 2r$, kde r je poloměr půlkružnice, po níž se pohybuje iont. Mezi poloměrem r a hmotností m platí jednoduchý vztah (29.16): $r = mv/QB$.

Dále je třeba zjistit souvislost mezi velikostí rychlosti v iontu a urychlujícím napětím U. Můžeme k tomu využít zákona zachování energie pro iont: jeho kinetická energie na konci procesu urychlování je rovna jeho potenciální energii QU na začátku urychlování. Tedy:

$$\frac{mv^2}{2} = QU$$

a

$$v = \sqrt{\frac{2QU}{m}}. \qquad (29.21)$$

Dosadíme-li vypočtenou hodnotu v do rov. (29.16), dostaneme

$$r = \frac{mv}{QB} = \frac{m}{QB}\sqrt{\frac{2QU}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{Q}},$$

tedy

$$x = 2r = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2mU}{Q}}.$$

Odtud získáme hledanou hmotnost iontu:

$$m = \frac{B^2Qx^2}{8U} =$$
$$= \frac{(0{,}080\,000\,\mathrm{T})^2(1{,}602\,2\cdot10^{-19}\,\mathrm{C})(1{,}625\,4\,\mathrm{m})^2}{8(1\,000{,}0\,\mathrm{V})} =$$
$$= 3{,}386\,3\cdot10^{-25}\,\mathrm{kg} = 203{,}93\,\mathrm{u}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 29.4

Elektron s kinetickou energií 22,5 eV vlétá do oblasti magnetického pole o velikosti $B = 4{,}55\cdot10^{-4}\,\mathrm{T}$. Úhel mezi indukcí $\boldsymbol{B}$ a rychlostí elektronu $\boldsymbol{v}$ je 65,5°. Jaké bude stoupání šroubovice, po níž se pohybuje elektron?

ŘEŠENÍ: Jak jsme již uvedli, je stoupání p vzdálenost, o kterou se elektron posune za dobu jedné periody T ve směru vektoru magnetické indukce $\boldsymbol{B}$. Tato vzdálenost je $v_\parallel T$, kde $v_\parallel$ je složka rychlosti elektronu do směru $\boldsymbol{B}$. Vyjdeme-li z rov. (29.20) a (29.17), dostaneme

$$p = v_\parallel T = v\cos\varphi\,\frac{2\pi m}{QB}. \qquad (29.22)$$

Velikost rychlosti elektronu v můžeme vypočítat z jeho kinetické energie stejně jako v případě protonu (příklad 29.1). (Kinetická energie 22,5 eV je mnohem menší než klidová energie elektronu, která je $5{,}11\cdot10^5\,\mathrm{eV}$, takže nemusíme použít relativistického vzorce pro kinetickou energii elektronu.) Vypočteme, že $v = 2{,}81\cdot10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, a po dosazení do rov. (29.22) dostaneme

$$p = (2{,}81\cdot10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(\cos 65{,}5^\circ)\cdot$$
$$\cdot\,\frac{2\pi(9{,}11\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg})}{(1{,}60\cdot10^{-19}\,\mathrm{C})(4{,}55\cdot10^{-4}\,\mathrm{T})} =$$
$$= 9{,}16\,\mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

29.6 CYKLOTRONY A SYNCHROTRONY

Otázka struktury hmoty zajímala fyziky odedávna. Jeden ze způsobů, jak získat odpověď na tuto otázku, spočívá

v tom, že necháme urychlenou nabitou částici (např. proton) dopadnout na pevný terčík. Ještě výhodnější je sestavit experiment tak, aby se mohly dva velmi urychlené protony čelně srazit. Potom můžeme z rozboru zbytků po takových srážkách poznávat vlastnosti subatomových částic hmoty. Nobelovy ceny za fyziku v roce 1976 a 1984 byly uděleny právě za takové studie.

Jak můžeme udělit protonu dostatečnou kinetickou energii? Přímý a nejjednodušší způsob spočívá v tom, že necháme částici (např. proton) s nábojem Q prolétnout mezi místy s potenciálovým rozdílem U, což zvýší její kinetickou energii o hodnotu QU. Chceme-li však získávat stále větší energii, čekají nás stále větší těžkosti při vytváření potřebného napětí U.

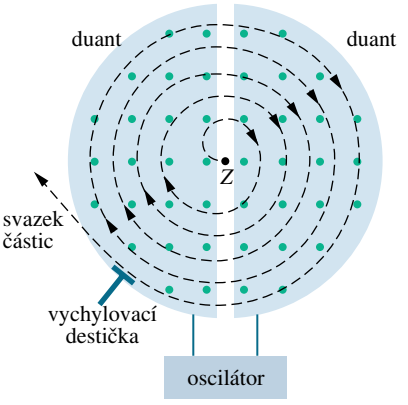
Lépe je sestavit experiment tak, aby proton obíhal po kružnici v magnetickém poli, a dodávat mu elektrickým polem malý impulz („postrčení“) při každé otočce. Otočí-li se například proton stokrát v magnetickém poli a získá-li přírůstek energie 100 keV při každém oběhu, bude končit svoje urychlování s kinetickou energií 10 MeV. Na tomto principu jsou založena dvě velmi užitečná zařízení.

Cyklotron

Obr. 29.15 znázorňuje pohled shora na **cyklotron**, ve kterém obíhají nabité částice (například protony). Dva duté půlválce ve tvaru písmene D, otevřené na rovné straně, jsou vyrobeny z neferomagnetického, elektricky vodivého materiálu (např. měděných plechů) a nacházejí se v ploché vakuové komoře. Tyto tzv. duanty jsou části elektrického oscilátoru, který vytváří střídavé napětí ve štěrbině mezi nimi. Celá komora i s duanty se nachází mezi rozsáhlými póly (o průměru až několika metrů) silného elektromagnetu (např. $B = 1{,}5$ T). Na obr. 29.15 je pole kolmé k rovině obrázku a má směr k nám.

Předpokládejme, že proton, který vylétl ze zdroje Z ve středu cyklotronu, se zpočátku pohybuje směrem k záporně nabitému levému duantu. Jeho pohyb bude zrychlený. Když ale vletí dovnitř, nebude na něj působit elektrické pole, neboť prostor v duantu je proti elektrickému poli stíněn. Magnetické pole však není duantem odstíněno, neboť měď je diamagnetická (viz kap. 32), takže proton se bude v duantu pohybovat po kruhové trajektorii, jejíž poloměr (závislý na rychlosti) je dán rov. (29.16), tj. má velikost $r = mv/QB$.

Během doby, kdy proton letí uvnitř levého duantu, změníme polaritu napětí mezi oběma duanty. Proton tedy bude mít *opět* před sebou záporně nabitý duant a bude znovu urychlován. Tento proces pokračuje, obíhající proton stále drží krok s oscilacemi napětí mezi duanty, dokud se nedostane po spirálovité trajektorii k okraji duantu a nevyletí ven z cyklotronu.



Obr. 29.15 Schematické znázornění cyklotronu se zdrojem částic Z a oběma duanty. Homogenní magnetické pole je kolmé k rovině obrázku a směřuje k nám. Protony obíhají po spirálovité trajektorii a získávají energii pokaždé, když procházejí štěrbinou mezi duanty.

Aby cyklotron takto úspěšně urychloval protony, musí být frekvence f, se kterou proton obíhá v magnetickém poli (a která podle rov. (29.18) *nezávisí* na jeho rychlosti), rovna frekvenci f_{osc} elektrického oscilátoru, čili musí platit

$$f = f_{\text{osc}} \quad \text{(rezonanční podmínka)}. \tag{29.23}$$

Má-li totiž energie obíhajícího protonu vzrůstat, musí být frekvence f_{osc} jednotlivých „postrčení“ rovna frekvenci, se kterou proton obíhá v magnetickém poli.

Zkombinujeme-li rov. (29.18) a (29.23), můžeme napsat rezonanční podmínku ve tvaru

$$QB = 2\pi m f_{\text{osc}}. \tag{29.24}$$

Náboj Q je vždy konstantní. V nerelativistickém případě je konstantní i hmotnost m částice. Oscilátor pracuje na jediné pevné frekvenci f_{osc}. Cyklotron potom ladíme pomocí změn B, dokud není splněna rov. (29.24) a neobjeví se svazek urychlených protonů.

Protonový synchrotron

Pokud mají protony energii vyšší než cca 50 MeV, začínají klasické cyklotrony selhávat z principiálních důvodů. Základním předpokladem pro činnost cyklotronu je totiž nezávislost frekvence obíhání nabité částice na její rychlosti. To ale platí pouze pro rychlosti mnohem menší, než je rychlost světla. Pokud částice dosahují velkých rychlostí, musíme považovat problém za relativistický.

Z teorie relativity plyne, že obíhající nabitá částice, jejíž rychlost se blíží rychlosti světla, má hmotnost větší, než když byla v klidu. Podle rov. (29.24) tedy potřebuje stále

delší dobu k vykonání jednoho oběhu a její frekvence obíhání postupně klesá. Velmi rychlé protony tedy „vypadnou z rytmu“ frekvence cyklotronového oscilátoru (která je, jak již bylo uvedeno, konstantní). Nakonec přestane energie urychlovaného protonu růst.

Existuje však ještě další problém. Chceme-li například, aby proton získal energii 500 GeV v magnetickém poli o indukci 1,5 T, musel by se pohybovat po kruhové dráze o poloměru 1,1 km. Magnet konvenčního cyklotronu, který by protony urychloval na tuto energii, by byl neúnosně drahý, plocha jeho pólových nástavců by musela být velmi rozsáhlá, asi $4{\cdot}10^6\ \mathrm{m}^2$.

Protonový synchrotron je založen na principu, který odstraňuje obě tyto nevýhody. Velikost indukce B magnetického pole ani frekvence oscilátoru f_{osc} nejsou v tomto případě konstantní, jako tomu je u konvenčního cyklotronu. Synchrotron je navržen tak, aby se obě veličiny mohly během urychlovacího cyklu s časem měnit, což způsobí, že (1) frekvence obíhajícího protonu zůstává v rezonanci s oscilátorem po celou dobu urychlování, (2) protony se pohybují po kruhové trajektorii (a nikoli po spirále, jako tomu bylo v případě cyklotronu). Potom stačí, aby se magnetické pole nacházelo pouze podél této kružnice a nikoli na celé ploše kruhu (o obsahu např. $4{\cdot}10^6\ \mathrm{m}^2$). Kružnice však musí mít velký poloměr, má-li být dosaženo vysokých energií. Protonový synchrotron ve Fermiho národní laboratoři urychlovačů (Fermilab) v Illinois (obr. 29.16) má obvod 6,3 km a může produkovat protony s energií přibližně $1\ \mathrm{TeV} = 10^{12}\ \mathrm{eV}$.



Obr. 29.16 Letecký pohled na Fermilab

PŘÍKLAD 29.5

Předpokládejme, že cyklotron pracuje s frekvencí oscilátoru 12 MHz a má poloměr duantu $R = 53\ \mathrm{cm}$.

(a) Jak silné magnetické pole je potřeba k tomu, aby mohly být v tomto cyklotronu urychlovány deuterony?

ŘEŠENÍ: Deuteron má stejný náboj jako proton, ale asi dvakrát větší hmotnost ($m \doteq 3{,}34{\cdot}10^{-27}\ \mathrm{kg}$). Na základě rov. (29.24) můžeme psát

$$B = 2\pi m \frac{f_{\mathrm{osc}}}{Q} = \frac{2\pi(3{,}34{\cdot}10^{-27}\ \mathrm{kg})(12{\cdot}10^{6}\ \mathrm{s}^{-1})}{(1{,}60{\cdot}10^{-19}\ \mathrm{C})} =$$
$$= 1{,}57\ \mathrm{T} \doteq 1{,}6\ \mathrm{T}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že chceme-li urychlit protony, musí být magnetická indukce asi dvakrát menší při téže frekvenci oscilátoru 12 MHz.

(b) Jaká je výsledná kinetická energie deuteronu?

ŘEŠENÍ: Z rov. (29.16) vypočteme rychlost deuteronu na kruhové dráze o poloměru R:

$$v = \frac{RQB}{m} = \frac{(0{,}53\ \mathrm{m})(1{,}60{\cdot}10^{-19}\ \mathrm{C})(1{,}57\ \mathrm{T})}{(3{,}34{\cdot}10^{-27}\ \mathrm{kg})} =$$
$$= 3{,}99{\cdot}10^{7}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Této rychlosti odpovídá kinetická energie

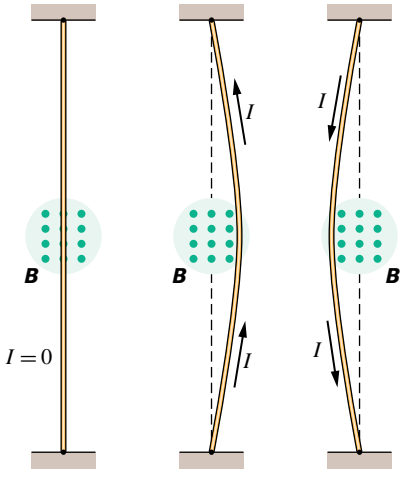
$$E_{\mathrm{k}} = \tfrac{1}{2}mv^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}(3{,}34{\cdot}10^{-27}\ \mathrm{kg})(3{,}99{\cdot}10^{7}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{1\ \mathrm{MeV}}{1{,}60{\cdot}10^{-13}\ \mathrm{J}}\right) =$$
$$= 16{,}6\ \mathrm{MeV} \doteq 17\ \mathrm{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

29.7 AMPÉROVA SÍLA

Při výkladu Hallova jevu jsme ukázali, že magnetické pole působí „boční“ silou na pohybující se elektrony ve vodiči. Protože vodivostní elektrony nemohou vodič opustit, přenáší se tato síla na samotný vodič.

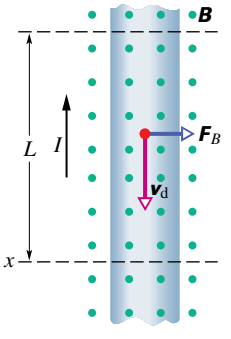
Na obr. 29.17a je svisle umístěný ohebný vodič, jímž protéká elektrický proud. Vodič je na obou koncích upevněn a nachází se mezi pólovými nástavci magnetu, jehož magnetické pole je kolmé k rovině obrázku a směřuje k nám. Na obr. 29.17b protéká proud vodičem směrem nahoru: vodič je vychylován směrem doprava. Na obr. 29.17c je obrácen směr proudu a vodič se vychyluje doleva.

Na obr. 29.18 je znázorněn malý úsek vodičů z obrázku 29.17. Sledujme jeden z vodivostních elektronů, pohybující se driftovou rychlostí v_{d} směrem dolů. Podle



Obr. 29.17 Na obrázku je ohebný vodič, umístěný mezi pólovými nástavci magnetu. (a) Neprotéká-li vodičem proud, je vodič rovný. (b) Teče-li vodičem proud směrem nahoru, prohne se doprava. (c) Teče-li vodičem proud směrem dolů, prohne se doleva. Kontakty pro přívod proudu na obou koncích vodiče nejsou zakresleny.

rov. (29.3) pro $\varphi = 90°$ zjistíme, že na něj bude působit síla $\boldsymbol{F}_B$ o velikosti $Qv_\mathrm{d}B$. Z rov. (29.2) plyne, že tato síla směřuje doprava, takže můžeme očekávat, že na vodič jako celek bude působit síla směrem doprava (v souladu s obr. 29.17b).



Obr. 29.18 Detailnější pohled na úsek vodiče z obr. 29.17b. Elektrický proud teče směrem nahoru, což znamená, že elektrony se pohybují driftovým pohybem směrem dolů. Magnetické pole, kolmé na rovinu obrázku, má směr k nám a způsobuje, že elektrony i s vodičem jsou vychylovány směrem doprava.

Jestliže bychom na obr. 29.18 obrátili *buď* směr magnetického pole, *nebo* směr elektrického proudu, změnil by se směr síly působící na vodič a ta by směřovala nyní doleva. Všimněte si, že výsledek nezáleží na tom, zda uvažujeme záporné náboje, pohybující se ve vodiči směrem dolů (případ demonstrovaný na obrázku), nebo kladné náboje, pohybující se směrem nahoru. Směr vychylující síly, působící na vodič, je týž. Neuděláme tedy chybu, budeme-li se držet dohodnutého směru proudu, který odpovídá pohybu kladných nosičů náboje.

Uvažujme úsek přímého vodiče na obr. 29.18. Vodivostní elektrony v tomto úseku vodiče se budou pohybovat driftovou rychlostí dolů kolmo k řezu x po dobu $t = L/v_\mathrm{d}$. Za tuto dobu projde řezem náboj

$$Q = It = \frac{IL}{v_\mathrm{d}}.$$

Dosadíme-li tento výsledek do rov. (29.3), dostaneme

$$F_B = Qv_\mathrm{d}B\sin\varphi = \\ = \frac{IL}{v_\mathrm{d}}v_\mathrm{d}B\sin 90°,$$

odkud

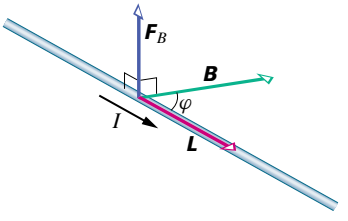
$$F_B = ILB. \qquad (29.25)$$

Tato rovnice určuje sílu, kterou působí magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B}$ na úsek přímého vodiče délky L protékený proudem I a ležícím v rovině kolmé k $\boldsymbol{B}$.

Jestliže magnetické pole není kolmé k vodiči (obrázek 29.19), bude magnetická síla dána zobecněním rovnice (29.25). S užitím vektorů dostáváme vztah

$$\boldsymbol{F}_B = I\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B} \qquad \text{(síla působící na vodič protékaný proudem),} \qquad (29.26)$$

který je v souladu s rov. (29.2). *Vektor délky* $\boldsymbol{L}$ má směr totožný se směrem proudu. Rov. (29.26) je ekvivalentní s rov. (29.2) v tom smyslu, že kterákoli z nich může být chápána jako definiční vztah pro indukci magnetického pole $\boldsymbol{B}$. V normě a v metrologii však definujeme magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ pomocí rov. (29.26), neboť je mnohem snadnější měřit magnetickou sílu působící na vodič s proudem než sílu působící na osamělou pohybující se nabitou částici.



Obr. 29.19 Přímým vodičem délky L protéká proud I. Vodiči přiřadíme vektor $\boldsymbol{L}$ ve směru proudu. Svírá-li $\boldsymbol{L}$ úhel φ se směrem magnetické indukce $\boldsymbol{B}$, pak na vodič působí Ampérova síla $\boldsymbol{F}_B = I\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}$.

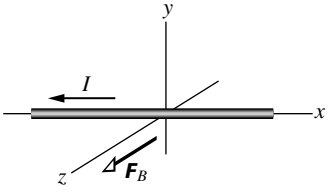
Není-li vodič přímý, můžeme jej myšleně rozdělit na infinitezimální délkové elementy $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ a použít rov. (29.26)

pro každý z nich:

$$d\boldsymbol{F}_B = I\, d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}. \qquad (29.27)$$

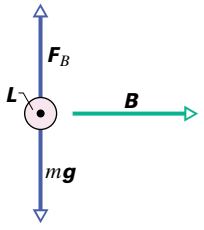
Výslednou sílu působící na proudovodič libovolného tvaru, můžeme získat integrací rov. (29.27). Sílu vyjádřenou rov. (29.26), resp. (29.27) nazýváme *Ampérova síla*.

KONTROLA 5: Na obrázku je zakreslen vodič protékaný proudem I, nacházející se v magnetickém poli $\boldsymbol{B}$, a Ampérova síla $\boldsymbol{F}_B$ působící na vodič. Magnetické pole je orientováno tak, že síla je maximální. Jaký směr má magnetická indukce?



PŘÍKLAD 29.6

Přímým vodorovným měděným vodičem protéká proud $I = 28$ A. Určete magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$, jejíž velikost bude mít minimální hodnotu potřebnou k tomu, aby se vodič vznášel, tj. k tomu, aby tíhová síla byla vykompenzována Ampérovou silou? Délková hustota vodiče je 46,6 g·m^{-1}.



Obr. 29.20 Příklad 29.6. Vodič protékaný proudem (znázorněn průřez) se může vznášet — „levitovat“ — v magnetickém poli. Proud ve vodiči je kolmý k rovině obrázku a teče směrem k nám; magnetická indukce má směr doprava.

ŘEŠENÍ: Na obr. 29.20 je znázorněna situace pro úsek vodiče délky L, kterým protéká proud kolmo k rovině obrázku směrem k nám. Zadání splňuje vektor magnetické indukce, který leží ve vodorovné rovině, je kolmý k vodiči a míří doprava.

Aby byla Ampérova síla v rovnováze s tíhovou silou působící na úsek vodiče, musí platit $F_B = mg$, kde m je hmotnost tohoto úseku. Po dosazení za F_B z rov. (29.25) dostaneme

$$ILB = mg$$

a odtud

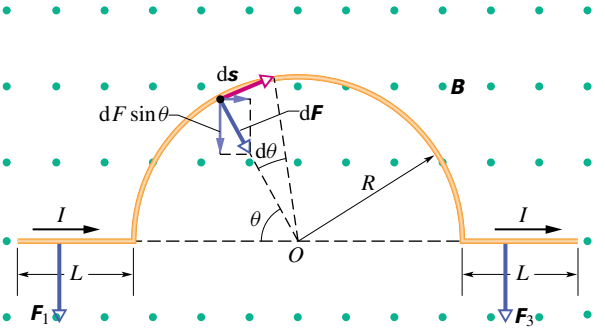
$$B = \frac{(m/L)g}{I} = \frac{(46{,}6\cdot10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^{-1}})(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}{(28\ \mathrm{A})} =$$

$$= 1{,}6\cdot10^{-2}\ \mathrm{T}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato hodnota je asi 160krát větší než velikost indukce magnetického pole Země.

PŘÍKLAD 29.7

Na obr. 29.21 je vodič, jehož střední část má tvar půlkružnice. Celý vodič se nachází v homogenním magnetickém poli $\boldsymbol{B}$, které je kolmé k rovině obrázku a míří k nám. Jaká výsledná Ampérova síla $\boldsymbol{F}$ působí na tento vodič, protéká-li jím proud I?



Obr. 29.21 Příklad 29.7. Úsek vodiče s proudem I se nachází v magnetickém poli. Výsledná Ampérova síla, která na něj působí, směřuje dolů.

ŘEŠENÍ: Síla, která působí na každý ze dvou přímých úseků vodiče, má velikost danou rov. (29.25)

$$F_1 = F_3 = ILB$$

a směřuje dolů, jak ukazují vektory sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_3$ na obr. 29.21.

Na infinitezimální délkový element $d\boldsymbol{s}$ centrálního oblouku působí podle rov. (29.27) síla $d\boldsymbol{F}$, jejíž velikost je

$$dF = IB\,ds = IB(R\,d\theta)$$

a která směřuje radiálně k bodu O, tj. ke středu oblouku. Ve výsledné síle se projeví pouze složka síly $dF\sin\varphi$ působící dolů. Vodorovná složka této síly se vyruší s vodorovnou složkou síly, která působí na element oblouku symetricky položený (vzhledem k ose symetrie půlkružnice).

Celková síla působící na půlkružnici směřuje dolů a má velikost

$$F_2 = \int_0^{\pi} dF\sin\theta = \int_0^{\pi} (IBR\,d\theta)\sin\theta =$$

$$= IBR\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = 2IBR.$$

Výsledná síla působící na celý vodič, je potom

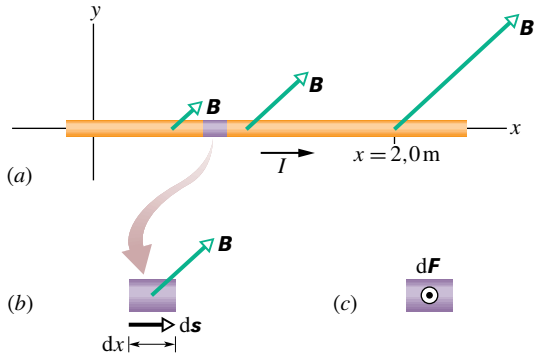
$$F = F_1 + F_2 + F_3 = ILB + 2IBR + ILB =$$

$$= 2IB(L+R). \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že tato síla je rovna síle, která by působila na přímý vodič délky $2(L + R)$. Lze dokázat, že to platí bez ohledu na to, jaký tvar má střední část vodiče.

PŘÍKLAD 29.8

Na obr. 29.22a je vodič, kterým protéká proud $I = 6{,}0\,\mathrm{A}$ v kladném směru osy x. Vodič se nachází v *nehomogenním* magnetickém poli charakterizovaném vektorem magnetické indukce $\boldsymbol{B} = (2{,}0x\boldsymbol{i} + 2{,}0x\boldsymbol{j})\,\mathrm{T{\cdot}m^{-1}}$, kde $\boldsymbol{B}$ i x jsou vyjádřeny v jednotkách SI. Určete Ampérovu sílu $\boldsymbol{F}_B$ působící na úsek vodiče ohraničený souřadnicemi $x = 0$ a $x = 2{,}0\,\mathrm{m}$.



Obr. 29.22 Příklad 29.8. (a) Vodič protékaný proudem I se nachází v nehomogenním magnetickém poli $\boldsymbol{B}$. (b) Infinitezimální délkový element $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ o velikosti $\mathrm{d}x$. (c) Síla $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ působící na element definovaný v (b) způsobená magnetickým polem. Tato síla je kolmá k rovině obrázku a má směr k nám.

ŘEŠENÍ: Poněvadž magnetické pole podél vodiče je nehomogenní, musíme rozdělit vodič na infinitezimální úseky a potom použít rov. (29.27) k určení síly $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_B$, která působí na každý takový úsek. Nakonec sečteme (integrací) síly $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_B$ a najdeme tím celkovou Ampérovu sílu $\boldsymbol{F}_B$ působící na celý úsek vodiče.

Na obr. 29.22b je infinitezimální délkový element $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ vodiče. Tento vektor má délku $\mathrm{d}x$ a směr elektrického proudu (tj. kladný směr osy x). Můžeme ho tedy napsat ve tvaru

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i}. \qquad (29.28)$$

Podle rov. (29.27) je síla $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_B$ působící na element $\mathrm{d}x$ vodiče rovna

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_B &= I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B} = \\ &= I\,(\mathrm{d}x\boldsymbol{i}) \times (2{,}0x\boldsymbol{i} + 2{,}0x\boldsymbol{j}) = \\ &= I\,\mathrm{d}x\big(2{,}0x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}) + 2{,}0x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\big) = \\ &= I\,\mathrm{d}x(0 + 2{,}0x\boldsymbol{k}) = 2{,}0Ix\,\mathrm{d}x\boldsymbol{k}, \qquad (29.29)\end{aligned}$$

kde konstantě 2,0 přísluší jednotka tesla na metr. Z tohoto výsledku vidíme, že magnetická síla nezávisí na x-ové složce vektoru $\boldsymbol{B}$ (neboť tato složka má stejný směr jako proud). Rovněž vidíme, že magnetická síla $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_B$, působící na element $\mathrm{d}x$ vodiče, má směr rovnoběžný s kladným směrem osy z (na obr. 29.22c směrem k nám) a její velikost je $\mathrm{d}F_B = (2{,}0I\,x\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{T{\cdot}m^{-1}}$.

Poněvadž směr síly $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_B$ je stejný pro všechny elementy $\mathrm{d}x$ vodiče, můžeme najít velikost celkové síly sečtením velikostí všech sil $\mathrm{d}F_B$ od $x = 0$ po $x = 2{,}0\,\mathrm{m}$:

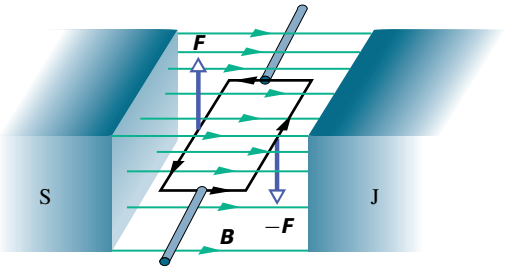
$$\begin{aligned}F_B &= \int \mathrm{d}F_B = \int_0^{2{,}0} (2{,}0\,\mathrm{T{\cdot}m^{-1}})Ix\,\mathrm{d}x = \\ &= (2{,}0\,\mathrm{T{\cdot}m^{-1}})I\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{2{,}0} = \\ &= (2{,}0\,\mathrm{T{\cdot}m^{-1}})(6{,}0\,\mathrm{A})(\tfrac{1}{2})(2{,}0\,\mathrm{m})^2 = 24(\mathrm{T{\cdot}A{\cdot}m}) = \\ &= 24\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

Tato síla má směr kladné osy z.

29.8 MOMENT SÍLY PŮSOBÍCÍ NA PROUDOVOU SMYČKU

Průmysl všech zemí světa využívá práci elektrických motorů. Síly, které konají tuto práci, jsou síly, kterými magnetické pole působí na vodič protékaný proudem, které jsme studovali v předcházejícím odstavci.

Na obr. 29.23 je znázorněn princip jednoduchého elektromotoru, skládajícího se ze smyčky protékané proudem (proudové smyčky) umístěné v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$. Na smyčku působí dvě magnetické síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ tak, že vytvářejí silový moment, který způsobí otáčení smyčky. Třebaže jsme vynechali mnoho podstatných konstrukčních detailů, vysvětluje obrázek dostatečně dobře působení magnetického pole na proudovou smyčku. Rozeberme je podrobněji.



Obr. 29.23 Základní prvky elektrického motoru. Pravoúhlá smyčka protékaná proudem, volně otáčivá kolem pevné osy, se nachází v magnetickém poli. Komutátor (není zakreslen) mění směr proudu každou polovinu otáčky, takže silový moment má vždy tentýž směr.

Na obr. 29.24a je (nedeformovatelná) obdélníková smyčka se stranami a a b, kterou protéká proud I a která se nachází v homogenním magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$. Umístíme ji tak, že její delší strany, označené 1 a 3, jsou vždy kolmé ke směru pole (které je kolmé k rovině obrázku a směřuje od nás), na rozdíl od krátkých stran, označených 2 a 4, které v obecné poloze nejsou k poli kolmé. Vodiče, přivádějící proud do smyčky a ven z ní, jsou ovšem nutné, ale pro přehlednost nejsou na obrázku zakresleny.

Abychom mohli popsat orientaci smyčky v magnetickém poli, zavádíme vektor normály $\boldsymbol{n}$, který je kolmý k ploše smyčky. Obr. 29.24b ukazuje použití pravidla pravé ruky k určení směru $\boldsymbol{n}$: orientujeme-li ohnuté prsty pravé ruky ve směru elektrického proudu ve smyčce, ukáže vztyčený palec potom směr vektoru $\boldsymbol{n}$.

Nechť vektor $\boldsymbol{n}$ smyčky svírá úhel θ s vektorem magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ (obr. 29.24c). Nalezněme celkovou sílu a celkový moment sil působící na smyčku v této poloze.

Výsledná síla je rovna vektorovému součtu sil působících na každou ze čtyř stran smyčky. V případě strany 2 má vektor $\boldsymbol{L}$, vystupující v rov. (29.26), směr proudu a jeho velikost je b. Úhel mezi vektory $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{B}$ pro stranu 2 je $90^\circ - \theta$ (obr. 29.24c). Velikost síly působící na tuto stranu je

$$F_2 = IbB\sin(90^\circ - \theta) = IbB\cos\theta. \qquad (29.30)$$

Snadno se přesvědčíme o tom, že síla $\boldsymbol{F}_4$, působící na stranu 4, má stejnou velikost jako síla $\boldsymbol{F}_2$, ale opačný směr. Síly $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_4$ se tedy vyruší. Jejich výslednice je nulová. A protože spojnice jejich působišť leží v ose smyčky, bude jejich výsledný silový moment rovněž nulový.

Situace je odlišná pro strany 1 a 3. Pro ně je velikost obou sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_3$ rovna IaB, směry však mají opačné, takže nemohou uvést smyčku do posuvného pohybu nahoru nebo dolů. Avšak, jak je ukázáno na obr. 29.24c, *neleží* tyto dvě síly na společné přímce, takže vytvářejí nenulový výsledný moment sil. Tento moment se snaží otočit smyčku tak, aby normálový vektor $\boldsymbol{n}$ měl směr magnetické indukce $\boldsymbol{B}$. Rameno každé ze sil vůči ose otáčení je $(b/2)\sin\theta$, a tedy velikost výsledného momentu M' obou sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_3$ je (obr. 29.24c)

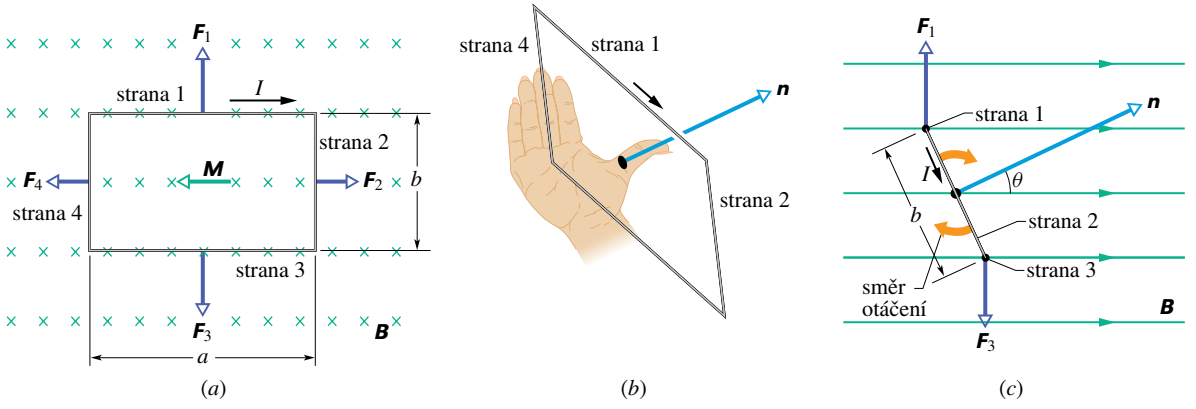
$$M' = \left(IaB\frac{b}{2}\sin\theta\right) + \left(IaB\frac{b}{2}\sin\theta\right) = \\ = IabB\sin\theta.$$

Nyní nahradíme jednu smyčku *cívkou*, složenou z N smyček neboli *závitů*. Dále předpokládejme, že závity jsou vinuty dostatečně těsně k sobě, takže je můžeme chápat tak, jako by měly tentýž rozměr a ležely v jedné rovině. Potom říkáme, že tvoří *plochou cívku*. Na každý ze závitů působí moment M', takže celkový moment působící na plochou cívku je

$$M = NM' = NIabB\sin\theta = (NIS)B\sin\theta, \qquad (29.31)$$

kde $S = ab$ je obsah plochy ohraničené jedním závitem cívky. Veličiny v závorkách (NIS) jsme záměrně zařadili k sobě, neboť všechny charakterizují vlastnosti cívky; je to počet závitů, proud tekoucí cívkou a obsah plochy jednoho závitu. Dá se ukázat, že rov. (29.31) platí pro všechny ploché cívky bez ohledu na jejich tvar za předpokladu, že magnetické pole je homogenní.

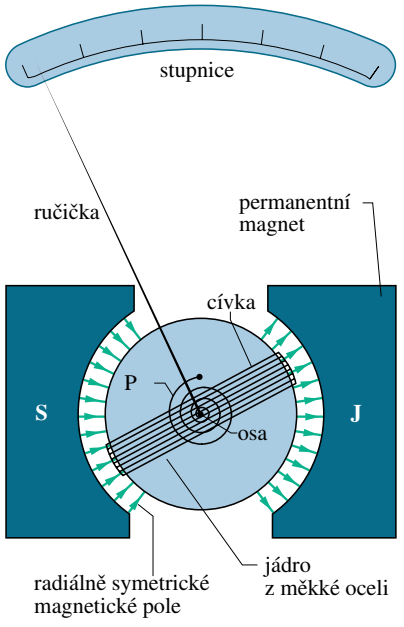
Zajímavé je sledovat pohyb vektoru $\boldsymbol{n}$, který má podle pravidla pravé ruky směr normály k rovině cívky. Z rov. (29.31) plyne, že magnetické pole bude plochou cívku protékanou proudem stáčet do polohy, ve které bude vektor $\boldsymbol{n}$ souhlasně rovnoběžný se směrem magnetické indukce pole.



Obr. 29.24 Obdélníková smyčka o délce a a šířce b, kterou protéká proud I, se nachází v homogenním magnetickém poli. Moment síly $\boldsymbol{M}$ se snaží otočit normálový vektor $\boldsymbol{n}$ do směru magnetického pole. (a) Smyčka, jak ji vidíme ze směru magnetického pole. (b) Pohled na smyčku z perspektivy. Je ukázáno použití pravidla pravé ruky, pomocí něhož lze stanovit směr $\boldsymbol{n}$: je kolmý na plochu smyčky. (c) Boční pohled na smyčku. Smyčka rotuje tak, jak je ukázáno na obrázku.

PŘÍKLAD 29.9

Analogové voltmetry a ampérmetry pracují tak, že měří silový moment, kterým působí magnetické pole na cívku protékanou proudem. Ručička přístroje ukazuje na stupnici výsledek. Na obr. 29.25 je znázorněna podstata *galvanometru*, který je základem většiny analogových ampérmetrů a voltmetrů. Uvažovaná cívka je 2,1 cm vysoká a 1,2 cm široká, má 250 závitů a může se otáčet kolem osy kolmé k rovině obrázku v magnetickém poli o velikosti $B = 0{,}23$ T, které je v rovině obrázku radiálně symetrické. Díky jádru je magnetické pole ve štěrbině kolmé k normálovému vektoru roviny cívky, ať je cívka natočena jakkoli. Pružina P působí silou, jejíž moment vyrovnává moment magnetické síly, takže stejnosměrnému proudu I v cívce odpovídá jednoznačně určitá úhlová výchylka φ. Nechť proud 100 μA způsobí úhlovou výchylku 28°. Jaká musí být torzní tuhost k_t pružiny, vystupující v rov. (16.24) ($M = -k_t\varphi$)?



Obr. 29.25 Příklad 29.9. Základní součásti, z nichž se skládá galvanometr. Podle potřeby jej lze konstrukčně upravit na ampérmetr nebo voltmetr.

ŘEŠENÍ: Položíme-li velikost momentu magnetické síly z rov. (29.31) rovnu velikosti silového momentu vyvolaného pružinou, dostaneme

$$NISB\sin\theta = k_t\varphi, \qquad (29.32)$$

ve kterém je φ úhlová výchylka cívky, resp. ručičky, a $S = 2{,}52{\cdot}10^{-4}\ \mathrm{m}^2$ je průřez cívky. Protože výsledné magnetické pole procházející cívkou je vždy kolmé k normálovému vektoru cívky, je $\theta = 90°$.

Z rov. (29.32) dostaneme

$$k_t = NISB\frac{\sin\theta}{\varphi} =$$
$$= (250)(100{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{A})(2{,}52{\cdot}10^{-4}\ \mathrm{m}^2)\cdot$$
$$\cdot\frac{(0{,}23\ \mathrm{T})(\sin 90°)}{(28°)(2\pi/360°)} =$$
$$= 3{,}0{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{N{\cdot}m{\cdot}rad^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Moderní ampérmetry a voltmetry jsou ovšem většinou přístroje digitální s přímým čtením hodnoty měřené veličiny a pracují na jiném principu, který nepoužívá otáčivé cívky.

29.9 MAGNETICKÝ DIPÓL

Cívku protékanou proudem, s níž jsme se setkali v předcházejícím článku, můžeme charakterizovat pomocí jejího **magnetického dipólového momentu** $\boldsymbol{\mu}$. Směr $\boldsymbol{\mu}$ je stejný jako je směr normálového vektoru $\boldsymbol{n}$ k ploše cívky (obr. 29.24c). Velikost $\boldsymbol{\mu}$ definujeme vztahem:

$$\mu = NIS \quad \text{(magnetický dipólový moment).} \qquad (29.33)$$

Rov. (29.31) pak můžeme zapsat ve tvaru

$$M = \mu B\sin\theta, \qquad (29.34)$$

kde θ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{B}$.

To vše lze vystihnout vektorovým zápisem

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{B}, \qquad (29.35)$$

což velmi připomíná podobný vztah pro moment síly, kterým působí *elektrické* pole na *elektrický* dipól, tj. rov. (23.34):

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}.$$

Obecně lze říci, že silový moment způsobený vnějším polem — ať už elektrickým nebo magnetickým — je roven vektorovému součinu příslušného dipólového momentu $\boldsymbol{p}$, resp. $\boldsymbol{\mu}$ s vektorem $\boldsymbol{E}$, resp. $\boldsymbol{B}$, charakterizujícím odpovídající pole.

Protože magnetické pole působí na magnetický dipól (jakým je cívka, kterou protéká proud) momentem síly, koná se při otáčení dipólu práce. Magnetický dipól má tedy určitou **potenciální energii**, která závisí na jeho orientaci vůči poli. Pro elektrické dipóly jsme ukázali (rov. (23.38)), že

$$E_p(\theta) = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}.$$

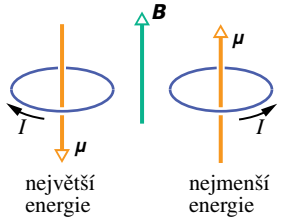
Analogicky platí pro případ magnetického pole

$$E_p(\theta) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} \quad \text{(potenciální energie magnetického dipólu).} \qquad (29.36)$$

Magnetický dipól má nejmenší potenciální energii $E_{p,min} = -\mu B \cdot \cos 0^\circ = -\mu B$, když je jeho dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$ rovnoběžný se směrem magnetického pole (obr. 29.26). Jeho největší energie $E_{p,max} = -\mu B \cos 180^\circ = +\mu B$ odpovídá případu, že $\boldsymbol{\mu}$ má opačný směr než vektor pole. Rozdíl energií mezi těmito dvěma orientacemi magnetického dipólu je

$$\Delta E_p = (+\mu B) - (-\mu B) = 2\mu B. \qquad (29.37)$$

Takovou práci musí vykonat vnější síla při otočení magnetického dipólu o 180° z počáteční polohy, v níž má dipól souhlasný směr s magnetickým polem.



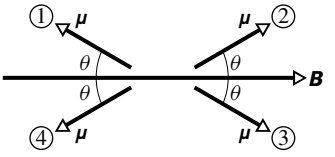
Obr. 29.26 Orientace odpovídající největší a nejmenší energii magnetického dipólu ve vnějším magnetickém poli $\boldsymbol{B}$. Směr magnetického dipólového momentu $\boldsymbol{\mu}$ je určen směrem proudu I pomocí pravidla pravé ruky, názorně ukázaného na obr. 29.24b.

Dosud jsme se zabývali pouze cívkou jako konkrétní realizací magnetického dipólu. Avšak i jednoduchý tyčový magnet je magnetickým dipólem stejně jako rotující nabitá koule. I samotnou planetu Zemi můžeme pokládat za magnetický dipól. Také většina elementárních částic včetně elektronu, protonu a neutronu má svůj magnetický dipólový moment. Pro srovnání uvádíme velikosti některých magnetických dipólových momentů (tab. 29.2):

Tabulka 29.2 **Některé magnetické dipólové momenty**

Malý tyčový magnet	$5\ \mathrm{A{\cdot}m^2}$
Země	$8{,}0{\cdot}10^{22}\ \mathrm{A{\cdot}m^2}$
Proton	$1{,}4{\cdot}10^{-26}\ \mathrm{A{\cdot}m^2}$
Elektron	$9{,}3{\cdot}10^{-24}\ \mathrm{A{\cdot}m^2}$

KONTROLA 6: Na obrázku jsou čtyři orientace magnetického dipólového momentu $\boldsymbol{\mu}$ charakterizované úhlem θ, který svírá magnetický moment se směrem magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ vnějšího magnetického pole. Seřaďte sestupně tyto orientace (a) podle velikosti momentu působícího na dipól a (b) podle potenciální energie dipólu.



PŘÍKLAD 29.10

(a) Jaký je magnetický dipólový moment cívky (př. 29.9), když jí protéká proud 100 μA?

ŘEŠENÍ: Velikost magnetického dipólového momentu cívky o příčném průřezu $S = 2{,}52{\cdot}10^{-4}\ \mathrm{m^2}$, je

$$\mu = NIS = \\ = (250)(100{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{A})(2{,}52{\cdot}10^{-4}\ \mathrm{m^2}) = \\ = 6{,}3{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{A{\cdot}m^2} = 6{,}3{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{J{\cdot}T^{-1}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(Dokažte, že použité dvojí vyjádření jednotky je identické. Druhá z těchto jednotek plyne ihned z rov. (29.36).)

Směr $\boldsymbol{\mu}$, jak plyne z obr. 29.25, je totožný se směrem ručičky přístroje. Lze to ověřit následující úvahou: Budeme-li předpokládat, že $\boldsymbol{\mu}$ má směr této ručičky, bude moment síly vyjádřený rov. (29.35) takový, že se ručička přístroje bude skutečně pohybovat ve směru otáčení hodinových ručiček podél stupnice přístroje.

(b) Nechť má magnetický dipólový moment cívky galvanometru stejný směr jako vnější magnetické pole, jehož indukce je 0,85 T. Jak velké práce je potřeba na otočení cívky o 180°?

ŘEŠENÍ: Potřebná práce je rovna přírůstku potenciální energie magnetického dipólu. Z rov. (29.37) dostaneme

$$W_{ext} = E_p(180^\circ) - E_p(0^\circ) = \Delta E_p = 2\mu B = \\ = 2(6{,}3{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{J{\cdot}T^{-1}})(0{,}85\ \mathrm{T}) = \\ = 10{,}7{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{J} \doteq 11\ \mu\mathrm{J}, \quad \text{(Odpověď)}$$

což je přibližně rovno práci potřebné k vyzvednutí tabletky acylpyrinu do výšky 3 mm.

(c) Jaká je velikost maximálního momentu síly $\boldsymbol{M}$, kterým vnější magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B}$ působí na uvedenou cívku?

ŘEŠENÍ: Z rov. (29.34) plyne, že moment síly je maximální v případě, že $\sin\theta = 1$. Pak platí

$$M = \mu B \sin\theta = \\ = (6{,}3{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{J{\cdot}T^{-1}})(0{,}85\ \mathrm{T})(1) = \\ = 5{,}4{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Magnetická indukce

Magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ je definována pomocí síly $\boldsymbol{F}_B$ působící na zkušební částici s nábojem Q, která se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ v magnetickém poli:

$$\boldsymbol{F}_B = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{29.2}$$

Jednotkou $\boldsymbol{B}$ v soustavě SI je *tesla* (T): $1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{N{\cdot}A^{-1}{\cdot}m^{-1}}$.

Hallův jev

Umístíme-li do magnetického pole $\boldsymbol{B}$ vodivý proužek průřezu S a šířky d, kterým protéká elektrický proud I, usadí se část nosičů náboje (z nichž každý má náboj o velikosti Q) na bočních stranách vodiče a tím se vytvoří napětí U_H. Polaritu U_H určuje znaménko nosičů náboje; počet nosičů náboje v objemové jednotce vodiče (koncentrace nosičů náboje) lze vypočítat ze vztahu

$$n = \frac{BId}{U_\mathrm{H}SQ}. \tag{29.12}$$

Nabitá částice pohybující se v magnetickém poli

Nabitá částice o hmotnosti m s nábojem Q, která se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ kolmou na indukci homogenního magnetického pole $\boldsymbol{B}$, koná rovnoměrný pohyb po kružnici. Použijeme-li Newtonova zákona na případ rovnoměrného pohybu po kružnici, dostaneme

$$QvB = \frac{mv^2}{r}. \tag{29.15}$$

Odtud můžeme určit poloměr r kružnice:

$$r = \frac{mv}{QB}. \tag{29.16}$$

Frekvence f, úhlová frekvence ω a perioda T pohybu jsou spojeny vztahy

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{QB}{2\pi m}. \tag{29.19, 29.18, 29.17}$$

Cyklotrony a synchrotrony

Cyklotron je urychlovač částic, ve kterém se využívá magnetické pole k udržení nabité částice na kruhové dráze o postupně vzrůstajícím poloměru tak, že nevelký urychlující elektrický potenciál může působit na částici opakovaně, a tím jí dodat vysokou energii. Poněvadž při rychlosti srovnatelné s rychlostí světla obíhající částice vypadne z rytmu frekvence oscilátoru cyklotronu, je energie dosažitelná cyklotronem omezena (tím více, čím je částice lehčí). Tyto těžkosti odstraní synchrotron, u kterého se jak velikost magnetické indukce B, tak i frekvence oscilátoru f_osc cyklicky mění, takže částice může dosáhnout nejen velké energie, ale může ji dosáhnout na dráze o konstantním poloměru.

Ampérova síla

Na přímý vodič délky L s proudem I, nacházející se v homogenním magnetickém poli $\boldsymbol{B}$, působí síla

$$\boldsymbol{F}_B = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}. \tag{29.26}$$

Síla, kterou působí magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B}$ na element $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ vodiče protékaného proudem I, je

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_B = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}. \tag{29.27}$$

Směr vektoru $\boldsymbol{L}$, resp. $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, je souhlasný se směrem proudu I.

Moment síly působící na cívku s proudem

Na cívku protékanou proudem I působí magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B}$ momentem síly $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}. \tag{29.35}$$

Zde $\boldsymbol{\mu}$ je **magnetický dipólový moment** cívky; jeho směr je dán pravidlem pravé ruky a velikost je $\mu = NIS$, kde N je počet závitů cívky a S obsah plochy jednoho závitu.

Potenciální energie magnetického dipólu

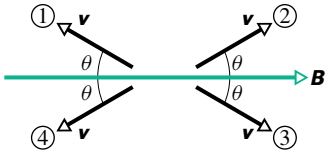
Magnetický dipól s momentem $\boldsymbol{\mu}$ má v magnetickém poli $\boldsymbol{B}$ potenciální energii E_p, která závisí na orientaci $\boldsymbol{\mu}$ vůči $\boldsymbol{B}$:

$$E_\mathrm{p}(\theta) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}, \tag{29.36}$$

kde θ je úhel sevřený vektory $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{B}$.

OTÁZKY

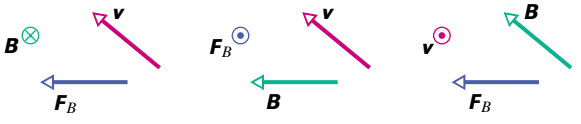
1. Na obr. 29.27 jsou znázorněny čtyři směry vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$ záporně nabité částice pohybující se pod úhlem θ vzhledem ke směru homogenního magnetického pole. (a) Seřaďte v sestupném pořadí tyto směry podle velikosti magnetické síly působící na částici. (b) Pro který z vektorů je tato síla kolmá k rovině obrázku a míří k nám?



Obr. 29.27 Otázka 1

2. Mějme čtyři situace, které charakterizují pohyb protonu pohybujícího se rychlostí $\boldsymbol{v}$ v homogenním magnetickém poli $\boldsymbol{B}$: (a) $\boldsymbol{v} = (2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j})\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{k}\,\mathrm{T}$, (b) $\boldsymbol{v} = (3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $\boldsymbol{B} = -4\boldsymbol{k}\,\mathrm{T}$, (c) $\boldsymbol{v} = (3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{i}\,\mathrm{T}$, (d) $\boldsymbol{v} = 20\boldsymbol{i}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $\boldsymbol{B} = -4\boldsymbol{i}\,\mathrm{T}$. Seřaďte v sestupném pořadí tyto situace podle velikosti magnetické síly působící na proton (výpočty proveďte zpaměti).

3. Na obr. 29.28 jsou ukázány tři různé situace, ve kterých se kladná částice pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ v homogenním magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$ a působí na ni magnetická síla $\boldsymbol{F}_B$. Pro každou situaci určete, zda orientace vektorů jsou z fyzikálního hlediska správně zakresleny.



Obr. 29.28 Otázka 3

4. Na obr. 29.29 je znázorněna dráha* elektronu pohybujícího se v magnetickém poli. Dráha se skládá ze dvou přímkových a dvou půlkruhových částí. Přímkové části se nacházejí v oblastech homogenních elektrických polí, vytvořených pomocí elektricky nabitých rovnoběžných desek. Která z desek (a) horního, (b) dolního páru má vyšší potenciál? (c) Jaký směr má magnetická indukce?



Obr. 29.29 Otázka 4

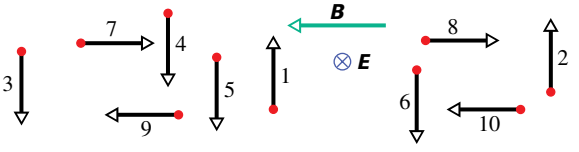
* V částicové fyzice (a také v nebeské mechanice) se často užívá termín „dráha“ ve smyslu „trajektorie“.

5. V čl. 29.3 jsme se zabývali pohybem nabité částice ve zkřížených polích, ve kterých síla elektrická $\boldsymbol{F}_E$ a magnetická $\boldsymbol{F}_B$ působí proti sobě. Zjistili jsme, že částice se v takovém případě pohybuje po přímce a její rychlost je dána rov. (29.7) ($v = E/B$). Která z obou sil je větší, jestliže (a) $v < E/B$, (b) $v > E/B$?

6. Na obr. 29.30 jsou zkřížená homogenní pole, elektrické s intenzitou $\boldsymbol{E}$ a magnetické o indukci $\boldsymbol{B}$. Do oblasti, kde obě pole působí, vlétá 10 různých nabitých částic (vektory jejich rychlostí nejsou zakresleny ve správném měřítku). V tab. 29.3 jsou uvedena znaménka nábojů a to, zda je jejich rychlost menší, nebo větší než poměr E/B (srov. otázku 5). Které částice se budou pohybovat kolmo k rovině obrázku směrem k nám v okamžiku, kdy situace v uspořádání částic a polí odpovídá obr. 29.30?

Tabulka 29.3 **Otázka 6**

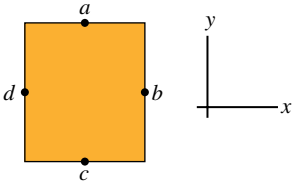
Částice	Náboj	Rychlost	Částice	Náboj	Rychlost
1	+	menší	6	−	větší
2	+	větší	7	+	menší
3	+	menší	8	+	větší
4	+	větší	9	−	menší
5	−	menší	10	−	větší



Obr. 29.30 Otázka 6

7. Letadlo letí směrem na západ od Brna, kde míří indukce $\boldsymbol{B}$ magnetického pole Země k severu a je odkloněna dolů. (a) Na kterém křídle letadla, levém, nebo pravém, se budou pohybovat elektrony ve směru ke špičce křídla v důsledku působení magnetického pole? (b) Ke které špičce křídla, pravé, nebo levé, se budou pohybovat vodivostní elektrony, poletí-li letadlo směrem na východ?

8. Na obr. 29.31 je průřez vodičem, kterým protéká proud kolmo k rovině obrázku směrem od nás. (a) Kterou dvojici svorek ze

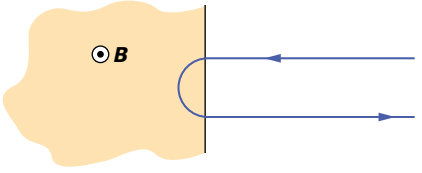


Obr. 29.31 Otázka 8

čtyř možných, označených (a, b, c, d), použijete k měření Hallova napětí, jestliže magnetické pole působí v kladném směru osy x? Nosiče náboje mají záporné znaménko a pohybují se kolmo k rovině obrázku směrem od nás. Která svorka z této vybrané

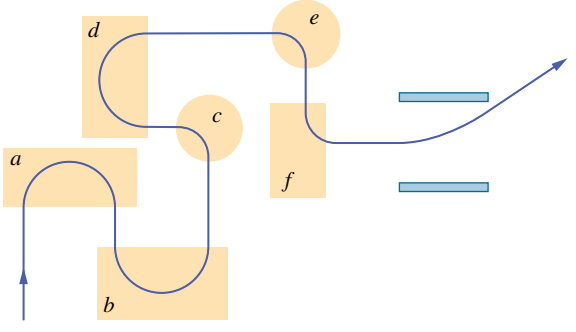
dvojice má vyšší potenciál? (b) Opakujte totéž pro magnetické pole působící v záporném směru osy y, mají-li tentokrát nosiče náboje kladné znaménko a pohybují-li se směrem k nám. (c) Proveďte stejný rozbor pro situaci, kdy má magnetická indukce směr rovnoběžný s kladným směrem osy z.

9. Na obr. 29.32 je znázorněna situace, kdy nabitá částice vlétá s rychlostí o velikosti v_0 do homogenního magnetického pole o indukci $\boldsymbol{B}$, pohybuje se v něm po půlkružnici po dobu T_0 a poté je opustí. (a) Má částice kladný, nebo záporný náboj? (b) Je konečná velikost rychlosti částice větší, menší, nebo rovna v_0? (c) Jestliže počáteční rychlost bude $0,5v_0$, bude doba, po kterou se částice pohybuje v magnetickém poli, větší, menší, nebo rovna T_0? (d) Bude trajektorie částice opět půlkružnice?



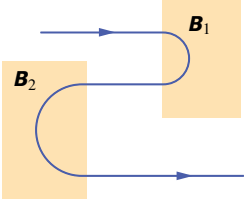
Obr. 29.32 Otázka 9

10. Na obr. 29.33 je dráha částice prolétající šesti oblastmi homogenního magnetického pole. Dráha v nich má tvar buď půlkružnice, nebo čtvrtkružnice. Po opuštění poslední oblasti se částice pohybuje mezi dvěma rovnoběžnými nabitými destičkami a je vychýlena směrem k destičce s vyšším potenciálem. Jaký je směr vektoru magnetické indukce v jednotlivých oblastech?



Obr. 29.33 Otázka 10

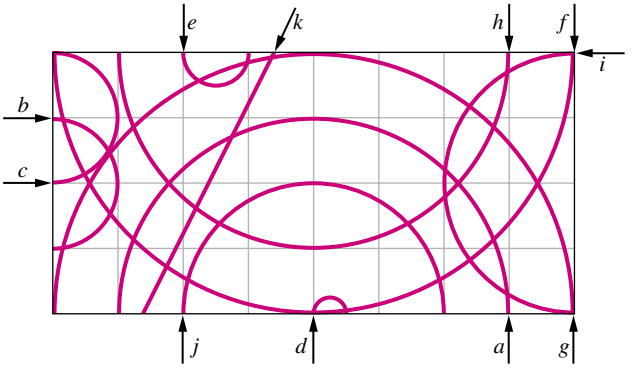
11. Na obr. 29.34 je stopa elektronu, který prolétá dvěma oblastmi homogenního magnetického pole s magnetickými indukcemi o velikostech B_1 a B_2. Jeho dráha má v každé z oblastí tvar půlkružnice. (a) Které pole má větší magnetickou indukci?



Obr. 29.34 Otázka 11

(b) Jaký je směr polí v obou oblastech? (c) Je doba, po kterou se elektron pohybuje v oblasti s indukcí B_1 větší, nebo rovna době, po kterou se pohybuje v oblasti s indukcí B_2?

12. Částicový „autodrom“. Na obr. 29.35 je zakresleno 11 stop částic v oblasti homogenního magnetického pole. Jedna stopa



Obr. 29.35 Otázka 12

má tvar přímky, ostatní mají tvar půlkružnic. V tab. 29.4. jsou uvedeny hmotnosti, náboje a velikosti rychlosti těchto částic z obrázku. Přiřaďte stopy jednotlivým částicím.

Tabulka 29.4 **Otázka 12**

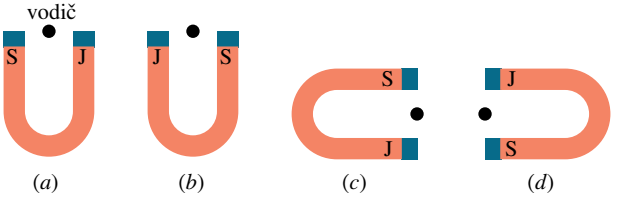
ČÁSTICE	HMOTNOST	NÁBOJ	RYCHLOST
1	$2m$	Q	v
2	m	$2Q$	v
3	$m/2$	Q	$2v$
4	$3m$	$3Q$	$3v$
5	$2m$	Q	$2v$
6	m	$-Q$	$2v$
7	m	$-4Q$	v
8	m	$-Q$	v
9	$2m$	$-2Q$	$3v$
10	m	$-2Q$	$8v$
11	$3m$	0	$3v$

13. Na obr. 29.36 jsou tři nabité částice pohybující se po spirále v homogenním magnetickém poli. Který případ odpovídá záporně nabité částici?



Obr. 29.36 Otázka 13

14. Na obr. 29.37 jsou nakresleny 4 situace, v nichž se nacházejí podkovovitý magnet a přímý vodič, kterým protékají elektrony

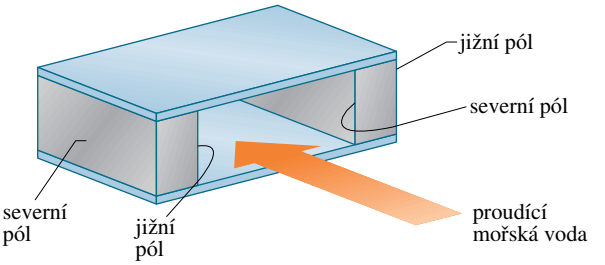


Obr. 29.37 Otázka 14

kolmo k obrázku směrem k nám. Ve kterém případě bude Ampérova síla působící na vodič směřovat k horní části obrázku?

15. Vodičem, nacházejícím se v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$, protéká proud I v záporném směru osy x. Bez písemného výpočtu seřaďte v sestupném pořadí velikosti sil, kterými působí magnetické pole na vodič: $\boldsymbol{B}_1 = (2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j})$ T, $\boldsymbol{B}_2 = (4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j})$ T, $\boldsymbol{B}_3 = (6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k})$ T a $\boldsymbol{B}_4 = (-8\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{k})$ T.

16. Tichý „housenkový pohon“ ponorek, známý z některých filmů, je založen na principu *magnetohydrodynamického* (MHD) pohonu: pohybuje-li se ponorka kupředu, protéká mořská voda několika kanály, umístěnými ve speciální konstrukci na zadní části trupu. Na obr. 29.38 je schematicky ukázán takový kanál. Magnety, nacházející se na protilehlých stěnách kanálu, mají opačné póly nastavené proti sobě, takže vytvářejí uvnitř kanálu homogenní magnetické pole. Elektrody (nejsou zakresleny) vytvářejí elektrické pole ve směru napříč kanálem. To způsobí příčný elektrický proud iontů ve vodě a magnetická síla na ně působící žene vodu směrem k zádi kanálu, a tedy pohání ponorku kupředu. Musí být elektrické pole působící na ionty (obr. 29.38) orientováno nahoru, dolů, doleva, doprava, dopředu, nebo dozadu?



Obr. 29.38 Otázka 16

17. (a) Vraťme se ke kontrole 6, kde se magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$ otočí z orientace 1 do orientace 2. Bude práce, kterou vykoná *magnetické pole* při tomto otočení dipólu, kladná, záporná, nebo nulová? (b) Vypočtěte práci, kterou vykoná magnetické pole při otočení dipólu z orientace 1 do (α) orientace 2, (β) orientace 3, (γ) orientace 4. Seřaďte je sestupně od největší po nejmenší.

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 29.2 Definice magnetické indukce

1C. Vyjádřete jednotku magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ pomocí základních jednotek soustavy SI.

2C. Částice α se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ o velikosti $550\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ v homogenním magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$, jejíž velikost je 0,045 T. (Částice α má náboj $+3{,}2{\cdot}10^{-19}$ C a hmotnost $6{,}6{\cdot}10^{-27}$ kg.) Úhel mezi vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$ je 52°. Jaká je velikost (a) magnetické síly $\boldsymbol{F}_B$, kterou působí na částici magnetické pole, a (b) zrychlení částice způsobené silou $\boldsymbol{F}_B$? (c) Změní se velikost rychlosti částice?

3C. Elektron v televizní obrazovce letí rychlostí $7{,}20{\cdot}10^{6}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ v magnetickém poli o indukci 83,0 mT. (a) Co můžete říci o největší a nejmenší velikosti síly, kterou působí magnetické pole na elektron, aniž známe směr tohoto pole? (b) V určitém místě je zrychlení elektronu $4{,}90{\cdot}10^{14}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jaký úhel svírá vektor rychlosti elektronu s vektorem magnetické indukce?

4C. Proton se pohybuje ve směru, který svírá úhel 23,0° se směrem magnetické indukce, jejíž velikost je 2,60 mT. Magnetické pole působí na proton silou o velikosti $6{,}50{\cdot}10^{-17}$ N. Určete: (a) rychlost protonu a (b) kinetickou energii protonu v jednotkách eV.

5Ú. Každý z elektronů, nacházejících se v elektronovém paprsku v televizní trubici, má kinetickou energii 12,0 keV. Trubice je orientována tak, že se v ní elektrony pohybují vodorovně směrem od jižního geomagnetického pólu k severnímu. Vertikální složka zemského magnetického pole směřuje dolů a má velikost 55,0 μT. (a) Kterým směrem se bude paprsek ohýbat? (b) Jaké je zrychlení každého z elektronů způsobené tímto magnetickým polem? (c) O jakou vzdálenost d se paprsek odchýlí v příčném směru na konci trubice o délce 20,0 cm?

6Ú. Elektron se pohybuje magnetickým polem o indukci $\boldsymbol{B} = (0{,}030\boldsymbol{i} - 0{,}15\boldsymbol{j})$ T rychlostí $\boldsymbol{v} = (2{,}0{\cdot}10^{6}\boldsymbol{i} + 3{,}0{\cdot}10^{6}\boldsymbol{j})\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Určete magnetickou sílu, která na něj působí. (b) Proveďte stejný výpočet pro proton, který má tutéž rychlost.

7Ú. Elektron pohybující se v homogenním magnetickém poli má rychlost $\boldsymbol{v} = (40\boldsymbol{i} + 35\boldsymbol{j})$ km/s, když na něj začne působit magnetické pole silou $\boldsymbol{F} = (-4{,}2\boldsymbol{i} + 4{,}8\boldsymbol{j})$ fN. Určete magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$, víte-li, že $B_x = 0$.

ODST. 29.3 Objev elektronu

8C. Proton se pohybuje v elektrickém a magnetickém poli. Obě pole jsou homogenní. Magnetická indukce je $\boldsymbol{B} = -2{,}5\boldsymbol{i}$ mT. V určitém okamžiku je rychlost protonu $\boldsymbol{v} = 2\,000\boldsymbol{j}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je v tomto okamžiku velikost celkové síly, působící na proton, je-li $\boldsymbol{E}$ (a) $4{,}0\boldsymbol{k}\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$, (b) $-4{,}0\boldsymbol{k}\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$ (c) $4{,}0\boldsymbol{i}\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$?

9C. Elektron s kinetickou energií 2,5 keV vletěl vodorovně do oblasti, ve které působí směrem dolů elektrické pole o velikosti $10\,\mathrm{kV{\cdot}m^{-1}}$. (a) Jaký je směr a (nejmenší) velikost magnetické indukce pole, které způsobí, že elektron bude pokračovat v pohybu ve vodorovném směru (nevychýlen)? Zanedbejte gravitační sílu, je malá ve srovnání s ostatními silami. (b) Je možné, aby se proton pohyboval touto konfigurací polí, aniž by byl vychýlen? Jestliže ano, za jakých okolností?

10C. Elektrické pole o velikosti intenzity $1{,}50\,\mathrm{kV{\cdot}m^{-1}}$ a magnetické pole o velikosti indukce 0,400 T působí současně na pohybující se elektron, přičemž výslednice těchto dvou sil je

rovna nule. (a) Určete minimální velikost rychlosti elektronu. (b) Nakreslete vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{v}$.

11Ú. Elektron má počáteční rychlost $(12{,}0\boldsymbol{j} + 15{,}0\boldsymbol{k})$ km·s^{-1} a konstantní zrychlení $(2{,}00{\cdot}10^{12}\boldsymbol{i})$ m·s^{-2} v oblasti, kde na něj působí homogenní magnetické pole. Určete intenzitu elektrického pole $\boldsymbol{E}$, víte-li, že magnetická indukce $\boldsymbol{B} = 400\boldsymbol{i}$ μT.

12Ú. Elektron je urychlen napětím 1,0 kV a vletí mezi dvě rovnoběžné desky vzdálené od sebe 20 mm. Rozdíl potenciálů mezi deskami je 100 V a elektron se pohybuje kolmo k siločárám elektrického pole. Jak velkou magnetickou indukci musí mít magnetické pole kolmé jak k vektoru rychlosti elektronu, tak i k vektoru intenzity elektrického pole, aby se elektron pohyboval po přímce? (Vektory $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ tedy tvoří trojici ortogonálních vektorů.)

13Ú. Každý iont ^{6}Li (hmotnost 6,0 u) má náboj $+e$ a je vychylován napětím 10 kV. Svazek takových iontů vlétá ve vodorovném směru do oblasti homogenního magnetického pole o indukci $B = 1{,}2$ T. Vypočtěte nejmenší velikost intenzity elektrického pole, které musí působit v téže oblasti, aby ionty ^{6}Li z ní vylétly nevychýleny.

ODST. 29.4 Hallův jev

14C. Měděný proužek široký 150 μm se nachází v homogenním magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$, jejíž velikost je 0,65 T; $\boldsymbol{B}$ je kolmé k ploše proužku. Jestliže proužkem protéká elektrický proud $I = 23$ A, naměříme na jeho šířce Hallovo napětí U_H. Určete jeho velikost, víte-li, že počet elektronů v objemové jednotce měděného vodiče je $8{,}47{\cdot}10^{28}$ m^{-3}.

15C. Dokažte, že počet nosičů náboje v objemové jednotce vodiče lze vyjádřit pomocí intenzity Hallova elektrického pole E_H a proudové hustoty J vztahem $n = JB/(eE_H)$.

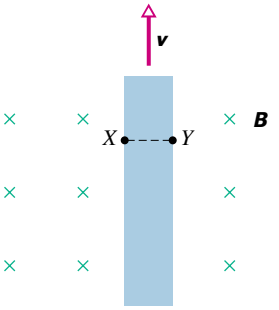
16Ú. Při experimentu s Hallovým jevem protéká vodivým proužkem v podélném směru elektrický proud 3,0 A. Proužek je dlouhý 4,0 cm, široký 1,0 cm a tlustý 10 μm. Magnetické pole o indukci 1,5 T je kolmé k ploše proužku (ve směru tloušťky) a na jeho šířce bylo naměřeno Hallovo napětí 10 μV. Z uvedených údajů určete (a) driftovou rychlost nosičů náboje a (b) počet nosičů náboje v objemové jednotce vodiče. (c) Na náčrtku ukažte polaritu Hallova napětí s předpokládaným směrem elektrického proudu a magnetického pole. Nosiče náboje jsou elektrony.

17Ú. (a) Dokažte (obr. 29.8), že poměr intenzity Hallova elektrického pole E_H a elektrického pole E způsobujícího pohyb elektronů podél proužku je

$$\frac{E_H}{E} = \frac{B}{ne\varrho},$$

kde ϱ je rezistivita materiálu a n je počet elektronů v objemové jednotce vodiče. (b) Vypočtěte tento poměr pro hodnoty ze cvič. 14 (viz tab. 27.1).

18Ú. Kovový proužek dlouhý 6,50 cm, široký 0,850 cm a tlustý 0,760 mm se pohybuje konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$, která je kolmá k ploše proužku a má velikost 1,20 mT (obr. 29.39). Hallovo napětí měříme mezi body X a Y napříč proužkem. Vypočtěte velikost rychlosti v.



Obr. 29.39 Úloha 18

ODST. 29.5 Pohyb nabité částice po kružnici

19C. Elektron je urychlován z klidu napětím 350 V. Poté vletí do homogenního magnetického pole o indukci 200 mT kolmo k vektoru magnetické indukce. Vypočtěte: (a) velikost rychlosti elektronu a (b) poloměr jeho dráhy v magnetickém poli.

20C. Jakou velikost musí mít magnetická indukce homogenního magnetického pole působícího na paprsek elektronů, které letí rychlostí $1{,}3{\cdot}10^6$ m·s^{-1}, aby se pohybovaly po kružnici o poloměru 0,35 m?

21C. (a) V magnetickém poli o indukci 0,50 T obíhá po kružnici elektron rychlostí rovnou 10 % rychlosti světla. Určete poloměr kružnice, po níž se pohybuje. (b) Jaká je kinetická energie elektronu (v jednotkách eV)? Relativistické efekty jsou při takové rychlosti ještě zanedbatelné.

22C. Jak velká indukce homogenního magnetického pole by udržela elektron letící rychlostí $1{,}0{\cdot}10^7$ m·s^{-1} na kružnici velikosti zemského rovníku?

23C. Elektron má kinetickou energii 1,20 keV a pohybuje se po kružnici v rovině kolmé k vektoru magnetické indukce $\boldsymbol{B}$. Poloměr této kružnice je 25,0 cm. Určete: (a) velikost rychlosti elektronu, (b) velikost magnetické indukce pole, (c) frekvenci otáčení a (d) periodu otáčení.

24C. Holandský fyzik S. A. Goudsmit vyvinul přesnou metodu měření hmotností těžkých iontů pomocí měření period jejich oběhů v magnetickém poli o známé magnetické indukci. Jednou ionizované ionty jodu oběhnou 7,00krát v poli o indukci 45,0 mT za 1,29 ms. Vypočtěte jejich hmotnost a vyjádřete ji v atomové hmotnostní jednotce 1 u. (Hmotnosti iontů nyní měříme mnohem přesněji, než naznačuje náš příklad.)

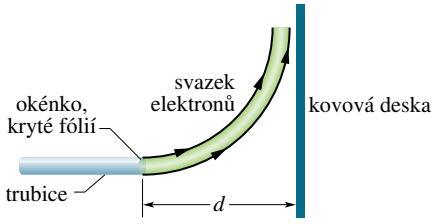
25C. Částice α ($Q = +2e, m = 4{,}00$ u) se pohybuje po kružnici o poloměru 4,50 cm v magnetickém poli o indukci velikosti $B = 1{,}20$ T. Vypočtěte: (a) velikost její rychlosti, (b) periodu jejího oběhu, (c) její kinetickou energii (v jednotkách eV) a (d) napětí, kterým musí být urychlena z klidu, aby dosáhla této energie.

26C. (a) Určete frekvenci oběhu elektronu s energií 100 eV v magnetickém poli o indukci 35,0 μT. (b) Vypočtěte poloměr dráhy tohoto elektronu, jestliže má rychlost kolmou ke směru magnetické indukce.

27C. Elektrony s kinetickou energií E_k vylétají z „okénka“ tvořeného tenkou fólií na konci trubice urychlovače. Ve vzdálenosti d od tohoto okénka se nachází kovová destička umístěná kolmo ke svazku vylétajících elektronů (obr. 29.40). Dokažte, že můžeme zabránit tomu, aby svazek dopadl na destičku, jestliže ho odchýlíme magnetickým polem $\boldsymbol{B}$ o velikosti

$$B \geqq \sqrt{\frac{2mE_k}{e^2d^2}}.$$

Zde m a e jsou hmotnost a velikost náboje elektronu. Jak musí být vektor magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ orientován?



Obr. 29.40 Cvičení 27

28Ú. Zdroj emituje elektrony s rychlostí o velikosti $v = 1{,}5{\cdot}10^7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, které vlétají v bodě P do homogenního magnetického pole o magnetické indukci velikosti $B = 1{,}0{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{T}$. Vektor rychlosti elektronu svírá úhel $\theta = 10^\circ$ s vektorem magnetické indukce. Určete vzdálenost bodu P od místa, kde elektron znovu protne indukční čáru, která prochází tímto bodem.

29Ú. V nukleárním experimentu se proton s kinetickou energií 1,0 MeV pohybuje po kružnici v homogenním magnetickém poli. Jakou energii musí mít (a) α-částice ($Q = +2e$, $m = 4{,}0\,\mathrm{u}$) a (b) deuteron ($Q = +e$, $m = 2{,}0\,\mathrm{u}$), aby obíhaly po kružnici o stejném poloměru jako proton?

30Ú. Proton, deuteron a α-částice (viz úloha 29) jsou urychleny stejným napětím a vletí do homogenního magnetického pole o indukci $\boldsymbol{B}$ ve směru k ní kolmém. (a) Porovnejte kinetické energie těchto částic. Jaký bude poloměr kruhové dráhy (b) deuteronu, (c) α-částice, je-li poloměr kruhové dráhy protonu 10 cm?

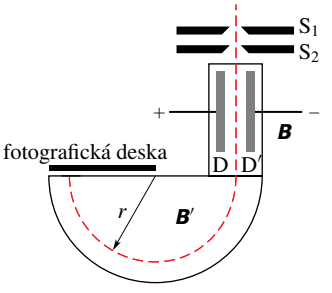
31Ú. Proton, deuteron a α-částice (viz úloha 29) mají stejnou kinetickou energii a vlétají do oblasti homogenního magnetického pole kolmo ke směru vektoru $\boldsymbol{B}$. Porovnejte poloměry kruhových drah, po nichž tyto částice obíhají.

32Ú. Proton s nábojem $+e$ a hmotností m vlétá do homogenního magnetického pole s vektorem indukce $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{i}$ s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0 = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0y}\boldsymbol{j}$. Napište obecný výraz pro rychlost protonu.

33Ú. Dva izotopy jedenkrát ionizovaného atomu mají stejný náboj Q, ale jejich hmotnosti se liší o malou hodnotu Δm. Jsou vstřelovány do hmotnostního spektrometru popsaného v př. 29.3. (a) Vyjádřete tento rozdíl hmotností pomocí proměnných U, Q, B a m (kteréhokoli z izotopů) a vzdálenosti Δx mezi stopami obou izotopů na fotografické desce. (b) Vypočtěte Δx pro svazek jedenkrát ionizovaných atomů chloru o hmotnostech 35 u a 37 u, jestliže $U = 7{,}3\,\mathrm{kV}$ a $B = 0{,}50\,\mathrm{T}$.

34Ú. V komerčních hmotnostních spektrometrech (viz př. 29.3) jsou uranové ionty s hmotností $3{,}92{\cdot}10^{-25}\,\mathrm{kg}$ a nábojem $3{,}20{\cdot}10^{-19}\,\mathrm{C}$ separovány od atomů, jejichž fyzikální charakteristiky jsou velmi blízké. Ionty jsou urychleny napětím 100 kV a poté dopadají do oblasti homogenního magnetického pole, kde se pohybují po půlkruhové dráze o poloměru 1,00 m. Na jejím konci proletí štěrbinou šířky 1,00 mm a výšky 1,00 cm a dopadají do speciální nádobky. (a) Jakou velikost musí mít indukce magnetického pole v separátoru? Je-li použit přístroj, který separuje 100 mg materiálu za hodinu, vypočtěte (b) proud iontů v přístroji a (c) teplo, které se vyvine v nádobce za 1,00 h.

35Ú. Bainbridgeův hmotnostní spektrometr, znázorněný na obrázku 29.41, separuje ionty, které mají tutéž rychlost, ale mírně odlišnou hmotnost. Ionty po průchodu štěrbinami S_1 a S_2 projdou selektorem rychlostí, ve kterém je elektrické pole $\boldsymbol{E}$ tvořené nabitými deskami D a D′ a magnetické pole $\boldsymbol{B}$ kolmé k $\boldsymbol{E}$ i k trajektorii iontů. Ionty, které projdou selektorem nevychýleny, budou mít stejně velkou rychlost v. Poté vniknou do oblasti, kde na ně působí jiné homogenní magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B}'$, a to způsobí, že poletí po kružnici. Dopad iontů je registrován pomocí fotografické desky. Dokažte, že pro tyto ionty platí vztah $Q/m = E/(rBB')$, kde r je poloměr kružnice.



Obr. 29.41 Úloha 35

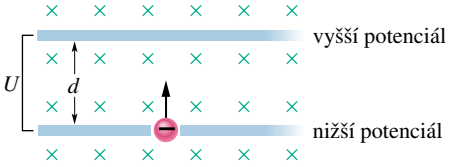
36Ú. Pozitron s kinetickou energií 2,0 keV vlétá do homogenního magnetického pole o indukci $\boldsymbol{B}$, jejíž velikost je 0,10 T. Vektor rychlosti částice svírá úhel 89° s vektorem $\boldsymbol{B}$. Určete (a) periodu T, (b) stoupání p a (c) poloměr šroubovice, po níž se částice pohybuje.

37Ú. Neutrální částice je v klidu v homogenním magnetickém poli. V čase $t = 0$ se rozpadne na dvě nabité částice, z nichž každá má hmotnost m. (a) Jestliže náboj jedné z nich je $+Q$, jaký náboj bude mít druhá částice? (b) Obě částice se pohybují dále po různých dráhách, přičemž obě dráhy leží v rovině kolmé k vektoru $\boldsymbol{B}$. Později se obě částice navzájem srazí. Vyjádřete pomocí veličin m, B a Q dobu, která uplyne mezi rozpadem a srážkou obou částic.

38Ú. (a) Jak velkou rychlost by potřeboval proton, aby po kruhové dráze obletěl Zemi podél rovníku za předpokladu, že zemské magnetické pole má všude vodorovný směr rovnoběžný s poledníky? Úlohu je třeba počítat relativisticky. Velikost magnetické indukce na rovníku položte rovnu 0,41 μT. (*Tip*: Hybnost mv v rov. (29.16) nahraďte relativistickou hybností z rov. (9.24)).

(b) Nakreslete vektory rychlosti a magnetické indukce odpovídající této situaci.

39Ú. Podle obr. 29.42 elektron o hmotnosti m s nábojem $-e$ vlétá se zanedbatelnou rychlostí do prostoru mezi dvěma deskami, mezi nimiž je napětí U a mají vzdálenost d. Elektron vlétá do této oblasti ve směru kolmém ke kladné horní desce. Homogenní magnetické pole je kolmé k rovině obrázku. Určete minimální velikost B, při které elektron nedopadne na horní desku.



Obr. 29.42 Úloha 39

ODST. 29.6 Cyklotrony a synchrotrony

40C. Proton se pohybuje v cyklotronu po kružnici o poloměru 0,50 m. Velikost magnetické indukce zakřivující dráhu protonu je 1,2 T. (a) Určete cyklotronovou frekvenci. (b) Jaká je kinetická energie protonu v jednotkách eV?

41C. Konstruktér má za úkol navrhnout cyklotron pro urychlování protonů na rychlost rovnou 1/10 rychlosti světla. Magnet, který bude součástí přístroje, bude vytvářet magnetické pole o indukci 1,4 T. Vypočtěte (a) poloměr cyklotronu, (b) odpovídající frekvenci oscilátoru. Relativistické efekty jsou při této rychlosti ještě zanedbatelné.

42Ú. Frekvence oscilátoru cyklotronu v př. 29.5 byla navržena tak, aby cyklotron urychloval deuterony. Nyní budeme chtít místo deuteronů urychlovat protony. (a) Na jakou kinetickou energii budou urychleny, nezměníme-li frekvenci oscilátoru? (b) Jak velké magnetické indukce k tomu bude potřeba? (c) Jakou kinetickou energii budou mít urychlené protony, jestliže magnetická indukce pole bude udržována na hodnotě, používané pro deuterony? (d) Na jakou hodnotu potom musíme naladit frekvenci oscilátoru? (e) Odpovězte na tytéž otázky pro případ urychlovaných α-částic ($Q = +2e$, $m = 4{,}0$ u).

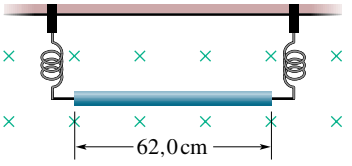
43Ú. Na deuteron pohybující se v cyklotronu po kruhové dráze o poloměru 50 cm působí homogenní magnetické pole, jehož indukce má velikost $B = 1{,}5$ T. Po lehké srážce s terčíkem se deuteron rozpadne se zanedbatelnou ztrátou kinetické energie na proton a neutron. Popište následující pohyb každé z obou částic. Předpokládejte, že energie deuteronu se rozdělí stejným dílem na obě vzniklé částice.

44Ú. Odhadněte celkovou délku dráhy deuteronu pohybujícího se v cyklotronu (př. 29.5) během procesu jeho urychlování. Předpokládejte, že urychlovací potenciálový rozdíl mezi duanty cyklotronu je 80 kV.

ODST. 29.7 Ampérova síla

45C. Vodorovným vodičem dálkového elektrického vedení protéká proud 5 000 A ve směru z jihu na sever. Zemské magnetické pole má indukci 60,0 μT; ta směřuje na sever, přičemž její vektor svírá úhel 70° s vodorovnou rovinou. Určete velikost a směr magnetické síly, která působí na každých 100 m délky vodiče v magnetickém poli Země.

46C. Vodič délky 62,0 cm má hmotnost 13,0 g a je zavěšen na dvou vodivých pružinách. Umístíme jej do magnetického pole o indukci 0,440 T (obr. 29.43). Jaká musí být velikost a směr elektrického proudu protékajícího vodičem, aby v pružinách nevzniklo žádné mechanické napětí?

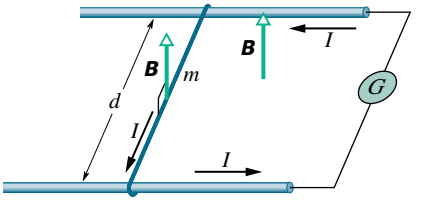


Obr. 29.43 Cvičení 46

47C. Vodičem délky 1,80 m, který svírá úhel 35° se směrem homogenního magnetického pole o indukci 1,50 T, protéká elektrický proud 13,0 A. Určete Ampérovu sílu působící na vodič.

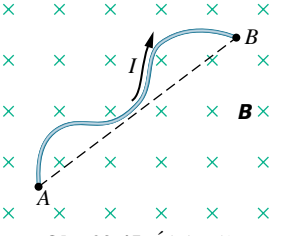
48Ú. Vodičem dlouhým 50 cm a rovnoběžným s osou x protéká proud 0,50 A v kladném směru osy x. Vodič se nachází v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B} = (0{,}003\,0\boldsymbol{j} + 0{,}010\boldsymbol{k})$ T. Určete Ampérovu sílu působící na vodič.

49Ú. Kovový vodič má hmotnost m a klouže bez tření po dvou vodorovných kolejnicích s rozchodem d, jak je ukázáno na obr. 29.44. Celá soustava se nachází ve svislém magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$. Stejnosměrný elektrický proud I, dodávaný generátorem G, protéká první kolejnicí, vodičem a druhou kolejnicí, kterou se vrací zpět. Určete velikost rychlosti a směr pohybu vodiče jako funkci času za předpokladu, že v čase $t = 0$ byl v klidu.



Obr. 29.44 Úloha 49

50Ú. Na obr. 29.45 je schematicky nakreslen vodič obecného tvaru, kterým protéká elektrický proud I mezi body A a B. Vodič leží v rovině kolmé na směr homogenního magnetického pole $\boldsymbol{B}$. (a) Dokažte, že síla působící na vodič je stejně velká



Obr. 29.45 Úloha 50

jako síla působící na přímý vodič s proudem I, který teče přímo z A do B. (*Tip*: Nahraďte vodič lomenou čárou s úseky kolmými a rovnoběžnými s úsečkou AB.) (b) Dokažte, že síla, působící na vodič je nulová, když body A a B jsou uspořádány tak, že vytvářejí uzavřenou smyčku, jejíž plocha je kolmá k magnetické indukci $\boldsymbol{B}$.

51Ú. Dlouhým pevným vodičem ležícím v ose x protéká elektrický proud 5,0 A v záporném směru této osy. Magnetická indukce pole $\boldsymbol{B}$ je dána vztahem $\boldsymbol{B} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 8{,}0x^2\boldsymbol{j}$, kde x je vyjádřeno v metrech a $\boldsymbol{B}$ v mT. Vypočtěte Ampérovu sílu působící na 2,0 m dlouhý úsek vodiče, který se nachází mezi body o souřadnicích $x = 1{,}0$ m a $x = 3{,}0$ m.

52Ú. Uvažujte o možnosti konstrukce nového typu elektrického vlaku poháněného magnetickou silou, kterou na vodivou nápravu vlaku působí vodorovná složka magnetického pole Země. Elektrický proud teče zdola z jedné z kolejnic vodivým kolem do nápravy a druhým kolem se přes druhou kolejnici vrací zpět do zdroje. (a) Jak velký proud potřebujeme k tomu, aby vznikla nepříliš velká tažná síla 10 kN? Položte velikost svislé složky magnetického pole Země rovnu 10 μT a délku nápravy 3,0 m. (b) Jak bude výkon vlaku ovlivněn elektrickým odporem kolejnic? (c) Je takový vlak nereálný úplně, nebo pouze zdánlivě?

53Ú. Měděná tyč o hmotnosti 1,0 kg leží na dvou vodorovných kolejnicích vzdálených od sebe 1,0 m. Kolejnicemi a tyčí protéká proud 50 A. Součinitel statického smykového tření mezi tyčí a kolejnicemi je 0,60. Při jaké nejmenší velikosti magnetické indukce (nemusí mít nutně svislý směr), bude uvedena tyč do pohybu?

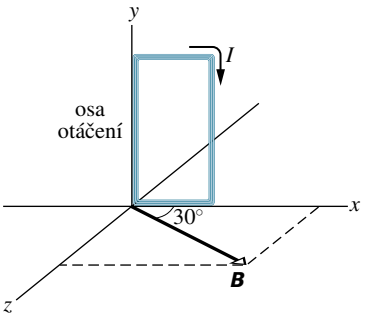
ODST. 29.8 Moment síly působící na proudovou smyčku

54C. Proudovou smyčkou, tvořenou jedním závitem, protéká proud 4,00 A. Smyčka má tvar pravoúhlého trojúhelníku se stranami 50,0 cm, 120 cm a 130 cm. Smyčka se nachází v homogenním magnetickém poli o indukci velikosti 75,0 mT a směru rovnoběžném se směrem elektrického proudu tekoucího nejdelší stranou smyčky. (a) Určete velikost Ampérovy síly působící na každou ze tří stran smyčky. (b) Ukažte, že celková síla působící na smyčku je nulová.

55C. Na obr. 29.46 je obdélníková cívka skládající se z 20 závitů drátu. Strany cívky mají délku 10 cm a 5 cm a protéká jí elektrický proud 0,10 A. Osa, kolem níž se může cívka otáčet, má směr její delší strany a je totožná s osou y. Magnetické pole má velikost indukce 0,50 T a směr vektoru $\boldsymbol{B}$ svírá úhel 30° s rovinou xy, v níž cívka leží. Určete velikost a směr silového momentu působícího na cívku vzhledem k její ose otáčení.

56C. Vodičem délky L protéká elektrický proud I. Dokažte, že zformujeme-li drát do tvaru kruhové cívky, získáme při dané hodnotě magnetické indukce maximální silový moment tehdy, má-li cívka pouze jeden závit. Velikost tohoto momentu je $M = \frac{1}{4\pi}(L^2 IB)$.

57Ú. Dokažte, že vztah $M = NISB\sin\theta$ platí pro uzavřenou rovinnou smyčku libovolného tvaru a nikoli pouze pro smyčku



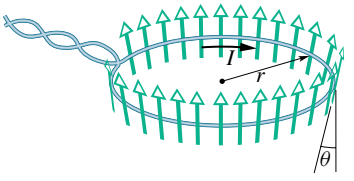
Obr. 29.46 Cvičení 55

obdélníkovou, jaká je na obr. 29.24. (*Tip*: Nahraďte smyčku libovolného tvaru soustavou přilehlých dlouhých, úzkých a obdélníkových smyček, které jsou v limitním případě (tj. $N \to \infty$) proudově ekvivalentní smyčce obecného tvaru.)

58Ú. Uzavřenou vodivou rovinnou smyčkou protéká elektrický proud I. Smyčka se nachází v homogenním magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$ a její rovina svírá úhel θ se směrem $\boldsymbol{B}$. Dokažte, že výsledná Ampérova síla působící na smyčku je nulová. Platí to také pro nehomogenní magnetická pole?

59Ú. Částice s nábojem Q se pohybuje po kružnici o poloměru r rychlostí o velikosti v. Považujte její kruhovou dráhu za proudovou smyčku, kterou protéká stálý proud o velikosti Q/T, kde T je doba oběhu. Určete maximální moment sil, kterým působí na smyčku homogenní magnetické pole o velikosti B.

60Ú. Na obr. 29.47 je kruhový vodič o poloměru r. Nachází se v rozbíhajícím se magnetickém poli souměrném podle osy smyčky kolmé k její rovině. V místě vodiče má magnetická indukce všude stejnou velikost B a její směr svírá úhel θ s normálou k rovině smyčky. Určete velikost a směr síly, kterou působí magnetické pole na kruhový vodič, protéká-li jím elektrický proud I. (Předpokládejte, že zkroucené přívodní vodiče nevytvářejí znatelné magnetické pole a neovlivní tedy výsledek.)

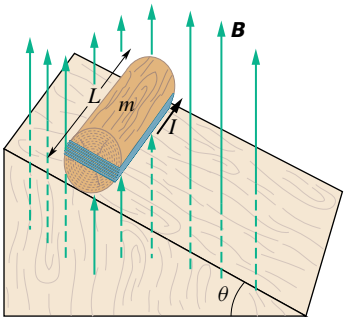


Obr. 29.47 Úloha 60

61Ú. Vnitřní odpor galvanometru je 75,3 Ω. Jeho ručička se vychýlí přes celou stupnici, jestliže cívkou galvanometru protéká proud 1,62 mA. (a) Určete odpor rezistoru potřebného k přeměně galvanometru na voltmetr, jehož rozsah měření má být 1,00 V. Jak musíme tento odpor ke galvanometru připojit? (b) Určete velikost bočníku, kterým změníme galvanometr na ampérmetr, jehož měřicí rozsah bude 50,0 mA. Jak musíme tento odpor ke galvanometru připojit?

62Ú. Obr. 29.48 zobrazuje dřevěný válec o hmotnosti $m = 0{,}250$ kg a délce $L = 0{,}100$ m, kolem něhož je v podélném

směru hustě navinuto $N = 10{,}0$ závitů vodiče. Jaký minimální proud I, protékající cívkou, zabrání válci ve valivém pohybu po nakloněné rovině, jestliže se válec s cívkou nachází v magnetickém poli o indukci 0,500 T, které je orientováno svisle vzhůru? Rovina závitů cívky je rovnoběžná s nakloněnou rovinou, úhel nakloněné roviny je θ.



Obr. 29.48 Úloha 62

ODST. 29.9 Magnetický dipól

63C. Kruhová cívka se 160 závity má poloměr 1,90 cm. (a) Vypočtěte velikost elektrického proudu, který vytvoří magnetický dipólový moment o velikosti 2,30 A·m^2. (b) Určete maximální moment sil, kterým na cívku s takovým proudem působí homogenní pole o velikosti magnetické indukce 35,0 mT.

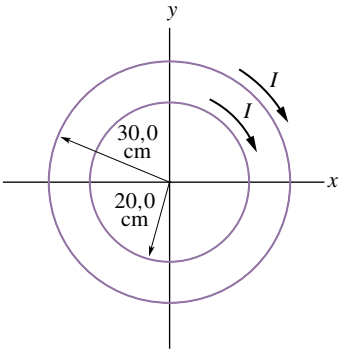
64C. Magnetický dipólový moment Země je $8{,}00 \cdot 10^{22}$ J·T^{-1}. Předpokládejte, že vznikl jako výsledek pohybu nábojů ve vnějším tekutém plášti Země na kruhových drahách o poloměru 3 500 km. Jaký elektrický proud tyto náboje vytvářejí?

65C. Kruhovou vodivou smyčkou o poloměru 15,0 cm protéká elektrický proud 2,60 A. Normála ke smyčce svírá úhel 41,0° se směrem indukce homogenního magnetického pole o velikosti 12,0 T. (a) Určete magnetický moment smyčky. (b) Jaký moment síly působí na smyčku?

66C. Vodivá smyčka, kterou protéká elektrický proud 5,0 A, má tvar pravoúhlého trojúhelníku se stranami 30 cm, 40 cm a 50 cm. Cívka se nachází v homogenním magnetickém poli o indukci velikosti 80 mT, přičemž směr $\boldsymbol{B}$ je rovnoběžný se směrem proudu tekoucího v nejdelší straně trojúhelníku. Určete (a) velikost magnetického dipólového momentu smyčky a (b) silový moment působící na smyčku.

67C. Poloměr ciferníku nemagnetických nástěnných hodin je 15 cm. Kolem jejich obvodu je navinuto 6 závitů drátu, kterým protéká elektrický proud 2,0 A ve směru otáčení hodinových ručiček. Hodiny se nacházejí v místě, kde je homogenní vnější magnetické pole o indukci velikosti 70 mT (hodiny jdou zcela přesně). Ve 13.00 h má hodinová ručička směr vnějšího magnetického pole. (a) Po kolika minutách bude mít minutová ručička stejný směr, jaký má moment síly působící ve vnějším magnetickém poli na závity protékané proudem? (b) Určete velikost tohoto momentu.

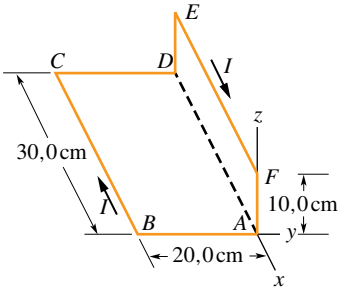
68C. Dvě soustředné smyčky o poloměrech 20,0 cm a 30,0 cm leží v rovině xy. Každou z nich protéká ve směru otáčení hodinových ručiček elektrický proud 7,00 A (obr. 29.49). (a) Určete výsledný magnetický dipólový moment této soustavy smyček. (b) Opakujte vše pro opačný směr proudu ve vnější smyčce.



Obr. 29.49 Cvičení 68

69Ú. Kruhová vodivá smyčka má poloměr 8,0 cm a protéká jí elektrický proud 0,20 A. Magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu} = (0{,}60\boldsymbol{i} - 0{,}80\boldsymbol{j})$ A·m^2. Jestliže se smyčka nachází v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B} = (0{,}25\boldsymbol{i} + 0{,}30\boldsymbol{k})$ T, určete: (a) moment síly působící na smyčku; (b) potenciální energii smyčky ve vnějším magnetickém poli.

70Ú. Na obr. 29.50 je proudová smyčka $ABCDEFA$, kterou protéká elektrický proud $I = 5{,}00$ A. Strany smyčky jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, přičemž $|AB| = 20{,}0$ cm, $|BC| = 30{,}0$ cm a $|FA| = 10{,}0$ cm. Vypočtěte velikost a směr magnetického dipólového momentu této smyčky. (*Tip*: Doplňte stejně velké, ale opačně orientované proudy do přímého úseku AD. Potom vyřešte úkol pro dvě kolmé smyčky $ABCDA$ a $ADEFA$.)



Obr. 29.50 Úloha 70

PRO POČÍTAČ

71Ú. Částice s hmotností m a nábojem Q se pohybuje v homogenním elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$, která má směr osy y, a v homogenním magnetickém poli s magnetickou indukcí $\boldsymbol{B}$, která má směr osy z. Síla působící na částici je $\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ a zrychlení částice je proto $\boldsymbol{a} = (Q/m)(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. Leží-li vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ v rovině xy, jsou složky zrychlení $a_x = (QB/m)v_y$ a $a_y = (QE/m) - (QB/m)v_x$. Chceme-li získat výrazy pro souřadnice částice,

musíme tyto výrazy dvakrát integrovat. Když částice startuje v čase $t = 0$ z počátku souřadnic s počáteční rychlostí $v_{0,x}$ v kladném směru osy x, potom

$$x = \frac{E}{B}t - \frac{1}{\omega}\left(\frac{E}{B} - v_{0,x}\right)\sin\omega t$$

a

$$y = -\frac{1}{\omega}\left(\frac{E}{B} - v_{0,x}\right)(1 - \cos\omega t),$$

kde $\omega = QB/m$. (a) Dosazením ověřte, že tyto vztahy vyhovují pohybovým rovnicím (druhému Newtonovu zákonu). Rovněž ověřte, že splňují dané počáteční podmínky. (b) Dosaďte $B = 1{,}2\,\mathrm{T}$, $E = 1{,}0{\cdot}10^4\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$ a $v_0 = 5{,}0{\cdot}10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a nakreslete trajektorii částice v časovém intervalu $(0; 4{,}0{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{s})$. Dráhu můžeme charakterizovat jako kružnici v rovině xy, která se posouvá v kladném směru osy x. Kvalitativně objasněte, proč se pohyb děje podél osy x, když směr intenzity elektrického pole je rovnoběžný s osou y. Nakreslete také trajektorie pro (c) $v_0 = 3{,}0{\cdot}10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, (d) $v_0 = 6{,}0{\cdot}10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a (e) $v_0 = 9{,}0{\cdot}10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (f) Proč se některé trajektorie protínají samy se sebou a jiné ne? Proč je jednou z nich přímka?

30
Magnetické pole elektrického proudu

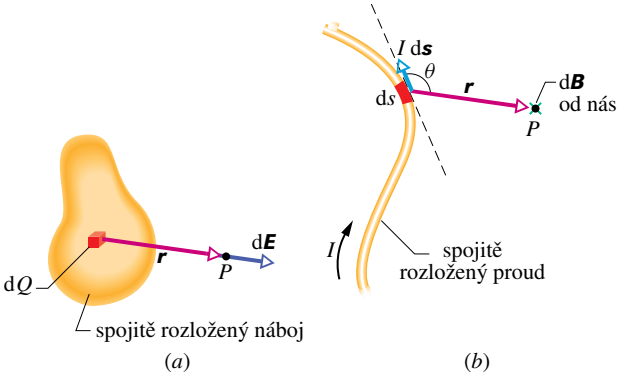


Takto, pomocí raket a raketoplánů, vysíláme v současné době kosmonauty a dopravujeme materiál do kosmického prostoru. Je to cesta velmi náročná na kvalitu konstrukčních materiálů a paliva. Až však budeme dolovat suroviny například na Měsíci nebo asteroidech, budeme potřebovat méně náročný způsob dopravy. Jedním z takových řešení mohou být ***elektromagnetické katapulty****. Elektromagnetické dělo je v současné době schopné urychlit střelu z klidu na rychlost 10 km/s během jedné milisekundy. Jak lze dosáhnout tak obrovského zrychlení?*

30.1 MAGNETICKÉ POLE ELEKTRICKÉHO PROUDU

V čl. 29.1 jsme si vysvětlili, že magnetické pole můžeme vytvořit elektrickým proudem, tedy pohybujícím se nábojem. Po pečlivém prostudování celé následující kapitoly bychom měli umět vypočítat magnetické pole vytvořené danou konfigurací elektrických proudů. Budeme postupovat stejně jako v kap. 23, kde jsme určovali elektrické pole vytvořené daným rozložením nábojů.

Zopakujme si stručně základní postup. Nejprve jsme myšleně rozdělili celý náboj (spojitě rozložený) na infinitezimální elementy náboje $\mathrm{d}Q$ (obr. 30.1a). Potom jsme vypočítali infinitezimální intenzitu $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ elektrického pole, kterou vytvoří v daném bodě P náboj $\mathrm{d}Q$. Protože pro elektrické pole platí princip superpozice, určili jsme intenzitu v bodě P integrací příspěvků $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ od všech elementů.



Obr. 30.1 (a) Element náboje $\mathrm{d}Q$ vytváří elektrické pole o intenzitě $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ v bodě P. (b) Proudový element $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ vytváří magnetické pole o indukci $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ v bodě P. Zelený křížek vyjadřuje směr $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ (kolmo k rovině obrázku, směrem od nás).

Připomeňme, že velikost vektoru $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ vyjádříme vztahem

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}, \tag{30.1}$$

kde r je vzdálenost bodu P od elementu náboje $\mathrm{d}Q$. Pro kladný element náboje $\mathrm{d}Q$ je směr vektoru $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ stejný jako směr vektoru $\boldsymbol{r}$, což je vektor, který má počátek v elementu náboje $\mathrm{d}Q$ a konec v bodě P (je to tedy průvodič bodu P vůči $\mathrm{d}Q$). Rov. (30.1) pak můžeme přepsat do vektorového tvaru:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r^3}\boldsymbol{r}. \tag{30.2}$$

Všimněte si, že rov. (30.2) je zákon „převráceného čtverce“ (výraz $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ závisí na převrácené hodnotě r^2 navzdory exponentu 3 ve jmenovateli; ten je tam jenom proto, že jsme jednotkový vektor $\boldsymbol{r}^0$ zapsali výrazem $\boldsymbol{r}/r$).

Analogicky budeme postupovat při výpočtu *magnetického pole* elektrického proudu. Na obr. 30.1b je tenký vodič obecného tvaru, kterým protéká elektrický proud I. Naším úkolem je vypočítat magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ v libovolně zvoleném bodě P. Nejdříve myšleně rozdělíme vodič na infinitezimální délkové elementy $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, jejichž délka je $\mathrm{d}s$ a které mají směr tečny k vodiči a jsou orientovány ve směru proudu. Je vhodné zavést pojem infinitezimálního *proudového délkového elementu*, daného výrazem $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ (dále pro stručnost pouze **proudový element**), určit indukci magnetického pole $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ vytvořenou v bodě P takovým elementem. Pro magnetickou indukci platí princip superpozice stejně jako pro elektrickou intenzitu, tj. výsledné pole je rovno součtu polí dílčích. Výsledné pole o indukci $\boldsymbol{B}$ v bodě P vypočteme tedy integrací příspěvků $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ od všech proudových elementů. Rozdíl oproti elektrickému poli je v tom, že zatímco element elektrického náboje $\mathrm{d}Q$, vytvářející elektrické pole, je skalární povahy, má proudový element $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, vytvářející magnetické pole, povahu vektorovou.

Východiskem dalšího výkladu bude vzorec pro velikost magnetické indukce $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$, vytvořené v libovolně vybraném bodě P proudovým elementem $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}s\sin\theta}{r^2}. \tag{30.3}$$

Zde μ_0 je konstanta* nazývaná *permeabilita vakua* neboli *magnetická konstanta*, jejíž hodnotu definujeme přesně:

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}} \doteq \doteq 1{,}26\cdot 10^{-6}\,\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}. \tag{30.4}$$

Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ má směr daný vektorovým součinem $\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}$ (obr. 30.1b), kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor směřující od proudového elementu k bodu P. Rov. (30.3) tedy můžeme zapsat ve vektorovém tvaru:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \quad \text{(Biotův-Savartův zákon).} \tag{30.5}$$

Tato vektorová rovnice, stejně jako její skalární tvar rov. (30.3), se nazývá **Biotův-Savartův zákon** (někdy též **Biotův-Savartův-Laplaceův**). Je to zákon, který také patří mezi zákony „převráceného čtverce“, v nichž veličina popisující pole klesá se čtvercem vzdálenosti od svého zdroje (v tomto případě proudového elementu $I\,\mathrm{d}s$).

V našem výkladu bude Biotův-Savartův zákon výchozím zákonem při studiu magnetického pole, obdobně jako byl Coulombův zákon výchozím zákonem pro elektrostatické pole.

* Souvislost μ_0 s ε_0 a rychlostí světla c je uvedena v čl. 34.2.

(Magnetické pole je vytvářeno elektrickým proudem; vodič pouze vymezuje, kudy má proud téci. Často však píšeme jen „pole přímého vodiče“, resp. „pole kruhového oblouku“ a neprodlužujeme zbytečně text zdůrazňováním samozřejmosti, že jde o vodič daného tvaru, kterým protéká proud, tj. že je to „pole elektrického proudu, protékajícího vodičem majícím tvar přímky, resp. kruhového oblouku“.)

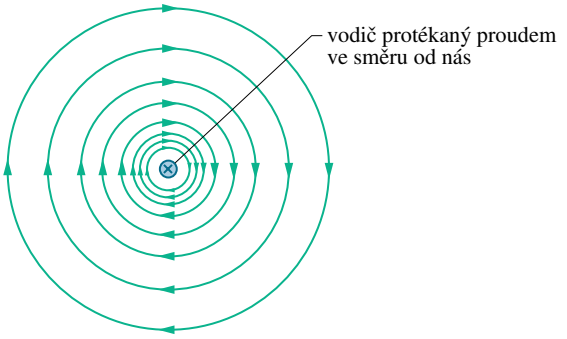
Magnetické pole dlouhého přímého vodiče

Vyjdeme z Biotova-Savartova zákona a dokážeme, že velikost magnetické indukce ve vzdálenosti R od nekonečně dlouhého přímého tenkého vodiče, kterým protéká elektrický proud I, je vyjádřena vztahem

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad \text{(dlouhý přímý vodič).} \qquad (30.6)$$

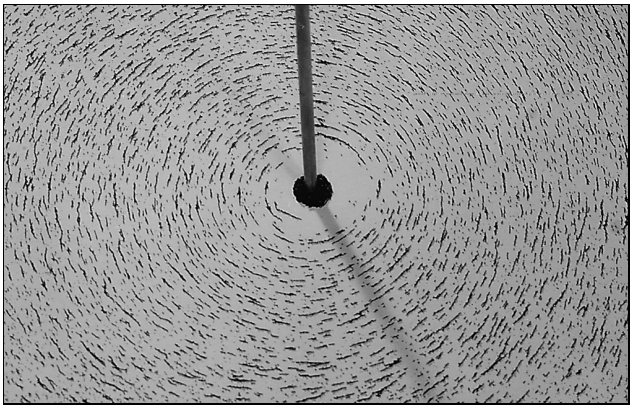
(Zdůrazněme, že v tomto vztahu je R (kolmá) vzdálenost bodu, ve kterém má být určeno B, od vodiče. Naproti tomu v rov. (30.3) a (30.5) — které jsou základní — je r vzdálenost tohoto bodu od proudového elementu.)

Velikost magnetické indukce B v rov. (30.6) závisí pouze na velikosti proudu a vzdálenosti uvažovaného bodu od vodiče. V našem odvození ukážeme, že indukční čáry vektoru magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ mají tvar soustředných kružnic kolem vodiče, jak je ukázáno na obr. 30.2 a jak lze demonstrovat pomocí železných pilin (obr. 30.3). Vzdálenost mezi magnetickými indukčními čarami na obr. 30.2 s rostoucí vzdáleností od vodiče roste tak, jak klesá velikost $\boldsymbol{B}$ v závislosti na R, tj. jako $1/R$.



Obr. 30.2 Magnetické indukční čáry pole vytvořeného proudem, protékajícím dlouhým přímým vodičem, jsou soustředné kružnice se středy ve vodiči (na obrázku jsou tyto čáry zobrazeny v rovinném řezu, kolmém k vodiči). Proud ve vodiči je kolmý na rovinu obrázku a má směr od nás, jak ukazuje křížek.

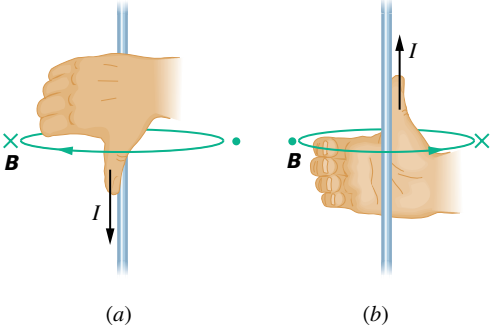
Pro určení směru magnetického pole délkového elementu dlouhého přímého vodiče používáme **pravidlo pravé ruky**:



Obr. 30.3 Železné piliny, kterými byl posypán tuhý papír kolmý na přímý dlouhý vodič protékaný proudem. Piliny se uspořádaly do tvaru soustředných kružnic kolem vodiče. Uspořádání je v souladu se směrem magnetické indukce pole vytvořeného elektrickým proudem ve vodiči.

Položte palec pravé ruky ve směru proudového elementu; zahnuté prsty ukazují směr magnetických indukčních čar.

Použití tohoto pravidla pro dlouhý přímý vodič protékaný proudem (obr. 30.2) vidíme na obr. 30.4a v bočním pohledu. Chceme-li určit směr indukce $\boldsymbol{B}$ v určitém bodě, obejmeme pravou rukou vodič tak, aby palec byl ve směru proudu. Směr ohnutých prstů potom udává směr magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ v tomto bodě.



Obr. 30.4 Pravidlo pravé ruky určuje směr pole buzeného vodičem. (a) Situace z obr. 30.2 v bočním pohledu. Magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ v každém bodě vlevo od vodiče je kolmá k rovině papíru a má směr prstů pravé ruky. Směřuje tedy od nás, jak je znázorněno křížkem. (b) Jestliže je směr elektrického proudu opačný, potom indukce $\boldsymbol{B}$ je v každém bodě vlevo od vodiče kolmá k obrázku a směřuje k nám, jak je znázorněno tečkou.

Odvození vztahu (30.6)

Obr. 30.5 je obdobou obr. 30.1b s tím rozdílem, že se nyní jedná o přímý dlouhý vodič. Ilustruje to, co chceme vyřešit: hledáme magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ v bodě P ležícím

ve vzdálenosti R od vodiče. Velikost magnetické indukce, kterou vytvoří v bodě P proudový element $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, je dána rov. (30.3):

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}s\sin\theta}{r^2}.$$

Směr magnetické indukce $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ na obr. 30.5 je určen vektorovým součinem $\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}$, tj. $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ je kolmé na rovinu obrázku a má směr od nás.

Všimněte si, že všechny proudové elementy, na které vodič rozdělujeme, vytvářejí v bodě P příspěvky $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ ve stejném směru.

Velikost magnetické indukce vytvořené v bodě P proudovými elementy z horní poloviny vodiče získáme integrací příspěvků $\mathrm{d}B$ (rov. (30.3)) v mezích od nuly do nekonečna. Podle rov. (30.5) má magnetická indukce, kterou v bodě P vytváří symetricky umístěný proudový element z dolní poloviny, tutéž velikost a směr. Magnetická indukce, vytvořená v tomtéž bodě každou z polovin vodiče protékaného proudem, je tedy stejná. Velikost indukce B magnetického pole nekonečně dlouhého přímého tenkého vodiče je tedy

$$B = 2\int_0^\infty \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}s}{r^2}. \qquad (30.7)$$

(B lze samozřejmě vyjádřit také integrálem $B=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}B$.) Proměnné θ, s a r v této rovnici jsou mezi sebou vázány vztahy, které jsou zřejmé z obr. 30.5:

$$r = \sqrt{s^2+R^2},$$
$$\sin\theta = \sin(\pi-\theta) = \frac{R}{\sqrt{s^2+R^2}}.$$

Tyto vztahy dosadíme do rov. (30.7) a integrací (dodatek E) dostaneme

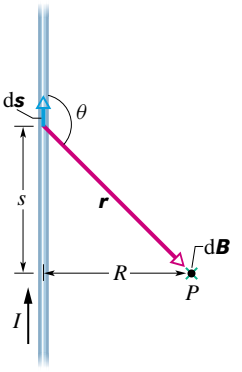
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^\infty \frac{R\,\mathrm{d}s}{(s^2+R^2)^{3/2}} = \\ = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left[\frac{s}{(s^2+R^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \qquad (30.8)$$

což jsme chtěli odvodit. Dodejme, že magnetická indukce v bodě P, vytvořená buď horní, nebo dolní polovinou nekonečně dlouhého přímého vodiče protékaného proudem (obr. 30.5), je rovna polovině této hodnoty, tj.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \quad \text{(polopřímkový vodič s proudem).} \qquad (30.9)$$

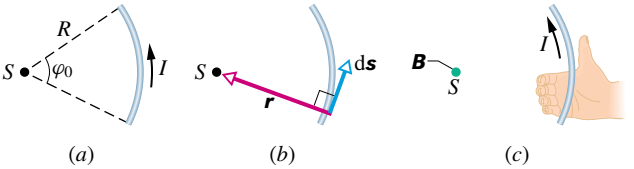
Magnetické pole kruhového oblouku

Chceme-li určit magnetické pole vytvořené proudem protékajícím zakřiveným vodičem, vyjdeme opět z rov. (30.3).



Obr. 30.5 Výpočet magnetického pole proudu I, který protéká dlouhým přímým vodičem o zanedbatelném průřezu. Magnetická indukce $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ v libovolném bodě P je funkcí proudového elementu $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, je kolmá k obrázku a má směr od nás.

Vyjádříme nejprve příspěvek magnetické indukce vytvořený proudovým elementem a integrací získáme výslednou magnetickou indukci vytvořenou všemi elementy celého vodiče. V závislosti na tvaru vodiče může být tato integrace značně obtížná; je však snadná, má-li vodič například tvar části kruhového oblouku a zajímá-li nás magnetická indukce pole v jeho středu S.



Obr. 30.6 (a) Vodičem ve tvaru kruhového oblouku se středem S protéká proud I. (b) Pro každý délkový element vodiče je úhel mezi směrem elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ a vektorem $\boldsymbol{r}$ roven 90°. (c) Určení směru magnetické indukce ve středu S. Pole směřuje kolmo k rovině obrázku ve směru ohnutých prstů pravé ruky, jak je znázorněno barevnou tečkou v bodě S.

Na obr. 30.6a je znázorněn vodič, kterým protéká elektrický proud I a který má tvar části kruhového oblouku se středovým úhlem φ_0, poloměrem R a středem S. V bodě S vytváří každý proudový element $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ magnetickou indukci o velikosti $\mathrm{d}B$ danou rov. (30.3). Úlohu usnadňuje i skutečnost, že nezáleží na tom, ve kterém místě vodiče se takový element nachází (obr. 30.6b). Úhel θ, který svírají vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ a $\boldsymbol{r}$, je 90° a $r=R$. Proto z rov. (30.3) dostaneme

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}s\sin 90^\circ}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}s}{R^2}. \qquad (30.10)$$

Příspěvek k magnetické indukci v bodě S, vytvořený každým proudovým elementem ve tvaru oblouku, má stejnou velikost.

Pomocí pravidla pravé ruky (obr. 30.6c) zjistíme, že všechny příspěvky magnetické indukce $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ od kteréhokoliv místa vodiče mají v bodě S tentýž směr, jsou kolmé k rovině obrázku a směřují k nám. Velikost výsledné magnetické

indukce v bodě S je tedy rovna součtu (integrálu) všech příspěvků $\mathrm{d}B$, daných rov. (30.10). Využijeme-li vztahu $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\varphi$ (čímž změníme integrační proměnnou s na φ), dostaneme z rov. (30.10)

$$B = \int \mathrm{d}B = \int_0^{\varphi_0} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,R\,\mathrm{d}\varphi}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_0^{\varphi_0}\mathrm{d}\varphi.$$

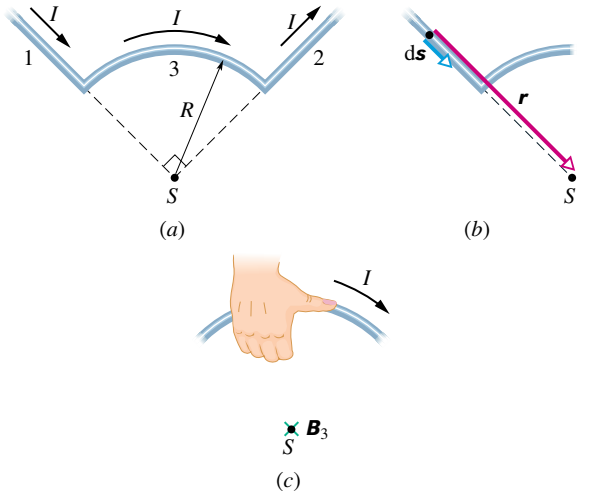
Po jednoduché integraci dostaneme

$$B = \frac{\mu_0 I \varphi_0}{4\pi R} \quad \text{(ve středu kruhového oblouku).} \qquad (30.11)$$

Při výpočtech je třeba dosazovat úhel φ_0 v míře obloukové, nikoliv ve stupních. Tato rovnice udává magnetickou indukci pouze ve středu vodiče ve tvaru kruhového oblouku, kterým protéká proud.

PŘÍKLAD 30.1

Vodičem na obr. 30.7a protéká proud I. Vodič je tvořen kruhovým obloukem o poloměru R se středovým úhlem $(\pi/2)$ rad a dvěma přímkovými částmi, jejichž prodloužení se protínají ve středu S oblouku. Určete magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ v bodě S.



Obr. 30.7 Příklad 30.1. (a) Vodičem složeným ze dvou přímkových částí 1 a 2 a kruhového oblouku 3 protéká proud I. (b) Pro proudový element v přímém úseku 1 je úhel mezi vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ a $\boldsymbol{r}$ roven nule. (c) Určení směru magnetické indukce $\boldsymbol{B}_3$ v bodě S (proud I protéká vodičem v naznačeném směru, magnetické pole je kolmé k rovině obrázku a směřuje od nás).

ŘEŠENÍ: Abychom úlohu vyřešili co nejjednodušším způsobem, rozdělíme vodič myšleně na tři části: (1) polopřímku vlevo, (2) polopřímku vpravo a (3) kruhový oblouk. Poté použijeme rov. (30.3) pro každou z těchto tří částí.

Pro každý proudový element úseku 1 je úhel θ mezi $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ a $\boldsymbol{r}$ roven nule (obr. 30.7b). Z rov. (30.3) tedy dostáváme

$$\mathrm{d}B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}s\sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}s\sin 0}{r^2} = 0.$$

Elektrický proud, protékající přímým úsekem 1 (levá část vodiče), nevytváří tedy žádné magnetické pole v bodě S:

$$B_1 = 0.$$

Stejně je tomu i v případě přímého úseku 2, kdy je úhel θ mezi $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ a $\boldsymbol{r}$ roven 180° pro každý proudový element. Tedy

$$B_2 = 0.$$

Poněvadž zakřivená část 3 představuje kruhový oblouk, můžeme využít rov. (30.11) pro výpočet magnetické indukce ve středu kruhu. Dosazením $\varphi = (\pi/2)$ rad dostaneme

$$B_3 = \frac{\mu_0 I\,(\pi/2)}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{8R}.$$

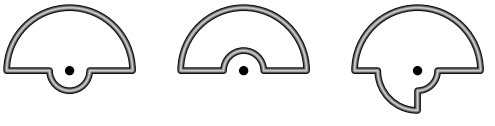
K určení směru magnetické indukce $\boldsymbol{B}_3$ použijeme pravidla pravé ruky. Vidíme, že je kolmá k rovině obrázku a směřuje od nás.

Výsledná magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ vytvořená v bodě S proudem protékajícím vodičem má tedy velikost

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = 0 + 0 + \frac{\mu_0 I}{8R} = \frac{\mu_0 I}{8R}, \quad \text{(Odpověď)}$$

je kolmá k rovině obrázku a míří od nás.

KONTROLA 1: Na obrázku jsou zakresleny tři obvody, obsahující soustředné kruhové oblouky (půlkružnice nebo čtvrtkružnice s poloměry r, $2r$ a $3r$) a radiální přímé úseky. Obvody protéká tentýž proud. Seřaďte je sestupně podle velikosti magnetické indukce ve středu oblouků (označeném tečkou).



RADY A NÁMĚTY

Bod 30.1: *Pravidlo pravé ruky*

Uvádíme přehled různých variant pravidla pravé ruky:

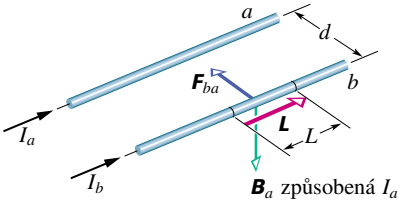
(a) V čl. 3.7 byl uveden postup, jak určit směr vektorového součinu dvou vektorů: orientujme prsty pravé ruky tak, že palec směřuje ve směru prvního vektoru a ukazováček ve směru vektoru druhého. Potom vztyčený prostředník ukáže směr vektorového součinu. V kap. 12 jsme použili tohoto pravidla k určení směru momentu (síly a hybnosti) a v kap. 29 k určení směru síly působící na vodič protékaný proudem v magnetickém poli.

(b) V některých případech (zejména v magnetismu) potřebujeme dát do vzájemného vztahu „zakřivené“ prvky a prvky „rovné“. K tomu nám nejlépe poslouží ohnuté prsty a vztyčený palec pravé ruky. V čl. 29.8 jsme řešili příklad, kde se vyskytoval proud protékající smyčkou (zakřivený prvek) a normálový vektor $\boldsymbol{n}$ (přímý prvek) smyčky. Ohneme-li prsty pravé ruky ve směru proudu tekoucího smyčkou, pak vztyčený palec ukazuje směr vektoru $\boldsymbol{n}$. To je také směr magnetického dipólového momentu $\boldsymbol{\mu}$ smyčky.

V tomto odstavci jsme použili variantu (b): abychom určili směr indukčních čar magnetického pole v okolí proudového elementu, položíme vztyčený palec pravé ruky do směru elektrického proudu, tekoucího vodičem. Ohnuté prsty pravé ruky potom ukazují směr indukčních čar magnetického pole.

30.2 DVA ROVNOBĚŽNÉ VODIČE

Dva rovnoběžné vodiče, jimiž protéká elektrický proud, na sebe navzájem silově působí. Určeme tyto síly pro dlouhé tenké vodiče z obr. 30.8; jejich vzdálenost je d a protékají jimi proudy I_a a I_b.



Obr. 30.8 Dva vodiče se souhlasně rovnoběžnými proudy se navzájem přitahují. Indukce $\boldsymbol{B}_a$ v místě vodiče b je vytvořená proudem tekoucím vodičem a. Výsledná síla $\boldsymbol{F}_{ba}$ působící na vodič b je způsobena tím, že vodičem protéká elektrický proud v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}_a$.

Nejprve vyjádříme sílu, kterou působí vodič a na vodič b (obr. 30.8). Elektrický proud, který protéká vodičem a, vytváří kolem něj magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B}_a$. Právě toto magnetické pole silově působí na vodič b. Abychom tuto sílu mohli vyjádřit, potřebujeme znát velikost a směr magnetické indukce $\boldsymbol{B}_a$ *v místě, kde leží vodič* b. Velikost indukce $\boldsymbol{B}_a$ v každém bodě vodiče b je podle rov. (30.6) rovna

$$B_a = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi d}. \qquad (30.12)$$

Pravidlo pravé ruky nám ukazuje, že vektor $\boldsymbol{B}_a$ v místě vodiče b směřuje dolů (obr. 30.8).

Nyní, když známe velikost magnetické indukce pole, můžeme nalézt sílu, kterou působí toto pole na vodič b. Rov. (29.27) určuje sílu $\boldsymbol{F}_{ba}$, kterou působí magnetické pole $\boldsymbol{B}_a$ na úsek vodiče b délky L:

$$\boldsymbol{F}_{ba} = I_b \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}_a. \qquad (30.13)$$

Na obr. 30.8 jsou vektory $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{B}_a$ na sebe kolmé. Použitím rov. (30.12) dostaneme

$$F_{ba} = I_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L I_a I_b}{2\pi d}. \qquad (30.14)$$

Směr vektoru $\boldsymbol{F}_{ba}$ je dán vektorovým součinem $\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}_a$. Použijeme-li pravidlo pravé ruky v obr. 30.8, zjistíme, že síla $\boldsymbol{F}_{ba}$ míří k vodiči a. Obecný postup určení síly působící na vodič s proudem je tedy následující:

Sílu, kterou na sebe působí dva vodiče protékané proudem, zjistíme ve dvou krocích: (1) určíme magnetickou indukci $\boldsymbol{B}_2$, kterou vytváří druhý vodič v místě prvního vodiče; (2) určíme sílu, kterou působí pole o indukci $\boldsymbol{B}_2$ na první vodič.

Nyní použijeme vyložený postup k výpočtu síly, kterou působí vodič b na vodič a. Zjistíme, že tato síla míří směrem k vodiči b; odtud plyne, že dva rovnoběžné vodiče, jimiž protékají souhlasně orientované proudy, se navzájem přitahují. Naopak v případě, že proudy ve vodičích jsou orientovány nesouhlasně, se vodiče odpuzují. Tedy:

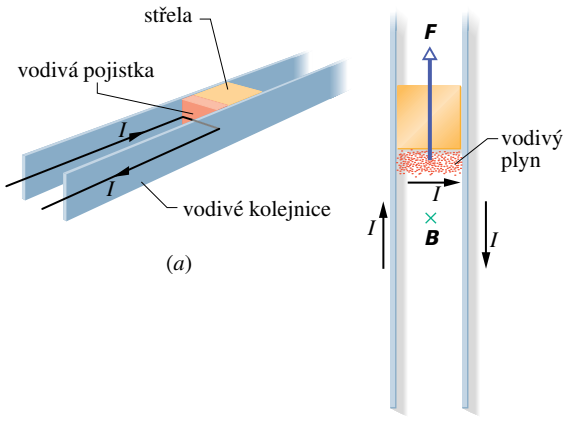
Dva rovnoběžné vodiče protékané souhlasně orientovanými proudy se přitahují, vodiče protékané opačně orientovanými proudy se odpuzují.

Síla působící mezi proudy tekoucími v rovnoběžných vodičích je základem pro definici ampéru, který je jednou ze sedmi základních jednotek soustavy SI. Podle definice přijaté v roce 1946 je ampér definován jako velikost stálého elektrického proudu, který při průtoku dvěma přímými rovnoběžnými a velmi dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu vzdálenými od sebe 1 m ve vakuu vyvolá mezi těmito vodiči sílu $2{\cdot}10^{-7}$ N na jeden metr jejich délky. Tato definice vychází z rov. (30.14) s $\mu_0 = 4\pi{\cdot}10^{-7}\ \mathrm{T{\cdot}m{\cdot}A^{-1}}$ (přesně).

Elektromagnetické dělo

Princip elektromagnetického děla je znázorněn na obrázku 30.9a. Elektrický proud prochází první kolejnicí, poté napříč vodivou „pojistkou“ (úzký pásek mědi), která se nachází mezi oběma kolejnicemi, a vrací se druhou kolejnicí zpět do zdroje proudu. Střela, která má být vystřelena, leží na čelní straně pojistky a je uložena volně mezi oběma kolejnicemi. Po zapnutí proudu se pojistka okamžitě roztaví

a vypaří, takže v místě, kde se nacházela, vznikne elektricky vodivý plyn — plazma.



Obr. 30.9 (a) Elektromagnetické dělo v okamžiku, kdy je zapojen proud I. Ten nejprve roztaví a vzápětí vypaří vodivou pojistku. (b) Elektrický proud vytváří mezi kolejnicemi magnetické pole $\boldsymbol{B}$. To působí na vodivý plyn (vzniklý vypařením pojistky), který je částí vodivé dráhy, silou $\boldsymbol{F}$; plyn urychlí střelu ve směru podél kolejnic a vystřelí ji.

Pravidlo pravé ruky (obr. 30.4) ukazuje, že elektrický proud v kolejnicích na obr. 30.9a vytvoří mezi nimi magnetické pole, které působí směrem dolů. Toto magnetické pole působí silou $\boldsymbol{F}$ na vodivý plyn, jímž teče proud I (obr. 30.9b). Z rov. (30.13) a pravidla pravé ruky pro vektorový součin vidíme, že síla $\boldsymbol{F}$ působí vyznačeným směrem ven podél kolejnic. Plyn vypuzený podél kolejnic tlačí střelu, přičemž jí udělí zrychlení větší než $5{\cdot}10^6\,g$. Její rychlost může dosáhnout velikosti až $10\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ (to vše proběhne během 1 ms).

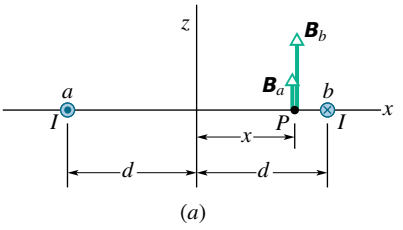
PŘÍKLAD 30.2

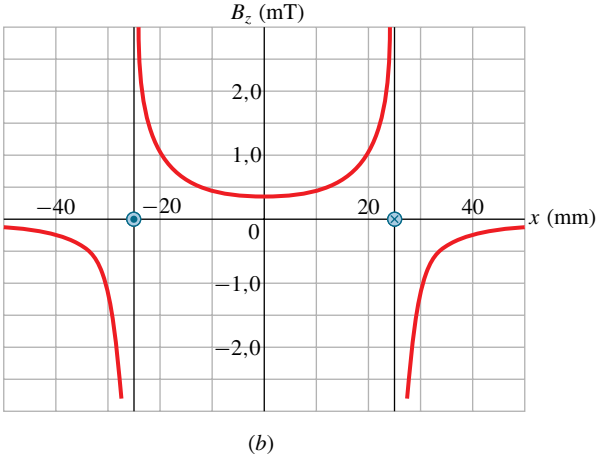
Dvěma dlouhými rovnoběžnými vodiči, vzdálenými od sebe $2d$, protéká stejný proud I v opačných směrech (obr. 30.10a). Odvoďte výraz pro $B_z(x)$, tj. výslednou magnetickou indukci v bodech ve vzdálenosti x od středu spojnice obou vodičů.

ŘEŠENÍ: Použitím pravidla pravé ruky lze z obr. 30.10a ukázat, že magnetická pole vytvořená proudy tekoucími v jednotlivých vodičích mají stejný směr ve všech bodech mezi vodiči. Z principu superpozice a z rov. (30.6) dostaneme pro libovolný bod mezi vodiči:

$$B_z(x) = B_{a,z}(x) + B_{b,z}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+x)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)} = \\ = \frac{\mu_0 I d}{\pi(d^2 - x^2)}. \qquad \text{(Odpověď)} \qquad (30.15)$$

Rozbor tohoto vztahu ukazuje, že (1) závislost $B_z(x)$ je symetrická vůči záměně $x \leftrightarrow -x$, (2) $B_z(x)$ má mezi vodiči svou minimální hodnotu $\mu_0 I/\pi d$ v bodě $x = 0$ a (3) $B_z(x) \to \infty$, když $x \to \pm d$. Pro $x = \pm d$ by bod P ležel na ose jednoho z vodičů. Naše odvození rov. (30.6) však platí pouze pro body vně vodiče, takže rov. (30.15) platí jenom k povrchu vodičů. (Polem uvnitř vodiče se zabýváme v následujícím článku.)





Obr. 30.10 Příklad 30.2. (a) Dva rovnoběžné vodiče, jimiž protékají elektrické proudy téže velikosti v opačných směrech (tj. kolmo k rovině obrázku, směrem k nám a od nás). V bodech mezi vodiči, např. v bodě P, směřují magnetická pole, vytvořená jednotlivými proudy, týmž směrem. (b) Závislost $B_z(x)$ pro $I = 25\,\mathrm{A}$ a vzdálenost obou vodičů 50 mm.

Na obr. 30.10b je vynesena závislost daná rov. (30.15) pro číselné hodnoty $I = 25\,\mathrm{A}$ a $2d = 50\,\mathrm{mm}$. Ponecháváme jako cvičení 31 dokázat, že rov. (30.15) platí i pro všechny body „za vodiči“, tedy pro body, pro které platí $|x| > d$.

PŘÍKLAD 30.3

Na obr. 30.11a jsou dva dlouhé rovnoběžné vodiče, jimiž protékají elektrické proudy I_1 a I_2 v opačných směrech. Určete velikost a směr výsledné magnetické indukce v bodě P. Dosaďte číselné hodnoty $I_1 = 15\,\mathrm{A}$, $I_2 = 32\,\mathrm{A}$ a $d = 5{,}3\,\mathrm{cm}$.

ŘEŠENÍ: Na obr. 30.11b jsou magnetické indukce $\boldsymbol{B}_1$, resp. $\boldsymbol{B}_2$, polí vytvořených proudy I_1, resp. I_2, v bodě P (pomocí pravidla pravé ruky si ověřte, že jejich směry

jsou správné). Velikosti magnetických indukcí těchto polí v bodě P jsou dány rov. (30.6), tedy

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\left(d/\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}\mu_0}{2\pi d} I_1$$

a

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\left(d/\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}\mu_0}{2\pi d} I_2,$$

kde jsme R nahradili veličinou $d/\sqrt{2}$, neboť $R/d = \sin 45° = \sqrt{2}/2$.

Velikost výsledné magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ je

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\sqrt{2}\mu_0}{2\pi d}\sqrt{I_1^2 + I_2^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}(4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}})\sqrt{(15\ \mathrm{A})^2 + (32\ \mathrm{A})^2}}{2\pi(5{,}3\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m})} =$$
$$= 1{,}89\cdot 10^{-4}\ \mathrm{T} \doteq 190\ \mu\mathrm{T}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pro úhel φ mezi vektory $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B}_2$ podle obr. 30.11b platí

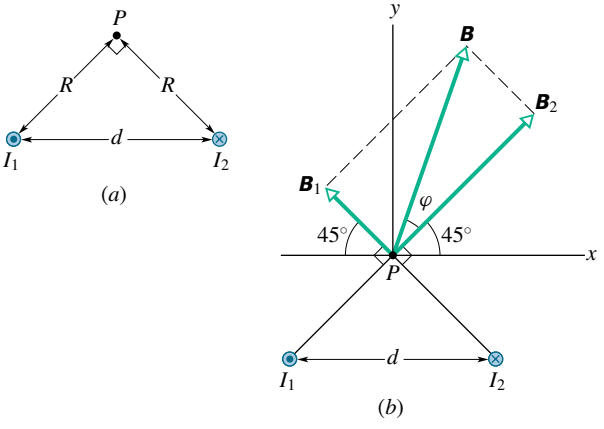
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B_1}{B_2}.$$

Dosadíme-li za B_1 a B_2, dostaneme

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{I_1}{I_2} = \frac{(15\ \mathrm{A})}{(32\ \mathrm{A})} = 0{,}469, \qquad \text{odkud } \varphi = 25°.$$

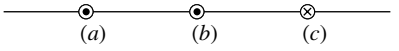
Úhel mezi vektorem $\boldsymbol{B}$ a osou x je potom

$$\varphi + 45° = 25° + 45° = 70°. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 30.11 Příklad 30.3. (a) Dvěma vodiči na obrázku protékají proudy I_1 a I_2 v opačných směrech (kolmo k rovině obrázku, směrem k pozorovateli a od něho). Všimněte si pravých úhlů v bodě P. (b) Dílčí pole s magnetickými indukcemi $\boldsymbol{B}_1$ a $\boldsymbol{B}_2$ se sčítají vektorově.

KONTROLA 2: Na obrázku jsou tři dlouhé, přímé, navzájem rovnoběžné vodiče, kterými protéká stejný proud. Vodič b leží uprostřed mezi vodiči a a c (obrázek). Směr elektrického proudu je vyznačen křížkem a tečkami. Seřaďte vodiče sestupně podle velikosti síly, kterou na každý z nich působí ostatní dva vodiče.



30.3 AMPÉRŮV ZÁKON

Elektrické pole $\boldsymbol{E}$ libovolně rozložených nábojů lze vypočítat z rov. (30.2). Ta plyne z Coulombova zákona, vyjadřujícího síly působící mezi bodovými náboji. Coulombův zákon však má i svou polní paralelu: je to Gaussův zákon elektrostatiky (24.7), spojující tok intenzity $\boldsymbol{E}$ elektrického pole s náboji, které pole vytvářejí.

Podobně můžeme vypočítat užitím Biotova-Savartova zákona (30.5) magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ libovolně rozložených proudů. I tento zákon má však svou polní paralelu: je to Ampérův zákon, spojující cirkulaci vektoru $\boldsymbol{B}$ s proudy, které pole vytvářejí. A podobně jako Gaussův zákon elektrostatiky nám i Ampérův zákon pomůže také zcela prakticky při řešení úloh s jistou symetrií (rovinnou, válcovou nebo kulovou) v rozložení proudů.

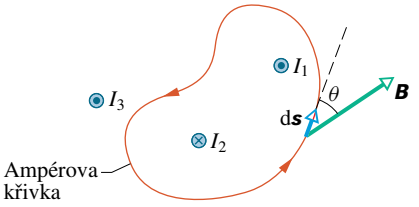
Ampérův zákon (nebo též zákon celkového proudu) má tvar

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I_\mathrm{c} \quad \text{(Ampérův zákon).} \qquad (30.16)$$

Kroužek na znaménku integrálu značí, že integrujeme po uzavřené orientované křivce (libovolného tvaru); ve vztahu k Ampérovu zákonu ji nazýváme *Ampérova křivka*. Její infinitezimální element značíme $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$; leží v tečně ke křivce a je orientován souhlasně s ní. Integrál na levé straně nazýváme *cirkulací* vektoru $\boldsymbol{B}$. Proud I_c na pravé straně rovnice je součtem všech proudů obepnutých křivkou. (Uvažujeme *všechny* proudy, tedy *celkový* proud protékající plochou *libovolného* tvaru, která je ohraničená Ampérovou křivkou.)

Pro ilustraci použijeme nejprve Ampérův zákon v situaci na obr. 30.12. Jsou na něm znázorněny průřezy tří dlouhých přímých vodičů, jimiž protékají proudy I_1, I_2, a I_3 kolmo k rovině obrázku buď směrem k nám, nebo od nás. Zakreslená Ampérova křivka, ležící v rovině obrázku, obepíná dva z proudů, ale nikoliv třetí. Orientaci křivky pro integraci v rov. (30.16) zvolíme proti směru otáčení hodinových ručiček.

Abychom mohli použít Ampérova zákona, rozdělíme myšleně křivku (obr. 30.12) na infinitezimální elementy d$\boldsymbol{s}$. V místě elementu d$\boldsymbol{s}$ je indukce výsledného magnetického pole, které je vytvořené třemi proudy, rovna $\boldsymbol{B}$. Protože vodiče jsou kolmé k rovině obrázku, budou jejich magnetická pole v místě elementu d$\boldsymbol{s}$ ležet v rovině obrázku. Proto také výsledná magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ v místě elementu d$\boldsymbol{s}$ musí ležet v této rovině. Na obr. 30.12 je vektor $\boldsymbol{B}$ zakreslen v obecném směru svírajícím úhel θ se směrem d$\boldsymbol{s}$.



Obr. 30.12 Ampérův zákon aplikovaný na (libovolně zvolenou) Ampérovu křivku, která obepíná dva dlouhé přímé vodiče, nikoli však vodič třetí. Všimněte si různých směrů proudů.

Skalární součin $\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ na levé straně rov. (30.16) je roven $B \cos\theta \, \mathrm{d}s$. Platí tedy

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint B \cos\theta \, \mathrm{d}s.$$

Integrovaný výraz můžeme také chápat jako součin infinitezimální délky ds Ampérovy křivky se složkou $B \cos\theta$ magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ ve směru tečny k Ampérově křivce. Integrace potom vyjadřuje součet všech takových součinů podél celé křivky. Rov. (30.16) má pak tvar

$$\oint B \cos\theta \, \mathrm{d}s = \mu_0 I_c. \qquad (30.17)$$

Znaménko každého z proudů, které vytvářejí proud I_c obepnutý křivkou, určuje pravidlo pravé ruky:

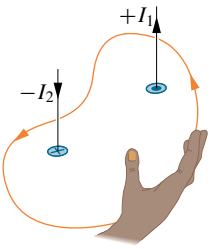
> Ohněte prsty pravé ruky kolem Ampérovy křivky tak, aby ukazovaly ve směru její orientace. Potom proudu, který teče ve směru vztyčeného palce, přiřadíme kladné znaménko a proudu tekoucímu opačně znaménko záporné.

Pravidlo pravé ruky použijeme k určení celkového proudu I_c v situaci na obr. 30.13. Při zvolené orientaci na křivce (proti směru otáčení hodinových ručiček) je celkový proud obepnutý smyčkou

$$I_c = I_1 - I_2.$$

(Proud I_3 není obepnut křivkou). Rov. (30.17) můžeme proto přepsat do tvaru

$$\oint B \cos\theta \, \mathrm{d}s = \mu_0 (I_1 - I_2). \qquad (30.18)$$



Obr. 30.13 Ampérův zákon a pravidlo pravé ruky pro určení znaménka proudů obepnutých Ampérovou křivkou. Situace odpovídá obr. 30.12.

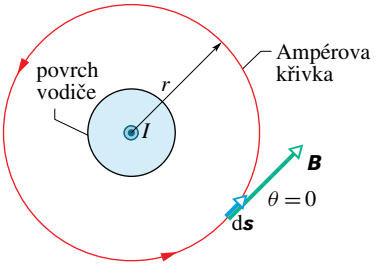
Proud I_3 sice také přispívá k magnetické indukci B, ale nevystupuje na pravé straně rov. (30.18). Lze totiž dokázat, že příspěvek takového proudu, který není obepnut Ampérovou křivkou, k *cirkulaci* $\boldsymbol{B}$ (tj. ke křivkovému integrálu na pravé straně rov. (30.16)), je vždy nulový. (Je to situace příbuzná situaci z Gaussova zákona, když náboj ležel *vně* Gaussovy plochy.) K cirkulaci $\boldsymbol{B}$ přispívají tedy pouze proudy obepnuté Ampérovou křivkou.

Integrál v rov. (30.18) by byl v situaci znázorněné na obr. 30.12 dosti složitý, výsledek integrace však známe: integrál musí být roven hodnotě $\mu_0(I_1 - I_2)$, která je dána součtem všech proudů obepnutých křivkou.

Nyní použijeme Ampérova zákona pro dvě situace, ve kterých nám symetrie úlohy umožňuje jednoduše vypočítat integrál v rov. (30.16), resp. (30.17) a z něj určit indukci magnetického pole.

Magnetické pole vně dlouhého přímého vodiče

Na obr. 30.14 je znázorněn dlouhý přímý vodič kolmý k rovině obrázku protékaný proudem I směrem k nám. Podle rov. (30.6) má magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ pole vytvořeného proudem stejnou velikost ve všech bodech, které jsou ve stejné vzdálenosti od vodiče a indukční čáry mají tvar soustředných kružnic se středem ve vodiči. Jinými slovy,



Obr. 30.14 Použití Ampérova zákona k určení magnetického pole kolem dlouhého přímého vodiče, kterým teče proud I. Ampérova křivka má tvar kružnice se středem uprostřed vodiče (a s poloměrem větším, než je poloměr vodiče).

magnetické pole $\boldsymbol{B}$ má válcovou symetrii kolem vodiče. Této symetrie můžeme využít ke zjednodušení integrálu v Ampérově zákoně (rov. (30.16)) tak, že obklopíme vodič soustřednou kruhovou Ampérovou křivkou o poloměru r. Magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ má potom stejnou velikost B v každém bodě křivky. Chceme-li provést integraci v rov. (30.16), nemusíme předem znát směr vektoru $\boldsymbol{B}$. Můžeme například předpokládat, že $\boldsymbol{B}$ má směr souhlasný se zvolenou orientací uzavřené křivky. Tato orientace určuje znaménka proudů na pravé straně rov. (30.16) v souladu s pravidlem pravé ruky. Jestliže při výpočtu $\boldsymbol{B}$ vyjde kladná hodnota, zvolili jsme směr vektoru $\boldsymbol{B}$ správně. Vyjde-li záporná, má $\boldsymbol{B}$ směr opačný, než jsme zvolili.

Poněvadž $\boldsymbol{B}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ mají stejný směr, je integrál v rovnici (30.17) roven

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint B\cos 0\,\mathrm{d}s = B\oint \mathrm{d}s = B(2\pi r).$$

Připomeňme, že $\oint \mathrm{d}s$ v tomto vztahu znamená součet všech infinitezimálních délkových elementů $\mathrm{d}s$ podél kružnice. To dává obvod $2\pi r$ kružnice.

Pravidlo pravé ruky přiřazuje kladné znaménko proudu na obr. 30.14, takže pravá strana Ampérova zákona bude rovna $+\mu_0 I$. Proto dostaneme

$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$

a odtud

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \qquad (30.19)$$

To je stejný výraz jako rov. (30.6), kterou jsme odvodili již dříve (se značně větší námahou) s použitím Biotova-Savartova zákona. Jelikož rov. (30.19) dává kladnou hodnotu B, je směr vektoru indukce $\boldsymbol{B}$ orientován tak, jak ukazuje obr. 30.14.

Magnetické pole uvnitř dlouhého přímého vodiče

Na obr. 30.15 je průřez dlouhým přímým vodičem o poloměru R, kterým protéká v průřezu homogenně rozložený elektrický proud I směrem k nám. Protože se jedná o homogenní rozložení proudu, bude také jím vytvořené magnetické pole válcově symetrické. Chceme-li tedy určit magnetické pole v bodech uvnitř vodiče, můžeme znovu s výhodou využít jako Ampérovy křivky kružnici o poloměru $r < R$, jak je ukázáno na obr. 30.15. Ze symetrie úlohy dále plyne, že směr vektoru indukce $\boldsymbol{B}$ je tečný ke křivce. Levou stranu Ampérova zákona můžeme proto psát ve tvaru

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = B\oint \mathrm{d}s = B(2\pi r). \qquad (30.20)$$

Abychom určili pravou stranu Ampérova zákona, musíme uvážit, že v důsledku homogenního rozložení elektrického proudu (hustota proudu $\boldsymbol{J}$ je konstantní) bude proud I_c úměrný ploše ohraničené Ampérovou křivkou, tedy

$$I_c = I\frac{\pi r^2}{\pi R^2}. \qquad (30.21)$$

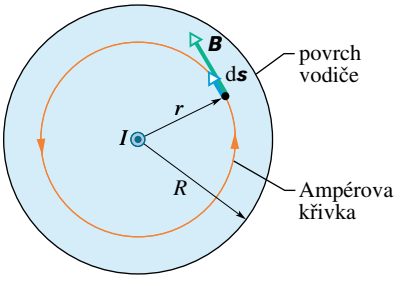
Podle pravidla pravé ruky má I_c kladné znaménko. Z Ampérova zákona tedy plyne

$$B(2\pi r) = \mu_0 I\frac{\pi r^2}{\pi R^2},$$

a odtud

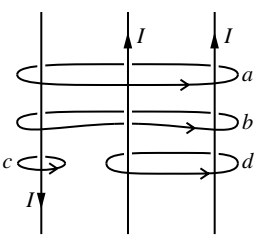
$$B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\right) r. \qquad (30.22)$$

Velikost magnetické indukce B uvnitř vodiče protékaného proudem rozloženým homogenně v jeho průřezu je tedy přímo úměrná vzdálenosti r od jeho osy. Je nulová v jeho středu a maximální na povrchu, kde $r = R$. Všimněte si, že rov. (30.19) pro magnetickou indukci vně vodiče a rov. (30.22) pro magnetickou indukci uvnitř vodiče dávají tutéž hodnotu pro $r = R$, tj. pro povrch vodiče.



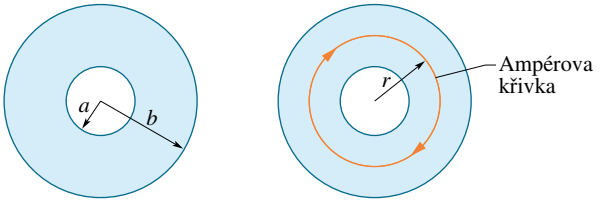
Obr. 30.15 Použití Ampérova zákona k určení magnetické indukce, kterou budí elektrický proud I *uvnitř* dlouhého přímého vodiče kruhového průřezu. Proud je homogenně rozložen v průřezu a směřuje k nám. Ampérova křivka se nachází uvnitř vodiče.

KONTROLA 3: Na obrázku jsou tři rovnoběžné vodiče se stejně velkými proudy I a čtyři Ampérovy křivky. Seřaďte křivky sestupně podle velikosti $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ podél každé z nich.



PŘÍKLAD 30.4

Na obr. 30.16a je nakreslen příčný průřez dlouhého dutého vodivého válce s vnitřním, resp. vnějším poloměrem $a = 2{,}0\,\text{cm}$, resp. $b = 4{,}0\,\text{cm}$. Válcem protéká proud kolmo k obrázku, směrem k nám, s proudovou hustotou danou vztahem $J = cr^2$, kde $c = 3{,}0{\cdot}10^6\,\text{A}{\cdot}\text{m}^{-4}$ a r je vyjádřeno v metrech. Určete magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ v bodě, který se nachází ve vzdálenosti 3,0 cm od podélné osy válce.



Obr. 30.16 Příklad 30.4. (a) Průřez vodivým válcem s vnitřním poloměrem a a vnějším poloměrem b. (b) Ampérova křivka o poloměru r pro výpočet magnetického pole ve vzdálenosti r od osy válce.

ŘEŠENÍ: Protože rozložení proudu (a proto i magnetické pole) má válcovou symetrii vzhledem k podélné ose válce, můžeme použít Ampérova zákona k určení magnetické indukce $\boldsymbol{B}$. Protože chceme určit indukci ve vzdálenosti 3,0 cm od osy, zvolíme za Ampérovu křivku kružnici o tomto poloměru, se středem v ose válce (obr. 30.16b).

Do Ampérova zákona je třeba dále dosadit pravou stranu, tj. I_c, což je elektrický proud obepnutý Ampérovou křivkou. Nemůžeme předpokládat přímou úměrnost mezi velikostí proudu a obsahem plochy, kterou proud protéká, jak tomu bylo v případě rov. (30.21), neboť proud není v průřezu vodiče rozložen homogenně. Místo toho budeme postupovat jako v př. 27.2b a budeme integrovat proudovou hustotu od vnitřního poloměru válce a až po poloměr křivky r:

$$I_c = \int J\,\mathrm{d}S = \int_a^r cr^2(2\pi r\,\mathrm{d}r) =$$
$$= 2\pi c\int_a^r r^3\,\mathrm{d}r = 2\pi c\left[\frac{r^4}{4}\right]_a^r =$$
$$= \frac{\pi c(r^4 - a^4)}{2}.$$

Protože Ampérova křivka je na obr. 30.16b orientována ve směru otáčení hodinových ručiček, přiřadíme proudu, který teče k nám, záporné znaménko.

Výpočet levé strany Ampérova zákona (30.16) s přihlédnutím k obr. 30.15 vede opět k hodnotě $B(2\pi r)$. Tím dostáváme

$$B(2\pi r) = -\frac{\mu_0\pi c}{2}(r^4 - a^4).$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme

$$B = -\frac{\mu_0 c}{4r}(r^4 - a^4) =$$
$$= -\frac{(4\pi{\cdot}10^{-7}\,\text{T}{\cdot}\text{m}{\cdot}\text{A}^{-1})(3{,}0{\cdot}10^6\,\text{A}{\cdot}\text{m}^{-4})}{4(0{,}030\,\text{m})}\cdot$$
$$\cdot\left((0{,}030\,\text{m})^4 - (0{,}020\,\text{m})^4\right) =$$
$$= -2{,}0{\cdot}10^{-5}\,\text{T}.$$

Magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ má tedy velikost

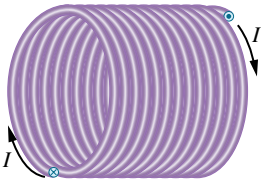
$$B = 2{,}0{\cdot}10^{-5}\,\text{T} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a má směr proti námi zvolené orientaci křivky (obr. 30.16b).

30.4 SOLENOID A TOROID

Magnetické pole solenoidu

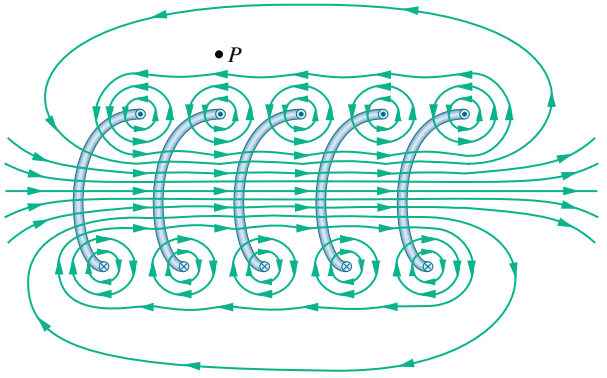
Nyní prostudujeme jinou situaci, ve které lze s výhodou použít Ampérův zákon. Jde o magnetické pole vytvořené proudem v dlouhé, hustě vinuté cívce. Takovou cívku nazýváme **solenoid** (obr. 30.17). Budeme vždy předpokládat, že délka solenoidu je mnohem větší než jeho průměr, takže můžeme zanedbat rušivý vliv začátku či konce vinutí.



Obr. 30.17 Solenoid, kterým protéká proud I.

Na obr. 30.18 je znázorněna část takového solenoidu. Magnetické pole solenoidu je rovno superpozici polí vytvořených jednotlivými závity. V bodech velmi blízkých k povrchu závitu má magnetické pole podobný průběh jako pole dlouhého přímého vodiče: indukční čáry kolem něho jsou tvarem velmi blízké soustředným kružnicím. Na obr. 30.18 vidíme, že v prostoru mezi sousedními závity se magnetická indukce značně zeslabí (v ideálním případě až do vymizení). Také je vidět, že v bodech uvnitř solenoidu dostatečně vzdálených od vinutí (vůči vzdálenosti jednotlivých závitů od sebe) je magnetické pole homogenní a jeho magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ je prakticky rovnoběžná s osou solenoidu; u *ideálního* solenoidu by toto platilo přesně.

V bodech mimo solenoid, např. v bodě P na obr. 30.18, je výsledné magnetické pole tvořeno jednak bližšími částmi závitů solenoidu ($\boldsymbol{B}$ míří doleva, jak je ukázáno v těsné



Obr. 30.18 Indukční čáry magnetického pole znázorněné v řezu podél osy řídce vinutého solenoidu. Vidíme zde poloviny pěti závitů a magnetické indukční čáry kolem každého z nich. Poblíž osy solenoidu se pole jednotlivých závitů skládají ve výsledné magnetické pole, které má směr této osy. Husté rovnoběžné indukční čáry značí, že toto pole je silné a homogenní. Vně solenoidu jsou indukční čáry od sebe navzájem hodně vzdálené, což ukazuje, že magnetické pole je zde velmi slabé.

blízkosti bodu P, neboť proud v závitech teče směrem k nám — je značen tečkou), jednak vzdálenějšími částmi závitů ($\boldsymbol{B}$ míří doprava, neboť proud v závitech teče směrem od nás — je značen křížkem). Oba příspěvky jsou orientovány proti sobě a v případě ideálního solenoidu se vyruší; magnetické pole v prostoru mimo solenoid je pak nulové. Tyto závěry platí pro reálný solenoid tím lépe, čím je délka solenoidu vůči jeho průměru větší a čím dále je zkoumaný bod P od okrajů solenoidu.

Orientace pole uvnitř solenoidu je určena pravidlem pravé ruky: uchopíme-li solenoid do pravé ruky tak, že prsty směřují ve směru proudu v závitech, potom vztyčený palec ukazuje směr magnetického pole.

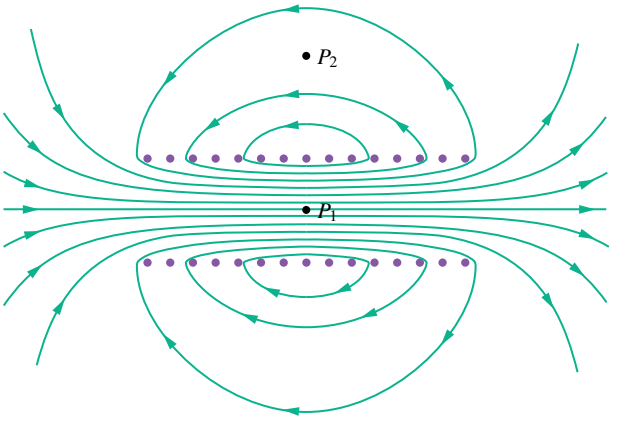
Na obr. 30.19 jsou indukční čáry reálného solenoidu. Jejich vzdálenost v centrální oblasti ukazuje na to, že pole uvnitř solenoidu je poměrně silné a homogenní v celém jeho průřezu. Pole vně solenoidu je však velmi slabé.

Pro výpočet velikosti B magnetické indukce použijme Ampérův zákon

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I_c \qquad (30.23)$$

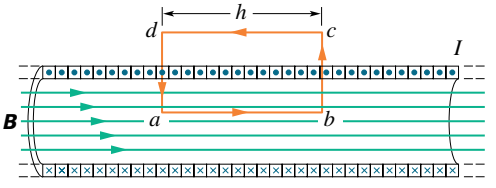
na pravoúhlou křivku $abcd$ nacházející se v ideálním solenoidu (obr. 30.20). Při odvozování předpokládejme, že pole $\boldsymbol{B}$ uvnitř solenoidu je homogenní a vně solenoidu nulové. Integrál $\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ lze rozdělit na součet čtyř integrálů, každý pro jeden ze čtyř úseků pravoúhlé křivky:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_b^c \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_c^d \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_d^a \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}. \qquad (30.24)$$



Obr. 30.19 Indukční čáry znázorňující magnetické pole reálného solenoidu konečné délky. Pole je silné a homogenní uvnitř solenoidu (např. v bodě P_1), ale poměrně slabé vně solenoidu (např. bod P_2).

První integrál na pravé straně rov. (30.24) je roven Bh, kde B je velikost magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ uvnitř solenoidu a h je délka křivky od a do b. Druhý a čtvrtý integrál jsou rovny nule, protože pro každý délkový element těchto úseků je indukce $\boldsymbol{B}$ buď kolmá k úseku, nebo nulová, takže skalární součin $\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ je roven nule. Třetí integrál podél úsečky, která leží mimo solenoid, je nulový, neboť zde je $B = 0$ ve všech bodech mimo solenoid. Integrál $\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ je tedy pro celou pravoúhlou křivku roven Bh.



Obr. 30.20 Ampérův zákon pro případ dlouhého ideálního solenoidu, kterým protéká elektrický proud I. Ampérova křivka má tvar obdélníka $abcd$.

Výsledný proud I_c uzavřený v pravoúhlé Ampérově křivce na obr. 30.20 není pouze I, neboť uvnitř cívky se nachází více než jeden závit. Označíme-li počet závitů na jednotku délky n, je

$$I_c = I(nh)$$

a z Ampérova zákona plyne

$$Bh = \mu_0 I n h,$$

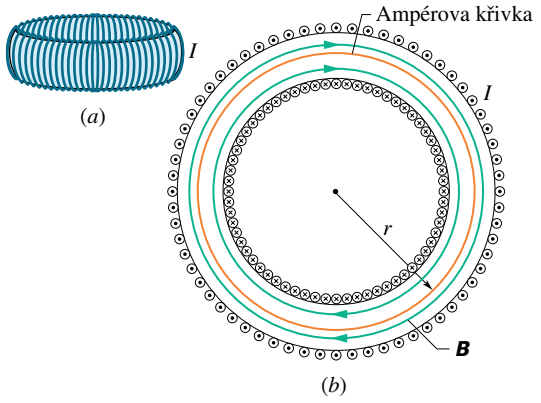
a tedy

$$B = \mu_0 I n \quad \text{(ideální solenoid)}. \qquad (30.25)$$

Dodejme, že v solenoidu konečné délky je pole poblíž konců slabší a rozbíhá se. I když jsme rov. (30.25) odvodili pro nekonečně dlouhý ideální solenoid, platí dosti dobře i pro reálný solenoid, zajímá-li nás magnetická indukce v bodech uvnitř solenoidu dostatečně daleko od jeho konců. Rov. (30.25) je v dobrém souladu s experimentálním faktem, že B nezávisí na průměru nebo délce solenoidu a že je konstantní v celém jeho průřezu. Solenoidem můžeme vytvořit homogenní magnetické pole podobně jako dvěma rovnoběžnými deskami kondenzátoru vytvoříme dostatečně homogenní pole elektrické.

Magnetické pole toroidu

Na obr. 30.21a je znázorněn **toroid**, který lze jednoduše charakterizovat jako solenoid stočený do tvaru prstence. Magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ uvnitř toroidu můžeme opět určit pomocí Ampérova zákona a využitím symetrie úlohy.



Obr. 30.21 (a) Toroid, kterým protéká elektrický proud I. (b) Průřez toroidem. Magnetické pole uvnitř toroidu můžeme vypočítat pomocí Ampérova zákona.

Z tvaru toroidu můžeme právem usuzovat na to, že indukční čáry vektoru $\boldsymbol{B}$ jsou soustředné kružnice uvnitř toroidu a mají směr zakreslený na obr. 30.21b. Vybereme si jednu takovou kruhovou indukční čáru o poloměru r jako Ampérovu křivku a projdeme ji ve směru otáčení hodinových ručiček. Ampérův zákon (rov. (30.16)) nám potom dává

$$B(2\pi r) = \mu_0 I N,$$

kde I je proud tekoucí toroidem (má zde kladné znaménko) a N je celkový počet závitů. Odtud obdržíme

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi}\frac{1}{r} \quad \text{(uvnitř toroidu)}. \qquad (30.26)$$

Z tohoto vztahu vidíme, že na rozdíl od solenoidu není velikost magnetické indukce B konstantní v celém průřezu toroidu. Pomocí Ampérova zákona lze snadno dokázat, že $B = 0$ pro všechny body ležící mimo *ideální* toroid.

Směr magnetické indukce uvnitř toroidu lze určit pomocí pravidla pravé ruky: uchopíme-li toroid tak, aby prsty pravé ruky směřovaly ve směru proudu v závitech, pak vztyčený palec určuje směr magnetické indukce pole.

PŘÍKLAD 30.5

Solenoid má délku $L = 1{,}23$ m, vnitřní průměr $d = 3{,}55$ cm a protéká jím proud $I = 5{,}57$ A. Je těsně navinut v pěti vrstvách, z nichž každá má 850 závitů na délce L. Určete velikost magnetické indukce B v jeho středu.

ŘEŠENÍ: Z rov. (30.25) dostaneme

$$B = \mu_0 I n = (4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}})(5{,}57\ \mathrm{A})\frac{(5\cdot 850)}{(1{,}23\ \mathrm{m})} =$$

$$= 2{,}42\cdot 10^{-2}\ \mathrm{T} = 24{,}2\ \mathrm{mT}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že rov. (30.25) platí i v případě, když má solenoid více než jednu vrstvu závitů, neboť B nezávisí na průměru závitů.

30.5 CÍVKA JAKO MAGNETICKÝ DIPÓL

Dosud jsme se zabývali magnetickým polem dlouhého přímého vodiče, solenoidu a toroidu. Nyní si všimneme podrobněji pole krátké cívky, kterou protéká elektrický proud. V čl. 29.9 jsme dospěli k závěru, že taková cívka se chová ve vnějším magnetickém poli $\boldsymbol{B}$ jako magnetický dipól. Bude tedy na ni působit silový moment $\boldsymbol{M}$ vyjádřený vztahem (29.35), tj.

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}, \qquad (30.27)$$

kde $\boldsymbol{\mu}$ je magnetický dipólový moment cívky, jehož velikost je NIS (N je počet závitů, I je proud tekoucí každým závitem a S je plošný obsah každého závitu).

Připomeňme (čl. 29.9), že směr vektoru $\boldsymbol{\mu}$ je dán pravidlem pravé ruky: uchopíme-li cívku tak, že ohnuté prsty pravé ruky mají směr proudu v závitech, pak vztyčený palec ukazuje směr dipólového momentu $\boldsymbol{\mu}$.

Magnetické pole cívky

Jaké magnetické pole vlastně vytváří cívka v bodech okolního prostoru? Taková úloha nemá dostatek symetrie, aby ji bylo možné vyřešit jen pomocí Ampérova zákona. Proto musíme vyjít ze zákona Biotova-Savartova, přičemž si úlohu co nejvíce zjednodušíme. Cívku nahradíme pouze jediným kruhovým závitem se středem v počátku souřadnic

a s osou splývající s osou z. Magnetickou indukci budeme počítat jen na ose závitu, tj. na ose z. Ukážeme, že velikost magnetické indukce je

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}, \qquad (30.28)$$

kde R je poloměr závitu a z je souřadnice bodu, v němž počítáme indukci. Směr indukce $\boldsymbol{B}$ je stejný jako směr momentu $\boldsymbol{\mu}$. Pro body značně vzdálené od cívky platí $z \gg R$ a předcházející rovnice získá tvar

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}.$$

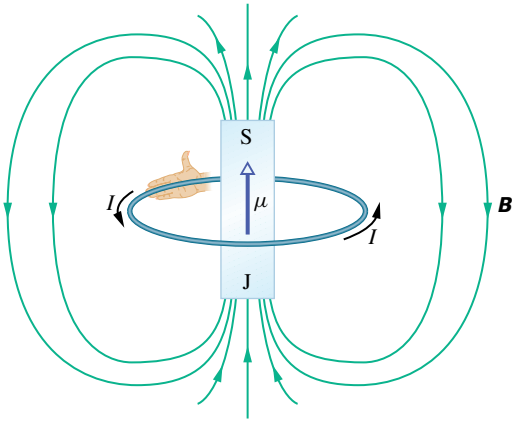
Po dosazení obsahu plochy závitu $S = \pi R^2$ a rozšíření výsledku pro cívku s N závity můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{NIS}{z^3}.$$

Protože $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{\mu}$ mají stejný směr a $\mu = NIS$, platí

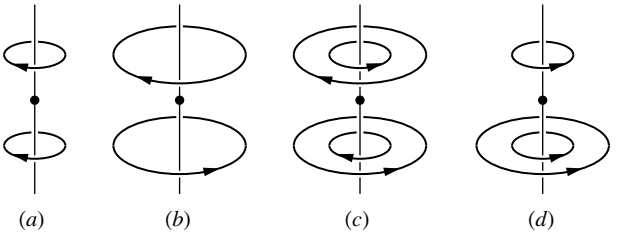
$$\boldsymbol{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{\mu}}{z^3} \quad \text{(pole na ose cívky)}. \qquad (30.29)$$

Máme tedy dva důvody, proč chápat cívku, kterou protéká elektrický proud, jako magnetický dipól: (1) vložíme-li ji do vnějšího magnetického pole, působí na ni moment sil; (2) cívka s proudem vytváří své vlastní magnetické pole, které je ve vzdálených bodech na ose cívky dáno rov. (30.29). Na obr. 30.22 je magnetické pole cívky protékané proudem; je podobné poli tyčového magnetu, kde jedno čelo cívky představuje severní pól (ve směru $\boldsymbol{\mu}$) a druhé pól jižní, jak je znázorněno zakreslením stínovaného tyčového magnetu na obrázku.



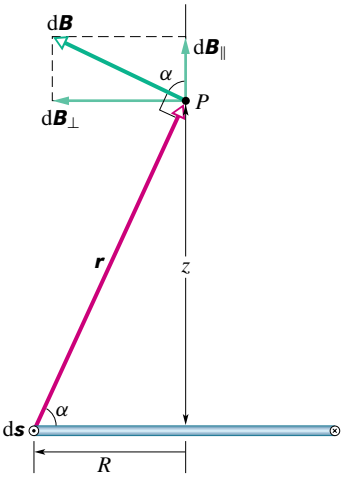
Obr. 30.22 Smyčka protékaná proudem vytváří magnetické pole velmi podobné poli (krátkého) tyčového magnetu. Magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$ smyčky, daný pravidlem pravé ruky, míří od jižního pólu k pólu severnímu, ve směru vektoru magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ uvnitř smyčky.

KONTROLA 4: Na obrázku jsou čtyři skupiny kruhových smyček o poloměrech r a $2r$. Jejich středy leží na společných osách a protékají jimi stejné proudy v označených směrech. Seřaďte sestupně tyto skupiny smyček podle velikosti výsledného magnetického pole v bodě označeném tečkou.



Odvození rov. (30.28)

Obr. 30.23 představuje boční pohled na kruhovou smyčku o poloměru R, kterou protéká elektrický proud I. Magnetickou indukci budeme počítat v bodě P na její ose ve vzdálenosti z od roviny smyčky. Vyjdeme z Biotova-Savartova zákona a vypočítáme magnetickou indukci $d\boldsymbol{B}$ vytvořenou v bodě P proudovým elementem na levé straně smyčky. Vektor $d\boldsymbol{s}$ tohoto elementu je kolmý k rovině obrázku a směřuje k nám. Vektory $d\boldsymbol{s}$ a $\boldsymbol{r}$ jsou navzájem kolmé, rovina jimi tvořená je kolmá k rovině obrázku. Z Biotova-Savartova zákona (a pravidla pravé ruky) plyne, že magnetická indukce $d\boldsymbol{B}$ vytvořená v bodě P proudovým elementem $I\,d\boldsymbol{s}$ je kolmá k rovině tvořené vektory $\boldsymbol{r}$ a $d\boldsymbol{s}$, a leží proto v rovině obrázku a je kolmá k vektoru $\boldsymbol{r}$.



Obr. 30.23 Smyčka protékaná proudem má poloměr R. Rovina smyčky je kolmá k rovině obrázku. K výpočtu magnetické indukce pole v bodě P na ose smyčky použijeme Biotova-Savartova zákona.

Rozložme nyní magnetickou indukci $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ do průmětu $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_\parallel$ rovnoběžného s osou z a $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_\perp$ kolmého k ose z. Ze symetrie úlohy plyne, že vektorový součet všech průmětů $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_\perp$ je nulový. Zůstávají tedy pouze průměty $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_\parallel$ rovnoběžné s osou z, a proto můžeme psát

$$B = \int \mathrm{d}B_\parallel .$$

Pro velikost magnetické indukce $\mathrm{d}B$ vzbuzené elementem vodiče $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ protékaného proudem na obr. 30.23 dostáváme z Biotova-Savartova zákona (rov. (30.3)):

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}s\,\sin 90^\circ}{r^2}.$$

Současně platí $\mathrm{d}B_\parallel = \mathrm{d}B\cos\alpha$. Z těchto dvou vztahů dostáváme

$$\mathrm{d}B_\parallel = \frac{\mu_0 I\cos\alpha\,\mathrm{d}s}{4\pi r^2}. \qquad (30.30)$$

Z obr. 30.23 plyne, že veličiny r a α nejsou navzájem nezávislé. Obě vyjádříme pomocí proměnné z, tj. pomocí vzdálenosti bodu P od středu smyčky:

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} \qquad (30.31)$$

a

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}. \qquad (30.32)$$

Dosazením rov. (30.31) a (30.32) do rov. (30.30) dostaneme

$$\mathrm{d}B_\parallel = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(R^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}s.$$

Všimněte si, že veličiny I, R a z mají tytéž hodnoty pro všechny elementy $\mathrm{d}s$ po celém obvodu smyčky. Integrujeme-li tedy tuto rovnici, lze je vytknout před integrál a stačí vypočítat pouze velmi jednoduchý integrál $\int \mathrm{d}s$, který je roven obvodu kruhové smyčky $2\pi r$. Tedy

$$B = \int \mathrm{d}B_\parallel = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(R^2+z^2)^{3/2}}\int \mathrm{d}s$$

a odtud

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}},$$

což je rov. (30.28), kterou jsme chtěli odvodit.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Biotův-Savartův zákon

Magnetické pole vodiče, kterým protéká elektrický proud, můžeme určit pomocí Biotova-Savartova zákona. Podle tohoto zákona je magnetická indukce $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ vytvořená proudovým elementem $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ ve vzdálenosti r od tohoto elementu dána vztahem

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \quad \text{(Biotův-Savartův zákon).} \qquad (30.5)$$

Zde $\boldsymbol{r}$ je vektor, který směřuje od elementu $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ do bodu, v němž určujeme magnetickou indukci. Veličina μ_0 je permeabilita vakua: $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}} \doteq 1{,}26\cdot 10^{-6}\,\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}$.

Magnetické pole dlouhého přímého vodiče

Velikost magnetické indukce pole přímého dlouhého vodiče ve vzdálenosti R od něj je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad \text{(dlouhý přímý vodič).} \qquad (30.6)$$

Magnetické pole vodiče ve tvaru kruhového oblouku

Velikost magnetické indukce ve středu kruhového oblouku vodiče se středovým úhlem φ_0 a poloměrem R, kterým protéká elektrický proud I, je

$$B = \frac{\mu_0 I\varphi_0}{4\pi R} \quad \text{(ve středu kruhového oblouku).} \qquad (30.11)$$

Síla mezi dvěma rovnoběžnými vodiči protékanými proudem

Rovnoběžné vodiče protékané souhlasně orientovanými proudy se navzájem přitahují. Mají-li proudy opačnou orientaci, vodiče se odpuzují. Velikost síly, která působí na jednotku délky L každého z vodičů, je

$$F_{ab} = F_{ba} = I_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L I_a I_b}{2\pi d}, \qquad (30.14)$$

kde d je vzdálenost obou vodičů, I_a a I_b jsou proudy tekoucí vodiči a a b.

Ampérův zákon

Vztah mezi elektrickým proudem a magnetickou indukcí vyjadřuje vedle Biotova-Savartova zákona také *Ampérův zákon*:

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I_\mathrm{c} \quad \text{(Ampérův zákon).} \qquad (30.16)$$

Křivkový integrál počítáme podél uzavřené orientované křivky, která se nazývá *Ampérova křivka*. Proud I_c je celkový elektrický proud, obepnutý křivkou (to znamená celkový proud, který prochází libovolnou plochou, mající za hranici tuto uzavřenou křivku).

Magnetické pole solenoidu a toroidu

Uvnitř *solenoidu* (dlouhé hustě vinuté cívky), kterým protéká elektrický proud I, je v bodech vzdálených od konců solenoidu velikost magnetické indukce rovna

$$B = \mu_0 I n \quad \text{(ideální solenoid)}, \tag{30.25}$$

kde n je počet závitů připadající na jednotku délky solenoidu. Uvnitř *toroidu* s N závity je velikost magnetické indukce B rovna

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \frac{1}{r} \quad \text{(toroid)}, \tag{30.26}$$

kde r je vzdálenost mezi středem toroidu a bodem, v němž indukci určujeme. Vně toroidu je $B = 0$.

Pole magnetického dipólu

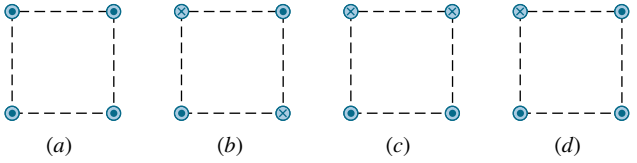
Cívka, kterou protéká elektrický proud, tvoří *magnetický dipól*. V bodě P ležícím na ose cívky je magnetická indukce

$$\boldsymbol{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\boldsymbol{\mu}}{z^3}, \tag{30.29}$$

kde $\boldsymbol{\mu}$ je dipólový moment cívky a z je souřadnice bodu P na ose cívky (závitu).

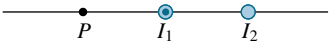
OTÁZKY

1. Na obr. 30.24 jsou 4 různá uspořádání dlouhých přímých vodičů kolmých k rovině obrázku, jimiž protékají stejně velké, ale různě orientované elektrické proudy. Vodiče procházejí vrcholy stejně velkých čtverců. Seřaďte tato uspořádání sestupně podle velikosti výsledné magnetické indukce ve středu každého ze čtverců.



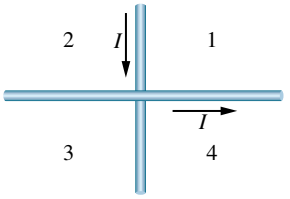
Obr. 30.24 Otázka 1

2. Na obr. 30.25 je průřez dvěma dlouhými přímými vodiči; vodičem na levé straně obrázku protéká proud I_1 kolmo k obrázku směrem k nám. Jestliže víte, že výsledná magnetická indukce vytvořená oběma proudy je v bodě P rovna nule, odpovězte na otázky: (a) Teče proud I_2 v pravém vodiči směrem k nám, nebo od nás? (b) Je proud I_2 větší než I_1, nebo je mu roven?



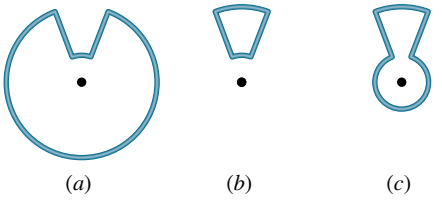
Obr. 30.25 Otázka 2

3. Na obr. 30.26 jsou dva dlouhé přímé vodiče, které se těsně kolmo míjejí, aniž se dotýkají. Ve kterém kvadrantu existují body, v nichž je výsledná magnetická indukce rovna nule?



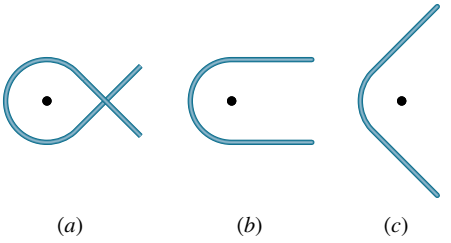
Obr. 30.26 Otázka 3

4. Na obr. 30.27 jsou tři smyčky, z nichž každá se skládá ze dvou soustředných kruhových oblouků o poloměrech r a R (kde $R > r$) a dvou radiálních úseček. Každou ze smyček protéká stejný elektrický proud a středový úhel vymezený přímými radiálními částmi vodiče je stejný. Seřaďte obvody sestupně podle velikosti výsledné magnetické indukce ve středech oblouků vyznačených na obrázku.



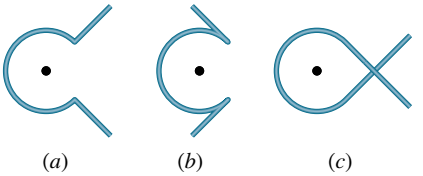
Obr. 30.27 Otázka 4

5. Na obr. 30.28 jsou tři části různých elektrických obvodů, z nichž každá se skládá z vodiče zakřiveného do tvaru kruhového oblouku (všechny mají stejný poloměr) a dvou dlouhých přímých úseků, které mají směr tečny k oblouku. Vodiče se kříží bez dotyku. Každou z těchto částí protéká stejný elektrický proud. Seřaďte úseky sestupně podle velikosti magnetické indukce ve vyznačených bodech (středech oblouků).



Obr. 30.28 Otázka 5

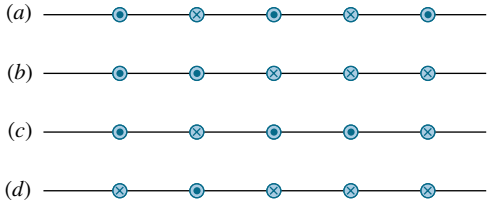
6. Na obr. 30.29 jsou tři úseky různých elektrických obvodů, z nichž každý se skládá z kruhového oblouku (všechny mají



Obr. 30.29 Otázka 6

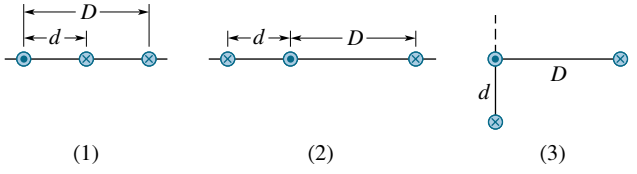
stejný poloměr a středový úhel) a ze dvou dlouhých přímých částí. Přímé části mají v případě úseku *a* radiální směr a v případě úseků *b* a *c* tečný směr; vodiče se kříží bez dotyku. Ve všech třech případech protéká vodiči stejný proud. Seřaďte úseky sestupně podle velikosti výsledné magnetické indukce ve středu každého oblouku.

7. Na obr. 30.30 jsou čtyři konfigurace dlouhých přímých vodičů kolmých k rovině obrázku a umístěných stejně daleko od sebe. Vodiči protéká stejný elektrický proud buď směrem k nám, nebo od nás. Seřaďte sestupně tyto konfigurace podle velikosti výsledné síly, kterou působí na prostřední vodič ostatní vodiče.



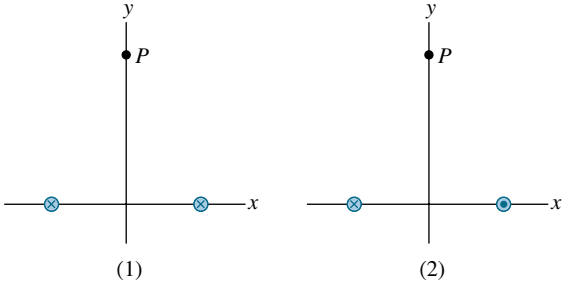
Obr. 30.30 Otázka 7

8. Na obr. 30.31 jsou tři konfigurace dlouhých přímých vodičů kolmých k rovině obrázku, kterými protéká stejný elektrický proud buď směrem k nám, nebo od nás. (a) Seřaďte sestupně jednotlivé konfigurace podle velikosti celkové síly, kterou působí ostatní vodiče na ten vodič, jímž teče proud směrem k nám. (b) Jaký je v případě (3) úhel mezi čárkovanou polopřímkou a celkovou silou, kterou působí ostatní vodiče na vodič s proudem, tekoucím směrem k nám — je větší, roven, nebo menší než 45°?



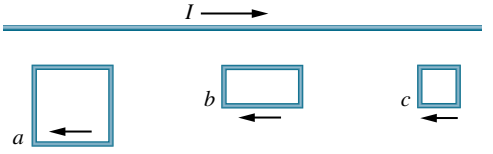
Obr. 30.31 Otázka 8

9. Na obr. 30.32 jsou dvě konfigurace dlouhých přímých vodičů kolmých k rovině obrázku, kterými protéká stejný elektrický proud buď směrem od nás, nebo k nám. Oba vodiče jsou stejně vzdáleny od osy *y*. (a) Pro každou z konfigurací určete směr výsledné magnetické indukce v bodě *P*. (b) Pro každou konfiguraci dále určete směr síly, kterou by působily oba vodiče na rovnoběžný vodič procházející bodem *P* a protékaný stejným proudem směrem od nás.



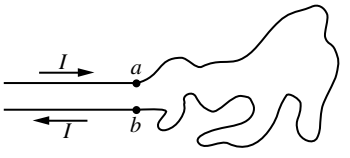
Obr. 30.32 Otázka 9

10. Na obr. 30.33 je dlouhý přímý vodič, kterým protéká elektrický proud *I* směrem doprava. Vedle něho se nacházejí tři vodivé pravoúhlé smyčky, kterými protéká stejně velký elektrický proud v naznačeném směru. Délky stran smyček jsou buď *L*, nebo 2*L* a všechny strany smyček přilehlé k vodiči mají od něho stejnou vzdálenost. Seřaďte sestupně smyčky podle velikosti celkové síly, kterou na ně působí magnetické pole přímého vodiče.



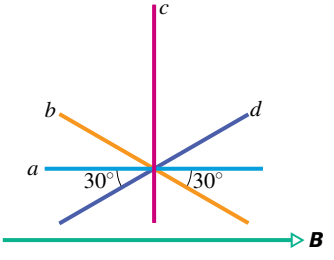
Obr. 30.33 Otázka 10

11. Na obr. 30.34 je vodivá smyčka nepravidelného tvaru položená na hladkém stole tak, že její body *a* a *b* jsou ke stolu připevněny. Začne-li smyčkou protékat elektrický proud, změní se její tvar. Bude se smyčka vypínat do tvaru oblouku, nebo se bude stahovat dovnitř?



Obr. 30.34 Otázka 11

12. Na obr. 30.35 je znázorněno homogenní magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B}$ a čtyři přímé úseky stejné délky. Seřaďte je sestupně podle velikosti integrálu $\int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s}$ podél úseků.

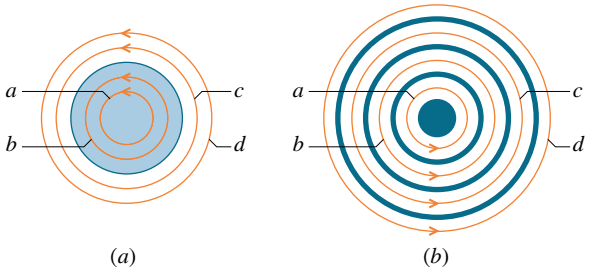


Obr. 30.35 Otázka 12

13. Na obr. 30.36a jsou čtyři Ampérovy křivky *a*, *b*, *c* a *d*. Válcovým vodičem protéká elektrický proud kolmo k obrázku směrem k nám. Proudová hustota má stejnou velikost i směr v celém kruhovém průřezu vodiče. Seřaďte tyto křivky sestupně podle velikosti integrálu $\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s}$ podél každé z nich.

14. Na obr. 30.36b jsou čtyři Ampérovy křivky — kružnice *a*, *b*, *c*, *d* a čtyři dlouhé válcové vodiče. Vodič s nejmenším poloměrem má kruhový průřez a zbývající vodiče jsou duté válce (křivky i vodiče jsou soustředné). Elektrické proudy tekoucí vodiči kolmo k rovině obrázku mají (od nejmenšího poloměru

po největší) hodnoty: 4 A (k nám), 9 A (od nás), 5 A (k nám) a 3 A (od nás). Seřaďte křivky sestupně podle velikosti integrálu $\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ podél každé z nich.



Obr. 30.36 Otázky 13 a 14

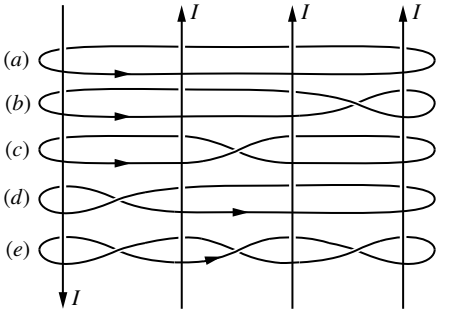
15. Na obr. 30.37 jsou čtyři přímé rovnoběžné vodiče protékané stejnými elektrickými proudy I a pět orientovaných Ampérových křivek obepínajících vodiče. Seřaďte tyto křivky sestupně podle velikosti integrálu $\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$.

16. Následující tabulka uvádí pro šest ideálních solenoidů o různých poloměrech počet závitů na jednotku délky n a proud I jimi tekoucí. Chceme několik z nich soustředně zasunout do sebe tak, aby výsledná magnetická indukce na společné podélné ose byla nulová. Je to možné udělat pomocí (a) dvou, (b) tří, (c) čtyř a (d) pěti z nich? Které solenoidy byste použili? Určete směry příslušných proudů.

Solenoid	1	2	3	4	5	6
n	5	4	3	2	10	8
I	5	3	7	6	2	3

17. Polohový vektor částice pohybující se po kružnici o poloměru r je $\boldsymbol{r}$. Určete hodnotu integrálu $\oint \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ podél této kružnice.

18. Vypočtěte hodnotu integrálu $\oint \mathrm{d}s$ podél obvodu (a) čtverce s délkou strany a a (b) rovnostranného trojúhelníka s délkou strany d.



Obr. 30.37 Otázka 15

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 30.1 Magnetické pole elektrického proudu

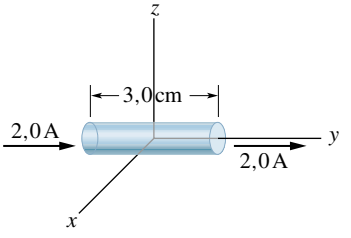
1C. Velikost magnetické indukce v bodě, který je vzdálen 88,0 cm od osy dlouhého přímého vodiče, je 7,30 μT. Jak velký elektrický proud protéká vodičem?

2C. Neizolovaným měděným vodičem (průměr 2,6 mm) může bez přehřátí procházet proud 50 A. Jaká je přitom magnetická indukce na povrchu vodiče?

3C. Zeměměřič určuje zeměpisnou polohu pomocí magnetické buzoly 6,0 m pod elektrickým vedením, kterým protéká stejnosměrný elektrický proud 100 A. (a) Jaká je magnetická indukce vytvořená tímto proudem v místě, kde se nachází buzola? (b) Bude toto vedení nějak ovlivňovat její údaje? Vodorovná složka indukce magnetického pole Země v místě, kde se nachází zeměměřič s buzolou, je 20 μT.

4C. Elektronové dělo v televizní obrazovce vystřeluje elektrony s kinetickou energií 25 keV v paprsku o průměru 0,22 mm. Za každou sekundu dopadne na obrazovku $5{,}6 \cdot 10^{14}$ elektronů. Vypočtěte magnetickou indukci, kterou budí paprsek v místě vzdáleném 1,5 mm od své osy.

5C. Na obr. 30.38 je 3,0 cm dlouhý úsek vodiče, kterým protéká elektrický proud 2,0 A ve směru osy y. Úsek vodiče je umístěn tak, že se jeho střed nachází v počátku soustavy souřadnic. Určete magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ v bodech (a) (0; 0; 5,0 m), (b) (0; 6,0 m; 0), (c) (7,0 m; 7,0 m; 0) a (d) (−3,0 m; −4,0 m; 0). Můžete k tomu použít Biotova-Savartova zákona ve tvaru $B = (\mu_0/4\pi) I \Delta s \sin\theta / r^2$, kam dosadíte $\Delta s = 3{,}0$ cm (veličiny r a θ jsou v našem zadání prakticky konstantní pro celý úsek vodiče).



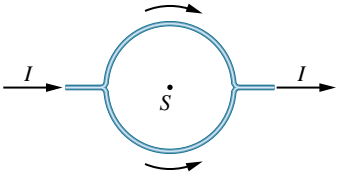
Obr. 30.38 Cvičení 5

6C. Dlouhý vodič, kterým protéká elektrický proud 100 A, se nachází ve vnějším homogenním magnetickém poli o indukci 5,0 mT a je k ní kolmý. Určete body, ve kterých je výsledné magnetické pole rovno nule.

7C. V laboratoři na Filipínách má indukce magnetického pole Země velikost 39 μT a směr vodorovně k severu. Ve vzdálenosti 8,0 cm nad dlouhým přímým vodorovným vodičem, kterým protéká elektrický proud I, je výsledná magnetická indukce nulová. Určete (a) velikost a (b) směr elektrického proudu I.

8C. Kladně nabitá částice s nábojem Q se nachází ve vzdálenosti d od dlouhého přímého vodiče, kterým protéká proud I. Částice se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ kolmo k vodiči. Určete směr a velikost magnetické síly působící na částici, pohybuje-li se (a) směrem k vodiči, (b) směrem od vodiče.

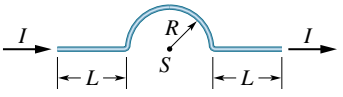
9C. Přímý vodič, kterým protéká proud I, se rozděluje na dva půlkruhové oblouky, jak je ukázáno na obr. 30.39. Určete magnetickou indukci ve středu S kruhové části vodiče.



Obr. 30.39 Cvičení 9

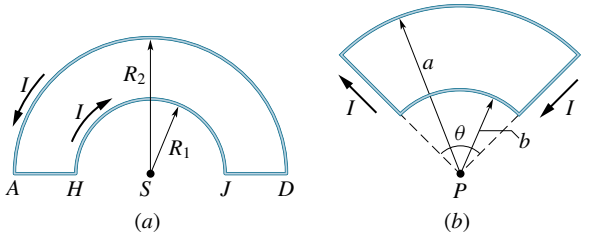
10C. Dlouhým přímým vodičem protéká proud 50 A. Elektron letí rychlostí $1{,}0\cdot10^7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ve vzdálenosti 5,0 cm od vodiče. Jaká síla na něj působí, letí-li (a) kolmo k vodiči, (b) rovnoběžně s vodičem a (c) kolmo k oběma předcházejícím směrům?

11Ú. Vodičem na obr. 30.40 protéká proud I. Určete v bodě S (středu půlkružnice) magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ vyvolanou proudem protékajícím (a) v každém z přímých úseků vodiče délky L, (b) v půlkruhovém úseku vodiče o poloměru R, (c) v celém vodiči.



Obr. 30.40 Úloha 11

12Ú. Použijte Biotův-Savartův zákon k výpočtu magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ v bodě S, který je společným středem půlkruhových oblouků AD a HJ (obr. 30.41a). Oba oblouky jsou spojeny tak, že vytvářejí obvod $AHJDA$, kterým protéká proud I.

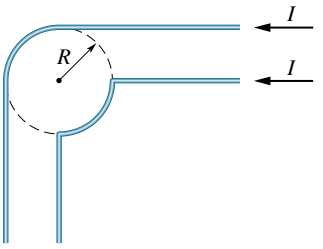


Obr. 30.41 Úlohy 12 a 13

13Ú. Na obr. 30.41b je elektrický obvod skládající se ze dvou kruhových oblouků o poloměrech a a b. Oba jsou propojeny radiálními přímými úseky. Určete magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ v bodě P (středu oblouků), víte-li, že obvodem protéká proud I.

14Ú. Každým ze dvou nekonečně dlouhých vodičů protéká proud I. Geometrické uspořádání obou vodičů je znázorněno na obr. 30.42. Ukažte, že magnetická indukce ve středu kružnice o poloměru R je stejná jako magnetická indukce ve vzdálenosti R pod jediným nekonečně dlouhým přímým vodičem, jímž protéká proud I směrem doleva.

15Ú. Vlásenka protékaná proudem I má tvar podle obr. 30.43. Určete směr a velikost magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ (a) v bodě A, (b) v bodě B. Úlohu řešte numericky pro $R = 5{,}0$ mm a pro



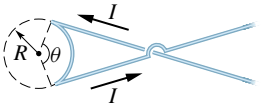
Obr. 30.42 Úloha 14

vzdálenosti AB mnohem větší než R (každý z obou přímkových úseků pokračuje do nekonečna).



Obr. 30.43 Úloha 15

16Ú. Vodič, kterým protéká proud I, má tvar podle obr. 30.44. Jaký musí být úhel θ, aby magnetická indukce B byla ve středu kružnice nulová?

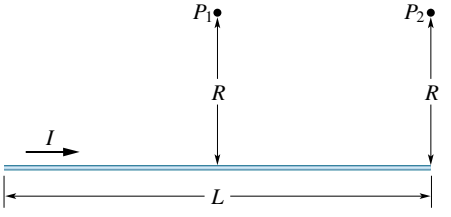


Obr. 30.44 Úloha 16

17Ú. Na obr. 30.45 je přímý vodič, kterým protéká proud I. Dokažte, že velikost magnetické indukce $\boldsymbol{B}$, kterou vytváří proud tekoucí úsekem vodiče o délce L v bodě P_1 ve vzdálenosti R od středu úseku, je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^2+4R^2}}.$$

Dokažte, že tento výraz přechází pro $L \to \infty$ v rov. (30.6).



Obr. 30.45 Úloha 17 a 18

18Ú. Na obr. 30.45 je úsek přímého vodiče délky L, kterým protéká proud I. Dokažte, že velikost magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ buzené úsekem v bodě P_2 ve vzdálenosti R od konce vodiče je

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}.$$

19Ú. Čtvercovou smyčkou s délkou strany a protéká proud I. S využitím výsledku úlohy 17 dokažte, že ve středu této smyčky

má magnetická indukce velikost

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}.$$

Určete její směr.

20Ú. S využitím výsledku úlohy 17 dokažte, že magnetická indukce ve středu obdélníkové smyčky o délce L a šířce d, kterou protéká proud I, je

$$B = \frac{2\mu_0 I}{\pi}\frac{\sqrt{L^2+d^2}}{Ld}.$$

Ukažte, že pro $L \gg d$ přejde tento výraz do tvaru totožného s výsledkem př. 30.2.

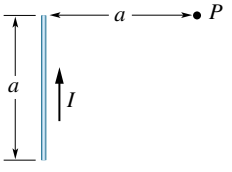
21Ú. Čtvercovou vodivou smyčkou o délce strany a protéká proud I. S využitím výsledku úlohy 17 dokažte, že velikost magnetické indukce v bodě ležícím na ose kolmé k rovině smyčky ve vzdálenosti x od jejího středu je

$$B(x) = \frac{4\mu_0 I a^2}{\pi(4x^2+a^2)\sqrt{4x^2+2a^2}}.$$

Dokažte, že tento výsledek souhlasí s výsledkem úlohy 19.

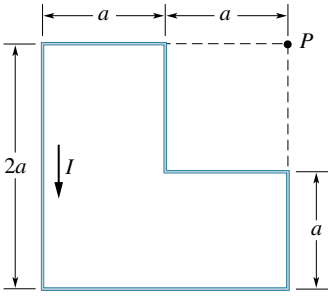
22Ú. Dva vodiče mají stejnou délku L. Jeden má tvar čtverce, druhý tvar kružnice a každým protéká stejný proud I. Dokažte, že magnetická indukce ve středu čtvercové smyčky je větší než ve středu smyčky kruhové (viz úlohu 19).

23Ú. Na obr. 30.46 je úsek přímého vodiče délky a, kterým protéká proud I. Dokažte, že velikost magnetické indukce buzené úsekem v bodě P je $B = \sqrt{2}\mu_0 I/(8\pi a)$.



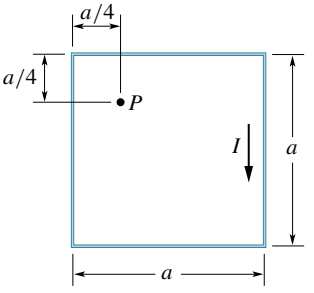
Obr. 30.46 Úloha 23

24Ú. Vypočtěte magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ v bodě P na obr. 30.47 (viz úlohu 23).



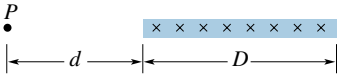
Obr. 30.47 Úloha 24

25Ú. Určete magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ v bodě P na obr. 30.48 pro $I = 10\,\mathrm{A}$ a $a = 8{,}0\,\mathrm{cm}$ (viz úlohy 18 a 23).



Obr. 30.48 Úloha 25

26Ú. Na obr. 30.49 je průřez dlouhého vodiče ve tvaru proužku o šířce D, kterým protéká stejnoměrně rozložený elektrický proud I kolmo k obrázku, směrem od nás. Určete velikost a směr magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ v bodě P ležícím v rovině proužku ve vzdálenosti d od jeho hrany. (*Tip*: Představte si, že proužek je složený z mnoha dlouhých, infinitezimálně tenkých rovnoběžných vodičů.)



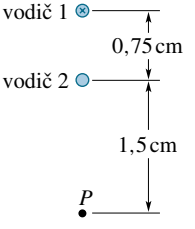
Obr. 30.49 Úloha 26

ODST. 30.2 Dva rovnoběžné vodiče

27C. Dva dlouhé rovnoběžné vodiče leží ve vzdálenosti 8,0 cm od sebe. Teče jimi stejný proud I. Jak velký musí být, aby magnetická indukce uprostřed mezi vodiči měla velikost 300 μT? Směr proudů nechť je (a) souhlasný, (b) nesouhlasný.

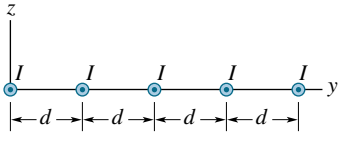
28C. Dvěma dlouhými rovnoběžnými vodiči ve vzdálenosti d protékají proudy I a $3I$ stejným směrem. Určete bod (nebo body), ve kterém se jejich magnetická pole navzájem vyruší.

29C. Dva dlouhé přímé rovnoběžné vodiče vzdálené od sebe 0,75 cm leží kolmo k rovině obr. 30.50. Vodičem 1 protéká proud o velikosti 6,5 A směrem od nás. Jaký musí být proud (velikost a směr) ve vodiči 2, aby výsledné magnetické pole v bodě P bylo nulové?



Obr. 30.50 Cvičení 29

30C. Na obr. 30.51 leží pět dlouhých rovnoběžných vodičů v rovině xy. Každým z nich protéká proud $I = 3{,}00\,\mathrm{A}$

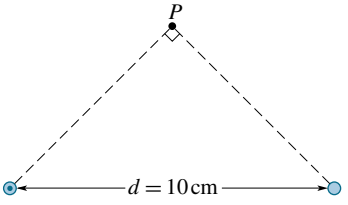


Obr. 30.51 Cvičení 30

v kladném směru osy x. Vzdálenost mezi sousedními vodiči je $d = 8{,}00\,\text{cm}$. Určete magnetickou sílu, kterou působí ostatní vodiče na jeden metr délky každého z vodičů. Sílu vyjádřete ve vektorovém tvaru pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

31C. Pro rovnoběžné vodiče z př. 30.2 dokažte, že rov. (30.15) platí i pro body vně celé konfigurace, tj. pro body se souřadnicí $x > d$ nebo $x < -d$.

32C. Každým ze dvou dlouhých rovnoběžných vodičů, vzdálených od sebe 10 cm, protéká proud 100 A. Oba vodiče leží kolmo k rovině obrázku a bod P je od obou stejně vzdálen (obr. 30.52). Určete směr a velikost magnetické indukce v bodě P, jestliže proud levým vodičem teče směrem k nám a proud pravým vodičem teče (a) směrem k nám a (b) směrem od nás.



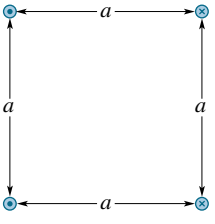
Obr. 30.52 Cvičení 32

33Ú. Předpokládejme, že oba proudy tekoucí vodiči na obrázku 30.10a mají stejný směr, k nám. Dokažte, že magnetická indukce v rovině určené oběma vodiči je

$$B_z(x) = \frac{\mu_0 I x}{\pi(x^2 - d^2)}.$$

Dosaďte hodnoty $I = 10\,\text{A}$, $d = 2{,}0\,\text{cm}$ a vyneste graficky závislost $B_z(x)$ v intervalu $-2\,\text{cm} < x < 2\,\text{cm}$. Průměr vodiče pokládejte za zanedbatelně malý.

34Ú. Čtyři dlouhé vodiče jsou navzájem rovnoběžné a procházejí vrcholy čtverce se stranami $a = 20\,\text{cm}$ kolmo k jeho rovině. Každým z vodičů protéká proud $I = 20\,\text{A}$ ve směru podle obr. 30.53. Určete velikost a směr magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ ve středu čtverce.



Obr. 30.53 Úlohy 34, 35 a 36

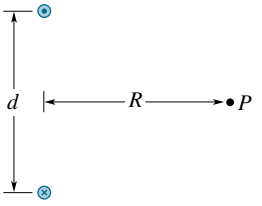
35Ú. Předpokládejme, že vodiči na obr. 30.53 nyní protékají proudy I o stejné velikosti a stejným směrem k nám. Určete směr a velikost magnetické síly působící na jednotku délky každého z vodičů.

36Ú. Určete velikost a směr magnetické síly působící na jednotku délky vodiče, který je umístěn na obr. 30.53 dole vlevo. Každým z vodičů protéká proud I v naznačeném směru.

37Ú. Každým ze dvou dlouhých přímých vodičů, umístěných ve vzdálenosti d od sebe, protéká proud I v opačném směru (obr. 30.54). (a) Dokažte, že velikost magnetické indukce v bodě P, který je stejně vzdálen od každého z vodičů, je dána vztahem

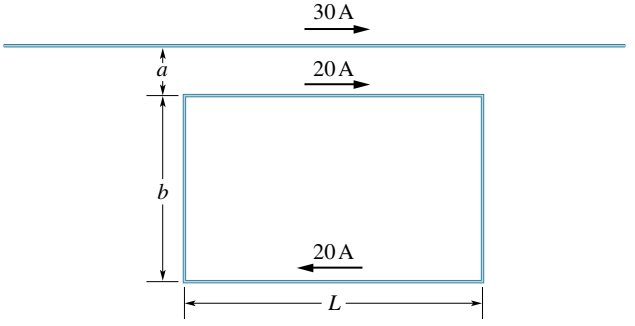
$$B = \frac{2\mu_0 I d}{\pi(4R^2 + d^2)}.$$

(b) Jaký směr má magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ v tomto bodě?



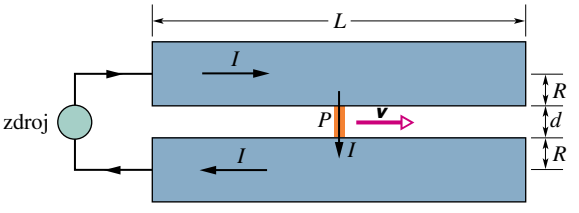
Obr. 30.54 Úloha 37

38Ú. Na obr. 30.55 protéká dlouhým přímým vodičem proud 30 A a obdélníkovou smyčkou proud 20 A. Vypočtěte výslednou sílu působící na smyčku. Dosaďte hodnoty $a = 1{,}0\,\text{cm}$, $b = 8{,}0\,\text{cm}$ a $L = 30\,\text{cm}$.



Obr. 30.55 Úloha 38

39Ú. Na obr. 30.56 je idealizované schéma principu elektromagnetického děla. Projektil je umístěn mezi dvěma širokými kolejnicemi s kruhovým průřezem. Elektrický proud protéká z jedné kolejnice přes vodivý projektil (pojistka není zakreslena)



Obr. 30.56 Úloha 39

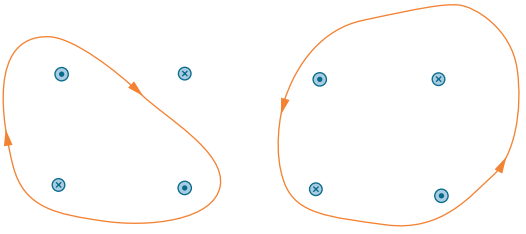
do druhé kolejnice a zpět do zdroje. (a) Nechť d je vzdálenost mezi kolejnicemi, R poloměr každé z nich a I proud, který jimi protéká. Dokažte, že síla působící na projektil má směr doprava podél kolejnic a její velikost je vyjádřena přibližným vztahem

$$F = \frac{I^2 \mu_0}{2\pi} \ln \frac{d + R}{R}.$$

(b) Projektil se začne pohybovat od levého konce děla až k jeho ústí. Určete velikost rychlosti v, kterou byl vystřelen. Dosaďte hodnoty $I = 450\,\text{kA}$, $d = 12\,\text{mm}$, $R = 6{,}7\,\text{cm}$, $L = 4{,}0\,\text{m}$ a hmotnost projektilu $m = 10\,\text{g}$.

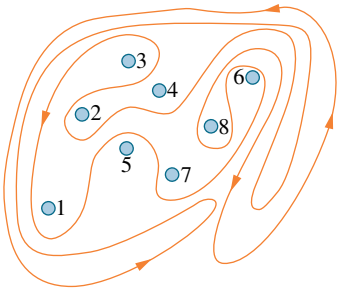
ODST. 30.3 Ampérův zákon

40C. Každým z osmi vodičů na obr. 30.57 protéká proud 2,0 A kolmo k obrázku ve vyznačeném směru. Na obrázku jsou zakresleny dvě Ampérovy křivky pro výpočet integrálu $\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$. Jaká je jeho hodnota pro křivku (a) v levé, (b) v pravé části obrázku?



Obr. 30.57 Cvičení 40

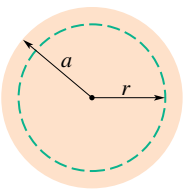
41C. Každý z osmi dlouhých přímých vodičů je kolmý k rovině obr. 30.58. Vodičem číslo k ($k = 1,2,\ldots,8$) protéká proud kI. Lichými vodiči protéká proud směrem k nám, sudými naopak od nás. Určete integrál $\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ po uzavřené křivce v naznačeném směru.



Obr. 30.58 Cvičení 41

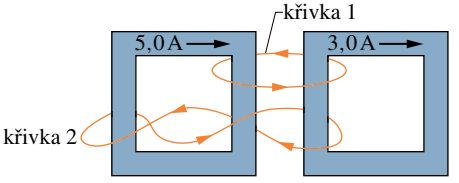
42C. Prostorem protéká elektrický proud v kladném směru osy z s konstantní proudovou hustotou $15\,\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$. Určete hodnotu integrálu $\oint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ po lomené Ampérově křivce vedoucí po úsečkách od bodu $(4d, 0, 0)$ přes $(4d, 3d, 0)$ a $(0, 0, 0)$ zpět do $(4d, 0, 0)$, kde $d = 20\,\text{cm}$.

43C. Na obr. 30.59 je průřez dlouhým válcovým vodičem o poloměru a, kterým protéká homogenně rozložený proud I. Dosaďte hodnoty $a = 2{,}0\,\text{cm}$ a $I = 100\,\text{A}$ a nakreslete závislost $B(r)$ pro $0 < r < 6{,}0\,\text{cm}$.



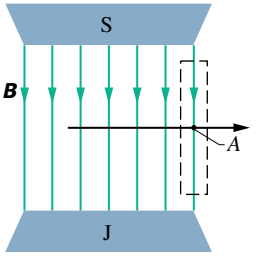
Obr. 30.59 Cvičení 43

44Ú. Dvěma vodivými smyčkami čtvercového tvaru protékají proudy 5,0 A a 3,0 A, jak je ukázáno na obr. 30.60. Určete hodnotu integrálu $\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ pro každou ze dvou uzavřených křivek, vyznačených na obrázku červenou barvou.



Obr. 30.60 Úloha 44

45Ú. Dokažte, že homogenní magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B}$ nemůže od bodu A klesnout ve směru šipky náhle k nule, jak by se zdálo z obr. 30.61. (*Tip*: Použijte Ampérův zákon pro případ pravoúhlé křivky, naznačené na obrázku čárkovaně.) U reálných magnetů se vždy setkáme s rozptylem indukčních čar magnetického pole, což znamená, že magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ klesá k nule postupně. Opravte indukční čáry zakreslené na obrázku, aby byly reálnější.

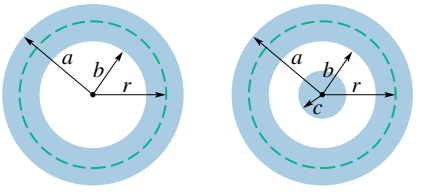


Obr. 30.61 Úloha 45

46Ú. Na obr. 30.62a je průřez dutého válcového vodiče, jehož vnější, resp. vnitřní poloměry jsou a, resp. b. Vodičem protéká proud I homogenně rozložený v celém průřezu. (a) Dokažte, že závislost $B(r)$ pro $b < r < a$ má tvar

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a^2 - b^2)} \frac{r^2 - b^2}{r}.$$

(b) Dokažte, že pro $r = a$ dává tato rovnice velikost magnetické indukce vně dlouhého přímého vodiče, pro $r = b$ bude výsledná magnetická indukce rovna nule a pro $b = 0$ dostaneme vztah pro magnetickou indukci uvnitř plného vodiče. (c) Dosaďte hodnoty $a = 2{,}0\,\text{cm}$, $b = 1{,}8\,\text{cm}$ a $I = 100\,\text{A}$ a vyneste závislost $B(r)$ pro r v intervalu $0 < r < 6\,\text{cm}$.

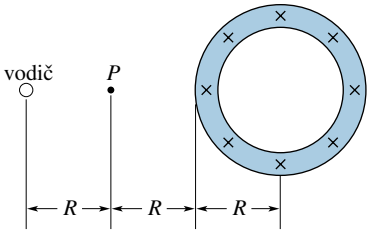


Obr. 30.62 Úlohy 46 a 47

47Ú. Na obr. 30.62b je řez dlouhým přímým koaxiálním kabelem. Každým z vodičů protéká co do velikosti stejný, ale co do směru opačný proud I homogenně rozložený v jejich průřezu. Odvoďte výraz pro závislost $B(r)$ v intervalech (a) $r < c$, (b) $c < r < b$, (c) $b < r < a$, (d) $r > a$. (e) Diskutujte výrazy s ohledem na všechny zvláštní případy, které mohou nastat. (f) Pro hodnoty $a = 2{,}0\,\text{cm}$, $b = 1{,}8\,\text{cm}$, $c = 0{,}40\,\text{cm}$ a $I = 120\,\text{A}$ vyneste závislost $B(r)$ pro r v intervalu $0 < r < 3\,\text{cm}$.

48Ú. Hustota elektrického proudu uvnitř dlouhého válcového vodiče o poloměru a má směr jeho osy a její velikost klesá se vzdáleností r od osy podle vztahu $J = J_0 r/a$. Určete magnetickou indukci $B(r)$ uvnitř vodiče.

49Ú. Dlouhou přímou trubicí s kruhovým průřezem o vnějším poloměru R protéká homogenně rozložený proud I ve směru od nás (obr. 30.63). Dlouhý přímý vodič zanedbatelného průřezu je rovnoběžný s osou trubice; vzdálenost mezi vodičem a osou trubice je $3R$. Určete, jakou velikost a směr musí mít elektrický proud tekoucí vodičem, aby výsledná magnetická indukce v bodě P měla stejnou velikost, ale opačný směr, než má magnetická indukce ve středu trubice.



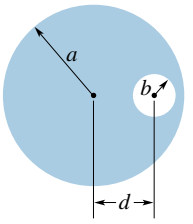
Obr. 30.63 Úloha 49

50Ú. Na obr. 30.64 je průřez dlouhým přímým vodičem válcového tvaru o poloměru a s válcovou dutinou o poloměru b. Osy válce a dutiny jsou rovnoběžné a jejich vzdálenost je d. Proud I je ve vodiči rozložen homogenně v celém barevně vyznačeném průřezu. (a) Na základě principu superpozice dokažte, že magnetická indukce ve středu dutiny má velikost

$$B = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(a^2 - b^2)}.$$

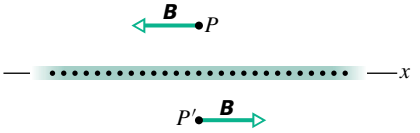
(b) Diskutujte dva zvláštní případy, kdy $b = 0$ nebo $d = 0$. (c) Pomocí Ampérova zákona dokažte, že magnetické pole v dutině je homogenní. (*Tip*: Představte si dutinu jako vodič, kterým proudí dva co do velikosti sobě rovné, ale co do směru opačné proudy, které se navzájem ruší. Předpokládejte, že každý z těchto proudů má stejnou hustotu, jako je hustota proudu ve vodiči mimo dutinu. Potom sečtěte magnetické indukce obou plných válců o poloměrech a a b; proud v každém válci má stejnou proudovou hustotu.)

51Ú. Na obr. 30.65 je průřez nekonečné vodivé desky, kterou protéká proud kolmo k obrázku směrem k nám (proud připadající na jednotku délky ve směru osy x je λ). (a) Využijte symetrie úlohy a pomocí Biotova-Savartova zákona dokažte,



Obr. 30.64 Úloha 50

že pro všechny body P nad deskou a všechny body P' pod ní je magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ rovnoběžná s rovinou desky a má směr podle obrázku. (b) Využitím Ampérova zákona dokažte, že $B = \frac{1}{2}\mu_0\lambda$ pro všechny body P a P'.



Obr. 30.65 Úloha 51

52Ú*. Magnetická indukce v určité oblasti prostoru je dána vztahem $\boldsymbol{B} = (3{,}0\boldsymbol{i} + 8{,}0(x^2/d^2)\boldsymbol{j})\,\text{mT}$, kde d je konstanta s rozměrem délky a x i d jsou vyjádřeny v metrech. Víme, že toto pole je způsobeno elektrickým proudem. (a) Vypočítejte integrál $\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}$ po lomené Ampérově křivce vedoucí po úsečkách z bodu (0, 0, 0) přes $(d, 0, 0)$, $(d, d, 0)$ a $(0, d, 0)$ zpět do (0, 0, 0). (b) Dosaďte hodnotu $d = 0{,}50\,\text{m}$ do výrazu pro indukci $\boldsymbol{B}$ a pomocí Ampérova zákona vypočtěte velikost elektrického proudu tekoucího ve směru kolmém ke čtverci o délce strany 0,5 m. Čtverec leží v prvním kvadrantu roviny xy a má jeden z vrcholů v počátku soustavy souřadnic. (c) Teče tento proud ve směru jednotkového vektoru $+\boldsymbol{k}$, nebo $-\boldsymbol{k}$?

ODST. 30.4 Solenoid a toroid

53C. Solenoid s 200 závity má délku 25 cm, průměr 1,0 cm a protéká jím proud 0,30 A. Vypočtěte velikost magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ v dutině solenoidu.

54C. Solenoid dlouhý 95,0 cm má poloměr 2,00 cm a jeho 1 200 závity protéká proud 3,60 A. Určete velikost magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ v dutině solenoidu.

55C. Solenoidem o délce 1,30 m a průměru 2,60 cm protéká proud 18,0 A. Magnetická indukce uvnitř tohoto solenoidu je 23,0 mT. Vypočtěte délku vodiče, z něhož je solenoid navinut.

56C. Toroid byl vytvořen stočením solenoidu (s 500 čtvercovými závity o délce strany 5 cm) do prstence s vnitřním průměrem 50 cm. Určete magnetickou indukci uvnitř toroidu v bodech (a) těsně nad vnitřním poloměrem, (b) těsně pod vnějším poloměrem (je větší o 5,00 cm), jestliže jím protéká proud 0,800 A.

57C. Dokažte, že v případě, kdy tloušťka toroidu je velmi malá ve srovnání s jeho poloměrem (velmi tenký toroid), přechází rov. (30.26) pro magnetickou indukci uvnitř toroidu na rov. (30.25) pro magnetickou indukci uvnitř solenoidu. Objasněte, proč se tento výsledek dá očekávat.

58Ú. Považujte ideální solenoid za tenký válec, po jehož plášti krouží kolem jeho osy proud o velikosti λ na jednotku délky osy. Dokažte, že velikost magnetické indukce uvnitř takového solenoidu je vyjádřena vztahem $B = \mu_0\lambda$. To je zároveň velikost *změny* indukce $\boldsymbol{B}$ při přechodu z vnitřku solenoidu ven přes jeho stěnu (vně ideálního solenoidu je magnetická indukce nulová). Ukažte, že se stejnou změnou indukce se setkáte při průchodu skrz nekonečně velkou desku protékanou proudem podle obr. 30.65. Překvapila vás ta shoda?

59Ú. V čl. 30.4 jsme odvodili, že velikost magnetické indukce uvnitř toroidu závisí na vzdálenosti r od jeho osy (obr. 30.21) vztahem

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}.$$

Dokažte, že při přechodu přes vnější plášť toroidu bude velikost *změny* indukce $\boldsymbol{B}$ rovna právě $\mu_0\lambda$, nezávisle na r. (Délková hustota λ elektrického proudu má týž význam jako v úloze 58.) Srovnejte tento výsledek s tím, který jsme získali v úloze 58. Není ta shoda překvapující?

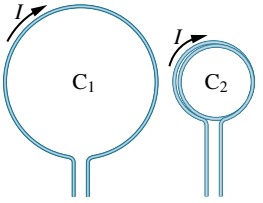
60Ú. Dlouhým solenoidem s hustotou 10,0 závitů na centimetr a poloměrem 7,00 cm protéká proud 20,0 mA. Přímým vodičem ležícím v ose solenoidu protéká proud 6,00 A. (a) V jaké vzdálenosti od osy bude svírat vektor výsledné magnetické indukce úhel 45° s osou vodiče? (b) Jaká je v tomto místě velikost magnetické indukce?

61Ú. Dlouhým solenoidem s hustotou 100 závitů na centimetr protéká proud I. Elektron se pohybuje uvnitř solenoidu po kružnici o poloměru 2,30 cm kolmo na osu solenoidu. Rychlost elektronu je $0{,}046\,0c$ (c je rychlost světla). Určete velikost elektrického proudu tekoucího solenoidem.

ODST. 30.5 Cívka jako magnetický dipól

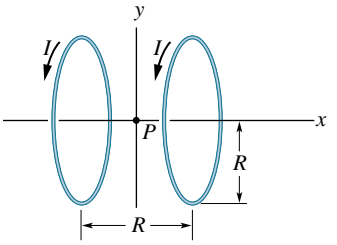
62C. Jaký je magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$ solenoidu popsaného ve cvič. 53?

63C. Na obr. 30.66 je vodič, kterým protéká proud I. Vodič je jednou stočen do tvaru kruhové smyčky C_1 (cívka s jedním závitem), podruhé tvoří cívku C_2 se dvěma závity o poloviční poloměru, než má smyčka C_1. (a) Vypočtěte poměr B_2/B_1, jsou-li B_1 a B_2 velikosti magnetické indukce ve středech obou cívek. (b) Jaký je poměr dipólových momentů μ_2/μ_1 obou cívek?



Obr. 30.66 Cvičení 63

64C. Na obr. 30.67 jsou *Helmholtzovy cívky*. Skládají se ze dvou kruhových souosých cívek, z nichž každá má N závitů a poloměr R. Obě cívky jsou ve vzdálenosti R od sebe a každou z nich protéká proud I v témže směru. Určete velikost celkové magnetické indukce v bodě P ležícím na ose cívek uprostřed mezi nimi.

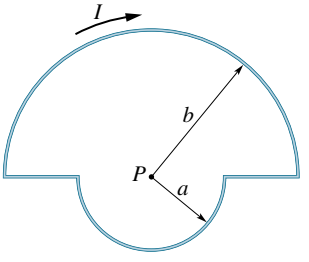


Obr. 30.67 Cvičení 64 a úlohy 68 a 72

65C. Student si vyrobil elektromagnet navinutím 300 závitů vodiče kolem dřevěného válce o průměru $d = 5{,}0$ cm. Cívka je připojena k baterii, která jí dodává elektrický proud 4,0 A. (a) Určete velikost magnetického momentu cívky. (b) V jaké vzdálenosti $z \gg d$ na ose cívky bude mít magnetická indukce tohoto dipólu velikost 5,0 μT (což je přibližně desetina velikosti magnetické indukce zemského pole)?

66C. Velikost $B(x)$ magnetické indukce v bodech na ose čtvercové proudové smyčky o straně a byla vypočtena v úloze 21. (a) Ukažte, že magnetické pole této smyčky je na její ose pro $x \gg a$ stejné jako pro magnetický dipól (rov. (30.29)). (b) Jaká je velikost magnetického dipólu této smyčky?

67Ú. Smyčka má tvar podle obr. 30.68 a protéká jí elektrický proud I. (a) Určete magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ v bodě P. (b) Určete magnetický dipólový moment smyčky.

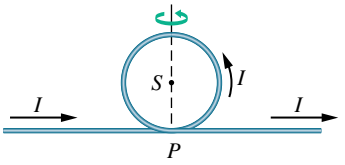


Obr. 30.68
Úloha 67

68Ú. Dvěma cívkami (obr. 30.67), z nichž každá má 300 závitů a poloměr R, protéká elektrický proud I. Cívky jsou ve vzdálenosti R. Vyneste závislost velikosti magnetické indukce $B(x)$ na vzdálenosti x od bodu P na společné ose pro $-R \leqq x \leqq R$. Zvolte $R = 5{,}0$ cm a $I = 50$ A. (Cívky takové konstrukce vytvářejí homogenní magnetické pole v okolí bodu P.) (*Tip*: Vyjděte z rov. (30.28).)

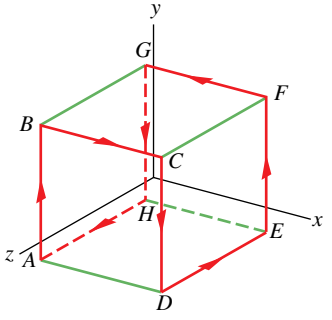
69Ú. Kruhovou smyčkou o poloměru 12 cm protéká proud 15 A. Cívkou s ní soustřednou o poloměru 0,82 cm s 50 závity protéká proud 1,3 A. (a) Jakou magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ vytváří samotná smyčka ve svém středu? (b) Jaký moment síly působí na cívku? Předpokládejte, že roviny smyčky i závitů cívky jsou rovnoběžné a že magnetické pole smyčky je přibližně homogenní v celém objemu cívky.

70Ú. (a) Dlouhý izolovaný vodič je stočen podle obr. 30.69. Poloměr kruhové části je R. Určete velikost a směr magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ ve středu S kruhové části, protéká-li vodičem elektrický proud I v naznačeném směru. (b) Předpokládejte, že kruhová část vodiče se otočí kolem čárkovaně vyznačeného průměru do polohy, ve které je rovina kruhu kolmá na přímkovou část vodiče. Magnetický dipólový moment příslušný kruhové části (smyčce) vodiče má nyní stejný směr jako proud, který teče v přímé části vodiče. Určete v tomto případě magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ v bodě S.



Obr. 30.69
Úloha 70

71Ú. Obvod, kterým protéká elektrický proud 6,0 A, je tvořen uzavřenou smyčkou $ABCDEFGHA$ zahrnující 8 z 12 hran krychle (délka jedné hrany je 10 cm, obr. 30.70). (a) Obvod můžeme nahradit třemi následujícími smyčkami ve tvaru čtverce: $BCFGB$, $ABGHA$ a $CDEFC$. Proč? (*Tip*: Zakreslete proudy, které jimi tekou.) (b) Využijte toho k určení magnetického dipólového momentu $\boldsymbol{\mu}$ (velikost i směr) původní smyčky $ABCDEFGHA$. (c) Vypočtěte magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ v bodech $P(x, y, z) = (0{,}0; 5{,}0; 0{,}0)$ a $(5{,}0; 0{,}0; 0{,}0)$. (Souřadnice jsou v metrech.)



Obr. 30.70
Úloha 71

72Ú. Předpokládejte, že u Helmholtzových cívek na obr. 30.67 není vzdálenost mezi cívkami konstantní, ale proměnná (např. s). (a) Ukažte, že první derivace magnetické indukce ($\mathrm{d}B/\mathrm{d}x$) je v bodě P rovna nule bez ohledu na hodnotu s. Jak to plyne ze symetrie úlohy? (b) Ukažte, že druhá derivace ($\mathrm{d}^2B/\mathrm{d}x^2$) bude v bodě P též rovna nule pro $s = R$.

PRO POČÍTAČ

73Ú. Kruhovým závitem o poloměru R teče proud I. V bodech na ose závitu je magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ s touto osou rovnoběžná a má podle rov. (30.28) velikost

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

kde z je vzdálenost od středu závitu. Solenoid můžeme modelovat velkým počtem kruhových závitů, které mají stejný poloměr, společnou osu a protéká jimi stejný elektrický proud. Předpokládejte, že solenoid má délku 25,0 cm, poloměr 1,00 cm a skládá se z N stejně od sebe vzdálených závitů. Každým z nich protéká proud 1,00 A. Pro (a) $N = 11$, (b) $N = 21$ a (c) $N = 51$ vypočtěte velikost magnetické indukce ve středu solenoidu sečtením indukcí polí, vytvořených jednotlivými závity. Pro každou hodnotu N srovnejte výsledek s hodnotou nalezenou použitím rov. (30.25), která platí pro dlouhý solenoid s velkým počtem těsně u sebe navinutých závitů.

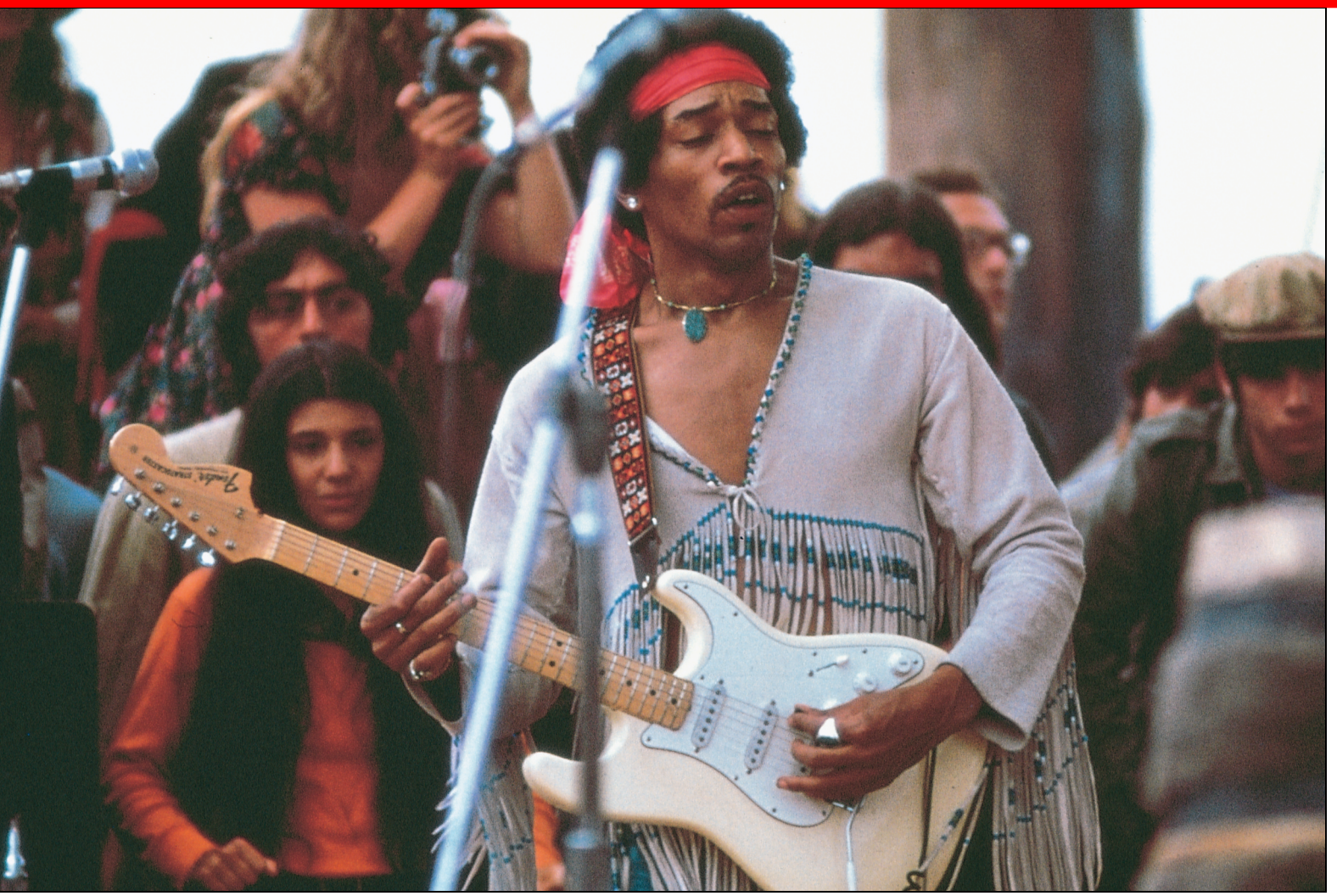
74Ú. Užitím počítače lze ověřit Ampérův zákon pro situaci, ve které Ampérova křivka nesplývá s indukčními čarami magnetického pole. Předpokládejte, že střed čtverce se stranou a je umístěn do počátku soustavy souřadnic tak, že jeho strany jsou rovnoběžné s osami x a y. Dlouhý přímý vodič, kterým protéká elektrický proud I, je kolmý k rovině čtverce a protíná osu x v bodě o souřadnici x'. Určete integrál $\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ numericky. Rozdělte stranu čtverce na N úseků o stejné délce Δs a pro každý takový úsek určete hodnotu výrazu $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u} \Delta s$, kde $\boldsymbol{B}$ je magnetická indukce pole ve středu úseku a $\boldsymbol{u}$ je jednotkový vektor rovnoběžný s úsekem a se směrem souhlasným s orientací smyčky. Pro různé úseky může $\boldsymbol{u}$ nabývat hodnot $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, -\boldsymbol{i}$, nebo $-\boldsymbol{j}$. Magnetická indukce v bodě se souřadnicemi x a y je vyjádřena vztahem

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I[-y\boldsymbol{i} + (x - x')\boldsymbol{j}]}{2\pi[(x - x')^2 + y^2]}.$$

Pro strany čtverce, které jsou rovnoběžné s osou x, položte $y = a/2$ nebo $-a/2$; pro strany, které jsou rovnoběžné s osou y položte $x = a/2$ nebo $-a/2$. Dosaďte délku strany čtverce $a = 1{,}00$ m, elektrický proud $I = 1{,}00$ A a pro každý následující případ vypočtěte součet přes všechny úseky pro každou stranu čtverce zvlášť. Sečtením potom získáte výsledek pro celý čtverec. Výsledek porovnejte s hodnotou $\mu_0 I_c$, kde I_c je proud tekoucí plochou čtverce. Hodnota $N = 50$ by měla dát výsledek na tři platné číslice. Počítejte pro (a) $x' = 0$ (vodič je ve středu čtverce), (b) $x' = 0{,}200$ m (vodič prochází vnitřkem čtverce bodem mimo jeho střed), (c) $x' = 0{,}400$ m (vodič prochází čtvercem blízko středu jeho strany) a (d) $x' = 0{,}600$ m (vodič je mimo čtverec).

75Ú. Dva dlouhé vodiče jsou rovnoběžné s osou z soustavy souřadnic. Rovinu xy protínají ve dvou bodech ležících na ose x: první vodič v bodě $x = a$ (protéká jím proud I_1 v kladném směru osy z) a druhý vodič v bodě $x = 0$ (protéká jím proud I_2, který může měnit jak svou velikost, tak i směr). Elektrický proud pokládejme za kladný, teče-li v kladném směru osy z, a za záporný, teče-li opačně. (a) Napište vztah, který určuje výslednou magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ na ose x pro $x > a$. (b) Přepište tento vztah pro $x = 2a$ po substituci $I_2 = bI_1$, kde b je proměnná. (c) Na základě tohoto nového vztahu vyneste závislost složky B_y indukce na b v intervalu $-3 \leqq b \leqq 3$.

31
Elektromagnetická indukce



Když v polovině padesátých let začal rock, vyměnili záhy kytaristé své akustické nástroje za elektrické. Jimi Hendrix jako první z nich pojal elektrickou kytaru jako elektronický nástroj. Zářil na scéně šedesátých let technikou rozezvučování nástroje, polohou kytary u mikrofonu udržoval zpětnou vazbu, aby ji pak ve vrcholu ztlumil. Jeho myšlenky ovlivňují rock dodnes. Co ale vlastně natolik odlišuje elektrickou kytaru od akustické, že Hendrix mohl tak vynalézavě užívat tento elektronický nástroj?

31.1 DVĚ SYMETRICKÉ SITUACE

Pustíme-li proud do vodivé smyčky v magnetickém poli, bude na ni magnetické pole působit momentem síly, přičemž platí:

$$\text{proudová smyčka} + \text{magnetické pole} \Rightarrow \Rightarrow \text{moment síly;} \qquad (31.1)$$

to jsme zjistili v čl. 29.8. A co když naopak vypneme proud a budeme otáčet smyčkou ručně: obrátí se šipka ve vztahu (31.1)? Objeví se nyní ve smyčce proud? Odpověď je kladná:

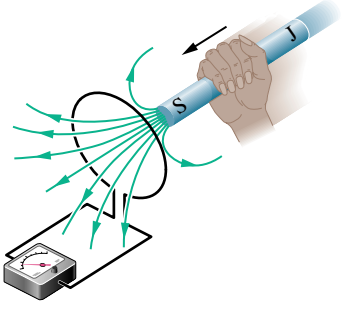
$$\text{moment síly} + \text{magnetické pole} \Rightarrow \Rightarrow \text{elektrický proud.} \qquad (31.2)$$

Souvislosti vyjádřené vztahy (31.1) a (31.2) jsou symetrické. Fyzikální zákon vyjadřující proces (31.2) se nazývá *Faradayův zákon elektromagnetické indukce*. Zatímco podle procesu (31.1) pracuje elektrický motor, je proces (31.2) základem činnosti elektrického generátoru. Faradayovým zákonem a jeho důsledky se budeme zabývat v následující kapitole.

31.2 DVA POKUSY

Zkoumejme dva jednoduché pokusy jako přípravu k výkladu Faradayova zákona elektromagnetické indukce.

První pokus. Obr. 31.1 ukazuje vodivou smyčku připojenou k citlivému měřidlu elektrického proudu. Obvodem neteče žádný proud, protože v něm není zapojena baterie ani jiný zdroj elektromotorického napětí. Pokud se však přibližujeme tyčovým magnetem ke smyčce, v obvodu se proud objeví. Proud zanikne, když se magnet zastaví. Vzdalujeme-li se magnetem od smyčky, proud opět obvodem protéká, ale tentokrát v opačném směru. Ve smyčce vzniká proud také tehdy, pohybujeme-li smyčkou vzhledem k magnetu. Po chvíli experimentování můžeme učinit tyto závěry:



Obr. 31.1 Měřidlo proudu (ampérmetr) ukazuje proud ve smyčce, dokud se magnet vůči smyčce pohybuje.

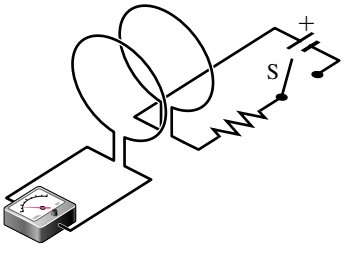
1. Vznik proudu je vázán na relativní pohyb mezi smyčkou a magnetem (jedno se musí pohybovat vůči druhému); proud zanikne, ustane-li relativní pohyb.

2. Rychlejší pohyb způsobí větší proud.

3. Způsobuje-li pohyb severního pólu magnetu směrem ke smyčce proud v jednom směru, potom pohyb od smyčky způsobuje proud ve směru opačném. Pohyb jižního pólu magnetu též vytváří proud, a to vždy ve směrech opačných, než tomu bylo u pohybu pólu severního.

Proud vytvořený ve smyčce tímto způsobem se nazývá **indukovaný proud**, práce připadající na jednotkový náboj při vytváření tohoto proudu se nazývá **indukované** emn a tento proces vytvoření proudu se nazývá **elektromagnetická indukce**.

Druhý pokus. K tomuto pokusu použijeme aparaturu znázorněnou na obr. 31.2. Skládá se ze dvou smyček, které jsou blízko sebe, ale nedotýkají se. Zapneme-li spínačem S proud ve smyčce na pravé straně, pak měřidlo na levé straně náhle a krátce zaznamená proud — indukovaný proud. Vypneme-li spínačem proud, měřidlo v levé smyčce opět na krátký čas zaznamená proud, tentokrát v obráceném směru. Indukovaný proud (a tedy také emn) opět vzniká pouze tehdy, když se proud v pravé části mění (buď při zapnutí, nebo vypnutí), nikoliv ale v případech, kdy je proud budící magnetické pole stálý, i kdyby dosahoval jakkoli vysokých hodnot.



Obr. 31.2 Měřidlo proudu ukazuje proud v levé smyčce jednak po zapnutí proudu spínačem v pravé smyčce, jednak po následném vypnutí proudu. Smyčky se nepohybují.

Indukované emn a indukovaný proud v těchto pokusech zřejmě vznikají tehdy, když se něco mění. Co ale je ono „něco“? Faraday to poznal jako první.

31.3 FARADAYŮV ZÁKON ELEKTROMAGNETICKÉ INDUKCE

Faraday přišel na to, že emn a proud mohou být ve smyčce indukovány (tak jako tomu bylo v našich dvou pokusech) měnícím se *magnetickým polem* procházejícím *smyčkou*. Dále přišel na to, že magnetické pole lze znázornit pomocí

magnetických indukčních čar procházejících smyčkou. Faradayův zákon elektromagnetické indukce, vyjádřený na základě našich pokusů, zní:

Ve smyčce znázorněné na obr. 31.1 a 31.2 se indukuje emn, když se mění počet indukčních čar procházejících plochou smyčky.

Velmi důležité je, že nezáleží na *počtu* indukčních čar procházejících plochou* smyčky; velikost emn a indukovaného proudu závisí na *rychlosti změny* tohoto počtu. V našem prvním pokusu (obr. 31.1) vycházejí indukční čáry ze severního pólu magnetu. Když tedy přibližujeme severní pól ke smyčce, roste počet indukčních čar procházejících smyčkou. Tímto nárůstem se zjevně vyvolá pohyb vodivostních elektronů ve smyčce (indukovaný proud) a poskytuje se energie (indukované emn) k jejich pohybu. Zastaví-li se magnet, nemění se počet indukčních čar procházejících smyčkou a indukovaný proud i indukované napětí zaniknou.

Pokud je v našem druhém pokusu (obr. 31.2) spínač vypnut, pak neteče elektrický proud, není žádné magnetické pole a tedy ani žádné indukční čáry. Když však zapojíme elektrický proud do pravé smyčky, vytvoří vzrůstající elektrický proud kolem ní, a tedy i v okolí levé smyčky, rostoucí magnetické pole. Tak jako v prvním pokusu i zde pole narůstá, tedy indukčních čar přibývá a v levé smyčce se indukuje emn, které v ní vyvolá proud. Dosáhne-li proud v pravé smyčce ustálené hodnoty, přestane se již měnit počet indukčních čar procházejících plochou levé smyčky a indukované emn i indukovaný proud v ní vymizí.

Kvantitativní pojednání

Abychom mohli Faradayova zákona užívat k výpočtům, potřebujeme stanovit vhodnou míru magnetického pole procházejícího smyčkou. V čl. 24.3 jsme v podobné situaci ke stanovení míry elektrického pole procházejícího plochou definovali tok elektrické intenzity $\Phi_E = \int_{\mathscr{S}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$. Nyní definujeme magnetický tok. Uvažujme orientovanou smyčku $\mathscr{C}$ ohraničující plochu $\mathscr{S}$, vloženou do magnetického pole $\boldsymbol{B}$. **Magnetický indukční tok** smyčkou pak je:

$$\Phi_B = \int_{\mathscr{S}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \text{(magnetický tok plochou } \mathscr{S}\text{)}. \tag{31.3}$$

Tak jako v kap. 24 značí $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ vektor o velikosti $\mathrm{d}S$, který je kolmý k plošce; jeho směr je svázán s orientací smyčky pravidlem pravé ruky. (Ohneme-li prsty pravé ruky ve směru orientované křivky, která obepíná plošku $\mathrm{d}\mathscr{S}$ a jejíž orientace je v souladu s orientací celé smyčky $\mathscr{C}$, pak vztyčený palec ukazuje směr $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.)

Jako zvláštní případ uvažujme smyčku ležící v rovině kolmé k homogennímu magnetickému poli. Orientujeme-li $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ souhlasně s $\boldsymbol{B}$, je skalární součin v rov. (31.3) roven $B\,\mathrm{d}S\cos 0^\circ = B\,\mathrm{d}S$. Protože magnetické pole je homogenní, lze B vytknout před integrál. Integrál $\int \mathrm{d}S$ potom udává obsah S rovinné plochy ohraničené smyčkou. Rov. (31.3) se tak redukuje na vztah

$$\Phi_B = BS \quad (\boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{S}, \text{ pole } \boldsymbol{B} \text{ je homogenní}). \tag{31.4}$$

Z rov. (31.3) i (31.4) vidíme, že jednotkou magnetického indukčního toku je $\mathrm{T{\cdot}m^2}$. Nazýváme ji **weber** (Wb):

$$1 \text{ weber} = 1 \text{ Wb} = 1\ \mathrm{T{\cdot}m^2}. \tag{31.5}$$

Použitím magnetického indukčního toku můžeme vyslovit Faradayův zákon takto:

Velikost emn indukovaného ve vodivé smyčce je rovna rychlosti změny magnetického indukčního toku procházejícího touto smyčkou.

Matematický zápis tohoto zákona je

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Faradayův indukční zákon)}. \tag{31.6}$$

Zdůrazněme, že rov. (31.6) vyjadřuje indukované emn nejen pro uvedené dva pokusy, ale pro *všechny* procesy při nichž dochází ke vzniku emn. V příštím odstavci navíc uvidíme, že indukované emn *brání* změně magnetického indukčního toku, což vyjadřujeme znaménkem minus v rov. (31.6). (Zajímáme-li se jen o velikost indukovaného emn, není záporné znaménko podstatné.)

Jestliže měníme magnetický indukční tok procházející cívkou o N závitech, pak indukované emn vzniká v každém závitu a celkové emn indukované v cívce je součtem těchto jednotlivých indukovaných napětí. Je-li cívka vinuta těsně (*hustě vinutá*), je tok každým z N závitů týž, takže celkový tok je $N\Phi_B$ a indukované emn na celém vinutí je

$$\mathscr{E} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(cívka o } N \text{ závitech)}. \tag{31.7}$$

Magnetický indukční tok cívkou můžeme měnit různě:

1. Měníme velikost B magnetického pole v cívce.
2. Měníme obsah průřezu cívky, resp. té části plochy, která leží v magnetickém poli (ať už např. rozpínáním cívky nebo vysouváním cívky z magnetického pole).
3. Měníme úhel mezi směrem magnetického pole $\boldsymbol{B}$ a plochou cívky (například otáčením cívky) tak, aby se měnil počet indukčních čar procházejících plochou cívky.

* Připomeňme, že podobně jako v čl. 30.3 lze použít plochu libovolného tvaru, má-li za svou hranici uvažovanou smyčku.

PŘÍKLAD 31.1

Dlouhý solenoid S na obr. 31.3 má 220 závitů na 1 cm a teče jím proud $I = 1{,}5\,\mathrm{A}$; jeho průměr je $D = 3{,}2\,\mathrm{cm}$. V jeho středu umístíme hustě vinutou cívku C o 130 závitech a průměru $d = 2{,}1\,\mathrm{cm}$. Proud solenoidem poklesne rovnoměrně na nulu za 25 ms. Jaké emn se tím indukuje v cívce C?

ŘEŠENÍ: Cívka C je umístěna v magnetickém poli B vytvořeném proudem v solenoidu S. Klesá-li proud, klesá i B. Tím klesá i magnetický indukční tok cívkou. Během tohoto poklesu se v cívce indukuje emn podle Faradayova zákona. Abychom určili velikost emn, zjistíme nejdříve počáteční velikost magnetické indukce B_i pole v solenoidu dosazením zadaných hodnot do rov. (30.25)

$$\begin{aligned} B_\mathrm{i} &= \mu_0 I n = \\ &= (4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}})\cdot \\ &\quad \cdot (1{,}5\,\mathrm{A})(220\,\mathrm{cm^{-1}})(100\,\mathrm{cm/m}) = \\ &= 4{,}15\cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}. \end{aligned}$$

Obsah plochy závitu cívky C je $\frac{1}{4}\pi d^2 = 3{,}46\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$. Magnetické pole solenoidu je kolmé k této ploše a předpokládáme, že je na této ploše homogenní. Můžeme tedy najít počáteční magnetický indukční tok $\Phi_{B,\mathrm{i}}$ každým závitem cívky C dosazením do rov. (31.4):

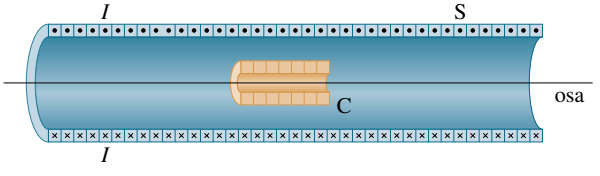
$$\begin{aligned} \Phi_{B,\mathrm{i}} &= B_\mathrm{i} S = (4{,}15\cdot 10^{-2}\,\mathrm{T})(3{,}46\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}) = \\ &= 1{,}44\cdot 10^{-5}\,\mathrm{Wb} = 14{,}4\,\mu\mathrm{Wb}. \end{aligned}$$

Koncové magnetické pole B_f a magnetický indukční tok $\Phi_{B,\mathrm{f}}$ jsou nulové. Změna magnetického indukčního toku v každém závitu cívky C byla $\Delta\Phi_B = 14{,}4\,\mu\mathrm{Wb}$. Protože se proud v solenoidu, a tím i magnetický indukční tok, zmenšovaly rovnoměrně, můžeme zapsat Faradayův zákon (31.7) ve tvaru

$$\mathscr{E} = N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t},$$

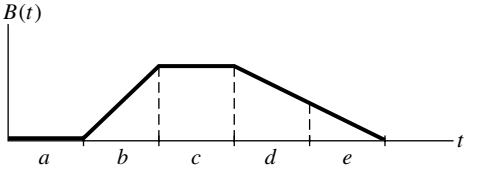
kde N je počet závitů cívky. (V rov. (31.7) neuvažujeme znaménko minus, protože hledáme pouze velikost $\mathscr{E}$). Dosazením dostáváme

$$\begin{aligned} \mathscr{E} &= (130)\frac{(14{,}4\cdot 10^{-6}\,\mathrm{Wb})}{(25\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s})} = \\ &= 7{,}5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{V} = 75\,\mathrm{mV}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$



Obr. 31.3 Příklad 31.1. Cívka C je umístěna uvnitř solenoidu S, kterým teče proud I.

KONTROLA 1: Graf udává velikost $B(t)$ homogenního magnetického pole procházejícího kolmo k rovině smyčky. Uspořádejte pět úseků grafu vzestupně podle velikosti emn indukovaného ve smyčce.

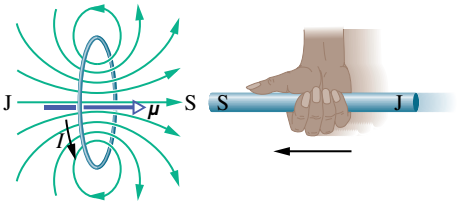


31.4 LENZŮV ZÁKON

Krátce poté, co Faraday objevil a formuloval zákon elektromagnetické indukce, vyslovil Emil Lenz pravidlo — nyní většinou nazývané **Lenzův zákon** — k určování směru indukovaného proudu ve smyčce:

Indukovaný proud má takový směr, že magnetické pole tímto proudem vzbuzené působí *proti změně* magnetického pole, která proud indukovala.

Abychom získali dobrou představu o použití Lenzova zákona, užijeme ho dvěma různými a přitom rovnocennými způsoby v situaci na obr. 31.4, kdy se severní pól magnetu přibližuje k vodivé smyčce.



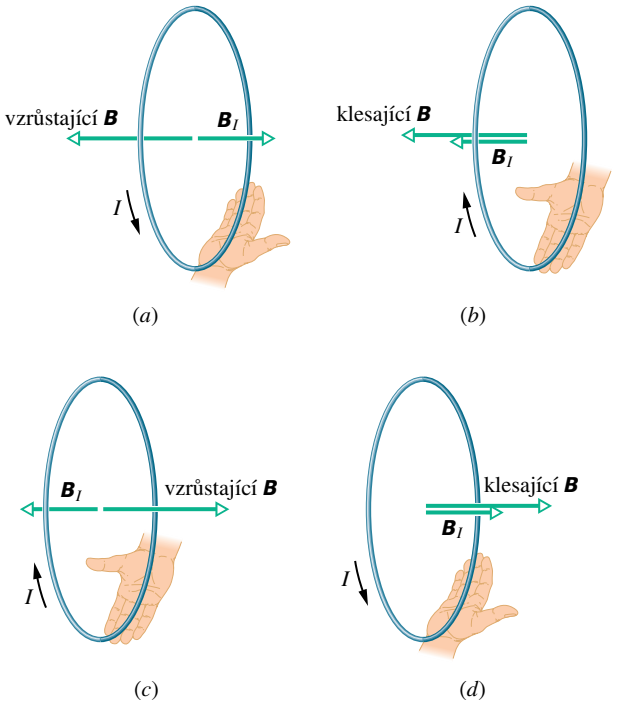
Obr. 31.4 Použití Lenzova zákona. Pohybujeme-li magnetem ke smyčce, indukuje se ve smyčce proud I proti směru otáčení hodinových ručiček; tento proud vytváří vlastní magnetické pole s magnetickým dipólovým momentem $\boldsymbol{\mu}$ takovým, že brání přibližování magnetu.

1. ***Působení proti pohybu pólu.*** Přibližujeme-li severní pól magnetu ke smyčce (obr. 31.4), roste magnetické pole v ploše smyčky a tím se ve smyčce indukuje proud. Z obr. 30.22 víme, že smyčce protékané proudem odpovídá magnetický dipól s jižním a severním pólem a že magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$ směřuje od jihu k severu. Aby byl magnet podle Lenzova zákona *odpuzován* (obr. 31.4), a tak se působilo *proti* narůstání magnetického pole způsobeného přibližujícím se magnetem, musí severní

pól smyčky (a tedy i $\boldsymbol{\mu}$) směřovat k přibližujícímu se severnímu pólu magnetu. Podle pravidla pravé ruky pro $\boldsymbol{\mu}$ (obr. 30.22) proud I indukovaný ve smyčce teče ve směru vyznačeném na obr. 31.4.

Táhneme-li naopak magnet od smyčky, indukuje se znovu ve smyčce proud. Nyní však bude jižní pól smyčky přivrácen vzdalujícímu se severnímu pólu magnetu, takže brání vzdalování. Proud tedy bude indukován v opačném směru než na obr. 31.4.

2. ***Působení proti změně magnetického indukčního toku.*** Podle obr. 31.4 neprochází smyčkou prakticky žádný magnetický indukční tok, pokud je magnet daleko. Když se severní pól magnetu blíží ke smyčce, je jeho magnetické pole $\boldsymbol{B}$ namířeno *doleva* a tok smyčkou roste. Aby se bránilo růstu magnetického toku, musí indukovaný proud I vytvořit vlastní pole $\boldsymbol{B}_I$ uvnitř smyčky namířené *doprava*, jak ukazuje obr. 31.5a; potom tok pole $\boldsymbol{B}_I$ zeslabuje rostoucí tok pole $\boldsymbol{B}$. Podle pravidla pravé ruky z obr. 30.22 musí proud I téci v situaci na obr. 31.5a proti směru oběhu hodinových ručiček.



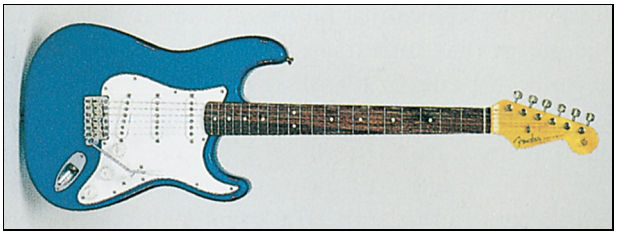
Obr. 31.5 Proud I indukovaný ve smyčce má takový směr, že magnetické pole $\boldsymbol{B}_I$ tohoto proudu brání *změně* magnetického pole $\boldsymbol{B}$ indukujícího I. Pole $\boldsymbol{B}_I$ je namířeno proti vzrůstajícímu poli $\boldsymbol{B}$ v obr. (*a*), (*c*), ale má stejný směr jako klesající $\boldsymbol{B}$ v obr. (*b*), (*d*).

Dobře si všimněme, že tok pole $\boldsymbol{B}_I$ vždy brání *změně* toku pole $\boldsymbol{B}$, to ale nemusí znamenat, že $\boldsymbol{B}_I$ je namířeno proti $\boldsymbol{B}$. Táhneme-li například magnet od smyčky, míří $\boldsymbol{B}$ stále doleva, ale jeho tok Φ_B se nyní zmenšuje. Tok pole $\boldsymbol{B}_I$ tedy musí bránit *poklesu* Φ_B, a proto vektory $\boldsymbol{B}_I$ a $\boldsymbol{B}$ budou nyní mít stejný směr (obr. 31.5b).

Obr. 31.5c, d ukazují situace, v nichž se jižní pól magnetu přibližuje nebo vzdaluje smyčce.

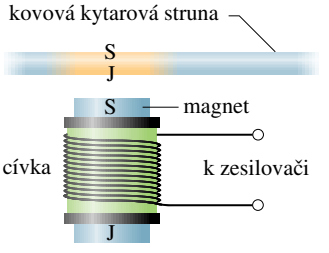
Elektrické kytary

Obr. 31.6 ukazuje Fenderův Stratocaster, typ elektrické kytary, užívané Jimi Hendrixem a mnohými dalšími hudebníky. Zatímco klasická kytara vytváří svůj zvuk v duté části nástroje akustickou rezonancí kmitů strun, nemá elektrická kytara dutou část, která by rezonovala. Místo toho jsou kmity kovových strun snímány elektrickými snímači, které převádějí mechanický podnět na elektrický signál, ten se dále zesiluje a konečně převádí na zvuk v soustavě reproduktorů.



Obr. 31.6 Fenderův Stratocaster má tři skupiny po šesti elektrických snímačích (v široké části nástroje). Přepínač snímačů umožňuje hudebníkovi volit, která skupina snímačů bude vysílat signály do zesilovačů a reproduktorové soustavy.

Základní konstrukce snímače je patrná z obr. 31.7. Je tvořen cívkou navinutou na malý permanentní magnet, jehož magnetické pole indukuje severní a jižní pól v části kovové struny, která je právě nad magnetem. Tato část má potom svoje vlastní magnetické pole. Brnkneme-li na strunu, začne struna kmitat, její pohyb vůči cívce mění indukční magnetický tok cívkou a tím se v cívce indukuje proud. Struna příčně kmitá k cívce a od ní, indukovaný proud mění směr se stejnou frekvencí jako kmity struny a přenáší tyto kmity do zesilovače a reproduktoru.

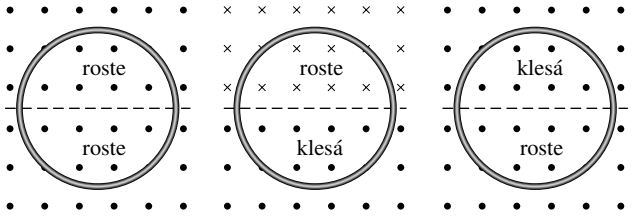


Obr. 31.7 Boční pohled na elektrický kytarový snímač. Rozkmitáme-li kovovou strunu (která působí jako magnet), indukují změny magnetického indukčního toku v cívce proud.

Na Stratocasteru jsou tři skupiny snímačů, umístěných blízko uchycení strun na široké části korpusu. Skupina nejblíže kobylce lépe zachycuje kmity s vyššími frekvencemi, skupina nejdále od kobylky zachycuje lépe frekvence nižší. Přepínačem na kytaře může hudebník volit, které skupiny snímačů budou vysílat signály do zesilovače a reproduktorů.

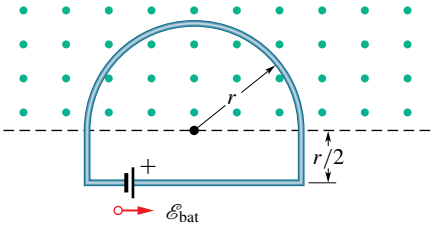
Dalších efektů dociloval někdy Hendrix převinutím snímačů své kytary na jiný počet závitů. Měnil tak velikost emn indukovaného v cívkách a tím i jejich citlivost. I bez tohoto dodatečného zásahu však nabízí elektrická kytara mnohem větší možnosti ovládání vytvářeného hudebního zvuku než kytara klasická.

KONTROLA 2: Obrázek ukazuje tři situace, v nichž jsou stejné kruhové vodivé smyčky v homogenních magnetických polích, která rostou nebo klesají stejně rychle. Přerušovaná čára, vymezující hranici změn pole, prochází vždy středem kruhu. Seřaďte situace sestupně podle velikosti proudu indukovaného ve smyčce.



PŘÍKLAD 31.2

Obr. 31.8 ukazuje vodivou smyčku, kterou tvoří půlkružnice o poloměru $r = 0{,}20\,\text{m}$ a tři přímé úseky. Půlkruh je v homogenním magnetickém poli $\boldsymbol{B}$ vystupujícím kolmo ze stránky k nám; $B = 4{,}0t^2 + 2{,}0t + 3{,}0$ v jednotkách SI. Do smyčky je zapojena ideální baterie o emn $\mathscr{E}_{\text{bat}} = 2{,}0\,\text{V}$. Smyčka má odpor $2{,}0\,\Omega$.



Obr. 31.8 Příklad 31.2. Do smyčky vložené do homogenního magnetického pole je zapojena baterie. Pole vystupuje kolmo ze stránky k nám a jeho velikost se s časem mění.

(a) Jaká je velikost a orientace emn $\mathscr{E}_{\text{ind}}$ indukovaného ve smyčce v čase $t = 10\,\text{s}$?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (31.6) je velikost $\mathscr{E}_{\text{ind}}$ rovna rychlosti $\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$, s níž se mění magnetický indukční tok smyčkou. Protože je pole homogenní a kolmé k rovině smyčky, je jeho tok dán rov. (31.4), tj. $\Phi_B = BS$. Použijeme-li tuto rovnici a uvědomíme-li si, že se mění v čase jen velikost B pole (nikoliv obsah plochy S), můžeme přepsat rov. (31.6) do tvaru

$$\mathscr{E}_{\text{ind}} = \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(BS)}{\mathrm{d}t} = S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}.$$

Protože magnetický indukční tok prochází smyčkou jen uvnitř půlkruhu, je $S = \frac{1}{2}\pi r^2$. Dosazením výrazů pro S a pro B dostaneme

$$\mathscr{E}_{\text{ind}} = S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi r^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4{,}0t^2 + 2{,}0t + 3{,}0) = \\ = \frac{\pi r^2}{2}(8{,}0t + 2{,}0) \quad (\text{v SI}).$$

V čase $t = 10\,\text{s}$ platí

$$\mathscr{E}_{\text{ind}} = \frac{\pi(0{,}20)^2}{2}(8{,}0{\cdot}10 + 2{,}0)\,\text{V} = \\ = 5{,}152\,\text{V} \doteq 5{,}2\,\text{V}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Na obr. 31.8 vystupuje magnetická indukce ze stránky *k nám* a narůstá. Podle Lenzova zákona tedy indukované pole B_I (způsobené indukovaným proudem I) směřuje *od nás*.

Užitím pravidla pravé ruky (obr. 30.7c) zjistíme, že indukovaný proud teče smyčkou ve směru otáčení hodinových ručiček, takže orientace $\mathscr{E}_{\text{ind}}$ je táž.

(b) Jaký proud teče smyčkou v čase $t = 10\,\text{s}$?

ŘEŠENÍ: Zatímco indukované emn o velikosti $\mathscr{E}_{\text{ind}}$ vyvolá proud smyčkou ve směru otáčení hodinových ručiček, má emn baterie $\mathscr{E}_{\text{bat}}$ tendenci hnát proud směrem opačným. Protože $\mathscr{E}_{\text{ind}} > \mathscr{E}_{\text{bat}}$, je výsledné emn $\mathscr{E}_{\text{výs}}$ orientováno ve směru otáčení hodinových ručiček a stejným směrem teče i proud. Jeho velikost v čase $t = 10\,\text{s}$ určíme pomocí rov. (28.2) ($I = \mathscr{E}/R$):

$$I = \frac{\mathscr{E}_{\text{výs}}}{R} = \frac{\mathscr{E}_{\text{ind}} - \mathscr{E}_{\text{bat}}}{R} = \frac{(5{,}152\,\text{V}) - (2{,}0\,\text{V})}{(2{,}0\,\Omega)} = \\ = 1{,}58\,\text{A} \doteq 1{,}6\,\text{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 31.3

Obr. 31.9 ukazuje pravoúhlou vodivou smyčku v nehomogenním časově proměnném magnetickém poli $\boldsymbol{B}(x, t)$ vstupujícím kolmo do stránky od nás. Velikost pole je dána vztahem $B = 4t^2x^2$, kde B, t, x jsou v jednotkách SI. Smyčka má šířku $d = 3{,}0\,\text{m}$ a výšku $h = 2{,}0\,\text{m}$. Jaká je velikost a směr emn indukovaného podél smyčky v čase $t = 0{,}10\,\text{s}$?

ŘEŠENÍ: Velikost indukovaného emn plyne z Faradayova zákona: $\mathscr{E} = \mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$. K výpočtu potřebujeme znát tok Φ_B smyčkou jako funkci času. Protože $\boldsymbol{B}$ *není* homogenní na ploše ohraničené smyčkou, nemůžeme užít rov. (31.4) ($\Phi_B = BS$), ale musíme užít rov. (31.3) ($\Phi_B = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$).

Na obr. 31.9 je vektor $\boldsymbol{B}$ kolmý k rovině smyčky (a tedy rovnoběžné s vektorem plošného elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$). Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ orientujeme souhlasně s vektorem $\boldsymbol{B}$. Potom skalární součin v rov. (31.3) je roven $B\,\mathrm{d}S$. Protože se magnetické pole mění podél souřadnice x a nikoliv podél souřadnice y, můžeme jako element plochy vzít plochu svislého proužku výšky h a šířky $\mathrm{d}x$ (jak ukazuje obr. 31.9). Potom $\mathrm{d}S = h\,\mathrm{d}x$ a tok smyčkou je

$$\Phi_B = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int B\,\mathrm{d}S = \int_0^d Bh\,\mathrm{d}x = \\ = \int_0^d 4t^2x^2h\,\mathrm{d}x \quad \text{(v SI)}.$$

Při této integraci bereme t jako konstantu. Po dosazení integračních mezí dostáváme

$$\Phi_B = 4t^2h\int_0^{3,0} x^2\,\mathrm{d}x = 4t^2h\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{3,0} = (72t^2),$$

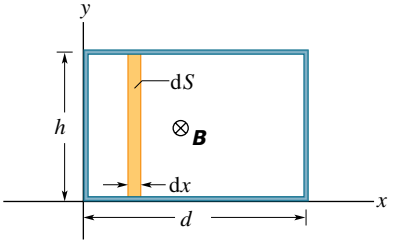
kde Φ_B je ve weberech. Nyní můžeme užít Faradayův zákon ke zjištění velikosti $\mathscr{E}$ v závislosti na čase

$$\mathscr{E} = \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(72t^2)}{\mathrm{d}t} = (144t),$$

kde $\mathscr{E}$ je ve voltech. Pro $t = 0{,}10\,\mathrm{s}$ je tedy

$$\mathscr{E} = (144\,\mathrm{V\cdot s^{-1}})(0{,}10\,\mathrm{s}) \doteq 14\,\mathrm{V}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ (obr. 31.9) vstupuje kolmo do stránky a její velikost roste s časem.



Obr. 31.9 Příklad 31.3. Uzavřená vodivá smyčka o šířce d a výšce h leží v nehomogenním, časově proměnném poli vstupujícím do stránky. Pro výpočet toku Φ_B plochu rozdělíme na svislé proužky o výšce h, šířce $\mathrm{d}x$ a ploše $\mathrm{d}S$.

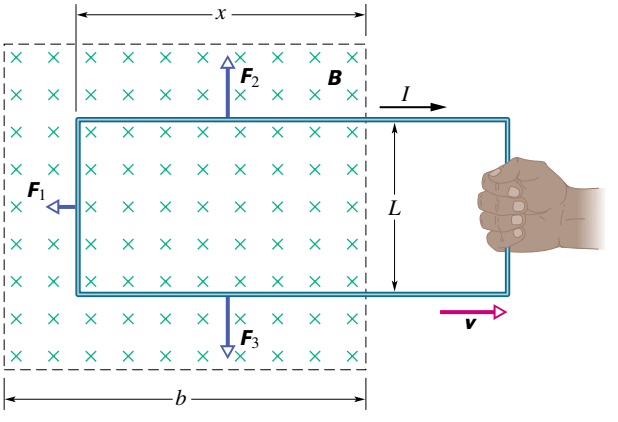
Podle Lenzova zákona vystupuje pole $\boldsymbol{B}_I$ indukovaného proudu, které brání tomuto vzrůstu, ze stránky. Proto je proud ve smyčce indukován proti směru otáčení hodinových ručiček a stejně je tomu s indukovaným emn.

31.5 INDUKCE A PŘENOSY ENERGIE

Ať pohybujeme magnetem na obr. 31.1 ke smyčce nebo od ní, brání podle Lenzova zákona tomuto pohybu síla, při jejímž přemáhání konáme práci. Současně v materiálu smyčky, kterou protéká indukovaný proud, vzniká Joulovo teplo, protože materiál smyčky má určitý elektrický odpor. Energie, kterou do uzavřené soustavy smyčka + magnet zvnějšku dodáváme prací konanou naší silou, je ve smyčce disipována. (Prozatím zanedbáme energii, která se v průběhu procesu vyzáří jako elektromagnetické vlny.) Čím rychleji pohybujeme magnetem, tím větší je výkon naší (vnější) síly a tím rychleji se ve smyčce vyvíjí Joulovo teplo.

K uvedené přeměně energie dochází bez ohledu na to, jak je proud ve smyčce indukován. Když např. v obr. 31.2 sepneme spínač S a krátce se v levé smyčce indukuje proud, přenese se energie z baterie do levé smyčky, kde je v materiálu smyčky (pokud není supravodivý) disipována.

Obr. 31.10 ukazuje jinou situaci, při níž vzniká indukovaný proud. Obdélníková drátěná smyčka šířky L má jednu stranu v homogenním magnetickém poli kolmém k rovině smyčky. (Toto pole můžeme vytvořit např. velkým elektromagnetem s vhodnými pólovými nástavci.) Smyčku vytahujeme stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$ z magnetického pole ven. Všimněme si rozdílu mezi situací na obr. 31.10 a 31.1. Na obr. 31.1 se magnetický indukční tok mění proto, že se mění pole $\boldsymbol{B}$, zatímco na obr. 31.10 se mění plocha smyčky zůstávající v magnetickém poli, které je neproměnné.



Obr. 31.10 Uzavřenou vodivou smyčku vytahujeme konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ z magnetického pole $\boldsymbol{B}$. Během pohybu se ve smyčce indukuje proud I ve směru otáčení hodinových ručiček a na části smyčky v magnetickém poli působí síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$. Hranice magnetického pole je vyznačena čárkovaně; rozptyl pole na hranici zanedbáme.

Vypočítejme nyní výkon potřebný pro vytahování smyčky (v níž protéká indukovaný proud).

Ukážeme, že pokud chceme táhnout smyčku stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$, musíme na ni působit stálou silou $\boldsymbol{F}$. Ta má stejnou velikost jako síla, kterou přemáháme, ale má opačný směr. Podle rov. (7.49) je potom výkon roven

$$P = Fv, \tag{31.8}$$

kde F je velikost naší síly. Chceme najít výkon P jako funkci velikosti B magnetické indukce a charakteristik smyčky, tedy jejího elektrického odporu R a šířky L. Pohybujeme-li smyčkou na obr. 31.10 doprava, zmenšuje se obsah S plochy smyčky vnořené do magnetického pole. Tím se zmenšuje i magnetický tok smyčkou a podle Faradayova zákona vzniká ve smyčce proud. Právě přítomnost tohoto proudu způsobuje sílu (Ampérovu sílu), kterou musíme svým tahem přemáhat.

Proud určíme z Faradayova indukčního zákona (31.6). Je-li x délka části smyčky v magnetickém poli, je Lx plocha této části. Potom podle rov. (31.4) je magnetický indukční tok smyčkou

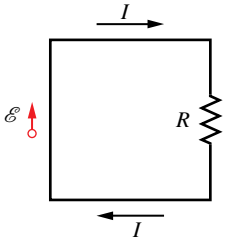
$$\Phi_B = BS = BLx. \tag{31.9}$$

Zmenšuje-li se x, zmenšuje se tok. Podle Faradayova zákona se při tomto zmenšování toku indukuje ve smyčce emn. Dosadíme-li z rov. (31.9) do (31.6), dostaneme

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(BLx) = -BL\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = BLv, \tag{31.10}$$

kde velikost v rychlosti, s níž vytahujeme smyčku z magnetického pole, je rovna $-\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, protože $x(t)$ se s časem *zmenšuje*.

Obr. 31.11 ukazuje obvod, jímž indukovaný proud teče: emn $\mathscr{E}$ je znázorněno na levé straně, celkový odpor R smyčky je znázorněn na straně pravé. Směr indukovaného proudu plyne z Lenzova zákona; magnetické pole jím vytvořené brání poklesu magnetického toku.



Obr. 31.11 Schéma obvodu na obr. 31.10 pro případ pohybující se smyčky.

Velikost indukovaného proudu nemůžeme najít pomocí Kirchhoffova zákona pro napětí podél smyčky, protože pro indukované emn nemůžeme definovat potenciál, jak uvidíme v čl. 31.6. Můžeme však užít vztahu $I = \mathscr{E}/R$, jako jsme to udělali v př. 31.2. Pomocí rov. (31.10) dostáváme

$$I = \frac{BLv}{R}. \tag{31.11}$$

Tři části proudem protékané smyčky leží v magnetickém poli. Na každou z nich působí síla podle rov. (29.26):

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}. \tag{31.12}$$

Tyto síly jsou v obr. 31.10 značeny $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$. Všimněte si, že díky symetrii jsou síly $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ sobě rovny co do velikosti a vzájemně se ruší. Zůstává pouze síla $\boldsymbol{F}_1$ namířená proti síle $\boldsymbol{F}$, tj. proti síle, kterou táhneme smyčku. Posunujeme-li smyčku bez zrychlení, musí platit $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}_1$.

Použijeme-li rov. (31.12) a uvážíme-li, že úhel mezi $\boldsymbol{B}$ a vektorem $\boldsymbol{L}$ délky L levé strany obdélníka je 90°, můžeme psát

$$F = F_1 = ILB\sin 90^\circ = ILB. \tag{31.13}$$

Dosazením rov. (31.11) do (31.13) dostaneme

$$F = \frac{B^2L^2v}{R}. \tag{31.14}$$

Hodnoty B, L i R jsou konstantní. Protože velikost v rychlosti pohybu smyčky je také konstantní, musíme smyčku táhnout silou stálé velikosti F, a to jsme chtěli dokázat.

Dosazením rov. (31.14) do rov. (31.8) dostaneme výkon potřebný pro vytahování smyčky z magnetického pole:

$$P = vF = \frac{B^2L^2v^2}{R} \quad \text{(výkon)}. \tag{31.15}$$

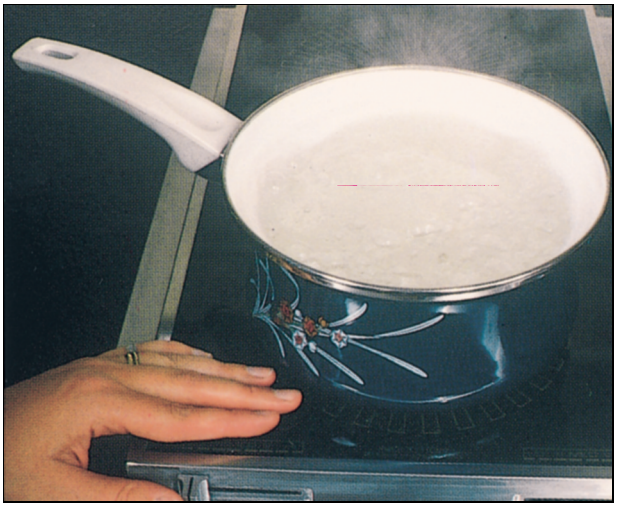
K dokončení naší úvahy určíme, s jakým výkonem se ve smyčce vyvíjí Joulovo teplo, když ji vytahujeme stálou rychlostí. To vypočteme z rov. (27.22),

$$P = I^2R. \tag{31.16}$$

Dosazením za I z rov. (31.11) dostáváme

$$P = \left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2L^2v^2}{R} \quad \text{(tepelný výkon)}, \tag{31.17}$$

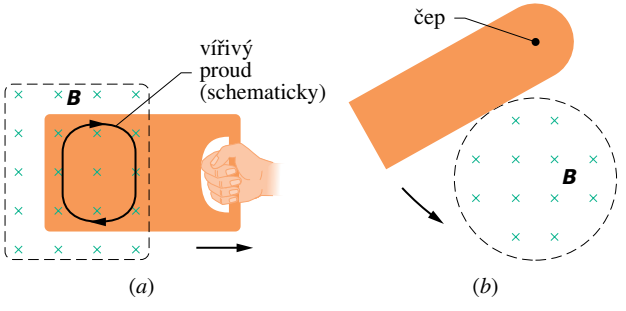
což je přesně rovno výkonu vnější síly při vytahování smyčky podle rov. (31.15). Práce vynaložená při vytahování smyčky se tedy projeví nárůstem vnitřní energie smyčky a tím i zvýšením její teploty.



Při vaření na *indukčních kamnech* je cívka, umístěná přímo pod varnou plochou, napájena vysokofrekvenčním střídavým proudem. Magnetické pole vytvořené tímto proudem se periodicky mění a indukuje proud ve vodivé pánvi. Protože má materiál pánve nenulový odpor, vyvíjí se v ní teplo a tím dochází k ohřevu jídla, které se na ní připravuje. Sama varná plocha se přitom nezahřívá.

Vířivé proudy

Představme si, že nahradíme vodivou smyčku na obr. 31.10 tuhou vodivou deskou. Vytahujeme-li desku z magnetického pole tak, jako jsme vytahovali smyčku (obr. 31.12a),



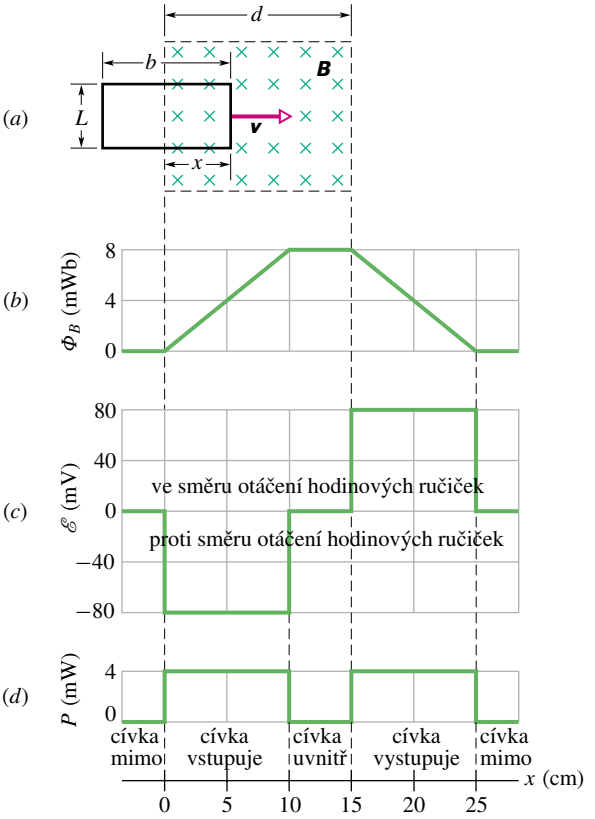
Obr. 31.12 (a) Vytahujeme-li pevnou vodivou desku z magnetického pole, indukují se v ní *vířivé proudy*. Na obrázku je uzavřená křivka charakterizující vířivý proud; ten obíhá ve směru otáčení hodinových ručiček, stejně jako proud ve smyčce na obr. 31.10. (b) Vodivá deska se kývá kolem čepu jako kyvadlo, přičemž vstupuje do magnetického pole. Vířivé proudy se indukují během každého vstupu do magnetického pole i výstupu z něj a tlumí pohyb kyvadla.

opět se v desce indukuje proud. Opět tedy přemáháme sílu a konáme práci. Vodivostní elektrony tvořící indukovaný proud v desce se však nyní nepohybují po jediné dráze jako v případě smyčky, ale krouží jako voda ve vířivé pračce. Takový elektrický proud se nazývá *vířivý*. Zobrazujeme ho obvykle schematicky tak, *jako kdyby* sledoval jedinou dráhu, např. na obr. 31.12a.

Tak jako v případě vodivé smyčky na obr. 31.10 vede indukování proudu v desce k přeměně mechanické energie v energii chaotického pohybu atomů desky. Tato disipace energie je patrnější v uspořádání na obr. 31.12b: vodivá deska, otáčivá kolem vodorovné osy jako kyvadlo, prochází magnetickým polem. Vždy během vstupu do pole a výstupu z něj se část mechanické energie kyvadla disipuje. Po několika kmitech mechanická energie klesne na nulu, deska se přestane kývat a zastaví se v dolní rovnovážné poloze.

PŘÍKLAD 31.4

Obr. 31.13a ukazuje pravoúhlou vodivou smyčku o odporu R, šířce L a délce b, kterou táhneme konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ přes oblast o šířce d, v níž je elektromagnetem vytvořeno homogenní magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B}$. Nechť $L = 40\,\text{mm}$, $b = 10\,\text{cm}$, $R = 1{,}6\,\Omega$, $B = 2{,}0\,\text{T}$ a $v = 1{,}0\,\text{m·s}^{-1}$.



Obr. 31.13 Příklad 31.4. (a) Uzavřená vodivá smyčka je protahována stálou rychlostí magnetickým polem. (b) Indukční tok smyčkou jako funkce polohy x pravé strany smyčky. (c) Indukované emn jako funkce x. (d) Výkon, s nímž vzniká Joulovo teplo ve smyčce jako funkce x.

(a) Nakreslete závislost toku Φ_B smyčkou na poloze x pravé strany smyčky.

ŘEŠENÍ: Není-li smyčka v poli, je magnetický tok smyčkou nulový. Je-li smyčka zcela v magnetickém poli, je tok smyčkou roven $BLb = 8$ mWb. Vstupuje-li smyčka do pole, je tok roven BLx a vystupuje-li pak z něj, je roven $BL(b-(x-d))$. Výsledky jsou vyneseny na obr. 31.13b; ověřte je.

(b) Nakreslete závislost indukovaného emn na poloze smyčky. Vyznačte směr indukovaného emn.

ŘEŠENÍ: Podle rov. (31.6) je indukované emn rovno

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}x}v,$$

kde $\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}x$ je směrnice tečny ke křivce na obr. 31.13b. Na obr. 31.13c je emn vyneseno jako funkce x.

Vstupuje-li smyčka do pole (obr. 31.13a), teče indukovaný proud podle Lenzova zákona proti směru otáčení hodinových ručiček; při výstupu z pole má proud směr opačný. Na obr. 31.13c jsme emn přiřadili kladnou hodnotu polohám, v nichž indukovaný proud teče ve směru otáčení hodinových ručiček. Žádné emn se neindukuje, je-li smyčka buď zcela mimo pole, nebo zcela uvnitř pole, protože v obou těchto případech se magnetický indukční tok smyčkou nemění.

(c) Vyneste do grafu výkon, s nímž se ve smyčce vyvíjí Joulovo teplo, jako funkci polohy smyčky.

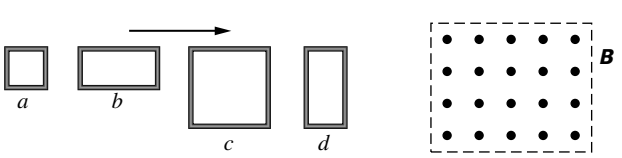
ŘEŠENÍ: Dosazením $I = \mathscr{E}/R$ do rov. (31.16) dostáváme výkon

$$P = I^2R = \frac{\mathscr{E}^2}{R}.$$

Tak z obr. 31.13c odvodíme obr. 31.13d. Všimněme si, že se teplo vyvíjí jen tehdy, když smyčka vstupuje do magnetického pole nebo z něj vystupuje.

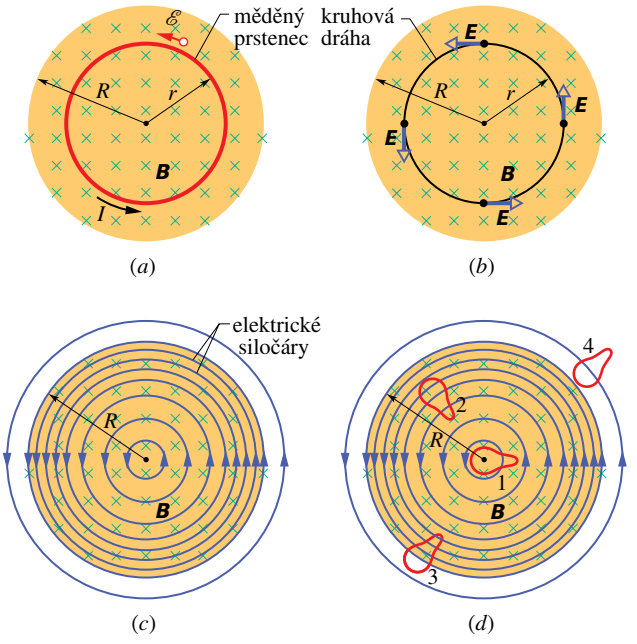
V praxi nemá magnetické pole $\boldsymbol{B}$ ostrou hranici, kde by náhle kleslo na nulu, ale blíží se k nule spojitě a hladce. Na křivkách vynesených na obr. 31.13 by tedy byly rohy zaobleny.

KONTROLA 3: Obrázek ukazuje čtyři vodivé smyčky s délkami stran L nebo $2L$. Všechny smyčky budou vnikat stejnou stálou rychlostí do oblasti homogenního magnetického pole $\boldsymbol{B}$ (vystupujícího kolmo ze stránky). Seřaďte tyto čtyři smyčky podle velikosti emn, indukovaného během vstupu do pole, největší uveďte jako první.



31.6 INDUKOVANÉ ELEKTRICKÉ POLE

Umístěme měděný prstenec o poloměru r do homogenního magnetického pole, které vyplňuje válcový objem o poloměru R (obr. 31.14a). Předpokládejme, že rovnoměrně zvětšujeme magnetickou indukci pole, např. zvětšováním proudu ve vinutí elektromagnetu, jímž pole vytváříme. Magnetický indukční tok prstencem potom rovnoměrně poroste a podle Faradayova zákona vzniká v prstenci indukované emn a tím i indukovaný proud. Z Lenzova zákona plyne, že indukovaný proud I na obr. 31.14a směřuje proti směru otáčení hodinových ručiček.



Obr. 31.14 (a) Narůstá-li magnetické pole s časem rovnoměrně, indukuje se v měděném prstenci o poloměru r stálý proud. (b) Elektrické pole se v prostoru indukuje, i když je prstenec odstraněn. (c) Úplný obraz indukovaného elektrického pole zobrazeného siločárami. (d) Čtyři stejné uzavřené křivky ohraničují plochy o stejném obsahu. V křivkách 1 a 2 ležících zcela v oblasti měnícího se magnetického pole se indukuje stejné emn. Menší emn se indukuje podél křivky 3, která leží v této oblasti jen zčásti. Žádné emn se neindukuje podél křivky 4, která leží zcela mimo magnetické pole.

Teče-li měděným prstencem proud, musí být podél prstence elektrické pole, které zajistí pohyb vodivostních elektronů. Toto **indukované elektrické pole** $\boldsymbol{E}$ je zřejmě vyvoláno měnícím se magnetickým indukčním tokem a je právě tak reálné jako elektrické pole vytvořené statickými náboji. Obě pole působí silou $Q_0\boldsymbol{E}$ na částici o náboji Q_0. Tato úvaha nás přivádí k užitečnému a poučnému přeformulování Faradayova zákona elektromagnetické indukce:

Měnící se magnetické pole vytváří pole elektrické.

Pozoruhodné je, že podle této formulace se elektrické pole indukuje i tehdy, když v něm žádný měděný prstenec není.

K upevnění těchto poznatků uvažujme obr. 31.14b, který je shodný s obr. 31.14a jen s tím rozdílem, že měděný prstenec je nahrazen myšlenou kružnicí o poloměru r. Předpokládáme opět, že velikost magnetického pole $\boldsymbol{B}$ vzrůstá stálou rychlostí $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$. Intenzita $\boldsymbol{E}$ elektrického pole indukovaného v různých bodech podél kružnice musí — z důvodů symetrie — ležet v tečně* ke kružnici, jak ukazuje obr. 31.14b. Tato kružnice je tedy také siločárou. Zvolený poloměr r není ničím zvláštní, takže elektrické siločáry pole vyvolaného proměnným magnetickým polem vytvářejí zřejmě svazek soustředných kružnic jako na obr. 31.14c.

Pokud magnetické pole s časem vzrůstá, trvá elektrické pole zobrazené kruhovými siločarami. Je-li však magnetické pole v čase neproměnné, nevzniká žádné indukované elektrické pole (na obrázku by žádné elektrické siločáry nebyly). Naopak, jestliže se magnetické pole s časem *zmenšuje*, vzniká elektrické pole, jehož siločáry jsou opět soustřednými kružnicemi jako na obr. 31.14c, ale nyní mají opačný směr. To vše máme na mysli, když říkáme, že měnícím se magnetickým polem se vytváří elektrické pole.

Přeformulování Faradayova zákona

Uvažujme částici o (kladném) náboji Q_0 pohybující se po kružnici podle obr. 31.14b. Práce na náboji Q_0 vykonaná indukovaným elektrickým polem při jednom oběhu je $W = Q_0\mathscr{E}$, kde $\mathscr{E}$ je indukované emn představující práci připadající na jednotkový náboj, který se pohybuje po této dráze. Obecně lze tuto práci vyjádřit vztahem

$$W = \oint \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = (Q_0E)(2\pi r). \qquad (31.18)$$

(Kroužek značí, že integrál bereme po uzavřené křivce; připomeňme, že jde o cirkulaci vektoru $\boldsymbol{F}$.) Zde Q_0E je velikost síly působící na náboj Q_0 a $2\pi r$ je dráha, na níž tato síla působí. Porovnáním obou výrazů pro W dostáváme

$$\mathscr{E} = 2\pi r E. \qquad (31.19)$$

* Symetrie úlohy nevylučuje, že by siločáry pole $\boldsymbol{E}$ mohly mít podél kružnice radiální směr a nikoliv tečný. Takové radiální siločáry by však znamenaly, že kolem osy symetrie jsou symetricky rozloženy volné náboje, na nichž siločáry začínají nebo končí; zde však žádné takové náboje nejsou.

Rov. (31.18) můžeme zobecnit pro libovolnou uzavřenou dráhu:

$$W = \oint \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = Q_0\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \qquad (31.20)$$

Dosazením $\mathscr{E}Q_0$ za W získáme vztah

$$\mathscr{E} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \qquad (31.21)$$

Pomocí rov. (31.21) můžeme rozšířit fyzikální význam emn. Dosud jsme spojovali emn s prací, kterou bylo nutno dodat k zajištění pohybu náboje, ať už samostatného anebo tvořícího elektrický proud. Rov. (31.21) však umožňuje zavést indukované emn, aniž bychom k tomu potřebovali elektrický proud nebo částici. Indukované emn je součet — vyjádřený integrací — veličin $\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ podél orientované uzavřené křivky, kde $\boldsymbol{E}$ je intenzita elektrického pole indukovaného měnícím se magnetickým indukčním tokem a $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ je vektor infinitezimálního délkového elementu uzavřené dráhy.

Dosadíme-li (31.21) do rov. (31.6) ($\mathscr{E} = -\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$), dostáváme Faradayův zákon ve tvaru

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \quad \text{(Faradayův zákon).} \qquad (31.22)$$

Tato rovnice vyjadřuje, že měnícím se magnetickým polem je indukováno elektrické pole. Měnící se magnetický tok vystupuje na pravé straně této rovnice, cirkulace elektrického pole na levé.

Faradayův zákon ve tvaru rov. (31.22) můžeme použít na jakoukoli uzavřenou křivku, kterou vedeme měnícím se magnetickým polem. Obr. 31.14d například ukazuje čtyři stejné křivky, které jsou různě umístěny v měnícím se poli. Podél křivek 1 a 2 se indukuje stejné emn ($\mathscr{E} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$), protože obě zcela leží v magnetickém poli a odpovídá jim tedy stejná hodnota $\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$. Tak je tomu, i když je průběh elektrického pole podél těchto křivek rozdílný, jak je patrno z průběhu elektrických siločár. V křivce 3 se indukuje emn menší, protože jí prochází menší tok Φ_B, a proto je menší i $\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$. Pro křivku 4 je indukované emn nulové, i když je elektrické pole ve všech bodech křivky nenulové.

Jiný pohled na elektrický potenciál

Indukovaná elektrická pole nejsou vytvářena statickými elektrickými náboji, ale měnícím se magnetickým polem. Ačkoli elektrická pole vytvořená jedním i druhým způsobem působí na nabité částice úplně stejně, existuje mezi nimi významný rozdíl. Patrný projev tohoto rozdílu je, že siločáry indukovaných elektrických polí vytvářejí uzavřené

křivky jako na obr. 31.14c, zatímco siločáry vytvořené statickými náboji vždy začínají na kladných nábojích a končí na záporných.

Rozdíl mezi elektrickým polem vytvořeným elektromagnetickou indukcí a polem statických nábojů můžeme vyjádřit těmito slovy:

> Elektrický potenciál má smysl jen pro pole statických nábojů. Nelze ho zavést pro elektrická pole vzniklá elektromagnetickou indukcí.

Kvalitativně můžeme porozumět tomuto výroku, když uvážíme, co se stane s částicí s jednotkovým nábojem po jednom oběhu kruhové dráhy (obr. 31.14b). Částice vyšla z určitého bodu a vrátila se do něj; během cesty na ni působila síla, která vykonala práci odpovídající emn, řekněme, $\mathscr{E} = 5\,\mathrm{V}$. Její potenciál by byl musel vzrůst o tuto hodnotu. To však není možné, protože by týž bod v prostoru musel mít dvě rozdílné hodnoty potenciálu. Docházíme k závěru, že pro elektrická pole vyvolaná měnícím se magnetickým polem nelze zavést potenciál jednoznačně.

Matematický náhled získáme, vzpomeneme-li si na rov. (25.18) definující potenciální rozdíl mezi počátečním (i) a koncovým (f) bodem:

$$\varphi_\mathrm{i} - \varphi_\mathrm{f} = -\int_\mathrm{i}^\mathrm{f} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \qquad (31.23)$$

V kap. 25 jsme se ještě nezabývali Faradayovým zákonem elektromagnetické indukce, takže elektrická pole uvažovaná při odvození rov. (25.18) byla výhradně pole statických nábojů. Splyne-li v rov. (31.23) počáteční bod s koncovým, je integrační cesta uzavřená, φ_i a φ_f jsou totožné a rov. (31.23) se redukuje na tvar

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0. \qquad (31.24)$$

Když se však mění magnetický indukční tok, *není* tento integrál roven nule, ale je roven $-\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$, jak plyne z rov. (31.22). Přicházíme tak k závěru, že elektrický potenciál *nelze zavést* pro elektrická pole vyvolaná elektromagnetickou indukcí.

PŘÍKLAD 31.5

Na obr. 31.14b je $R = 8{,}5\,\mathrm{cm}$ a $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = 0{,}13\,\mathrm{T\cdot s^{-1}}$.

(a) Najděte vztah pro velikost E intenzity indukovaného elektrického pole v bodech ve vzdálenosti r od osy magnetického pole. Vypočtěte E pro $r = 5{,}2\,\mathrm{cm}$.

ŘEŠENÍ: Závislost $E(r)$ můžeme najít, užijeme-li Faradayův zákon ve tvaru rov. (31.22) pro uzavřenou integrační křivku tvaru kružnice o poloměru r (obr. 31.14b). Ze symetrie jsme usoudili, že E na obr. 31.14b má směr tečny k uvažované kružnici v kterémkoli jejím bodě. Element $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ je tečný ke kružnici a orientován souhlasně s $\boldsymbol{E}$, takže skalární součin $\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ v rov. (31.22) je roven $E\,\mathrm{d}s$ ve všech bodech křivky. Ze symetrie můžeme též usoudit, že E má podél křivky stejnou hodnotu. Platí tedy

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint E\,\mathrm{d}s = E\oint \mathrm{d}s = \\ = E(2\pi r) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}. \qquad (31.25)$$

Podle rov. (31.3) je magnetický indukční tok plochou ohraničenou uvažovanou kružnicí

$$\Phi_B = BS\cos 180^\circ = -B(\pi r^2). \qquad (31.26)$$

Dosazením tohoto výsledku do rov. (31.25) zjistíme, že

$$E(2\pi r) = (\pi r^2)\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},$$

odkud

$$E = \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (31.27)$$

Rov. (31.27) udává velikost elektrické intenzity v libovolném bodě pro $r < R$ (tj. uvnitř magnetického pole). Dosazením zadaných hodnot dostáváme, že velikost E pro $r = 5{,}2\,\mathrm{cm}$ je

$$E = \frac{(5{,}2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})}{2}(0{,}13\,\mathrm{T\cdot s^{-1}}) = \\ = 0{,}003\,4\,\mathrm{V\cdot m^{-1}} = 3{,}4\,\mathrm{mV\cdot m^{-1}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Najděte vztah pro velikost E intenzity indukovaného elektrického pole v bodech vně magnetického pole. Vypočtěte E pro $r = 12{,}5\,\mathrm{cm}$.

ŘEŠENÍ: Postupem jako v (a) dostáváme znovu rovnici (31.25). Magnetický indukční tok však nyní prochází jen plochou πR^2, takže

$$\Phi_B = -BS = -B(\pi R^2). \qquad (31.28)$$

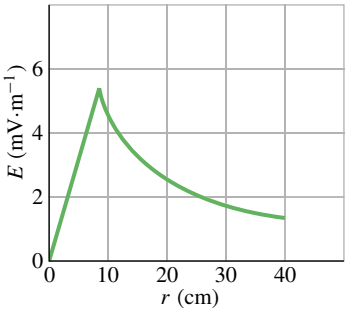
Dosazením do rov. (31.25) dostaneme

$$E = \frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (31.29)$$

Indukované elektrické pole tedy *není* rovno nule, třebaže dokonce ani kousek křivky (kružnice s poloměrem r větším než R) neleží v magnetickém poli, jehož změnou je elektrické pole indukováno! To se uplatňuje např. v činnosti transformátorů, jak uvidíme v čl. 31.11. Dosazením zadaných hodnot do rov. (31.29) dostáváme

$$E = \frac{(8{,}5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2}{2(12{,}5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})}(0{,}13\,\mathrm{T\cdot s^{-1}}) = \\ = 3{,}8\cdot 10^{-3}\,\mathrm{V\cdot m^{-1}} = 3{,}8\,\mathrm{mV\cdot m^{-1}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

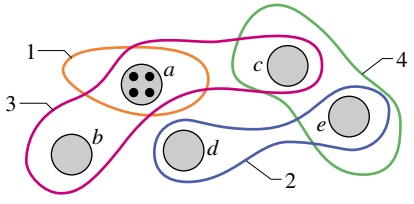
Rov. (31.27) a (31.29) dávají stejný výsledek pro $r = R$. Obr. 31.15 ukazuje závislost $E(r)$ podle těchto dvou rovnic.



Obr. 31.15 Příklad 31.5. Indukované elektrické pole $E(r)$.

KONTROLA 4: Obrázek ukazuje pět oblastí označených písmeny. Homogenní magnetické pole v nich buď vystupuje ze stránky k nám (např. v oblasti a), nebo do ní vstupuje. Obsahy oblastí jsou stejné a pole v nich vzrůstá stejným způsobem. Jsou také vyznačeny čtyři očíslované křivky, podél nichž $\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s}$ má udané hodnoty. Určete, zda magnetické pole v jednotlivých oblastech b až e směřuje od nás, nebo k nám.

Křivka:	1	2	3	4
$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s}$	1 V	2 V	3 V	0



31.7 CÍVKA A INDUKČNOST

V kap. 26 jsme viděli, že k vytvoření elektrického pole můžeme použít kondenzátor. Za základní typ kondenzátoru jsme považovali deskový kondenzátor. Podobně magnetické pole můžeme vytvořit **cívkou**. V obvodech ji znázorňujeme podle normy ISO ⌒⌒⌒, podle americké normy  . Jako základní typ cívky budeme uvažovat dlouhý solenoid — nebo konkrétněji, krátký úsek ve střední části dlouhého solenoidu, kde se prakticky neprojevuje rozptyl magnetického pole na jeho koncích.

Podobně jako tomu bylo v kap. 26.1 s kapacitorem a kondenzátorem, česká terminologie rozlišuje *cívku* jako reálnou součástku a *induktor* jako modelový prvek. I v tomto případě zde budeme ze stejných důvodů jako dříve užívat nadále jen běžné označení cívka.

Proud I, tekoucí jedním závitem cívky, vytváří uvnitř závitu indukční magnetický tok Φ_B, který je přímo úměrný proudu: $\Phi_B \sim I$. Všech N závitů cívky tedy vytvoří celkový tok $N\Phi_B$ rovněž přímo úměrný proudu; konstantu úměrnosti L ve vztahu $N\Phi_B = LI$ nazýváme (**vlastní**) **indukčnost** cívky. Je tedy

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \quad \text{(definice indukčnosti).} \qquad (31.30)$$

Její velikost závisí na tvaru a rozměrech cívky; není-li cívka ve vakuu, pak i na magnetických vlastnostech prostředí. Protože jednotkou magnetického indukčního toku je $\mathrm{T{\cdot}m^2}$, je jednotkou indukčnosti $\mathrm{T{\cdot}m^2{\cdot}A^{-1}}$. Nazýváme ji **henry** (H) po americkém fyziku Josephu Henryovi, spoluobjeviteli zákona elektromagnetické indukce, Faradayově současníku. Je tedy

$$1 \text{ henry} = 1\,\mathrm{H} = 1\,\mathrm{T{\cdot}m^2{\cdot}A^{-1}}. \qquad (31.31)$$

Ve zbytku této kapitoly předpokládáme, že žádné cívky, bez ohledu na jejich geometrické uspořádání, nemají ve své blízkosti magnetické materiály jako např. železo. Tyto materiály by indukčnost cívky výrazně ovlivnily.

Indukčnost solenoidu

Uvažujme dlouhý solenoid o průřezu S. Jaká indukčnost připadá na jednotku jeho délky (nikoli v blízkosti okrajů)?

Abychom mohli užít definiční rovnici indukčnosti (31.30), musíme vypočítat magnetický tok vytvořený proudem tekoucím vinutím solenoidu. Ten je pro úsek délky l vinutí solenoidu roven

$$N\Phi_B = (nl)(BS),$$

kde n je počet závitů na jednotku délky solenoidu a B je velikost magnetické indukce uvnitř solenoidu.

Velikost B je dána rov. (30.25),

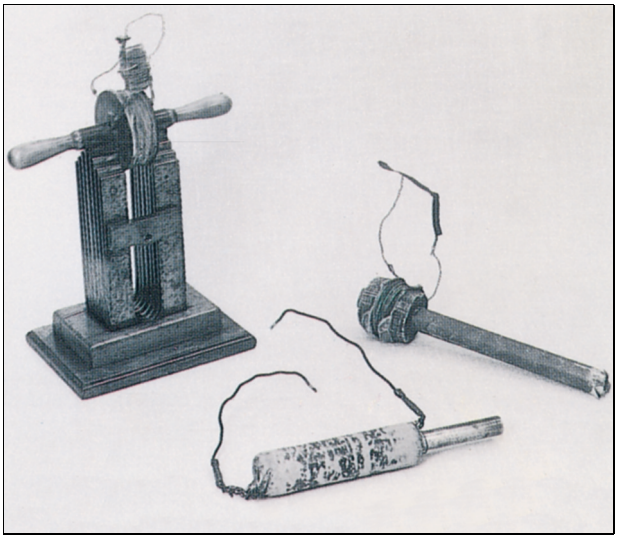
$$B = \mu_0 In,$$

takže z rov. (30.30) dostaneme

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{(nl)(BS)}{I} = \frac{(nl)(\mu_0 In)(S)}{I} = \\ = \mu_0 n^2 lS. \qquad (31.32)$$

Odtud pro indukčnost připadající na jednotku délky dlouhého solenoidu (dostatečně daleko od okrajů) plyne

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 S \quad \text{(solenoid).} \qquad (31.33)$$



Prosté cívky, s nimiž Michael Faraday objevil zákon elektromagnetické indukce. V oněch dobách nebyly v obchodě k dostání takové vymoženosti, jako je izolovaný drát. Traduje se, že Faraday izoloval své dráty tím, že je obaloval proužky ze spodničky své manželky.

Indukčnost, podobně jako kapacita, závisí pouze na geometrii cívky. Závislost na čtverci počtu závitů na jednotku délky je pochopitelná. Jestliže, řekněme, ztrojnásobíme n, ztrojnásobíme nejen počet závitů N, ale také tok $\Phi_B = BS = \mu_0 InS$ každým závitem a zvětšíme tak celkový tok $N\Phi_B$ devětkrát. Proto se zdevítinásobí indukčnost L.

Je-li solenoid mnohem delší než jeho poloměr, pak rov. (31.32) dobře aproximuje jeho indukčnost. Tato aproximace zanedbává rozptyl magnetického pole poblíž konců solenoidu právě tak, jako vztah pro kapacitu rovinného kondenzátoru ($C = \varepsilon_0 S/d$) zanedbává rozptyl elektrického pole poblíž okrajů desek kondenzátoru.

Z rov. (31.32) plyne, že μ_0 můžeme vyjádřit v jednotkách henry na metr

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}} = \\ = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}. \qquad (31.34)$$

PŘÍKLAD 31.6

Obr. 31.16 ukazuje příčný řez toroidem o N závitech obdélníkového průřezu. Jeho rozměry jsou vyznačeny.

(a) Jaká je jeho indukčnost L?

ŘEŠENÍ: Abychom mohli použít definici indukčnosti z rovnice (31.30), potřebujeme znát magnetický tok Φ_B způsobený proudem v toroidu. Z rov. (30.26) dostaneme velikost B magnetického pole v toroidu

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r}, \qquad (31.35)$$

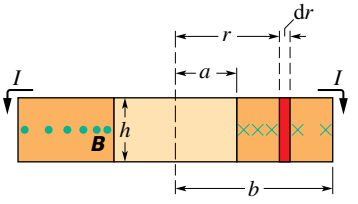
kde r je vzdálenost od osy toroidu. Tato rovnice platí bez ohledu na tvar nebo rozměry průřezu toroidu.

Protože pole B *není* v průřezu toroidu homogenní, nemůžeme k výpočtu toku užít rov. (31.4) ($\Phi_B = BS$), ale musíme užít rov. (31.3), tj.

$$\Phi_B = \int_{\mathscr{S}} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \qquad (31.36)$$

Magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ je všude kolmá na průřez, jak ukazuje obr. 31.16, a je tedy rovnoběžná s vektorem elementární plochy $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ průřezu. Skalární součin v rov. (31.36) dává tedy $B\,\mathrm{d}S$. Jako element plochy $\mathrm{d}S$ můžeme vzít plochu $h\,\mathrm{d}r$ proužku vyznačeného na obr. 31.16. Dosazením těchto veličin do rov. (31.36) a integrováním od $r = a$ do $r = b$ dostaneme

$$\Phi_B = \int_a^b Bh\,\mathrm{d}r = \int_a^b \frac{\mu_0 IN}{2\pi r} h\,\mathrm{d}r = \\ = \frac{\mu_0 INh}{2\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 INh}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$



Obr. 31.16 Příklad 31.6. Řez toroidem, ukazující proud ve vinutí a příslušné magnetické pole (viz též obr. 30.21). Nehomogennost magnetického pole toroidu je znázorněna nerovnoměrným rozložením teček a křížků.

Rov. (31.30) potom dává

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{N}{I}\frac{\mu_0 INh}{2\pi}\ln\frac{b}{a},$$

takže

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (31.37)$$

(b) Toroid na obr. 31.16 má $N = 1\,250$ závitů, $a = 52$ mm, $b = 95$ mm a $h = 13$ mm. Jakou má indukčnost?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (31.37)

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a} = \\ = \frac{(4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}})(1\,250)^2(13\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})}{2\pi}\ln\frac{(95\ \mathrm{mm})}{(52\ \mathrm{mm})} = \\ = 2{,}45\cdot 10^{-3}\ \mathrm{H} \doteq 2{,}5\ \mathrm{mH}. \quad \text{(Odpověď)}$$

31.8 VLASTNÍ INDUKCE

Jsou-li dvě cívky blízko sebe, pak proud I tekoucí první cívkou vytváří magnetický tok Φ_B, který prochází — alespoň zčásti i druhou cívkou. Měníme-li tento tok tím, že měníme proud I, vzniká v druhé cívce (podle Faradayova zákona) indukované emn, jak jsme viděli již dříve. Avšak v první cívce vzniká indukované napětí také.

Indukované emn vzniká v každé cívce, v níž se elektrický proud mění.

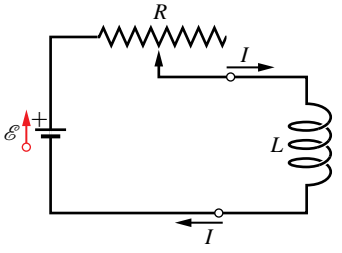
Tento jev (obr. 31.17) se nazývá **vlastní indukce** (dříve též **samoindukce**). Příslušné indukované emn lze opět vyjádřit Faradayovým zákonem elektromagnetické indukce.

Podle rov. (31.30) je

$$N\Phi_B = LI. \tag{31.38}$$

Z Faradayova zákona pak plyne, že emn je rovno

$$\mathscr{E}_L = -\frac{\mathrm{d}(N\Phi_B)}{\mathrm{d}t}. \tag{31.39}$$



Obr. 31.17 Posouváním kontaktu po rezistoru měníme proud v cívce. Když se proud cívkou *mění*, vzniká v ní indukované emn.

Z rov. (31.38) a (31.39) dostáváme

$$\mathscr{E}_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \quad \text{(indukované emn)}. \tag{31.40}$$

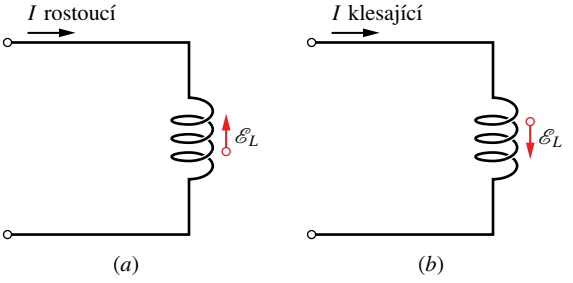
V každé cívce (např. v solenoidu nebo toroidu) tedy vzniká indukované emn, kdykoli se v ní mění proud. Sama velikost proudu na indukované emn nemá vliv; záleží jen na *rychlosti změny* proudu.

Směr indukovaného emn můžeme určit pomocí Lenzova zákona. Znaménko minus v rov. (31.40) značí — v souladu s Lenzovým zákonem — že indukované emn brání změně, která jej vyvolala.

Předpokládejme (obr. 31.18a), že zavedeme do cívky proud I a zvětšujeme jej rychlostí $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. Podle Lenzova zákona je toto zvětšování napětí onou změnou, proti níž bude indukovaný proud působit. Indukované emn proto má takový směr, že brání zvětšování proudu. Zmenšujeme-li naopak proud (obr. 31.18b), bude indukované napětí namířeno tak, že tomuto zmenšování brání, jak ukazuje obrázek.

V čl. 31.6 jsme viděli, že nemůžeme definovat elektrický potenciál pro elektrické pole, které je indukováno měnícím se magnetickým indukčním tokem. To znamená, že uvnitř cívky na obr. 31.17, v níž se indukuje emn měnícím se indukčním tokem, nemůžeme definovat elektrický potenciál. Potenciál však lze zavést v bodech v obvodu mimo tuto oblast (tedy tam, kde jsou elektrická pole vyvolána jen rozložením elektrických nábojů).

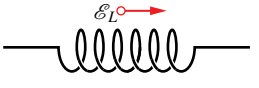
Kromě toho můžeme definovat rozdíl potenciálů (tj. napětí) U_L *na cívce* (tj. mezi jejími svorkami, o nichž předpokládáme, že jsou mimo oblast měnícího se magnetického toku). Je-li cívka *ideální* (její drát má zanedbatelný odpor), je velikost U_L rovna velikosti indukovaného emn: $\mathscr{E}_L$.



Obr. 31.18 (a) Proud I roste a indukuje tím v cívce emn v takovém směru, aby bránilo tomuto vzrůstu. Šipku představující $\mathscr{E}_L$ můžeme umístit podél cívky. (b) Proud I klesá a indukované emn má takový směr, že brání tomuto poklesu.

Má-li drát skutečné cívky odpor r, můžeme si ho představit oddělený od cívky (mimo oblast měnícího se indukčního toku). Skutečnou cívku pak vyjádříme jako seriové zapojení rezistoru o odporu r a ideální cívky indukující emn o velikosti $\mathscr{E}_L$. Podobně jako v případě reálné baterie s emn o velikosti $\mathscr{E}$ a s vnitřním odporem r, i zde se liší napětí na svorkách reálné cívky od jejího emn. Pokud nebude výslovně uvedeno jinak, budeme v dalším předpokládat, že cívky jsou ideální.

KONTROLA 5: Obrázek ukazuje elektromotorické napětí $\mathscr{E}_L$, indukované v cívce. Které z následujících variant mohou nastat? Proud cívkou je (a) stálý a teče



doprava; (b) stálý a teče doleva; (c) rostoucí a teče doprava; (d) klesající a teče doprava; (e) rostoucí a teče doleva; (f) klesající a teče doleva.

31.9 OBVODY *RL*

V čl. 28.8 jsme viděli, že připojíme-li náhle emn o hodnotě $\mathscr{E}$ k sériovému obvodu s odporem R a kapacitou C, nevzroste náboj Q kondenzátoru okamžitě na koncovou, ustálenou hodnotu $Q_0 = C\mathscr{E}$, ale blíží se k ní exponenciálně podle vztahu

$$Q = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/\tau_C}). \qquad (31.41)$$

Rychlost, s níž náboj vzrůstá, je určena časovou konstantou τ_C obvodu RC, pro níž platí

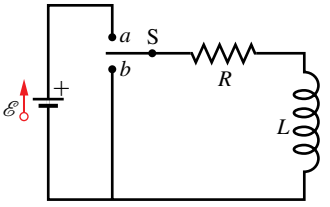
$$\tau_C = RC. \qquad (31.42)$$

Z rov. (28.36) také víme, že vypneme-li v tomto obvodu náhle emn, neklesne náboj kondenzátoru okamžitě na nulu, ale blíží se k ní exponenciálně:

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau_C}. \qquad (31.43)$$

Vidíme, že časová konstanta τ_C charakterizuje rychlost klesání i narůstání náboje.

Obdobně se zpomalí růst nebo pokles proudu, jestliže zapneme nebo vypneme emn v jednoduchém obvodu s rezistorem R a cívkou L. Dáme-li přepínač S na obr. 31.19 např. do polohy a, začne vzrůstat proud procházející rezistorem. Kdyby v obvodu cívka nebyla, vzrostl by proud okamžitě na ustálenou hodnotu $\mathscr{E}/R$. Cívka však vytváří v obvodu indukované emn $\mathscr{E}_L$. To podle Lenzova zákona brání růstu proudu, což znamená, že má opačnou polaritu než má emn baterie. Proud rezistorem je tedy určen dvěma emn: konstantním $\mathscr{E}$ baterie a proměnným $\mathscr{E}_L = -L\,dI/dt$, vzniklým elektromagnetickou indukcí v cívce. Dokud vzniká $\mathscr{E}_L$, je proud rezistorem (a tedy celým obvodem) menší než $\mathscr{E}/R$.



Obr. 31.19 Obvod RL. Když dáme přepínač S do polohy a, proud roste, až dosáhne mezní hodnoty $\mathscr{E}/R$.

Proud roste stále povlovněji, takže i velikost indukovaného emn, která je úměrná dI/dt, se zmenšuje. Proud v obvodu se proto blíží hodnotě $\mathscr{E}/R$ asymptoticky.

Tento výsledek můžeme vyjádřit takto:

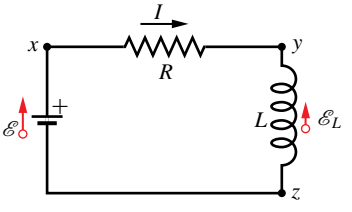
Cívka zpočátku brání změnám protékajícího proudu. Později, v ustáleném stavu, se chová jako obyčejný vodič.

Nyní rozeberme situaci kvantitativně. Při zapnutí přepínače S na obr. 31.19 do polohy a je obvod ekvivalentní obvodu na obr. 31.20. Použijme smyčkové pravidlo pro součet napětí v obvodu (2. Kirchhoffův zákon). Začněme v bodě x na obr. 31.20 a postupujme podél obvodu ve směru otáčení hodinových ručiček. Pro vyznačený směr proudu I bude mít bod x vyšší potenciál než bod y, což znamená, že se při přechodu změnil potenciál o $-IR$. Bod y má vyšší potenciál než bod z, protože při rostoucím proudu brání indukované napětí tomuto růstu, a má proto směr vyznačený na obrázku. Když tedy přecházíme podél cívky z bodu y do bodu z, změní se potenciál o $\mathscr{E}_L = -L\,dI/dt$. Při průchodu baterií zaznamenáváme nárůst potenciálu o $+\mathscr{E}$. Smyčkové pravidlo tedy dává

$$-IR - L\frac{dI}{dt} + \mathscr{E} = 0,$$

takže

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \mathscr{E} \quad \text{(obvod } RL\text{)}. \qquad (31.44)$$



Obr. 31.20 Obvod na obr. 31.19 s přepínačem v poloze a. Použijeme smyčkové pravidlo pro součet napětí v obvodu. Začneme v bodě x a postupujeme ve směru otáčení hodinových ručiček.

Rov. (31.44) je diferenciální rovnice, obsahující hledanou funkci $I(t)$ a její první derivaci dI/dt. Řešit tuto rovnici zmanená najít funkci $I(t)$, která splňuje tuto rovnici a vyhovuje také počáteční podmínce $I(0) = 0$.

Rov. (31.44) a její počáteční podmínka mají stejný tvar jako rov. (28.29) pro obvod RC, jestliže I nahradíme Q, L nahradíme R a R nahradíme $1/C$. Řešení rov. (31.44) musí tedy mít tvar rov. (28.30) s uvedenou záměnou veličin. Toto řešení je

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}), \qquad (31.45)$$

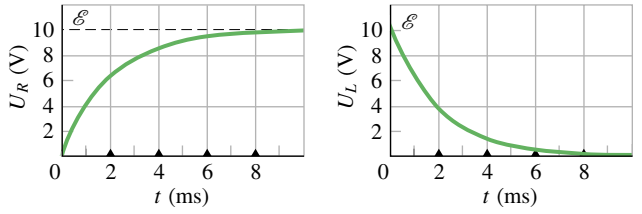
což můžeme zapsat ve tvaru

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) \quad \text{(růst proudu)}, \qquad (31.46)$$

v němž τ_L je **časová konstanta** obvodu RL určená vztahem

$$\tau_L = \frac{L}{R} \quad \text{(časová konstanta).} \qquad (31.47)$$

Obr. 31.21 ukazuje, jak se mění s časem napětí $U_R = IR$ na rezistoru a napětí $U_L = L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ na cívce pro určité hodnoty $\mathscr{E}$, L a R. Srovnejte pečlivě tento obrázek s odpovídajícím obrázkem pro obvod RC (obr. 28.14).



Obr. 31.21 Časový průběh (a) U_R, tj. napětí na rezistoru v obvodu na obr. 31.20, a (b) U_L, tj. napětí na cívce v témže obvodu. Malé trojúhelníky vyznačují násobky časové konstanty $\tau_L = L/R$. Obrázek je vynesen pro $R = 2\,000\,\Omega$, $L = 4{,}0\,\mathrm{H}$ a $\mathscr{E} = 10\,\mathrm{V}$.

Ukážeme, že veličina $\tau_L = L/R$ má rozměr času:

$$1\frac{\mathrm{H}}{\Omega} = 1\frac{\mathrm{H}}{\Omega}\left(\frac{1\,\mathrm{V{\cdot}s}}{1\,\mathrm{H{\cdot}A}}\right)\left(\frac{1\,\Omega{\cdot}\mathrm{A}}{1\,\mathrm{V}}\right) = 1\,\mathrm{s}.$$

První veličina v závorkách je převodní koeficient odvozený z rov. (31.40) a druhá je převodní koeficient odvozený ze vztahu $U = IR$.

Fyzikální význam časové konstanty vyplývá z rovnice (31.46). Položíme-li v této rovnici $t = \tau_L = L/R$, redukuje se na tvar

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - \mathrm{e}^{-1}) \doteq 0{,}63\frac{\mathscr{E}}{R}.$$

Časová konstanta τ_L je tedy doba, za niž proud v obvodu dosáhne o $1/\mathrm{e}$ (tj. asi o 37 %) nižší hodnotu, než je koncová ustálená hodnota $\mathscr{E}/R$. (Je to tedy doba, za niž dosáhne asi 63 % této ustálené hodnoty.) Protože je napětí U_R na rezistoru úměrné proudu I, má časová závislost rostoucího proudu stejný tvar jako závislost U_R vynesená na obr. 31.21a.

Ponechme přepínač S na obr. 31.19 dosti dlouho v poloze a, aby proud nabyl ustálené hodnoty $\mathscr{E}/R$, a pak ho náhle přepněme do polohy b. Tím vyřadíme baterii z obvodu. (Předpokládejme, že máme přepínač typu *make-before-break-switch*, který během přepojování z a do b se *nejprve* propojí s b — v tu chvilku jsou tedy také propojeny body a a b navzájem — a teprve *potom* se odpojí od a.)

Proud v rezistoru nepoklesne na nulu skokem, ale plynule. Diferenciální rovnici, která tento pokles popisuje, dostaneme z rov. (31.44) dosazením $\mathscr{E} = 0$

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = 0. \qquad (31.48)$$

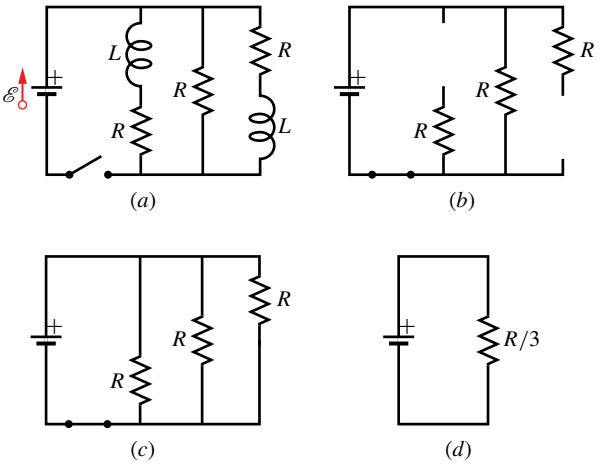
Podle analogie s rov. (28.35) a (28.36) má řešení této diferenciální rovnice při splnění počáteční podmínky $I(0) = I_0 = \mathscr{E}/R$ tvar

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau_L} = I_0\mathrm{e}^{-t/\tau_L} \quad \text{(pokles proudu).} \qquad (31.49)$$

Vidíme, že v obvodu RL jak růst proudu (rov. (31.46)), tak jeho pokles (rov. (31.49)) je charakterizován stejnou časovou konstantou τ_L.

PŘÍKLAD 31.7

Obr. 31.22a ukazuje obvod se třemi stejnými rezistory o odporu $R = 9{,}0\,\Omega$, dvěma stejnými cívkami o indukčnosti $L = 2{,}0\,\mathrm{mH}$ a ideální baterií o $\mathscr{E} = 18\,\mathrm{V}$.



Obr. 31.22 Příklad 31.7. (a) Několikasmyčkový obvod RL, spínač je vypnut. (b) Ekvivalentní obvod okamžitě po zapnutí spínače. (c) Ekvivalentní obvod delší dobu poté. (d) Jednosmyčkový obvod ekvivalentní obvodu (c).

(a) Jaký proud I teče baterií okamžitě po sepnutí spínače?

ŘEŠENÍ: Protože proud každou z cívek je před zapnutím nulový, je také nulový okamžitě po zapnutí. Okamžitě po zapnutí se tedy cívky chovají jako přerušené dráty, jak je ukázáno na obr. 31.22b. Tím dostáváme jednosmyčkový obvod, pro nějž pravidlo pro součet napětí dává

$$\mathscr{E} - IR = 0.$$

Dosazením zadaných hodnot dostáváme

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{(18\,\mathrm{V})}{(9{,}0\,\Omega)} = 2{,}0\,\mathrm{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaký proud I teče baterií dlouho po sepnutí spínače?

ŘEŠENÍ: Dlouho po sepnutí ($t \gg \tau_L$) dosáhnou proudy v obvodu svých ustálených hodnot. Tehdy se cívky chovají jako obyčejné vodiče, jak ukazuje obr. 31.22c. Máme pak obvod se třemi paralelně zapojenými rezistory; podle rov. (28.20) je toto zapojení ekvivalentní rezistoru $R_\mathrm{p} = R/3 = (9{,}0\,\Omega)/3 = 3{,}0\,\Omega$. Ekvivalentní obvod na obr. 31.22d potom splňuje rovnici $\mathscr{E} - I R_\mathrm{p} = 0$ neboli

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_\mathrm{p}} = \frac{(18\,\mathrm{V})}{(3{,}0\,\Omega)} = 6{,}0\,\mathrm{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 31.8

Solenoid má indukčnost 53 mH a odpor 0,37 Ω. Za jak dlouho po připojení k baterii vzroste proud na polovinu své koncové ustálené hodnoty?

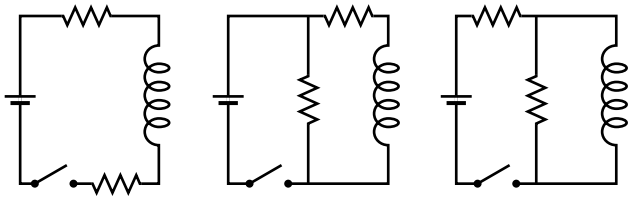
ŘEŠENÍ: Ustálené hodnoty dosáhne proud pro $t \to \infty$; podle rov. (31.46) je tato hodnota $\mathscr{E}/R$. Pro poloviční hodnotu proudu a hledaný čas t_0 tato rovnice dává

$$\frac{1}{2}\frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t_0/\tau_L}).$$

Vykrátíme $\mathscr{E}/R$, osamostatníme exponenciální výraz, obě strany zlogaritmujeme. Tak dostaneme

$$t_0 = \tau_L \ln 2 = \frac{L}{R}\ln 2 = \frac{(53\cdot 10^{-3}\,\mathrm{H})}{(0{,}37\,\Omega)}\ln 2 = 0{,}10\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 6: Obrázek ukazuje tři obvody se stejnými bateriemi, cívkami a rezistory. Seřaďte v sestupném pořadí obvody podle velikosti proudu baterií (a) okamžitě po zapnutí vypínače, (b) za dlouho poté.



(1) (2) (3)

31.10 ENERGIE MAGNETICKÉHO POLE

Odtahujeme-li od sebe opačné náboje, roste jejich elektrická potenciální energie a o ní už víme, že se hromadí v elektrickém poli těchto nábojů. Můžeme ji dostat z pole zpět, necháme-li náboje přiblížit se zpátky k sobě.

O energii nahromaděné v magnetickém poli můžeme uvažovat stejným způsobem. Například dva dlouhé rovnoběžné dráty protékané proudy stejného směru se přitahují a musíme vykonat práci, abychom je odtáhli od sebe. Tím nahromadíme energii v magnetickém poli těchto proudů. Tuto energii můžeme kdykoliv dostat zpět, přesunou-li se dráty zpět do původních poloh.

Kvantitativní výraz pro energii nahromaděnou v magnetickém poli odvodíme, uvážíme-li znovu obr. 31.20, který ukazuje zdroj emn připojený k rezistoru R a cívce L. Rov. (31.44), tj.

$$\mathscr{E} = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR, \qquad (31.50)$$

je diferenciální rovnice, popisující růst proudu v tomto obvodu. Zdůrazněme, že tato rovnice plyne bezprostředně z pravidla pro součet napětí v obvodu; toto pravidlo zase vyjadřuje zákon zachování energie pro jednoduchý obvod. Násobíme-li obě strany rov. (31.50) veličinou I, dostaneme rovnici

$$\mathscr{E}I = LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + I^2R, \qquad (31.51)$$

která má tento fyzikální výklad v pojmech práce a energie:

1. Projde-li náboj $\mathrm{d}Q$ baterií s emn $\mathscr{E}$ za dobu $\mathrm{d}t$, vykoná baterie na náboji práci $\mathscr{E}\,\mathrm{d}Q$. Výkon, s nímž koná baterie práci, je $\mathscr{E}\,\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ neboli $\mathscr{E}I$. Levá strana rov. (31.51) tedy představuje výkon, s jakým dodáváme energii zdrojem emn do zbytku obvodu.

2. Druhý člen na pravé straně rov. (31.51) představuje rychlost disipace energie v rezistoru, tj. tepelný výkon rezistoru.

3. Energie, která není disipována, se v souhlase se zákonem zachování energie hromadí v magnetickém poli cívky. Protože rov. (31.51) vyjadřuje zachování energie, vyjadřuje prostřední člen rov. (31.51) rychlost $\mathrm{d}E_\mathrm{mg}/\mathrm{d}t$ hromadění energie v magnetickém poli, takže

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{mg}}{\mathrm{d}t} = LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \qquad (31.52)$$

Tuto rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$\mathrm{d}E_\mathrm{mg} = LI\,\mathrm{d}I.$$

Integrací dostáváme

$$\int_0^{E_{mg}} \mathrm{d}E'_{mg} = \int_0^I LI'\,\mathrm{d}I'$$

neboli (pro libovolně zvolené I)

$$E_{mg} = \tfrac{1}{2}LI^2 \quad \text{(magnetická energie cívky).} \qquad (31.53)$$

Vztah (31.53) představuje celkovou magnetickou energii cívky, tj. energii magnetického pole vytvořeného cívkou, kterou teče proud I. Všimněme si podobnosti mezi tímto výrazem a výrazem (26.21) pro elektrickou energii kondenzátoru, tj. elektrického pole vytvořeného kondenzátorem o kapacitě C s nábojem Q:

$$E_{el} = \frac{Q^2}{2C}. \qquad (31.54)$$

PŘÍKLAD 31.9

Cívka má indukčnost 53 mH a odpor 0,35 Ω.

(a) Cívku připojíme ke zdroji emn $\mathscr{E} = 12$ V. Kolik energie se nahromadí v magnetickém poli, když proud dosáhne ustálené hodnoty (tj. pro $t \to \infty$, prakticky pro $t \gg \tau_L$)?

ŘEŠENÍ: Nahromaděná energie je vyjádřena rov. (31.53)

$$E_{mg} = \tfrac{1}{2}LI^2.$$

Ke stanovení energie v ustáleném stavu musíme do tohoto výrazu dosadit ustálený proud. Ten je podle rov. (31.46) roven

$$I_\infty = I(t \to \infty) = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{(12\,\mathrm{V})}{(0{,}35\,\Omega)} = 34{,}3\,\mathrm{A}.$$

Dosazením dostáváme

$$E_{mg_\infty} = \tfrac{1}{2}LI_\infty^2 = (\tfrac{1}{2})(53{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{H})(34{,}3\,\mathrm{A})^2 = \\ = 31\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Po jaké době (vyjádřené jako násobek časové konstanty) se v magnetickém poli nahromadí polovina ustálené hodnoty energie magnetického pole?

ŘEŠENÍ: Otázka zní, za jakou dobu t bude platit vztah

$$E_{mg} = \tfrac{1}{2}E_{mg_\infty}.$$

Rov. (31.53) umožňuje přepsat tuto podmínku do tvaru

$$\tfrac{1}{2}LI^2 = (\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{2}LI_\infty^2$$

a odtud

$$I = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) I_\infty.$$

Přitom I plyne z rov. (31.46) a $I_\infty = \mathscr{E}/R$. Proto

$$\frac{\mathscr{E}}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_L}) = \frac{\mathscr{E}}{R\sqrt{2}}.$$

Zkrácením $\mathscr{E}/R$ a úpravou dostáváme

$$\mathrm{e}^{-t/\tau_L} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}293,$$

což dává

$$\frac{t}{\tau_L} = -\ln 0{,}293 = 1{,}23$$

a odtud

$$t \doteq 1{,}2\tau_L. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Hromaděná energie tedy dosáhne poloviny své ustálené hodnoty za dobu $1{,}2\tau_L$.

PŘÍKLAD 31.10

Cívka o indukčnosti 3,56 H je zapojena v sérii s rezistorem 12,8 Ω a k tomuto obvodu RL je náhle připojeno emn 3,24 V.

(a) Jaký příkon P je dodáván baterií do obvodu v čase τ_L po připojení?

ŘEŠENÍ: Proud v obvodu je dán rov. (31.46)

$$I(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_L}),$$

odkud

$$I = \frac{(3{,}24\,\mathrm{V})}{(12{,}8\,\Omega)}(1 - \mathrm{e}^{-1}) = 0{,}160\,0\,\mathrm{A}.$$

Příkon dodávaný baterií je pak dán rov. (27.21), kde roli U hraje $\mathscr{E}$. V okamžiku $t = \tau_L$ je tedy

$$P = \mathscr{E}I = (3{,}24\,\mathrm{V})(0{,}160\,0\,\mathrm{A}) = \\ = 0{,}518\,4\,\mathrm{W} \doteq 518\,\mathrm{mW}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaký je tepelný výkon rezistoru v tomtéž okamžiku?

ŘEŠENÍ: Tepelný výkon je vyjádřen rov. (27.22). Pro $t = \tau_L$ dostáváme

$$P_R = I^2(\tau_L){\cdot}R = (0{,}160\,0\,\mathrm{A})^2(12{,}8\,\Omega) = \\ = 0{,}327\,7\,\mathrm{W} \doteq 328\,\mathrm{mW}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) S jakým výkonem se hromadí energie v magnetickém poli v tomtéž okamžiku?

ŘEŠENÍ: Vyjdeme z rov. (31.52), vyžadující znalost $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. Derivace rov. (31.45) dává

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathscr{E}}{R}\frac{R}{L}(\mathrm{e}^{-Rt/L}) = \frac{\mathscr{E}}{L}(\mathrm{e}^{-t/\tau_L}).$$

Pro $t = \tau_L$ dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{(3{,}24\ \mathrm{V})}{(3{,}56\ \mathrm{H})}(\mathrm{e}^{-1}) = 0{,}334\,8\ \mathrm{A{\cdot}s^{-1}}.$$

Podle rov. (31.52) je hledaný výkon roven

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{mg}} &= \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{mg}}}{\mathrm{d}t} = LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \\ &= (3{,}56\ \mathrm{H})(0{,}160\,0\ \mathrm{A})(0{,}334\,8\ \mathrm{A{\cdot}s^{-1}}) = \\ &= 0{,}190\,7\ \mathrm{W} \doteq 191\ \mathrm{mW}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Všimněme si, že

$$P = P_R + P_{\mathrm{mg}},$$

jak vyžaduje zákon zachování energie.

31.11 HUSTOTA ENERGIE MAGNETICKÉHO POLE

Uvažujme dlouhý solenoid s průřezem o obsahu S. V něm budeme sledovat úsek délky l (ne blízko u krajů); ten vymezuje uvnitř solenoidu objem V o velikosti Sl. Protéká-li solenoidem proud I, vytvoří se uvnitř objemu V homogenní magnetické pole B; pole vně solenoidu je prakticky nulové.

Energie pole vytvořeného uvažovaným úsekem musí být zřejmě uložena v objemu V, a to rovnoměrně (díky homogenitě magnetického pole) s hustotou

$$w_{\mathrm{mg}} = \frac{E_{\mathrm{mg}}}{Sl}.$$

Protože však $E_{\mathrm{mg}} = \frac{1}{2}LI^2$, můžeme vyjádřit hustotu energie ve tvaru

$$w_{\mathrm{mg}} = \frac{LI^2}{2Sl} = \frac{L}{l}\frac{I^2}{2S}$$

a po dosazení za L/l z rov. (31.33)

$$w_{\mathrm{mg}} = \tfrac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2. \qquad (31.55)$$

Pomocí rov. (30.25) ($B = \mu_0 In$) můžeme konečně *hustotu energie* vyjádřit pomocí magnetické indukce:

$$w_{\mathrm{mg}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \quad \text{(hustota energie magnetického pole).} \qquad (31.56)$$

Tato rovnice udává hustotu energie všude, kde je magnetické pole $\boldsymbol{B}$. Ačkoliv jsme rov. (31.56) odvodili pro speciální případ pole v části solenoidu, platí pro všechna magnetická pole, jakkoli vytvořená. Rov. (31.56) je obdobou rov. (26.23)

$$w_{\mathrm{el}} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2, \qquad (31.57)$$

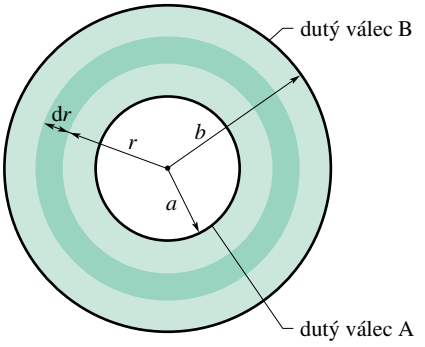
která udává (ve vakuu) hustotu energie elektrického pole. Všimněme si, že jak hustota w_{mg}, tak hustota w_{el} je úměrná druhé mocnině odpovídající veličiny, B nebo E, popisující pole.

KONTROLA 7: Tabulka udává počet závitů na jednotku délky, proud a průřez pro tři solenoidy. Seřaďte solenoidy sestupně podle hustoty energie magnetického pole uvnitř nich.

SOLENOID	ZÁVITY NA JEDNOTKU DÉLKY	PROUD	PLOCHA
a	$2n_1$	I_1	$2S_1$
b	n_1	$2I_1$	S_1
c	n_1	I_1	$6S_1$

PŘÍKLAD 31.11

Dlouhý koaxiální kabel (obr. 31.23) je vytvořen ze dvou tenkostěnných souosých vodivých dutých válců s poloměry a a b. Vnitřním válcem A teče stálý proud I, vnějším válcem B se tento proud vrací.



Obr. 31.23 Příklad 31.11. Průřez dlouhého koaxiálního kabelu sestávajícího ze dvou tenkostěnných vodivých dutých válců. Poloměr vnitřního válce je a, poloměr vnějšího válce je b.

(a) Vypočtěte energii nahromaděnou v magnetickém poli mezi válci na délce l kabelu.

ŘEŠENÍ: Uvažujme objem $\mathrm{d}V$ válcové vrstvy mezi dvěma válci o poloměrech r a $r + \mathrm{d}r$ a délce l. Energie $\mathrm{d}E_{\mathrm{mg}}$ obsažená v tomto objemu je

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{mg}} = w_{\mathrm{mg}}\,\mathrm{d}V,$$

kde w_{mg} (hustota energie, tj. energie připadající na jednotkový objem) podle rov. (31.56) je $B^2/(2\mu_0)$. Velikost B magnetické indukce jako funkci r dostaneme z Ampérova zákona

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I,$$

kde integrujeme po kružnici o poloměru r na obr. 31.23. Tak dostaneme

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 I,$$

odkud

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Hustota energie mezi válci pak je

$$w_{mg} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Objem $\mathrm{d}V$ uvažované vrstvy je $(2\pi rl)(\mathrm{d}r)$, takže energie $\mathrm{d}E_{mg}$ v ní obsažená je

$$\mathrm{d}E_{mg} = w_{mg}\,\mathrm{d}V = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}(2\pi rl)(\mathrm{d}r) = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Energii nahromaděnou v prostoru mezi válci koaxiálního kabelu dostaneme integrací předchozího výrazu:

$$E_{mg} = \int \mathrm{d}E_{mg} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \\ = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{b}{a}. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (31.58)$$

Vně vnějšího válce a uvnitř vnitřního válce se nehromadí žádná energie, protože v obou těchto prostorách je magnetické pole nulové, jak můžeme snadno ukázat pomocí Ampérova zákona.

(b) Jaká energie se nahromadí v kabelu jednotkové délky, když $a = 1{,}2\,\mathrm{mm}$, $b = 3{,}5\,\mathrm{mm}$ a $I = 2{,}7\,\mathrm{A}$?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (31.58) máme

$$\frac{E_{mg}}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a} = \\ = \frac{(4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}})(2{,}7\,\mathrm{A})^2}{4\pi}\ln\frac{(3{,}5\,\mathrm{mm})}{(1{,}2\,\mathrm{mm})} = \\ = 7{,}8\cdot 10^{-7}\,\mathrm{J\cdot m^{-1}} = 780\,\mathrm{nJ\cdot m^{-1}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

31.12 VZÁJEMNÁ INDUKČNOST

V tomto článku se vrátíme k případu dvou vzájemně na sebe působících cívek, se kterým jsme se setkali v čl. 31.2. Pojednáme o něm poněkud podrobněji. Jsou-li dvě cívky blízko sebe a jednou z nich protéká stálý proud I, prochází druhou z nich magnetický tok Φ_B, jak jsme viděli na obr. 31.2. Měníme-li proud I, vzniká v druhé cívce emn $\mathscr{E}$ dané Faradayovým zákonem; tento děj jsme nazvali *elektromagnetická indukce*. V tomto případě mluvíme o **vzájemné indukci**, protože jde o vzájemné působení cívek, na rozdíl od **vlastní indukce**, týkající se jediné cívky.

Podívejme se na vzájemnou indukci kvantitativně. Obr. 31.24a ukazuje dvě blízko sebe umístěné kruhové, hustě navinuté cívky se společnou osou. V cívce 1 teče proud I_1 z baterie ve vnějším obvodu. Tento proud vytváří magnetické pole, znázorněné na obrázku indukčními čarami pole $\boldsymbol{B}_1$. Cívka 2 je připojena k citlivému měřidlu, ale není připojena k baterii. Magnetický indukční tok Φ_{21} (tok cívkou 2 vyvolaný proudem cívky 1) prochází N_2 závity cívky 2.

Magnetický indukční tok procházející cívkou 2 (tedy $N_2\Phi_{21}$) je přímo úměrný proudu v cívce 1 (tedy I_1). Proto $N_2\Phi_{21} = M_{21}I_1$, kde konstanta úměrnosti M_{21} vyjadřuje **vzájemnou indukčnost** cívky 2 vzhledem k cívce 1. Platí tedy

$$M_{21} = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}. \qquad (31.59)$$

Porovnejte tuto definici s rov. (31.30), tj. $L = N\Phi/I$, definující vlastní indukčnost cívky. Rov. (31.59) můžeme přepsat do tvaru

$$M_{21}I_1 = N_2\Phi_{21}.$$

Změníme-li vnějším zásahem proud I_1, pak

$$M_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = N_2\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t}.$$

Pravá strana této rovnice je podle Faradayova zákona rovna záporně vzatému emn $\mathscr{E}_2$, indukovanému v cívce 2 proměnným proudem v cívce 1. Je tedy

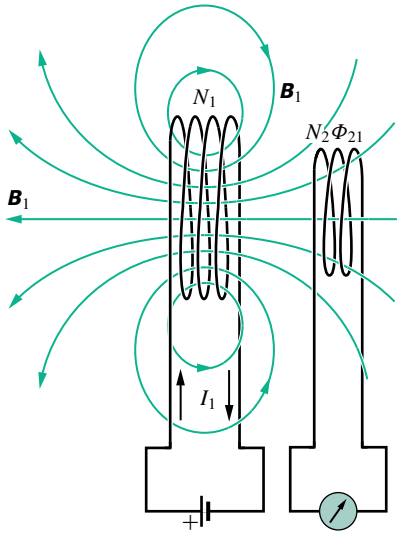
$$\mathscr{E}_2 = -M_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}, \qquad (31.60)$$

což je analogické rov. (31.40) pro vlastní indukci $\mathscr{E} = -L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$.

Zaměňme nyní role cívek 1 a 2 podle obr. 31.24b. Připojme proto do obvodu cívky 2 baterii dodávající proud I_2. Ten vytváří v cívce 1 magnetický indukční tok Φ_{12}. Měníme-li proud I_2, dostaneme ze shora uvedeného důvodu

$$\mathscr{E}_1 = -M_{12}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}. \qquad (31.61)$$

Vidíme tedy, že emn indukované v jedné z cívek je úměrné rychlosti změny proudu v druhé z nich. Uvedeme bez důkazu, že konstanty úměrnosti M_{21} a M_{12} jsou stejné, takže



Obr. 31.24 Vzájemná indukce. (a) Mění-li se proud I_1 v cívce 1, indukuje se emn v cívce 2. (b) Mění-li se proud I_2 v cívce 2, indukuje se emn v cívce 1.

pořadí indexů lze zaměnit. (Toto tvrzení vůbec není samozřejmé.) Platí

$$M_{21} = M_{12} = M, \tag{31.62}$$

a proto rov. (31.60) a (31.61) můžeme zapsat ve tvarech

$$\mathscr{E}_2 = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{31.63}$$

a

$$\mathscr{E}_1 = -M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}. \tag{31.64}$$

Indukčnost je tedy vskutku vzájemná. Jednotka SI pro M (stejně jako pro L) je henry. Vzájemná indukčnost M závisí na tvaru, vzájemné poloze a orientaci obou cívek a na magnetických vlastnostech prostředí; může být kladná, záporná i nulová.

PŘÍKLAD 31.12

Na obr. 31.25 jsou dvě kruhové hustě vinuté souosé cívky ležící ve stejné rovině. Menší má poloměr R_2 a počet závitů N_2, větší má poloměr R_1 a počet závitů N_1.

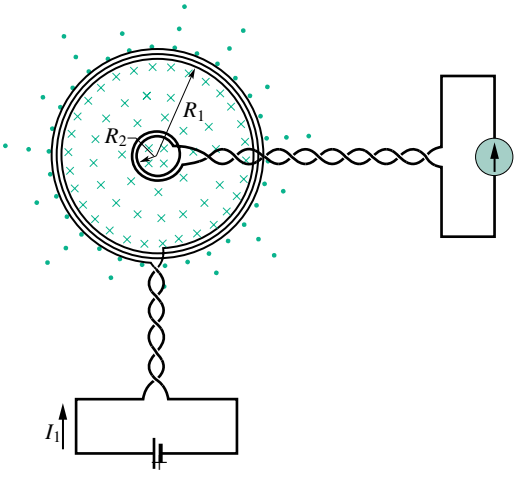
(a) Odvoďte výraz pro vzájemnou indukčnost M pro toto uspořádání cívek za předpokladu, že $R_1 \gg R_2$.

ŘEŠENÍ: Podle obr. 31.25 si představujeme, že větší cívkou poteče proud I_1, který vyvolá magnetické pole. Hodnota magnetické indukce B_1 ve středu této cívky je (podle rov. (30.28), pro $z = 0$ a po vynásobení N_1)

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2R_1}.$$

Pro $R_1 \gg R_2$ můžeme předpokládat, že ve všech bodech uvnitř malé cívky má magnetická indukce tutéž velikost B_1. Celkový tok menší cívkou je

$$N_2\Phi_{21} = N_2(B_1)(\pi R_2^2) = \frac{\pi\mu_0 N_1 N_2 R_2^2 I_1}{2R_1}.$$



Obr. 31.25 Příklad 31.12. Malá cívka je umístěna ve středu velké cívky. Vzájemnou indukčnost cívek můžeme určit, když do velké cívky pustíme proud I_1.

Z rov. (31.59) potom dostaneme

$$M = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\pi\mu_0 N_1 N_2 R_2^2}{2R_1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je hodnota M pro $N_1 = N_2 = 1\,200$ závitů, $R_2 = 1{,}1$ cm a $R_1 = 15$ cm?

ŘEŠENÍ: Výše uvedená rovnice dává

$$M = \frac{(\pi)(4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H{\cdot}m^{-1}})(1\,200)(1\,200)(0{,}011\ \mathrm{m})^2}{2(0{,}15\ \mathrm{m})} = 2{,}29{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{H} \doteq 2{,}3\ \mathrm{mH}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Zkusme obrátit role obou cívek uvažovaných na obr. 31.25, tj. pustit proud I_2 do menší cívky a pokusit se vypočítat M z rov. (31.59):

$$M = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2}.$$

Výpočet Φ_{12} (tok procházející větší cívkou, způsobený proudem v menší cívce) není jednoduchý. Kdybychom jej vypočítali (např. numericky na počítači), dostali bychom pro M přesně 2,3 mH, jako ve výše uvedeném výpočtu. To potvrzuje, že rov. (31.62), tj. $M_{12} = M_{21} = M$, opravdu platí.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Magnetický indukční tok

Magnetický indukční tok Φ_B plochou $\mathscr{S}$ v magnetickém poli $\boldsymbol{B}$ je definován vztahem

$$\Phi_B = \int_{\mathscr{S}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{31.3}$$

v němž se integruje přes uvažovanou plochu. Jednotkou magnetického indukčního toku v SI je weber, $1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{T{\cdot}m^2}$. Je-li pole $\boldsymbol{B}$ kolmé k uvažované ploše a je-li na ní homogenní, zjednoduší se rov. (31.3) na

$$\Phi_B = BS \qquad (\boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{S},\ \text{pole } \boldsymbol{B} \text{ je homogenní}). \tag{31.4}$$

Faradayův zákon elektromagnetické indukce

Mění-li se v čase magnetický indukční tok Φ_B plochou ohraničenou uzavřenou vodivou smyčkou, vytvoří se ve smyčce emn a proud; tento děj se nazývá elektromagnetická *indukce*. Indukované emn má hodnotu

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \quad \text{(Faradayův indukční zákon)}. \tag{31.6}$$

Nahradíme-li smyčku hustě navinutou cívkou o N závitech, pak indukované emn je

$$\mathscr{E} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}. \tag{31.7}$$

Lenzův zákon (též Lenzovo pravidlo)

Indukovaný proud má takový směr, že jeho magnetické pole brání té změně magnetického pole, která proud vyvolává.

Indukované elektrické pole

Indukované emn je vytvořeno měnícím se magnetickým indukčním tokem, a to i když smyčka, uvnitř níž se tok mění, není skutečný vodič, ale jen myšlená uzavřená křivka. Měnící se indukční tok indukuje elektrické pole $\boldsymbol{E}$ v každém bodě takové křivky, a to bez ohledu na to, zda se tento bod sám nachází v magnetickém poli či nikoli (podstatné je, že se mění tok magnetického pole plochou, na jejímž obvodu bod leží). Indukované emn se váže k $\boldsymbol{E}$ vztahem

$$\mathscr{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{31.21}$$

kde se integruje podél myšlené uzavřené křivky. S užitím rov. (31.21) můžeme Faradayův zákon psát v nejobecnějším tvaru

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \quad \text{(Faradayův zákon)}. \tag{31.22}$$

Podstata tohoto zákona je, že *měnícím se magnetickým indukčním tokem* $\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$ *se indukuje elektrické pole* $\boldsymbol{E}$.

Cívka a indukčnost

Cívka (induktor) je zařízení, kterým můžeme vytvořit magnetické pole v jisté oblasti. Teče-li elektrický proud každým z N závitů cívky, sčítá se jejich magnetický tok Φ_B. Indukčnost L cívky pak je

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \quad \text{(definice indukčnosti)}, \tag{31.30}$$

Jednotkou indukčnosti v SI je **henry** (H):

$$1\ \mathrm{henry} = 1\ \mathrm{H} = 1\ \mathrm{T{\cdot}m^2{\cdot}A^{-1}}. \tag{31.31}$$

Indukčnost připadající na jednotku délky dlouhého solenoidu, který má průřez S a n závitů na jednotku délky (tj. v oblasti, kde už se neuplatní rozptyl na koncích), je

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 S \quad \text{(solenoid)}. \tag{31.33}$$

Vlastní indukce (samoindukce)

Mění-li se proud I v cívce s indukčností L, indukuje se v ní emn. Toto indukované emn je

$$\mathscr{E}_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{31.40}$$

Směr $\mathscr{E}_L$ najdeme pomocí Lenzova zákona: indukované emn brání změně, která jej vyvolává.

Sériový obvod RL

Připojíme-li konstantní emn do obvodu s rezistorem o odporu R a cívkou o indukčnosti L, pak proud roste do ustálené hodnoty $\mathscr{E}/R$ podle vztahu

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) \quad \text{(růst proudu)}, \tag{31.46}$$

kde $\tau_L = L/R$ určuje rychlost růstu proudu a nazývá se časová konstanta obvodu RL. Odpojíme-li zdroj konstantního emn, klesá proud z hodnoty I_0 k nule podle vztahu

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}e^{-t/\tau_L} = I_0 e^{-t/\tau_L} \quad \text{(pokles proudu)}. \tag{31.49}$$

Energie magnetického pole

Teče-li cívkou o indukčnosti L proud I, má vzniklé magnetické pole energii

$$E_{mg} = \tfrac{1}{2}LI^2 \quad \text{(magnetická energie cívky)}. \tag{31.53}$$

Je-li B velikost magnetické indukce v libovolném bodě, je hustota energie magnetického pole v tomto bodě rovna

$$w_{mg} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \quad \text{(hustota energie magnetického pole ve vakuu)}. \tag{31.56}$$

Vzájemná indukčnost

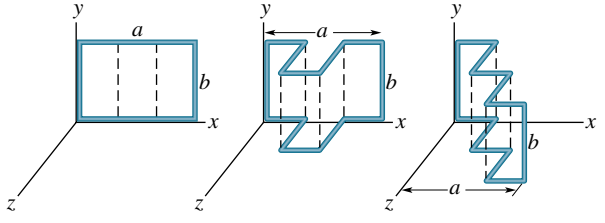
Jsou-li dvě cívky (označené 1 a 2) blízko sebe, pak proměnný proud v jedné z nich indukuje emn ve druhé cívce. Tato vzájemná indukce je vyjádřena vztahy

$$\mathscr{E}_2 = -M\frac{dI_1}{dt} \quad \text{a} \quad \mathscr{E}_1 = -M\frac{dI_2}{dt}, \tag{31.63, 31.64}$$

kde M (měřená v henry) je vzájemná indukčnost daného uspořádání cívek.

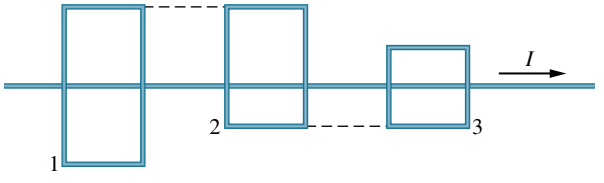
OTÁZKY

1. Na obr. 31.26 je vodivá pravoúhlá smyčka (1) délky a, výšky b ležící v rovině xy. Smyčky (2) a (3) jsou rovněž vodivé a stejných rozměrů v rovině xy jako smyčka (1), mají však úseky rovnoběžné s osou z. Každou z nich prochází stejně rychle vzrůstající homogenní magnetické pole. Seřaďte tyto tři smyčky v sestupném pořadí podle velikosti emn v nich indukovaného. Magnetické pole má směr osy (a) y, (b) z a (c) x.



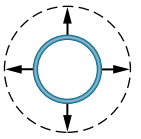
Obr. 31.26 Otázka 1

2. Na obr. 31.27 proud I teče dlouhým přímým vodičem podél tří pravoúhlých vodivých smyček (aniž se jich dotýká) s délkami stran L, $\frac{3}{2}L$ a $2L$. Smyčky jsou daleko od sebe, takže se vzájemně neovlivňují. Smyčky 1 a 3 leží symetricky podél dlouhého vodiče. Seřaďte smyčky v sestupném pořadí podle velikosti proudu v nich indukovaného, když proud I je (a) konstantní, (b) vzrůstající.



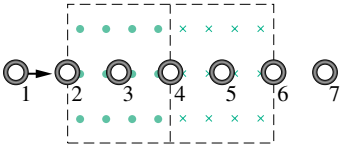
Obr. 31.27 Otázka 2

3. Vodič kruhového průřezu na obr. 31.28 se tepelně roztáhne v homogenním magnetickém poli a proud ve vodiči indukovaný teče ve směru otáčení hodinových ručiček. Směřuje magnetické pole od nás, nebo k nám?



Obr. 31.28 Otázka 3

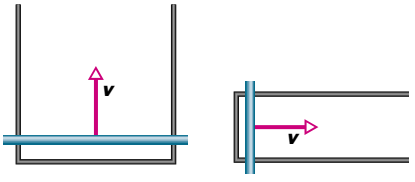
4. Na obr. 31.29 se pohybuje kruhová smyčka stálou rychlostí oblastmi, v nichž jsou homogenní magnetická pole stejné velikosti namířena do stránky nebo z ní ven. (Pole je nulové vně čárkované hranice). Ve kterých ze sedmi vyznačených poloh smyčky je indukované emn orientováno (a) ve směru otáčení hodinových ručiček, (b) proti jejich směru a (c) je nulové?



Obr. 31.29 Otázka 4

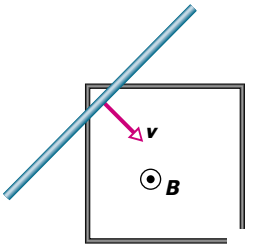
5. Obr. 31.30 ukazuje dva obvody, v nichž vodivé tyče klouzou stejně rychle ve stejném homogenním magnetickém poli podél vodičů tvaru U. Rovnoběžné úseky těchto vodičů mají vzdálenost $2L$ v obvodu (1) a L v obvodu (2). Indukovaný proud v obvodu (1) má směr proti otáčení hodinových ručiček.

(a) Směřuje magnetické pole od nás, nebo k nám? (b) Směřuje indukovaný proud v obvodu (2) po směru, nebo proti směru otáčení hodinových ručiček? (c) Je proud v obvodu (1) větší, menší, nebo stejný ve srovnání s proudem v obvodu (2)?



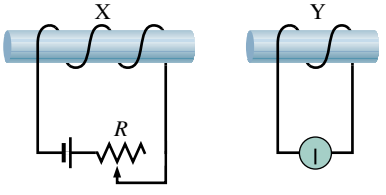
Obr. 31.30 Otázka 5

6. Na obr. 31.31 klouže vodivá tyč po vodiči tvaru neúplného čtverce a je s ním v elektrickém kontaktu. Čtverec je v homogenním magnetickém poli směřujícím kolmo k nám. (a) Teče během pohybu tyče indukovaný proud ve směru, nebo proti směru otáčení hodinových ručiček, nebo se jeho směr v půli cesty mění? (b) Je tento proud stálý, rostoucí, nebo napřed rostoucí a pak klesající?



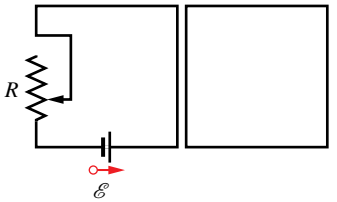
Obr. 31.31
Otázka 6

7. Obr. 31.32 ukazuje dvě cívky navinuté na nevodivých tyčích. Cívka X je připojena k baterii a rezistoru s proměnným odporem. Jaký je směr indukovaného proudu v měřidle připojeném k cívce Y, (a) když se cívka Y pohybuje k cívce X a (b) když se proud v cívce X zmenšuje, aniž se přitom mění polohy cívek?



Obr. 31.32
Otázka 7

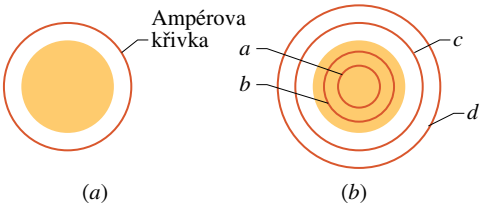
8. Zvětšujme rovnoměrně odpor R v levém obvodu na obrázku 31.33. Teče proud indukovaný ve smyčce v pravém obvodu po směru, nebo proti směru otáčení hodinových ručiček?



Obr. 31.33
Otázka 8

9. Obr. 31.34a ukazuje kruh, v němž vzrůstá magnetické pole směřující k nám, a s ním soustřednou kružnici, podél níž počítáme $\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s}$. Tabulka udává počáteční velikost magnetické indukce, přírůstek této velikosti a časový interval potřebný pro tento přírůstek ve třech situacích. Seřaďte tyto situace sestupně podle velikosti elektrického pole indukovaného podél kružnice.

SITUACE	POČÁTEČNÍ POLE	PŘÍRŮSTEK	DOBA
a	B_1	ΔB_1	Δt_1
b	$2B_1$	$\Delta B_1/2$	Δt_1
c	$B_1/4$	ΔB_1	$\Delta t_1/2$



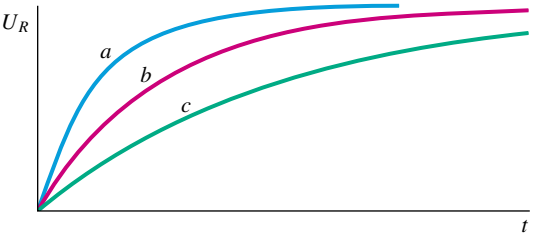
Obr. 31.34 Otázky 9 a 10

10. Obr. 31.34b ukazuje kruh, v němž klesá indukce homogenního magnetického pole směřujícího k nám. Jsou též zakresleny čtyři soustředné kružnice a, b, c. Seřaďte je sestupně podle velikosti $\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s}$ při integraci podél nich.

11. V následující tabulce jsou dány počty závitů na jednotku délky, proudy a obsahy průřezů pro tři stejně dlouhé solenoidy. Seřaďte tyto solenoidy v sestupném pořadí podle (a) jejich indukčnosti, (b) magnetického toku jedním závitem.

SOLENOID	ZÁVITY NA JEDNOTKU DÉLKY	PROUD	OBSAH PRŮŘEZU
1	$2n_1$	I_1	$2S_1$
2	n_1	$2I_1$	S_1
3	n_1	I_1	$4S_1$

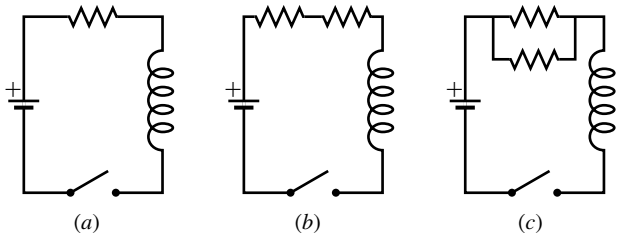
12. Obr. 31.35 ukazuje časový průběh napětí na rezistoru ve třech obvodech stejného typu jako na obr. 31.20. Obvody mají stejné odpory R a emn $\mathscr{E}$, ale liší se indukčností L. Seřaďte je sestupně podle velikosti L.



Obr. 31.35 Otázka 12

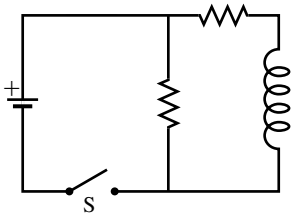
13. V obvodu na obr. 31.20 v určitém okamžiku poté, co proud začal narůstat, mají emn baterie $\mathscr{E}$ a napětí na rezistoru U_R tyto hodnoty: (a) 12 V a 3 V; (b) 24 V a 16 V; (c) 18 V a 10 V. Seřaďte tyto případy sestupně podle napětí na cívce v uvažovaném okamžiku.

14. Obr. 31.36 ukazuje tři obvody se stejnými bateriemi, cívkami a rezistory. Seřaďte obvody v sestupném pořadí podle doby potřebné k dosažení 50 % ustálené hodnoty proudu po zapojení spínače.



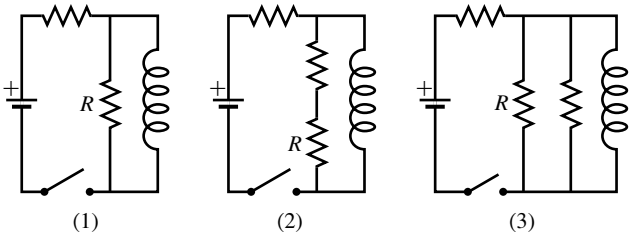
Obr. 31.36 Otázka 14

15. Obr. 31.37 ukazuje obvod se dvěma stejnými rezistory a cívkou. Teče prostředním rezistorem větší, menší, či stejný proud ve srovnání s proudem protékajícím druhým rezistorem (a) hned po zapnutí spínače S, (b) dlouho po zapnutí spínače, (c) hned po vypnutí spínače, (d) dlouho po vypnutí spínače.



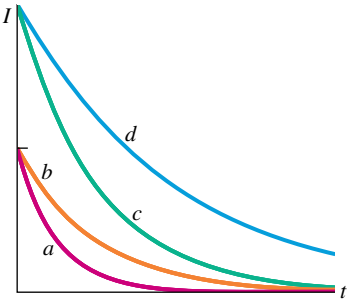
Obr. 31.37 Otázka 15

16. Obr. 31.38 ukazuje tři obvody se stejnými bateriemi, cívkami a rezistory. Seřaďte obvody v sestupném pořadí podle proudu procházejícího rezistorem R (a) dlouho po zapnutí spínače, (b) hned po vypnutí spínače, byl-li předtím dlouho zapnut, (c) dlouho po vypnutí.



Obr. 31.38 Otázka 16

17. Přepínač S na obr. 31.19 byl přepnut do polohy a na dlouhou dobu a pak přepnut do polohy b. Na obr. 31.39 je zachycen časový průběh proudu cívkou pro čtyři hodnoty odporu R a indukčnosti L: (1) R_0 a L_0; (2) $2R_0$ a L_0; (3) R_0 a $2L_0$ (4) $2R_0$ a $2L_0$. Které dvojice hodnot R a L odpovídají jednotlivým křivkám?



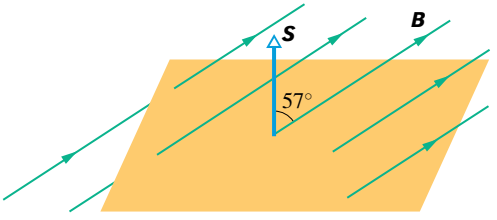
Obr. 31.39 Otázka 17

18. Na obr. 31.24 je proud cívkou 1 zadán takto: (1) $I_1 = 3\cos(4t)$, (2) $I_1 = 10\cos(t)$, (3) $I_1 = 5\cos(2t)$, kde I_1 je v ampérech a t v sekundách. Tyto tři případy seřaďte v sestupném pořadí podle velikosti (a) vzájemné indukčnosti cívek a (b) maximálního emn v cívce 2 vyvolaného proudem I_1.

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 31.3, 4 Faradayův zákon elektromagnetické indukce, Lenzův zákon

1C. V jistém místě na jižní polokouli má magnetické pole Země magnetickou indukci o velikosti $B = 42\,\mu\text{T}$ směřující vzhůru pod úhlem 57° od svislice. Vypočtěte tok vektoru $\boldsymbol{B}$ vodorovnou plochou obsahu $2{,}5\,\text{m}^2$, když vektor plochy $\boldsymbol{S}$ směřuje svisle vzhůru (obr. 31.40).



Obr. 31.40 Cvičení 1

2C. Uvnitř dlouhého solenoidu (n závitů na jednotku délky) je malá smyčka o ploše S protékaná proudem I. Osa smyčky je shodná s osou solenoidu. Proud solenoidem je dán vztahem $I = I_\text{m}\sin\omega t$. Určete emn indukované ve smyčce.

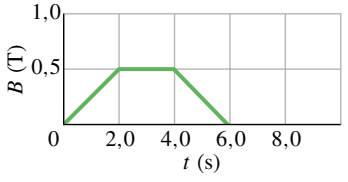
3C. Televizní anténa (UHF) tvaru kružnice má průměr 11 cm. Magnetická složka TV signálu je kolmá k ploše smyčky. V jistém okamžiku se její velikost mění rychlostí $0{,}16\,\text{T}\cdot\text{s}^{-1}$. Pole je homogenní. Jaké emn se indukuje v anténě?

4C. Homogenní magnetické pole $\boldsymbol{B}$ je kolmé k rovině kruhové vodivé smyčky poloměru r. Velikost magnetické indukce pole závisí na čase podle vztahu $B = B_0 e^{-t/\tau}$, kde B_0 a τ jsou konstanty. Určete emn indukované ve smyčce jako funkci času.

5C. V homogenním magnetickém poli umístíme rovinnou čtvercovou smyčku o straně 20 cm a odporu 20 mΩ tak, že magnetická indukce o velikosti $B = 2{,}0\,\text{T}$ je kolmá k rovině smyčky. Jestliže protáhneme smyčku tak, že se dvě protilehlé strany vzdálí a zbývající dvě přiblíží, zmenší se plocha smyčky. Za dobu $\Delta t = 0{,}20\,\text{s}$ zmenšíme plochu až na nulu. Jaké je

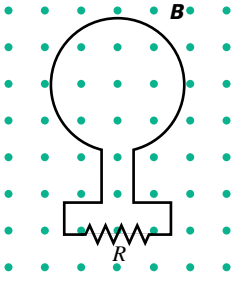
(a) průměrné indukované emn, (b) průměrný proud indukovaný ve smyčce během Δt?

6C. Magnetické pole ve vodivé smyčce o poloměru 12 cm a odporu 8,5 Ω se mění v čase podle obr. 31.41. Vypočtěte emn ve smyčce jako funkci času. Uvažujte časové intervaly (a) od $t = 0$ do $t = 2{,}0$ s; (b) od $t = 2{,}0$ s do $t = 4{,}0$ s; (c) od $t = 4{,}0$ s do $t = 6{,}0$ s. Homogenní magnetické pole je kolmé k rovině smyčky.



Obr. 31.41 Cvičení 6

7C. Magnetický indukční tok smyčkou na obr. 31.42 vzrůstá podle vztahu $\Phi_B = 6{,}0t^2 + 7{,}0t$, kde Φ_B je v mWb a čas t v sekundách. (a) Jaká je velikost emn indukovaného ve smyčce v čase $t = 2{,}0$ s? (b) Jaký je směr proudu v rezistoru R?

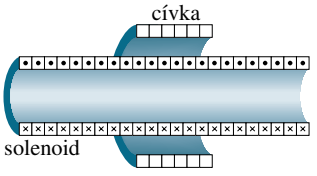


Obr. 31.42
Cvičení 7 a úloha 19

8C. Homogenní magnetické pole je kolmé k rovině kruhové smyčky o průměru 10 cm zhotovené z měděného drátu o průměru 2,5 mm. (a) Vypočtěte odpor drátu. (Viz tab. 27.1.) (b) Jakou rychlostí se musí měnit magnetické pole, aby se ve smyčce indukoval proud 10 A?

9Ú. Proud solenoidem z př. 31.1 se mění, ale nikoli tak, jak bylo uvedeno, nýbrž podle vztahu $I = 3{,}0t + 1{,}0t^2$, kde proud I je v A a čas t v sekundách. (a) Nakreslete závislost indukovaného emn na cívce v intervalu od $t = 0$ do $t = 4{,}0$ s. (b) Odpor cívky je 0,15 Ω. Jaký proud bude protékat cívkou v čase $t = 2{,}0$ s?

10Ú. Na obr. 31.43 je cívka o odporu 5,3 Ω se 120 závity a o poloměru 1,8 cm. Je umístěna *vně* solenoidu uvažovaného v př. 31.1. Jaký proud poteče cívkou, jestliže se proud solenoidem mění tak, jak bylo v př. 31.1 uvedeno?



Obr. 31.43 Úloha 10

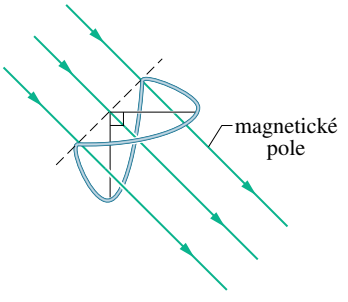
11Ú. Dlouhý solenoid o poloměru 25 mm má 100 závitů/cm. Jednoduchá vodivá smyčka o poloměru 5,0 cm obepíná solenoid a je s ním souosá. Za 10 ms proud solenoidem rovnoměrně poklesl z 1,0 A na 0,50 A. Jaké emn se indukuje ve smyčce?

12Ú. Odvoďte výraz pro indukční tok toroidem o N závitech protékaným proudem I. Vinutí toroidu má obdélníkový průřez, toroid má vnitřní poloměr a, vnější poloměr b a výšku h.

13Ú. Toroid o průřezu 5,00 cm^2 a vnitřním poloměru 15,0 cm má 500 závitů a je protékán proudem 0,800 A. Jaký je magnetický indukční tok jeho průřezem?

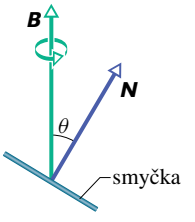
14Ú. Elastický vodivý materiál je napnut do kruhové smyčky o poloměru 12,0 cm. Je umístěn do homogenního magnetického pole o indukci 0,800 T tak, že pole je kolmé k rovině smyčky. Po uvolnění se smyčka smršťuje tak, že se její poloměr zkracuje rychlostí 75 cm·s^{-1}. Jaké emn je indukováno ve smyčce v tomto okamžiku?

15Ú. Uzavřená vodivá smyčka je složena ze dvou půlkružnic o poloměru 3,7 cm ležících v navzájem kolmých rovinách. Smyčka byla vytvořena přehnutím kruhové smyčky podle jejího průměru o 90°. Homogenní magnetické pole $\boldsymbol{B}$ o velikosti 76 mT je kolmé k průměru, podle něhož byla smyčka přehnuta, a s oběma rovinami půlkružnic svírá stejný úhel 45° (obr. 31.44). Magnetické pole bylo během doby 4,5 ms rovnoměrně zeslabeno až na nulu. Určete velikost indukovaného emn a směr indukovaného proudu ve smyčce během této doby.



Obr. 31.44 Úloha 15

16Ú. Na obr. 31.45 je kruhová vodivá smyčka o průměru 10 cm s normálou $\boldsymbol{N}$ svírající úhel $\theta = 30°$ se směrem homogenního magnetického pole $\boldsymbol{B}$ o velikosti 0,50 T. Smyčka se v magnetickém poli otáčí konstantní rychlostí 100 otáček za minutu tak, že její normála $\boldsymbol{N}$ opisuje kužel. Úhel sklonu θ se přitom nemění. Jaké je emn indukované ve smyčce?

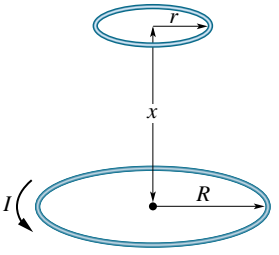


Obr. 31.45 Úloha 16

17Ú. Malá kruhová smyčka o ploše 2,00 cm^2 je umístěna soustředně a ve stejné rovině jako velká kruhová smyčka o poloměru

1,00 m. Proud velkou smyčkou se mění rovnoměrně od 200 A do −200 A za dobu 1,00 s počínaje časem $t = 0$. (a) Jaké je magnetické pole ve středu malé smyčky vyvolané proudem tekoucím velkou smyčkou v časech $t = 0$, $t = 0{,}500$ s a $t = 1{,}00$ s? (b) Jaké je indukované emn v malé smyčce v čase $t = 0{,}500$ s? (Vzhledem k tomu, že vnitřní smyčka je malá, považujte pole $\boldsymbol{B}$, ve kterém se nachází, za homogenní.)

18Ú. Dvě rovnoběžné vodivé smyčky na obr. 31.46 mají společnou osu. Menší smyčka (poloměr r) je nad větší smyčkou (poloměr R) ve vzdálenosti $x \gg R$. Proto můžeme považovat magnetické pole způsobené proudem I větší smyčkou za přibližně konstantní v oblasti menší smyčky. Předpokládejme, že vzdálenost x roste konstantní rychlostí $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v$. (a) Určete magnetický indukční tok plochou ohraničenou malou smyčkou jako funkci x. (*Tip*: Viz rov. (30.29).) V menší smyčce určete (b) indukované emn a (c) směr indukovaného proudu.



Obr. 31.46 Úloha 18

19Ú. Magnetický indukční tok smyčkou z obr. 31.41 v čase $t = 0$ je $\Phi_B(0)$. Magnetické pole $\boldsymbol{B}$ se libovolně spojitě mění co do velikosti i směru; v čase t je tok smyčkou $\Phi_B(t)$. (a) Dokažte, že celkový náboj $Q(t)$ prošlý rezistorem o odporu R za dobu t je

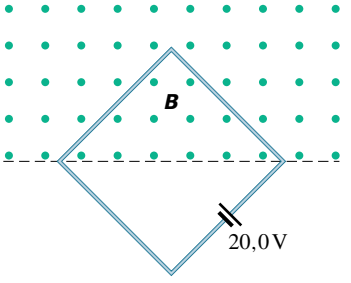
$$Q(t) = \frac{1}{R}\left(\Phi_B(0) - \Phi_B(t)\right)$$

a je nezávislý na průběhu změny $\boldsymbol{B}$. (b) Je-li $\Phi_B(t) = \Phi_B(0)$ v určitém čase t, dostaneme $Q(t) = 0$. Musí být v tomto případě také indukovaný proud trvale roven nule v celém intervalu od 0 do t?

20Ú. Na dřevěném válcovém jádře o průřezu $1{,}20 \cdot 10^{-3}$ m^2 je navinuto 100 závitů izolovaného měděného drátu. Vývody cívky jsou připojeny k rezistoru. Celkový odpor obvodu je 13,0 Ω. Jaký náboj projde obvodem, jestliže se velikost indukce vnějšího homogenního magnetického pole podél osy cívky změní z 1,60 T v jednom směru na 1,60 T v opačném směru? (*Tip*: Viz úloha 19.)

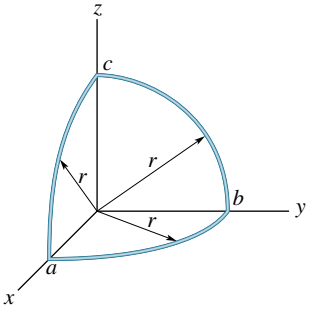
21Ú. V jistém bodě má magnetická indukce pole Země velikost 0,590 G a směřuje dolů pod úhlem 70° od vodorovné roviny. Plochá vodorovná kruhová vodivá cívka o poloměru 10,0 cm má 1 000 závitů a celkový odpor 85,0 Ω. Vnitřní odpor připojeného měřicího přístroje je 140 Ω. Cívka se otočí kolem svého průměru o půl otáčky, takže je opět vodorovná. Jak velký náboj přitom projde měřicím přístrojem? (*Tip*: Viz úlohu 19.)

22Ú. Čtvercová vodivá smyčka o straně 2,00 m je kolmá k homogennímu magnetickému poli, které zasahuje polovinu plochy této cívky, jak je znázorněno na obr. 31.47. Ve smyčce je zapojen zdroj 20,0 V o zanedbatelném vnitřním odporu. Velikost magnetické indukce se mění s časem podle vztahu $B = 0{,}042\,0 - 0{,}870t$, kde B je v T a čas t v sekundách. (a) Jaké je celkové emn v obvodu? (b) Jaký je směr proudu zdrojem?



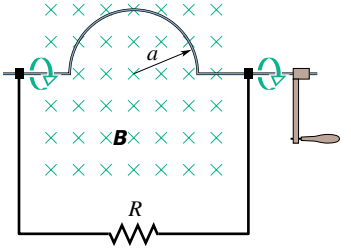
Obr. 31.47 Úloha 22

23Ú. Drát je ohnut do tří čtvrtkružnic o poloměru $r = 10$ cm, jak ukazuje obr. 31.48. Čtvrtkružnice ab leží v rovině xy, čtvrtkružnice bc v rovině yz a čtvrtkružnice ca v rovině zx. (a) Jak velké emn se vytvoří v drátu, když homogenní magnetické pole mířící v kladném směru osy x vzroste rychlostí 3,0 mT·s^{-1}? (b) Jaký je směr proudu v segmentu bc?



Obr. 31.48 Úloha 23

24Ú. Tuhý drát ohnutý do půlkružnice o poloměru a se otáčí s frekvencí f v homogenním magnetickém poli, jak ukazuje obr. 31.49. Jaká je (a) frekvence a (b) amplituda proměnného emn indukovaného ve smyčce?

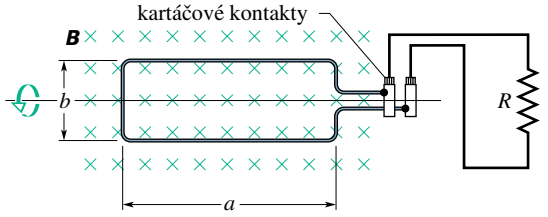


Obr. 31.49 Úloha 24

25Ú. Obdélníková cívka má N závitů a délky stran a a b. Otáčí se s frekvencí f v homogenním magnetickém poli $\boldsymbol{B}$, jak ukazuje obr. 31.50. Cívka se otáčí spolu s válci, kontakt zajišťují připojené kovové kartáčky. (a) Ukažte, že indukované emn v cívce je dáno v závislosti na čase vztahem

$$\mathscr{E}(t) = 2\pi f NabB \sin(2\pi f t) = \mathscr{E}_{\mathrm{m}} \sin(2\pi f t).$$

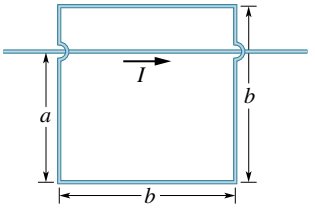
(Na tomto principu je založen běžný generátor střídavého proudu.) (b) Navrhněte smyčku, která bude při 60 otáčkách za sekundu v magnetickém poli o indukci 0,500 T generovat emn $\mathscr{E}_m = 150$ V.



Obr. 31.50 Úloha 25

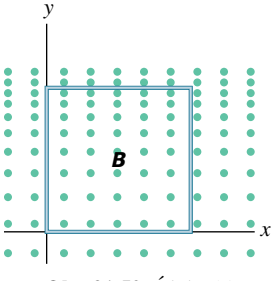
26Ú. Elektrický generátor používá cívku o 100 závitech drátu ve tvaru obdélníkové smyčky 50,0 cm × 30,0 cm. Cívka je umístěna v homogenním magnetickém poli 3,50 T. Jaká maximální hodnota emn se indukuje, otáčí-li se smyčka 1 000krát za minutu kolem osy kolmé k $\boldsymbol{B}$?

27Ú. V situaci na obr. 31.51 je $a = 12{,}0$ cm a $b = 16{,}0$ cm. Proud dlouhým drátem je dán vztahem $I = 4{,}50t^2 - 10{,}0t$, kde I a t jsou v SI. (a) Určete emn indukované ve čtvercové smyčce v čase $t = 3{,}00$ s. (b) Jaký je směr proudu indukovaného ve smyčce?



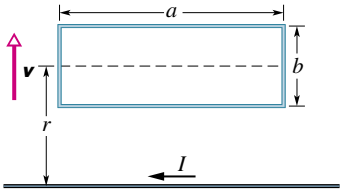
Obr. 31.51 Úloha 27

28Ú. Na obr. 31.52 je čtvercová vodivá smyčka o délce stran 2,00 cm. Magnetické pole je kolmé k nákresně a míří k nám; jeho velikost je dána vztahem $B = 4{,}0t^2y$, kde B, t a y jsou v SI. Určete emn ve čtvercové smyčce v čase $t = 2{,}5$ s a vyznačte jeho směr.



Obr. 31.52 Úloha 28

29Ú. Obdélníková vodivá smyčka o délce a, šířce b a odporu R leží blízko nekonečně dlouhého vodiče protékaného proudem I, jak je vidět na obr. 31.53. Vzdálenost osy smyčky od dlouhého vodiče je r. Určete (a) velikost magnetického indukčního toku plochou smyčky a (b) proud smyčkou, jestliže se smyčka vzdaluje od dlouhého vodiče rychlostí $\boldsymbol{v}$.



Obr. 31.53 Úloha 29

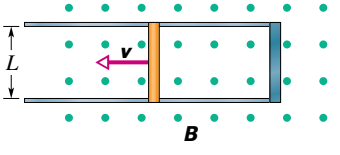
30Ú*. Dvěma dlouhými měděnými vodiči (s průměry 2,5 mm) protékají opačnými směry proudy 10 A. (a) Předpokládejte, že středy vodičů jsou vzdáleny 20 mm, a vypočtěte magnetický indukční tok plochou mezi osami vodičů připadající na jeden metr délky vodičů. (b) Jaká část tohoto toku je uvnitř vodičů? (c) Vyřešte úlohu (a) také pro případ proudů stejného směru.

ODST. 31.5 Indukce a přenosy energie

31C. Anténa tvaru smyčky s plochou o obsahu S a odporem R je kolmá k homogennímu magnetickému poli $\boldsymbol{B}$. Pole lineárně slábne až k nule v časovém intervalu Δt. Vyjádřete celkovou energii disipovanou ve smyčce.

32C. Měděný drát o délce 50,0 cm a průměru 1,00 mm má tvar kruhové smyčky, která je kolmá k homogennímu magnetickému poli rostoucímu konstantní rychlostí 10,0 mT·s^{-1}. S jakým výkonem se uvolňuje Joulovo teplo ve smyčce?

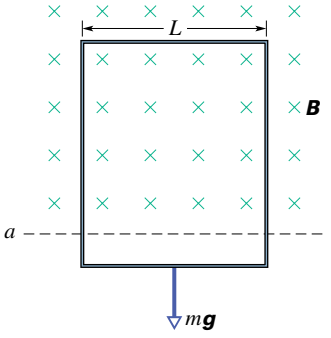
33C. Kovovou tyč posunujeme podle obr. 31.54 konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ po dvou rovnoběžných kovových kolejnicích spojených kovovým páskem na jednom konci. Magnetické pole o indukci velikosti $B = 0{,}350$ T směřuje k nám. (a) Jaké indukované emn vzniká, jsou-li kolejnice vzdáleny 25,0 cm a rychlost tyče má velikost 55,0 cm·s^{-1}? (b) Jaký proud teče tyčí, má-li odpor 18,0 Ω a kolejnice a spojovací pásek mají odpor zanedbatelný? (c) S jakým výkonem se uvolňuje Joulovo teplo ve smyčce?



Obr. 31.54 Cvičení 33 a 34

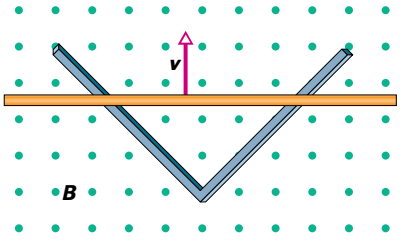
34C. Vodivá tyč na obr. 31.54 má délku L a klouže bez tření po vodorovných vodivých kolejnicích konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$. Kolejnice jsou na jednom konci spojeny kovovým páskem. Homogenní magnetické pole $\boldsymbol{B}$, které směřuje k nám, vyplňuje celou oblast, v níž se tyč pohybuje. Je zadáno $L = 10$ cm, $v = 5{,}0$ m·s^{-1} a $B = 1{,}2$ T. (a) Jaké emn se indukuje v tyči? (b) Jak velký proud teče vodivou smyčkou? Předpokládejte odpor tyče 0,40 Ω a odpor kolejnic a kovového proužku zanedbatelný. (c) S jakým výkonem se vyvíjí Joulovo teplo v tyči? (d) Jaká vnější síla je nutná k udržení tyče v pohybu? (e) Jaký je výkon této vnější síly? Srovnejte odpověď s odpovědí na úkol (c).

35Ú. Na obr. 31.55 je vodivá obdélníková smyčka o šířce L, odporu R a hmotnosti m. Je zavěšena v homogenním magnetickém poli $\boldsymbol{B}$, které je kolmé k rovině rámečku a existuje jen nad přímkou a. Smyčku pustíme, takže padá zrychleně, dokud nedosáhne mezní rychlosti $\boldsymbol{v}_m$. Zanedbejte odpor vzduchu a vypočtěte v_m.



Obr. 31.55
Úloha 35

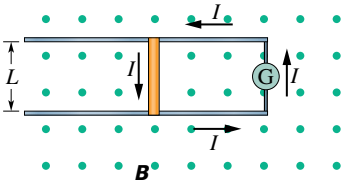
36Ú. Dvě přímé vodivé kolejnice jsou svařeny do pravého úhlu. Vodivá tyč (v kontaktu s nimi) začíná pohyb v čase $t = 0$ od místa spoje a pohybuje se konstantní rychlostí $5{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ podél kolejnic, jak ukazuje obr. 31.56. Magnetické pole 0,350 T směřuje kolmo k nám. Vypočtěte (a) indukční tok trojúhelníkem tvořeným kolejnicemi a tyčí v čase $t = 3{,}00$ s, (b) emn indukované v trojúhelníku v témž čase. (c) Aproximujte emn vztahem $\mathscr{E} = at^n$, kde a a n jsou konstanty. Jaká je hodnota n?



Obr. 31.56
Úloha 36

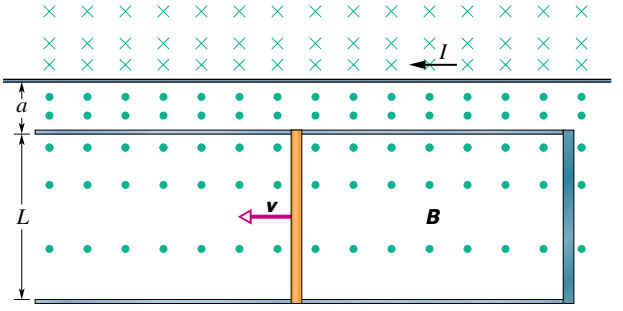
37Ú. Vypočtěte průměrný výkon dodávaný generátorem v úloze 25b, je-li připojen k obvodu o odporu 42,0 Ω. (*Tip*: Průměrná hodnota $\sin^2(2\pi f t)$ v jednom cyklu je $\frac{1}{2}$.)

38Ú. Na obr. 31.57 vodivá tyč o hmotnosti m a délce L klouže bez tření po dvou vodorovných kolejnicích. Tyč se pohybuje v homogenním magnetickém poli $\boldsymbol{B}$. Generátor G dodává konstantní proud I naznačeného směru. (a) Určete rychlost tyče v závislosti na čase za předpokladu, že v čase $t = 0$ byla v klidu. Generátor je dále nahrazen zdrojem s konstantním emn $\mathscr{E}$. (b) Ukažte, že se rychlost tyče blíží konečné konstantní hodnotě $\boldsymbol{v}_m$, a určete její velikost a směr. (c) Jak velký bude proud v tyči po dosažení konečné rychlosti? (d) Analyzujte oba případy z hlediska přenosu energie.



Obr. 31.57
Úloha 38

39Ú. Obr. 31.58 znázorňuje tyč o délce L, která se pohybuje konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ po vodivých vodorovných kolejnicích. Magnetické pole není v tomto případě homogenní, ale je vytvořeno proudem I v dlouhém vodiči, rovnoběžném s kolejnicemi. Je dáno: $v = 5{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $a = 10{,}0$ mm, $L = 10{,}0$ cm a $I = 100$ A. (a) Vypočtěte emn indukované v tyči. (b) Jak velký bude proud ve vodivé smyčce? Odpor tyčky je 0,400 Ω, odpor kolejnic a spojovacího pásku je zanedbatelný. (c) S jakým výkonem se vyvíjí teplo v tyči? (d) Jaká vnější síla je nutná k udržení tyče v pohybu? (e) Jaký je při tom výkon této síly? Srovnejte odpověď s odpovědí na úkol (c).

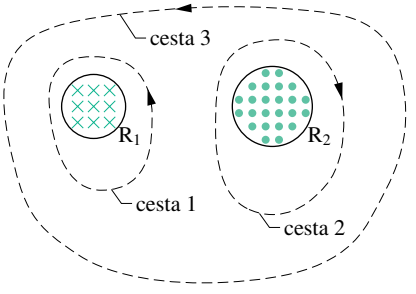


Obr. 31.58 Úloha 39

ODST. 31.6 Indukované elektrické pole

40C. Dlouhý solenoid má průměr 12,0 cm. Protéká-li jeho závity proud I, vytvoří uvnitř solenoidu homogenní magnetické pole $B = 30{,}0$ mT. Snížením proudu slábne i magnetické pole, a to rychlostí $6{,}50\,\mathrm{mT{\cdot}s^{-1}}$. Vypočtěte velikost intenzity indukovaného elektrického pole ve vzdálenosti (a) 2,20 cm a (b) 8,20 cm od osy solenoidu.

41C. Obr. 31.59 znázorňuje dva kruhy R_1 a R_2 o poloměrech $r_1 = 20{,}0$ cm a $r_2 = 30{,}0$ cm. V oblasti R_1 je homogenní magnetické pole $B_1 = 50{,}0$ mT směřující od nás a v oblasti R_2 je homogenní magnetické pole $B_2 = 75{,}0$ mT směřující k nám (zanedbejte rozptyl těchto polí). Obě pole se zeslabují rychlostí $8{,}50\,\mathrm{mT{\cdot}s^{-1}}$. Vypočtěte integrál $\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ pro každou ze tří čárkovaných integračních cest.

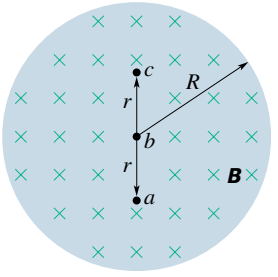


Obr. 31.59 Cvičení 41

42Ú. Začátkem roku 1981 byl ve Francis Bitter National Magnet Laboratory, Massachusetts Institute of Technology uveden do provozu válcový elektromagnet o průměru 3,3 cm, který vytvářel pole o indukci 30 T, nejsilnější stálé (tj. nikoli pulzní)

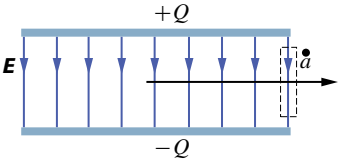
magnetické pole na světě. Pole mělo sinusový průběh v mezích 29,6 T až 30,0 T s frekvencí 15 Hz. Vypočtěte z těchto údajů maximální hodnotu indukovaného elektrického pole ve vzdálenosti 1,6 cm od osy elektromagnetu. (*Tip*: Viz př. 31.5.)

43Ú. Obr. 31.60 představuje homogenní magnetické pole $\boldsymbol{B}$ ve válci o poloměru R. Velikost $\boldsymbol{B}$ klesá konstantní rychlostí $10\,\mathrm{mT{\cdot}s^{-1}}$. Jaká jsou okamžitá zrychlení (směr a velikost) elektronů v bodech a, b, c? Předpokládejte $r = 5{,}0\,\mathrm{cm}$.



Obr. 31.60
Úloha 43

44Ú. Dokažte, že intenzita elektrického pole $\boldsymbol{E}$ nabitého deskového kondenzátoru nemůže v bodě a na obr. 31.61 u kraje desek náhle klesnout na nulu, postupujeme-li kolmo k poli ve směru vodorovné šipky. U skutečného kondenzátoru vždy dochází k rozptylu pole, což znamená, že $\boldsymbol{E}$ se blíží k nule spojitě a hladce (viz cvič. 45 v kap. 30). (*Tip*: Použijte Faradayův zákon na čárkovaně vyznačenou obdélníkovou cestu.)



Obr. 31.61
Úloha 44

ODST. 31.7 Cívka a indukčnost

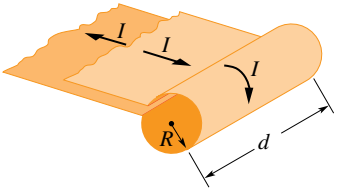
45C. Indukčnost hustě navinuté cívky o 400 závitech je 8,0 mH. Vypočtěte magnetický indukční tok cívkou, jestliže jí protéká proud 5,0 mA.

46C. Kruhová cívka má poloměr 10,0 cm a tvoří ji 30 hustě navinutých závitů. Vnější magnetické pole 2,60 mT je kolmé k rovině cívky. (a) Jaký je celkový magnetický indukční tok, jestliže cívkou neprotéká proud? (b) Jestliže cívkou teče proud 3,80 A určitého směru, indukční tok cívkou vymizí. Jaká je indukčnost cívky?

47C. Solenoid těsně navinutý jednou vrstvou izolovaného měděného drátu (průměr drátu 2,5 mm) má průměr 4,0 cm a je dlouhý 2,0 m. (a) Kolik má závitů? (b) Jakou indukčnost má centimetr délky solenoidu (daleko od okrajů)? Předpokládejte, že sousední dráty se dotýkají a tloušťka izolace je zanedbatelná.

48Ú. Dlouhý tenký solenoid je ohnut do prstence a tvoří toroid. Je-li solenoid dostatečně tenký a náležitě dlouhý, přejde vztah pro indukčnost toroidu (rov. (31.37)) na vztah pro indukčnost solenoidu (rov. (31.32)), z něhož toroid vznikl. Dokažte to.

49Ú. Široký měděný pás šířky d je stočen do trubičky o poloměru R se dvěma přívody (podle obr. 31.62). Pásem teče proud I, rovnoměrně rozprostřený po celé jeho šířce. Tím vzniká „jednozávitový solenoid“. (a) Odvoďte výraz pro velikost magnetického pole $\boldsymbol{B}$ v jeho válcové části (daleko od hran). (*Tip*: Předpokládejte, že magnetické pole vně tohoto solenoidu je zanedbatelné.) (b) Vypočtěte indukčnost tohoto solenoidu. Vliv přívodů zanedbejte.



Obr. 31.62
Úloha 49

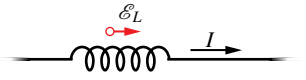
50Ú. Dvěma dlouhými rovnoběžnými válcovými vodiči o poloměrech a protékají stejně velké proudy opačných směrů. Vzdálenost os vodičů je d. Dokažte, že při zanedbání magnetického toku uvnitř vodičů je indukčnost L dvojice těchto vodičů délky l vyjádřena vztahem

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}.$$

Viz př. 30.2. (*Tip*: Vypočtěte magnetický tok obdélníkem, v němž vodiče tvoří protilehlé strany.)

ODST. 31.8 Vlastní indukce

51C. Na obr. 31.63 je vyznačen směr proudu a indukovaného napětí cívky v určitém okamžiku. (a) Klesá proud, nebo roste? (b) Indukované emn je 17 V a rychlost změny proudu $25\,\mathrm{kA{\cdot}s^{-1}}$. Určete indukčnost cívky.



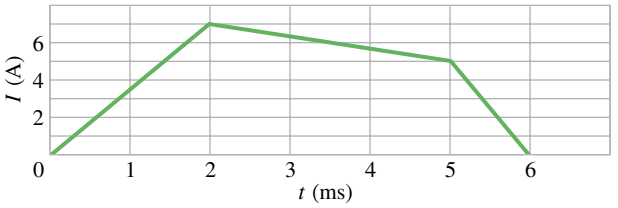
Obr. 31.63
Cvičení 51

52C. Cívka má indukčnost 12 H a v čase $t = 0$ jí protéká proud 2,0 A. Jak můžeme zařídit, aby se na ní indukovalo napětí 60 V?

53C. Dlouhý válcový solenoid se 100 závity/cm má poloměr 1,6 cm. Předpokládejte, že jeho magnetické pole je uvnitř solenoidu rovnoběžné s jeho osou a je homogenní. (a) Jaká je indukčnost solenoidu připadající na metr délky? (b) Jaké emn se indukuje na 1 m délky solenoidu, je-li změna proudu $13\,\mathrm{A{\cdot}s^{-1}}$?

54C. Indukčnost hustě navinuté cívky je taková, že při změně proudu $5{,}0\,\mathrm{A{\cdot}s^{-1}}$ se indukuje emn 3,0 mV. Stálý proud 8,0 A vytváří magnetický tok 40 μWb každým závitem. (a) Vypočtěte indukčnost cívky. (b) Kolik závitů má cívka?

55Ú. Proud I tekoucí cívkou o indukčnosti 4,6 H se mění v čase podle grafu na obr. 31.64. Cívka má odpor 12 Ω. Nalezněte velikost indukovaného emn v časových intervalech (a) od $t = 0$ do $t = 2\,\mathrm{ms}$, (b) od $t = 2\,\mathrm{ms}$ do $t = 5\,\mathrm{ms}$, (c) od $t = 5\,\mathrm{ms}$ do $t = 6\,\mathrm{ms}$. (Nezabývejte se hodnotou emn přesně na hranicích intervalů.)



Obr. 31.64 Úloha 55

56Ú. *Cívky v sérii.* Dvě cívky s indukčnostmi L_1 a L_2 jsou spojeny do série a umístěny daleko od sebe. (a) Dokažte, že jejich spojení má indukčnost

$$L_s = L_1 + L_2.$$

(*Tip*: Zopakujte si odvození pro rezistory a kondenzátory v sérii. Co je zde podobného?) (b) Proč musí být cívky dostatečně vzdálené, aby vztah platil? (c) Zobecněte řešení úkolu (a) pro N cívek v sérii.

57Ú. *Paralelně zapojené cívky.* Dvě cívky s indukčnostmi L_1 a L_2 jsou spojeny paralelně a umístěny daleko od sebe. (a) Dokažte, že jejich spojení má indukčnost

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

(*Tip*: Zopakujte si odvození pro paralelně spojené rezistory a kondenzátory. Co je zde podobného?) (b) Proč musí být cívky dostatečně vzdálené, aby vztah platil? (c) Zobecněte řešení úkolu (a) pro N paralelně spojených cívek.

ODST. 31.9 Obvody *RL*

58C. Proud v RL obvodu naroste do jedné třetiny své ustálené hodnoty za 5,00 s. Určete časovou konstantu tohoto obvodu.

59C. Jak dlouho (vyjádřeno pomocí τ_L) je nutno čekat, než proud vzroste na 0,100 % své ustálené hodnoty?

60C. Proud v RL obvodu klesne během první sekundy po odpojení zdroje z 1,0 A na 10 mA. Jaký je odpor R obvodu, je-li $L = 10$ H?

61C. Za jak dlouho od vypnutí zdroje poklesne napětí na odporu v obvodu RL na 10 % své počáteční hodnoty, je-li $L = 2{,}00$ H a $R = 3{,}00\ \Omega$?

62C. (a) Uvažujte RL obvod na obr. 31.19. Vyjádřete pomocí napětí zdroje $\mathscr{E}$, jaké bude indukované emn $\mathscr{E}_L$ okamžitě po přepnutí spínače do polohy a. (b) Jaké bude $\mathscr{E}_L$ v čase $t = 2{,}0\tau_L$? (c) Vyjádřete pomocí τ_L, kdy bude $\mathscr{E}_L$ polovinou napětí zdroje $\mathscr{E}$.

63C. Solenoid o indukčnosti 6,30 μH je zapojen do série s rezistorem 1,20 kΩ. (a) Za jak dlouho po připojení zdroje 14,0 V do obvodu nabude proud rezistorem 80,0 % své ustálené hodnoty? (b) Jaký proud poteče rezistorem v čase $t = 1{,}0\tau_L$?

64C. Celkový magnetický tok cívkou o odporu 0,75 Ω, je 26 mWb při proudu 5,5 A. (a) Vypočtěte indukčnost cívky. (b) K cívce je náhle připojen zdroj 6,0 V. Jak dlouho roste proud z 0 na 2,5 A?

65Ú. Předpokládejte, že emn zdroje v obvodu na obr. 31.20 se mění s časem t tak, že proud je dán vztahem $I(t) = 3{,}0 + 5{,}0t$ v jednotkých SI. Je-li $R = 4{,}0\ \Omega$, $L = 6{,}0$ H, najděte výraz pro emn zdroje v závislosti na čase. (*Tip*: Použijte pravidlo pro součet napětí v uzavřeném obvodu.)

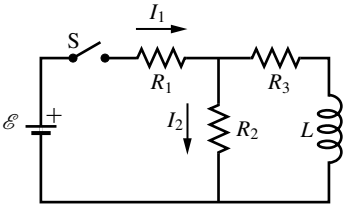
66Ú. V čase $t = 0$ byl k rezistoru a cívce připojen do série zdroj. Níže uvedená tabulka uvádí napětí naměřené na cívce v závislosti na čase od okamžiku připojení zdroje. Určete (a) emn zdroje a (b) časovou konstantu obvodu.

t / ms	U_L / V	t / ms	U_L / V
1,0	18,2	5,0	5,98
2,0	13,8	6,0	4,53
3,0	10,4	7,0	3,43
4,0	7,90	8,0	2,60

67Ú. Na cívku o $L = 50{,}0$ mH a $R = 180\ \Omega$ zapojíme napětí 45,0 V. Jak rychle narůstá proud v okamžiku 1,20 ms po zapojení?

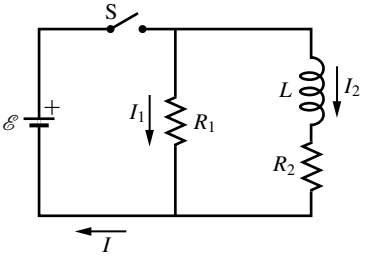
68Ú. Dřevěné jádro toroidu se čtvercovým průřezem má vnitřní poloměr 10 cm a vnější poloměr 12 cm. Je těsně ovinuto jednou vrstvou drátu, který má průměr 1,0 mm a odpor na jednotku délky 0,02 $\Omega \cdot m^{-1}$. Jaká je (a) indukčnost a (b) časová konstanta toroidu? Tloušťku izolace drátu zanedbejte.

69Ú. Na obr. 31.65 je $\mathscr{E} = 100$ V, $R_1 = 10{,}0\ \Omega$, $R_2 = 20{,}0\ \Omega$, $R_3 = 30{,}0\ \Omega$ a $L = 2{,}00$ H. Vypočtěte hodnoty I_1 a I_2 (a) bezprostředně po zapnutí spínače S, (b) za dlouhou dobu potom, (c) bezprostředně po opětovném rozpojení spínače S, (d) za dlouhou dobu potom.



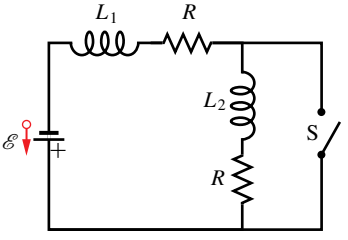
Obr. 31.65 Úloha 69

70Ú. V obvodu na obr. 31.66 je $\mathscr{E} = 10$ V, $R_1 = 5{,}0\ \Omega$, $R_2 = 10{,}0\ \Omega$ a $L = 5{,}00$ H. Spínač S byl (1) právě sepnut a (2) je sepnut již dlouhou dobu. V obou případech vypočítejte (a) proud I_1 rezistorem R_1, (b) proud I_2 rezistorem R_2, (c) proud I spínačem, (d) napětí na R_2, (e) napětí na L, (f) rychlost změny dI_2/dt.



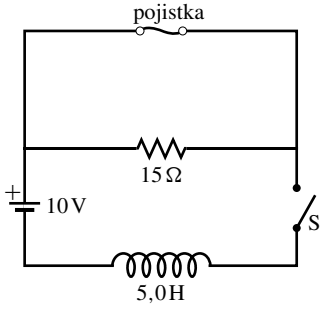
Obr. 31.66 Úloha 70

71Ú. Spínač na obr. 31.67 je sepnut pro časy $t < 0$ a rozpojen v čase $t = 0$. Náhlý úbytek proudu I_1 cívkou L_1 vyvolá tak velké indukované napětí, že se na kontaktech spínače na nepatrnou chvíli vytvoří oblouk. Proud I_2 proto neklesne na nulu ihned, ale až za jistou (kratičkou) dobu. Teprve od tohoto okamžiku je proud I_1 cívkou L_1 roven proudu I_2 cívkou L_2. Jaká je v tomto prvním okamžiku jejich společná hodnota? (Rezistory mají stejný odpor R.)



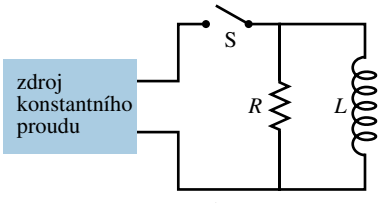
Obr. 31.67 Úloha 71

72Ú. Na obr. 31.68 je v horní větvi ideální pojistka 3,0 A. Ta má tu vlastnost, že má nulový odpor po dobu, kdy je protékající proud menší než 3,0 A a dosáhne-li proud 3,0 A, spálí se a poté má odpor nekonečný. Spínač S je v čase $t = 0$ sepnut. (a) Kdy se pojistka spálí? (*Tip*: Rov. (31.46) nelze použít. Promyslete rov. (31.44).) (b) Načrtněte graf závislosti proudu I cívkou na čase. Vyznačte čas, kdy se pojistka spálí.



Obr. 31.68 Úloha 72

73Ú*. V obvodu na obr. 31.69 je spínač S sepnut v čase $t = 0$. Poté udržujeme proud I konstantní vhodnými změnami emn. (a) Odvoďte výraz pro proud cívkou v závislosti na čase. (b) Ukažte, že proud rezistorem je stejný jako proud cívkou v čase $t = (L/R) \ln 2$.



Obr. 31.69 Úloha 73

ODST. 31.10 Energie magnetického pole

74C. Magnetická energie jisté cívky je 25 mJ při proudu 60,0 mA. (a) Vypočtěte její indukčnost. (b) Jaký proud je nutný pro vytvoření čtyřikrát větší magnetické energie?

75C. Uvažujte obvod na obr. 31.20. Vyjádřete pomocí časové konstanty τ_L, ve kterém okamžiku po připojení zdroje je energie magnetického pole cívky rovna polovině její ustálené hodnoty.

76C. Cívka o indukčnosti 2,0 H a odporu 10 Ω je připojena k ideálnímu zdroji s $\mathscr{E} = 100$ V. (a) Jaký bude ustálený proud? (b) Jakou energii bude přitom mít magnetické pole cívky?

77C. Cívka o indukčnosti 2,0 H a odporu 10 Ω je náhle připojena ke zdroji bez vnitřního odporu a s $\mathscr{E} = 100$ V. Určete okamžitý výkon, s nímž se za 0,10 s po připojení (a) hromadí energie v magnetickém poli, (b) uvolňuje Joulovo teplo na cívce a (c) odebírá energie ze zdroje.

78Ú. Obvod RL na obr. 31.20 má časovou konstantu 37 ms a v čase $t = 0$ je proud v obvodu nulový. Ve kterém okamžiku je rychlost disipace energie v rezistoru rovna výkonu, s nímž se energie hromadí v cívce?

79Ú. Cívka je v sérii s rezistorem o odporu 10,0 kΩ. Po připojení zdroje 50,0 V dosáhne proud za 5,00 ms hodnoty 2,00 mA. (a) Vypočtěte indukčnost cívky. (b) Jakou energii má cívka v uvedeném okamžiku?

80Ú. V obvodu na obr. 31.20 je dáno $\mathscr{E} = 10{,}0$ V, $R = 6{,}70\ \Omega$ a $L = 5{,}50$ H. V čase $t = 0$ byl připojen zdroj. (a) Jakou energii dodal zdroj během prvních dvou sekund? (b) Jakou energii má magnetické pole cívky? (c) Jaká energie byla disipována v rezistoru?

81Ú. Solenoid délky 80,0 cm a poloměru 5,00 cm má 3 000 rovnoměrně navinutých závitů. Jeho celkový odpor je 10,0 Ω. V čase 5,00 ms po připojení ke zdroji 12,0 V určete (a) jakou energii má jeho magnetické pole, (b) jaká energie byla dodána zdrojem během této doby. (Rozptyl pole zanedbejte.)

82Ú. Dokažte, že po přepnutí spínače S na obr. 31.19 z polohy a do b se nakonec všechna energie nahromaděná v cívce disipuje v rezistoru.

ODST. 31.11 Hustota energie magnetického pole

83C. Solenoidem délky 85,0 cm, průřezu 17,0 cm^2 s 950 závity protéká proud 6,60 A. (a) Vypočtěte objemovou hustotu energie magnetického pole uvnitř solenoidu. (b) Určete celkovou energii magnetického pole. (Okrajové efekty zanedbejte.)

84C. Toroid o indukčnosti 90,0 mH má objem 0,020 0 m^3. Jaký proud jím protéká, je-li hustota energie v toroidu 70,0 $\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$?

85C. Jak velkou intenzitu musí mít elektrické pole, aby mělo stejnou hustotu energie jako magnetické pole o indukci 0,50 T?

86C. V mezihvězdném prostoru v naší Galaxii má magnetická indukce velikost asi 10^{-10} T. Kolik magnetické energie obsahuje krychle o délce hrany 10 světelných let? (Pro srovnání poznamenejme, že vzdálenost nejbližší hvězdy je asi 4,3 světelných let a poloměr naší Galaxie je asi $8\cdot10^4$ světelných let.)

87C. Užijte výsledek řešení př. 31.11 k získání výrazu pro indukčnost koaxiálního kabelu délky l.

88C. Kolik energie je potřeba, abychom v krychli o hraně 10 cm vytvořili (a) homogenní elektrické pole o intenzitě 100 kV·m^{-1}, (b) homogenní magnetické pole o indukci 1 T. (Obojí je reálně dosažitelné v laboratoři.) (c) Které z těchto polí obsahuje více energie?

89C. Kruhovou vodivou smyčkou o poloměru 50 mm protéká proud 100 A. (a) Určete magnetickou indukci ve středu smyčky. (b) Vypočtěte hustotu energie ve středu smyčky.

90Ú. (a) Pro toroid z př. 31.6b stanovte výraz pro závislost hustoty energie na vzdálenosti r od středu. (b) Integrací hustoty energie přes objem toroidu vypočtěte celkovou energii obsaženou v jeho poli, teče-li toroidem proud $I = 0{,}500$ A. (c) Užitím rov. (31.53) vypočtěte energii v toroidu přímo z jeho indukčnosti a srovnejte s výsledkem otázky (b).

91Ú. Dlouhým měděným vodičem protéká proud 10 A v průřezu rovnoměrně rozložený. Vypočtěte (a) hustotu energie magnetického pole a (b) hustotu energie elektrického pole těsně nad vodičem. Průměr vodiče je 2,5 mm a jeho odpor na jednotku délky je 3,3 Ω/km.

92Ú. (a) Jaká je hustota energie zemského magnetického pole, má-li jeho indukce velikost 50 μT? (b) Považujte tuto hustotu přibližně za konstantní ve vzdálenostech malých vůči poloměru Země a zanedbejte její nehomogenity v blízkosti magnetických pólů. Kolik energie je uloženo mezi povrchem Země a soustřednou kulovou plochou 16 km nad povrchem Země?

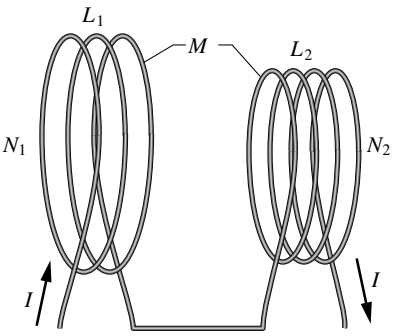
ODST. 31.12 Vzájemná indukčnost

93C. Dvě cívky mají vůči sobě pevnou polohu. Jestliže cívkou 1 proud neteče a proud cívkou 2 roste rychlostí 15,0 A·s^{-1}, na cívce 1 vzniká emn 25,0 mV. (a) Jaká je vzájemná indukčnost cívek? (b) Kdy poteče cívkou 2 nulový proud a cívkou 1 proud 3,60 A? Jaký je celkový magnetický tok cívkou 2?

94C. Cívka 1 má indukčnost $L_1 = 25$ mH a počet závitů $N_1 = 100$. Cívka 2 má indukčnost $L_2 = 40$ mH a počet závitů $N_2 = 200$. Jejich vzájemná poloha se nemění, jejich vzájemná indukčnost $M = 3{,}0$ mH. Proud 6,0 mA v cívce 1 se mění rychlostí 4,0 A·s^{-1} (a) Jaký magnetický indukční tok Φ_{12} teče cívkou 1 a jaké emn se na ní indukuje? (b) Jaký tok Φ_{21} teče cívkou 2 a jaké emn se na ní indukuje?

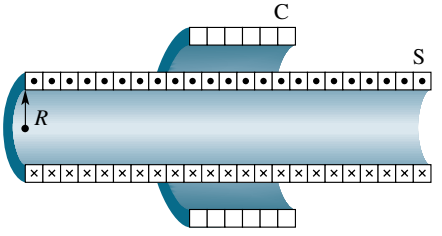
95C. Dva solenoidy jsou částí indukční cívky v automobilu. Jestliže proud jedním solenoidem klesne z 6,0 A na nulu za 2,5 ms, indukuje se na druhém solenoidu emn 30 kV. Jaká je jejich vzájemná indukčnost?

96Ú. Dvě cívky spojené podle obr. 31.70 mají indukčnosti L_1 a L_2. Vzájemná indukčnost je M. (a) Dokažte, že kombinaci těchto cívek můžeme nahradit jednou cívkou o ekvivalentní indukčnosti $L_{ekv} = L_1 + L_2 + 2M$. (b) Jak bychom měli zapojit cívky z obr. 31.70, abychom získali ekvivalentní indukčnost $L_{ekv} = L_1 + L_2 - 2M$? (Tento problém rozšiřuje úlohu 56 tím, že cívky již nejsou velmi vzdáleny.)



Obr. 31.70 Úloha 96

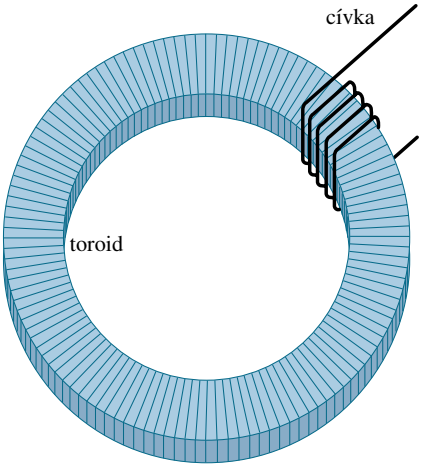
97Ú. Cívka C o N závitech je nasunuta na dlouhý kruhový solenoid S o poloměru R a o n závitech na jednotku délky (obr. 31.71). Ukažte, že vzájemná indukčnost cívky a solenoidu je $M = \mu_0 \pi R^2 n N$. Vysvětlete, proč M v tomto případě nezávisí na tvaru a velikosti cívky a není ani ovlivněna hustotou vinutí závitů cívky.



Obr. 31.71 Úloha 97

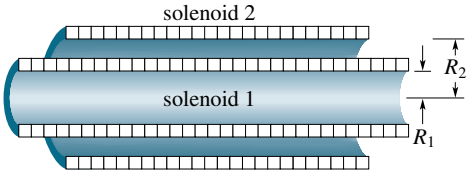
98Ú. Obr. 31.72 ukazuje cívku o N_2 závitech navinutou kolem části toroidu o N_1 závitech. Vnitřní poloměr toroidu je a, vnější poloměr je b a výška je h. Ukažte, že vzájemná indukčnost této kombinace toroidu a cívky je

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$



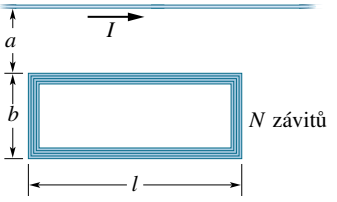
Obr. 31.72 Úloha 98

99Ú. Obr. 31.73 ukazuje v průřezu dva souosé solenoidy. Ukažte, že vzájemná indukčnost M délky l této sestavy je dána vztahem $M = \pi R_1^2 l \mu_0 n_1 n_2$, kde n_1 a n_2 jsou počty závitů na jednotku délky a R_1 je poloměr vnitřního solenoidu. Proč M závisí na R_1 a nikoli na R_2?



Obr. 31.73 Úloha 99

100Ú. Čtvercová smyčka o N těsně navinutých závitech je umístěna blízko rovného drátu podle obr. 31.74. (a) Jaká je vzájemná indukčnost M soustavy smyčka + drát? (b) Vypočtěte M pro $N = 100$, $a = 1{,}0\,\text{cm}$, $b = 8{,}0\,\text{cm}$ a $l = 30\,\text{cm}$.



Obr. 31.74 Úloha 100

32
Magnetické pole v látce, Maxwellovy rovnice



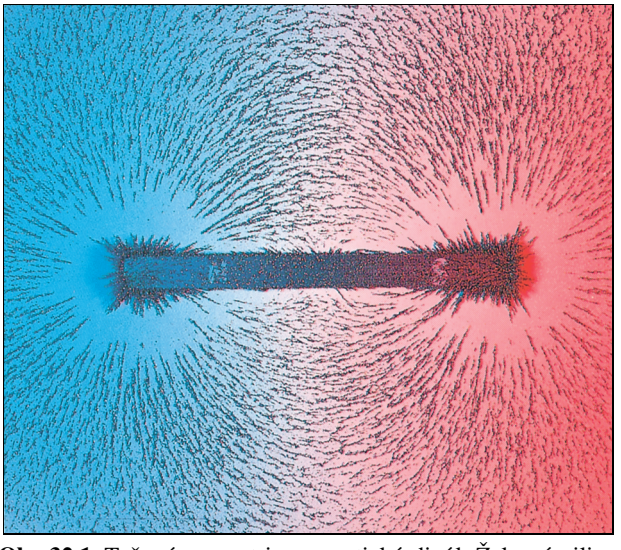
Směr zemského magnetického pole není stálý, ale s časem se mění. Jedním ze způsobů, jak lze určit směr pole v určité době v minulosti, je zkoumání hliněných stěn pecí používaných k vypalování keramiky. Jak a proč však jílovitá vyzdívka zaznamenala zemské magnetické pole?

32.1 MAGNETY

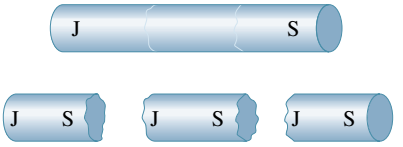
Prvním známým magnetem byl *magnetovec*. Když starověcí Řekové a Číňané objevili tyto celkem zřídka se vyskytující minerály, sloužila jejich udivující schopnost přitahovat některé kovy zpočátku jen k zábavě. Až mnohem později se lidé naučili používat magnetovec a uměle zmagnetované kousky železa jako kompasu k určování směru.

Dnes se magnety a magnetické materiály vyskytují všude okolo nás. Nalezneme je ve videorekordérech, audiokazetách, kreditních kartách, sluchátkách i v tiskařské barvě papírových bankovek. Dokonce některé potraviny, jako např. železem obohacené obilné vločky, obsahují nepatrné kousky magnetických materiálů (můžete je shromáždit z plovoucích vloček pomocí magnetu). A co je důležitější, moderní elektronický průmysl v současné podobě (včetně oblastí hudby i informatiky) by nebyl možný bez magnetických materiálů.

Původ magnetických vlastností materiálů je třeba hledat až v atomech a v elektronech. Studium ale začneme s tyčovým magnetem podle obr. 32.1. Jak je z něho patrné, železné piliny, rozsypané okolo takového magnetu, se orientují ve směru magnetického pole magnetu a jejich rozložení ukazuje průběh magnetických indukčních čar. Z nahuštění indukčních čar na koncích magnetu bychom mohli soudit, že z jednoho konce — nazvěme ho **severní pól** — indukční čáry vystupují (je to tedy *zdroj* neboli *zřídlo* pole) a do druhého — **jižního pólu** — se vracejí (*propad* neboli *nor*). Říkáme, že magnet se svými dvěma póly je příklad **magnetického dipólu**.



Obr. 32.1 Tyčový magnet je magnetický dipól. Železné piliny naznačují indukční čáry magnetického pole. (Pozadí je osvětlené barevným světlem.)



Obr. 32.2 Rozlomíme-li magnet, každý úlomek se stane samostatným magnetem s vlastním severním a jižním pólem.

Proveďme pokus, při kterém rozlomíme na kusy tyčový magnet podobně, jako lámeme křídu (obr. 32.2). Zdá se, že bychom tak mohli izolovat jeden z pólů a vytvořit tak *monopól*, „magnetický náboj“. K našemu překvapení se to však nestane, dokonce ani kdybychom mohli rozlomit magnet na jednotlivé atomy a potom na jeho jádra a elektrony. Každý zlomek magnetu má svůj severní a jižní pól. Náš pokus uzavřeme následujícím konstatováním:

Nejjednodušší magnetická struktura je magnetický dipól. Magnetické monopóly neexistují (alespoň podle dosavadního stavu našich vědomostí).

32.2 GAUSSŮV ZÁKON PRO MAGNETICKÉ POLE

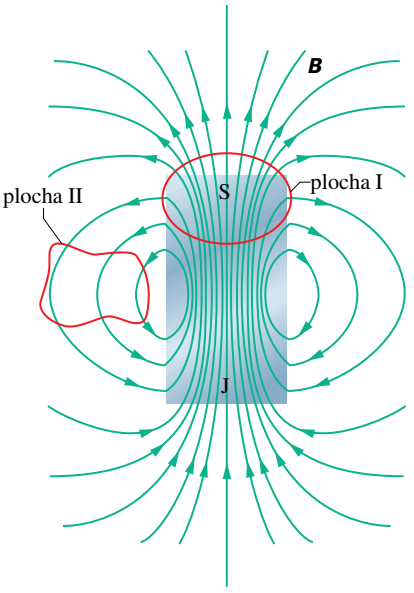
Gaussův zákon pro magnetické pole říká, že neexistují magnetické monopóly. Zákon tvrdí, že celkový magnetický indukční tok Φ_B přes jakoukoli uzavřenou plochu (Gaussova plocha) je nulový:

$$\Phi_B = \oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \quad \text{(Gaussův zákon pro magnetické pole).} \tag{32.1}$$

Porovnejme tento vztah s Gaussovým zákonem elektrostatiky (24.7)

$$\Phi_E = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \quad \text{(Gaussův zákon pro elektrické pole).}$$

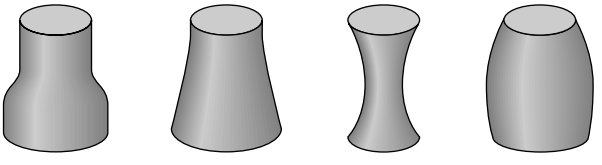
V obou rovnicích se integruje přes *uzavřenou* Gaussovu plochu. Gaussův zákon pro elektrické pole říká, že tento integrál (celkový tok vektoru elektrické intenzity) je úměrný celkovému náboji Q uvnitř plochy. Gaussův zákon pro magnetické pole říká, že celkový tok magnetické indukce (neboli magnetický indukční tok) uzavřenou plochou je nulový, protože uvnitř této plochy (i jakkoli malé) je nulový i „magnetický náboj“. Proto musí všechny indukční čáry vstupující dovnitř Gaussovou plochou také vystoupit ven (a naopak). Nejjednodušším magnetickým prvkem je tedy dipól, který sestává současně ze zdroje i noru magnetických indukčních čar.



Obr. 32.3 Indukční čáry magnetického pole $\boldsymbol{B}$ krátkého tyčového magnetu. Červené křivky představují řezy uzavřenými trojrozměrnými Gaussovými plochami.

Gaussův zákon pro magnetické pole platí i pro složitější soustavy, než je magnetický dipól, a platí dokonce i v případě, kdy (uzavřená) Gaussova plocha neuzavírá celý magnet, tj. „prochází skrz magnet“. Např. Gaussova plocha II v blízkosti tyčového magnetu z obr. 32.3 neuzavírá žádný z pólů a můžeme tedy usoudit, že magnetický tok jí procházející je nulový. U plochy I je však situace složitější; zdánlivě uzavírá jen severní pól magnetu S a ne jižní pól J. Jižní pól však musíme přiřadit dolní části uzavřené plochy, protože indukční čáry zde do ní vstupují. Gaussova plocha I proto uzavírá magnetický dipól a celkový tok touto plochou je nulový.

KONTROLA 1: Obrázek ukazuje čtyři uzavřené plochy s rovinnými podstavami a zakřivenými bočními stěnami. V tabulce jsou uvedeny obsahy horní S_h a dolní podstavy S_d a indukce homogenního magnetického pole kolmého k těmto podstavám. Jednotky, v nichž je vyjádřen obsah ploch S a indukce B, jsou libovolné, avšak stejné pro všechny řádky tabulky. Seřaďte plochy sestupně podle velikosti magnetického toku jejich zakřivenými bočními stěnami.

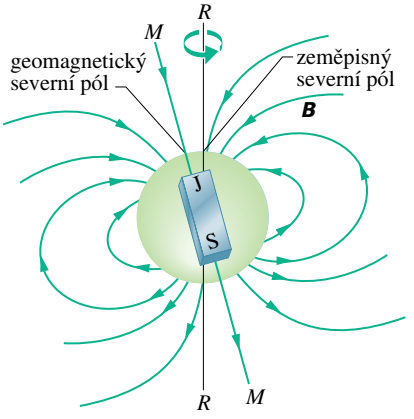


PLOCHA	S_h	B_h	S_d	B_d
a	2	6, ven	4	3, dovnitř
b	2	1, dovnitř	4	2, dovnitř
c	2	6, dovnitř	2	8, ven
d	2	3, ven	3	2, dovnitř

32.3 ZEMSKÝ MAGNETISMUS

Země je obrovský magnet. Kolem Země lze zemské magnetické pole znázornit jako pole obrovského tyčového magnetu — magnetického dipólu, který prochází středem planety. Obr. 32.4 představuje idealizované symetrické zobrazení pole dipólu bez zkreslení, způsobeného např. tokem částic ze Slunce.

Protože zemské magnetické pole je zhruba ekvivalentní poli dipólu, lze ho přibližně popsat magnetickým dipólovým momentem $\boldsymbol{\mu}$. Pro idealizované pole podle obr. 32.4 je velikost $\boldsymbol{\mu}$ rovna $8{,}0\cdot10^{22}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}}$ a směr $\boldsymbol{\mu}$ svírá úhel 11° s osou (RR) rotace Země. Osa dipólu (MM v obr. 32.4) je ve směru $\boldsymbol{\mu}$ a protíná zemský povrch v **geomagnetickém severním pólu** (v roce 1980 ležel v severozápadním Grónsku na 78,8° severní šířky a 289,3° východní délky, tedy asi 1 250 km od pólu geografického) a v **geomagnetickém jižním pólu** v protilehlém bodě v Antarktidě. Indukční čáry pole $\boldsymbol{B}$ obecně vycházejí z jižní polokoule a vstupují do Země na severní polokouli. Severní magnetický pól, ležící na severní polokouli, je tedy *ve skutečnosti jižním pólem zemského magnetického dipólu*.



Obr. 32.4 Zemské magnetické pole zobrazené jako pole dipólu. Osa dipólu MM svírá úhel 11° s osou rotace Země RR. Jižní pól dipólu je na severní polokouli.

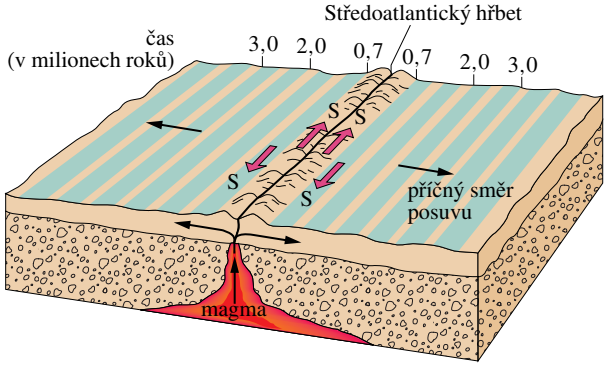
Směr magnetického pole v kterémkoli místě na zemském povrchu je obecně určen dvěma úhly. **Magnetická deklinace** je úhel (+ nalevo nebo − napravo) mezi zeměpisným severem (který odpovídá 90° zeměpisné šířky)

a směrem vodorovné složky magnetického pole. **Magnetická inklinace** je úhel (+ nahoru, − dolů) mezi vodorovnou rovinou a směrem magnetického pole.

Tyto úhly se měří *magnetometry* s velkou přesností. K jejich přibližnému určení však vystačíme s *kompasem* a *inklinační magnetkou*. V kompasu je magnet ve tvaru jehly (magnetka, střelka) upevněný tak, aby se mohl volně otáčet ve vodorovné rovině kolem svislé osy. Držíme-li kompas ve vodorovné poloze, směřuje severní pól jehly ke *geomagnetickému* severnímu pólu (což je jižní pól magnetického dipólu Země, obr. 32.4). Úhel mezi jehlou a zeměpisným severem je deklinace pole. Inklinační magnetka je magnet, který se může volně otáčet ve svislé rovině okolo vodorovné osy. Leží-li (svislá) rovina otáčení inklinační magnetky v severojižním směru, pak úhel mezi jehlou a vodorovnou rovinou je inklinace pole.

Magnetické pole naměřené na různých místech zemského povrchu se může znatelně lišit od idealizovaného pole dipólu podle obr. 32.4. Tak místo, kde je pole přesně kolmé k zemskému povrchu, se nenalézá, jak bychom očekávali, v Grónsku. Tento tzv. *magnetický severní pól* je na ostrově královny Alžběty v severní Kanadě, daleko od Grónska.

Dodejme ještě, že pole, pozorované na kterémkoli místě na povrchu Země, se mění s časem, a to s měřitelnou odchylkou během několika let a se znatelnou změnou asi za 100 let. Např. mezi lety 1580 a 1820 se směr naměřený kompasem v Londýně změnil o 35°.



Obr. 32.5 Magnetický profil mořského dna na obou stranách Středoatlantického hřbetu. Mořské dno posouvající se od středooceánského hřbetu obsahuje záznam magnetické historie zemského jádra. Směr magnetického pole se mění na opačný přibližně za milion roků (někdy za sto tisíc, jindy za deset milionů let).

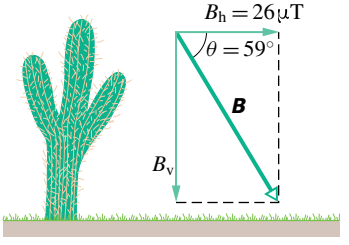
Přes uvedené změny se střední dipólový moment Země mění během takovéto relativně krátké doby málo. Změny za delší dobu můžeme studovat měřením slabého magnetismu mořského dna na obou stranách Středoatlantického hřbetu (obr. 32.5). Toto dno bylo vytvořeno roztaveným magmatem, které pomalu pronikalo ze zemského nitra, tuhlo a bylo postupně posunuto v příčném směru od hřbetu (posuvem tektonických desek) rychlostí několika centimetrů za rok. Jak magma tuhlo, slabě se zmagnetizovalo ve směru zemského magnetického pole v době tuhnutí. Studium tohoto ztuhlého magmatu napříč dnem oceánu odhaluje, že zemské magnetické pole měnilo svoji polaritu (směr severního a jižního pólu) přibližně jednou za milion let (někdy za sto tisíc, jindy za deset milionů let). Důvod této změny není znám. Mechanismus, který vytváří magnetické pole Země, nám stále není příliš jasný.

PŘÍKLAD 32.1

V arizonském Tucsonu v r. 1964 směřoval severní pól střelky kompasu 13° východně od severního zeměpisného pólu a severní pól inklinační magnetky směřoval 59° směrem dolů od vodorovné roviny. Vodorovná složka B_h zemského magnetického pole $\boldsymbol{B}$ v Tucsonu měla velikost 26 μT. Jaká byla velikost indukce B pole v gaussech? (Zemské magnetické pole se často udává v gaussech, G.)

ŘEŠENÍ: Obr. 32.6, který ukazuje zadané hodnoty, je kreslen ve svislé rovině vektoru $\boldsymbol{B}$, pootočené o 13° k východu. Z obrázku je patrné, že

$$B = \frac{B_h}{\cos\theta} = \frac{(26\,\mu\mathrm{T})}{\cos 59^\circ} = 50\,\mu\mathrm{T} = 0{,}50\,\mathrm{G}. \quad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 32.6 Příklad 32.1. Zemské magnetické pole a jeho složky v Tucsonu v Arizoně v r. 1964.

32.4 MAGNETISMUS A ELEKTRONY

Magnetické materiály od magnetovce až po videopásku jsou magnetické především díky svým elektronům. Už jsme poznali jeden způsob, jakým mohou elektrony generovat magnetické pole: usměrníme-li jejich pohyb vodičem, pak tento elektrický proud vytváří magnetické pole okolo vodiče. Existují dva další způsoby, které umožňují vznik magnetických dipólů a kterými se vytváří magnetické pole. Jejich vysvětlení však vyžaduje znalost kvantové fyziky, které se budeme věnovat později. Proto zde pouze nastíníme výsledky.

Spinový magnetický dipólový moment

Elektron má vlastní, vnitřní moment hybnosti, nazývaný též **spinový moment hybnosti** (nebo jednoduše **spin**), který značíme $\boldsymbol{S}$. Se spinem je spojen vlastní **spinový magnetický dipólový moment** $\boldsymbol{\mu}_s$. (Slovem *vlastní* máme na mysli to, že $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{\mu}$ jsou charakteristiky elektronu stejně jako jeho hmotnost a elektrický náboj. Přívlastek „dipólový" budeme zpravidla pro stručnost vypouštět.) Momenty $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{\mu}_s$ spolu souvisejí vztahem

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{m}\boldsymbol{S}, \tag{32.2}$$

kde e je elementární náboj ($1{,}60\cdot10^{-19}$ C) a m je hmotnost elektronu ($9{,}11\cdot10^{-31}$ kg). Znaménko minus znamená, že $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{\mu}_s$ mají opačné směry.

Spin $\boldsymbol{S}$ je zcela odlišný od klasického momentu hybnosti z kap. 12, a to ze dvou hledisek:

1. Samotný spin $\boldsymbol{S}$ nelze měřit. Měřit lze jen jeho složku ve zvoleném směru.
2. Měřená složka je kvantována; nabývá diskrétních hodnot, a to stejných bez ohledu na to, který směr jsme zvolili.

Předpokládejme, že měříme složku spinu $\boldsymbol{S}$ ve směru osy z souřadnicové soustavy. Pak složka S_z může mít pouze některou ze dvou hodnot daných vztahem

$$S_z = m_s\hbar \quad \text{pro } m_s = \pm\tfrac{1}{2}. \tag{32.3}$$

Zde m_s je *spinové magnetické kvantové číslo* a $\hbar = h/2\pi \doteq$ $\doteq 1{,}05\cdot10^{-34}$ J·s je redukovaná Planckova konstanta, významná konstanta kvantové fyziky. Znaménka v rov. (32.3) souvisejí se směrem průmětu $\boldsymbol{S}_z$ do osy z. Je-li $\boldsymbol{S}_z$ souhlasně rovnoběžný s osou z, je $m_s = +\frac{1}{2}$ a říkáme, že elektron má spin orientovaný nahoru. Je-li $\boldsymbol{S}_z$ s osou z nesouhlasně rovnoběžný, je $m_s = -\frac{1}{2}$ a říkáme, že elektron má spin orientovaný dolů.

Spinový magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_s$ také nelze měřit. Měřit lze pouze jeho složku, která je rovněž kvantována a která nabývá stejných hodnot nezávisle na zvoleném směru. Podle rov. (32.2) můžeme složku $\mu_{s,z}$ vyjádřit pomocí složky S_z spinu vztahem

$$\mu_{s,z} = -\frac{e}{m}S_z.$$

Dosazením za S_z z rov. (32.3) dostaneme

$$\mu_{s,z} = \pm\frac{e\hbar}{2m}, \tag{32.4}$$

kde znaménka plus a minus odpovídají souhlasně a nesouhlasně rovnoběžnému průmětu $\boldsymbol{\mu}_{s,z}$ do osy z.

Zlomek na pravé straně rov. (32.4) se nazývá *Bohrův magneton* μ_B:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9{,}27\cdot10^{-24}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}} \quad \text{(Bohrův magneton)}. \tag{32.5}$$

Spinové magnetické dipólové momenty elektronů a dalších elementárních částic jsou násobky μ_B. Pro elektron je měřená složka vektoru $\boldsymbol{\mu}_s$ rovna

$$\mu_{s,z} = \pm\mu_B. \tag{32.6}$$

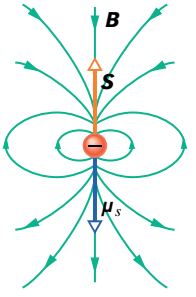
(*Kvantová elektrodynamika*, zabývající se kvantováním polí, ukazuje, že $\mu_{s,z}$ je ve skutečnosti poněkud větší než μ_B, ale to v našich úvahách není podstatné.)

Když je elektron umístěn do vnějšího magnetického pole $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$, lze libovolné orientaci magnetického spinového momentu $\boldsymbol{\mu}_s$ přiřadit potenciální energii E_p stejně, jako lze potenciální energii přiřadit magnetickému momentu $\boldsymbol{\mu}$ proudové smyčky umístěné v $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$. Z rov. (29.36) dostaneme pro potenciální energii elektronu

$$E_p = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \boldsymbol{B}_{\text{ext}} = -\mu_{s,z}B, \tag{32.7}$$

kde osa z je ve směru $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$.

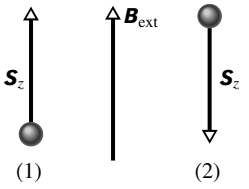
Představíme-li si, že elektron je mikroskopická kulička (což ale ve skutečnosti není!), můžeme znázornit spin $\boldsymbol{S}$, spinový magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_s$ a příslušné magnetické pole dipólu tak, jak je naznačeno na obr. 32.7. Ačkoli užíváme slovo „spin" (tj. rotace), elektrony nerotují jako vlček. Jak ale může mít částice moment hybnosti bez toho, že by skutečně rotovala? Odpověď opět dává až kvantová fyzika.



Obr. 32.7 Spin $\boldsymbol{S}$, spinový magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_s$ a magnetické pole $\boldsymbol{B}$ elektronu znázorněného kuličkou.

Podobně jako elektrony mají i protony a neutrony vlastní moment hybnosti (spin) a s ním spřažený spinový magnetický dipólový moment. Pro proton mají tyto dva vektory stejný směr, pro neutron jsou směry opačné. Nebudeme se zde zabývat příspěvky těchto dipólových momentů k magnetickému poli atomů, protože jsou asi tisíckrát menší než magnetické momenty elektronů.

KONTROLA 2: Obrázek ukazuje dvě částice a jejich spiny ve vnějším magnetickém poli $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$. Která z částic má menší potenciální energii, jde-li o (a) elektrony, (b) protony?



Orbitální magnetický dipólový moment

Elektron jako součást atomu má ještě orbitální moment hybnosti, který značíme $\boldsymbol{L}$. S ním je spojen orbitální magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}}$. Oba momenty spolu souvisejí vztahem

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m}\boldsymbol{L}. \qquad (32.8)$$

Záporné znaménko znamená, že $\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}}$ a $\boldsymbol{L}$ mají opačné směry.

Ani orbitální moment $\boldsymbol{L}$ nelze měřit; měřit lze jen jeho složku ve zvoleném směru a ta je kvantována. Zvolíme-li osu z, pak složka L_z může mít pouze hodnoty vyjádřené vztahem

$$L_z = m_l\hbar \quad \text{pro } m_l = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l, \qquad (32.9)$$

ve kterém m_l je orbitální magnetické kvantové číslo a l je tzv. orbitální (neboli vedlejší) kvantové číslo (viz čl. 41.4). Znaménka v rov. (32.9) souvisejí s orientací $\boldsymbol{L}_z$ vůči ose z.

Orbitální magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}}$ elektronu také nelze měřit; měřit lze opět jen jeho složku a ta je kvantována. Z rov. (32.8) a (32.9) plyne

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_l\frac{e\hbar}{2m} \qquad (32.10)$$

a užitím Bohrova magnetonu z rov. (32.5) dostaneme

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_l\mu_{\text{B}}. \qquad (32.11)$$

Nachází-li se atom ve vnějším magnetickém poli $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$, lze libovolné orientaci $\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}}$ každého jeho elektronu přiřadit potenciální energii E_{p} o hodnotě

$$E_{\text{p}} = -\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}}\cdot\boldsymbol{B}_{\text{ext}} = -\mu_{\text{orb},z}B_{\text{ext}}, \qquad (32.12)$$

kde osa z je ve směru $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$.

I když jsme zde použili termín „orbitální“, elektrony neobíhají jádro atomu po nějakých orbitách (dráhách, trajektoriích) jako planety okolo Slunce. Jak však může mít elektron orbitální moment hybnosti, aniž by obíhal v obvyklém významu tohoto slova? Odpověď dává opět až kvantová fyzika.

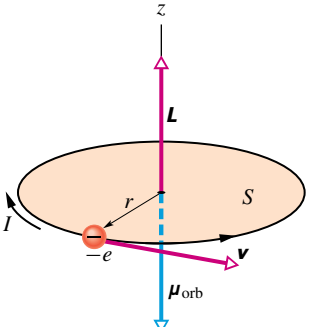
Smyčkový model pro dráhy elektronů

Rov. (32.8) odvodíme bez pomoci kvantové fyziky. Budeme pouze předpokládat, že elektron se pohybuje po kruhové dráze — smyčce s poloměrem mnohem větším, než je poloměr atomu (odtud název „smyčkový model“). Odvození se však nehodí na elektron uvnitř atomu (v tomto případě bychom potřebovali použít kvantovou fyziku).

Představme si, že elektron rovnoměrně obíhá po kruhové dráze proti směru otáčení hodinových ručiček, jak je znázorněno na obr. 32.8. Pohyb záporného náboje elektronu je ekvivalentní proudu I (kladného náboje), který teče ve směru otáčení hodinových ručiček. Velikost orbitálního magnetického dipólového momentu takovéto *proudové smyčky* je dána rov. (29.33) pro $N = 1$:

$$\mu_{\text{orb}} = IS, \qquad (32.13)$$

kde S je obsah plochy ohraničené smyčkou. Směr tohoto magnetického dipólu míří v obr. 32.8 podle pravidla pravé ruky v obr. 30.22 dolů.



Obr. 32.8 Elektron rovnoměrně obíhá po kruhové dráze o poloměru r, která obepíná plochu S. Elektron má orbitální moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ a s ním spojený orbitální magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}}$. Pohyb elektronu vytváří elektrický proud I tekoucí ve směru otáčení hodinových ručiček (elektron má *záporný* náboj).

K úpravě rov. (32.13) je třeba znát proud I. Ustálený proud je obecně podíl náboje, procházejícího libovolným průřezem obvodu, a doby průchodu. Zde náboj velikosti e proběhne celou kruhovou dráhu (orbitu) za dobu $T = 2\pi r/v$, takže

$$I = \frac{\text{náboj}}{\text{doba}} = \frac{e}{2\pi r/v}. \qquad (32.14)$$

Dosadíme-li tuto hodnotu a obsah plochy $S = \pi r^2$ do rov. (32.13), dostaneme

$$\mu_{\text{orb}} = \frac{e}{2\pi r/v}\pi r^2 = \frac{evr}{2}. \qquad (32.15)$$

Abychom získali výraz pro orbitální moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ elektronu, použijeme rov. (12.25) ($\boldsymbol{L} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})$). Protože $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou navzájem kolmé, má $\boldsymbol{L}$ velikost

$$L = mrv \sin 90^\circ = mrv. \qquad (32.16)$$

Vektor $\boldsymbol{L}$ na obr. 32.8 směřuje vzhůru (obr. 12.12). Použitím rov. (32.15) a (32.16) a při respektování opačných směrů vektorů znaménkem minus dostaneme vektorový zápis

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m}\boldsymbol{L},$$

což je rov. (32.8). Takto jsme klasickým (nekvantovým) postupem získali týž výsledek, který dává kvantová fyzika.

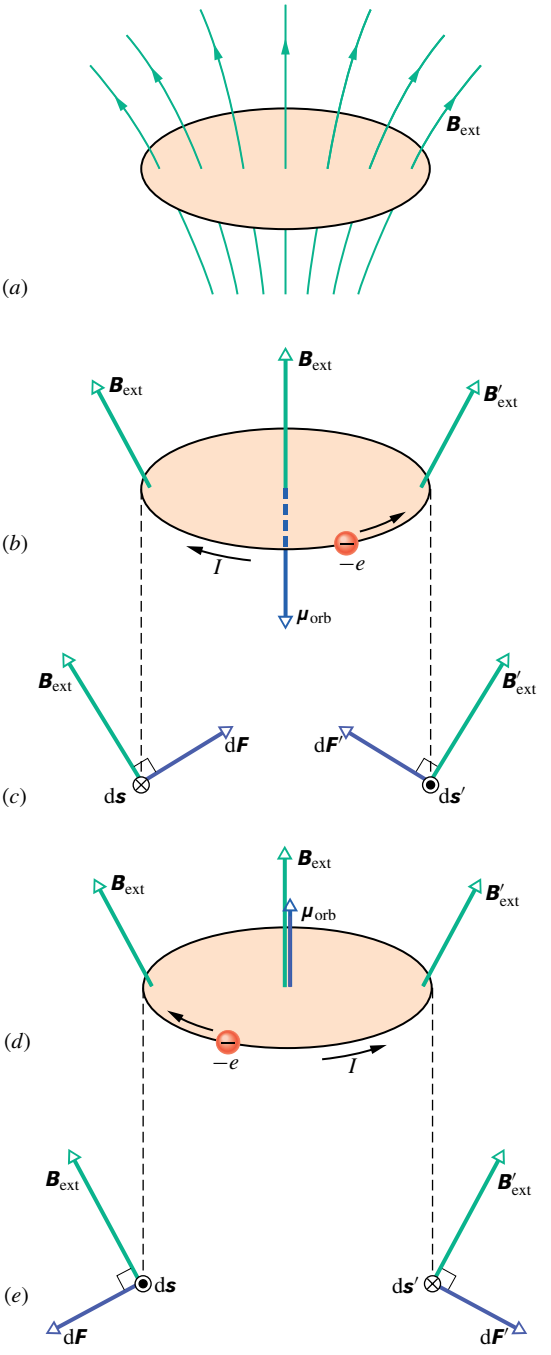
Takové odvození by šlo provést i pro elektron pohybující se uvnitř atomu a analogický výsledek by byl také správný. Taková představa by však vedla k dalším, nesprávným důsledkům. Proto jsme se omezili jen na dráhy podstatně větší.

Smyčka v nehomogenním poli

V dalším výkladu budeme považovat dráhu elektronu za (nedeformovatelnou) proudovou smyčku podle obr. 32.8. Budeme se však zabývat nehomogenním magnetickým polem $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$, jaké je naznačeno v obr. 32.9a. (Toto pole je podobné poli v okolí severního pólu magnetu v obr. 32.3, kde se indukční čáry také podobně rozbíhají. Připomeňme, že pole je silnější tam, kde jsou indukční čáry hustší, a je slabší tam, kde jsou řidší. Pole tedy slábne ve směru, v němž se indukční čáry rozbíhají a sílí ve směru, v němž se sbíhají.) Tím si připravíme podklady pro studium sil, působících na magnetické materiály v nehomogenních polích.

Předpokládejme vnější pole podle obr. 32.9b, d: vektory magnetické indukce podél celé kruhové dráhy elektronu mají stejnou velikost, jsou k ní kolmé a svírají se svislou osou stejný úhel. Také předpokládejme, že každý elektron v atomu se pohybuje buď proti směru (obr. 32.9b), nebo po směru (obr. 32.9d) otáčení hodinových ručiček. Obr. 32.9c, e ukazují tyto situace v řezu rovinou dráhy elektronu. Obrázky ukazují i dohodou přiřazený směr proudu I tekoucího proudovou smyčkou a orbitální magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}}$ proudu I.

Sledujme nejprve levou část obr. 32.9c. Je zakreslen element $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ smyčky orientovaný souhlasně se směrem proudu I, pole $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$ a magnetická síla $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ působící na ele-



Obr. 32.9 (a) Smyčkový model elektronu obíhajícího po kruhové dráze v atomu, který je v nehomogenním magnetickém poli $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$. (b) Náboj $-e$ obíhá proti směru otáčení hodinových ručiček, a proto má jemu odpovídající proud opačný směr. (c) Magnetické síly $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{F}'$ působící na levou a pravou stranu smyčky. Výsledná síla působící na smyčku směřuje nahoru. (Pohled v rovině smyčky.) (d) Opačný směr pohybu náboje. (e) Výsledná síla působící na smyčku směřuje dolů. (Pohled v rovině smyčky.)

ment d$\boldsymbol{s}$. Připomeňme, že na proudový element I d$\boldsymbol{s}$ v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$ působí magnetická síla podle rov. (29.27), tj.

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}_{\text{ext}}. \qquad (32.17)$$

V levé části obr. 32.9c směřuje tedy síla d$\boldsymbol{F}$ nahoru a doprava. Vzhledem k symetrii problému (otočení kolem svislé osy o 180°) má síla d$\boldsymbol{F}'$ na pravé straně obr. 32.9c stejnou velikost, směřuje rovněž nahoru, ale tentokrát doleva. Součtem sil d$\boldsymbol{F}$ a d$\boldsymbol{F}'$ se jejich vodorovné složky zruší, zatímco svislé se zdvojnásobí. Totéž platí pro každou symetricky umístěnou dvojici elementů smyčky. Výsledná síla na smyčku tedy bude podle obr. 32.9b působit nahoru. Úplně stejně odvodíme, že výsledná síla působící na smyčku v obr. 32.9e směřuje dolů. Toho použijeme dále při studiu chování materiálů v nehomogenním magnetickém poli.

32.5 MAGNETICKÉ LÁTKY

Každý elektron v atomu má orbitální dipólový magnetický moment a spinový magnetický dipólový moment, které se vektorově skládají. Výslednice těchto dvou vektorů se vektorově skládá s výslednicemi ostatních elektronů v atomu. A takto získaná výslednice pro jeden atom se skládá s výslednicemi všech ostatních atomů ve vzorku látky. Pokud součet všech těchto magnetických dipólových momentů vytváří makroskopické magnetické pole, je látka magnetická. Existují tři hlavní typy magnetismu: diamagnetismus, paramagnetismus a feromagnetismus.

1. ***Diamagnetismus*** vykazují všechny látky. Je ale tak slabý, že je překryt, když látka vykazuje také paramagnetismus nebo feromagnetismus. Umístíme-li jakoukoli látku do vnějšího magnetického pole, indukují se v jejích atomech slabé magnetické dipólové momenty orientované *proti vnějšímu poli*. Výsledné působení všech indukovaných dipólů je však zdrojem pouze slabého magnetického pole. Dipólové momenty, a tedy i jejich slabé pole zmizí, jestliže vnější pole odstraníme. Výraz *diamagnetická* látka se obvykle užívá pro materiály, které vykazují pouze diamagnetismus.

2. ***Paramagnetismus*** vykazují všechny látky, jejichž atomy mají nenulový moment hybnosti (např. všechny atomy s lichým počtem elektronů), a zejména látky obsahující přechodové prvky, prvky vzácných zemin a aktinidy (viz dodatek G). Každý atom takovéto látky má tedy i bez vnějšího působení svůj magnetický dipólový moment. Tyto momenty jsou však v látce náhodně orientovány, takže látka jako celek nemá výsledné magnetické pole. Vnější magnetické pole může částečně uspořádat atomové magnetické momenty *souhlasně* s vnějším polem a tím se v látce vytvoří magnetické pole. Vzniklé uspořádání však zanikne poté, co vnější pole odstraníme. Termín *paramagnetická* látka se obvykle užívá pro materiály, které vykazují paramagnetismus, ale nikoli feromagnetismus.

3. ***Feromagnetismus*** je vlastnost např. železa, niklu a několika málo dalších prvků (a jejich sloučenin a slitin). Některé elektrony v těchto materiálech seřadí souhlasně své výsledné magnetické dipólové momenty a vytvoří oblasti (domény) se silnými výslednými magnetickými dipólovými momenty. Vnější magnetické pole může pak seřadit magnetické momenty těchto oblastí a vytvořit tak silné magnetické pole látky jako celku. Toto pole se částečně udrží, i když je vnější pole odstraněno. Termín *feromagnetická* látka (a zpravidla jen *magnetická látka*) se obvykle užívá jen pro materiály, které vykazují převážně feromagnetismus.

Následující tři články zkoumají uvedené tři druhy magnetismu blíže.

32.6 DIAMAGNETISMUS

Třebaže magnetické vlastnosti látek lze vyčerpávajícím způsobem vyložit jen kvantově, můžeme diamagnetismus přiblížit i klasicky, použijeme-li smyčkový model z čl. 32.4. Protože nám jde jen o hlavní ideu, použijeme model co nejjednodušší: zvolíme osu z v očekávaném směru vnějšího magnetického pole $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$ a v atomu látky se budeme zabývat jen elektrony obíhajícími kolem jádra jedním (obr. 32.9b) či druhým (obr. 32.9d) směrem po kružnicích ležících v rovinách kolmých k ose z. Budeme také předpokládat, že počet elektronů obíhajících jedním i druhým směrem je stejný, takže výsledný magnetický dipólový moment celého atomu je roven nule (spin jádra lze pro náš účel zanedbat).

Přiložme na uvažovanou látku vnější magnetické pole tak, že je zesilujme z nuly až do jisté (koncové) hodnoty; při tom se magnetický indukční tok tohoto pole plochami ohraničenými proudovými smyčkami mění. Na elektron tedy působí tři síly: Coulombova síla, kterou je elektron vázán k jádru, Lorentzova síla, kterou na elektron působí přiložené magnetické pole, a síla od indukovaného elektrického pole vyvolaného změnou indukčního magnetického toku proudovou smyčkou. Zatímco první dvě síly udržují elektron na kruhové dráze, třetí síla zvyšuje nebo snižuje velikost jeho rychlosti; všimněme si této síly blíže. Změna indukčního toku během zesilování přiloženého magnetického pole vyvolá (podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce) elektrické pole, jehož intenzita má směr tečny k proudové smyčce. Toto indukované elektrické pole urychluje elektrony na obr. 32.9b obíhající proti směru otáčení hodinových ručiček a zpomaluje elektrony obíhající na

obr. 32.9d v opačném směru. Velikost magnetického dipólového momentu smyčky na obr. 32.9b tedy roste a smyčky na obr. 32.9d tedy klesá. Výsledný dipólový magnetický moment atomu vloženého do magnetického pole bude tedy nenulový a bude mířit *proti směru* vnějšího magnetického pole. (To, že indukovaný magnetický moment míří proti směru přiloženého magnetického pole, můžeme kvalitativně pochopit jako důsledek Lenzova zákona.) Zdůrazněme, že indukovaný magnetický dipólový moment získaný během změny vnějšího magnetického pole pak trvá, a to po celou dobu, kdy se látka v magnetickém poli nachází.

Je-li vnější pole $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$ homogenní, nepůsobí na vzorek diamagnetika žádná výsledná síla. Je-li však $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$ nehomogenní, pak odvodíme stejně jako v čl. 32.4, že vzorek je „vytlačován z pole ven“:

Je-li diamagnetická látka umístěna do vnějšího magnetického pole, vyvolá se v ní magnetický dipólový moment směřující proti tomuto poli. Pokud vnější pole není homogenní, je diamagnetická látka vytlačována „z pole ven“, tj. z oblasti s větší magnetickou indukcí do oblasti s menší indukcí.

KONTROLA 3: Na obrázku jsou dvě diamagnetické kuličky, umístěné v blízkosti jižního pólu tyčového magnetu. Jsou (a) magnetické síly působící na kuličky a (b) magnetické dipólové momenty kuliček orientovány směrem k tyčovému magnetu, nebo od něho? (c) Je magnetická síla na kuličku 1 větší, menší, nebo stejná jako síla působící na kuličku 2?



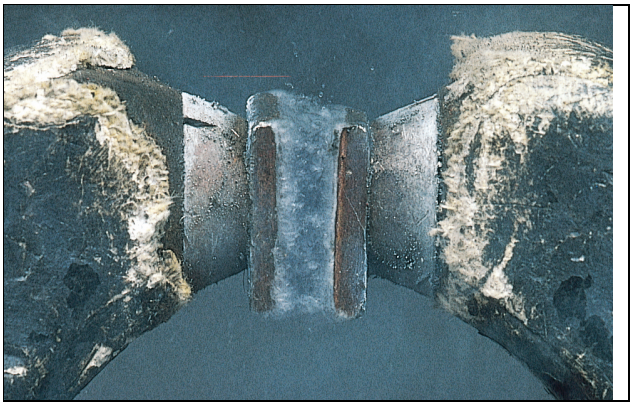
32.7 PARAMAGNETISMUS

V paramagnetických látkách se spinové a orbitální magnetické momenty elektronů v každém atomu při vektorovém skládání nevyruší, takže atomu zbude jistý výsledný (a trvalý) magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$. Za nepřítomnosti vnějšího pole jsou jednotlivé atomové magnetické momenty náhodně orientovány a výsledný moment je tedy nulový. Jestliže však vzorek látky vložíme do vnějšího magnetického pole $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$, snaží se magnetické dipólové momenty orientovat ve směru pole, takže vzorek získá výsledný nenulový magnetický moment. Jeho orientace je opačná, než se kterou jsme se setkali při diamagnetismu.

Je-li paramagnetická látka umístěna do vnějšího magnetického pole $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$, vytvoří se v ní magnetický dipólový moment ve směru tohoto pole. Není-li vnější magnetické pole homogenní, je paramagnetický materiál vtahován „do pole“, tj. z oblasti s menší magnetickou indukcí do oblasti s větší indukcí.

V případě, že by všechny atomové magnetické dipóly $\boldsymbol{\mu}$ byly souhlasně seřazeny, měl by paramagnetický vzorek s N atomy mít magnetický dipólový moment o velikosti $N\mu$. Náhodné srážky atomů v důsledku neuspořádaného tepelného pohybu atomů však narušují jejich seřazení a zmenšují velikost výsledného magnetického dipólového momentu vzorku.

Vliv tepelného pohybu lze posoudit porovnáním dvou energií. První je (viz rov. (20.20)) střední kinetická energie posuvného pohybu $E_{\text{k}} = \frac{3}{2}kT$ atomů při teplotě T; $k = 1{,}38{\cdot}10^{-23}\ \text{J}{\cdot}\text{K}^{-1}$ je Boltzmannova konstanta. Druhá je (viz rov. (29.37)) rozdíl energie $\Delta E_{\text{p}} = 2\mu B_{\text{ext}}$ mezi souhlasnou a nesouhlasnou orientací magnetického dipólového momentu atomu vzhledem k vnějšímu magnetickému poli. Jak ukážeme níže, při obvyklých teplotách a velikostech magnetické indukce je $E_{\text{k}} \gg \Delta E_{\text{p}}$. Proto se uspořádání atomových dipólových momentů snadno naruší srážkami mezi atomy. To vede ke zmenšení magnetického momentu vzorku na hodnotu mnohem menší, než je maximální možná hodnota $N\mu$.



Kapalný kyslík se vznáší mezi dvěma čely magnetu, neboť je paramagnetický a je do magnetického pole vtahován.

Míru zmagnetování látky můžeme vyjádřit vektorem **magnetizace** $\boldsymbol{M}$. Ten udává magnetický dipólový moment jednotkového objemu látky:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\text{magnetický moment}}{\text{objem}}. \qquad (32.18)$$

Jednotkou $\boldsymbol{M}$ je $\text{A}{\cdot}\text{m}^{-1}$. Úplné seřazení atomárních dipólo-

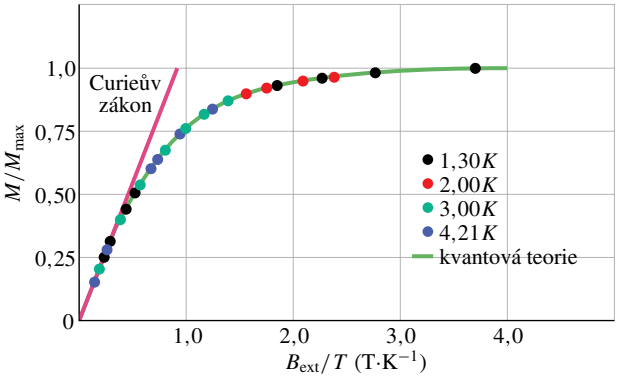
vých momentů, nazývané *saturace* vzorku, odpovídá maximální hodnotě $M_{max} = N\mu/V$.

Pierre Curie v r. 1895 objevil experimentálně, že magnetizace paramagnetické látky je přímo úměrná indukci $\boldsymbol{B}_{ext}$ vnějšího magnetického pole a nepřímo úměrná absolutní teplotě T, tj.

$$M = C\frac{B_{ext}}{T} \quad \text{(Curieův zákon).} \qquad (32.19)$$

Rov. (32.19) se nazývá *Curieův zákon* a C je *Curieova konstanta*. Curieův zákon vyjadřuje to, co intuitivně chápeme: při zvětšení B_{ext} se seřadí atomové dipólové momenty, a tedy M se zvětší, zatímco při zvýšení T se poruší seřazení v důsledku tepelného pohybu, a tedy M se zmenší. Tento zákon je pouze přiblížením a platí jen pro slabá pole a vyšší teploty. Uvedený vztah byl později odvozen teoreticky (viz též úlohu 27).

Obr. 32.10 ukazuje magnetizační křivku, tj. poměr M/M_{max} jako funkci B_{ext}/T pro síran chromito-draselný, ve kterém jsou ionty chromu paramagnetickou substancí. Lineární závislost podle Curieova zákona souhlasí s experimentálními daty v levé části grafu cca pro $B_{ext}/T < 0{,}5\,\mathrm{T\cdot K^{-1}}$. Křivka, která odpovídá naměřeným hodnotám v celém rozsahu, odpovídá výkladu na základě kvantové fyziky. Hodnoty v pravé části grafu poblíž nasycení se získávají velmi obtížně, neboť vyžadují velmi silná magnetická pole (asi 100 000krát silnější než zemské pole), a to i za velmi nízkých teplot vyznačených v obr. 32.10.



Obr. 32.10 *Magnetizační křivka* pro paramagnetickou látku (síran chromito-draselný). Poměr magnetizace M látky k maximální magnetizaci M_{max} je zobrazen jako funkce podílu magnetické indukce B_{ext} a teploty T. Curieův zákon souhlasí s hodnotami v levé části grafu; kvantová teorie uspokojivě vysvětluje hodnoty v celém intervalu. Podle W. E. Henryho.

PŘÍKLAD 32.2

Paramagnetický plyn při pokojové teplotě 300 K se nachází ve vnějším homogenním magnetickém poli s $B = 1{,}5$ T. Atomy plynu mají magnetický dipólový moment velikosti $\mu = 1{,}0\mu_B$. Vypočtěte střední kinetickou energii posuvného pohybu E_k atomu plynu a rozdíl energie ΔE_p mezi souhlasnou a nesouhlasnou orientací magnetického dipólového momentu atomu vzhledem k vnějšímu poli.

ŘEŠENÍ: Z rov. (20.20) vypočteme

$$E_k = \tfrac{3}{2}kT = \tfrac{3}{2}(1{,}38\cdot10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}})(300\,\mathrm{K}) =$$
$$= 6{,}2\cdot10^{-21}\,\mathrm{J} = 0{,}039\,\mathrm{eV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z rov. (29.37) a (32.5) dostaneme

$$\Delta E_p = 2\mu B = 2(9{,}27\cdot10^{-24}\,\mathrm{J\cdot T^{-1}})(1{,}5\,\mathrm{T}) =$$
$$= 2{,}8\cdot10^{-23}\,\mathrm{J} = 0{,}000\,17\,\mathrm{eV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Energie E_k je asi 230krát větší než ΔE_p, takže výměnou energie mezi atomy během vzájemných srážek se snadno mění směr magnetických momentů, které by jinak byly orientovány ve směru vnějšího magnetického pole. Magnetický moment vykazovaný plynem je pak slabým uspořádáním atomových momentů.

KONTROLA 4: Na obrázku jsou dvě paramagnetické kuličky, umístěné v blízkosti jižního pólu tyčového magnetu. Jsou (a) magnetické síly působící na kuličky a (b) magnetické momenty kuliček orientovány směrem k magnetu, nebo od něj? (c) Je magnetická síla na kuličku (1) větší, menší, nebo stejná jako síla působící na kuličku (2)?



32.8 FEROMAGNETISMUS

Když mluvíme o magnetismu v běžném významu tohoto slova, máme spíše na mysli představu tyčového nebo malého knoflíkového magnetu (přidržujícího např. vzkaz na chladničce). Představujeme si tedy feromagnetický materiál se silným permanentním magnetismem, a ne diamagnetickou nebo paramagnetickou látku se slabými a dočasnými magnetickými vlastnostmi.

Železo, kobalt, nikl, gadolinium, dysprozium a slitiny těchto i některých jiných (i neferomagnetických) prvků vykazují feromagnetismus v důsledku čistě kvantového jevu, nazývaného *výměnná interakce*. Při tomto procesu se spiny elektronů jednoho atomu vzájemně ovlivňují se spiny sousedních atomů. Výsledkem je souhlasná orientace magnetických momentů atomů, která překonává rušivý vliv náhodných vzájemných srážek.

Pokud zvýšíme teplotu feromagnetického materiálu nad jistou kritickou hodnotu nazývanou *Curieova teplota*, výměnná interakce již k uspořádání momentů nepostačí a materiál se stane paramagnetickým. Dipóly sice stále jeví snahu seřadit se podle vnějšího pole, ale mnohem slaběji. Tepelný pohyb pak může snáze porušit jejich uspořádání. Curieova teplota pro železo je 1 043 K $\doteq$ 770 °C.

Magnetizaci feromagnetických materiálů (jako je železo) můžeme studovat v uspořádání nazývaném *Rowlandův prstenec* (obr. 32.11). Měřený materiál má tvar tenkého prstencového jádra kruhového průřezu. Primární cívka P s n závity na jednotku délky je rovnoměrně navinuta po obvodu prstence a prochází jí proud I_P. Bez železného jádra by magnetická indukce pole uvnitř cívky měla podle rov. (30.25) velikost

$$B_0 = \mu_0 n I_P. \tag{32.20}$$

Je-li v cívce železné jádro, je velikost magnetické indukce B uvnitř cívky obvykle mnohonásobně větší než B_0. Můžeme ji zapsat jako součet

$$B = B_0 + B_M, \tag{32.21}$$

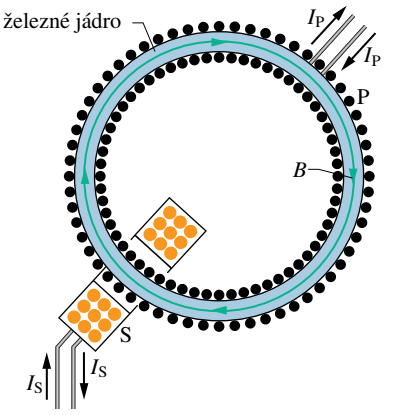
kde B_M je příspěvek k magnetickému poli od železného jádra. Tento příspěvek je způsoben souhlasným uspořádáním atomových dipólových momentů v železe díky výměnné interakci a vlivem magnetického pole $\boldsymbol{B}_0$.

Abychom stanovili B_M, je nutné znát B_0 a B; B_0 vypočteme z rov. (32.20) a B změříme takto: Proud primární cívkou P prudce zvýšíme z nuly na hodnotu I_P. Během tohoto děje se mění B a magnetický indukční tok v jádru toroidu tvořeném měřeným materiálem. Indukované emn v sekundární cívce S vyvolá krátký proudový pulz $I_S(t)$, který projde balistickým galvanometrem* (na obr. 32.11 není zakreslen). Balistickým galvanometrem změříme celkový náboj, který jím projde a který je (jak se dá vypočítat) úměrný nárůstu velikosti magnetické indukce v měřeném materiálu, tedy hledané hodnotě B.

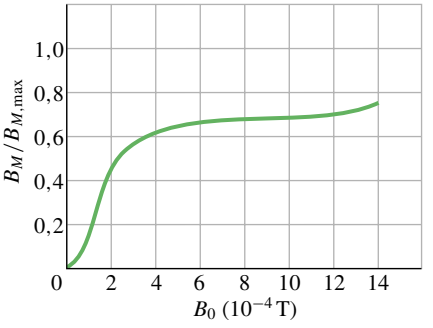
Obr. 32.12 ukazuje magnetizační křivku pro feromagnetický materiál v Rowlandově prstenci, tj. závislost podílu $B_M/B_{M,\max}$ na B_0 ($B_{M,\max}$ je nejvyšší možná hodnota B_M odpovídající saturaci). Křivka je podobná závislosti v obr. 32.10, tj. magnetizační křivce pro paramagnetickou látku. Obě křivky ukazují, jak dalece je pole B_0 úspěšné při tomto uspořádávání.

Pro feromagnetické jádro z obr. 32.12 jsou dipóly seřazeny na 70 % pro $B_0 \doteq 1{\cdot}10^{-3}$ T. Pokud bychom B_0 zvýšili na 1 T, uspořádání by bylo téměř úplné (dosáhnout hodnoty $B_0 = 1$ T je však velmi obtížné).

* Nyní se k sekundární cívce S připojuje místo klasického galvanometru elektronický integrátor napětí, který přímo udává hodnotu B.



Obr. 32.11 Rowlandův prstenec; užívá se k měření B ve feromagnetických materiálech.

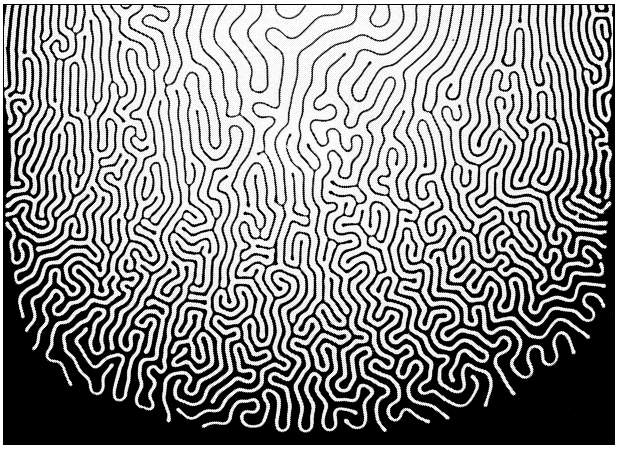


Obr. 32.12 Magnetizační křivka pro feromagnetické jádro v Rowlandově prstenci z obr. 32.11. Hodnota 1,0 na svislé ose odpovídá úplnému seřazení (saturaci) atomárních dipólů v materiálu.

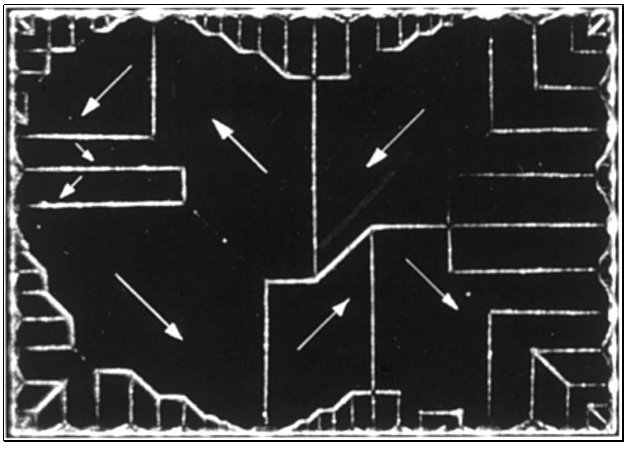
Magnetické domény

Výměnná interakce vytváří při teplotě pod Curieovým bodem výrazné uspořádání sousedních atomárních dipólů ve feromagnetických materiálech. Proč tedy není materiál přirozeně saturován v případě, kdy není použito žádné vnější magnetické pole B_0? Proč není každý kus železa, jako je např. hřebík, sám od sebe silným magnetem?

K pochopení tohoto jevu uvažujme monokrystalický vzorek feromagnetického materiálu, jako je např. železo. V monokrystalech jsou atomy, ze kterých je vzorek sestaven, zcela pravidelně uspořádány v celém objemu vzorku. I takový krystal se však bude v normálním stavu skládat z určitého počtu *magnetických domén*. Domény jsou oblasti krystalu, ve kterých jsou atomové dipóly úplně seřazeny. V krystalu jako celku jsou však jednotlivé domény orientovány celkem náhodně, takže pole domén se navzájem navenek z velké části ruší.



Neprůhledná magnetická tekutina (suspenze jemného prášku magnetitu v petroleji) a průhledná nemagnetická tekutina jsou nality do tenké skleněné kyvety. Když je kyveta ve svislé poloze, magnetická tekutina (v obrázku černě), která má větší hustotu, klesne ke dnu kyvety. Přiložíme-li nyní magnetické pole kolmo ke stěně kyvety, magnetická kapalina se vymrští hadovitě směrem do nemagnetické kapaliny a vytvoří půvabné bludiště.



Obr. 32.13 Fotografie obrazce domén v monokrystalu niklu; bílé čáry ukazují hranice domén. Bílé šipky (dokreslené na fotografii dodatečně) ukazují orientace magnetických dipólů uvnitř oblastí, a tedy orientace výsledných magnetických dipólů domén. Krystal jako celek je nemagnetický, pokud výsledné magnetické pole (vyjádřené vektorovým součtem přes všechny domény) je nulové.

Obr. 32.13 představuje zvětšenou fotografii uspořádání domén v monokrystalu niklu. Zviditelnění bylo dosaženo postříkáním povrchu krystalu koloidní suspenzí jemného železného prachu. Na hranici domén, tedy tam, kde se mění orientace elementárních dipólů, je silné, ostře lokalizované a nehomogenní magnetické pole. Suspendované koloidní částice jsou přitahovány k těmto hranicím a jsou vidět jako bílé čáry. Ačkoli jsou atomární dipóly v každé oblasti zcela seřazeny v jednom směru (jak ukazují šipky), má krystal jako celek navenek velmi malý výsledný magnetický moment.

Obyčejný kus železa, se kterým se obvykle setkáme, není monokrystal, ale seskupení mnoha maličkých krystalků, které jsou náhodně uspořádané. Takové těleso nazýváme polykrystalické. Každý malý krystal však má své vlastní pole různě orientovaných magnetických domén stejně jako na obr. 32.13. Pokud magnetizujeme takový vzorek postupně narůstajícím magnetickým polem, vyvoláme dva procesy, které spolu určují průběh magnetizační křivky podle obr. 32.12: jednak se zvětšují ty domény, které jsou orientovány ve směru vnějšího pole na úkor ostatních, jednak se v rámci jedné domény přeorientují všechny dipóly jako celek do směru bližšího směru vnějšího pole.

Ve feromagnetickém materiálu se vytvoří vnějším magnetickým polem výrazný magnetický dipólový moment ve směru $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$. Pokud je pole nehomogenní, feromagnetický materiál je vtahován „do pole“, tj. z oblasti s menší magnetickou indukcí směrem do oblasti s větší indukcí.

Posun domén můžeme dokonce slyšet. Postačí, když přepneme kazetový přehrávač bez kazety do módu přehrávání, nastavíme hlasitost na maximum a potom přiložíme silný magnet k přehrávací hlavě; ta je feromagnetická. Pole magnetu způsobí, že se domény v přehrávací hlavě přeorientovávají, čímž se mění magnetické pole v cívce, která je na hlavě navinutá. Výsledné napětí indukované onou změnou pole se pak zesiluje a přivádí na reproduktor, ze kterého slyšíme praskavé zvuky.

Magnetismus dávných pecí

Jíl ve stěnách a na dně dávných pecí se chová podobně jako železo, neboť obsahuje oxidy železa — magnetit a hematit. V jednom zrnku magnetitu je mnoho velmi malých domén velikosti okolo $3\cdot10^{-7}$ m. Naproti tomu každé zrnko hematitu tvoří jedinou doménu velikosti až 1 mm. Když je jíl zahřát na teplotu několika set stupňů Celsia (a to je v pecích běžné), změní se domény v zrnkách obou typů. V magnetitu se doménové stěny posunou tak, že se zvětší ty domény, které jsou více orientované ve směru zemského magnetického pole, zatímco domény orientované v jiných směrech se zmenší. V hematitu se domény pootočí tak, aby byly více orientovány ve směru magnetického pole Země. Oba procesy pak vedou k tomu, že jíl má magnetické pole, které je rovnoběžné s polem Země. Když pec po použití vychladne, zůstane uspořádání domén, a tím i magnetické pole v jílu zachováno. Tento jev nazýváme *termoremanentní magnetismus* (TRM).

K určení směru magnetického pole Země v daném místě v době posledního vyhřátí a zchlazení pece vymezí archeolog malý vzorek dna pece, pečlivě změří jeho orientaci vůči vodorovné rovině a zeměpisnému severu a vyjme ho ze dna pece. Pak určí směr magnetického pole samotného vzorku, neovlivněného stávajícím magnetickým polem Země. Tím určí směr magnetického pole Země v době, kdy byla pec naposledy použita. Je-li známo stáří pece, např. radiouhlíkovou metodou, je tím určeno, kdy mělo pole zjištěný směr.

PŘÍKLAD 32.3

Střelka kompasu z čistého železa (o hustotě 7 900 $\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$) má délku $L = 3{,}0$ cm, šířku 1,0 mm a tloušťku 0,5 mm. Velikost dipólového momentu spojeného s atomem železa je $\mu_{\mathrm{Fe}} = 2{,}1{\cdot}10^{-23}\ \mathrm{J{\cdot}T^{-1}}$.

(a) Kdyby mělo 10 % atomů ve střelce orientováno svůj magnetický moment ve směru pole, jaký by byl její dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$?

ŘEŠENÍ: Seřazení všech N atomů ve střelce by vyvolalo magnetický dipólový moment $N\mu_{\mathrm{Fe}}$. Pro 10 % seřazených atomů dostaneme

$$\mu = 0{,}10 N \mu_{\mathrm{Fe}}. \tag{32.22}$$

Počet atomů ve střelce je

$$N = \frac{\text{hmotnost střelky}}{\text{hmotnost atomu železa}}. \tag{32.23}$$

Hmotnost střelky m je součinem její hustoty 7 900 $\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a jejího objemu $1{,}50 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m^3}$, tedy $1{,}185{\cdot}10^{-4}$ kg. Hmotnost atomu železa je poměr molární hmotnosti železa $m_{\mathrm{m}} = 55{,}847\ \mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ (dodatek F) a Avogadrovy konstanty $N_{\mathrm{A}} = 6{,}02{\cdot}10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$. Dosazením rov. (32.23) do rov. (32.22) a použitím výše uvedených veličin a číselných údajů nalezneme

$$\begin{aligned}\mu &= 0{,}10\left(\frac{mN_A}{m_{\mathrm{m}}}\mu_{\mathrm{Fe}}\right) = \\ &= 0{,}10\frac{(1{,}185{\cdot}10^{-4}\ \mathrm{kg})(6{,}02{\cdot}10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}})}{(55{,}847\ \mathrm{g{\cdot}mol^{-1}})(10^{-3}\ \mathrm{kg/g})} \cdot \\ &\quad \cdot (2{,}1{\cdot}10^{-23}\ \mathrm{J{\cdot}T^{-1}}) = \\ &= 2{,}682{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{J{\cdot}T^{-1}} \doteq 2{,}7{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{J{\cdot}T^{-1}}. \quad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

(b) Pokud střelku kompasu lehce vychýlíme z její (vodorovné) severojižní rovnovážné polohy, kmitá kolem ní. Jaká je vodorovná složka indukce zemského magnetického pole, je-li perioda těchto kmitů 2,2 s?

ŘEŠENÍ: Dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$ střelky směřuje od jejího jižního pólu k severnímu. Když střelku pootočíme z rovnovážné polohy o úhel θ, pootočí se tím i $\boldsymbol{\mu}$. Zemské magnetické pole pak vyvolá silový moment $\boldsymbol{M}$ vzhledem k ose otáčení, který vrací střelku zpět, aby byl směr $\boldsymbol{\mu}$ (a střelka) znovu rovnoběžný s vodorovnou složkou pole. (Připomeňme, že střelka je volně otáčivá pouze ve vodorovné rovině, takže uvažujeme pouze složku B_{h}.) Podle rov. (29.34) je

$$M = -\mu B_{\mathrm{h}} \sin\theta, \tag{32.24}$$

kde znaménko minus ukazuje, že M má opačnou orientaci než θ. Protože je úhlová výchylka velmi malá, můžeme psát $\sin\theta \approx \theta$, takže

$$M = -\mu B_{\mathrm{h}}\theta. \tag{32.25}$$

Protože μ a B_{h} jsou konstanty, je moment síly, vracející střelku do její ustálené polohy, úměrný záporně vzaté úhlové výchylce. Tento vztah je charakteristický pro harmonický pohyb, jak jsme viděli v čl. 16.5. Z rovnic (16.24) a (16.25) plyne pro periodu kmitů

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mu B_{\mathrm{h}}}},$$

odkud

$$B_{\mathrm{h}} = \frac{J}{\mu}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2, \tag{32.26}$$

kde J je moment setrvačnosti střelky vzhledem k ose jejího otáčení. Považujeme-li střelku za homogenní tenkou tyč a použijeme-li tab. 11.2e, dostaneme

$$\begin{aligned}J &= \frac{mL^2}{12} = \frac{(1{,}185{\cdot}10^{-4}\ \mathrm{kg})(0{,}030\ \mathrm{m})^2}{12} = \\ &= 8{,}888{\cdot}10^{-9}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}.\end{aligned}$$

Dosazením za J, T a μ do rov. (32.26) obdržíme výsledek

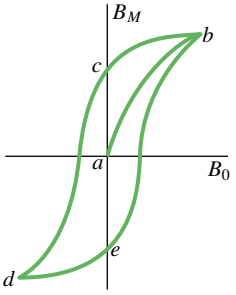
$$\begin{aligned}B_{\mathrm{h}} &= \frac{(8{,}888{\cdot}10^{-9}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2})}{(2{,}682{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{J{\cdot}T^{-1}})}\left(\frac{2\pi}{2{,}2\ \mathrm{s}}\right)^2 = \\ &= 2{,}7{\cdot}10^{-5}\ \mathrm{T}. \quad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

To je přibližně stejná hodnota, kterou jsme použili v př. 32.1 pro Tucson. Vidíme, že dokonce i s levným kompasem můžeme měřit místní magnetické pole (vodorovnou složku magnetické indukce) změřením doby kmitu střelky po jejím malém vychýlení.

Hystereze

Magnetizační křivky feromagnetických materiálů nemají stejný průběh v procesu zesilování a v procesu zeslabování vnějšího magnetického pole B_0. Obr. 32.14 znázorňuje závislost B_M na B_0 během následujícího postupu magnetizace Rowlandova prstence: (1) Začneme s nezmagnetovaným železem (bod a) a zvyšujeme proud v toroidu, až

$B_0 = \mu_0 n I$ má hodnotu odpovídající bodu b. (2) Snižujeme proud ve vinutí toroidu zpět k nule (bod c). (3) Obrátíme směr proudu a zvyšujeme jeho velikost, až B_0 má hodnotu odpovídající bodu d. (4) Proud znovu snižujeme až na nulovou hodnotu (bod e). (5) Změníme směr proudu na původní, až znovu dosáhneme bodu b.



Obr. 32.14 Magnetizační křivka (ab) pro feromagnetický vzorek a příslušná hysterezní smyčka ($bcdeb$).

Nejednoznačná závislost B_M na B_0 podle obr. 32.14, tedy to, že B_M závisí nejen na hodnotě B_0, ale i na tom, jakou cestou k magnetizaci došlo, se nazývá **hystereze** a křivka $bcdeb$ se nazývá magnetická *hysterezní smyčka*. Poznamenejme, že v bodech c a e je železné jádro zmagnetováno, i když je proud ve vinutí nulový. To je dobře známý jev, nazývaný *permanentní magnetismus*.

Hysterezi můžeme vyložit pomocí magnetických domén. Pohyby hranic domén a změna orientace jejich směru nejsou zřejmě děje zcela vratné. Jestliže vnější magnetické pole B_0 zesílíme a poté zeslabíme na původní hodnotu, nevrátí se domény zcela do původního stavu, ale částečně si „zapamatují“ směr, do něhož byly natočeny předchozí změnou. Tato paměť magnetických materiálů je zásadní pro magnetické uchování informace např. na magnetických páskách kazet nebo na discích počítačů.

Paměť daná seřazením domén se může vyskytovat i v přírodě. Když udeří blesk, tekou elektrické proudy mnohočetnými křivolakými cestami v zemi a vytvoří silné magnetické pole, které může zmagnetovat jakýkoli feromagnetický materiál v blízké skále. Takový materiál zachová v důsledku hystereze jistou magnetizaci i po úderu blesku, tj. poté, co proud zmizí. Kusy skály, později vystavené vlivu počasí, se rozpadají na přírodní magnetovec, o kterém jsme hovořili v úvodu této kapitoly.

32.9 INDUKOVANÉ MAGNETICKÉ POLE

Dosud jsme viděli, že magnetické pole lze vytvořit elektrickým proudem (viz kap. 30) nebo magnetickými materiály. Existuje i třetí způsob, jak je vytvořit — magnetoelektrickou indukcí.

V kap. 31 jsme viděli, že časová změna toku magnetické indukce vytváří elektrické pole, což vyjadřuje Faradayův zákon elektromagnetické indukce (rov. (31.22)):

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Faradayův zákon elektromagnetické indukce).} \qquad (32.27)$$

Zde $\boldsymbol{E}$ je intenzita elektrického pole indukovaného podél orientované uzavřené křivky časovou změnou toku Φ_B magnetické indukce plochou, která je touto křivkou ohraničena. Protože se ve fyzice často uplatňuje princip symetrie, pokusíme se zjistit, zda se uvedený jev indukce nevyskytuje také obráceně. Jinými slovy: může změna toku elektrické intenzity (elektrického toku) indukovat pole magnetické?

Odpověď je kladná; navíc rovnice, která popisuje indukování magnetického pole (jev **magnetoelektrické indukce**), má téměř stejnou strukturu jako rov. (32.27):

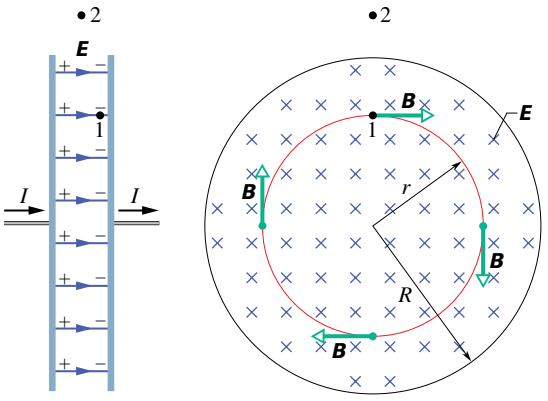
$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Maxwellův zákon magnetoelektrické indukce),} \qquad (32.28)$$

kroužek na integrálu opět ukazuje, že se integruje po uzavřené křivce. Její orientace je svázána s orientací vektoru $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ v plošném integrálu vyjadřujícím elektrický tok Φ_E pravidlem pravé ruky stejně jako u Faradayova zákona.

Jako příklad tohoto typu indukce uvažujme nabíjení kondenzátoru s rovnoběžnými kruhovými elektrodami podle obr. 32.15a. (I když se dále soustředíme na toto konkrétní uspořádání, zdůrazněme, že časově proměnný elektrický tok indukuje magnetické pole vždy.) Předpokládejme, že náboj na kondenzátoru narůstá rovnoměrně s časem tím, že přitéká konstantní proud přívodními vodiči. Potom i velikost intenzity elektrického pole mezi deskami rovnoměrně narůstá s časem.

Na obr. 32.15b je pohled na pravou elektrodu z prostoru mezi deskami. Elektrické pole $\boldsymbol{E}$ směřuje od nás. Uvažujme kružnici procházející bodem 1 v obr. 32.15 soustřednou s kruhovými elektrodami kondenzátoru a s poloměrem menším než poloměr desek. Protože elektrické pole v prostoru mezi elektrodami se s časem mění, mění se s časem i elektrický tok Φ_E. Podle rov. (32.28) tento proměnný elektrický tok indukuje magnetické pole podél uzavřené křivky — kružnice.

Experiment potvrzuje, že se magnetické pole podél této kružnice *skutečně* indukuje a jeho indukce $\boldsymbol{B}$ má směr vyznačený na obrázku. Ta má konstantní velikost v každém bodě kružnice, a proto má toto magnetické pole válcovou symetrii vůči středové ose desek kondenzátoru.



Obr. 32.15 (a) Kondenzátor s rovnoběžnými kruhovými elektrodami, nakreslený v bočním pohledu, je nabíjen konstantním proudem I. (b) Pohled z prostoru mezi deskami směrem k pravé desce. Elektrické pole $\boldsymbol{E}$ je homogenní a směřuje kolmo do nákresny (směrem k desce), velikost $\boldsymbol{E}$ roste spolu s narůstajícím nábojem na kondenzátoru. Magnetické pole $\boldsymbol{B}$, indukované tímto proměnným elektrickým polem, je naznačeno ve čtyřech bodech na kružnici s poloměrem r menším, než je poloměr elektrod R.

Pokud nyní uvažujeme větší kružnici, procházející např. bodem 2 mimo desky, shledáme, že podél této kružnice se také indukuje magnetické pole. Můžeme říci, že mění-li se elektrické pole v čase, indukuje se magnetické pole jak mezi elektrodami, tak i vně. Když se elektrické pole přestane měnit v čase, zmizí i indukované magnetické pole.

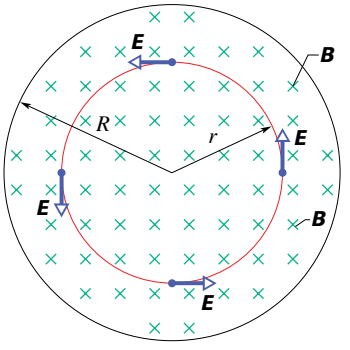
Ačkoli jsou si rov. (32.28) a (32.27) podobné, liší se od sebe dvojím: (1) Rov. (32.28) obsahuje dva symboly navíc, μ_0 a ε_0, ale ty jsou důsledkem volby jednotek v SI. (2) Rov. (32.28) nemá znaménko minus, které je v rov. (32.27). Tento rozdíl ve znaménkách znamená, že intenzita $\boldsymbol{E}$ indukovaného elektrického pole a indukce $\boldsymbol{B}$ indukovaného magnetického pole mají opačné směry, jsou-li vytvořena stejnými změnami svých budících polí.

Abychom viděli tento rozdíl ve směrech indukovaných polí, sledujme obrázek 32.16, na kterém rostoucí magnetické pole $\boldsymbol{B}$ směřující od nás indukuje elektrické pole $\boldsymbol{E}$. Jeho intenzita $\boldsymbol{E}$ má směr proti otáčení hodinových ručiček, zatímco indukce $\boldsymbol{B}$ magnetického pole (indukovaného na obr. 32.15b narůstajícím elektrickým polem $\boldsymbol{E}$ směřujícím od nás) má směr opačný.

Připomeňme nyní, že levá strana rov. (32.28), tj. cirkulace vektoru $\boldsymbol{B}$, se vyskytuje i v jiné rovnici, a to v Ampérově zákonu (30.16):

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I_\mathrm{c} \quad \text{(Ampérův zákon)}, \qquad (32.29)$$

kde I_c je proud obepnutý uzavřenou orientovanou křivkou (Ampérovou křivkou). Obě rovnice (32.28) a (32.29), které určují magnetické pole $\boldsymbol{B}$ pocházející od elektrického proudu a od proměnného elektrického pole, můžeme spojit v rovnici jedinou:



Obr. 32.16 Homogenní magnetické pole $\boldsymbol{B}$ v kruhové oblasti. Pole směřuje kolmo do nákresny a jeho velikost rovnoměrně narůstá s časem. Elektrické pole $\boldsymbol{E}$, indukované změnou magnetického pole, je naznačeno ve čtyřech bodech na kružnici souosé s kruhovými deskami. Porovnejte tento stav s obr. 32.15b.

$$\frac{1}{\mu_0}\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} + I_\mathrm{c}$$

(Ampérův-Maxwellův zákon). (32.30)

Je-li proud I_c nenulový a elektrický tok se nemění v čase (jako v případě vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud), je první člen na pravé straně rov. (32.30) nulový a rov. (32.30) se redukuje na rov. (32.29) — Ampérův zákon. Pokud se s časem mění elektrický tok při nulovém proudu (tak jako uvnitř nebo vně elektrod kondenzátoru), je druhý člen na pravé straně rov. (32.30) nulový a rov. (32.30) se redukuje na rov. (32.28) vyjadřující magnetoelektrickou indukci.

PŘÍKLAD 32.4

Nabíjíme kondenzátor s rovnoběžnými kruhovými elektrodami o poloměru R, obr. 32.15a.

(a) Jaké magnetické pole se indukuje v bodech ve vzdálenosti r od osy elektrod pro $r \leqq R$?

ŘEŠENÍ: Mezi elektrodami neprotéká proud, proto v rovnici (32.30) je $I_\mathrm{c} = 0$ a zůstane

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}. \qquad (32.31)$$

Pro kružnici o poloměru $r \leqq R$ orientovanou ve směru otáčení hodinových ručiček je levá strana rov. (32.31) rovna $(B)(2\pi r)$. Elektrický tok Φ_E plochou ohraničenou touto kružnicí (tj. kruhem orientovaným podle pravidla pravé ruky v souladu s orientací kružnice a majícím obsah S) je

$ES\cos 0^\circ = \pi r^2 E$, kde E je velikost intenzity elektrického pole mezi elektrodami. Rov. (32.31) dává

$$(B)(2\pi r) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi r^2 E) = \mu_0\varepsilon_0 \pi r^2 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.$$

Odtud plyne

$$B = \frac{\mu_0\varepsilon_0 r}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \quad (\text{pro } r \leqq R). \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vidíme, že $B = 0$ ve středu kondenzátoru, kde $r = 0$, a že B lineárně roste s r směrem k okraji kruhové elektrody.

(b) Vypočtěte velikost magnetické indukce B pro $r = R/5 = 11{,}0\,\mathrm{mm}$, je-li $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 1{,}50\cdot 10^{12}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}}$.

ŘEŠENÍ: Z odpovědi na (a) víme, že

$$B = \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 r\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{T\cdot m}}{\mathrm{A}}\right)\left(8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\cdot m}^2}\right)\cdot (11{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})\left(1{,}50\cdot 10^{12}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m\cdot s}}\right) = 9{,}18\cdot 10^{-8}\,\mathrm{T}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Odvoďte magnetickou indukci pro případ $r \geqq R$.

ŘEŠENÍ: Vně elektrody o poloměru R je elektrické pole nulové, takže elektrický tok kruhem o poloměru $r \geqq R$ je nenulový pouze v oblasti o obsahu πR^2 a je roven $\Phi_E = \pi R^2 E$. Pak rov. (32.31) dává

$$(B)(2\pi r) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi R^2 E) = \mu_0\varepsilon_0 \pi R^2 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.$$

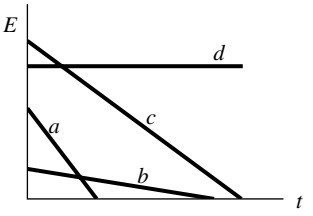
Odtud vypočteme B:

$$B = \frac{\mu_0\varepsilon_0 R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \quad \text{pro } r \geqq R. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Poznamenejme, že oba výrazy odvozené pro B dávají, jak jsme očekávali, stejné hodnoty pro $r = R$. Tato hodnota B je maximální.

Hodnota B vypočtená v (b) je tak malá, že je téměř neměřitelná běžnými měřicími přístroji. To je v ostrém kontrastu k indukovanému elektromotorickému napětí (Faradayův zákon), které můžeme zjistit snadno. Tento rozdíl je částečně dán tím, že indukované $\mathscr{E}$ lze snadno znásobit použitím cívky s mnoha závity. Nemáme však žádný postup srovnatelné jednoduchosti pro znásobení indukovaných magnetických polí. Přesto bylo při velmi pečlivém provedení pokusu magnetické pole indukované nabíjením kondenzátoru spolehlivě naměřeno; výsledek souhlasil s teorií.

KONTROLA 5: Obrázek znázorňuje závislost velikosti elektrické intenzity E na čase t pro čtyři homogenní elektrická pole v kondenzátoru (obr. 32.15). Seřaďte v sestupném pořadí tato elektrická pole podle velikosti B indukovaného magnetického pole v bodě 1 na obr. 32.15b.



32.10 MAXWELLŮV PROUD

Z pravé strany rov. (32.30) vidíme, že její první člen $\varepsilon_0(\mathrm{d}\Phi_E/\mathrm{d}t)$ musí mít rozměr proudu. Nazýváme jej **Maxwellův proud** I_M:

$$I_M = \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Maxwellův proud).} \qquad (32.32)$$

(Dříve se nazýval posuvný proud v souvislosti s tehdejšími představami o světelném éteru a jeho pohybu.) Rov. (32.30) můžeme s užitím rov. (32.32) zapsat ve tvaru

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0(I_{M,\mathrm{c}} + I_{\mathrm{c}})$$

(Ampérův-Maxwellův zákon), (32.33)

ve kterém $I_{M,\mathrm{c}}$ je Maxwellův proud procházející plochou ohraničenou uzavřenou orientovanou křivkou. Zákon Ampérův-Maxwellův nazýváme často **zákon celkového proudu**.

Uvažujme znovu nabíjení kondenzátoru s kruhovými elektrodami podle obr. 32.17a. Proud I, který nabíjí elektrody, mění elektrické pole $\boldsymbol{E}$ mezi nimi. Maxwellův proud I_M mezi deskami je spojen se změnami pole $\boldsymbol{E}$. Porovnejme oba proudy.

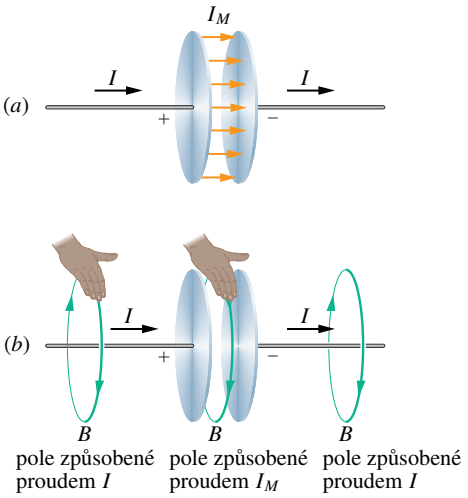
V každém okamžiku je náboj Q na elektrodách spojen s velikostí intenzity E mezi nimi rov. (26.4):

$$Q = \varepsilon_0 SE, \qquad (32.34)$$

kde S je obsah elektrody. Abychom dostali proud I, derivujme rov. (32.34) podle času, čímž dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I = \varepsilon_0 S\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \qquad (32.35)$$

Maxwellův proud I_M získáme z rov. (32.32). Za předpokladu, že elektrické pole $\boldsymbol{E}$ mezi dvěma deskami je homogenní (zanedbáme-li rozptyl na okraji), můžeme vyjádřit elektrický tok Φ_E v této rovnici součinem ES. Potom



Obr. 32.17 (a) Maxwellův proud I_M mezi deskami kondenzátoru nabíjeného proudem I. (b) Pravidlo pravé ruky pro určení směru magnetického pole okolo vodiče s kondukčním (vodivým) proudem (vlevo) dává stejný směr i pro magnetické pole Maxwellova proudu (uprostřed).

z rov. (32.32) plyne

$$I_M = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}(ES)}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0 S \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \quad (32.36)$$

Porovnáním rov. (32.35) a (32.36) vidíme, že vodivý proud I, který nabíjí kondenzátor, a Maxwellův proud I_M mezi elektrodami mají stejnou velikost:

$$I_M = I \quad \text{(Maxwellův proud v kondenzátoru)}. \quad (32.37)$$

Maxwellův proud I_M můžeme proto považovat za pokračování vodivého proudu I z jedné elektrody přes mezeru kondenzátoru k druhé elektrodě. Protože elektrické pole je mezi deskami homogenní, je i Maxwellův proud I_M mezi nimi rozložen rovnoměrně, jak ukazují proudové šipky na obr. 32.17a. Uvažme, že mezi deskami je vakuum, kde není žádný náboj, který by se pohyboval a vytvářel tak jakýkoli proud. Přesto je zde nenulový Maxwellův proud, který vytváří magnetické pole, které, jak poznáme dále, snadno určíme.

Určení indukovaného magnetického pole

V kap. 30 jsme použili pro určení směru indukce $\boldsymbol{B}$ magnetického pole, které je vyvolané vodivým proudem I, pravidlo pravé ruky podle obr. 30.4. Totéž pravidlo můžeme také použít k tomu, abychom určili směr $\boldsymbol{B}$ indukovaného magnetického pole vytvořeného Maxwellovým proudem I_M, jak je naznačeno uprostřed obr. 32.17b pro kondenzátor. Také můžeme I_M využít k tomu, abychom stanovili velikost indukovaného magnetického pole při nabíjení kondenzátoru s rovnoběžnými kruhovými elektrodami o poloměru R. Považujme prostě prostor mezi deskami za pomyslný kruhový vodič poloměru R, kterým prochází Maxwellův proud I_M. Potom je podle rov. (30.22) velikost magnetické indukce v bodech uvnitř kondenzátoru ve vzdálenosti r od jeho osy ($r \leqq R$)

$$B = \left(\frac{\mu_0 I_M}{2\pi R^2}\right) r \quad \begin{matrix}\text{(uvnitř kondenzátoru} \\ \text{s kruhovými elektrodami)}.\end{matrix} \quad (32.38)$$

Podobně podle rov. (30.19) je velikost magnetické indukce pole v bodě mimo kondenzátor ($r \geqq R$)

$$B = \frac{\mu_0 I_M}{2\pi r} \quad \begin{matrix}\text{(mimo kondenzátor} \\ \text{s kruhovými elektrodami)}.\end{matrix} \quad (32.39)$$

PŘÍKLAD 32.5

Deskový kondenzátor s rovnoběžnými kruhovými elektrodami z př. 32.4 je nabíjen proudem I.

(a) Vyjádřete $\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ ve vzdálenosti $r = R/5$ od osy kondenzátoru pomocí μ_0 a I.

ŘEŠENÍ: Magnetické pole v kondenzátoru je vytvořeno Maxwellovým proudem mezi elektrodami. Užijeme-li Ampérův zákon pro kružnici o poloměru r souosou s kruhovými elektrodami kondenzátoru, dostáváme

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I_{M,\mathrm{c}}. \quad (32.40)$$

Předpokládáme, že Maxwellův proud je stejnoměrně rozložen mezi deskami. Potom je proud $I_{M,\mathrm{c}}$ obepnutý kružnicí úměrný obsahu plochy ohraničené touto křivkou, tj.

$$\frac{I_{M,\mathrm{c}}}{I_M} = \frac{\text{obsah plochy obepnuté kružnicí}}{\text{obsah celé elektrody}},$$

odkud plyne

$$I_{M,\mathrm{c}} = I_M \frac{\pi r^2}{\pi R^2}.$$

Výsledek dosadíme do rov. (32.40) a dostaneme

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I_M \frac{\pi r^2}{\pi R^2}. \quad (32.41)$$

Nyní podle rov. (32.37) položme $I_M = I$ a dosaďme $r = R/5$ do rov. (32.41). Dostaneme

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I_M \frac{\pi (R/5)^2}{\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{25}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Vyjádřete velikost magnetické indukce ve vzdálenosti $r = R/5$ od osy kondenzátoru pomocí maximální velikosti magnetické indukce $B_{\max}$.

ŘEŠENÍ: Protože kondenzátor má rovnoběžné elektrody, můžeme ke stanovení velikosti B použít rov. (32.38). Pro $r = R/5$ dostaneme z této rovnice

$$B = \left(\frac{\mu_0 I_M}{2\pi R^2}\right) r = \frac{\mu_0 I_M (R/5)}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 I_M}{10\pi R}. \quad (32.42)$$

Největší velikost indukce $B_{\max}$ v kondenzátoru je na kružnici o poloměru $r = R$, a to

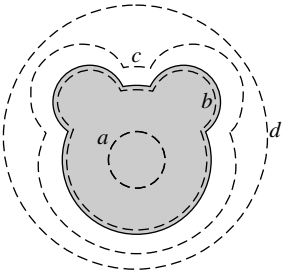
$$B_{\max} = \left(\frac{\mu_0 I_M}{2\pi R^2}\right) r = \frac{\mu_0 I_M R}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 I_M}{2\pi R}. \quad (32.43)$$

Podíl rov. (32.42) a (32.43) dává

$$B = \frac{B_{\max}}{5}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek jsme mohli dostat snadněji též následující úvahou: Podle rov. (32.38) roste velikost B uvnitř kondenzátoru lineárně s r, a proto magnetická indukce ve vzdálenosti $R/5$ má velikost $B_{\max}/5$.

KONTROLA 6: Obrázek představuje pohled zevnitř na jednu elektrodu deskového kondenzátoru. Čárkované čáry představují čtyři integrační cesty (cesta b sleduje okraj desky). Seřaďte v sestupném pořadí tyto cesty podle velikosti $\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s}$ podél jednotlivých cest během vybíjení kondenzátoru. Rozptyl pole na okraji kondenzátoru zanedbejte.



32.11 MAXWELLOVY ROVNICE

Rov. (32.30) je poslední ze čtyř základních rovnic elektromagnetismu, nazývaných *Maxwellovy rovnice*; jsou uvedeny (v integrálním tvaru) v tab. 32.1. Tyto čtyři rovnice vysvětlují všechny kategorie elektromagnetických jevů, počínaje tím, proč směřuje střelka kompasu k severu, až po důvody, proč nastartujeme automobil, otočíme-li klíčkem zapalování. Jsou teoretickým základem pro vysvětlení funkce elektromagnetických zařízení, jako jsou například elektromotory, cyklotrony, televizní vysílače a přijímače, telefony, faxy, radary nebo mikrovlnné trouby.

Maxwellovy rovnice jsou fundamentální rovnice pro elektromagnetické pole. Můžeme z nich odvodit všechny rovnice, se kterými jsme se setkali počínaje kap. 22, a které popisují elektrické, magnetické nebo elektromagnetické pole. Jsou ale také základem mnoha dalších rovnic, se kterými se setkáme v kap. 34 až 37, tedy v optice i v teorii optických přístrojů, ať už jde o složité teleskopy nebo obyčejné brýle.

Tabulka 32.1 **Maxwellovy rovnice**

NÁZEV	ROVNICE	
Gaussův zákon pro elektrické pole (rov. (24.7))	$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$	vyjadřuje souvislost mezi tokem intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$ uzavřenou plochou a celkovým elektrickým nábojem uvnitř této plochy.
Gaussův zákon pro magnetické pole (rov. (32.1))	$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$	vyjadřuje poznatek, že tok magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ libovolnou uzavřenou plochou je roven nule (tj. neexistuje magnetický náboj).
Faradayův zákon (rov. (21.22))	$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	vyjadřuje souvislost mezi cirkulací intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$ podél uzavřené orientované křivky a časovou změnou indukčního magnetického toku $\Phi_B = \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$ plochou ohraničenou touto křivkou.
Ampérův-Maxwellův zákon (rov. (32.33))	$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 \left(\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + I_c\right)$	vyjadřuje souvislost mezi cirkulací magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ podél uzavřené orientované křivky a časovou změnou toku elektrické intenzity $\Phi_E = \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}$ plochou ohraničenou touto křivkou a celkovým proudem procházejícím touto plochou.

Rovnice jsou uvedeny ve tvaru platném pro vakuum, tedy v nepřítomnosti magnetických materiálů nebo dielektrik.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Gaussův zákon pro magnetické pole

Nejjednodušší magnetickou strukturou je magnetický dipól. Magnetický monopól („magnetický náboj“), pokud zatím víme, neexistuje. *Gaussův zákon* pro magnetické pole

$$\Phi_B = \oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad (32.1)$$

říká, že celkový magnetický tok jakoukoli uzavřenou plochou je nulový. Vystihuje poznatek, že magnetické monopóly neexistují.

Zemské magnetické pole

Zemské magnetické pole lze aproximovat polem magnetického dipólu, který svírá úhel 11° s osou zemské rotace (spojující zemské póly). Jeho jižní pól nazýváme *severní geomagnetický* pól, protože leží na severní polokouli. Směr místního magnetického pole v kterémkoli místě na Zemi popisujeme jeho *deklinací* (úhel nalevo nebo napravo od zeměpisného severu) a *inklinací* (úhel nahoru nebo dolů od vodorovné roviny).

Spinový magnetický dipólový moment

Elektron má vlastní, vnitřní moment hybnosti, nazývaný *spinový moment hybnosti* (neboli *spin*) $\boldsymbol{S}$. S ním je spojen vlastní *spinový magnetický dipólový moment* $\boldsymbol{\mu}_s$

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{m}\boldsymbol{S}. \qquad (32.2)$$

Spin $\boldsymbol{S}$ nemůžeme měřit, ale můžeme měřit jeho složku ve zvoleném směru. Orientujeme-li podle něj souřadnicovou osu z, může mít složka S_z pouze hodnoty vyjádřené vztahem

$$S_z = m_s\hbar \quad \text{pro } m_s = \pm\tfrac{1}{2}, \qquad (32.3)$$

kde $\hbar \doteq 1{,}05{\cdot}10^{-34}$ J·s je redukovaná Planckova konstanta. Podobně nelze měřit samotný spinový magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_\mathrm{s}$ elektronu, avšak lze měřit jeho složku ve zvoleném směru z:

$$\mu_{s,z} = \pm\frac{e\hbar}{2m} = \pm\mu_\mathrm{B}, \qquad (32.6,\ 32.4)$$

kde μ_B je *Bohrův magneton*:

$$\mu_\mathrm{B} = \frac{e\hbar}{2m} = 9{,}27{\cdot}10^{-24}\ \mathrm{J{\cdot}T^{-1}}. \qquad (32.5)$$

Potenciální energie E_p spinového magnetického dipólového momentu ve vnějším poli $\boldsymbol{B}_\mathrm{ext}$ je

$$E_\mathrm{p} = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \boldsymbol{B}_\mathrm{ext} = -\mu_{s,z}B_\mathrm{ext}. \qquad (32.7)$$

Orbitální magnetický dipólový moment

Je-li elektron součástí atomu, má také moment hybnosti nazývaný *orbitální moment hybnosti* $\boldsymbol{L}$, se kterým je spojen *orbitální magnetický dipólový moment*:

$$\boldsymbol{\mu}_\mathrm{orb} = -\frac{e}{2m}\boldsymbol{L}. \qquad (32.8)$$

Orbitální moment hybnosti je kvantován a jeho složka nabývá pouze hodnot

$$L_z = m_l\hbar \quad \text{pro } m_l = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l, \qquad (32.9)$$

kde l je vedlejší kvantové číslo. Tomu odpovídá složka orbitálního magnetického dipólového momentu

$$\mu_{\mathrm{orb},z} = -m_l\frac{e\hbar}{2m} = -m_l\mu_\mathrm{B}. \qquad (32.10,\ 32.11)$$

Potenciální energie E_p orbitálního magnetického dipólového momentu ve vnějším magnetickém poli $\boldsymbol{B}_\mathrm{ext}$ je

$$E_\mathrm{p} = -\boldsymbol{\mu}_\mathrm{orb} \cdot \boldsymbol{B}_\mathrm{ext} = -\mu_{\mathrm{orb},z}B_\mathrm{ext}. \qquad (32.12)$$

Diamagnetismus

Diamagnetické látky nevykazují magnetické vlastnosti, pokud nejsou vloženy do vnějšího magnetického pole. Ve vnějším poli $\boldsymbol{B}_\mathrm{ext}$ se v nich indukuje dipólový magnetický moment orientovaný opačně, než je směr $\boldsymbol{B}_\mathrm{ext}$. Jestliže je pole nehomogenní, je diamagnetická látka vytlačována z oblasti s větší magnetickou indukcí.

Paramagnetismus

V *paramagnetické látce* má každý atom permanentní magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$, avšak tyto momenty jsou orientovány nahodile, takže látka jako celek magnetické pole nemá. Vnější magnetické pole $\boldsymbol{B}_\mathrm{ext}$ ale může částečně uspořádat atomární dipólové momenty do svého směru. Jestliže je pole nehomogenní, je paramagnetická látka vtahována do oblasti s větší magnetickou indukcí.

Stupeň seřazení atomových dipólových momentů se zvyšuje s růstem $\boldsymbol{B}_\mathrm{ext}$ a klesá s růstem teploty T látky. Mírou zmagnetizování látky je *magnetizace*:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\text{magnetický moment}}{\text{objem vzorku}}. \qquad (32.18)$$

Úplné seřazení všech N atomárních magnetických dipólů ve vzorku, nazývané *saturace* vzorku, by odpovídalo nejvyšší možné hodnotě magnetizace $M_\mathrm{max} = N\mu/V$. Pro slabá pole a vyšší teploty platí přibližný vztah

$$M = C\frac{B_\mathrm{ext}}{T} \quad \text{(zákon Curieův)}, \qquad (32.19)$$

kde C je *Curieova konstanta* daného materiálu.

Feromagnetismus

I za nepřítomnosti vnějšího magnetického pole mají některé elektrony ve feromagnetickém materiálu magnetické dipólové

momenty seřazeny díky kvantově-mechanickému jevu, nazývanému *výměnná interakce*. Tou vznikají uvnitř materiálu oblasti (domény) s výraznými magnetickými dipólovými momenty. Vnější pole $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$ může *uspořádat* tyto domény a vytvořit tak velký výsledný magnetický dipólový moment materiálu jako celku, a to ve směru $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$. Ten může částečně přetrvávat, i když je pole $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$ odstraněno. Je-li $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$ nehomogenní, je feromagnetický materiál vtahován do oblastí s větší magnetickou indukcí. Výměnné interakce se přestanou projevovat, přesáhne-li teplota vzorku jeho *Curieovu teplotu*. Pak vzorek vykazuje pouze paramagnetismus.

Maxwellovo rozšíření Ampérova zákona

Proměnný tok elektrické intenzity indukuje magnetické pole $\boldsymbol{B}$, pro které platí

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}. \qquad (32.28)$$

Tato rovnice spojuje magnetické pole indukované podél uzavřené orientované křivky a změnu elektrického toku Φ_E plochou ohraničenou touto křivkou. Ampérův zákon

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I_{\text{c}} \quad \text{(Ampérův zákon)}, \qquad (32.29)$$

spojuje magnetické pole vytvářené elektrickým proudem I_{c} procházejícím plochou, kterou ohraničuje Ampérova křivka. Předchozí dvě rovnice mohou být zapsány rovnicí jedinou:

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} + I_{\text{c}} \quad \text{(Ampérův-Maxwellův zákon)}. \qquad (32.30)$$

Maxwellův proud

Maxwellův proud I_M, svázaný s měnícím se elektrickým polem, je

$$I_M = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} \quad \text{(Maxwellův proud)}. \qquad (32.32)$$

Rov. (32.30) pak píšeme

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 \left(I_{M,\text{c}} + I_{\text{c}}\right) \quad \text{(Ampérův-Maxwellův zákon)}, \qquad (32.33)$$

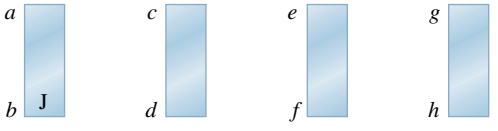
kde $I_{M,\text{c}}$ je celkový Maxwellův proud tekoucí plochou obepnutou Ampérovou křivkou. Idea Maxwellova proudu dovoluje zachovat představu, že proud protéká souvisle celým obvodem — i kondenzátorem (bez dielektrika). Žádný náboj se však mezi elektrodami nepohybuje.

Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice, uvedené v tab. 32.1, shrnují poznatky elektromagnetismu a představují základní zákony pro elektromagnetické pole.

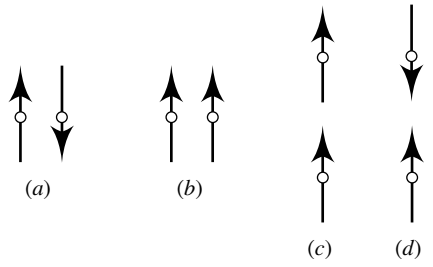
OTÁZKY

1. Na obr. 32.18 jsou čtyři ocelové tyče; tři z nich jsou permanentní magnety. Jeden z pólů je označen. Pokusem shledáme, že konce *a* a *d* se navzájem přitahují, konce *c* a *f* odpuzují, konce *e* a *h* přitahují a konce *a* a *h* přitahují. (a) Které konce jsou severní póly? (b) Která tyč není magnetem?



Obr. 32.18 Otázka 1

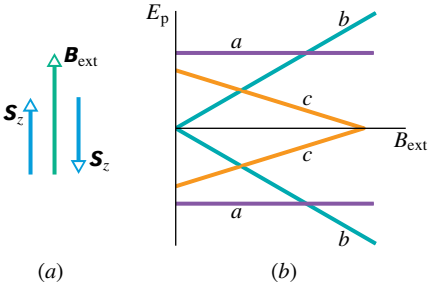
2. Obr. 32.19 znázorňuje čtyři uspořádání dvojic kompasových střelek v oblasti bez vnějšího magnetického pole. Šipky ukazují směry střelek, a tedy i směry magnetických dipólových momentů. Které dvojice jsou ve stabilní rovnováze?



Obr. 32.19 Otázka 2

3. Elektron má ve vnějším magnetickém poli $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$ průmět spinu $\boldsymbol{S}_z$ antiparalelní s $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$. Musíme elektronu dodat, nebo odebrat energii k tomu, aby změnil *orientaci spinu*, tj. aby pak byl $\boldsymbol{S}_z$ paralelní s $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$?

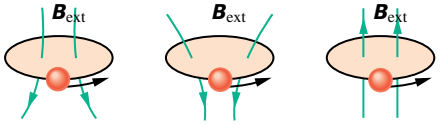
4. Obr. 32.20a ukazuje opačné orientace spinů elektronu ve vnější magnetickém poli $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$. Obr. 32.20b nabízí tři možné volby závislosti potenciální energie spinových magnetických momentů na velikosti $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$. Která z nich je správná?



Obr. 32.20 Otázka 4

5. Obr. 32.21 ukazuje smyčkové modely elektronů obíhajících v magnetickém poli proti směru otáčení hodinových ručiček.

Pole je nehomogenní pro model (1) a (2) a homogenní pro model (3). Kam směřují: (a) magnetické dipólové momenty smyček, (b) magnetické síly působící na smyčku: nahoru, dolů, nebo jsou nulové?



Obr. 32.21 Otázky 5, 7 a 8

6. Co se stane s výslednou silou, která působí na smyčku podle obr. 32.9a, b, jestliže zvětšíme (a) velikost vnějšího pole $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$, (b) jeho nehomogenitu (rozbíhavost indukčních čar): vzroste, poklesne, nebo zůstane stejná?

7. Nahraďte proudové smyčky v otázce 5 a v obr. 32.21 diamagnetickými koulemi. Rozhodněte pro každé z polí, zda (a) magnetický dipólový moment koule a (b) síla působící na kouli směřují nahoru, dolů, nebo jsou nulové.

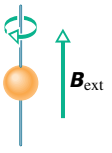
8. Nahraďte proudové smyčky v otázce 5 a v obr. 32.21 paramagnetickými koulemi. Rozhodněte pro každé z polí, zda (a) magnetický dipólový moment koule a (b) síla působící na kouli směřují nahoru, dolů, nebo jsou nulové.

9. V uspořádání podle obr. 32.22 je mezi dvěma póly magnetu nehomogenní magnetické pole. Do tohoto pole vletí elektron kolmo do roviny stránky v místě tečky. Kam směřuje síla působící na elektron vyvolaná interakcí jeho spinu s polem (směrem vlevo, napravo, nebo je nulová), je-li průmět spinu elektronu $\boldsymbol{S}_z$ orientován (a) nalevo, (b) napravo? (*Tip*: Elektron modelujte kuličkou se záporným nábojem na povrchu, takže představuje proudovou smyčku podobně jako na obr. 32.9.)



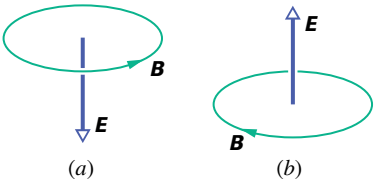
Obr. 32.22 Otázka 9

10. Obr. 32.23 ukazuje feromagnetickou kouli, která byla původně bez výsledného magnetického dipólového momentu. Kouli držíme v naznačené poloze dvěma tenkými napjatými drátky. Jestliže se vytvoří vnější magnetické pole $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$ směřující vzhůru, získá koule magnetický dipólový moment orientovaný směrem nahoru. Jestliže nyní pole odstraníme, bude se koule otáčet okolo vodiče ve směru otáčení hodinových ručiček (jak je naznačeno), nebo opačně? (*Tip*: Uvažujte orientaci spinového momentu hybnosti elektronů a zákon zachování momentu hybnosti.)



Obr. 32.23 Otázka 10

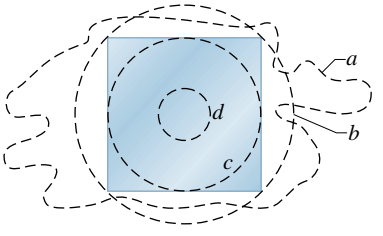
11. Obr. 32.24 ukazuje ve dvou situacích intenzitu elektrického pole $\boldsymbol{E}$ a příslušnou indukční čáru indukovaného magnetického pole. Zvyšuje se, nebo se snižuje v jednotlivých případech velikost $\boldsymbol{E}$?



Obr. 32.24 Otázka 11

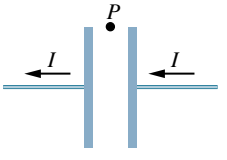
12. V obr. 32.15b směřuje elektrická intenzita $\boldsymbol{E}$ od nás a její velikost roste. Jaký směr má indukce $\boldsymbol{B}$ magnetického pole (ve směru, nebo proti směru otáčení hodinových ručiček), jestliže vektor $\boldsymbol{E}$ míří k nám a (a) roste, (b) klesá? (c) Jaký má směr $\boldsymbol{B}$, jestliže $\boldsymbol{E}$ míří k nám a s časem se nemění?

13. Na obr. 32.25 je čelní pohled na jednu ze dvou čtvercových elektrod deskového kondenzátoru a na čtyři křivky, které se nalézají mezi deskami. Kondenzátor se vybíjí. Zanedbejte rozptyl elektrického pole na okraji elektrod. (a) Seřaďte křivky sestupně podle velikosti integrálu $\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s}$ podél křivek. (b) Podél které křivky (jestli taková vůbec existuje) je úhel mezi $\boldsymbol{B}$ a $d\boldsymbol{s}$ konstantní (takže lze snadno vypočítat skalární součin obou vektorů)? (c) Podél které křivky (jestli taková vůbec existuje) je B konstantní, takže lze B vytknout před integrál v rov. (32.28)?



Obr. 32.25 Otázka 13

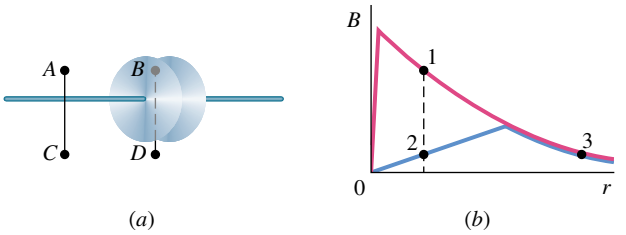
14. Na obr. 32.26 je naznačen kondenzátor s rovnoběžnými elektrodami a proud v připojených vodičích, který kondenzátor vybíjí. Směřuje (a) $\boldsymbol{E}$, (b) I_M nalevo, nebo napravo? (c) Směřuje magnetické pole v bodě P k nám, nebo od nás?



Obr. 32.26 Otázka 14

15. Kondenzátor s rovnoběžnými obdélníkovými elektrodami ($2L \times 4L$) se vybíjí. Myšlený obdélník ($L \times 2L$) se stranami rovnoběžnými s elektrodami leží uvnitř něj. Jaká část celkového Maxwellova proudu jím prochází?

16. Kondenzátor se nabíjí podle obr. 32.27a. Bod A (poblíž jednoho z přívodních vodičů) i bod B (mezi deskami kondenzátoru) jsou stejně vzdáleny od osy. Také bod C (poblíž vodiče) a bod D (mezi deskami, ale vně kondenzátoru) jsou od osy stejně vzdáleny. V obr. 32.27b udává jedna křivka schematicky závislost velikosti magnetické indukce na poloměru r uvnitř přívodního vodiče a mimo něj, druhá pak mezi deskami kondenzátoru. Obě křivky se částečně překrývají. Který ze tří bodů na křivkách odpovídá některému ze čtyř bodů na obr. 32.27a?



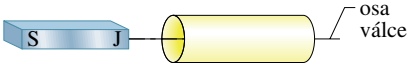
(a) (b)

Obr. 32.27 Otázka 16

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 32.2 Gaussův zákon pro magnetické pole

1C. Jižní pól magnetu umístíme poblíž válce ze stočeného listu papíru podle obr. 32.28. (a) Načrtněte indukční čáry magnetického pole, které procházejí povrchem válce. (b) Co lze říci o znaménku součinu $\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$ pro každou plošku $d\boldsymbol{S}$ na tomto povrchu? (c) Odporuje výsledek Gaussovu zákonu pro magnetické pole? Vysvětlete.

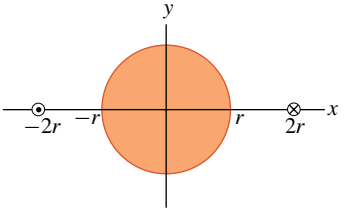


Obr. 32.28 Cvičení 1

2C. Velikost magnetického toku každou z prvních pěti stěn hrací kostky je číselně roven počtu ok. Toky o sudé velikosti jsou kladné, o liché záporné. Jaký je tok šestou stěnou kostky?

3Ú. Gaussova plocha má tvar povrchu válce s poloměrem základny 12,0 cm a o výšce 80,0 cm. Magnetický indukční tok dolní základnou je 25,0 μWb. Na horní základně je homogenní magnetické pole o indukci 1,60 mT kolmé k povrchu směřující ven z objemu válce. Jaký je výsledný magnetický indukční tok pláštěm válce?

4Ú*. Dvěma vodiči rovnoběžnými s osou z a vzdálenými $4r$ od sebe teče stejně velký proud I v opačných směrech podle obr. 32.29. Uprostřed mezi nimi leží válec o poloměru r a délce L s osou splývající s osou z. Použijte Gaussův zákon pro magnetické pole k výpočtu výsledného magnetického indukčního toku polovinou válcového povrchu, ležícího nad osou x. (*Tip*: Určete tok tou částí roviny xz, která je uvnitř válce.)



Obr. 32.29
Úloha 4

ODST. 32.3 Zemský magnetismus

5C. V New Hampshire byla v roce 1912 vodorovná složka magnetické indukce zemského magnetického pole 16 μT a inklinace 73°. Jaká byla velikost magnetické indukce?

6C. Podle školních Tabulek je v Brně deklinace 0,15° západně a inklinace 65,4° dolů. Brno má (v r. 2000) rozlohu 230 km^2. Jak velký je magnetický tok zbytkem zemského povrchu? Je kladný, nebo záporný?

7C. Země má magnetický dipólový moment $8{,}0\cdot10^{22}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}}$. (a) Jaký proud by musel protékat jedním závitem umístěným na geomagnetickém rovníku, aby vytvořil stejný magnetický moment? Kdybychom nechali téci tento proud obráceně, zrušili bychom magnetické pole spíše (b) dále od Země, (c) u povrchu Země?

8Ú. Zemské magnetické pole lze aproximovat polem magnetického dipólu. V bodě ve vzdálenosti r od středu Země má složku vodorovnou B_h a svislou B_v:

$$B_\mathrm{h}=\frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3}\cos\lambda_\mathrm{m},\qquad B_\mathrm{v}=\frac{\mu_0\mu}{2\pi r^3}\sin\lambda_\mathrm{m},$$

kde λ_m je *magnetická zeměpisná šířka* (měřená od geomagnetického rovníku směrem k severnímu nebo jižnímu geomagnetickému pólu). Zemský magnetický dipólový moment je $\mu = 8\cdot10^{22}\ \mathrm{A\cdot m^2}$. (a) Ukažte, že závislost zemského magnetického pole na zeměpisné šířce λ_m je

$$B=\frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3}\sqrt{1+3\sin^2\lambda_\mathrm{m}}.$$

(b) Ukažte, že inklinace φ_i magnetického pole je vzhledem k magnetické šířce λ_m určena vztahem

$$\operatorname{tg}\varphi_\mathrm{i}=2\operatorname{tg}\lambda_\mathrm{m}.$$

9Ú. Použijte výsledky v úloze 8 k výpočtu zemského magnetického pole (jak velikost B, tak i inklinace φ_i) (a) na geomagnetickém rovníku, (b) v bodě s geomagnetickou šířkou 60°, (c) na severním geomagnetickém pólu.

10Ú. S použitím aproximace uvedené v úloze 8 stanovte (a) výšku nad zemským povrchem, ve které má velikost zemské magnetické indukce 50 % hodnoty na zemském povrchu a na téže šířce, (b) největší velikost magnetické indukce na plášti jádra Země 2 900 km pod zemským povrchem a (c) velikost a inklinaci magnetické indukce na severním zeměpisném pólu. Vysvětlete, proč se vypočtené hodnoty pro (c) liší od naměřených hodnot.

ODST. 32.4 Magnetismus a elektrony

11C. Elektron je ve vnějším magnetickém poli s indukcí $\boldsymbol{B}$, která má velikost 0,25 T a je rovnoběžná s osou z. Jaký je rozdíl energií při souhlasné a nesouhlasné orientaci průmětů $\boldsymbol{S}_z$ jeho spinu vůči vnějšímu poli $\boldsymbol{B}$?

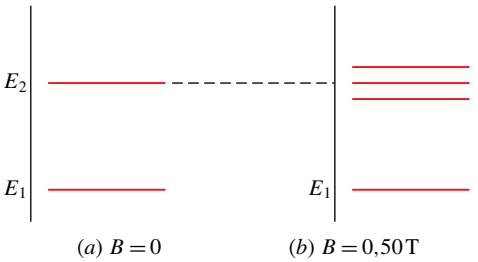
12C. Jakou hodnotu naměříme pro složku orbitálního magnetického dipólového momentu elektronu, když (a) $m_l = 1$ a (b) $m_l = -2$?

13C. V nejnižším energiovém stavu vodíkového atomu je podle kvantové mechaniky nejpravděpodobnější vzdálenost elektronu od jádra $5{,}2\cdot10^{-11}$ m. (a) Vypočtěte velikost intenzity elektrického pole protonu v této vzdálenosti. Složka $\mu_{s,z}$ spinového magnetického dipólového momentu protonu je $1{,}4\cdot10^{-26}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}}$. (b) Vypočtěte velikost B magnetického pole protonu na ose z ve vzdálenosti $5{,}2\cdot10^{-11}$ m. (*Tip*: Použijte rov. (30.29).) (c) Jaký je poměr spinového magnetického dipólového momentu elektronu a protonu?

14C. Elektron v atomu má orbitální magnetické kvantové číslo $m_l = 0$. Jaké jsou složky (a) L_z a (b) $\mu_{\mathrm{orb},z}$? Nechť je atom ve vnějším magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$ velikosti 35 mT směřující ve směru osy z. Jaká je potenciální energie (c) orbitálního magnetického dipólového momentu elektronu a (d) spinového magnetického dipólového momentu elektronu v tomto poli? (e) Opakujte úkoly (a) až (d) pro $m_l = -3$.

15C. Nechť má elektron v atomu orbitální moment hybnosti s hodnotami m_l pro $l = 3$. Kolika hodnot může nabýt (a) L_z a (b) $\mu_{\mathrm{orb},z}$? Jaká je největší a nejmenší dovolená velikost (vyjádřená pomocí h, m a e) složek (c) L_z a (d) $\mu_{\mathrm{orb},z}$? (e) Jaká je největší dovolená velikost z-ové složky jeho výsledného momentu hybnosti (orbitálního plus spinového)? (f) Kolika různých hodnot (kladných, záporných či nuly) může nabýt z-ová složka výsledného momentu hybnosti?

16Ú. Obr. 32.30 představuje energiové spektrum; na svislou osu vynášíme energiové hladiny atomu (jako v obr. 8.17). V nepřítomnosti pole má atom dvě hladiny E_1 a E_2 (obr. 32.30a). Je-li atom umístěn do magnetického pole 0,50 T, energiové spektrum se změní tak, jak ukazuje obr. 32.30b. (Zanedbejte spinový magnetický moment a uvažujte pouze potenciální energii $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{orb}} \cdot \boldsymbol{B}$.) Hladina E_1 se nezmění, ale hladina E_2 se rozštěpí na trojici blízkých hladin. Jaké jsou hodnoty m_l spojené s energiovou hladinou (a) E_1 a (b) E_2? (c) Jaká je vzájemná vzdálenost energiových hladin v tripletu na obr. 32.30b?



Obr. 32.30 Úloha 16

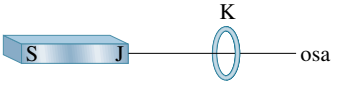
17Ú. Náboj Q je stejnoměrně rozložen podél prstence poloměru r. Prstenec rotuje s úhlovou rychlostí ω kolem osy symetrie kolmé k jeho rovině. (a) Dokažte, že magnetický moment v důsledku rotace náboje je

$$\mu = \tfrac{1}{2} Q\omega r^2.$$

(b) Jaký je směr příslušného magnetického momentu v případě, že je náboj kladný?

ODST. 32.6 Diamagnetismus

18C. Obr. 32.31 ukazuje smyčkový model (smyčka K) pro diamagnetickou látku. (a) Načrtněte indukční čáry magnetického pole procházející smyčkou a v okolí smyčky vyvolaného tyčovým magnetem. (b) Jaký je směr výsledného magnetického dipólového momentu $\boldsymbol{\mu}$ a směr odpovídajícího proudu I ve smyčce? (c) Jaký je směr magnetické síly působící na smyčku?



Obr. 32.31 Cvičení 18 a 22

19Ú*. Předpokládejme, že elektron s hmotností m a nábojem velikosti e se pohybuje po kružnici o poloměru r okolo jádra. Dále předpokládejme, že je zapnuto homogenní magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B}$, která je kolmá k rovině dráhy. Za předpokladu, že se poloměr dráhy nezmění a že změna velikosti rychlosti elektronu v důsledku přiloženého pole $\boldsymbol{B}$ je malá, určete vztah pro orbitální magnetický dipólový moment elektronu.

ODST. 32.7 Paramagnetismus

20C. Paramagnetický plyn, jehož atomy mají vlastní magnetický dipólový moment $1{,}0\cdot10^{-23}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}}$, se nalézá v magnetickém poli o indukci 0,50 T. Při jaké teplotě bude střední kinetická energie translačního pohybu atomů plynu rovna energii potřebné na překlopení magnetického dipólu jednoho atomu plynu v daném magnetickém poli?

21C. Permanentní tyčový válcový magnet má délku 5,00 cm, průměr 1,00 cm a konstantní magnetizaci $5{,}30\cdot10^3\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}$. Jaký je jeho magnetický dipólový moment?

22C. Opakujte cvič. 18 pro případ, kdy smyčka je z paramagnetického materiálu.

23C. Zkoumáme, zda vzorek paramagnetické soli s magnetizační křivkou podle obr. 32.10 splňuje Curieův zákon. Vzorek je umístěn do homogenního magnetického pole o indukci 0,50 T, která je během experimentu konstantní. Magnetizaci M pak měříme za teplot v rozmezí 10 K až 300 K. Platí za těchto podmínek Curieův zákon?

24C. Vzorek paramagnetické soli s magnetizační křivkou podle obr. 32.10 má pokojovou teplotu 300 K. V jak silném magnetickém poli bude stupeň saturace (a) 50 %, (b) 90 %? Jsou pole o této magnetické indukci běžně dosažitelná v laboratorních podmínkách?

25C. Vzorek paramagnetické soli s magnetizační křivkou podle obr. 32.10 se nalézá v homogenním magnetickém poli o indukci 2,0 T. Za jaké teploty bude stupeň magnetické saturace vzorku (a) 50 % a (b) 90 %?

26Ú. Elektron s kinetickou energií E_k obíhá po kružnici v rovině kolmé k homogennímu magnetickému poli. Elektron podléhá pouze síle tohoto pole. (a) Dokažte, že magnetický dipólový moment v důsledku orbitálního pohybu má velikost $\mu = E_k/B$ a má opačný směr než $\boldsymbol{B}$. (b) Jaká je velikost a směr magnetického dipólového momentu kladného iontu s kinetickou energií E_k za stejných podmínek? (c) V 1 m^3 ionizovaného plynu je $5{,}3\cdot10^{21}$ elektronů a stejný počet kladných iontů. Předpokládejte, že střední kinetická energie* elektronu je $6{,}2\cdot10^{-20}$ J a střední kinetická energie iontu je $7{,}6\cdot10^{-21}$ J. Vypočtěte velikost magnetizace plynu, nalézá-li se v magnetickém poli o indukci 1,2 T.

27Ú. Uvažujte tuhé těleso obsahující N atomů v jednotkovém objemu. Každý atom má magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$. Předpokládejte, že směr $\boldsymbol{\mu}$ může být pouze paralelní nebo antiparalelní s vnějším polem $\boldsymbol{B}$ (to bude případ, kdy $\boldsymbol{\mu}$ pochází od spinu pouze jednoho elektronu). Pomocí statistické mechaniky lze dokázat, že pravděpodobnost výskytu atomu ve stavu s energií E je úměrná $e^{-E/kT}$, kde T je absolutní teplota a k je Boltzmannova konstanta. Protože platí $E = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$, je počet atomů, jejichž dipólový moment je paralelní s $\boldsymbol{B}$, úměrný $e^{\mu B/kT}$ a počet atomů, jejichž dipólový moment je antiparalelní s $\boldsymbol{B}$, je úměrný $e^{-\mu B/kT}$. (a) Ukažte, že magnetizace tohoto tělesa je $M = N\mu\,\mathrm{tgh}(\mu B/kT)$, kde tgh je hyperbolický tangens, definovaný vztahem $\mathrm{tgh}(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$. (b) Ukažte, že výsledky uvedené v (a) se redukují na vztah $M = N\mu^2 B/(kT)$ pro $\mu B \ll kT$. (c) Ukažte, že výsledky uvedené v (a) se redukují na vztah $M = N\mu$ pro $\mu B \gg kT$. (d) Ukažte, že výsledky (b) i (c) kvalitativně souhlasí s obr. 32.10.

ODST. 32.8 Feromagnetismus

28C. Měření v dolech a hloubkových vrtech ukazuje, že teplota uvnitř Země vzrůstá s hloubkou průměrně o 30 C° na 1 km. Určete, v jaké hloubce ztratí železo feromagnetismus za předpokladu, že na zemském povrchu je teplota 10 °C. (Curieova teplota železa se s tlakem mění velmi málo, proto tuto závislost neberte v úvahu.)

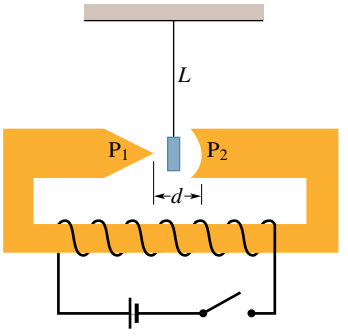
29C. Výměnná interakce, kterou se v čl. 32.8 objasňuje feromagnetismus, je něco úplně jiného než magnetická interakce mezi dvěma magnetickými dipóly. Abyste se o tom přesvědčili, vypočtěte (a) velikost magnetické indukce, kterou vytváří atom kobaltu (s magnetickým dipólovým momentem $1{,}5\cdot10^{-23}$ J·T^{-1}) v bodě C, který je ve vzdálenosti 10 nm od něj ve směru osy dipólu; (b) nejmenší energii potřebnou k překlopení sousedního atomu kobaltu, který se v bodě C nachází. K jakému závěru dojdete porovnáním tohoto výsledku s výsledky př. 32.2?

30C. Saturační magnetizace M_{max} feromagnetického niklu je $4{,}70\cdot10^5$ A·m^{-1}. Vypočtěte magnetický moment jednoho atomu niklu. (Hustota niklu je 8,90 g·cm^{-3} a jeho molární hmotnost je 58,71 g·mol^{-1}.)

31C. Magnetický dipólový moment atomu železa v železné tyči je $2{,}1\cdot10^{-23}$ J·T^{-1}. Předpokládejme, že všechny atomy v tyči délky 5,0 cm a příčného průřezu 1,0 cm^2 mají dipólové momenty seřazeny ve stejném směru. (a) Jaký je dipólový moment tyče? (b) Jak velký moment síly musí působit, aby se magnet udržel v poloze kolmé k vnějšímu magnetickému poli o indukci 1,5 T? Hustota železa je 7 900 kg·m^{-3}.

32Ú. Magnetický dipólový moment Země je $8{,}0\cdot10^{22}$ J·T^{-1}. (a) Pokud by zdrojem tohoto magnetismu byla zmagnetovaná železná koule ve středu Země, jaký by byl její poloměr? (b) Jakou část objemu Země by koule zaujímala? Předpokládejte úplné uspořádání všech dipólů. Hustota vnitřního jádra Země je 14 000 kg·m^{-3}. Magnetický atomový moment atomu železa je $2{,}1\cdot10^{-23}$ J·T^{-1}. (*Tip*: O vnitřním jádru Země se předpokládá, že má část tuhou a část kapalnou a že je zčásti železné; přesto je však permanentní magnet jako zdroj zemského magnetismu vyloučen z několika příčin. Jedním z důvodů je, že teplota jádra Země zcela určitě převyšuje teplotu Curieovu.)

33Ú. Obr. 32.32 ukazuje zařízení používané při přednášce k demonstraci paramagnetismu a diamagnetismu. Vzorek magnetické látky je zavěšen na dlouhém vlákně v nehomogenním poli (šířky d = 2 cm) mezi póly silného elektromagnetu. Pól P_1 je ostře zašpičatěn a pól P_2 je vyhlouben, jak je naznačeno v obrázku. Jakékoli vychýlení vlákna ze svislého směru sledují posluchači optickou projekční soustavou (není zakreslena). (a) Nejprve je použit bismutový (diamagnetický) vzorek. Po zapnutí elektromagnetu se vzorek poněkud vychýlí (asi o 1 mm) k jednomu z pólů. Jaký je směr této výchylky? (b) Jako další je použit hliníkový (paramagnetický a vodivý) vzorek. Po zapnutí elektromagnetu pozorujeme, že se vzorek znatelně (asi o 1 cm) vychýlí asi na dobu jedné sekundy směrem k jednomu pólu a potom se mírně vychýlí ke druhému pólu. Vysvětlete to a určete, ke kterému z pólů se vzorek vychyluje. (*Tip*: Hliníkový vzorek je vodič; použijte Lenzův zákon.) (c) Co by se stalo v případě feromagnetického vzorku?



Obr. 32.32
Úloha 33

34Ú. Magnetický kompas má střelku (o hmotnosti 0,050 kg a délce 4,0 cm) orientovanou ve směru vodorovné složky zemského magnetického pole. V místě kompasu je tato složka B_h = 16 μT. Poté, co do kompasu zlehka klepneme, kmitá

* V nízkoteplotním plazmatu mohou mít systém elektronů a systém iontů podstatně různé teploty.

volně otáčivá střelka ve vodorovné rovině s úhlovou frekvencí 45 rad·s^{-1}. Stanovte magnetický dipólový moment střelky za předpokladu, že střelka je homogenní tenká tyč uchycená ve svém středu.

35Ú. Rowlandův prstenec je tvořen feromagnetikem. Má kruhový průřez s vnitřním poloměrem 5,0 cm, s vnějším poloměrem 6,0 cm a jeho primární vinutí má 400 závitů. (a) Jaký proud musí téci vinutím, abychom uvnitř toroidu vytvořili pole $B_0 = 0{,}20$ mT? (b) Sekundární cívka navinutá okolo toroidu má 50 závitů a odpor 8,0 Ω. Jak velký náboj prošel sekundární cívkou po zapnutí proudu do primárního vinutí, je-li $B_M = 800B_0$?

ODST. 32.9 Indukované magnetické pole

36C. Při jakém poloměru r je indukované magnetické pole rovno 50 % své nejvyšší hodnoty podle zadání z př. 32.4?

37C. Ve vzdálenosti 6,0 mm od osy deskového kondenzátoru s kruhovými elektrodami má mít v prostoru mezi elektrodami indukované magnetické pole velikost $2{,}0\cdot10^{-7}$ T. Elektrody mají poloměr 3,0 mm. Jaká je k tomu potřebná rychlost změny intenzity elektrického pole $\mathrm{d}\boldsymbol{E}/\mathrm{d}t$ mezi elektrodami?

38Ú. Deskový kondenzátor s kruhovými elektrodami o poloměru $R = 16$ mm a vzdálenosti elektrod $d = 5{,}0$ mm vytváří v prostoru mezi nimi homogenní elektrické pole. Napětí mezi elektrodami je pro $t \geqq 0$ vyjádřeno funkcí $U = (100\,\mathrm{V})\mathrm{e}^{-t/\tau_C}$ s časovou konstantou $\tau_C = 12$ ms. Určete magnetické pole v mezeře kondenzátoru v radiální vzdálenosti $r = 0{,}80R$ od jeho osy (a) jako funkci času pro $t \geqq 0$ a (b) v čase $t = 3\tau_C$.

39Ú. Uvažujme deskový kondenzátor s kruhovými elektrodami o poloměru $R = 30$ mm ve vzdálenosti 5,0 mm. Předpokládejme dále, že na elektrody přivedeme obvyklé síťové napětí, tj. sinusové napětí o kmitočtu 50 Hz s amplitudou 325 V:

$$U = (325\,\mathrm{V})\sin(2\pi(50\,\mathrm{Hz})t).$$

(a) Vypočtěte amplitudu indukovaného magnetického pole $B_{\max}(r)$ pro $r = R$. (b) Zobrazte $B_{\max}(r)$ pro $0 < r < 10$ cm.

ODST. 32.10 Maxwellův proud

40C. Dokažte, že pro Maxwellův proud v deskovém kondenzátoru o kapacitě C platí vztah $I_M = C(\mathrm{d}U/\mathrm{d}t)$, kde U je napětí na elektrodách.

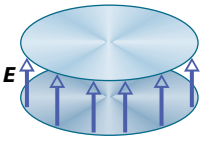
41C. Jaká musí být rychlost změny napětí na elektrodách kondenzátoru s kapacitou 2,0 μF, aby vyvolala Maxwellův proud 1,5 A?

42C. Pro zadání z př. 32.4 ukažte, že *hustota Maxwellova proudu* má pro $r \leqq R$ velikost $J_M = \varepsilon_0(\mathrm{d}E/\mathrm{d}t)$.

43C. Vybíjíme deskový kondenzátor s kruhovými elektrodami o poloměru 0,10 m. Kružnice o poloměru 0,20 m je soustředná s elektrodami kondenzátoru a leží uprostřed mezery mezi elektrodami. Maxwellův proud plochou ohraničenou kružnicí je 2,0 A. Jaká je rychlost změny intenzity elektrického pole mezi deskami?

44C. Při vybíjení deskového kondenzátoru s kruhovými elektrodami o poloměru R je Maxwellův proud středovou kruhovou oblastí o poloměru $R/2$ a rovnoběžnou s elektrodami roven 2,0 A. Jak velký je vybíjecí proud?

45Ú. Velikost intenzity elektrického pole mezi dvěma kruhovými elektrodami deskového kondenzátoru na obr. 32.33 je $E = 4{,}0\cdot10^5 - 6{,}0\cdot10^4 t$, kde E i t jsou v jednotkách SI. V čase $t = 0$ směřuje pole $\boldsymbol{E}$ svisle vzhůru. Plocha elektrody je 0,04 m^2. Pro $t \geqq 0$ určete (a) velikost a směr Maxwellova proudu mezi elektrodami, (b) zda směr magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ vzhledem k elektrodám (podle obrázku) je ve směru, nebo proti směru otáčení hodinových ručiček.

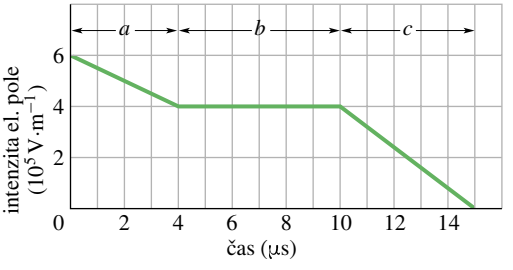


Obr. 32.33 Úloha 45

46Ú. Deskový kondenzátor s kruhovými elektrodami o poloměru R se vybíjí proudem 6,0 A. (a) V jaké vzdálenosti od jeho osy má indukované magnetické pole velikost 75 % své největší hodnoty? (b) Jaká je maximální velikost magnetické indukce, je-li $R = 0{,}040$ m?

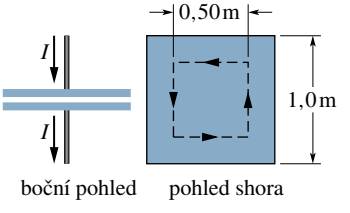
47Ú. Při vybíjení deskového kondenzátoru s kruhovými elektrodami o průměru 20 cm je hustota Maxwellova proudu v celém prostoru mezi elektrodami konstantní a má velikost 20 A·m^{-2}. (a) Vypočtěte velikost B indukce magnetického pole ve vzdálenosti $r = 50$ mm od osy kondenzátoru. (b) Vypočtěte $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ v prostoru mezi elektrodami.

48Ú. Homogenní elektrické pole o počáteční intenzitě $6{,}0\cdot10^5$ V·m^{-1} zaniká během 15 μs podle obr. 32.34. Vypočtěte velikost Maxwellova proudu plochou 1,6 m^2 kolmou ke směru pole v jednotlivých intervalech a, b, c naznačených v grafu. (Nezabývejte se podrobněji chováním na koncích intervalů.)



Obr. 32.34 Úloha 48

49Ú. Deskový kondenzátor má čtvercové elektrody o straně 1,0 m podle obr. 32.35. Kondenzátor je nabíjen proudem 2,0 A,

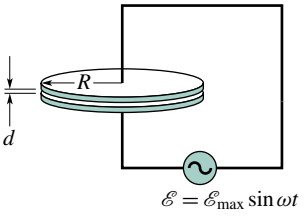


Obr. 32.35 Úloha 49

který vyvolá mezi elektrodami elektrické pole $\boldsymbol{E}$ kolmé k jejich povrchu. (a) Jak velký je Maxwellův proud mezi elektrodami? (b) Jaká je hodnota $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ v této oblasti? (c) Jaký velký je Maxwellův proud čárkovaně vyznačeným čtvercem? (d) Jakou hodnotu má $\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ po obvodu vyčárkovaného čtverce?

50Ú. Dlouhý přímý stříbrný vodič má rezistivitu $\varrho = 1{,}62 \cdot \cdot 10^{-8}\ \Omega\cdot\mathrm{m}$ a příčný průřez $5{,}00\ \mathrm{mm}^2$. Proud je v průřezu vodiče stejnoměrně rozložen a při velikosti 100 A se mění rychlostí $2\,000\ \mathrm{A\cdot s^{-1}}$. (a) Jak velká je intenzita (homogenního) elektrického pole ve vodiči, je-li proud protékající vodičem 100 A? (b) Jak velký je Maxwellův proud ve vodiči ve stejném okamžiku? (c) Vypočtěte poměr velikosti magnetické indukce pole vyvolaného Maxwellovým proudem k velikosti magnetické indukce pole vytvořeného vodivým proudem ve vzdálenosti r od vodiče? Permitivitu stříbra můžeme položit rovnu ε_0.

51Ú. Deskový kondenzátor (obr. 32.36) s kruhovými elektrodami o poloměru $R = 18{,}0\,\mathrm{cm}$ je připojen ke zdroji emn $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\max} \sin \omega t$, kde $\mathscr{E}_{\max} = 220\,\mathrm{V}$ a $\omega = 130\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Amplituda Maxwellova proudu je $I_M = 7{,}60\,\mu\mathrm{A}$. Zanedbejte rozptyl elektrického pole na okraji elektrod. (a) Jaká je maximální hodnota proudu I v obvodu? (b) Jaká je maximální hodnota $\mathrm{d}\Phi_E/\mathrm{d}t$, kde Φ_E je tok elektrické intenzity plochou mezi elektrodami? (c) Jaká je vzdálenost d mezi elektrodami? (Permitivita mezi deskami je ε_0.) (d) Vypočtěte největší velikost B magnetické indukce mezi elektrodami ve vzdálenosti $r = 11{,}0\,\mathrm{cm}$ od středu.



Obr. 32.36
Úloha 51

33
Elektromagnetické kmity a střídavé proudy



Vyžadují-li vysokonapěťová výkonová vedení opravu, nemohou je rozvodné společnosti jednoduše odpojit, protože by se propadla do tmy třeba celá města. Opravy se proto musejí provádět na vedeních pod napětím. Muž na obrázku právě vyměnil distanční rozpěrku na 500 kV vedení, což vyžaduje značnou zkušenost. Proč je vlastně napětí výkonových přenosových vedení tak vysoké? Proud tekoucí vedením je přitom vzhledem k přenášenému výkonu relativně malý. Nemohl by být větší?

33.1 NOVÁ FYZIKA — STARÁ MATEMATIKA

V této kapitole uvidíme, jak se s časem mění elektrický náboj Q v obvodu sestaveném z cívky L, kondenzátoru C a rezistoru R. Z jiného pohledu vzato budeme probírat, jak se energie přenáší tam a zpět mezi magnetickým polem cívky a elektrickým polem kondenzátoru, přičemž jí v průběhu těchto oscilací ubývá (a rezistor se zahřívá).

Kmity mechanické jsme již probírali dříve. V kap. 16 jsme viděli, jak se s časem mění výchylka x v mechanické kmitající soustavě skládající se z tělesa s hmotností m, pružiny s tuhostí k a prvku s výraznou viskozitou (např. olej) nebo s třením. Taková soustava je znázorněna na obr. 16.17. Z obrázku také vidíme, jak mechanická energie prochází periodickou změnou kinetické energie kmitajícího tělesa na potenciální energii deformované pružiny, přičemž je během kmitání postupně disipována.

Mezi těmito dvěma (idealizovanými) soustavami je analogie a také diferenciální rovnice popisující tyto procesy jsou stejné. Nemusíme tedy studovat novou matematiku a budeme věnovat plnou pozornost fyzikálnímu ději.

33.2 KVALITATIVNÍ ROZBOR KMITŮ LC

Ze tří obvodových prvků, rezistoru R, kondenzátoru C a cívky L, jsme dosud probrali sériové zapojení RC v čl. 28.8 a RL v čl. 31.9. Poznali jsme, že v těchto dvou typech obvodů náboj, proud a napětí narůstá a klesá s časem exponenciálně. Časový průběh růstu nebo poklesu lze charakterizovat příslušnou časovou konstantou τ_C nebo τ_L.

Nyní zkoumejme třetí možnost — sériové zapojení LC. Uvidíme, že v tomto případě náboj, proud a napětí neklesají exponenciálně s časem, ale mění se harmonicky (s dobou kmitu T a úhlovou frekvencí ω). Říkáme, že obvod *kmitá* neboli *osciluje* a příslušné změny elektrického pole kondenzátoru a magnetického pole cívky se nazývají **elektromagnetické kmity**. Části (a) až (h) na obr. 33.1 ukazují po sobě jdoucí fáze průběhu kmitů v jednoduchém kmitavém obvodu LC.

Metoda opravování vysokonapěťových vedení, zobrazená na úvodní fotografii, je patentována Scottem H. Yenzerem a vlastníkem licence je výhradně Haverfield Corporation z Miami na Floridě. Jakmile se opravář přiblíží k vedení pod napětím, elektrické pole okolo vedení způsobí, že jeho tělo získá potenciál blízký potenciálu vedení. Aby se oba potenciály vyrovnaly, připojí se opravář vodivou tyčí k vedení. Aby nebyl usmrcen elektrickým proudem, musí být izolován od všeho, co je elektricky spojeno se zemí. A aby jeho tělo bylo na konstantním potenciálu — potenciálu vedení, má oblečen vodivý oblek s kapucí a rukavicemi, které jsou spojeny pomocí vodiče s vedením.

Podle rov. (26.21) je energie uložená v elektrickém poli kondenzátoru v libovolném okamžiku rovna

$$E_{\mathrm{el}}(t) = \frac{Q^2(t)}{2C}, \tag{33.1}$$

kde $Q(t)$ je náboj na kondenzátoru v čase t. Podle rovnice (31.53) je energie uložená v magnetickém poli cívky v libovolném okamžiku rovna

$$E_{\mathrm{mg}}(t) = \frac{LI^2(t)}{2}, \tag{33.2}$$

kde $I(t)$ je proud protékající cívkou v čase t.

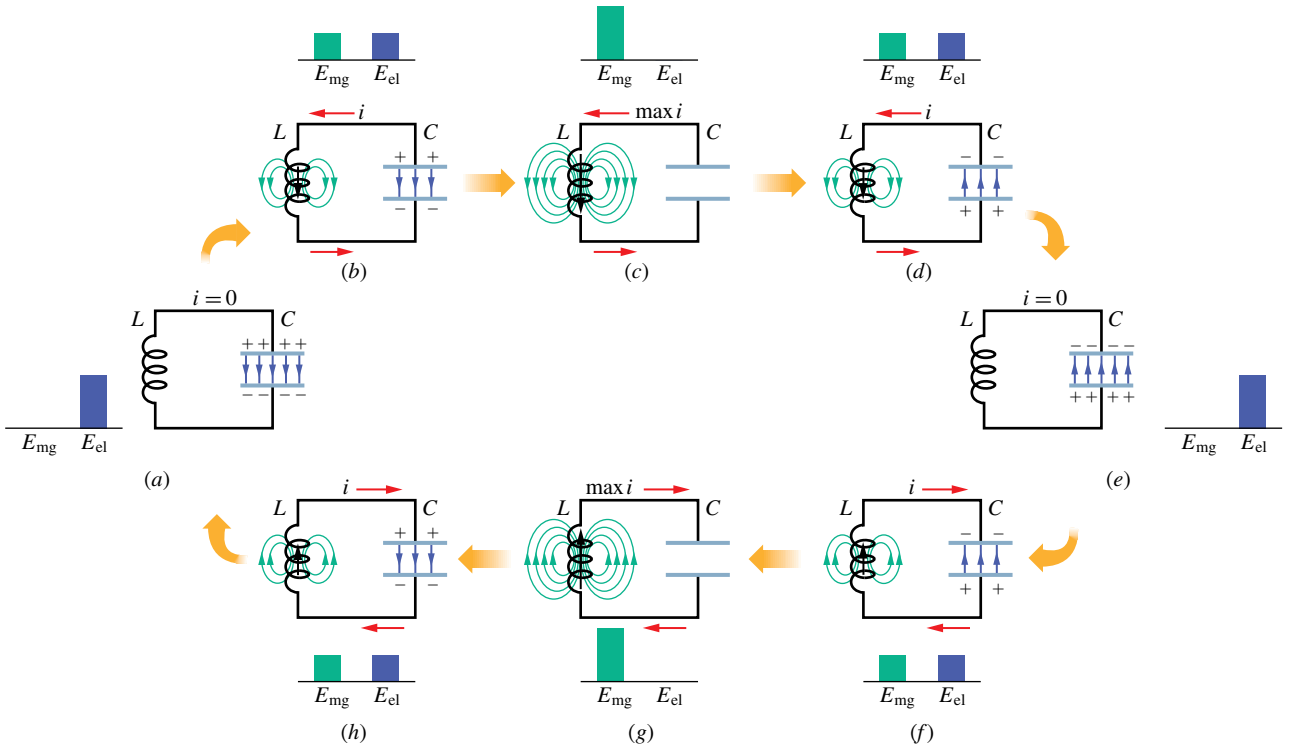
Přijmeme dále dohodu, že k vyjádření *okamžitých hodnot* elektrických veličin, které kmitají *harmonicky*, použijeme malá písmena (q, i, u, e) a pro jejich *amplitudy* velká písmena (Q, I, U, $\mathscr{E}$).

Předpokládejme, že počáteční náboj q na kondenzátoru je roven jeho amplitudě Q a počáteční proud i cívkou je nulový. Tento výchozí stav obvodu je na obr. 33.1a. Sloupcové grafy pro energii ukazují, že v tomto okamžiku při nulovém proudu v cívce a maximálním napětí na kondenzátoru je energie E_{mg} magnetického pole nulová a energie E_{el} elektrického pole je maximální.

Kondenzátor se nyní začne vybíjet přes cívku. Kladný náboj se pohybuje proti směru otáčení hodinových ručiček (obr. 33.1b), což znamená, že vznikne proud $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, který na obrázku směřuje v cívce dolů. Spolu s nábojem na kondenzátoru klesá i jeho energie. Tato energie se přeměňuje na energii magnetického pole cívky tak, jak narůstá proud i. Energie elektrického pole tedy klesá a mění se v energii pole magnetického.

Kondenzátor nakonec ztratí všechen náboj (obr. 33.1c), a tím také své elektrické pole a energii v tomto poli akumulovanou. Energie je zcela převedena do magnetického pole cívky. Protože magnetické pole má v tomto okamžiku největší hodnotu, má svou maximální hodnotu I také proud tekoucí cívkou.

Ačkoli náboj na kondenzátoru je nyní nulový, proud dále teče proti směru otáčení hodinových ručiček, neboť v důsledku elektromagnetické indukce cívka nedovolí, aby náhle zanikl. To znamená, že proud pokračuje v přenosu kladného náboje z horní elektrody kondenzátoru na jeho dolní elektrodu obvodem (obr. 33.1d). Energie nyní přechází z cívky zpět do kondenzátoru tak, jak postupně znovu narůstá elektrické pole kondenzátoru. Proud postupně během přenosu energie klesá. Když je nakonec všechna energie přenesena zpět do kondenzátoru (obr. 33.1e), proud klesne na okamžik na nulu. Situace na obr. 33.1e je stejná



Obr. 33.1 Osm stavů jedné periody kmitů v ideálním obvodu LC (bez odporu). Sloupcové grafy u každého obrázku ukazují velikost energie uložené v magnetickém a v elektrickém poli. Jsou též naznačeny indukční čáry magnetického pole cívky a elektrické siločáry v kondenzátoru. (a) Kondenzátor má maximální náboj a proud je nulový. (b) Kondenzátor se vybíjí, proud narůstá. (c) Kondenzátor je zcela vybit a proud je maximální. (d) Kondenzátor je nabíjen, ale s opačnou polaritou než v (a). (e) Kondenzátor má maximální náboj opačné polarity než v (a), proud je nulový. (f) Kondenzátor se vybíjí, proud narůstá v opačném směru než v (b). (g) Kondenzátor je zcela vybit, proud je maximální. (h) Kondenzátor je nabíjen, proud klesá.

jako původní (obr. 33.1a), s tím rozdílem, že kondenzátor je nyní nabit opačně.

Kondenzátor se potom začíná znovu vybíjet, avšak nyní proudem ve směru otáčení hodinových ručiček. Z důvodů právě uvedených vidíme, že proud vzrůstá k maximu (obr. 33.1g) a pak klesá (obr. 33.1h), až se obvod nakonec dostane do původního stavu (obr. 33.1a). Celý proces se opakuje s kmitočtem f a tedy úhlovou frekvencí $\omega = 2\pi f$. V ideálním obvodu bez odporu neprobíhá jiná přeměna energie než mezi elektrickým polem kondenzátoru a magnetickým polem cívky. Podle zákona zachování energie by kmity pokračovaly nekonečně dlouho. Kmity nemusejí začínat s veškerou energií v elektrickém poli — počátečním stavem může být kterýkoli jiný stav během kmitu.

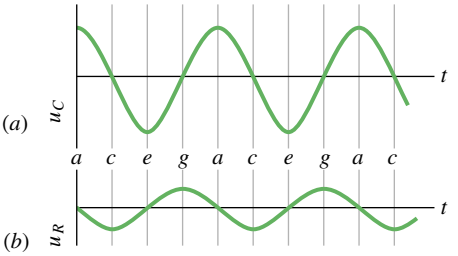
Abychom nalezli časový průběh náboje q na kondenzátoru, budeme na něm měřit voltmetrem napětí u_C. Z rov. (26.1) plyne

$$u_C = \left(\frac{1}{C}\right) q,$$

odkud můžeme vyjádřit q. Abychom změřili proud, zapojíme do série s kondenzátorem a cívkou malý rezistor R a změříme časově proměnné napětí u_R na rezistoru; to je úměrné i podle vztahu

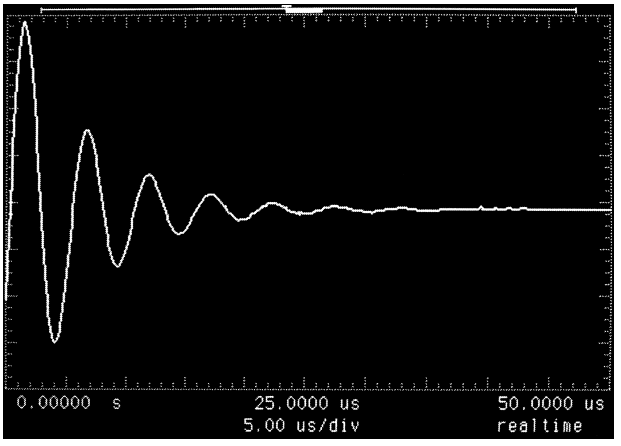
$$u_R = iR.$$

Přitom předpokládáme, že odpor R je tak malý, že jeho vliv na chování obvodu je zanedbatelný. Časový průběh u_C a u_R, a tedy také q a i je naznačen v obr. 33.2. Všechny čtyři veličiny se mění s časem harmonicky.



Obr. 33.2 (a) Napětí u_C na kondenzátoru v obvodu z obr. 33.1 jako funkce času t. Napětí u_C je úměrné náboji q na kondenzátoru. (b) Napětí u_R na malém rezistoru je úměrné proudu i v obvodu z obr. 33.1. Písmena se vztahují ke stejně označeným stavům kmitajícího obvodu z obr. 33.1.

Ve skutečném obvodu LC nebudou kmity trvat nekonečně dlouho, protože obvod má vždy jistý odpor, který odčerpá energii z elektrického a magnetického pole a rozptýlí ji (obvod se zahřeje). Vybuzené kmity postupně zaniknou, jak je vidět z obr. 33.3. Porovnejte tento obrázek s obr. 16.18, který ukazuje útlum mechanických kmitů, způsobený třením v soustavě pružina + těleso.



Obr. 33.3 Stopa na stínítku osciloskopu ukazuje útlum oscilací v obvodu RLC v důsledku disipace energie v rezistoru.

KONTROLA 1: Nabitý kondenzátor a cívka jsou spojeny do série v čase $t = 0$. Určete v násobcích periody T kmitů obvodu LC, kdy poprvé pro $t > 0$ dosáhne maximální hodnotu (a) náboj na kondenzátoru, (b) napětí na kondenzátoru s původní polaritou, (c) energie akumulovaná v elektrickém poli, (d) proud.

PŘÍKLAD 33.1

Kondenzátor o kapacitě 1,5 μF je nabit na napětí 57 V. Potom je odpojen od zdroje a připojen k cívce s indukčností 12 mH. Takto vzniklý obvod LC bude kmitat. Jaký bude největší proud v cívce? Předpokládejte, že odpor obvodu je zanedbatelný.

ŘEŠENÍ: Ze zákona zachování energie plyne, že maximální energie v kondenzátoru je rovna maximální energii v cívce. To podle rov. (33.1) a (33.2) znamená, že

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{LI^2}{2},$$

kde I je maximální proud a Q je maximální náboj. (Maximální proud a maximální náboj se nevyskytnou ve stejném okamžiku, ale jsou posunuty v čase o čtvrtinu periody, jak je zřejmé i z obr. 33.1 a 33.2.) Z uvedeného vztahu vypočteme I (za Q dosadíme CU) a tím dostaneme

$$I = U\sqrt{\frac{C}{L}} = (57\,\mathrm{V})\sqrt{\frac{(1{,}5{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{F})}{(12{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{H})}} =$$
$$= 0{,}637\,\mathrm{A} \doteq 640\,\mathrm{mA}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

33.3 ELEKTRO-MECHANICKÁ ANALOGIE

Podívejme se poněkud blíže na analogii mezi kmitajícím obvodem LC z obr. 33.1 a kmitající soustavou tvořenou tělesem a pružinou. V mechanické soustavě těleso+pružina se vyskytují dva druhy energie: jednak potenciální energie stlačené nebo napnuté pružiny, jednak kinetická energie pohybujícího se tělesa. Oba druhy energie jsou popsány známými vztahy v tab. 33.1 vlevo.

Tabulka také ukazuje dva druhy energie v kmitajícím obvodu LC. Můžeme vidět analogii mezi dvojicemi: potenciální + kinetická energie mechanické soustavy a magnetická + elektrická energie obvodu LC. Rovnice pro v a i na konci tabulky pomáhají lépe pochopit tuto analogii. Říkají nám, že náboji q odpovídá výchylka x a proudu i odpovídá rychlost v (v obou rovnicích se druhá veličina získá derivací veličiny první). Tato obdoba nás vede k tomu, abychom seskupili energie do dvojic v řádcích tak, jak jsou v tabulce. Z tabulky vyplývá, že veličině $1/C$ odpovídá tuhost k a indukčnosti L odpovídá hmotnost m:

q odpovídá x, $\quad 1/C$ odpovídá k,
i odpovídá v, $\quad L$ odpovídá m.

Podle matematického popisu je tedy obvod LC analogický soustavě těleso + pružina, kondenzátor odpovídá pružině a cívka tělesu.

Tabulka 33.1 **Energie prvků kmitajících soustav**

TĚLESO + PRUŽINA		CÍVKA + KONDENZÁTOR	
PRVEK	ENERGIE	PRVEK	ENERGIE
pružina	$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2$	kondenzátor	$E_\mathrm{el} = \frac{1}{2}(1/C)q^2$
těleso	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$	cívka	$E_\mathrm{mg} = \frac{1}{2}Li^2$
$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$		$i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$	

Z čl. 16.3 víme, že úhlová frekvence kmitů soustavy těleso + pružina při zanedbání tření je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(soustava těleso + pružina).} \qquad (33.3)$$

Uvedená analogie nás vede k tomu, abychom pro stanovení úhlové frekvence kmitů v obvodu LC (bez odporu) nahradili k veličinou $1/C$ a m veličinou L. Tím dostaneme

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{(obvod } LC\text{)}. \tag{33.4}$$

Tento výsledek odvodíme v následujícím článku.

33.4 KMITY *LC* KVANTITATIVNĚ

Nyní potvrdíme platnost rov. (33.4) pro úhlovou frekvenci kmitů LC. Současně budeme podrobněji zkoumat analogii mezi kmity obvodu LC a kmity soustavy těleso + pružina. Začneme tak, že rozšíříme naše dřívější studium kmitající soustavy těleso + pružina.

Oscilátor těleso + pružina

Kmity soustavy těleso + pružina jsme studovali v kap. 16 z hlediska přenosu energie. Tehdy jsme si však neodvodili základní rovnici, která mechanické kmity popisuje. To provedeme nyní.

Pro celkovou energii E oscilátoru těleso + pružina v libovolném okamžiku můžeme psát

$$E = E_k + E_p = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2, \tag{33.5}$$

kde E_k je kinetická energie pohybujícího se tělesa a E_p je potenciální energie napnuté nebo stlačené pružiny. Přitom zanedbáváme tření, takže se celková energie E s časem nemění, i když se v a x mění. Platí tedy $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Derivace rov. (33.5) podle času dává

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = \\ = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{33.6}$$

Avšak $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, a tedy $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$. Dosazením do rov. (33.6) pak dostaneme

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0 \quad \text{(kmity tělesa na pružině)}. \tag{33.7}$$

Diferenciální rovnice (33.7) je základní diferenciální rovnicí popisující kmity v soustavě těleso + pružina při zanedbání tření. Vystupuje v ní výchylka z rovnovážné polohy x a její druhá derivace podle času.

Obecné řešení rov. (33.7), tj. funkce $x(t)$, která popisuje kmity soustavy těleso + pružina, je, jak víme z rov. (16.3),

$$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{(výchylka)}, \tag{33.8}$$

kde X je amplituda výchylky mechanických kmitů (v kapitole 16 značená x_m), ω je úhlová frekvence kmitů a φ je počáteční fáze.

Oscilátor *LC*

Studujme nyní kmity v obvodu LC beze ztrát. Postupujme přitom stejně jako v případě soustavy těleso + pružina. Celková energie E, kterou má v každém okamžiku kmitající obvod LC, je

$$E = E_{mg} + E_{el} = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}, \tag{33.9}$$

kde E_{mg} je energie magnetického pole cívky a E_{el} je energie elektrického pole kondenzátoru. Protože jsme předpokládali, že odpor obvodu je nulový, energie není disipována, takže E zůstává v čase konstantní. Jinak řečeno, změna $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ je rovna nule. To vede ke vztahu:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = \\ = Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{33.10}$$

Avšak $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2q/\mathrm{d}t^2$. Dosazením do rov. (33.10) dostaneme

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}q = 0 \quad \text{(kmity obvodu } LC\text{)}, \tag{33.11}$$

což je *diferenciální rovnice*, která popisuje kmity v obvodu LC beze ztrát. Při porovnání rov. (33.11) a (33.7) vidíme, že mají stejný matematický tvar a liší se pouze jiným pojmenováním proměnných a konstant.

Protože tyto diferenciální rovnice jsou matematicky stejné, jejich řešení musí být také stejná. Protože q odpovídá x, můžeme napsat obecné řešení rov. (33.11) pro q analogicky s rov. (33.8):

$$q = Q\cos(\omega t + \varphi) \\ \text{(časový průběh náboje)}, \tag{33.12}$$

kde Q je amplituda proměnného náboje, ω je úhlová frekvence elektromagnetických kmitů a φ je počáteční fáze.

První derivace rov. (33.12) podle času dává proud tekoucí v obvodu LC:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\omega Q\sin(\omega t + \varphi) \\ \text{(časový průběh proudu)}. \tag{33.13}$$

Amplituda I tohoto harmonicky proměnného proudu je

$$I = \omega Q, \tag{33.14}$$

takže rov. (33.13) můžeme přepsat do tvaru

$$i = -I\sin(\omega t + \varphi). \tag{33.15}$$

Vztah (33.12) je řešením rov. (33.11). Ověříme to tak, že ho dosadíme spolu s jeho druhou derivací podle času do rov. (33.11). První derivací rov. (33.12) je rov. (33.13). Druhou derivací je

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 Q\cos(\omega t+\varphi).$$

Dosazením za q a za $\mathrm{d}^2q/\mathrm{d}t^2$ do rov. (33.11) dostaneme

$$-L\omega^2 Q\cos(\omega t+\varphi)+\frac{1}{C}Q\cos(\omega t+\varphi)=0.$$

Má-li toto platit v libovolném okamžiku t, musí být $-L\omega^2 Q + Q/C = 0$, odkud

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Za této podmínky je tedy rov. (33.12) opravdu řešením rov. (33.11). Všimněme si, že tento výraz pro ω je stejný jako vztah (33.4), získaný na základě elektromechanické analogie.

Amplitudu Q i počáteční fázi φ určíme z počátečních podmínek. Jestliže v čase $t = 0$ neteče obvodem proud, tj. $i(0) = 0$, musí být $\varphi = 0$ a okamžitý náboj $q(0)$ musí nabývat své maximální hodnoty Q. Těmto počátečním podmínkám odpovídá obr. 33.1a.

Energii uloženou v elektrickém poli obvodu LC v libovolném čase t dostaneme z rov. (33.1) a (33.12):

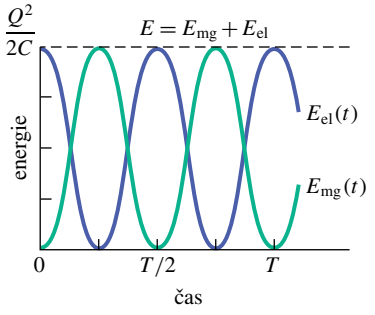
$$E_{\mathrm{el}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t+\varphi), \qquad (33.16)$$

energii uloženou v magnetickém poli dostaneme z rovnic (33.2) a (33.13):

$$E_{\mathrm{mg}} = \tfrac{1}{2}Li^2 = \tfrac{1}{2}L\omega^2Q^2\sin^2(\omega t+\varphi).$$

Když za ω dosadíme z rov. (33.4), dostaneme

$$E_{\mathrm{mg}} = \frac{Q^2}{2C}\sin^2(\omega t+\varphi). \qquad (33.17)$$



Obr. 33.4 Energie elektrického a magnetického pole v kmitavém obvodu LC (obr. 33.1) vyjádřená jako funkce času. Povšimněme si, že úhrnná energie zůstává konstantní. T je perioda kmitů.

Obr. 33.4 znázorňuje časové průběhy $E_{\mathrm{el}}(t)$ a $E_{\mathrm{mg}}(t)$ pro případ $\varphi = 0$. Poznamenejme, že:

1. Maximální hodnota jak E_{el}, tak i E_{mg} je rovna $Q^2/(2C)$.
2. Součet E_{el} a E_{mg} je roven v každém okamžiku $Q^2/(2C)$.
3. V okamžiku, kdy je energie E_{el} maximální, je E_{mg} minimální (nulová) a naopak.

KONTROLA 2: Kondenzátor v obvodu LC má maximální napětí 17 V a maximální energii 160 μJ. Stanovte (a) emn na cívce a (b) energii akumulovanou v magnetickém poli v okamžiku, kdy je na kondenzátoru napětí 5 V a energie 10 μJ.

PŘÍKLAD 33.2

(a) Vyjádřeme pomocí maximálního náboje Q náboj q na kondenzátoru kmitavého obvodu LC v okamžiku, kdy je energie rozdělena stejným dílem mezi elektrické a magnetické pole. Předpokládejme, že $L = 12\,\mathrm{mH}$ a $C = 1{,}7\,\mu\mathrm{F}$.

ŘEŠENÍ: Podle zadání je $E_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}E_{\mathrm{el,max}}$. Okamžitá a maximální energie akumulovaná v kondenzátoru jsou

$$E_{\mathrm{el}} = \frac{q^2}{2C} \quad \text{a} \quad E_{\mathrm{el,max}} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Zadání vyžaduje, aby

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{2C},$$

a odtud

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}Q \doteq 0{,}707Q. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Kdy je tato podmínka splněna, má-li kondenzátor největší náboj v čase $t = 0$?

ŘEŠENÍ: Rov. (33.12) vyjadřuje, jak se q mění s časem. Protože v čase $t = 0$ je $q = Q$, je počáteční fáze φ rovna nule. Dosazením $\varphi = 0$ a $q = 0{,}707Q$ do rov. (33.12) dostaneme

$$0{,}707Q = Q\cos\omega t,$$

odkud

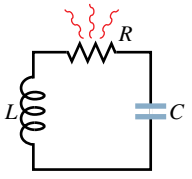
$$\omega t = 45^\circ = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}.$$

To odpovídá jedné osmině kmitu. Dosadíme-li za ω z rovnice (33.4), dostaneme hledaný čas

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi\sqrt{LC}}{4} = \frac{\pi\sqrt{(12\cdot10^{-3}\,\mathrm{H})(1{,}7\cdot10^{-6}\,\mathrm{F})}}{4} =$$
$$= 1{,}12\cdot10^{-4}\,\mathrm{s} \doteq 110\,\mu\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

33.5 TLUMENÉ KMITY V OBVODU *RLC*

Obvod skládající se z rezistoru, cívky a kondenzátoru se nazývá **obvod** *RLC*. Probereme zde pouze **sériový obvod** *RLC*, který je na obr. 33.5. Je-li přítomen rezistor R, potom celková *elektromagnetická energie* E obvodu (součet energie elektrického a magnetického pole) již nezůstává konstantní, ale klesá s časem tak, jak je energie postupně disipována v rezistoru. Proto také postupně klesá amplituda kmitů náboje, proudu a napětí; říkáme, že kmity jsou **tlumené**. Jak uvidíme, jsou kmity v obvodu *RLC* tlumeny stejně jako je tomu v tlumené soustavě těleso + pružina (čl. 16.8).



Obr. 33.5 Sériový obvod *RLC*. Protože proud v obvodu prochází (střídavě) rezistorem, dochází k disipaci elektromagnetické energie a kmity se tlumí (zmenšuje se jejich amplituda).

Abychom tyto kmity analyzovali, napíšeme rovnici pro celkovou energii E elektromagnetického pole tohoto obvodu, a to pro libovolný okamžik. Tato energie se ukládá jen v cívce a kondenzátoru podle rov. (33.9):

$$E = E_{mg} + E_{el} = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}. \qquad (33.18)$$

Nyní však již celková energie není konstantní, ale klesá tak, jak je postupně disipována. Rychlost této disipace (tj. ztrátový výkon) je podle rov. (27.22)

$$\frac{dE}{dt} = -Ri^2, \qquad (33.19)$$

kde znaménko minus říká, že E s časem klesá. Derivací rov. (33.18) podle času a dosazením výsledku do rovnice (33.19) dostaneme

$$Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = -i^2R.$$

Dosadíme-li dq/dt za i a d^2q/dt^2 za di/dt, dostaneme po vykrácení i

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \quad \text{(obvod } RLC\text{)}, \qquad (33.20)$$

což je diferenciální rovnice popisující tlumené kmity v sériovém obvodu *RLC*.

Tato rovnice má řešení

$$q = Qe^{-Rt/(2L)}\cos(\omega' t + \varphi), \qquad (33.21)$$

kde

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2} \qquad (33.22)$$

a $\omega = 1/\sqrt{LC}$ je stejné jako v případě netlumených kmitů. Rov. (33.21) vyjadřuje, jak se v čase mění náboj Q na kondenzátoru v tlumeném obvodu *RLC*. Tato rovnice je elektromagnetickým protějškem rov. (16.40), která určuje časový průběh výchylky tlumeného mechanického oscilátoru těleso + pružina.

Rov. (33.21) popisuje kmity (kosinový člen) s *exponenciálně klesající amplitudou* $Qe^{-Rt/(2L)}$. Úhlová frekvence ω' tlumených kmitů je tedy vždy menší než úhlová frekvence ω netlumených kmitů; pokud je odpor R dostatečně malý, lze ω' nahradit hodnotou ω.

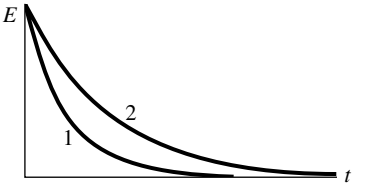
Vyjádřeme dále celkovou elektromagnetickou energii E obvodu jako funkci času. Jeden způsob, jak toho dosáhnout, je sledovat energii elektrického pole v kondenzátoru; ta je dána rov. (33.1) $E_{el} = q^2/(2C)$. Dosadíme-li do ní rov. (33.21), dostaneme

$$E_{el} = \frac{q^2}{2C} = \frac{\left(Qe^{-Rt/(2L)}\cos(\omega' t + \varphi)\right)^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}e^{-Rt/L}\cos^2(\omega' t + \varphi). \qquad (33.23)$$

Rov. (33.23) ukazuje, že energie elektrického pole se periodicky mění v čase se čtvercem kosinu fáze a že amplituda těchto kmitů klesá exponenciálně s časem. Energie magnetického pole cívky se s časem mění poněkud složitěji. Lze odvodit, že střední hodnota celkové energie v obvodu *RLC* klesá s časem exponenciálně podle vztahu

$$E = \frac{Q^2}{2C}e^{-Rt/L}. \qquad (33.24)$$

KONTROLA 3: (a) Obrázek ukazuje časovou závislost střední hodnoty celkové elektromagnetické energie E ve dvou obvodech *RLC* se stejnými kondenzátory a cívkami. Která křivka odpovídá obvodu s větším R? (b) Pokud by měly oba obvody stejnou hodnotu R i C, která křivka by odpovídala obvodu s větší hodnotou L?



PŘÍKLAD 33.3

Sériový obvod RLC má indukčnost $L = 12\,\text{mH}$, kapacitu $C = 1{,}6\,\mu\text{F}$ a odpor $R = 1{,}5\,\Omega$.

(a) Za jakou dobu t poklesne amplituda kmitů náboje v obvodu na 50 % své původní hodnoty?

ŘEŠENÍ: Rov. (33.21) vyjadřuje exponenciální útlum při kmitání náboje. Amplituda kmitů náboje poklesne na 50 % původní hodnoty, jestliže

$$Q\mathrm{e}^{-Rt/(2L)} = 0{,}50Q.$$

Zkrátíme Q a logaritmujeme obě strany; tím dostaneme

$$-\frac{Rt}{2L} = \ln 0{,}50.$$

Řešením této rovnice vzhledem k t a dosazením zadaných hodnot dostaneme

$$t = -\frac{2L}{R}\ln 0{,}50 = -\frac{2(12{\cdot}10^{-3}\,\text{H})\ln 0{,}50}{(1{,}5\,\Omega)} = \\ = 0{,}011\,1\,\text{s} \doteq 11\,\text{ms}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Kolik kmitů proběhne během této doby?

ŘEŠENÍ: Protože doba kmitu je $T = 2\pi/\omega$ a úhlová frekvence je $\omega = 1/\sqrt{LC}$, dostaneme $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Každý kmit trvá jednu periodu, takže v časovém intervalu $\Delta t = 0{,}011\,1\,\text{s}$ je počet kmitů roven

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta t}{2\pi\sqrt{LC}} = \\ = \frac{(0{,}011\,1\,\text{s})}{2\pi\sqrt{(12{\cdot}10^{-3}\,\text{H})(1{,}6{\cdot}10^{-6}\,\text{F})}} \doteq 13. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Amplituda kmitů náboje poklesne na 50 % přibližně během 13 kmitů. Toto tlumení je výrazně menší než tlumení z obr. 33.3, kde klesala amplituda o něco více než 50 % během jednoho kmitu.

33.6 STŘÍDAVÉ PROUDY

Kmity v obvodu RLC nebudou tlumeny, jestliže vhodný vnější zdroj elektromotorického napětí dodá dostatek energie k pokrytí tepelných ztrát na rezistoru R. Elektrické obvody v domácnostech, úřadech a továrnách obsahující bezpočet obvodů RLC, které odebírají tuto energii od místních rozvodných podniků. Ve většině zemí se energie dodává formou střídavého emn, resp. **střídavého proudu***. Tyto kmitající emn a proudy se mění v čase harmonicky s kmitočtem 50 Hz, což znamená, že změní 100krát za sekundu svůj směr. (V některých zemích, např. v USA, se používá kmitočet 60 Hz; směr se za sekundu změní 120krát.)

Všimněme si jedné pozoruhodnosti střídavého proudu. Viděli jsme, že driftová rychlost elektronů (čl. 27.3) ve vodičích obvykle nepřesahuje $4{\cdot}10^{-5}\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1}$. Jestliže nyní změníme směr proudu každou setinu sekundy, posune se elektron asi o $4{\cdot}10^{-7}\,\text{m}$ za půl periody. Tato vzdálenost představuje posun elektronu asi o 10 atomů, načež je elektron přinucen obrátit směr. Můžeme se tedy ptát, jak se může elektron při střídavém proudu vůbec dostat ke spotřebiči.

Odpověď spočívá v tom, že vodivé elektrony se nemusí „někam dostat“. Řekneme-li, že proud ve vodiči je jeden ampér, míníme tím, že nosiče náboje, které projdou průřezem vodiče, jím přenesou náboj jednoho coulombu za sekundu. Velikost rychlosti, kterou náboje procházejí rovinou průřezu, není přitom podstatná. Tentýž proud může odpovídat mnoha nábojům pohybujícím se pomalu, nebo několika nábojům pohybujícím se velmi rychle. Dále si uvědomme, že fyzikální popud, který mění směr pohybu elektronů a který má původ ve střídavém emn dodávaném z generátoru v elektrárně, se šíří jako elektromagnetická vlna podél tohoto vodiče s rychlostí blízkou rychlosti světla. Všechny elektrony, bez ohledu na jejich polohu, dostávají „pokyny pro změnu směru“ prakticky ve stejném okamžiku. Je také na místě poznamenat, že v mnoha zařízeních (jako jsou žárovky a tepelné spotřebiče) není směr pohybu elektronů důležitý. Elektrony totiž takovým zařízením předávají energii srážkami s jeho atomy, tedy dějem, kde směr pohybu náboje není podstatný.

Základní výhoda střídavých proudů je tato: *s časovou změnou proudů se mění i magnetické pole obklopující vodiče*. To dává možnost využít Faradayův zákon elektromagnetické indukce, což mezi mnoha jinými důsledky znamená, že můžeme libovolně zvýšit nebo snížit velikost střídavého napětí použitím transformátoru, jak uvidíme v této kapitole později. Navíc je střídavý proud vhodnější k použití v rotačních strojích, jako jsou generátory a motory, než (v čase stálý) stejnosměrný proud.

Obr. 33.6 ukazuje jednoduchý model alternátoru — generátoru střídavého napětí. Přinutíme-li vodivou smyčku točit se ve vnějším magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$, indukuje se v ní emn s harmonickým průběhem (kap. 31, úloha 25):

$$e = \mathscr{E}\sin\omega_\text{b}t. \qquad (33.25)$$

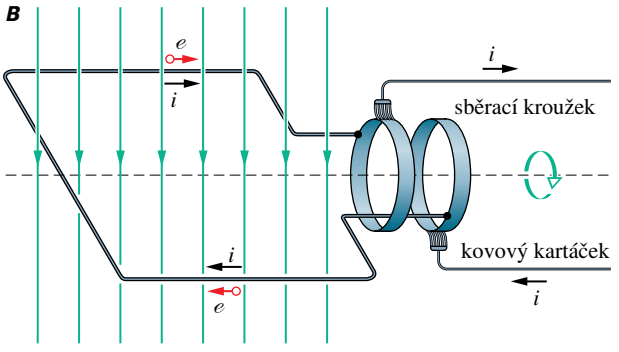
Úhlová frekvence emn, označená ω_b, je rovna úhlové rychlosti, se kterou se smyčka otáčí v magnetickém poli. *Fáze* emn je $\omega_\text{b}t$ a *amplituda* emn je $\mathscr{E}$. Je-li otáčející se smyčka

* Proud v čase neproměnný, např. z baterií a akumulátorů, se nazývá **stejnosměrný**.

částí uzavřeného obvodu, budí v něm toto emn **harmonický*** proud se stejnou úhlovou frekvencí ω_b, která se nazývá **budicí úhlová frekvence**. Proud můžeme vyjádřit vztahem

$$i = I \sin(\omega_b t - \varphi), \tag{33.26}$$

kde I je amplituda buzeného proudu. Zvolíme-li znaménko před φ záporné, pak $\varphi > 0$ přímo udává fázové zpoždění proudu i vůči e; proud i totiž nemusí být obecně ve fázi s e. Jak uvidíme, závisí fázový posun φ na vlastnostech obvodu, který je ke generátoru připojen. (Je-li $\varphi < 0$, jde ovšem o předbíhání, nikoli zpoždění.)



Obr. 33.6 Princip generátoru střídavého proudu: vodivá smyčka se otáčí ve vnějším magnetickém poli. Střídavé emn indukované ve smyčce se z ní vyvede pomocí sběracích kroužků připojených ke smyčce. Po nich kloužou vodivé kartáčky spojené s vnějším obvodem. (V praxi se místo smyčky používá cívky s mnoha závity, aby indukované emn bylo větší.)

33.7 NUCENÉ KMITY

Viděli jsme, že náboj, napětí a proud, jakmile vzniknou, kmitají jak v netlumeném obvodu LC, tak v slabě tlumeném obvodu RLC (s dostatečně malým R) s úhlovou frekvencí $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Takovým kmitům se říká **vlastní kmity** (bez vnějšího emn) a úhlová frekvence ω se nazývá **vlastní úhlová frekvence** obvodu.

Je-li k obvodu RLC připojeno vnější střídavé emn s frekvencí ω_b, potom mluvíme o **nucených** nebo též **buzených kmitech**. Dá se dokázat, že tyto kmity mají po odeznění přechodových jevů rovněž frekvenci ω_b, a to bez ohledu na hodnotu ω.

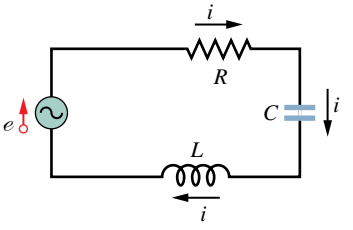
Nucené kmity (náboje, proudu, napětí) vždy převezmou po celkem krátké době budicí úhlovou frekvenci ω_b, ať už byla vlastní úhlová frekvence ω jakákoli.

* Je to běžný název pro sinusový a kosinusový průběh s libovolnou počáteční fází.

Jak uvidíme v čl. 33.9, závisejí amplitudy kmitů značně na tom, jak jsou navzájem blízké velikosti ω_b a ω. Jsou-li obě úhlové frekvence stejné, nastane **rezonance**, kdy amplituda proudu I v obvodu je největší.

33.8 TŘI JEDNODUCHÉ OBVODY

V dalších článcích připojíme vnější zdroj střídavého emn k sériovému obvodu RLC tak jako na obr. 33.7. Potom vyjádříme amplitudu I a počáteční fázi φ harmonicky kmitajícího proudu pomocí amplitudy emn $\mathscr{E}$ a úhlové frekvence ω_b vnějšího zdroje emn. Nejprve však prostudujeme tři jednodušší obvody, z nichž každý má kromě vnějšího zdroje emn pouze jeden obvodový prvek: R, L, nebo C. Začneme s rezistorem (čistě **odporová zátěž**).



Obr. 33.7 Sériový obvod skládající se z generátoru, rezistoru, kondenzátoru a cívky; generátor je znázorněn kroužkem se sinusoidou. Je zdrojem střídavého emn, které v obvodu vyvolá střídavý proud. Na obrázku je naznačen směr emn a proudu v jednom okamžiku.

Odporová zátěž

Obr. 33.8a ukazuje obvod s rezistorem o odporu R připojeným ke generátoru harmonického emn. Pro smyčku (jak víme z čl. 28.3) platí

$$e - u_R = 0.$$

Po dosazení z rov. (33.25) dostaneme

$$u_R = \mathscr{E} \sin \omega_b t.$$

Napětí na rezistoru se tedy mění harmonicky s úhlovou frekvencí rovnou ω_b a amplitudou, která se rovná amplitudě přiloženého emn. Můžeme proto psát

$$u_R = U_R \sin \omega_b t. \tag{33.27}$$

Z definice odporu ($R = u/i$) můžeme vyjádřit proud rezistorem vztahem

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{U_R}{R} \sin \omega_b t. \tag{33.28}$$

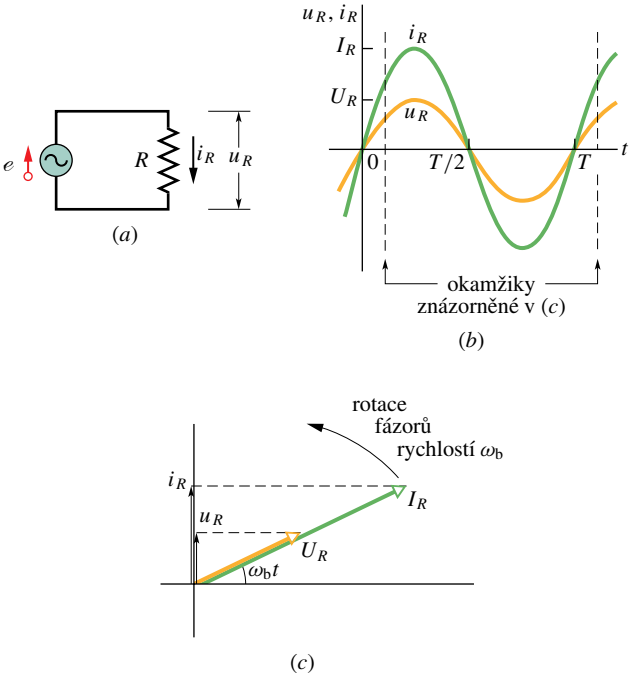
Podle rov. (33.26) můžeme tento proud zapsat ve tvaru

$$i_R = I_R \sin(\omega_b t - \varphi), \qquad (33.29)$$

kde I_R je amplituda proudu i_R v rezistoru. Porovnáním rov. (33.28) a (33.29) vidíme, že pro čistě odporovou zátěž je $\varphi = 0°$ a že amplitudy napětí a proudu jsou spolu spojeny vztahem

$$U_R = I_R R \quad \text{(rezistor)}. \qquad (33.30)$$

V obvodech střídavého proudu odporovou zátěž R zpravidla nazýváme **rezistance**. Ačkoli jsme nalezli tento vztah pro konkrétní obvod odpovídající obr. 33.8a, lze ho použít na libovolný rezistor v obvodu střídavého proudu.



Obr. 33.8 (a) Rezistor je připojen ke zdroji harmonického emn. (b) Proud a napětí na rezistoru jsou ve fázi a uskuteční jeden kmit za jednu periodu T. (c) Fázorový diagram ukazuje tutéž situaci jako obr. (b).

Porovnáním rov. (33.27) a (33.28) vidíme, že obě časové závislosti $u_R(t)$ a $i_R(t)$ jsou dány týmž výrazem $\sin \omega_b t$, a tedy rozdíl jejich fází je $\varphi = 0°$. Říkáme, že obě veličiny jsou **ve fázi**, což znamená, že jejich maxima (a minima) nastanou ve stejných okamžicích. Obr. 33.8b se závislostmi $u_R(t)$ a $i_R(t)$ tuto skutečnost dokresluje. Poznamenejme, že $u_R(t)$ a $i_R(t)$ nejsou tlumené proto, že generátor dodává do obvodu energii a nahrazuje energii disipovanou v rezistoru.

Časově proměnné veličiny $u_R(t)$ a $i_R(t)$ můžeme znázornit též geometricky pomocí **fázorů**. Připomeňme si z čl. 17.10, že fázory jsou vektory, které rotují kolem počátku souřadnic. Fázory představující napětí na rezistoru a proud, který jím prochází, jsou nakresleny v jistém okamžiku t na obr. 33.8c. Fázory mají následující vlastnosti:

Úhlová rychlost: Fázory rotují (při popisu střídavých proudů) proti směru otáčení hodinových ručiček okolo počátku s úhlovou rychlostí, která je rovna úhlové frekvenci ω_b napětí u_R i proudu i_R.

Délka: Délka fázoru představuje amplitudu střídavé veličiny, tedy U_R pro napětí a I_R pro proud.

Projekce: Projekce fázoru do svislé osy udává okamžitou hodnotu střídavé veličiny, tedy napětí u_R a proud i_R v čase t. Když je $\omega_b t = 90°$, směřuje fázor svisle vzhůru a jeho projekce je právě rovna jeho délce.

Úhel pootočení: S časem proměnný úhel pootočení fázoru měříme od vodorovné osy (obr. 33.8c). Je roven fázi střídavé veličiny v čase t. Na obr. 33.8c jsou napětí a proud ve fázi. Proto mají i jejich fázory tutéž fázi $\omega_b t$, tj. stejný úhel pootočení v obrázku a rotují tedy společně. Na obr. 33.9c jsou fázory navzájem posunuty o 90°.

Kapacitní zátěž

Obr. 33.9a ukazuje obvod sestavený z kondenzátoru a generátoru harmonického emn podle rov. (33.25). Postupem, kterým jsme dospěli k rov. (33.27), zjistíme, že napětí na kondenzátoru je

$$u_C = U_C \sin \omega_b t, \qquad (33.31)$$

kde U_C je amplituda napětí na kondenzátoru. Z definice kapacity plyne

$$q_C = C u_C = C U_C \sin \omega_b t. \qquad (33.32)$$

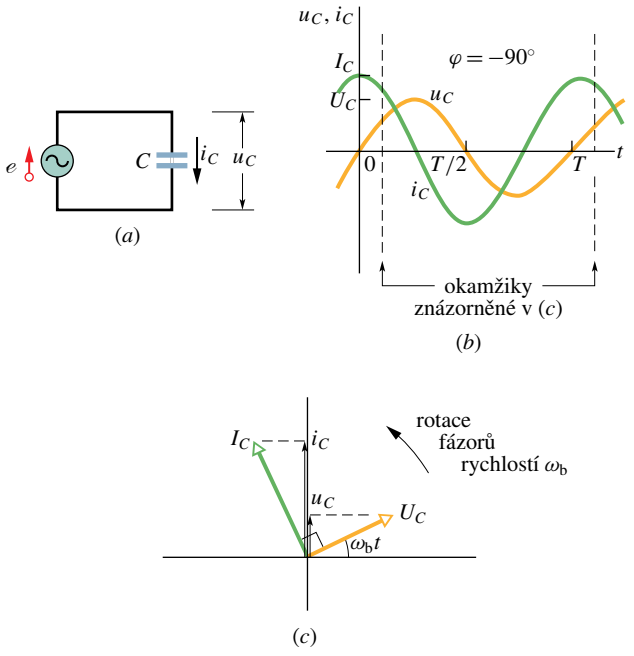
Více než náboj nás však zajímá proud. Derivováním rov. (33.32) dostaneme

$$i_C = \frac{\mathrm{d}q_C}{\mathrm{d}t} = \omega_b C U_C \cos \omega_b t. \qquad (33.33)$$

Provedeme dále dvě úpravy rov. (33.33). Za prvé: aby se zápis podobal rov. (33.28), zavedeme **kapacitní reaktanci** X_C kondenzátoru, definovanou vztahem

$$X_C = \frac{1}{\omega_b C} \quad \text{(kapacitní reaktance)}. \qquad (33.34)$$

Její hodnota závisí nejen na kapacitě C, ale i na úhlové frekvenci ω_b. Vidíme, že jednotkou pro X_C je ohm, stejně



Obr. 33.9 (a) Kondenzátor je připojen ke zdroji harmonického emn. (b) Proud předbíhá před napětím o 90°. (c) Fázorový diagram ukazuje tutéž situaci.

jako pro odpor R. Za druhé: v rov. (33.33) nahradíme funkci $\cos \omega_b t$ funkcí sinus fázově posunutou:

$$\cos \omega_b t = \sin(\omega_b t + 90°).$$

Po těchto dvou úpravách zapíšeme rov. (33.33) ve tvaru

$$i_C = \left(\frac{U_C}{X_C}\right) \sin(\omega_b t + 90°). \qquad (33.35)$$

Proud i_C však můžeme vyjádřit také podle rov. (32.26):

$$i_C = I_C \sin(\omega_b t - \varphi), \qquad (33.36)$$

kde I_C je amplituda veličiny i_C. Porovnáním rov. (33.35) a (33.36) vidíme, že při čistě kapacitní zátěži je $\varphi = -90°$. Vidíme též, že amplitudy napětí a proudu jsou spolu spojeny vztahem

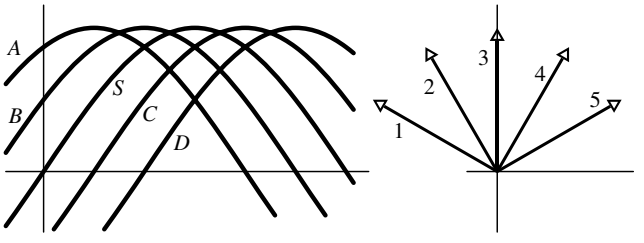
$$U_C = I_C X_C \quad \text{(kondenzátor)}. \qquad (33.37)$$

Ačkoli jsme nalezli tento vztah pro konkrétní obvod na obr. 33.9a, lze ho použít na libovolný kondenzátor v jakémkoli obvodu střídavého proudu.

Porovnáním rov. (33.31) a (33.35) nebo pohledem na obr. 33.9b zjistíme, že veličiny u_C a i_C jsou posunuty o úhel 90°, tedy o čtvrtinu periody. Navíc vidíme, že i_C *předbíhá* u_C, což znamená, že na obr. 33.9a dosahuje i_C maxima o čtvrtinu periody *před* u_C.

Tento vztah mezi i_C a u_C je znázorněn na fázorovém diagramu v obr. 33.9c: fázor I_C předbíhá před fázorem U_C o úhel 90°.

KONTROLA 4: Obrázek (1) ukazuje sinusovou funkci $S(t) = \sin \omega_b t$ a čtyři další sinusoidy $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, každou tvaru $\sin(\omega_b t - \varphi)$. (a) Seřaďte sestupně uvedené čtyři křivky podle hodnoty φ. (b) Která z křivek odpovídá jednotlivým fázorům z obrázku (2)? (c) Která křivka časově předbíhá před ostatními?



Induktivní zátěž

Obr. 33.10a ukazuje obvod sestavený z cívky a generátoru harmonického emn podle rov. (33.25). Postupem, který nás přivedl k rov. (33.27) a (33.31), dostaneme, že napětí na cívce je

$$u_L = U_L \sin \omega_b t, \qquad (33.38)$$

kde U_L je amplituda napětí u_L. Z rov. (31.40) můžeme vyjádřit napětí na cívce L, ve které se mění proud s rychlostí di_L/dt:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}. \qquad (33.39)$$

Z rov. (33.38) a (33.39) dostaneme

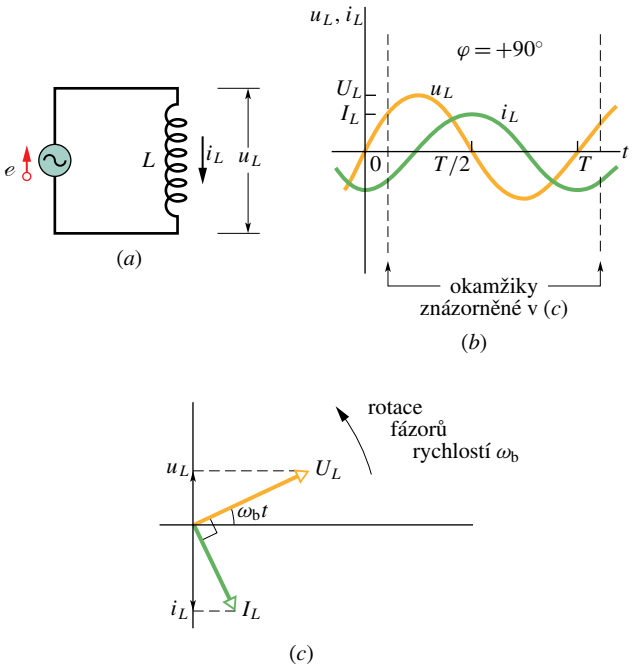
$$\frac{di_L}{dt} = \frac{U_L}{L} \sin \omega_b t. \qquad (33.40)$$

Více než časová derivace proudu nás však zajímá samotný proud. Ten dostaneme integrací rov. (33.40):

$$i_L = \int di_L = \frac{U_L}{L} \int \sin \omega_b t \, dt =$$
$$= -\left(\frac{U_L}{\omega_b L}\right) \cos \omega_b t. \qquad (33.41)$$

Provedeme dále dvě úpravy této rovnice. Za prvé: aby se zápis podobal rov. (33.28), zavedeme **induktivní reaktanci** X_L cívky vztahem

$$X_L = \omega_b L \quad \text{(induktivní reaktance)}. \qquad (33.42)$$



Obr. 33.10 (a) Cívka je připojena ke zdroji harmonického emn. (b) Proud je zpožděn za napětím o 90°. (c) Fázorový diagram ukazuje totéž.

Její hodnota závisí nejen na indukčnosti, ale i na úhlové frekvenci ω_b. Opět vidíme, že jednotkou X_L je ohm, stejně jako pro X_C a R.

Za druhé: zaměníme funkci $-\cos\omega_b t$ v rov. (33.41) funkcí sinus fázově posunutou:

$$-\cos\omega_b t = \sin(\omega_b t - 90°).$$

Po těchto úpravách zapíšeme rov. (33.41) ve tvaru

$$i_L = \frac{U_L}{X_L}\sin(\omega_b t - 90°). \qquad (33.43)$$

Proud i_L však můžeme vyjádřit také podle rov. (33.26):

$$i_L = I_L \sin(\omega_b t - \varphi), \qquad (33.44)$$

kde I_L je amplituda proudu i_L cívkou. Porovnáním rovnice (33.43) a (33.44) vidíme, že pro čistě induktivní zátěž je $\varphi = +90°$. Také vidíme, že mezi amplitudou napětí a amplitudou proudu platí vztah

$$U_L = I_L X_L \quad \text{(cívka)}. \qquad (33.45)$$

Ačkoli jsme tento vztah nalezli pro konkrétní obvod z obr. 33.10a, lze ho použít pro jakoukoli cívku v obvodu střídavého proudu.

Porovnáním rov. (33.38) a (33.43) nebo pohledem na obr. 33.10b shledáme, že fáze veličin i_L a u_L jsou navzájem posunuty o 90°. V tomto případě je však i_L *zpožděn* za u_L. To znamená, že sledujeme-li průběh proudu i_L a napětí u_L v obvodu z obr. 33.10a, zjistíme, že i_L dosáhne svého maxima o čtvrtinu periody *později než* u_L.

Z fázorového diagramu v obr. 33.10c je to také zřejmé. Fázor I_L má fázové zpoždění oproti fázoru U_L o úhel 90°. Přesvědčte se, že obr. 33.10c znázorňuje situaci popsanou rov. (33.38) a (33.43).

RADY A NÁMĚTY

Bod 33.1: *Předbíhání a zpožďování v obvodech se střídavými proudy*

Tab. 33.2 uvádí přehled vztahů mezi proudem i a napětím u pro každý ze tří typů uvažovaných obvodových prvků. Přiloží-li se na ně napětí, je proud ve fázi s napětím na rezistoru, proud předbíhá před napětím na kondenzátoru a je zpožděn za napětím na cívce.

Fázi φ i fázový posun $\Delta\varphi$ vyjadřujeme obvykle v obloukové míře v radiánech nebo ve stupních. Někdy je však názornější vyjádření pomocí času $t = \varphi/\omega$, resp. $\Delta t = \Delta\varphi/\omega$. Říkáme: „Proud i napětí nabývají maxima současně“, „Proud předbíhá před napětím“ apod.

PŘÍKLAD 33.4

(a) V obr. 33.9a je $C = 15{,}0\,\mu\text{F}$, $\mathscr{E} = U_C = 36{,}0\,\text{V}$ a kmitočet budicího napětí je $f_b = 60{,}0\,\text{Hz}$. Jaká je amplituda proudu I_C?

ŘEŠENÍ: Hledanou amplitudu dostaneme z rov. (33.37) (tj. $U_C = I_C X_C$), vypočteme-li nejprve kapacitní reaktanci X_C. Z rov. (33.34), kde $\omega_b = 2\pi f_b$, plyne

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_b C} = \frac{1}{2\pi(60{,}0\,\text{Hz})(15{,}0\cdot10^{-6}\,\text{F})} = 177\,\Omega.$$

Potom z rov. (33.37)

$$I_C = \frac{U_C}{X_C} = \frac{(36{,}0\,\text{V})}{(177\,\Omega)} = 0{,}203\,\text{A}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Nechť v obr. 33.10a je $L = 230\,\text{mH}$, $\mathscr{E} = U_L = 36{,}0\,\text{V}$ a $f_b = 60{,}0\,\text{Hz}$. Jaká je amplituda proudu I_L?

ŘEŠENÍ: Amplitudu můžeme získat z rov. (33.45) ($I_L = U_L/X_L$) tak, že nejprve vypočteme induktivní reaktanci X_L. Z rov. (33.42), kde položíme $\omega_b = 2\pi f_b$, dostaneme

$$X_L = 2\pi f_b L = 2\pi(60{,}0\,\text{Hz})(230\cdot10^{-3}\,\text{H}) = 86{,}7\,\Omega.$$

Tabulka 33.2 **Vztahy mezi amplitudou a fází pro střídavé proudy a napětí**

OBVODOVÝ PRVEK	SYMBOL	REZISTANCE NEBO REAKTANCE*	FÁZE PROUDU	FÁZOVÝ POSUN φ	VZTAH MEZI AMPLITUDAMI
Rezistor	R	R	ve fázi s u_R	$0°$	$U_R = I_R R$
Kondenzátor	C	$X_C = 1/(\omega_b C)$	předbíhá u_C o $90°$	$-90°$	$U_C = I_C X_C$
Cívka	L	$X_L = \omega_b L$	zpožděna za u_L o $90°$	$+90°$	$U_L = I_L X_L$

* Někdy se pro kapacitní reaktanci užívá název **kapacitance** a pro induktivní reaktanci název **induktance**.

Potom z rov. (33.45)

$$I_L = \frac{U_L}{X_L} = \frac{(36{,}0\ \mathrm{V})}{(86{,}7\ \Omega)} = 0{,}415\ \mathrm{A}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(c) Napište výraz pro časově proměnný proud i_L v obvodu podle (b).

ŘEŠENÍ: Rov. (33.44) je obecným řešením pro i_L. Pro vypočtený proud $I_L = 0{,}415$ A a pro

$$\omega_b = 2\pi f_b = 120\pi\ \mathrm{s}^{-1}$$

dostaneme při $\varphi = 90° = \pi/2$ rad pro tento čistě induktivní obvod

$$i_L = I_L \sin(\omega_b t - \varphi) = \\ = (0{,}415\ \mathrm{A}) \sin\left(120\pi t - \frac{\pi}{2}\right). \quad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 5: Jestliže zvýšíme budicí kmitočet f_b v obvodu (a) podle obr. 33.9a, (b) podle obr. 33.10a, amplituda proudu I v obvodu vzroste, klesne, nebo zůstane stejná?

33.9 SÉRIOVÝ OBVOD *RLC*

Nyní jsme připraveni vyšetřit situaci, kdy připojíme zdroj harmonického emn

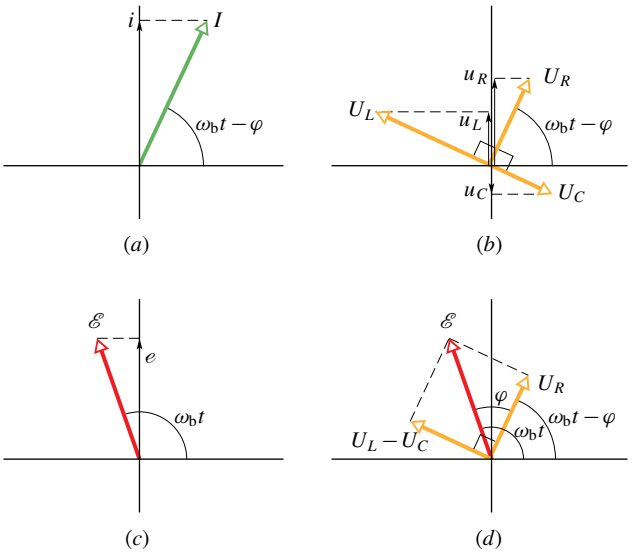
$$e = \mathscr{E} \sin \omega_b t \quad \text{(přiložené emn)} \qquad (33.46)$$

k *sériovému* obvodu *RLC* podle obr. 33.7. Protože R, L a C jsou zapojeny v sérii, protéká tentýž proud

$$i = I \sin(\omega_b t - \varphi) \qquad (33.47)$$

všemi třemi prvky. Chceme nalézt amplitudu I proudu a fázový posun φ proudu i vůči e.

Řešení se zjednoduší použitím fázorových diagramů. Začneme s obr. 33.11a, který ukazuje fázor představující proud z rov. (33.47) v libovolném čase t. Délka fázoru je amplituda I, projekce fázoru na svislou osu je okamžitý proud i v čase t a úhel pootočení fázoru je fáze $(\omega_b t - \varphi)$ proudu v čase t.



Obr. 33.11 (a) Fázor harmonického proudu v buzeném obvodu *RLC* na obr. 33.7 v čase t. V obrázku je vyznačena amplituda I, okamžitá hodnota i a fáze $(\omega_b t - \varphi)$. (b) Fázory napětí na cívce, rezistoru a kondenzátoru, vztažené k fázoru proudu v (a). (c) Fázor harmonického emn, které budí proud podle (a). (d) Fázor emn je roven vektorovému součtu tří fázorů napětí podle (b). Fázory U_L a U_C jsou sečteny do výsledného fázoru $(U_L - U_C)$.

Obr. 33.11b ukazuje fázory napětí na R, L a C ve stejném okamžiku t. Každý fázor je vztažen k fázoru proudu I z obr. 33.11a podle pravidel uvedených v tab. 33.2:

Rezistor: Napětí a proud jsou ve fázi, takže fázor napětí U_R má stejný směr jako fázor I.
Kondenzátor: Proud předbíhá napětí o $90°$, takže fázor napětí U_C je zpožděn o $90°$ za fázorem I.
Cívka: Proud je zpožděn za napětím o $90°$, takže naopak fázor napětí U_L předbíhá o $90°$ před fázorem I.

Obr. 33.11b také ukazuje okamžité hodnoty napětí u_R, u_C a u_L na prvcích R, C a L v čase t. Tato napětí jsou projekce odpovídajících fázorů na svislou osu.

Obr. 33.11c ukazuje fázor představující přiložené emn z rov. (33.46). Délka fázoru je amplituda $\mathscr{E}$, projekce fázoru na svislou osu je okamžitá hodnota emn v čase t a úhel pootočení fázoru je fáze $\omega_b t$ emn v čase t.

Smyčkové pravidlo říká, že v libovolném okamžiku je součet napětí u_R, u_C a u_L roven přiloženému emn e:

$$e = u_R + u_C + u_L. \tag{33.48}$$

V libovolném okamžiku t je projekce emn v obr. 33.11c tedy rovna součtu projekcí u_R, u_C a u_L v obr. 33.11b. Protože fázory rotují se stejnou úhlovou rychlostí, platí tato rovnice v každém okamžiku. To znamená, že fázor $\mathscr{E}$ v obr. 33.11c musí být roven vektorovému součtu tří fázorů napětí U_R, U_C a U_L v obr. 33.11b.

Uvedené vektorové skládání fázorů můžeme zjednodušit nejprve využitím té skutečnosti, že fázory U_C a U_L mají opačné směry. Lze je proto nahradit jediným fázorem $U_L - U_C$, jak je ukázáno v obr. 33.11d. Vektorový součet všech tří napěťových fázorů z obr. 33.11b nalezneme jako výslednici dvou fázorů U_R a $(U_L - U_C)$ v obr. 33.11d. Tento výsledek je roven fázoru $\mathscr{E}$, jak je naznačeno.

Oba trojúhelníky v obr. 33.11d jsou pravoúhlé. Použitím Pythagorovy věty dostaneme vztah

$$\mathscr{E}^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2. \tag{33.49}$$

Z tab. 33.2 dosadíme za amplitudy napětí na jednotlivých prvcích, takže

$$\mathscr{E}^2 = (IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2 \tag{33.50}$$

a z toho po úpravě dostaneme

$$I = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \tag{33.51}$$

Jmenovatel v rov. (33.51) má význam celkového odporu sériového obvodu RLC a nazývá se **impedance** obvodu pro budicí úhlovou frekvenci ω_b:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \text{(definice impedance).} \tag{33.52}$$

Rov. (33.51) potom můžeme psát ve tvaru

$$I = \frac{\mathscr{E}}{Z}. \tag{33.53}$$

Dosadíme-li za X_C a X_L z rov. (33.34) a (33.42), můžeme rov. (33.51) zapsat ve tvaru

$$I = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega_b L - 1/\omega_b C)^2}} \quad \text{(amplituda proudu).} \tag{33.54}$$

Tím jsme dosáhli poloviny našeho záměru: odvodili jsme výraz pro amplitudu I proudu. Hodnota I závisí na rozdílu $(\omega_b L - 1/\omega_b C)$ v rov. (33.54) neboli na rozdílu $X_L - X_C$ v rov. (33.51). Nezáleží však na tom, která z obou veličin je větší, neboť počítáme druhou mocninu jejich rozdílu.

V tomto článku jsme se zabývali **ustáleným harmonickým proudem**. Ten se vyskytuje v obvodu až po určité době od připojení zdroje emn. Ihned po připojení obvodu k emn jím protéká po krátkou dobu **přechodný proud**. Doba jeho trvání (dříve, než nastane ustálený stav) je určena časovými konstantami $\tau_L = L/R$ a $\tau_C = RC$; ty jsou úměrné době, potřebné pro „plné zapojení“ induktivních a kapacitních prvků. Přechodný proud může být velký a může například zničit elektromotor při rozběhu, nemá-li vinutí přiměřeně navržené.

Fázový posun

Ještě potřebujeme stanovit hodnotu fázového posunu φ. Z pravoúhlého trojúhelníku fázorů v obr. 33.11d a podle údajů tab. 33.2 můžeme psát

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR}, \tag{33.55}$$

což dává

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad \text{(fázový posun).} \tag{33.56}$$

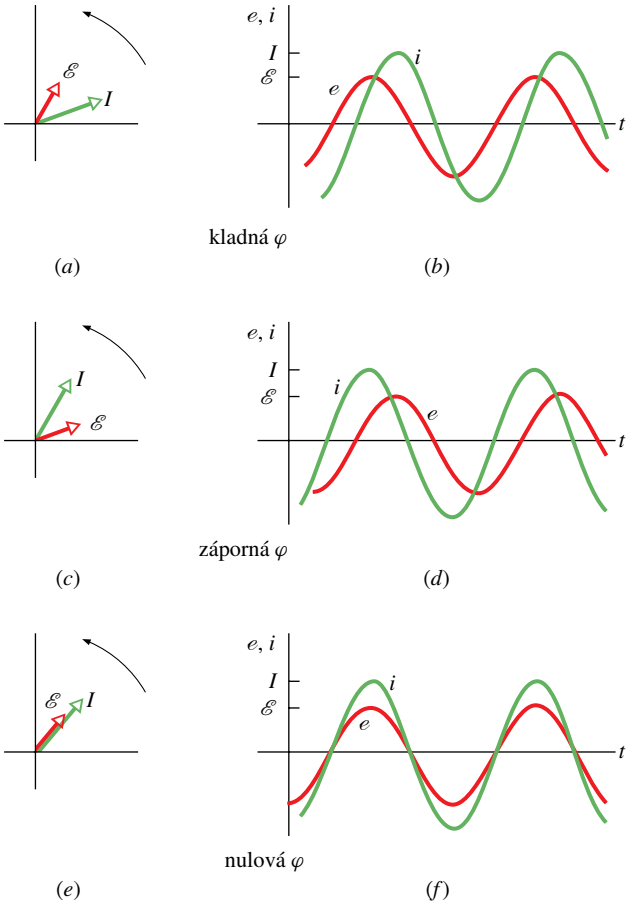
Znaménko rozdílu $(X_L - X_C)$ nemělo vliv na *amplitudu* proudu i. Z rov. (33.56) však vidíme, že toto znaménko určuje *fázový posun* proudu vůči napětí. Jsou tři možnosti:

Je-li $X_L > X_C$, obvod má **induktivní charakter**. Podle rov. (33.56) je fázový posun φ pro takový obvod kladný, což znamená, že fázor $\mathscr{E}$ rotuje *před* fázorem I (obr. 33.12a). Příklad závislosti e a i na čase je na obr. 33.12b.

Je-li $X_C > X_L$, obvod má **kapacitní charakter**. Podle rov. (33.56) je fázový posun pro takový obvod záporný, což znamená, že fázor $\mathscr{E}$ rotuje *za* fázorem I (obr. 33.12c). Příklad závislosti e a i na čase je na obr. 33.12d.

Je-li $X_C = X_L$, obvod je **v rezonanci**; tento termín vysvětlíme dále. Rov. (33.56) říká, že v takovém obvodu je $\varphi = 0°$, což znamená, že fázory $\mathscr{E}$ a I rotují společně (na téže vektorové přímce) (obr. 33.12e). Příklad závislosti e a i na čase je na obr. 33.12f.

Jako ilustraci uvažujme dva krajní případy obvodů: V *čistě induktivním obvodu* podle obr. 33.10a, kde je reaktance X_L nenulová a $X_C = R = 0$, rov. (33.56) dává



Obr. 33.12 Fázorové diagramy a časový průběh harmonických emn a proudů pro buzený obvod RLC na obr. 33.7. Pro (a, b) je fázový posun φ kladný, pro (c, d) je záporný a pro (e, f) je nulový.

$\varphi = +90°$ (nejvyšší hodnota φ) v souladu s obr. 33.10c. V *čistě kapacitním obvodu* podle obr. 33.9a, kde je reaktance X_C nenulová a $X_L = R = 0$, rov. (33.56) dává $\varphi = -90°$ (nejnižší hodnota φ) v souladu s obr. 33.9c.

Rezonance

Rov. (33.54) udává amplitudu proudu I v obvodu RLC jako funkci budicí úhlové frekvence ω_b vnějšího harmonického zdroje emn. Pro zadaný odpor R je tato amplituda největší, jestliže je veličina $(\omega_b L - 1/(\omega_b C))$ ve jmenovateli nulová, tedy jestliže

$$\omega_b L = \frac{1}{\omega_b C},$$

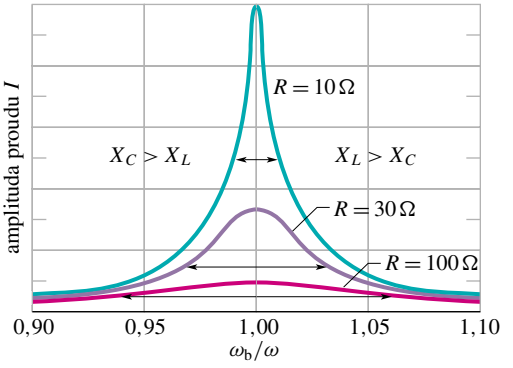
odkud

$$\omega_b = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{(maximum } I\text{)}. \qquad (33.57)$$

Tato frekvence, kterou nazýváme **rezonanční frekvence** kmitavého sériového obvodu RLC, je tedy rovna vlastní úhlové frekvenci (netlumených) kmitů v obvodu LC. To znamená, že v obvodu RLC nastane **rezonance** a amplituda I proudu dosáhne maxima, je-li

$$\omega_b = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{(rezonanční frekvence)}. \qquad (33.58)$$

Rezonanční frekvence je určena hodnotami L a C. Co se stane, když měníme R? Obr. 33.13 ukazuje tři **rezonanční křivky** proudu pro harmonicky buzené kmity ve třech sériových obvodech RLC, které se liší pouze hodnotou R. Každá křivka dosahuje maxima amplitudy proudu při rezonanční frekvenci $\omega_b = \omega$, avšak toto maximum klesá s rostoucím R. (Maximum I je vždy rovno $\mathscr{E}/R$; k důkazu postačí kombinovat rov. (33.52) a (33.53)). Také šířka křivek narůstá s rostoucím R (šířka je definována jako rozdíl kmitočtů při proudu rovném polovině maximální hodnoty I, obr. 33.13).



Obr. 33.13 *Rezonanční křivky* buzeného obvodu RLC na obr. 33.7 pro $L = 100\,\mu H$, $C = 100\,pF$ a tři hodnoty R. Amplituda I harmonického proudu závisí na tom, jak blízko je budicí úhlová frekvence ω_b k vlastní úhlové frekvenci ω. Vodorovná šipka u každé křivky udává její šířku na poloviční hodnotě maxima proudu, což je měřítkem strmosti rezonanční křivky. Nalevo od $\omega_b/\omega = 1$ je $X_C > X_L$ a obvod má kapacitní charakter. Napravo od $\omega_b/\omega = 1$ je $X_L > X_C$ a obvod má induktivní charakter.

Rezonančním křivkám z obr. 33.13 můžeme dát fyzikální význam tím, že budeme uvažovat, jak se reaktance X_L a X_C změní, zvyšujeme-li postupně budicí úhlovou frekvenci ω_b, přičemž začneme z hodnot mnohem menších, než je vlastní frekvence ω. Pro malé hodnoty ω_b je reaktance $X_L = \omega_b L$ malá a reaktance $X_C = 1/(\omega_b C)$ je velká. Obvod má tedy kapacitní charakter a převládá velká reaktance X_C, která udržuje v obvodu malý proud.

Zvyšujeme-li ω_b, reaktance X_C stále převažuje, ale klesá, zatímco X_L se zvyšuje. S poklesem X_C klesá i impedance, takže proud narůstá, jak vidíme na levé části rezonanční křivky v obr. 33.13. Když rostoucí X_L a klesající X_C dosáhnou stejných hodnot, proud je největší a obvod je v rezonanci při $\omega_b = \omega$.

Zvyšujeme-li dále ω_b, převládne narůstající reaktance X_L nad klesající reaktancí X_C. Impedance tedy narůstá v důsledku zvýšení X_L a proud klesá, jak je zřejmé v pravé části rezonanční křivky v obr. 33.13. Stručně shrnuto: pro úhlové frekvence menší než ω převažuje kapacitní reaktance, pro úhlové frekvence větší než ω převažuje induktivní reaktance a rezonance nastává právě pro frekvenci ω, kdy celková reaktance je nulová.

PŘÍKLAD 33.5

V obr. 33.7 je $R = 160\,\Omega$, $C = 15{,}0\,\mu\text{F}$, $L = 230\,\text{mH}$, $f_b = 60{,}0\,\text{Hz}$ a $\mathscr{E} = 36{,}0\,\text{V}$. (Až na R jsou hodnoty stejné jako v př. 33.4.)

(a) Jak velká je amplituda proudu I?

ŘEŠENÍ: Amplitudu proudu můžeme vypočítat z rovnice (33.53) ($I = \mathscr{E}/Z$), stanovíme-li nejprve impedanci Z obvodu z rov. (33.52). Z př. 33.4a víme, že kapacitní reaktance X_C pro kondenzátor (a tedy pro obvod) je $177\,\Omega$, a z př. 33.4b víme, že induktivní reaktance X_L cívky je $86{,}7\,\Omega$. Z rov. (33.52) dostaneme

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \\ = \sqrt{(160\,\Omega)^2 + (86{,}7\,\Omega - 177\,\Omega)^2} = \\ = 184\,\Omega.$$

Potom vypočteme

$$I = \frac{\mathscr{E}}{Z} = \frac{(36{,}0\,\text{V})}{(184\,\Omega)} = 0{,}196\,\text{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaký je fázový posun φ?

ŘEŠENÍ: Z rov. (33.56) je

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{(86{,}7\,\Omega) - (177\,\Omega)}{(160\,\Omega)} = -0{,}564,$$

odtud

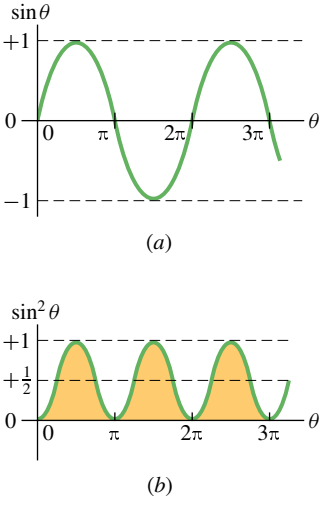
$$\varphi = -29{,}4^\circ = -0{,}513\,\text{rad}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Fázový posun je záporný, protože výsledná zátěž má kapacitní charakter, tj. $X_C > X_L$.

KONTROLA 6: Mějme tři dvojice kapacitní a induktivní reaktance pro tři harmonicky buzené obvody RLC: (1) $50\,\Omega$, $100\,\Omega$; (2) $100\,\Omega$, $50\,\Omega$; (3) $50\,\Omega$, $50\,\Omega$. (a) Pro každý z obvodů rozhodněte, jestli proud předbíhá, nebo je zpožděn vzhledem k připojenému emn, nebo jestli jsou obě veličiny ve fázi. (b) Je některý z obvodů v rezonanci?

33.10 VÝKON V OBVODECH SE STŘÍDAVÝM PROUDEM

Do obvodu RLC (obr. 33.7) dodává energii generátor střídavého napětí. Část energie, kterou dodává, je uložena v elektrickém poli kondenzátoru, část v magnetickém poli cívky a část se disipuje v rezistoru. V ustáleném stavu, který předpokládáme, zůstává časová střední hodnota energie uložené v kondenzátoru a v cívce konstantní. Elektromagnetická energie se přenáší jen od generátoru k rezistoru a v něm se disipuje.



Obr. 33.14 (a) Závislost $\sin\theta$ na θ. Střední hodnota za dobu jedné periody je nulová. (b) Závislost $\sin^2\theta$ na θ. Střední hodnota za dobu jedné periody je $\frac{1}{2}$.

Rychlost, se kterou je energie disipována v rezistoru, tj. *okamžitý výkon*, lze vyjádřit pomocí rov. (27.22) a (33.26) vztahem

$$P = i^2 R = I^2 R \sin^2(\omega_b t - \varphi). \qquad (33.59)$$

Střední výkon disipovaný v rezistoru je časovou střední hodnotou výrazu (33.59). Ačkoli střední hodnota za dobu jedné periody je pro funkci $\sin\theta$ nulová, je střední hodnota $\sin^2\theta$ rovna $\frac{1}{2}$ (obr. 33.14). (Povšimněte si v obr. 33.14b, jak vystínované části křivky, které leží nad vodorovnou

přímkou označenou $+\frac{1}{2}$, přesně vyplňují prázdná místa pod touto čárou.) Z rov. (33.59) plyne výraz pro střední výkon

$$\overline{P} = \frac{I^2 R}{2} = \left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2 R. \qquad (33.60)$$

Veličina $I/\sqrt{2}$ se nazývá **efektivní hodnota** proudu i, a pokud nebude uvedeno jinak, použijeme pro její označení index „ef“. Tedy

$$I_{\text{ef}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \quad \text{(efektivní proud)}. \qquad (33.61)$$

Rov. (33.60) můžeme přepsat do tvaru

$$\overline{P} = I_{\text{ef}}^2 R \quad \text{(střední výkon)}. \qquad (33.62)$$

(Připoměňme, že $U_{\text{stř}} = 0$ a $I_{\text{stř}} = 0$!) Rov. (33.62) se formálně podobá rov. (27.22) $P = i^2 R$. Zavedení efektivních hodnot proto umožňuje, abychom střední hodnoty ztrát ve střídavých obvodech (tj. střední výkony) v ustáleném stavu vyjádřili formálně stejným vztahem jako pro stejnosměrné proudy.

Pro střídavé proudy můžeme také definovat efektivní hodnoty napětí i emn:

$$U_{\text{ef}} = \frac{U}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \mathscr{E}_{\text{ef}} = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{2}} \qquad (33.63)$$

(efektivní napětí a emn).

Přístroje na měření střídavých veličin, jako např. ampérmetry a voltmetry, jsou obvykle cejchovány v efektivních hodnotách. Pokud tedy voltmetr na měření střídavých napětí ukazuje v elektrické zásuvce 230 V, je to efektivní napětí. Maximální hodnota napětí v zásuvce je pak $\sqrt{2}(230\,\text{V})$, tj. 325 voltů.

Protože součinitel úměrnosti $1/\sqrt{2}$ v rov. (33.61) a (33.63) je stejný pro všechny tři proměnné, můžeme rov. (33.53) a (33.51) psát ve tvaru

$$I_{\text{ef}} = \frac{\mathscr{E}_{\text{ef}}}{Z} = \frac{\mathscr{E}_{\text{ef}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \qquad (33.64)$$

Zápisu pomocí efektivních hodnot budeme dávat přednost.

Vztah $I_{\text{ef}} = \mathscr{E}_{\text{ef}}/Z$ můžeme použít k přepisu rovnice (33.62) do jiného užitečného ekvivalentního vyjádření. Píšeme

$$\overline{P} = \frac{\mathscr{E}_{\text{ef}}}{Z} I_{\text{ef}} R = \mathscr{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \frac{R}{Z}. \qquad (33.65)$$

Z obr. 33.11d, tab. 33.2 a z rov. (33.53) však plyne, že podíl R/Z je roven kosinu fázového posunu φ:

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{\mathscr{E}} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{Z}. \qquad (33.66)$$

Rov. (33.65) pak zní

$$\overline{P} = \mathscr{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos\varphi \quad \text{(střední výkon)} \qquad (33.67)$$

a činitel $\cos\varphi$ v ní se nazývá **účiník**. Protože $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$, nezávisí rov. (33.67) na znaménku fázového posunu φ.

Aby se do odporové zátěže libovolného obvodu RLC přenášel maximální výkon, musí se účiník co nejvíce blížit jedné: $\cos\varphi \to 1$. To je ekvivalentní požadavku, aby



V září 1988, po 72 letech hry za denního světla, instaloval klub Chicago Cubs reflektory pro hru při umělém osvětlení. Celkem 540 halogenových svítidel po 1 500 W osvětlilo hrací plochu. Avšak první hra za umělého osvětlení byla pro bouřku přerušena. Fanoušci si to vysvětlili po svém — považovali to za znamení, aby Cubs zůstali při hře za denního světla.



11. listopadu 1965 v 17:17 h způsobilo vadné relé v energetické soustavě poblíž Niagarských vodopádů odpojení spínače na přenosovém vedení. Proud se samočinně přepojil do ostatních vedení, ta se tím však přetížila a automaticky odpojila ze soustavy. V několika minutách se zhroutila energetická soustava a do tmy se ponořila většina New Yorku, Nové Anglie a Ontaria.

fázový posun φ byl co nejblíže nule. Pokud má například obvod induktivní charakter, lze induktivní reaktanci snížit přidáním kapacity do obvodu a tak zmenšit fázový posun a zvýšit účiník v rov. (33.67). Protože spotřebiče mají mnohem častěji induktivní charakter než kapacitní, umísťují elektrárenské společnosti na místě spotřeby kondenzátory a v rozvodnách, kterými je přenášen velký výkon, různé kompenzátory účiníku.

KONTROLA 7: (a) Proud v harmonicky buzeném sériovém obvodu RLC předbíhá emn. Je nutno zvětšit, nebo zmenšit kapacitu, aby se zvýšil výkon dodávaný do rezistoru? (b) Posune tato změna rezonanční úhlovou frekvenci obvodu blíže k úhlové frekvenci emn, nebo ji naopak oddálí?

PŘÍKLAD 33.6

Sériový obvod RLC, buzený zdrojem s $\mathscr{E}_{ef} = 120\,\mathrm{V}$ při kmitočtu $f_b = 60{,}0\,\mathrm{Hz}$, sestává z rezistoru s $R = 200\,\Omega$, cívky s $X_L = 80{,}0\,\Omega$ a kondenzátoru s $X_C = 150\,\Omega$.

(a) Jaký je účiník $\cos\varphi$ a fázový posun φ v tomto obvodu?

ŘEŠENÍ: Účiník můžeme vypočítat z rov. (33.66) ($\cos\varphi = R/Z$) tak, že nejprve stanovíme impedanci Z. Dosazením do rov. (33.52) dostaneme

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(200\,\Omega)^2 + (80{,}0\,\Omega - 150\,\Omega)^2} = 211{,}9\,\Omega.$$

Z rov. (33.66) potom vypočteme

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{(200\,\Omega)}{(211{,}90\,\Omega)} = 0{,}944. \quad \text{(Odpověď)}$$

Odtud plyne, že

$$\varphi = 19{,}3^\circ \quad \text{nebo} \quad \varphi = -19{,}3^\circ.$$

První řešení nevyhovuje úloze, neboť při $X_C > X_L$ má obvod kapacitní charakter a fázový posun φ proto musí být záporný. Druhé řešení úloze vyhovuje, tedy

$$\varphi = -19{,}3^\circ. \quad \text{(Odpověď)}$$

(Namísto uvedeného postupu jsme mohli dosadit známé údaje do rov. (33.56) a dostali bychom správný výsledek jako jediné řešení.)

(b) S jakým středním výkonem $\overline{P}$ se elektromagnetická energie disipuje v rezistoru?

ŘEŠENÍ: $\overline{P}$ vypočteme pomocí rov. (33.67), jestliže nejprve určíme I_{ef}. Z rov. (33.64) máme

$$I_{ef} = \frac{\mathscr{E}_{ef}}{Z} = \frac{(120\,\mathrm{V})}{(211{,}9\,\Omega)} = 0{,}566\,3\,\mathrm{A}.$$

Dosazením této a dalších hodnot do rov. (33.67) vypočteme

$$\overline{P} = \mathscr{E}_{ef} I_{ef} \cos\varphi = (120\,\mathrm{V})(0{,}566\,3\,\mathrm{A})(0{,}944) = 64{,}2\,\mathrm{W}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaká změna ΔC kapacity je potřeba, aby $\overline{P}$ byl maximální za předpokladu, že se ostatní parametry obvodu nezmění?

ŘEŠENÍ: Z rov. (33.34) ($X_C = 1/(\omega_b C)$) vypočteme původní kapacitu

$$C = \frac{1}{2\pi f_b X_C} = \frac{1}{2\pi(60{,}0\,\mathrm{Hz})(150\,\Omega)} = 17{,}7\,\mu\mathrm{F}.$$

Výkon $\overline{P}$ je nejvyšší, je-li obvod v rezonanci, tj. když jsou si reaktance rovny: $X_C = X_L$. Rov. (33.34) pro $X_C = X_L = 80\,\Omega$ dává kapacitu potřebnou pro rezonanci

$$C' = \frac{1}{2\pi f_b X_C} = \frac{1}{2\pi(60{,}0\,\mathrm{Hz})(80\,\Omega)} = 33{,}2\,\mu\mathrm{F}.$$

Požadovaná změna kapacity tedy bude

$$\Delta C = C' - C = 33{,}2\,\mu\mathrm{F} - 17{,}7\,\mu\mathrm{F} = 15{,}5\,\mu\mathrm{F}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jaký bude střední výkon $\overline{P}$ při takto změněné kapacitě?

ŘEŠENÍ: Po změně je $X_C = X_L$. Potom z rov. (33.52) a (33.66) platí $Z = R$ a $\cos\varphi = 1$. Efektivní proud dostaneme z rov. (33.64)

$$I_{ef} = \frac{\mathscr{E}_{ef}}{Z} = \frac{(120\,\mathrm{V})}{(200\,\Omega)} = 0{,}600\,\mathrm{A}$$

a střední výkon je

$$\overline{P} = \mathscr{E}_{ef} I_{ef} \cos\varphi = (120\,\mathrm{V})(0{,}600\,\mathrm{A})(1{,}0) = 72{,}0\,\mathrm{W}. \quad \text{(Odpověď)}$$

33.11 TRANSFORMÁTORY

Požadavky na přenos energie

Je-li střídavý zdroj zatížen pouze rezistorem, je fázový posun φ nulový, a proto účiník v rov. (33.67) je roven jedné

($\cos 0^\circ = 1$). Přiložené efektivní emn $\mathscr{E}$ je rovno efektivnímu napětí U na zátěži. To znamená, že při efektivním proudu I je dodaný výkon, který je ztracený v zátěži, roven

$$\overline{P} = \mathscr{E} I = IU. \tag{33.68}$$

(V tomto článku použijeme v praxi běžný zápis efektivních hodnot, kdy se index $_{\text{ef}}$ vynechává. V elektrotechnice se všechny v čase harmonicky proměnné proudy a napětí běžně popisují svými efektivními hodnotami. Udávají je i měřicí přístroje.) Z rov. (33.68) je vidět, že k dodání předepsaného výkonu máme širokou možnost volby od velkého proudu I a relativně malého napětí U k malému proudu a vysokému napětí, ale vždy tak, aby měl součin proudu a napětí požadovanou velikost.

V soustavách, které rozvádějí elektrickou energii, je žádoucí z důvodů bezpečnosti a účinného návrhu zařízení pracovat s relativně nízkými napětími na straně výrobce (v elektrárnách) a u spotřebitelů (v domácnostech a v továrnách). Nechceme samozřejmě, aby televizor nebo dětský vláček byl napájen z rozvodné sítě napětím 22 kV. Na druhé straně uvidíme, že při přenosu elektrické energie z elektrárny ke spotřebitelům jsou výhodné co nejnižší proudy (a proto co nejvyšší napětí), aby se minimalizovaly ztráty I^2R Joulovým teplem v přenosových vedeních.

Jako příklad uvažujme 735 kV vedení používané k přenosu elektrické energie z vodní elektrárny La Grande 2 v Quebeku do 1 000 km vzdáleného Montrealu. Předpokládejme, že proud je 500 A a účiník je blízký jedné. Potom podle rov. (33.67) elektrárna dodává energii se středním výkonem

$$\mathscr{E} I = (7{,}35 \cdot 10^5 \text{ V})(500 \text{ A}) = 368 \text{ MW}.$$

Odpor na kilometr vedení je asi 0,220 Ω, a tedy celkový odpor při délce 1 000 km je 220 Ω. Ztrátový výkon v odporu vedení je

$$I^2R = (500 \text{ A})^2(220\,\Omega) = 55{,}0 \text{ MW},$$

což je téměř 15 % přenášeného výkonu.

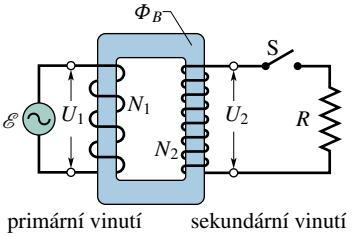
Představme si, co by se stalo, kdyby se zdvojnásobil proud a na polovinu snížilo napětí. Výkon dodávaný elektrárnou by zůstal 368 MW jako v předchozím příkladě, avšak ztrátový výkon by nyní byl

$$I^2R = (1\,000 \text{ A})^2(220\,\Omega) = 220 \text{ MW},$$

což je *téměř 60 % dodávaného výkonu*. Odtud můžeme vyvodit obecné pravidlo pro přenos energie: k přenosu je třeba použít co nejmenší proud, a tedy co nejvyšší napětí.

Transformátor

Požadavek vysoké účinnosti při přenosu energie vede k použití vysokého napětí; to je ale v základním rozporu s bezpečností práce při výrobě i spotřebě elektřiny. Potřebujeme proto zařízení, kterým bychom mohli napětí v obvodech zvýšit (pro přenos) a snížit (pro spotřebu), přičemž by součin proudu a napětí zůstal konstantní. Tímto zařízením je **transformátor**. Transformátor nemá žádné pohyblivé části, využívá jevu elektromagnetické indukce. Žádné jednoduché analogické zařízení, které by totéž umožňovalo se stejnosměrným proudem, neexistuje.



Obr. 33.15 Transformátor sestává ze dvou cívek navinutých na společném železném jádru. Generátor střídavého proudu dodává proud do levé cívky (primární vinutí). Je-li spínač S sepnut, je cívka napravo (sekundární vinutí) připojena k odporové zátěži R.

Transformátor (obr. 33.15) se skládá ze dvou cívek navinutých na železném jádru; nejsou s ním vodivě spojeny. Za provozu je primární vinutí s N_1 závity připojeno ke generátoru střídavého napětí, jehož emn je dáno rov. (33.25). Sekundární vinutí s N_2 závity je připojeno k zatěžovacímu rezistoru R pomocí spínače S. Předpokládejme nejprve, že rezistor je odpojen. Potom sekundární cívkou neprotéká žádný proud. Dále budeme předpokládat, že odpor primárního i sekundárního vinutí je zanedbatelný, stejně jako ztráty v důsledku magnetické hystereze v železném jádru. Vhodně navržené transformátory velkého výkonu mají ztráty pod 1 %, takže tyto předpoklady jsou oprávněné.

Za těchto předpokladů má primární vinutí pouze indukčnost (obr. 33.10a) a chová se jako cívka. Proto je malý primární proud (tzv. magnetizační proud I_{mag}) zpožděn za primárním napětím o 90°; účiník primárního vinutí ($\cos\varphi$ v rov. (33.67)) je nulový, a tedy generátor do transformátoru nedodává žádný výkon.

Malý střídavý primární proud vytváří v železném jádru střídavý magnetický indukční tok Φ_B, a protože je na jádru navinuto i sekundární vinutí, zasahuje tento tok i jeho závity. Z Faradayova indukčního zákona (rov. (31.6)) plyne, že emn indukované v jednom závitu $e_{\text{záv}}$ je stejné jak pro primární, tak pro sekundární vinutí. Dále napětí u_1 je rovno emn indukovanému v primárním vinutí a napětí u_2 je rovno

emn na sekundárním vinutí. Můžeme proto psát

$$e_{\text{záv}} = \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{N_2}, \qquad (33.69)$$

odkud pro efektivní hodnoty napětí plyne

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{(transformace napětí).} \qquad (33.70)$$

Transformátor, u kterého je $N_2 > N_1$, nazýváme *zvyšovací*, protože zvyšuje primární napětí U_1 na vyšší napětí U_2. Transformátor s $N_2 < N_1$ nazýváme *snižovací*.

Až dosud jsme uvažovali spínač S rozepnutý; generátor nedodával do obvodu žádnou energii. Nyní sepneme spínač S a připojíme tím k sekundárnímu vinutí odporovou zátěž R. (Obecně může zátěž obsahovat také induktivní a kapacitní prvky, ale zde budeme uvažovat pouze rezistor R.) Shledáme, že se nyní energie *přenáší* z generátoru do zátěže. Podívejme se, proč.

Po sepnutí spínače S dojde k několika jevům.

(1) Sekundárním obvodem začne protékat střídavý proud I_2, který způsobí v odporové zátěži ztráty $I_2^2 R = U_2^2/R$.

(2) Sekundární proud vytvoří střídavý magnetický tok v železném jádru a ten indukuje (podle Faradayova indukčního zákona a Lenzova zákona) v primárním vinutí emn opačně orientované.

(3) Napětí U_1 na primárním vinutí se však v důsledku napětí indukovaného proudem I_2 nemůže změnit, neboť musí být stále rovno emn generátoru. Sepnutí spínače to nemůže ovlivnit.

(4) Aby generátor udržel napětí U_1, musí (navíc k magnetizačnímu proudu) primárním vinutím procházet takový střídavý proud I_1, jehož velikost a počáteční fáze jsou právě tak velké, aby emn indukované tímto proudem v primárním vinutí přesně zrušilo emn indukované v něm sekundárním proudem I_2. Protože primární proud I_1 už není posunut vůči primárnímu napětí U_1 přesně o 90° (jako tomu bylo u magnetizačního proudu), přivádí proud I_1 do primárního vinutí energii.

Nalezněme nyní vzájemný vztah mezi I_2 a I_1. Namísto analýzy detailů složitého procesu použijme pouze zákon zachování energie. Přitom stále předpokládáme, že zátěž je čistě odporová. Výkon přiváděný z generátoru na primární vinutí je $I_1 U_1$. Výkon přenášený z primárního vinutí do sekundárního vinutí (obě cívky jsou spřaženy magnetickým polem) je $I_2 U_2$. Protože předpokládáme, že se žádná energie během přenosu neztratí, plyne ze zákona zachování energie

$$I_1 U_1 = I_2 U_2.$$

Dosadíme-li za U_2 z rov. (33.70), dostaneme

$$I_2 = I_1 \frac{N_1}{N_2} \quad \text{(transformace proudu).} \qquad (33.71)$$

Tato rovnice vyjadřuje, že proud I_2 v sekundárním vinutí může být větší, menší, nebo stejný ve srovnání s proudem I_1 v primárním vinutí, a to v závislosti na poměru počtu závitů N_1/N_2.

Impedanční přizpůsobení

Proud I_1 se v primární cívce objevil proto, že jsme do sekundárního obvodu zapojili zátěž R. Abychom vypočetli I_1, dosadíme $I_2 = U_2/R$ do rov. (33.71) a pak ještě za U_2 z rov. (33.70). Dostaneme tak

$$I_1 = \frac{1}{R}\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 U_1. \qquad (33.72)$$

Tuto rovnici můžeme zapsat ve tvaru $I_1 = U_1/R'$, kde jsme zavedli „transformovaný odpor“ R' vztahem

$$R' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R. \qquad (33.73)$$

Na primární straně totiž protéká proud I_1 při napětí U_1, jako by byl generátor připojen k rezistoru s odporem R'. Ze strany generátoru se tedy zapojení transformátor + zátěž R jeví tak, jako by byla v primárním obvodu zapojena zátěž R'.

Rov. (33.73) ukazuje, že transformátor může plnit ještě jinou funkci. Jak již víme (úloha 24 v kap. 28), maximální přenos výkonu ze zdroje emn do odporové zátěže nastává, jsou-li odpory zdroje a zátěže stejně velké. Totéž platí pro střídavé obvody s tím rozdílem, že *impedance* generátoru (namísto pouhého odporu) musí být přizpůsobena zátěži. Často se stává — např. když chceme připojit reproduktor k zesilovači — že tato podmínka není ani zdaleka splněna, protože zesilovač má vysokou impedanci a reproduktor naopak velmi nízkou. Obě impedance můžeme přizpůsobit vzájemným propojením pomocí transformátoru s vhodným převodním poměrem závitů N_1/N_2.

PŘÍKLAD 33.7

Rozvodný transformátor je napájen primárním napětím $U_1 = 22\,\text{kV}$ a dodává energii do okolních domů při napětí $U_2 = 230\,\text{V}$ (obě veličiny jsou efektivní hodnoty). Předpokládejme ideální snižovací transformátor, čistě odporovou zátěž a účiník roven jedné.

(a) Jaký je poměr závitů transformátoru N_1/N_2?

ŘEŠENÍ: Z rov. (33.70) máme

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{(22{\cdot}10^3\ \mathrm{V})}{(230\ \mathrm{V})} = 95{,}65 \doteq 96. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Střední výkon spotřebičů v domech napájených z transformátoru je 78 kW. Jaká je efektivní hodnota proudu na primárním a sekundárním vinutí transformátoru?

ŘEŠENÍ: Z rov. (33.67) dostaneme (při $\cos\varphi = 1$ a $U_1 = \mathscr{E}$ pro transformátor připojený ke zdroji emn)

$$I_1 = \frac{\overline{P}}{U_1} = \frac{(78{\cdot}10^3\ \mathrm{W})}{(22{\cdot}10^3\ \mathrm{V})} = 3{,}545\ \mathrm{A} \doteq 3{,}5\ \mathrm{A} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$I_2 = \frac{\overline{P}}{U_2} = \frac{(78{\cdot}10^3\ \mathrm{W})}{(230\ \mathrm{V})} = 339\ \mathrm{A}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaká je odporová zátěž v sekundárním obvodu?

ŘEŠENÍ: V sekundárním obvodu je

$$R = \frac{U_2}{I_2} = \frac{(230\ \mathrm{V})}{(339\ \mathrm{A})} = 0{,}678\ \Omega \doteq 0{,}68\ \Omega. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jaký je „transformovaný odpor“ v primárním obvodu? (Tj. jak je primární obvod zatížen?)

ŘEŠENÍ: Pro primární obvod vypočteme

$$R' = \frac{U_1}{I_1} = \frac{(22{\cdot}10^3\ \mathrm{V})}{(3{,}545\ \mathrm{A})} = 6\,206\ \Omega \doteq 6{,}2\ \mathrm{k}\Omega, \qquad \text{(Odpověď)}$$

nebo s použitím rov. (33.73)

$$R' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R = (95{,}65)^2(0{,}184\,6\ \Omega) = 6\,203\ \Omega = 6{,}2\ \mathrm{k}\Omega. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 8: Zdroj harmonického emn má menší vnitřní odpor, než je odpor připojené zátěže. Abychom zvětšili přenos výkonu z generátoru do zátěže, vložíme mezi obě zařízení transformátor k přizpůsobení impedance. Použijeme zvyšovací, nebo snižovací transformátor?

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Přenos energie v obvodu LC

V kmitavém obvodu LC se energie periodicky přelévá mezi elektrickým polem kondenzátoru a magnetickým polem cívky. Okamžitá hodnota obou forem energie je

$$E_{\mathrm{el}} = \frac{q^2}{2C} \quad \text{a} \quad E_{\mathrm{mg}} = \frac{Li^2}{2}, \qquad (33.1,\ 33.2)$$

kde $q = Q(t)$ je náboj na kondenzátoru a $i = I(t)$ je proud procházející cívkou v čase t. Celková energie $E = E_{\mathrm{el}} + E_{\mathrm{mg}}$ zůstává konstantní.

Kmity v obvodu LC

Zákon zachování energie vede ke vztahu

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}q = 0 \quad \text{(kmity obvodu } LC\text{)}, \qquad (33.11)$$

což je diferenciální rovnice netlumených kmitů LC (bez odporu). Řešením rov. (33.11) je

$$q(t) = Q\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{(časový průběh náboje)}, \qquad (33.12)$$

kde Q je *amplituda náboje* (největší náboj na kondenzátoru) a úhlová frekvence ω netlumených kmitů je

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{(obvod } LC\text{)}. \qquad (33.4)$$

Fázový posun φ v rov. (33.12) je určen počátečními podmínkami obvodu (v čase $t = 0$).

Proud i v soustavě je

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\omega Q\sin(\omega t + \varphi) \quad \text{(časový průběh proudu)}, \qquad (33.13)$$

kde ωQ je *amplituda proudu* I.

Tlumené kmity v obvodu RLC

V reálném obvodu LC dochází vždy k disipaci energie a kmity jsou proto tlumené. K disipaci energie dochází na prvku s odporem R. Diferenciální rovnice tlumených kmitů má tvar

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = 0 \quad \text{(obvod } RLC\text{)}. \qquad (33.20)$$

Její řešení je

$$q = Q\mathrm{e}^{-Rt/(2L)}\cos(\omega' t + \varphi), \qquad (33.21)$$

kde

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}. \qquad (33.22)$$

Střídavé proudy, vynucené kmity

V sériovém obvodu RLC můžeme vybudit *vynucené kmity* s *budicí úhlovou frekvencí* ω_{b} prostřednictvím vnějšího zdroje harmonického emn

$$e = \mathscr{E}\sin\omega_{\mathrm{b}} t. \qquad (33.25)$$

Proud buzený v obvodu přiloženým emn je

$$i = I \sin(\omega_b t - \varphi), \tag{33.26}$$

kde φ je fázový posun proudu i vůči e.

Rezonance

Amplituda proudu I v sériovém obvodu RLC buzeného harmonickým emn je největší ($I = \mathscr{E}/R$), jestliže je budicí úhlová frekvence ω_b rovna vlastní úhlové frekvenci ω (netlumeného) obvodu LC. Pak $X_C = X_L$, $\varphi = 0$ a proud je ve fázi s emn.

Jednotlivé prvky obvodu

Harmonické napětí na *rezistoru* má amplitudu $U_R = IR$; proud je ve fázi s napětím. Pro *kondenzátor* platí $U_C = IX_C$, kde $X_C = 1/(\omega_b C)$ je *kapacitní reaktance*; proud předbíhá před napětím o 90°. Pro *cívku* platí $U_L = IX_L$, kde $X_L = \omega_b L$ je *induktivní reaktance*; proud je zpožděn za napětím o 90°.

Sériový obvod RLC

Pro sériový obvod RLC s vnějším emn podle rov. (33.25) a s proudem podle rov. (33.26) platí

$$I = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega_b L - 1/\omega_b C)^2}}$$

(amplituda proudu) (33.51, 33.54)

a

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad \text{(fázový posun)}. \tag{33.56}$$

Impedance Z obvodu je

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \text{(impedance)}. \tag{33.52}$$

Potom rov. (33.51) můžeme zapsat vztahem $I = \mathscr{E}/Z$.

Výkon v obvodech se střídavým proudem

V sériovém obvodu RLC je *střední výkon* generátoru $\overline{P}$ roven výkonu disipovanému v rezistoru:

$$\overline{P} = I_{ef}^2 R = \mathscr{E}_{ef} I_{ef} \cos\varphi \quad \text{(střední výkon)}. \tag{33.62, 33.67}$$

Index ef znamená *efektivní hodnotu*. Mezi efektivními a maximálními hodnotami platí vztahy $I_{ef} = I/\sqrt{2}$, $U_{ef} = U/\sqrt{2}$, $\mathscr{E}_{ef} = \mathscr{E}/\sqrt{2}$. Činitel $\cos\varphi$ se nazývá *účiník*.

Transformátory

Transformátor se skládá ze železného jádra, na kterém je navinuto primární vinutí s N_1 závity a sekundární vinutí s N_2 závity. Jestliže primární cívku připojujeme ke zdroji střídavého proudu, pro napětí na primárním a sekundárním vinutí platí

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{(transformace napětí)}, \tag{33.70}$$

a mezi proudy platí vztah

$$I_2 = I_1 \frac{N_1}{N_2} \quad \text{(transformace proudů)}. \tag{33.71}$$

Je-li sekundární vinutí zatíženo odporem R, je situace v obvodu stejná, jako kdyby byl generátor zatížen „transformovaným odporem“ R' o velikosti

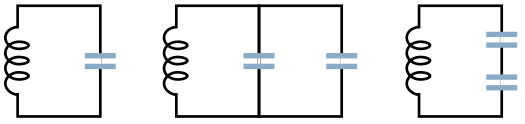
$$R' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R. \tag{33.73}$$

OTÁZKY

1. Nabitý kondenzátor a cívku vodivě spojíme v čase $t = 0$. Vyjádřete v násobcích periody T vzniklých kmitů nejkratší dobu, za jakou dosáhne maximum (a) energie v magnetickém poli E_{mg}, (b) magnetický tok v cívce, (c) di/dt, (d) emn v cívce.

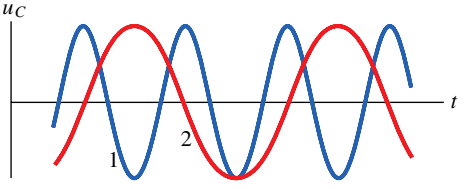
2. Jaká musí být hodnota počáteční fáze φ v rov. (33.12), aby v $t = 0$ nastal stav podle obr. 33.1 (a), (c), (e) a (g)?

3. Obr. 33.16 ukazuje tři kmitavé obvody LC se stejnými cívkami a kondenzátory. Uspořádejte obvody v sestupném pořadí podle doby, potřebné k úplnému vybití kondenzátoru během oscilací.



Obr. 33.16 Otázka 3

4. Obr. 33.17 ukazuje závislost napětí u_C na kondenzátoru pro LC obvody 1 a 2, které mají stejně velké kapacity a stejný maximální náboj Q. Stanovte, jsou-li hodnoty (a) indukčnosti L a (b) maximálního proud I v obvodu 1 větší, menší, nebo rovny hodnotám těchto veličin v obvodu 2.



Obr. 33.17 Otázka 4

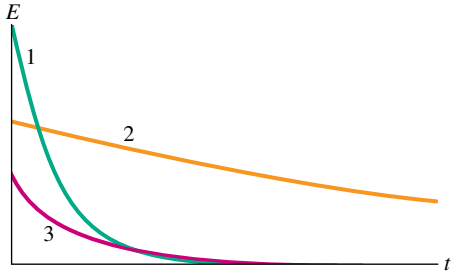
5. Náboje na kondenzátorech tří kmitavých obvodů LC se mění podle vztahů: (1) $q = 2\cos 4t$; (2) $q = 4\cos t$; (3) $q = 3\cos 4t$ (kde q je v coulombech a t v sekundách). Seřaďte obvody v se-

stupném pořadí (a) podle amplitudy proudu a (b) podle periody kmitů.

6. Obvod LC kmitá s maximálním nábojem Q. Co se stane (a) s amplitudou proudu I, (b) s největší hodnotou E_{mg} energie magnetického pole — zvětší se, zmenší, nebo zůstane stejná?

7. Klesá náboj na kondenzátoru v tlumeném obvodu RLC rychleji, pomaleji, nebo stejně rychle jako energie?

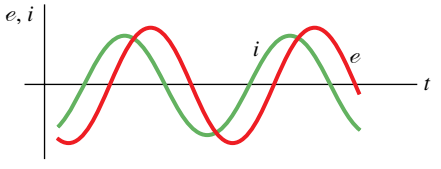
8. Obr. 33.18 ukazuje závislost střední hodnoty energie na čase pro tři tlumené kmitavé sériové obvody RLC se stejným počátečním nábojem Q_0. Seřaďte obvody sestupně podle jejich (a) kapacity C, (b) hodnoty L/R.



Obr. 33.18 Otázka 8

9. Hodnoty počátečních fází φ pro čtyři harmonicky buzené sériové obvody RLC jsou (1) $-15°$, (2) $+35°$, (3) $\pi/3$ rad, (4) $-\pi/6$ rad. (a) Ve kterém obvodu je zátěž kapacitního charakteru? (b) Ve kterém obvodu střídavé emn předbíhá proud?

10. Obr. 33.19 ukazuje proud i a budicí emn pro sériový obvod RLC. (a) Předbíhá proud emn, nebo je za ním zpožděn? (b) Má zátěž obvodu kapacitní, nebo induktivní charakter? (c) Je úhlová frekvence emn větší, nebo menší než vlastní úhlová frekvence obvodu?



Obr. 33.19 Otázky 10 a 15

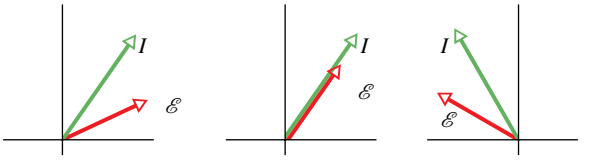
11. Následující tabulka udává pro tři sériové obvody RLC amplitudu $\mathscr{E}$ budicího emn a hodnoty R, L a C. Bez písemných výpočtů stanovte sestupně pořadí obvodů podle (a) amplitudy proudu I při rezonanci a (b) úhlové frekvence při rezonanci.

Obvod	$\mathscr{E}$ / V	R / Ω	L / mH	C / μF
1	25	5,0	200	10
2	60	12	100	5,0
3	80	10	300	10

12. Předpokládejme, že pro konkrétní budicí úhlovou frekvenci předbíhá v sériovém RLC obvodu emn před proudem. Nyní poněkud snížíte budicí úhlovou frekvenci. Jak se změní (a) počáteční fáze a (b) amplituda proudu: vzroste, sníží se, nebo zůstane stejná?

13. Budicí úhlová frekvence v jistém sériovém obvodu RLC je menší než vlastní úhlová frekvence obvodu. (a) Je počáteční fáze φ kladná, záporná, nebo nulová? Předbíhá proud, nebo je zpožděn vzhledem k emn?

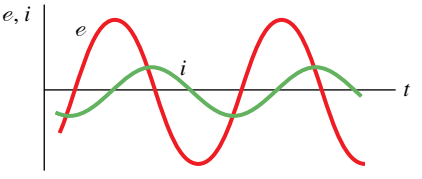
14. Obr. 33.20 ukazuje tři situace podobné stavům z obr. 33.12. Pro který stav je budicí úhlová frekvence větší, menší, nebo rovna rezonanční úhlové frekvenci?



Obr. 33.20 Otázka 14

15. Obr. 33.19 znázorňuje proud i a budicí emn e v sériovém obvodu RLC. Pokud poněkud zvýšíme (a) L, (b) C, (c) budicí úhlovou frekvenci emn, určete, (1) zda se vzhledem ke křivce emn křivka proudu posune vlevo, nebo vpravo a (2) zda se amplituda křivky proudu zvýší, nebo sníží.

16. Obr. 33.21 ukazuje časový průběh proudu i a budicího emn e pro sériový obvod RLC. (a) Je počáteční fáze kladná, nebo záporná? (b) Abychom zvýšili výkon přenášený do odporové zátěže, je třeba L zvětšit, nebo zmenšit? (c) Má se při stejném L zvětšit, nebo zmenšit hodnota C?



Obr. 33.21 Otázka 16

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 33.2 Kvalitativní rozbor kmitů LC

1C. Jaká je kapacita kmitavého obvodu LC, má-li kondenzátor maximální náboj 1,60 μC a energii 140 μJ?

2C. Cívka s indukčností 1,50 mH, zapojená v kmitavém obvodu LC, akumuluje maximální energii 10,0 μJ. Jaký je maximální proud?

3C. V kmitavém obvodu LC je $L = 1{,}10$ mH a $C = 4{,}00$ μF. Maximální náboj na kondenzátoru je 3,00 μC. Vypočtěte maximální proud v obvodu.

4C. Kmitavý obvod LC se skládá z cívky 75,0 mH a kondenzátoru 3,60 μF. Je-li maximální náboj na kondenzátoru 2,90 μC, (a) jaká je celková energie v obvodu, (b) jaký je maximální proud?

5C. V kmitavém obvodu LC se celková energie elektrického pole v kondenzátoru změní během 1,50 μs na energii magnetického pole. (a) Jaká je perioda kmitů T? (b) Jaká je frekvence kmitů? (c) Jak dlouho po dosažení maxima energie magnetického pole dosáhne obvod opět tohoto maxima?

6Ú. Frekvence kmitů obvodu LC je 200 kHz. V čase $t = 0$ je na elektrodě A kondenzátoru maximální kladný náboj. V jakých okamžicích $t > 0$ bude (a) elektroda A mít opět maximální kladný náboj, (b) druhá elektroda mít maximální kladný náboj, (c) cívka mít maximální energii?

ODST. 33.3 Elektro-mechanická analogie

7C. Těleso hmotnosti 0,50 kg kmitá na pružině, jejíž síla pružnosti při výchylce 2,0 mm z rovnovážné polohy má velikost 8,0 N. (a) Jaká je úhlová frekvence kmitů? (b) Jaká je perioda kmitů? (c) Jaká je kapacita odpovídajícího obvodu LC pro $L = 5{,}0$ H?

8Ú. Energie v kmitavém obvodu LC s $L = 1{,}25$ H je 5,7 μJ. Maximální náboj na kondenzátoru je 175 μC. Stanovte u odpovídajícího mechanického oscilátoru (a) hmotnost, (b) tuhost pružiny, (c) největší výchylku, (d) největší rychlost.

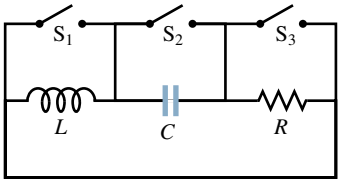
ODST. 33.4 Kmity LC kvantitativně

9C. V některých generátorech elektronické hudby se používají oscilátory LC. Jak velká indukčnost musí být použita spolu s kondenzátorem 6,7 μF k získání frekvence komorního a (440 Hz)?

10C. Jakou kapacitu musíte připojit k cívce 1,30 mH, abyste vytvořili oscilátor rezonující na 3,50 kHz?

11C. V obvodu LC s $L = 50$ mH a $C = 4{,}0$ μF je počáteční proud maximální. Jak dlouho potrvá, než se kondenzátor nabije poprvé na maximální napětí?

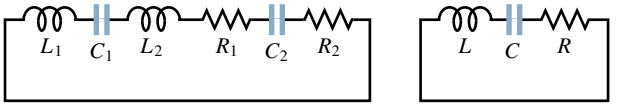
12C. Uvažujte obvod podle obr. 33.22. Se spínačem S_1 sepnutým a dalšími dvěma rozpojenými má obvod časovou konstantu τ_C (viz čl. 28.8). Se spínačem S_2 sepnutým a dalšími dvěma rozpojenými má obvod časovou konstantu τ_L (viz čl. 31.9). Se spínačem S_3 sepnutým a zbývajícími rozpojenými kmitá obvod s periodou T. Dokažte, že $T = 2\pi\sqrt{\tau_C \tau_L}$.



Obr. 33.22 Cvičení 12

13C. S použitím smyčkového pravidla odvoďte diferenciální rovnici (33.11) pro obvod LC.

14C. Jednoduchá smyčka se skládá z několika cívek (L_1, L_2, …), několika kondenzátorů (C_1, C_2, …) a několika rezistorů (R_1, R_2, …) zapojených v sérii (obr. 33.23a). Dokažte, že bez ohledu na pořadí těchto obvodových prvků ve smyčce je chování obvodu stejné jako chování jednoduchého obvodu LC v obr. 33.23b. (*Tip*: Použijte smyčkové pravidlo a cvič. 56 v kap. 31.)



(*a*) (*b*)

Obr. 33.23 Cvičení 14

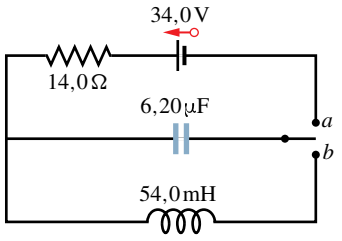
15Ú. V kmitavém obvodu LC složeném z kondenzátoru 1,0 nF a cívky 3,0 mH je maximální napětí 3,0 V. (a) Jaký je maximální náboj na kondenzátoru? (b) Jaký je maximální proud v obvodu? (c) Jaká je maximální energie magnetického pole cívky?

16Ú. Kmitavý obvod LC má indukčnost 3,00 mH a kapacitu 10,0 μF. Vypočtěte jeho (a) úhlovou frekvenci, (b) periodu kmitů. (c) V čase $t = 0$ je kondenzátor nabit nábojem 200 μC a proud je nulový. Nakreslete (přibližně) průběh náboje na kondenzátoru jako funkci času.

17Ú. V kmitavém obvodu LC s kapacitou $C = 4{,}00$ μF je maximální napětí na kondenzátoru během oscilací 1,50 V a maximální proud je 50,0 mA. (a) Jaká je indukčnost L? (b) Jaká je frekvence kmitů? (c) Za jakou dobu dosáhne náboj na kondenzátoru maximální hodnotu (z nenabitého stavu)?

18Ú. V obvodu na obr. 33.24 byl přepínač po dlouhou dobu v poloze a. Náhle je přepojen do polohy b. (a) Vypočtěte frekvenci kmitů proudu. (b) Jaká je jejich amplituda?

19Ú. Mějme cívku 10 mH a dva kondenzátory o kapacitách 5,0 μF a 2,0 μF. Vypište všechny rezonanční kmitočty, které můžeme generovat spojením těchto prvků v různých kombinacích.



Obr. 33.24 Úloha 18

20Ú. Obvod LC rezonuje na frekvenci 10,4 kHz. (a) Jaká je indukčnost v obvodu, je-li kapacita 340 μF? (b) Jaká je celková energie v obvodu, je-li maximální proud 7,20 mA? (c) Jaký je maximální náboj na kondenzátoru?

21Ú. (a) V kmitavém obvodu LC vyjádřete pomocí maximálního náboje na kondenzátoru velikost náboje v okamžiku, kdy energie elektrického pole je rovna 50,0 % energie magnetického pole. (b) Jaký zlomek periody musí uplynout od okamžiku, kdy je kondenzátor plně nabit, do splnění podmínky (a)?

22Ú. V kmitavém obvodu LC je v jistém okamžiku 75,0 % celkové energie akumulováno v magnetickém poli cívky. (a) Pomocí maximálního náboje Q vyjádřete náboj na kondenzátoru v tomto okamžiku. (b) Vyjádřete pomocí maximálního proudu v cívce velikost proudu v tomto okamžiku.

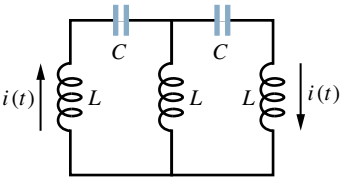
23Ú. Cívka je připojena ke kondenzátoru, jehož kapacitu lze plynule měnit otočným knoflíkem. Chceme, aby se frekvence kmitů LC měnila lineárně s úhlem natočení knoflíku v rozmezí $2{\cdot}10^5$ Hz až $4{\cdot}10^5$ Hz při otočení o 180°. Sestrojte graf závislosti požadované kapacity C na úhlu natočení knoflíku, je-li $L = 1{,}0$ mH.

24Ú. Proměnný kondenzátor s rozsahem kapacity 10 pF až 365 pF tvoří s cívkou kmitavý obvod LC s proměnnou frekvencí k ladění radiopřijímače. (a) Jaký je poměr nejvyššího a nejnižšího kmitočtu, které můžeme získat tímto obvodem? (b) Mají-li být takovým obvodem získány kmitočty od 0,54 MHz do 1,60 MHz, je poměr vypočtený v (a) příliš vysoký. Požadovaného poměru kmitočtů lze dosáhnout připojením paralelního kondenzátoru. Jak velkou kapacitu musíme přidat a jakou indukčnost použít, abychom získali požadovaný rozsah kmitočtů?

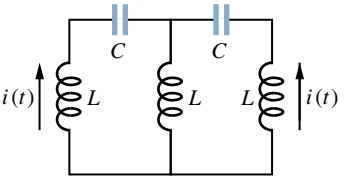
25Ú. V kmitavém obvodu LC je $L = 25{,}0$ mH a $C = 7{,}80$ μF. V čase $t = 0$ je proud 9,20 mA, náboj na kondenzátoru je 3,80 μC a kondenzátor se nabíjí. (a) Jaká je celková energie v obvodu? (b) Jaký je maximální náboj na kondenzátoru? (c) Jaký je maximální proud? (d) Jaká je hodnota φ, je-li náboj na kondenzátoru dán vztahem $q = Q\cos(\omega t + \varphi)$? (e) Při stejném zadání předpokládejte, že se kondenzátor vybíjí. Jaká je v takovém případě hodnota φ?

26Ú. V kmitavém obvodu LC je $L = 3{,}00$ mH a $C = 2{,}70$ μF. V čase $t = 0$ je náboj na kondenzátoru nulový a proud je 2,00 A. (a) Jaký největší náboj se objeví na kondenzátoru? (b) Ve kterém okamžiku (vyjádřeno pomocí periody T) narůstá elektrická energie na kondenzátoru největší rychlostí?

27Ú. Tři stejné cívky L a dva stejné kondenzátory C tvoří dvě smyčky podle obr. 33.25. (a) Předpokládejte, že proudy tečou podle obr. 33.25a. Jaký je proud v prostřední cívce? Napište odpovídající rovnice pomocí smyčkového pravidla a ukažte, že jsou splněny tehdy, když proud kmitá s úhlovou frekvencí $\omega = 1/\sqrt{LC}$. (b) Předpokládejte, že proudy jsou orientovány podle obr. 33.25b. Jaký proud nyní teče prostřední cívkou? Napište rovnice pomocí smyčkového pravidla a ukažte, že jsou splněny, jestliže proud kmitá s úhlovou frekvencí $\omega = 1/\sqrt{3LC}$. (Protože obvody mohou kmitat na dvou různých frekvencích, nemůžeme je nahradit jediným obvodem LC.)



(*a*)



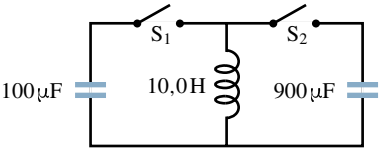
(*b*)

Obr. 33.25 Úloha 27

28Ú. Sériový obvod s indukčností L_1 a kapacitou C_1 kmitá s úhlovou frekvencí ω. Druhý sériový obvod s indukčností L_2 a kapacitou C_2 kmitá se stejnou úhlovou frekvencí. Vyjádřete úhlovou frekvenci kmitů obvodu obsahujícího všechny čtyři prvky v sérii. (Odpor obvodu zanedbejte.)

29Ú. V kmitavém obvodu LC s $C = 64{,}0$ μF je proud jako funkce času dán vztahem $i(t) = 1{,}60\sin(2\,500t + 0{,}680)$, kde t je v sekundách, i v ampérech a fáze v radiánech. (a) Kdy poprvé (pro $t > 0$) dosáhne proud svého maxima? Jaká je (b) indukčnost, (c) celková energie obvodu?

30Ú*. V obr. 33.26 je ve výchozím stavu kondenzátor 900 μF nabit na 100 V a kondenzátor 100 μF je vybit. Popište detailně, jak lze nabít kondenzátor 100 μF na napětí 300 V manipulací s přepínači S_1 a S_2.



Obr. 33.26 Úloha 30

ODST. 33.5 Tlumené kmity v obvodu *RLC*

31C. Jaký odpor R musíme zapojit do série s indukčností $L = 220$ mH a kapacitou $C = 12{,}0$ μF, aby maximální ná-

boj na kondenzátoru klesl na 99,0 % původní hodnoty během 50,0 period? (Předpokládejte $\omega' \doteq \omega$.)

32C. Uvažujte tlumený obvod RLC. (a) Ukažte, že člen vyjadřující tlumení $e^{-Rt/(2L)}$, který obsahuje L, ale ne C, lze přepsat do více symetrického tvaru, který zahrnuje L i C, ve tvaru $e^{-\pi R\sqrt{C/L}(t/T)}$, kde T je perioda kmitů (při zanedbání odporu). (b) S použitím (a) ukažte, že jednotka pro $\sqrt{L/C}$ v SI je ohm. (c) S použitím (a) ukažte, že podmínka pro to, aby ztráty energie za periodu byly malé, je $R \ll \sqrt{L/C}$.

33Ú. V kmitavém sériovém obvodu RLC určete dobu potřebnou k tomu, aby maximální energie kondenzátoru během oscilací poklesla na polovinu počáteční hodnoty. Předpokládejte $q = Q$ v čase $t = 0$.

34Ú. Obvod s jednou smyčkou se skládá z rezistoru 7,20 Ω, cívky 12,0 H a kondenzátoru 3,20 μF. Na počátku měl kondenzátor náboj 6,20 μC a proud byl nulový. Vypočítejte náboj na kondenzátoru po N úplných periodách později pro $N = 5$, 10 a 100.

35Ú. V čase $t = 0$ není na kondenzátoru obvodu RLC žádný náboj, avšak cívkou protéká proud I. (a) Vyjádřete počáteční fázi φ v rov. (33.21) pro tento obvod. (b) Napište výraz pro náboj q na kondenzátoru jako funkci času t pomocí amplitudy proudu a úhlové frekvence ω'.

36Ú. (a) Přímým dosazením rov. (33.21) do rov. (33.20) dokažte, že $\omega' = \sqrt{(1/LC) - (R/2L)^2}$. (b) O kolik se změní frekvence kmitů, jestliže se odpor zvýší z 0 na 100 Ω v obvodu, v němž je $L = 4{,}40$ H a $C = 7{,}30$ μF?

37Ú*. Dokažte, že v kmitavém obvodu RLC je relativní úbytek energie $\Delta E/E$ za jednu periodu přibližně roven $2\pi R/(\omega L)$. Veličina $\omega L/R$ se nazývá *činitel jakosti* Q obvodu (nezaměňovat s nábojem). Obvody s velkou hodnotou Q mají malý odpor a nízké poměrné ztráty energie za periodu $2\pi/Q$.

ODST. 33.8 Tři jednoduché obvody

38C. Kondenzátor 1,50 μF je připojen podle obr. 33.9a ke generátoru střídavého napětí s $\mathscr{E} = 30{,}0$ V. Jaká je amplituda střídavého proudu, je-li frekvence emn (a) 1,00 kHz, (b) 8,00 kHz?

39C. Cívka 50,0 mH je připojena podle obr. 33.10a ke generátoru střídavého napětí s $\mathscr{E} = 30{,}0$ V. Jaká je amplituda výsledného střídavého proudu, je-li frekvence emn (a) 1,00 kHz, (b) 8,00 kHz?

40C. Rezistor 50,0 Ω je připojen podle obr. 33.8a ke generátoru střídavého napětí s $\mathscr{E} = 30{,}0$ V. Jaká je amplituda střídavého proudu, je-li frekvence emn (a) 1,00 kHz, (b) 8,00 kHz?

41C. Cívka s indukčností $L = 45{,}0$ mH má induktivní reaktanci $X_L = 1{,}30$ kΩ. (a) Při jaké frekvenci? (b) Jaká je kapacita kondenzátoru se stejnou reaktancí při stejné frekvenci? (c) Jak velké budou reaktance cívky a kondenzátoru, jestliže se frekvence zdvojnásobí?

42C. Kondenzátor 1,50 μF má reaktanci 12,0 Ω. (a) Při jaké frekvenci? (b) Jaká bude jeho reaktance, jestliže frekvenci zdvojnásobíme?

43C. (a) Při jaké frekvenci by měly cívka 6,0 mH a kondenzátor 10 μF stejnou reaktanci a (b) jak velká by byla? (c) Dokažte, že tato frekvence by byla frekvencí vlastních kmitů obvodu se zadanými hodnotami L a C.

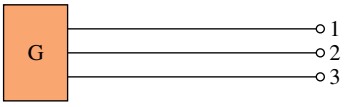
44Ú. Generátor emn $e = \mathscr{E}\sin\omega_b t$, kde $\mathscr{E} = 25{,}0$ V a $\omega_b = 377$ rad·s^{-1}, je připojen k cívce o indukčnosti 12,7 H. (a) Jaká je maximální hodnota proudu? (b) Jaké je emn generátoru v okamžiku, když je proud právě maximální? (c) Jaký je proud v okamžiku, když je emn generátoru rovno −12,5 V a dále klesá?

45Ú. Generátor z úlohy 44 je připojen ke kondenzátoru 4,15 μF. (a) Jaká je maximální hodnota proudu? (b) Jaké je emn generátoru, je-li proud právě maximální? (c) Je-li emn generátoru −12,5 V a roste, jaký je proud?

46Ú. Generátor má emn $e = \mathscr{E}\sin(\omega_b t - \pi/4)$, kde $\mathscr{E} = 30{,}0$ V a $\omega_b = 350$ rad·s^{-1}. Proud v připojeném obvodu je $i(t) = I\sin(\omega_b t - 3\pi/4)$, kde $I = 620$ mA. (a) Kdy dosáhne emn generátoru pro $t > 0$ poprvé maxima? (b) Kdy dosáhne proud generátoru pro $t > 0$ poprvé maxima? (c) Obvod obsahuje kromě generátoru další prvek. Je to kondenzátor, cívka, nebo rezistor? Zdůvodněte svou odpověď. (d) Jaká je hodnota kapacity, indukčnosti, nebo odporu z otázky (c)?

47Ú. Generátor má emn $e = \mathscr{E}\sin(\omega_b t - \pi/4)$, kde $\mathscr{E} = 30{,}0$ V a $\omega_b = 350$ rad·s^{-1}. Proud je dán vztahem $i(t) = I\sin(\omega_b t + \pi/4)$, kde $I = 620$ mA. (a) V jakém čase po $t = 0$ nabude emn generátoru poprvé maxima? (b) Kdy pro $t > 0$ nabude proud poprvé maxima? (c) Obvod obsahuje kromě generátoru ještě jeden prvek. Je to kondenzátor, cívka, nebo rezistor? Zdůvodněte svou odpověď. (d) Jaká je hodnota příslušné kapacity, indukčnosti, nebo odporu?

48Ú. Třífázový generátor G je zdrojem energie, která je přenášena pomocí tří vodičů podle obr. 33.27. Jejich napětí vůči zemi jsou $u_1 = U\sin\omega_b t$, $u_2 = U\sin(\omega_b t - 120°)$ a $u_3 = U\sin(\omega_b t - 240°)$. Některá zařízení většího výkonu (např. motory) mají tři svorky a jsou navrženy tak, že se připojí přímo ke všem třem vodičům. Ukažte, že napětí mezi *dvěma libovolnými* vodiči (a) kmitá harmonicky s časem s úhlovou frekvencí ω_b, (b) má amplitudu $U\sqrt{3}$.



třívodičové přenosové vedení

Obr. 33.27 Úloha 48

ODST. 33.9 Sériový obvod RLC

49C. (a) Nalezněte Z, φ a I pro zadání z př. 33.5, jestliže odstraníme kondenzátor z obvodu a nezměníme ostatní parametry. (b) Nakreslete ve vhodném měřítku pro tento nový stav fázorový diagram podobný obr. 33.11d.

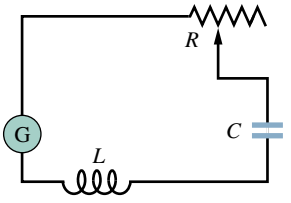
50C. (a) Stanovte Z, φ a I pro zadání z př. 33.5, odstraníme-li cívku z obvodu a nezměníme ostatní parametry. (b) Nakreslete

pro tento nový stav ve vhodném měřítku fázorový diagram podobný obr. 33.11d.

51C. (a) Nalezněte Z, φ a I pro zadání př. 33.5 s $C = 70{,}0\,\mu\text{F}$, jestliže se ostatní parametry nezměnily. (b) Nakreslete pro tento nový stav ve vhodném měřítku fázorový diagram, podobný obr. 33.11d, a oba diagramy porovnejte.

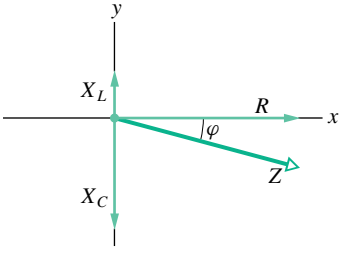
52C. Zdroj s proměnným kmitočtem je spojen v sérii s cívkou $L = 2{,}50\,\text{mH}$ a s kondenzátorem $C = 3{,}00\,\mu\text{F}$. Při jakém kmitočtu zdroje bude v obvodu největší amplituda proudu?

53Ú. V obr. 33.28 je generátor s proměnným kmitočtem zapojen v sérii s proměnným odporem R, kondenzátorem $C = 5{,}50\,\mu\text{F}$ a cívkou s indukčností L. Při $R = 100\,\Omega$ je amplituda proudu při kmitočtech 1,30 kHz a 1,50 kHz poloviční ve srovnání s maximálním proudem v obvodu. (a) Jaká je hodnota L? (b) Při jakých kmitočtech je proud roven polovině maximální hodnoty, zvětší-li se R?



Obr. 33.28 Úloha 53

54Ú. Proveďte konstrukci diagramu podle obr. 33.29. Nakreslete (1) vektor v kladném směru osy y o velikosti X_L, (2) vektor v záporném směru osy y o velikosti X_C, (3) vektor v kladném směru osy x o velikosti R a najděte jejich výslednici. Přesvědčte se výpočtem, že impedance Z obvodu RLC je rovna velikosti této výslednice a fázové posunutí φ je rovno úhlu, který svírá tato výslednice s kladným směrem osy x. Jaký charakter (induktivní, nebo kapacitní) má obvod, kterému odpovídá obr. 33.29?



Obr. 33.29 Úloha 54

55Ú. Může být amplituda napětí na cívce větší než amplituda emn generátoru v obvodu RLC? Uvažujte obvod RLC s $\mathscr{E} = 10\,\text{V}$, $R = 10\,\Omega$, $L = 1{,}0\,\text{H}$ a $C = 1{,}0\,\mu\text{F}$. Vypočtěte amplitudu napětí na cívce při rezonanci.

56Ú. Cívka s indukčností 88 mH o neznámé rezistanci a kondenzátor 0,94 μF jsou spojeny v sérii se střídavým emn o kmitočtu 930 Hz. Jaká je rezistance cívky, je-li fázový posun mezi přiloženým napětím a proudem 75°?

57Ú. Jaké je napětí na (a) generátoru, (b) rezistoru, (c) kondenzátoru a (d) cívce, je-li okamžitá hodnota emn v př. 33.5 maximální? (e) Součtem těchto okamžitých hodnot vzatých s příslušným znaménkem ověřte, že splňují smyčkové pravidlo.

58Ú. Generátor střídavého proudu s $\mathscr{E} = 220\,\text{V}$, pracující s kmitočtem 400 Hz, vyvolá kmity v sériovém obvodu RLC, který má $R = 220\,\Omega$, $L = 150\,\text{mH}$ a $C = 24{,}0\,\mu\text{F}$. Stanovte (a) kapacitní reaktanci X_C, (b) impedanci Z, (c) amplitudu proudu I. Druhý kondenzátor o stejné kapacitě je pak připojen v sérii s ostatními prvky. Určete, jestli hodnoty (d) X_C, (e) Z a (f) I vzrostou, poklesnou, nebo zůstanou stejné.

59Ú. Obvod RLC podle obr. 33.7 má $R = 5{,}00\,\Omega$, $C = 20{,}0\,\mu\text{F}$, $L = 1{,}00\,\text{H}$ a $\mathscr{E} = 30{,}0\,\text{V}$. (a) Při jaké úhlové frekvenci ω_b bude mít amplituda proudu maximální hodnotu? (b) Jaká hodnota to bude? (c) Při jakých dvou úhlových frekvencích ω_{b1} a ω_{b2} bude amplituda proudu rovna polovině této maximální hodnoty? (d) Jaká je poměrná položířka $(\omega_{b1} - \omega_{b2})/\omega$ rezonanční křivky tohoto obvodu?

60Ú. V jistém sériovém obvodu RLC je maximální emn generátoru 125 V a maximální proud je 3,20 A. Pokud proud předbíhá emn o 0,982 rad, jaká je (a) impedance a (b) odpor obvodu? (c) Je obvod kapacitního, nebo induktivního charakteru?

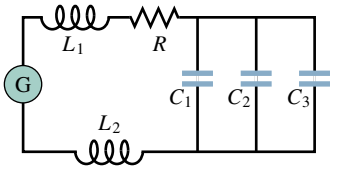
61Ú. Sériový obvod RLC má rezonanční frekvenci 6,00 kHz. Je-li napájen při 8,00 kHz, má impedanci 1,00 kΩ a počáteční fázi 45°. Jaké jsou hodnoty (a) R, (b) L, (c) C pro tento obvod?

62Ú. V sériovém obvodu RLC je při kmitočtu 50,0 Hz maximální napětí na cívce rovno dvojnásobku maximálního napětí na rezistoru a také dvojnásobku maximálního napětí na kondenzátoru. (a) Jaký je fázový posun mezi proudem a emn generátoru? (b) Jaký by musel být odpor obvodu, aby byl maximální proud 300 mA, má-li emn generátoru amplitudu 30,0 V?

63Ú. Obvod z př. 33.5 není v rezonanci. (a) Podle čeho to poznáte? (b) Jaký kondenzátor je třeba přidat ke stávajícímu, aby se obvod dostal do rezonance? (c) Jaká bude potom amplituda proudu?

64Ú. Generátor je zapojen v sérii s cívkou o indukčnosti $L = 2{,}00\,\text{mH}$ a kondenzátorem o kapacitě C. Kapacitu C máte vytvořit pomocí kondenzátorů s kapacitami $C_1 = 4{,}00\,\mu\text{F}$ a $C_2 = 6{,}00\,\mu\text{F}$ použitých buď jednotlivě, nebo v kombinaci. Jaké rezonanční kmitočty může mít obvod v závislosti na hodnotě C?

65Ú. Na obr. 33.30 je generátor s proměnnou frekvencí kmitů připojen k rezistoru s $R = 100\,\Omega$, k cívkám s $L_1 = 1{,}70\,\text{mH}$ a $L_2 = 2{,}30\,\text{mH}$ a ke kondenzátorům s $C_1 = 4{,}00\,\mu\text{F}$, $C_2 = 2{,}50\,\mu\text{F}$ a $C_3 = 3{,}50\,\mu\text{F}$. (a) Jaká je rezonanční frekvence obvodu? (*Tip*: Viz úlohu 56 v kap. 31.) Jak se změní rezonanční



Obr. 33.30 Úloha 65

kmitočet, jestliže se (b) zvětší hodnota R, (c) zvětší hodnota L_1, (d) odstraní kondenzátor C_3 z obvodu?

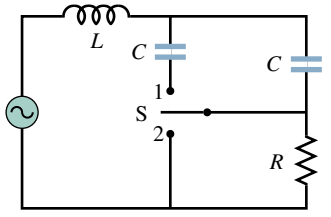
66Ú. Sériový obvod RLC s prvky R_1, L_1, C_1 má stejnou rezonanční frekvenci jako druhý obvod s prvky R_2, L_2, C_2. Nyní spojte oba obvody do série. Dokažte, že nově vzniklý obvod má opět stejnou rezonanční frekvenci jako každý z obou obvodů samostatně.

67Ú. Dokažte, že poměrná položířka rezonanční křivky (viz úlohu 59d) je dána vztahem

$$\frac{\Delta\omega_b}{\omega} = \sqrt{\frac{3C}{L}}R,$$

kde ω je úhlová frekvence při rezonanci a $\Delta\omega_b$ šířka rezonanční křivky při poloviční amplitudě. Povšimněte si, že $\Delta\omega_b/\omega$ narůstá s R, jak ukazuje obr. 33.13. Použijte tento vzorec ke kontrole odpovědi k úloze 59d.

68Ú*. Generátor na obr. 33.31 dodává střídavé napětí 230 V při 50,0 Hz. Při rozpojeném přepínači (jako na obrázku) předbíhá proud emn generátoru o 20,0°. S přepínačem v poloze 1 je proud zpožděn za emn generátoru o 10,0°. Když je přepínač v poloze 2, je proud 2,00 A. Určete hodnoty R, L a C.



Obr. 33.31 Úloha 68

ODST. 33.10 Výkon v obvodech se střídavým proudem

69C. Jaká je maximální hodnota střídavého napětí, jehož efektivní hodnota je 100 V?

70C. Voltmetr s velkou impedancí je postupně připojen k cívce, kondenzátoru a rezistoru sériového obvodu RLC, který je zapojen k emn 100 V (efektivních). Ve všech případech na voltmetru odečteme stejné napětí. Jaká je tato odečtená hodnota?

71C. (a) Rozeberte zadání z úlohy 44c. Dodává, nebo odebírá generátor energii z obvodu? (b) Opakujte výpočet pro podmínky z úlohy 45c.

72C. Jak velký stejnosměrný proud musí procházet daným rezistorem, aby měl stejný tepelný výkon jako střídavý proud s maximální hodnotou 2,60 A?

73C. Pro obvody ve cvič. 39, 40, 49 a 50 vypočítejte střední ztrátový výkon.

74C. Dokažte, že střední výkon dodávaný do obvodu v obr. 33.7 lze vyjádřit také vztahem $\overline{P} = (\mathscr{E}_{ef})^2 R/Z^2$. Ukažte, že tento výraz pro střední výkon dává správné výsledky pro čistě odporový obvod, pro obvod RLC při rezonanci a pro čistě kapacitní a čistě induktivní obvod.

75C. Elektrický motor připojený ke 230 V a 50,0 Hz koná (mechanickou) práci s výstupním výkonem 74,6 W. Jaký je jeho odpor, protéká-li motorem efektivní proud 0,650 A?

76C. Klimatizační zařízení, připojené k síti o napětí $U_{ef} = 120$ V, je ekvivalentní sériovému zapojení odporu 12,0 Ω a induktivní reaktance 1,30 Ω. (a) Vypočtěte impedanci klimatizačního zařízení. (b) Vypočtěte střední výkon do něj dodávaný.

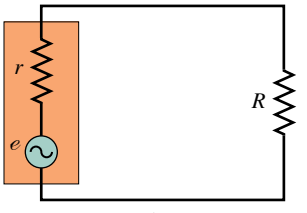
77C. Elektrický motor při zatížení má rezistanci 32,0 Ω a induktivní reaktanci 45,0 Ω. Efektivní napětí střídavého zdroje je 420 V. Vypočtěte efektivní proud tekoucí motorem.

78Ú. Namísto grafického zdůvodnění v obr. 33.14b dokažte výpočtem, že časová střední hodnota výrazu $\sin^2(\omega t - \varphi)$ přes celistvý počet půlperiod je rovna 1/2.

79Ú. Pro harmonicky buzený sériový obvod RLC dokažte, že po jedné celé periodě T se energie uložená (a) v kondenzátoru, (b) v cívce nezměnila. Dokažte, že v průběhu periody (c) zdroj emn dodá energii $(\frac{1}{2}T)\mathscr{E}I\cos\varphi$, (d) v rezistoru se disipuje energie $(\frac{1}{2}T)RI^2$. (e) Ukažte, že energie nalezené v (c) a (d) jsou stejně velké.

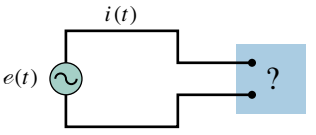
80Ú. V sériovém kmitavém obvodu RLC je $R = 16{,}0\,\Omega$, $C = 31{,}2\,\mu$F, $L = 9{,}20$ mH a $e = \mathscr{E}\sin\omega_b t$ s $\mathscr{E} = 45{,}0$ V a $\omega_b = 3\,000\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. V čase $t = 0{,}442$ ms určete okamžitý výkon (a) dodávaný generátorem, (b) dodávaný do kondenzátoru, (c) dodávaný do cívky, (d) disipovaný v rezistoru. (e) Jaký je význam záporné hodnoty pro kterýkoli z výsledků (a), (b) a (c)? (f) Ukažte, že součet výsledků (b), (c) a (d) je roven výsledku (a).

81Ú. Pro obvod z obr. 33.32 ukažte, že střední výkon, s nímž je energie disipována v rezistoru R, je největší, je-li R roven vnitřnímu odporu r generátoru střídavého proudu. (Až doposud jsme mlčky předpokládali ideální generátory, tj. $r = 0$.)



Obr. 33.32 Úlohy 81 a 90

82Ú. Obr. 33.33 ukazuje střídavý generátor připojený dvojicí svorek k „černé skříňce“. Ve skříňce je obvod RLC skládající se třeba i z více smyček, jejichž propojení však neznáme. Měření z vnějšku skříňky ukáže, že $e(t) = (75{,}0\text{ V})\sin\omega_b t$ a $i(t) = (1{,}20\text{ A})\sin(\omega_b t + 42{,}0°)$. (a) Jaký je účiník? (b) Předbíhá proud v obvodu, nebo je zpožděn vzhledem k emn? (c) Má obvod ve skříňce induktivní, nebo kapacitní charakter? (d) Je obvod

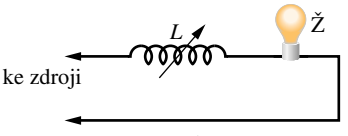


Obr. 33.33 Úloha 82

ve skříňce v rezonanci? (e) Musí být ve skříňce kondenzátor? Cívka? Rezistor? (f) Jaký je střední výkon, dodávaný do skříňky z generátoru? (g) Proč nepotřebujeme znát úhlovou frekvenci obvodu ω_b k odpovědi na některé uvedené otázky?

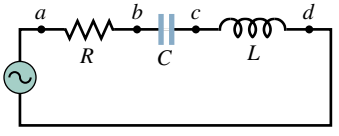
83Ú. V obvodu RLC na obr. 33.7 zvolme $R = 5{,}00\,\Omega$, $L = 60{,}0\,\text{mH}$, $f_b = 50{,}0\,\text{Hz}$ a $\mathscr{E} = 30{,}0\,\text{V}$. Pro jakou velikost kapacity bude střední ztrátový výkon v rezistoru (a) největší, (b) nejmenší? (c) Jaké je maximum a minimum ztrátového výkonu? Jaké jsou odpovídající (d) fázové posuny a (e) účiníky?

84Ú. Před zavedením tyristorů se jako typický „stmívač" pro jevištní reflektory používala cívka s proměnnou indukčností od 0 do L_{max} zapojená v sérii se žárovkami reflektorů podle obr. 33.34. Napájecí napětí je 230 V, 50 Hz; žárovka nese údaj 230 V, 1000 W. (a) Jakou hodnotu L_{max} musí mít cívka, aby mohla zeslabit reflektor až na jednu pětinu plného výkonu? (Odpor vlákna sice s rostoucí teplotou a tedy i s dodávaným výkonem roste, ale tuto závislost neuvažujte a berte odpor jako konstantní.) (b) Mohli bychom místo cívky použít reostat (proměnný odpor) nastavitelný od 0 do R_{max}? Jestliže ano, jakou hodnotu R_{max} bychom potřebovali? Proč se reostat nepoužívá?



Obr. 33.34 Úloha 84

85Ú. V obr. 33.35 je $R = 15{,}0\,\Omega$, $C = 4{,}70\,\mu\text{F}$ a $L = 25{,}0\,\text{mH}$. Generátor dodává napětí 75,0 V při kmitočtu 550 Hz. (a) Vypočtěte efektivní proud. (b) Stanovte efektivní napětí U_{ab}, U_{bc}, U_{cd}, U_{bd}, U_{ad}. (c) Jaká je střední hodnota ztrátového výkonu v každém ze tří prvků?



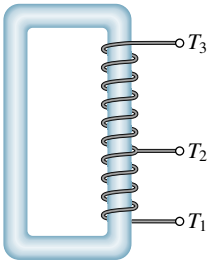
Obr. 33.35 Úloha 85

ODST. 33.11 Transformátory

86C. Generátor s výstupním napětím 100 V je připojen k primárnímu vinutí transformátoru s 50 závity. Jaké je napětí na sekundárním vinutí, které má 500 závitů?

87C. Primární vinutí transformátoru má 500 závitů a sekundární vinutí 10 závitů. (a) Jaké je napětí U_2, je-li sekundární obvod rozpojený a je-li primární napětí $U_1 = 120\,\text{V}$? (b) Jaký poteče proud v primárním a v sekundárním vinutí, je-li sekundární vinutí připojeno k odporové zátěži 15 Ω?

88C. Obr. 33.36 ukazuje tzv. *autotransformátor*. Ten je tvořen jedinou cívkou (navinutou na železném jádře) se třemi vývody T_i. Mezi vývody T_1 a T_2 je 200 závitů a mezi vývody T_2 a T_3 je 800 závitů. Libovolné dva vývody můžeme považovat za „primární svorky" a jiné dva vývody za „sekundární svorky". Vypište všechny poměry, se kterými můžeme primární napětí transformovat na sekundární.



Obr. 33.36 Cvičení 88

89Ú. Generátor střídavého proudu o výkonu 250 kW dodává energii do odporové zátěže ve vzdálené továrně prostřednictvím dvou vodičů přenosového vedení. Každý z nich má odpor 0,30 Ω. V továrně je použit snižovací transformátor poskytující napětí mnohem nižší, bezpečné a pro použití v továrně vhodnější. Vypočtěte pokles napětí na vedení a ztrátový výkon ve vedení, je-li efektivní hodnota emn generátoru (a) $U = 80\,\text{kV}$, (b) $U = 8{,}0\,\text{kV}$ a (c) $U = 0{,}80\,\text{kV}$. Vyhodnoťte vhodnost každé volby.

90Ú. Nechť zvýrazněný obdélník vlevo v obr. 33.32 představuje výstup zesilovače s vysokou impedancí 1 000 Ω a místo rezistoru je cívka reproduktoru s nízkou impedancí 10 Ω. Pro přenos maximálního výkonu do zátěže R musí být, jak víme z kap. 28, úlohy 24, $R = r$, což zde není splněno. Jak však víme, můžeme použít transformátor i k „transformaci" odporů. Načrtněte mezi zesilovač a reproduktor v obr. 33.32 primární a sekundární vinutí transformátoru tak, abychom přizpůsobili impedance. Jaký musí být poměr počtu jeho závitů?

PRO POČÍTAČ

91Ú. Kondenzátor 45,0 μF a rezistor 200 Ω jsou spojeny v sérii se zdrojem střídavého napětí $U_z = 100\,\text{V}$. Frekvenci f zdroje lze měnit od 0 do 100 Hz. (a) Napište rovnici pro reaktanci kondenzátoru X_C. (b) Znázorněte v grafu současně rezistanci R, reaktanci kondenzátoru X_C a impedanci Z v závislosti na kmitočtu f v rozsahu $0 < f < 100\,\text{Hz}$. (c) Z grafu určete hodnotu f, při které $X_C = R$.

92Ú. Pro zadání z úlohy 91 znázorněte současně napětí U_C na kondenzátoru, napětí U_R na rezistoru a (konstantní) napětí U_z zdroje v závislosti na f v rozsahu $0 < f < 100\,\text{Hz}$. (b) Z grafu určete hodnotu f, při které $U_C = U_R$. (c) Jaká je hodnota U_R při této frekvenci? (d) Určete hodnotu f, při které $U_R = 0{,}50U_z$. (e) Jaké je U_C při této frekvenci? (f) Určete hodnotu f, při které $U_C = 0{,}50U_z$. (g) Jaká je hodnota U_R při této frekvenci?

93Ú. Cívka 40,0 mH a rezistor 200 Ω jsou spojeny v sérii se zdrojem střídavého napětí $U_z = 100\,\text{V}$. Frekvenci zdroje lze měnit od 0 do 2 500 Hz. (a) Napište vztah pro induktivní reaktanci X_L. (b) Znázorněte současně odpor R, induktivní reaktanci X_L a impedanci Z v závislosti na f v rozsahu $0 < f < 2\,500\,\text{Hz}$. (c) Z grafů určete hodnotu f, při které $X_L = R$.

94Ú. Pro zadání z úlohy 93 znázorněte současně napětí U_L na cívce, napětí U_R na rezistoru a (konstantní) napětí U_z zdroje v závislosti na frekvenci f v rozsahu $0 < f < 2\,500$ Hz. (b) Z grafu určete frekvenci f, při které je $U_L = U_R$. (c) Jaké je napětí U_R při této frekvenci? (d) Určete frekvenci f, při které $U_R = U_z/3$. (e) Jaké je napětí U_L při této frekvenci? (f) Určete frekvenci f, při které $U_L = U_z/3$. (g) Jaké je napětí U_R při této frekvenci?

95Ú. Cívka 150,0 mH, kondenzátor 45,0 μF a rezistor 90,0 Ω jsou zapojeny v sérii ke zdroji střídavého napětí $U_z = 100$ V. Frekvenci zdroje f lze měnit od 0 do 1 000 Hz. (a) Vyneste do grafu současně kapacitní reaktanci X_C a induktivní reaktanci X_L v závislosti na frekvenci f v rozsahu $0 < f < 200$ Hz. (b) Z grafu určete hodnotu f, při které $X_C = X_L$. (c) Vyneste impedanci Z obvodu v závislosti na frekvenci f v rozsahu $0 < f < 188$ Hz a z grafu stanovte frekvenci f, při které je impedance Z minimální.

34
Elektromagnetické vlny



Když letí kometa kolem Slunce, vypařuje se led na jejím povrchu a uvolňují se z něj zachycené částice prachu a nabité částice. Elektricky nabitý „sluneční vítr“ usměrňuje nabité částice do rovného ohonu, který směřuje radiálně od Slunce. Na prachové částice však sluneční vítr nepůsobí a měly by se tedy pohybovat dále po dráze komety. Proč místo toho většina z nich tvoří zakřivenou spodní část ohonu, kterou vidíme na fotografii?

34.1 MAXWELLOVA DUHA

Jedním z klíčových úspěchů Jamese Clerka Maxwella bylo zjištění, že světelný paprsek je postupná vlna tvořená elektrickým a magnetickým polem — **elektromagnetická vlna** — a že tedy optika, studující viditelné světlo, je součástí elektromagnetismu. V této kapitole uzavřeme rozbor čistě elektrických a magnetických jevů a položíme základy optiky.

V Maxwellově době (v polovině 19. stol.) bylo viditelné, infračervené a ultrafialové světlo jediným známým druhem elektromagnetických vln. **Heinrich Hertz**, podnícen Maxwellovým dílem, však objevil to, co nyní nazýváme rádiovými vlnami, a zjistil, že se šíří v prostoru toutéž rychlostí jako viditelné světlo.

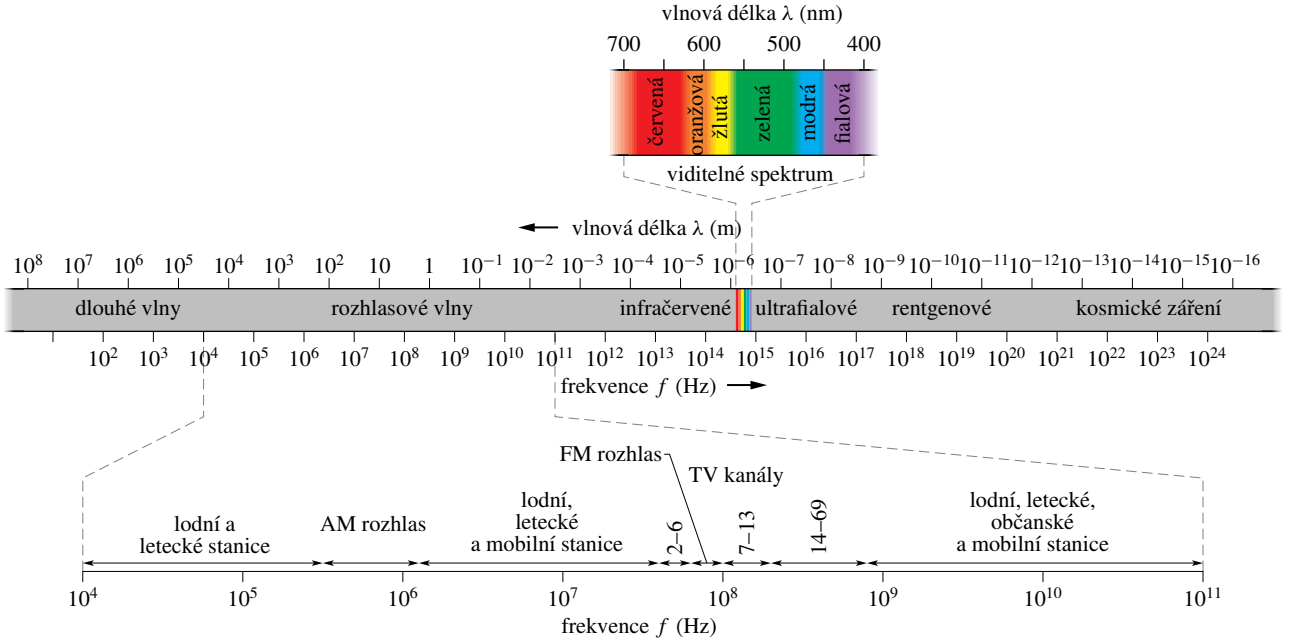
Jak ukazuje obr. 34.1, známe nyní široké spektrum elektromagnetických vln, které jeden nápaditý spisovatel nazval „Maxwellovou duhou“. Všimněme si rozsahu, který toto spektrum zaujímá. Hlavním zdrojem záření je pro nás Slunce; to určujícím způsobem ovlivňuje prostředí, ve kterém jsme se vyvinuli a kterému jsme přizpůsobeni. Jsme též stále skrz naskrz pronikáni rádiovými a televizními signály. Zasahují nás mikrovlny radarových systémů a telefonních spojů. Jsou zde i elektromagnetické vlny od světelných zdrojů, od elektrických strojů a aut, od rentgenových přístrojů a radioaktivních materiálů. Kromě toho k nám zasahuje kosmické záření — záření hvězd a dalších objektů z naší Galaxie i z jiných galaxií. Elektromagnetické vlny se šíří i v opačném směru: televizní signály, vysílané ze Země asi od r. 1950, přenášejí novinky od nás (i když pouze velmi slabě) — možná nějakým technicky zdatným bytostem, které eventuálně obývají některou planetu obíhající okolo jedné z asi 400 nám nejbližších hvězd.

Na stupnici vlnových délek v obr. 34.1 (a jí odpovídající stupnici frekvencí) reprezentuje každý dílek zvětšení, nebo zmenšení vlnové délky (resp. frekvence) desetkrát. Stupnice má otevřené konce: vlnové délky elektromagnetických vln nemají žádnou principiální spodní ani horní hranici.

Některé oblasti v elektromagnetickém spektru na obr. 34.1 jsou označeny známými názvy jako rentgenové záření nebo rádiové vlny. Tyto názvy označují zhruba definované oblasti vlnových délek, ve kterých se běžně užívají určité druhy zdrojů a detektorů elektromagnetických vln. Jiné oblasti na obr. 34.1, označené např. čísly televizních kanálů nebo AM (amplitudová modulace) u rozhlasu, reprezentují určitá pásma vlnových délek, určená pro specifické komerční a jiné účely. V elektromagnetickém spektru nejsou žádné mezery. A všechny elektromagnetické vlny, ať leží ve spektru kdekoli, se šíří vakuem stejnou rychlostí c.

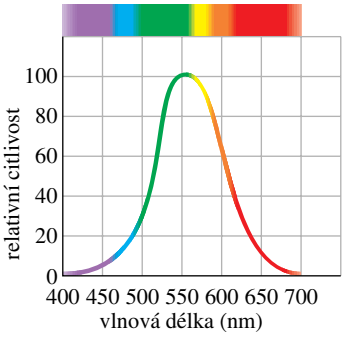
Viditelná část spektra je pro nás přirozeně zvláště zajímavá. Obr. 34.2 ukazuje relativní citlivost lidského oka ke světlu různých vlnových délek. Střed viditelné oblasti leží asi u 555 nm, kterou vnímáme jako barvu žlutozelenou.

Hranice viditelné oblasti nejsou dobře definovány, protože křivka citlivosti oka se asymptoticky blíží nule na



Obr. 34.1 Spektrum elektromagnetických vln

dlouhovlnné i krátkovlnné straně. Přijmeme-li za hranice ty vlnové délky, při nichž klesne citlivost na 1 % své maximální hodnoty, dostaneme interval asi 430 nm až 690 nm. Lidské oko ovšem může vnímat i vlnové délky za těmito hranicemi, pokud je intenzita světla dosti velká.



Obr. 34.2 Relativní citlivost oka k elektromagnetickým vlnám různých vlnových délek. Tato část spektra je tvořena *viditelným zářením*.

34.2 POSTUPNÁ ELEKTROMAGNETICKÁ VLNA (KVALITATIVNĚ)

Některé elektromagnetické vlny, včetně rentgenového záření (dříve nazývaného paprsky X), γ-záření a viditelného světla, jsou vyzařovány (emitovány) zdroji, které mají atomové nebo jaderné rozměry, kde platí zákony kvantové fyziky. Zde si probereme, jak jsou generovány jiné elektromagnetické vlny. Abychom problém zjednodušili, omezíme se na oblast spektra s vlnovými délkami kolem 1 m, kde zdroj záření (emitovaných vln) je makroskopický a má dobře ovladatelné rozměry.

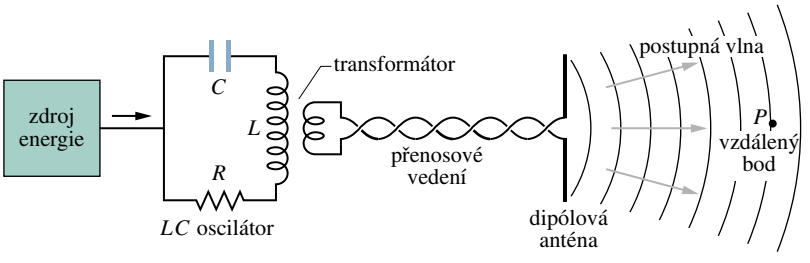
Obr. 34.3 ukazuje v hlavních rysech generaci takových vln. Nejpodstatnější částí je zde LC oscilátor, který má úhlovou frekvenci $\omega = 1/\sqrt{LC}$. S touto frekvencí se v tomto obvodu sinusově mění náboje a proudy, jak je znázorněno na obr. 33.1. K obvodu musí být připojen vnější zdroj, např. generátor střídavého napětí, aby dodával energii pro kompenzaci jednak tepelných ztrát v obvodu, jednak energie odnášené generovanými elektromagnetickými vlnami.

Oscilátor LC v obr. 34.3 je spojen pomocí transformátoru a přenosového vedení s anténou, která se v principu skládá ze dvou tenkých vodivých tyček. Díky tomuto zapojení způsobí sinusově se měnící proud oscilátoru v tyčkách antény sinusové kmity náboje s úhlovou frekvencí ω. Proud v tyčkách (vytvořený pohybem náboje) se mění též sinusově s touž úhlovou frekvencí ω. Anténa se chová jako elektrický dipól, jehož elektrický dipólový moment se mění co do velikosti sinusově a má směr podél antény.

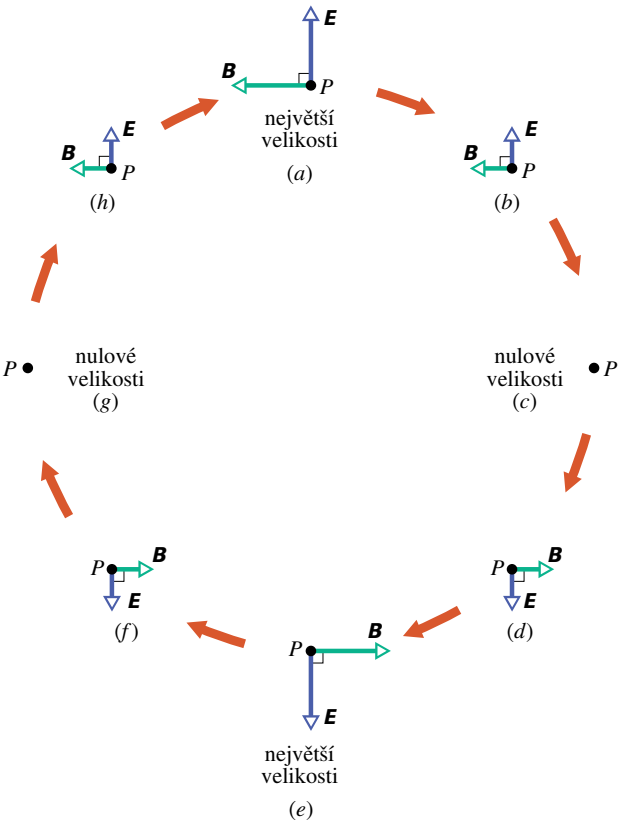
Protože se velikost i směr dipólového momentu mění, mění se tím i elektrické pole dipólem buzené. A protože se mění elektrický proud, mění se i velikost a směr magnetického pole. Elektrické a magnetické pole se ovšem nemění všude současně, ale šíří se od antény rychlostí světla c. Měnící se pole tvoří dohromady elektromagnetickou vlnu, která se šíří od antény rychlostí c. Její úhlová frekvence je táž jako frekvence oscilátoru, tj. ω.

Obr. 34.4 znázorňuje, jak se mění elektrické pole $\boldsymbol{E}$ a magnetické pole $\boldsymbol{B}$, když jeden celý kmit vlny projde vzdáleným bodem P z obr. 34.3. V každé části obr. 34.4 se vlna pohybuje kolmo ke stránce směrem k nám. (Zvolili jsme vzdálený bod, takže zakřivení vlnoploch ukázané na obr. 34.3 je natolik malé, že ho můžeme zanedbat. V takových bodech považujeme vlnu za rovinnou, čímž se diskuse značně zjednoduší.) Všimněme si na obr. 34.4 některých důležitých skutečností, které jsou vlastní každé elektromagnetické vlně.

1. Elektrické pole $\boldsymbol{E}$ i magnetické pole $\boldsymbol{B}$ je vždy kolmé na směr šíření vlny. Elektromagnetická vlna je tedy příčná (kap. 17).
2. Elektrické pole je vždy kolmé k magnetickému poli.
3. Vektorový součin $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ udává vždy směr šíření vlny.
4. Je-li vlna harmonická, mají pole $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$ stejnou frekvenci a jsou ve fázi.



Obr. 34.3 Zařízení pro generaci postupné elektromagnetické vlny v oblasti krátkých rádiových vln: LC oscilátor generuje proud sinusového průběhu v anténě, která vysílá vlnu. Ve vzdáleném bodě P může detektor registrovat procházející vlnu.



Obr. 34.4 (a)–(h) Změny elektrického pole $\boldsymbol{E}$ a magnetického pole $\boldsymbol{B}$ ve vzdáleném bodě P z obr. 34.3 během průchodu jedné vlnové délky. V tomto pohledu vlna vychází přímo ze stránky k nám. Obě pole se mění sinusově co do velikosti i směru a jsou stále kolmá navzájem i ke směru šíření vlny.

V souhlase s těmito vlastnostmi můžeme předpokládat, že elektromagnetická vlna na obr. 34.4 se šíří do bodu P ve směru kladné osy x. Elektrické pole kmitá rovnoběžně se směrem osy y, tj. $\boldsymbol{E} = (0, E, 0)$, a magnetické pole rovnoběžně s osou z, tj. $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$. Pak můžeme zapsat obě pole jako sinusové funkce polohy x a času t:

$$E = E_m \sin(kx - \omega t), \qquad (34.1)$$

$$B = B_m \sin(kx - \omega t), \qquad (34.2)$$

kde E_m a B_m jsou amplitudy polí, k a ω jsou — podobně jako v kap. 17 — úhlový vlnočet (v optice často zvaný vlnové číslo) a úhlová frekvence vlny. Všimněme si, že elektromagnetickou vlnu tvoří obě pole *dohromady*. Rov. (34.1) popisuje elektrickou složku elektromagnetické vlny a rov. (34.2) její magnetickou složku. Jak uvidíme dále, tyto složky nemohou existovat nezávisle.

Z rov. (17.12) víme, že rychlost vlny je ω/k. Ale protože se jedná o elektromagnetickou vlnu, značíme její rychlost (ve vakuu) c, nikoli v. V následujícím článku uvidíme, že c má hodnotu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad \text{(rychlost vln)}, \qquad (34.3)$$

což je asi $3{,}0 \cdot 10^8$ m·s^{-1}. Jinými slovy:

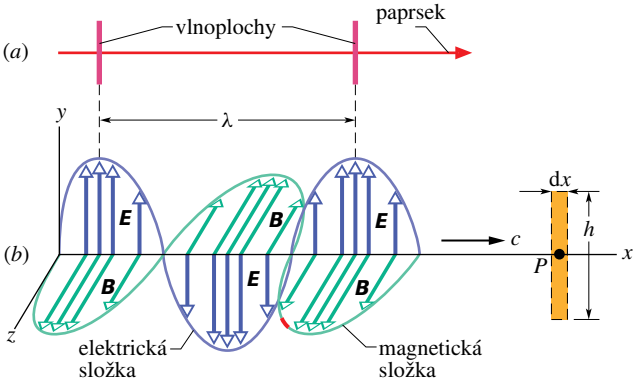
Všechny elektromagnetické vlny, včetně viditelného světla, mají ve vakuu tutéž rychlost c.

Uvidíme též, že rychlost vlny c a amplitudy elektrického a magnetického pole jsou spolu spojeny vztahem

$$\frac{E_m}{B_m} = c \quad \text{(poměr amplitud)}. \qquad (34.4)$$

Když rov. (34.1) vydělíme rov. (34.2) a pak dosadíme z rov. (34.4), zjistíme, že okamžité hodnoty obou polí jsou spojeny vztahem

$$\frac{E}{B} = c \quad \text{(poměr okamžitých hodnot)}. \qquad (34.5)$$



Obr. 34.5 (a) Elektromagnetická vlna reprezentovaná paprskem se dvěma čely vln (vlnoplochami) vzdálenými o vlnovou délku λ. (b) Tatáž vlna reprezentovaná „momentkou“ svého elektrického pole $\boldsymbol{E}$ a magnetického pole $\boldsymbol{B}$ v bodech na ose x, podél které se vlna šíří rychlostí c. Když prochází bodem P, pole se mění tak, jak je nakresleno na obr. 34.4. Elektrická složka vlny je tvořena pouze elektrickým polem, magnetická pouze polem magnetickým. Vyšrafovaný obdélníček u P je užit v obr. 34.6.

Elektromagnetickou vlnu můžeme znázornit tak, jak je to uděláno na obr. 34.5a: **paprskem** (čárou, jejíž směr ukazuje směr šíření) a **vlnoplochami — čely vlny** (myšlenými plochami, na kterých má vlna tutéž fázi). Dvě čela vlny se stejnou fází, znázorněná na obr. 34.5a, jsou od sebe vzdálena o jednu vlnovou délku $\lambda = 2\pi/k$ vlny. Vlny šířící se přibližně stejným směrem vytvářejí svazek, např. laserový svazek, který může být reprezentován paprskem.

Vlnu můžeme znázornit též tak, jak je to vidět na obr. 34.5b. Ten ukazuje vektory elektrického a magnetického pole jako „momentku“ v určitém časovém okamžiku. Křivka proložená koncovými body šipek znázorňuje sinusové oscilace dané rov. (34.1) a (34.2), složky vlny $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou ve fázi, jsou kolmé navzájem i ke směru šíření vlny.

Při interpretaci obr. 34.5b musíme být poněkud opatrní. Podobné kresby příčných vln na napjaté struně, které jsme diskutovali v kap. 17, znázorňovaly přemísťování částí struny nahoru a dolů při šíření vlny (něco se skutečně hýbalo). Smysl obr. 34.5b je abstraktnější. V určitém daném okamžiku má elektrické a magnetické pole podél osy x určitou velikost a směr (vždy kolmý k ose x). Protože jsme se rozhodli znázornit vektorové veličiny šipkami, musíme nakreslit šipky různé délky, všechny směřující od osy x, jako trny na stonku růže. Ale tyto šipky reprezentují hodnoty pole pro body, které jsou na ose x. Ani šipky, ani sinusové křivky neznamenají nějaký pohyb do strany a šipky nespojují body na ose s nějakými body mimo tuto osu.

Obr. 34.5 znázorňuje situaci, která je vlastně velmi složitá. Všimněme si nejprve magnetického pole. Protože se sinusově mění, indukuje k němu kolmé elektrické pole (elektromagnetická indukce), které se též mění sinusově. Ale protože se toto elektrické pole sinusově mění, indukuje k němu kolmé magnetické pole (magnetoelektrická indukce), a to se též mění sinusově. A tak dále. Tato dvě pole se neustále vytvářejí jedno z druhého díky indukci a výsledné sinusové změny těchto polí se šíří jako vlna — **elektromagnetická vlna**. Bez tohoto překvapujícího výsledku bychom nemohli nic vidět. A navíc, protože potřebujeme elektromagnetické vlny ze Slunce, aby udržovaly teplotu Země, nemohli bychom bez něho vůbec existovat.

Velmi podivná vlna

Vlny, o kterých jsme mluvili v kap. 17 a 18, vyžadovaly určité hmotné prostředí, kterým se mohly šířit. Byly to vlny šířící se na struně, procházející Zemí nebo vzduchem. Ale elektromagnetická vlna (říkejme světelná vlna nebo prostě světlo) se od nich podivně liší — nepotřebuje ke svému šíření žádné hmotné prostředí. Může se skutečně šířit např. vakuem mezi nějakou hvězdou a námi.

Jakmile byla obecně přijata speciální teorie relativity (dlouho poté, co ji Einstein v r. 1905 publikoval), bylo jasné, že rychlost šíření světla je něčím zcela zvláštním. Světlo má totiž stále tutéž rychlost nezávisle na souřadném systému, ve kterém ji měříme. Jestliže vyšlete světelný paprsek podél nějaké osy a požádáte několik pozorovatelů, kteří se pohybují podél této osy různými rychlostmi, ať už ve směru šíření paprsku nebo ve směru opačném, aby rychlost světla změřili, naměří všichni tutéž rychlost. Tento výsledek je překvapující a je to něco zcela jiného, než kdyby pozorovatelé měřili rychlost například zvuku: pro zvuk by rychlost, s níž se pozorovatelé pohybují, ovlivnila jejich měření (podle pravidla o skládání rychlostí).

Metr je nyní definován tak, že rychlost světla (a také kteréhokoli jiného elektromagnetického vlnění) ve vakuu je přesně

$$c = 299\,792\,458\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

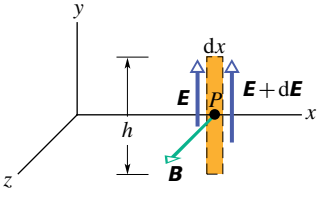
což je možno užít jako standard. (Dalo by se říci, že když nyní měříte dobu šíření světelného pulzu z jednoho bodu do druhého, neměříte vlastně rychlost světla, ale vzdálenost mezi těmito dvěma body.)

34.3 POSTUPNÁ ELEKTROMAGNETICKÁ VLNA (KVANTITATIVNĚ)

Nyní odvodíme rov. (34.3) a (34.4) a kromě toho — což je důležitější — vyšetříme, jak se navzájem indukují elektrické a magnetické pole v elektromagnetické vlně.

Rov. (34.4) a indukované elektrické pole

Čárkovaný obdélník o rozměrech dx a h na obr. 34.6 má střed v bodě P na ose x a leží v rovině xy (je patrný v pravé části obr. 34.5b). Když se elektromagnetická vlna šíří směrem doprava přes obdélník, magnetický tok Φ_B obdélníkem se mění a v důsledku elektromagnetické indukce se v oblasti obdélníka objeví indukované elektrické pole. Označme $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E} + \mathrm{d}\boldsymbol{E}$ intenzity indukovaného pole elektrického podél dvou delších stran obdélníka.



Obr. 34.6 Když elektromagnetická vlna prochází bodem P z obr. 34.5, pak sinusové změny magnetického pole $\boldsymbol{B}$, procházejícího obdélníčkem se středem v bodě P, indukují v obdélníčku elektrické pole. Ve znázorněném okamžiku se pole $\boldsymbol{B}$ zmenšuje a indukované elektrické pole je tedy větší na pravé straně obdélníčku než na straně levé.

Všimněme si okamžiku, kdy obdélníkem prochází magnetická složka vlny označená na obr. 34.5b červeně. Právě tehdy má magnetická indukce v obdélníku směr kladné osy z a zmenšuje se (než pole dosáhlo červenou oblast, bylo větší). Protože se magnetické pole zmenšuje,

zmenšuje se i magnetický tok Φ_B obdélníkem. Podle Faradayova zákona působí indukované elektrické pole proti změně toku Φ_B, a tedy musí být takové, aby vyvolávalo magnetické pole v kladném směru osy z. To znamená, že představíme-li si obvod obdélníka jako vodivou smyčku, musel by se v ní objevit proud s orientací proti směru otáčení hodinových ručiček. Žádná vodivá smyčka tam není, ale tato analýza ukazuje, že vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E} + \mathrm{d}\boldsymbol{E}$ indukovaného elektrického pole jsou skutečně orientovány tak, jak ukazuje obr. 34.6, přičemž velikost vektoru $\boldsymbol{E} + \mathrm{d}\boldsymbol{E}$ je větší než velikost vektoru $\boldsymbol{E}$. Jinak by indukované elektrické pole nepůsobilo ve směru obvodu čtyřúhelníka proti směru otáčení hodinových ručiček.

Použijme nyní Faradayova zákona elektromagnetické indukce (rov. (21.22)):

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}, \tag{34.6}$$

kde integrujeme proti směru otáčení hodinových ručiček kolem obdélníka na obr. 34.6. K integrálu nepřispívá horní ani dolní strana obdélníka, protože $\boldsymbol{E}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ jsou tam navzájem kolmé. Integrál má tedy hodnotu

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = (E + \mathrm{d}E)h - Eh = h\,\mathrm{d}E. \tag{34.7}$$

Tok Φ_B tímto obdélníkem je

$$\Phi_B = (B)(h\,\mathrm{d}x)\cos 0, \tag{34.8}$$

kde B popisuje magnetické pole uvnitř obdélníka a $h\,\mathrm{d}x$ je jeho obsah. Derivováním rov. (34.8) podle času dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = h\,\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}. \tag{34.9}$$

Dosadíme-li rov. (34.7) a (34.9) do rov. (34.6), dostaneme

$$h\,\mathrm{d}E = -h\,\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

neboli

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}. \tag{34.10}$$

Jak B, tak i E jsou ovšem funkcemi dvou proměnných, x a t, jak ukazují rov. (34.1) a (34.2). Při výpočtu $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ musíme předpokládat, že čas je konstantní, protože obr. 34.6 je „momentka“. Podobně při stanovení $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ musíme předpokládat, že x je konstantní, protože měříme rychlost časové změny B na určitém místě, totiž v bodě P z obr. 34.5b. Jde tedy o derivace parciální a rov. (34.10) přepíšeme

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{34.11}$$

Znaménko minus je v této rovnici správné a nezbytné, protože zatímco podél strany x v obdélníku, podél kterého v obr. 34.6 integrujeme, se E zvětšuje, B se s časem zmenšuje.

Z rov. (34.1) dostáváme

$$\frac{\partial E}{\partial x} = kE_\mathrm{m}\cos(kx - \omega t)$$

a z rov. (34.2)

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_\mathrm{m}\cos(kx - \omega t).$$

Rov. (34.11) pak dává

$$kE_\mathrm{m}\cos(kx - \omega t) = \omega B_\mathrm{m}\cos(kx - \omega t). \tag{34.12}$$

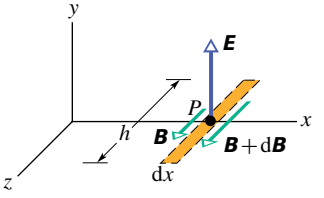
Poměr ω/k je rychlost postupné vlny; značíme ji c. Rov. (34.12) pak bude mít tvar

$$E_\mathrm{m}/B_\mathrm{m} = c \quad \text{(poměr amplitud)}, \tag{34.13}$$

což je rov. (34.4).

Rov. (34.3) a indukované magnetické pole

Obr. 34.7 ukazuje jiný vyšrafovaný obdélník se středem v bodě P z obr. 34.5; tentokrát leží v rovině xz. Když se elektromagnetická vlna šíří ve směru doprava přes tento obdélníček, mění se jím procházející elektrický tok Φ_E a v důsledku magnetoelektrické indukce se vytváří v oblasti obdélníka indukované magnetické pole.



Obr. 34.7 Sinusová změna elektrického pole procházejícího obdélníčkem se středem v bodě P (obr. 34.5) indukuje v obdélníčku (v tomto obrázku) magnetické pole. Znázorněný okamžik je tentýž jako v obr. 34.6: $\boldsymbol{E}$ se zmenšuje a indukované magnetické pole je proto větší na pravé straně než na straně levé.

Obr. 34.7 znázorňuje situaci ve stejném okamžiku jako obr. 34.6. Připomeňme si, že v tomto zvoleném okamžiku magnetické pole na obr. 34.6 klesá. Protože obě pole jsou ve fázi, elektrické pole na obr. 34.7, tedy i elektrický tok Φ_E se musí též zmenšovat. Na základě úvahy, které jsme použili pro obr. 34.6, zjistíme, že měnící se tok Φ_E bude indukovat magnetické pole s vektory magnetické indukce

$\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} + \mathrm{d}\boldsymbol{B}$ orientovanými tak, jak je ukázáno na obr. 34.7, přičemž $\boldsymbol{B} + \mathrm{d}\boldsymbol{B}$ je větší než $\boldsymbol{B}$.

Použijeme rov. (32.28) pro magnetoelektrickou indukci

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}, \qquad (34.14)$$

kde integrace probíhá proti směru otáčení hodinových ručiček kolem vyšrafovaného obdélníka z obr. 34.7. K hodnotě integrálu přispívají pouze dlouhé strany obdélníka; je tedy

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -(B + \mathrm{d}B)h + Bh = -h\,\mathrm{d}B. \qquad (34.15)$$

Tok Φ_E obdélníkem je

$$\Phi_E = (E)(h\,\mathrm{d}x)\cos 0, \qquad (34.16)$$

kde E popisuje elektrické pole uvnitř obdélníka. Derivováním rov. (34.16) podle t dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} = h\,\mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \qquad (34.17)$$

Dosadíme-li rov. (34.15) a (34.17) do rov. (34.14), získáme

$$-h\,\mathrm{d}B = \mu_0 \varepsilon_0 \left(h\,\mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right),$$

nebo, změníme-li zápis na parciální derivace, jako jsme to udělali v minulém případě (rov. (34.11)),

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \qquad (34.18)$$

Znaménko minus je zde opět nutné, protože zatímco B v bodě P na obr. 34.7 v závislosti na x roste, E s časem klesá.

Dosadíme-li rov. (34.1) a (34.2) do rov. (34.18), dostaneme

$$-k B_\mathrm{m} \cos(kx - \omega t) = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega E_\mathrm{m} \cos(kx - \omega t),$$

což můžeme psát jako

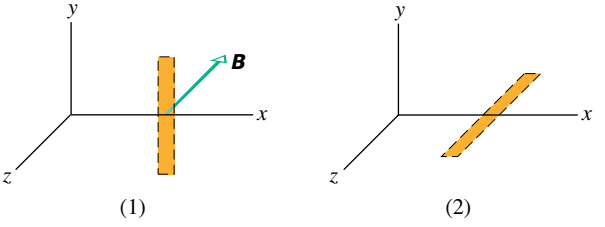
$$\frac{E_\mathrm{m}}{B_\mathrm{m}} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 (\omega/k)} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 c}. \qquad (34.19)$$

Kombinací rov. (34.13) a (34.19) dospějeme ke vztahu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad \text{(vlnová rychlost)}, \qquad (34.20)$$

což je přesně rov. (34.3).

KONTROLA 1: V části 1 obrázku je znázorněno magnetické pole s indukcí $\boldsymbol{B}$ procházející obdélníkem na obr. 34.6, ale v jiném časovém okamžiku. Vektor $\boldsymbol{B}$ leží v rovině xz, rovnoběžně s osou z a jeho velikost roste. (a) Doplňte část (1) nakreslením indukovaného elektrického pole, vyznačením směrů a relativních velikostí (podobně jako v obr. 34.6). (b) Pro tentýž okamžik doplňte část (2) obrázku nakreslením elektrického pole elektromagnetické vlny. Nakreslete i indukovaná magnetická pole s vyznačením jejich směru a relativní velikosti (jako v obr. 34.7).



34.4 PŘENOS ENERGIE A POYNTINGŮV VEKTOR

Všichni, kdo se sluní, vědí, že elektromagnetická vlna může přenášet energii a předávat ji tělesu, na které dopadá. Rychlost přenosu energie na jednotku plochy takovou vlnou je popsána vektorem $\boldsymbol{S}$, jenž se nazývá **Poyntingův vektor** podle Johna Henryho Poyntinga (1852–1914), který jako první diskutoval jeho vlastnosti.* Vektor $\boldsymbol{S}$ je definován jako

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \quad \text{(Poyntingův vektor)} \qquad (34.21)$$

a má v soustavě SI rozměr watt na čtverečný metr ($\mathrm{W/m^2}$).

Směr Poyntingova vektoru $\boldsymbol{S}$ elektromagnetické vlny udává v každém bodě směr přenosu energie. Ten v homogenním prostředí udává i směr šíření vlny.

Protože $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou v elektromagnetické vlně navzájem kolmé, je velikost $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ rovna EB. Velikost vektoru $\boldsymbol{S}$ pak je

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB, \qquad (34.22)$$

* Až do konce článku 34.4 a v Přehledu & shrnutí v odst. „Tok energie“ používáme symbolu $\boldsymbol{S}$, resp. S, $\overline{S}$ v tomto smyslu a nikoli, jako jinde, pro označení obsahu plochy.

kde S, E a B jsou okamžité hodnoty. Veličiny E a B jsou navzájem tak těsně spojeny, že stačí pracovat pouze s jednou z nich. Zvolíme E hlavně proto, že většina přístrojů na měření elektromagnetického pole pracuje spíše s elektrickou složkou vlny než s její složkou magnetickou. Užijeme tedy vztah $B = E/c$ z rov. (34.5) a přepíšeme rov. (34.22) jako

$$S = \frac{1}{c\mu_0}E^2 \quad \text{(okamžitý tok energie).} \qquad (34.23)$$

Dosadíme-li $E = E_m \sin(kx - \omega t)$ do rov. (34.23), dostaneme vztah pro přenos energie v závislosti na čase. Pro praxi je však užitečnější střední energie přenesená za určitou dobu. Musíme tedy najít časovou střední hodnotu S; značíme ji $\overline{S}$ a nazýváme též **intenzita** I **vlny**. Je tedy

$$I = \overline{S} = \frac{1}{c\mu_0}E_m^2\overline{\sin^2(kx - \omega t)}, \qquad (34.24)$$

kde pruhy nad jednotlivými výrazy znamenají jejich střední hodnotu. Střední hodnota $\sin^2\theta$ je rovna $1/2$ (obr. 33.14). Definujeme proto novou veličinu E_{ef} — efektivní hodnotu

$$E_{ef} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \qquad (34.25)$$

Rov. (34.24) pak můžeme přepsat jako

$$I = \frac{1}{c\mu_0}E_{ef}^2. \qquad (34.26)$$

Protože $E = cB$ a c je velmi velké číslo, zdálo by se, že energie spojená s elektrickým polem je mnohem větší než energie spojená s magnetickým polem. Tento závěr by však byl nesprávný: obě energie jsou přesně stejné. Abychom to dokázali, dosadíme do rov. (26.23), která určuje hustotu energie elektrického pole $w_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$, cB za E. Pak

$$w_{el} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 (cB)^2.$$

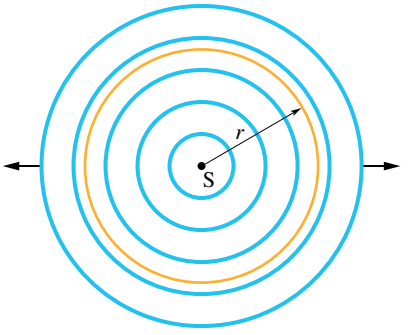
Jestliže nyní dosadíme za c z rov. (34.3), dostaneme

$$w_{el} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}B^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Ale rov. (31.56) nám říká, že $B^2/2\mu_0$ je *hustota energie* w_{mg} magnetického pole. Vidíme tedy, že $w_{el} = w_{mg}$.

Změna intenzity záření se vzdáleností

Intenzita elektromagnetického záření závisí na vzdálenosti od zdroje často velmi složitě — zejména když zdroj (jako např. reflektor na scéně) soustřeďuje záření do určitého směru. V některých případech však můžeme předpokládat, že zdroj je bodový a vyzařuje světlo izotropně, tj. vysílá stejnou intenzitu do všech směrů. Kulové vlnoplochy šířící se z takového izotropního bodového zdroje S jsou v určitém okamžiku v řezu zachyceny na obr. 34.8.



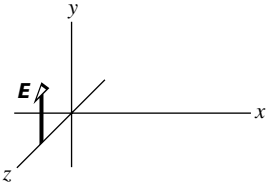
Obr. 34.8 Bodový zdroj S vysílá elektromagnetické vlny rovnoměrně do všech směrů. Kulové vlnoplochy procházejí myšlenou koulí o poloměru r se středem ve zdroji S.

Předpokládejme, že zdroj září stále stejně silně a že energie vln se během šíření zachovává. Sestrojme kouli se středem ve zdroji S a s poloměrem r, jako je na obr. 34.8. Všechna energie vysílaná zdrojem musí projít touto koulí. Energie prošlá za jednotku času povrchem této koule musí tedy být rovna energii vyslané za stejnou dobu zdrojem, tj. výkonu zdroje P_s. Intenzita na povrchu koule tedy musí být

$$I = \frac{P_s}{4\pi r^2}, \qquad (34.27)$$

kde $4\pi r^2$ je povrch koule. Rov. (34.27) nám říká, že intenzita elektromagnetického záření vysílaného izotropním bodovým zdrojem klesá s druhou mocninou vzdálenosti r od zdroje.

KONTROLA 2: Obrázek udává elektrické pole elektromagnetické vlny v určitém bodě a určitém okamžiku. Vlna přenáší energii ve směru záporné osy z. Jaký je směr magnetického pole vlny v tomtéž místě a okamžiku?



PŘÍKLAD 34.1

Pozorovatel je vzdálen 1,8 m od bodového zdroje světla s výkonem $P_s = 250$ W. Vypočtěte efektivní hodnoty elektrického a magnetického pole v místě pozorovatele.

ŘEŠENÍ: Zkombinujeme rov. (34.27) a (34.26), což nám dá

$$I = \frac{P_s}{4\pi r^2} = \frac{1}{c\mu_0} E_{ef}^2,$$

kde $4\pi r^2$ je povrch koule s poloměrem r a středem ve zdroji. Efektivní hodnota elektrického pole je

$$E_{ef} = \sqrt{\frac{P_s c\mu_0}{4\pi r^2}} = \sqrt{\frac{(250\,\mathrm{W})(3{,}00\cdot 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}})}{4\pi(1{,}8\,\mathrm{m})^2}} =$$
$$= 48{,}1\,\mathrm{V\cdot m^{-1}} \doteq 48\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Efektivní hodnota magnetického pole vyplývá z rov. (34.5) a je

$$B_{ef} = \frac{E_{ef}}{c} = \frac{(48{,}1\,\mathrm{V\cdot m^{-1}})}{(3{,}00\cdot 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})} = 1{,}6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že hodnota $E_{ef} = 48\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ je značná v porovnání s běžnými laboratorními podmínkami, zatímco $B_{ef} = 1{,}6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}$ je dosti malá. Tato okolnost nám pomůže vysvětlit, proč přístroje užívané pro detekci a měření elektromagnetických vln jsou většinou konstruovány tak, že reagují na elektrickou složku vlny. Bylo by ovšem chybou říci, že elektrická složka elektromagnetické vlny je „silnější" než magnetická. Nelze srovnávat veličiny, které se měří různými jednotkami. Jak jsme viděli, jsou si během šíření elektromagnetické vlny její elektrická a magnetická složka naprosto ekvivalentní a jejich energie, které mohou být srovnávány, jsou si přesně rovny.

34.5 TLAK ZÁŘENÍ

Elektromagnetické vlny mají hybnost i energii. To znamená, že mohou vykonávat tlak — *tlak záření* — na objekt, na který dopadají. Tento tlak bude ovšem velmi malý, protože např. necítíte, když vás ozáří záblesk používaný při fotografování.

Abychom našli výraz pro tento tlak, nechme dopadat svazek elektromagnetického záření — např. světla — na předmět po dobu Δt. Dále předpokládejme, že předmět se může volně pohybovat a že dopadající záření úplně *pohltí*. To znamená, že za dobu Δt získá předmět od záření energii ΔU. Maxwell ukázal, že předmět získá i hybnost. Velikost změny hybnosti Δp je se změnou energie svázána vztahem

$$\Delta p = \frac{\Delta U}{c} \qquad \text{(úplné pohlcení)}, \qquad (34.28)$$

kde c je rychlost světla. Směr změny hybnosti tělesa je dán směrem dopadajícího světla, které těleso pohltilo.

Záření ovšem může být tělesem i *odraženo*, tj. může být opět vysláno z předmětu v jiném směru. Pokud záření dopadlo kolmo a bylo úplně odraženo zpět, bude velikost změny hybnosti dvojnásobná než v minulém případě, tj.

$$\Delta p = \frac{2\Delta U}{c} \qquad \text{(úplný zpětný odraz)}. \qquad (34.29)$$

Podobně když se od rakety kolmo odrazí dokonale pružný tenisový míček, změní raketa svou hybnost dvakrát více, než kdyby na ni dopadla hrudka nepružné formely stejné hmotnosti a rychlosti. Jestliže dopadající záření je částečně pohlceno a částečně odraženo, leží změna hybnosti mezi $\Delta U/c$ a $2\Delta U/c$.

Z druhého Newtonova zákona víme, že změnu hybnosti dosáhneme působením síly o velikosti

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \qquad (34.30)$$

Abychom našli výraz pro sílu, kterou působí záření v závislosti na své intenzitě I, předpokládejme, že záření dopadá na plochu o obsahu S kolmo ke směru šíření záření. Během časového intervalu Δt bude energie přijatá touto plochou S rovna

$$\Delta U = IS\Delta t. \qquad (34.31)$$

Pokud je energie úplně pohlcena, pak rov. (34.28) nám řekne, že $\Delta p = IS\Delta t/c$, a podle rov. (34.30) je velikost síly působící na plochu S

$$F = \frac{IS}{c} \qquad \text{(úplné pohlcení)}. \qquad (34.32)$$

Podobně, jestliže je záření úplně odraženo přesně do opačného směru, je podle rov. (34.29), (34.30) a (34.31)

$$F = \frac{2IS}{c} \qquad \text{(úplný odraz do opačného směru)}. \qquad (34.33)$$

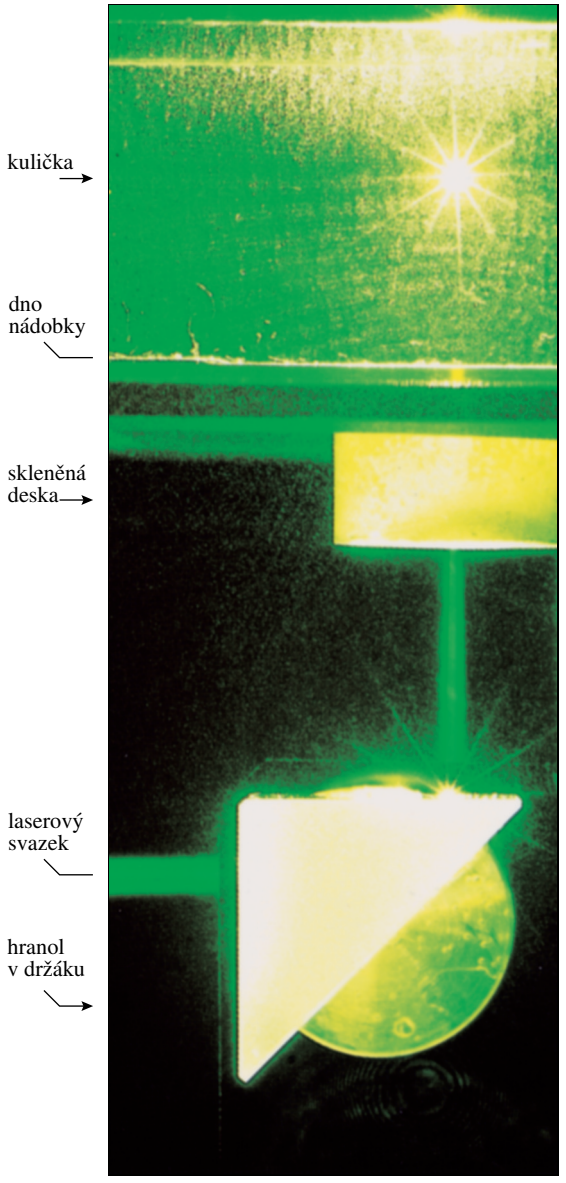
Pokud je záření pohlceno částečně, leží velikost síly, kterou působí záření na plochu o obsahu S, mezi IS/c a $2IS/c$.

Síla působící na jednotku plochy objektu, na který záření dopadá, je **tlak záření** neboli **radiační tlak** p_r. Vydělíme-li v rov. (34.32) a (34.33) obě strany obsahem S, dostaneme

$$p_r = \frac{I}{c} \qquad \text{(úplné pohlcení)} \qquad (34.34)$$

a

$$p_r = \frac{2I}{c} \qquad \text{(úplný odraz do opačného směru)}. \qquad (34.35)$$



Původně vodorovný paprsek zeleného světla laseru je pomocí hranolu nasměrován nahoru do evakuované průhledné nádobky na kuličku o průměru 20 μm. Kulička světlo rozptýlí; přitom vznikne hvězdicovitý obraz viditelný nahoře na fotografii. Než byl laser zapnut, byla kulička na dně nádobky. Tlak záření ji však zvedl asi o 1 cm.

Je třeba dát pozor a nezaměnit symboly p_r pro tlak záření a p pro hybnost.

Vývoj laserové technologie dovolil dosáhnout tlaky záření mnohem větší než např. ty dosažitelné fotografickým bleskem. To souvisí s možností soustředit svazek laserového světla — na rozdíl od světla z vlákna žárovky — na velmi malou plošku s průměrem pouze několika vlnových délek. To pak umožňuje předání velmi velké energie malým objektům, na které světlo dopadne. Ostře fokusované paprsky lze dokonce použít jako „*laserovou pinzetu*“.

KONTROLA 3: Světlo s rovnoměrně rozloženou intenzitou svítí kolmo na úplně pohlcující povrch. Když se plocha tohoto povrchu zmenší, bude (a) tlak záření, (b) radiační síla působící na povrch větší, menší, nebo stejná?

PŘÍKLAD 34.2

Prach uvolněný z komety nepokračuje po její dráze, protože ho sluneční záření odpuzuje radiálně od Slunce. Předpokládejme, že částice prachu je kulová o poloměru R, má hustotu $\varrho = 3{,}5{\cdot}10^3\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a pohlcuje úplně světlo, které na ni dopadá. Pro jaký poloměr R právě vyváží gravitační síla F_g, kterou působí na částici Slunce, radiační sílu F_r slunečního záření?

ŘEŠENÍ: Z rov. (34.27) plyne, že intenzita slunečního světla, dopadajícího na prachovou částici (nebo cokoli jiného) ve vzdálenosti r od Slunce, je rovna

$$I = \frac{P_S}{4\pi r^2}, \tag{34.36}$$

kde $4\pi r^2$ je povrch koule o poloměru r vystavený slunečnímu záření a $P_S = 3{,}9{\cdot}10^{26}$ W je střední výkon vyzařovaný Sluncem. Z rov. (34.32) máme

$$F_r = \frac{IS}{c} = \frac{I\pi R^2}{c}, \tag{34.37}$$

kde plocha S, která pohlcuje sluneční záření, je průřez koule o obsahu πR^2 (tedy nikoli polovina jejího povrchu). Dosazením rov. (34.36) do (34.37) dostaneme

$$F_r = \frac{P_S R^2}{4cr^2}. \tag{34.38}$$

Rov. (14.1) udává velikost gravitační síly F_g působící na částici

$$F_g = \frac{GM_S m}{r^2} = \frac{4GM_S\varrho\pi R^3}{3r^2}, \tag{34.39}$$

kde $M_S = 1{,}99{\cdot}10^{30}$ kg je hmotnost Slunce. Hmotnost částice m jsme vyjádřili jako $\varrho\frac{4}{3}\pi R^3$. Položíme-li $F_r = F_g$, najdeme R:

$$R = \frac{3P_S}{16\pi c\varrho GM_S}.$$

Jmenovatel je

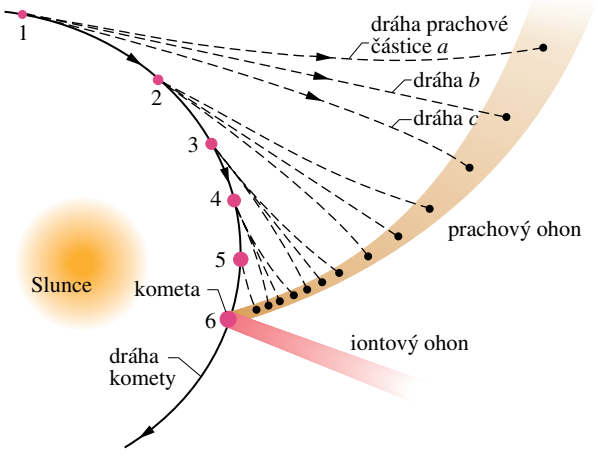
$$16\,\pi(3{\cdot}10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(3{,}5{\cdot}10^3\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}})\cdot$$
$$\cdot(6{,}67{\cdot}10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}})(1{,}99{\cdot}10^{30}\ \mathrm{kg}) =$$
$$= 7{,}0{\cdot}10^{33}\ \mathrm{N{\cdot}s^{-1}}.$$

Pak dostaneme

$$R = \frac{3(3{,}9{\cdot}10^{26}\ \mathrm{W})}{(7{,}0{\cdot}10^{33}\ \mathrm{N{\cdot}s^{-1}})} = 1{,}7{\cdot}10^{-7}\ \mathrm{m}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že výsledek je nezávislý na vzdálenosti částice od Slunce.

Prachové částice s poloměrem $R \doteq 1{,}7\cdot10^{-7}$ m se pohybují přibližně po přímce *b* na obr. 34.9. Srovnání rov. (34.38) a (34.39) ukazuje, že pro větší hodnoty *R* převažuje gravitační síla nad tlakem záření, protože F_g roste s R^3, zatímco F_r jen s R^2. Částice tedy sledují dráhu, která je zakřivena směrem ke Slunci jako dráha označená *c* na obr. 34.9. Podobně pro menší hodnoty *R* převažuje účinek tlaku záření a dráha je zakřivena směrem od Slunce jako dráha *a* na obrázku. Složením těchto drah vzniká chvost komety.

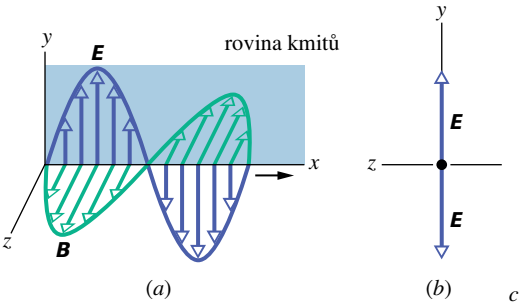


Obr. 34.9 Příklad 34.2. Kometa je v poloze 6. Prach, který ji opustil v pěti předchozích pozicích, byl odpuzován tlakem slunečního záření, sledoval čárkované trajektorie a vytvořil zakřivený prachový ohon komety.

34.6 POLARIZACE

Televizní antény pro velmi vysoké frekvence (velmi krátké vlny VKV, angl. very high frequency VHF) jsou v Anglii orientovány svisle, v USA vodorovně. Rozdíl je dán směrem kmitů elektromagnetických vln, které nesou TV signál. V Anglii je vysílací zařízení uzpůsobeno tak, že vysílá vlny **polarizované** svisle, a že tedy jejich elektrická složka kmitá svisle. Televizní anténa proto musí být také orientována svisle, aby podél ní vznikal při dopadu televizní vlny proud. V USA jsou vlny polarizovány vodorovně.

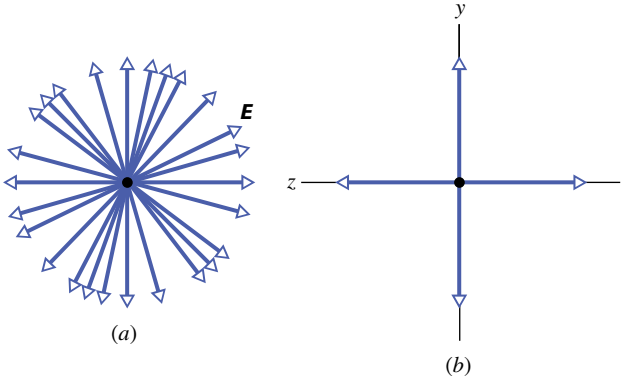
Obr. 34.10a ukazuje elektromagnetickou vlnu, jejíž elektrická složka kmitá rovnoběžně se svislou osou *y*. Rovina, v níž kmitá vektor elektrické intenzity ***E***, se nazývá **rovina kmitů** (říkáme, že vlna je lineárně polarizovaná ve směru *y*). Polarizaci můžeme ukázat, když znázorníme elektrické oscilace v „čelním“ pohledu, jako je to na obr. 34.10b.



Obr. 34.10 (a) Rovina kmitů polarizované elektromagnetické vlny. (b) Lepší znázornění polarizace dává pohled „zepředu“ s vyznačením amplitudy elektrického pole.

Polarizované světlo

Elektromagnetické vlny vysílané televizní stanicí mají všechny tutéž polarizaci, ale elektromagnetické vlny vysílané běžným zdrojem světla (jako je Slunce nebo žárovka) jsou polarizovány náhodně neboli **nepolarizovány**. To znamená, že elektrické pole je v libovolném místě vždy kolmé ke směru šíření vlny, ale mění nahodile svůj směr. Kdybychom nyní znázornili čelní pohled na oscilace během nějaké doby, nedostali bychom tak jednoduchý obrázek jako na obr. 34.10b, ale něco podobného obr. 34.11a.



Obr. 34.11 (a) Nepolarizované světlo se skládá z vln s náhodnými směry vektorů elektrické intenzity. Vlny se šíří tímtéž směrem, zde k nám, a mají tutéž amplitudu *E*. (b) Jiný způsob reprezentace nepolarizovaného světla: světlo je superpozicí dvou polarizovaných vln, jejichž směry polarizace jsou k sobě kolmé.

V principu můžeme zjednodušit tento složitý obrázek tím, že každý vektor ***E*** na obr. 34.11a rozložíme na složky *y* a *z* a potom najdeme výsledné složky podél obou os zvlášť, jak to vidíme na obr. 34.11b. Tak vlastně schematicky zaměníme nepolarizované světlo za superpozici dvou polarizovaných vln, jejichž roviny kmitů jsou navzájem kolmé. Výsledek je na obr. 34.11b (dvě šipky na každé ose), což

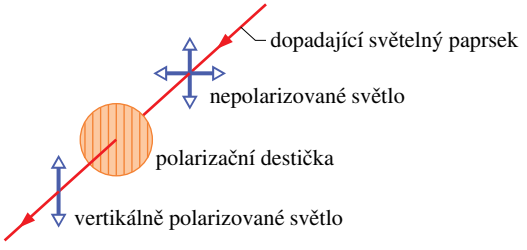
je zjednodušené znázornění nepolarizovaného světla. Podobně můžeme znázornit světlo, které je **částečně polarizované** (oscilace nejsou co do směrů ani úplně nahodilé jako na obr. 34.11a, ani nejsou rovnoběžné s jednou osou jako na obr. 34.10b). V tom případě je pak jedna šipka (dvojice šipek) delší než druhá.

Nepolarizované světlo můžeme polarizovat např. průchodem vhodnými krystaly nebo speciálním polarizátorem (polarizační destičkou), jak je to ukázáno na obr. 34.12. Takové polarizátory, komerčně nazývané **polaroidy** neboli **polarizační filtry**, vynalezl v r. 1932 Edwin Land, když byl ještě studentem. Skládají se z určitých dlouhých molekul rozptýlených v umělé hmotě. Když se vrstva vyrábí, natáhne se a tím se molekuly uspořádají do rovnoběžných řad jako řádky na zoraném poli. Když světlo prochází destičkou, elektrická složka s jedním směrem prochází vrstvou, zatímco složka kolmá k tomuto směru je pohlcena molekulami a zanikne.

Nebudeme se zabývat těmito molekulami, ale připíšeme destičce *směr polarizace*, podél kterého bude procházet složka intenzity elektrického pole:

Složka intenzity elektrického pole rovnoběžná se směrem polarizace prochází polarizační destičkou, složka k ní kolmá je pohlcena.

A tak světlo vycházející z destičky bude mít pouze složku rovnoběžnou se směrem polarizace destičky, bude tedy v tomto směru polarizováno. V obr. 34.12 destička propouští svislé složky, složky vodorovné pohlcuje. Vystupující světlo je tedy polarizováno svisle.



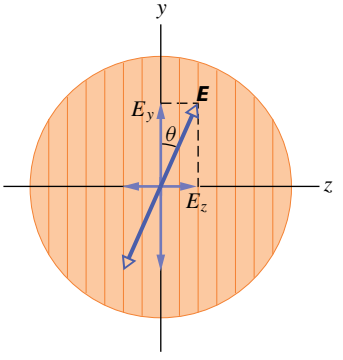
Obr. 34.12 Nepolarizované světlo se polarizuje, když prochází polarizační destičkou. Směr jeho polarizace je pak rovnoběžný se směrem polarizace destičky, která je zde naznačena svislými čárami na destičce.

Všimneme si nyní intenzity prošlého světla. Začneme u světla nepolarizovaného. Kmity jeho elektrického pole rozdělíme na složku y a z podle obr. 34.11b tak, že osa y je rovnoběžná se směrem polarizace destičky. Pak jen složky y projdou destičkou, složky z jsou pohlceny. Jak je patrno z obr. 34.11b, je při chaotické orientaci příspěvek složek y i z stejný. Když je složka y pohlcena, ztrácí se polovina intenzity I_0 původního světla. Intenzita I vystupujícího polarizovaného světla je tedy

$$I = \tfrac{1}{2} I_0. \tag{34.40}$$

Nazvěme to **pravidlem jedné poloviny**. Můžeme ho užít jen tehdy, když je dopadající světlo nepolarizované.

Předpokládejme nyní, že světlo dopadající na polarizační destičku je již polarizované (obr. 34.13 ukazuje polarizační destičku ležící v rovině stránky), a uvažujme elektrické pole vlny polarizovaného světla. Jeho intenzitu $\boldsymbol{E}$



Obr. 34.13 Polarizované světlo dopadající na polarizační destičku. Elektrické pole $\boldsymbol{E}$ světla můžeme rozložit do dvou složek E_y (rovnoběžné se směrem polarizace destičky) a E_z (kolmé k tomuto směru). Složka E_y projde destičkou, složka E_z bude absorbována.

můžeme rozložit na dvě složky vzhledem ke směru polarizace: rovnoběžná složka E_y destičkou projde a kolmá E_z bude pohlcena. Když označíme θ úhel mezi $\boldsymbol{E}$ a směrem polarizace, bude prošlá složka

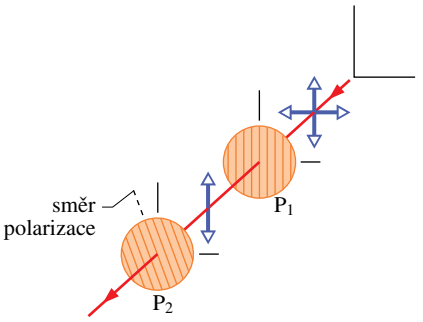
$$E_y = E \cos\theta. \tag{34.41}$$

Připomeňme, že intenzita elektromagnetické vlny (tedy i světelné vlny) je úměrná dvojmoci amplitudy elektrické složky (rov. (34.26)). V našem případě je tedy intenzita vycházející vlny úměrná E_y^2 a intenzita I_0 původní dopadající vlny je úměrná E^2. Podle rov. (34.41) tedy můžeme psát $I/I_0 = \cos^2\theta$ neboli

$$I = I_0 \cos^2\theta. \tag{34.42}$$

Nazvěme to **pravidlem kosinu na druhou**. Toto pravidlo můžeme užít pouze tehdy, je-li světlo dopadající na polarizační destičku již polarizováno. Intenzita I prošlého světla je maximální a rovná intenzitě I_0 dopadajícího světla, když směr polarizace dopadající vlny je rovnoběžný se

směrem polarizace destičky (tj. když θ v rov. (34.42) je 0° nebo 180°). Intenzita I je rovna nule, když dopadající vlna je polarizována kolmo k rovině polarizace destičky (tj. když $\theta = \pm 90°$).

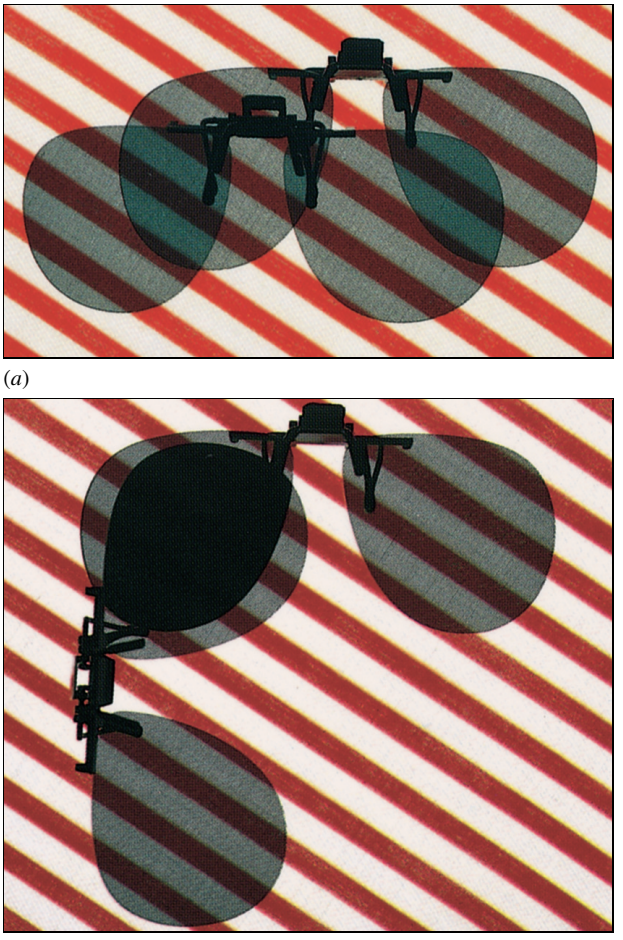


Obr. 34.14 Světlo prošlé polarizační destičkou P_1 je svisle (vertikálně) polarizováno, jak je naznačeno svislou šipkou. Kolik z tohoto světla projde polarizační destičkou P_2, bude záležet na úhlu mezi směrem polarizace světla a směrem polarizace P_2 (znázorněným čárkovanou čárou).

Obr. 34.14 ukazuje uspořádání, v němž původně nepolarizované světlo prochází dvěma polarizačními destičkami P_1 a P_2. (První destičku často označujeme jako *polarizátor* a druhou jako *analyzátor*.) Protože směr polarizace P_1 je svislý, je světlo procházející od P_1 k P_2 polarizováno ve svislém směru. Pokud je směr polarizace P_2 též svislý, pak všechno světlo prošlé P_1 projde i P_2. Pokud je směr polarizace P_2 vodorovný, neprojde jím žádné světlo, které prošlo P_1. Ke stejnému výsledku dojdeme, když budeme uvažovat pouze vzájemnou orientaci obou destiček: jsou-li směry jejich polarizace rovnoběžné, projde světlo prošlé první z nich i druhou. Jestliže jsou jejich směry polarizace kolmé (říkáme, že polarizátory jsou *zkřížené*), pak druhou destičkou neprojde žádné světlo. Oba extrémy jsou zobrazeny na obr. 34.15 pomocí slunečních brýlí. Je-li úhel mezi oběma směry polarizace mezi 0° a 90°, pak část světla prošlého destičkou P_1 projde i P_2. Intenzita tohoto světla bude dána rov. (34.42).

Polarizaci ovlivňuje též rozptyl na atomech nebo molekulách. Při rozptylu je světlo pohlcené určitým objektem, např. molekulou, vysíláno zpět mnoha směry, většinou náhodnými. Příkladem je rozptyl slunečního světla molekulami v atmosféře, který je odpovědný za to, že obloha září.

Ačkoli přímé sluneční světlo je nepolarizované, světlo z oblohy je většinou částečně polarizované díky rozptylu. Včely využívají polarizace světla oblohy pro navigaci svého létání z úlu a zpět. Podobně Vikingové ho užívali k navigaci při svých cestách Severním mořem, když Slunce bylo pod horizontem (vzhledem k vysoké hodnotě severní šířky). Tito dávní mořeplavci objevili některé krystaly (nyní



(*a*)

(*b*)

Obr. 34.15 Polarizační sluneční brýle jsou opatřeny vrstvami, jejichž směry polarizace jsou svislé, když jsou brýle na očích. (a) Brýle umístěné za sebou propouštějí světlo dosti dobře, když jejich směry polarizace souhlasí, ale (b) zadržují většinu světla, když jsou zkřížené.

nazývané kordierity), které měnily svou barvu, když se otáčely v polarizovaném světle. Když se námořníci dívali na oblohu skrze takový krystal a otáčeli jím kolem směru pozorování, mohli zaměřit směr ke Slunci a tak zjistit, kde je jih.

Anizotropie

Světlo může být polarizováno i jinými prostředky než polarizačními destičkami, např. odrazem (diskutovaným v čl. 34.9) nebo lomem, případně průchodem anizotropními krystaly, vykazujícími **dvojlom**. Anizotropii můžeme přiblížit takto:

V obyčejném, izotropním prostředí se šíří kterýmkoli směrem světlo stejně rychle a s libovolnou polarizací. Formálně to lze popsat tak, že v každém směru paprsku se

mohou šířit dvě vlny, každá polarizovaná, přičemž roviny polarizace jsou na sebe kolmé. Mají-li obě vlny stejnou rychlost, pak se mohou skládat a jejich složením může vzniknout vlna, šířící se v tomtéž směru a mající libovolnou rovinu polarizace.

Jestliže však jsou obě povolené rychlosti světla v daném směru v krystalu různé, mají obě vlny při téže frekvenci různou vlnovou délku a již je nelze prostě sečíst a dostat vlnu s libovolnou rovinou polarizace. V takovém směru se tedy šíří dvě vlny téže frekvence (barvy světla), ale s různými rychlostmi a tedy s různými vlnovými délkami; každá z nich je polarizovaná a roviny polarizací jsou k sobě kolmé. Lze odvodit a je také známo z praxe, že existují dva typy krystalů:

Jednoosý krystal povoluje v každém směru jeden paprsek (tzv. *řádný*) s rychlostí nezávislou na směru a druhý paprsek (*mimořádný*) mající obecně rychlost menší (krystal opticky *pozitivní*) nebo naopak větší (krystal opticky *negativní*) než paprsek řádný. V jediném směru, zvaném **optická osa** krystalu, mají oba paprsky stejnou rychlost a tímto jediným směrem se tedy může krystalem šířit i nepolarizované světlo. Ve všech ostatních směrech se původně nepolarizovaný paprsek rozštěpí na dva různě rychlé paprsky polarizované v rovinách na sebe kolmých.

Dvouosý krystal se chová podobně, ale oba paprsky jsou „mimořádné“ v tom smyslu, že rychlost obou závisí na směru šíření v krystalu. Takový krystal má dvě optické osy, v nichž jsou rychlosti obou paprsků stejné.

Mimořádný paprsek je zajímavý tím, že směr přenosu energie není kolmý, ale šikmý vůči vlnoploše. Rojnice vojáků postupující přímo dopředu představuje čelo vlnoplochy v izotropním prostředí. Směr pohybu vojáků odpovídá směru přenosu energie (paprsek) a zde splývá s normálou k vlnoploše (rojnici). Postupují-li však vojáci úkroky *šikmo* vpřed, představují vlnu v anizotropním prostředí. Mimořádný paprsek, tj. směr pohybu jednotlivého vojáka a také směr přenosu energie vlny, nesouhlasí s normálou, tj. kolmicí k rojnici (řekněme — s pohybem hranice území obsazeného vojáky).

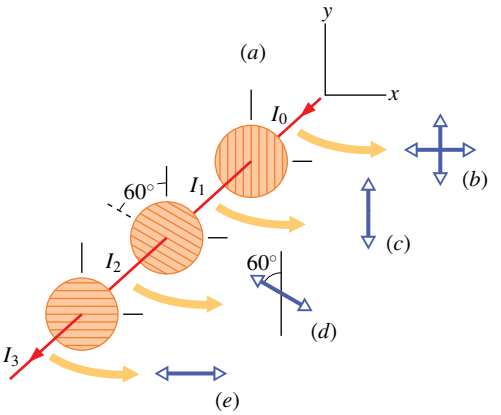
PŘÍKLAD 34.3

Obr. 34.16a ukazuje systém tří polarizačních destiček postavených do cesty paprsku původně nepolarizovaného světla. Směr polarizace první z nich je rovnoběžný s osou y, směr druhé je natočen o 60° proti směru otáčení hodinových ručiček a směr třetí je rovnoběžný s osou x. Jaká část světla s původní intenzitou I_0 vystoupí ze systému a jak bude toto světlo polarizováno?

ŘEŠENÍ: Budeme řešit problém v postupných krocích, po jednotlivých destičkách. Původní vlna je znázorněna na obr. 34.16b s užitím dvojitých šipek podobně jako na obr. 34.11b. Protože světlo původně není polarizováno, je intenzita světla I_1 prošlého první destičkou dána pravidlem jedné poloviny (rov. (34.40))

$$I_1 = \tfrac{1}{2} I_0.$$

Polarizace tohoto prošlého světla je (jako vždy) rovnoběžná se směrem polarizace destičky, tj. rovnoběžná s osou y, jak je to naznačeno na čelním pohledu v obr. 34.16c.



Obr. 34.16 Příklad 34.3. (a) Původně nepolarizované světlo s intenzitou I_0 přichází (shora) do systému se třemi polarizačními destičkami. Jsou naznačeny intenzity světla I_1, I_2 a I_3 prošlého jednotlivými destičkami. Směry polarizace jsou ukázány i v pohledu zepředu pro světlo původní (b), světlo prošlé první destičkou (c), druhou destičkou (d) a třetí destičkou (e).

Protože světlo dopadající na druhou destičku je polarizované, intenzita světla I_2 prošlého touto destičkou je dána pravidlem kosinu na druhou (rov. (34.42)). Úhel θ je zde úhel mezi směrem polarizace vstupujícího světla (rovnoběžně s osou y) a směrem polarizace druhé destičky (60° proti směru otáčení hodinových ručiček od osy y), což je 60°. Je tedy

$$I_2 = I_1 \cos^2 60°.$$

Polarizace tohoto prošlého světla je rovnoběžná se směrem polarizace destičky, tj. je 60° proti směru otáčení hodinových ručiček od osy y, jak ukazuje čelní pohled na obr. 34.16d.

Protože toto světlo je polarizované, intenzita I_3 světla prošlého třetí destičkou je opět dána pravidlem kosinu na druhou. Úhel θ je nyní úhel mezi směrem polarizace vystupujícího světla (obr. 34.16d) a směrem polarizace třetí destičky, který je rovnoběžný s osou x, takže $\theta = 30°$ a pak platí

$$I_3 = I_2 \cos^2 30°.$$

Toto celkově prošlé světlo je polarizováno rovnoběžně s osou x (obr. 34.16e). Intenzitu nalezneme, když do této

rovnice postupně dosadíme za I_2 a I_1:

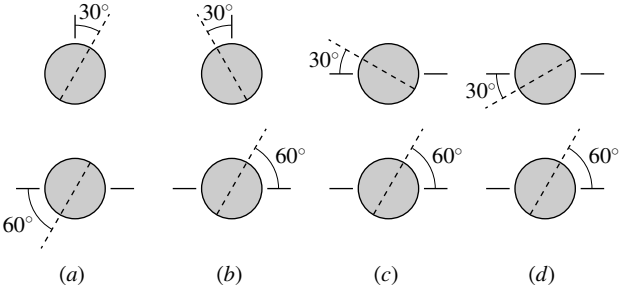
$$I_3 = I_2 \cos^2 30^\circ = (I_1 \cos^2 60^\circ) \cos^2 30^\circ = \\ = (\tfrac{1}{2} I_0) \cos^2 60^\circ \cos^2 30^\circ = 0{,}094 I_0.$$

Je tedy

$$\frac{I_3}{I_0} = 0{,}094. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z tohoto systému se třemi polarizačními destičkami tedy vychází pouze 9,4 % původní energie. (Jaká část energie by vycházela, kdybychom vyjmuli druhou destičku?)

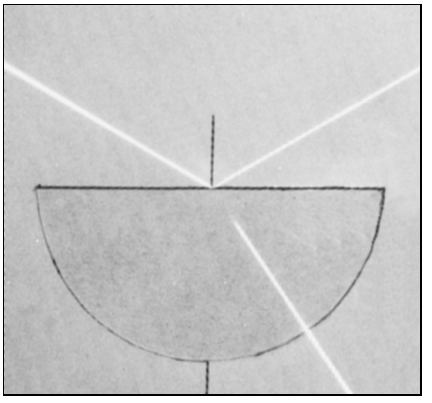
KONTROLA 4: Obrázek ukazuje čtyři páry polarizačních destiček v čelním pohledu. Každý pár je umístěn do dráhy paprsku původně nepolarizovaného světla (jako tři destičky na obr. 34.16a). Směr polarizace destiček (naznačený čárkovanou čárou) je vztažen buď k vodorovné ose x, nebo svislé ose y. Seřaďte páry sestupně podle intenzity prošlého světla.

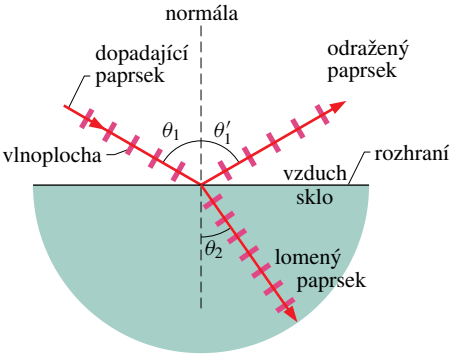


34.7 ODRAZ A LOM

Ačkoli se světelná vlna rozptyluje, když se vzdaluje od zdroje, můžeme často aproximovat její dráhu jako přímku. Udělali jsme to tak v obr. 34.5a. Studium vlastností světelných vln za této aproximace se nazývá **geometrická optika**. Ve zbytku této kapitoly a v celé kap. 35 se budeme zabývat geometrickou optikou viditelného světla.

Černobílá fotografie na obr. 34.17a ukazuje příklad světelných vln šířících se přibližně po přímkách. Úzký svazek světla dopadající šikmo dolů zleva a procházející vzduchem dopadá na rovinný skleněný povrch. Část tohoto světla se **odrazí** od povrchu a vytvoří svazek směřující vpravo nahoru, jako by odskočil od povrchu. Zbytek světla projde povrchem do skla a vytvoří svazek směřující napravo dolů. Protože světlo může takto sklem procházet, říkáme, že sklo je *průhledné* — to znamená, že skrz ně


(a)



(b)

Obr. 34.17 (a) Černobílá fotografie ukazující odraz a lom světelného paprsku dopadajícího na vodorovný povrch skla. (Část lomeného světla není na fotografii dobře zachycena.) Na dolním rozhraní, které je zakřivené, je paprsek kolmý k povrchu, takže se tam nelomí. (b) Znázornění (a) s užitím nakreslených paprsků. Jsou vyznačeny úhly dopadu θ_1, odrazu θ_1' a lomu θ_2.

vidíme. V této kapitole se budeme zabývat pouze průhlednými materiály.

Průchod světla skrz povrch (průchod rozhraním), který rozděluje dvě prostředí, nazýváme **lom** neboli **refrakce** a o světle říkáme, že se lomí (láme). Pokud směr dopadajícího svazku není k povrchu kolmý, vede lom ke změně směru šíření světla. Světlo tedy lomem mění svůj směr. Všimněte si na obr. 34.17a, že změna směru proběhne pouze na rozhraní, uvnitř skla se světlo šíří opět přímočaře.

Na obr. 34.17b jsou paprsky světla reprezentovány paprskem *dopadajícím*, *odraženým* a *lomeným*. Každý z těchto paprsků má určitý směr vzhledem ke směru normály, tj. kolmice k povrchu v místě dopadu paprsku. Na obr. 34.17b je **úhel dopadu** θ_1, **úhel odrazu** θ_1' a **úhel lomu** θ_2. Všechny se měří vzhledem k normále. Rovinu, ve které leží dopadající paprsek a normála, nazýváme *rovina dopadu*. Na obr. 34.17b je to rovina papíru.



Tajné letadlo F-117A je prakticky neviditelné pro radar, protože je opatřeno panely, které jsou nasměrovány tak, že odrážejí radarové signály nahoru a dolů, nikoli do směru radarové stanice.

Experiment ukazuje, že odraz a lom se řídí dvěma zákony:

Zákon odrazu: Odražený paprsek leží v rovině dopadu a úhel odrazu se rovná úhlu dopadu. V obr. 34.17b to znamená

$$\theta_1' = \theta_1 \quad \text{(odraz)}. \tag{34.43}$$

(Proto budeme dále čárku u úhlu odrazu vynechávat).

Zákon lomu: Lomený paprsek leží v rovině dopadu a úhel lomu je spojen s úhlem dopadu vztahem

$$n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1 \quad \text{(lom)}. \tag{34.44}$$

Zde symboly n_1 a n_2 jsou bezrozměrové veličiny nazývané **index lomu**. Charakterizují prostředí, v němž k lomu dochází. Tento vztah, nazývaný **Snellovým zákonem**, odvodíme v kap. 36. Jak tam uvidíme, index lomu určitého prostředí je roven c/v, kde c je rychlost světla ve vakuu a v jeho rychlost v daném prostředí.

Tab. 34.1 uvádí indexy lomu některých běžných látek. Pro vakuum je n definitoricky přesně rovno 1. Pro vzduch je n velmi blízké 1 (tuto aproximaci budeme často používat).

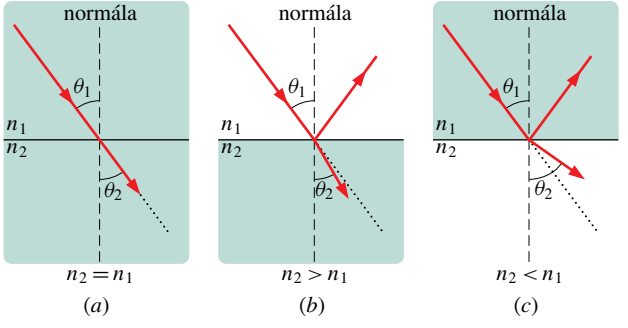
Upravíme rov. (34.44) na

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1, \tag{34.45}$$

abychom porovnali úhel lomu s úhlem dopadu. Vidíme, že hodnota θ_2 závisí na podílu hodnot n_1 a n_2. Mohou nastat tři základní situace:

1. Pokud je n_2 rovno n_1, pak je θ_2 rovno θ_1. V tomto případě k lomu ani odrazu nedochází, světlo pokračuje v původním směru jako na obr. 34.18a.
2. Je-li n_2 větší než n_1, je θ_2 menší než θ_1. V tomto případě se paprsek odchyluje směrem k normále jako na obr. 34.18b.
3. Je-li n_2 menší než n_1, pak je θ_2 větší než θ_1 a lomený paprsek se odchyluje směrem od normály jako na obr. 34.18c.

Lom nemůže odchýlit lomený paprsek natolik, aby byl na téže straně normály jako paprsek dopadající.



Obr. 34.18 Světlo lámající se z prostředí s indexem lomu n_1 do prostředí s indexem lomu n_2. (a) Paprsek se neláme (ani neodráží), když $n_1 = n_2$. „Lomené" světlo se šíří v *nezměněném směru* (tečkovaná čára). (b) Paprsek se lomí směrem k normále, když $n_1 < n_2$, a (c) od normály, když $n_1 > n_2$.

Tabulka 34.1 **Některé indexy lomu pro vlnovou délku 589 nm (žluté sodíkové světlo)**

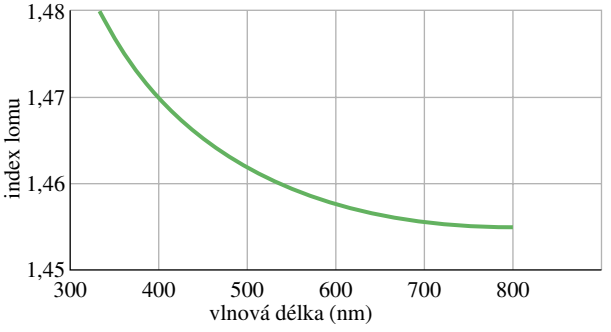
LÁTKA	INDEX	LÁTKA	INDEX
vakuum	přesně 1	typické sklo	1,52
vzduch[a]	1,000 29	chlorid sodný	1,54
voda (20 °C)	1,33	polystyren	1,55
aceton	1,36	sirouhlík	1,63
ethylalkohol	1,36	těžké flintové sklo	1,65
roztok cukru (30 %)	1,38	safír	1,77
tavený křemen	1,46	nejtěžší flintové sklo	1,89
roztok cukru (80 %)	1,49	diamant	2,42

[a] za standardních podmínek

Chromatická disperze

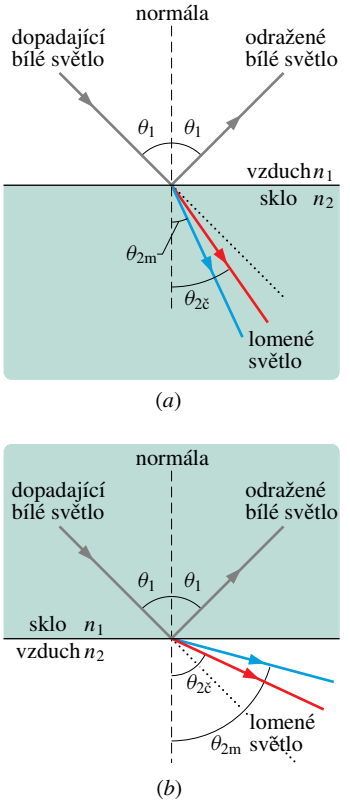
Index lomu libovolného hmotného prostředí (tedy nikoli vakua) závisí na vlnové délce světla. Z toho vyplývá, že když se svazek skládá z vln různých vlnových délek, lomí se na rozhraní pod různými úhly. Světlo se tedy lomem rozloží. Tento jev se nazývá **(chromatická) disperze**, přičemž výraz „chromatická“ zdůrazňuje rozklad světla podle jeho vlnové délky, tedy barvy (řec. chróma = barva). Lom na obr. 34.17 a 34.18 neukazuje chromatickou disperzi, světelné paprsky jsou tam *monochromatické* (tj. mají jednu určitou vlnovou délku či barvu).

Obecně je index lomu prostředí větší pro kratší vlnové délky (odpovídající, řekněme, modré barvě světla) než pro delší vlnové délky (odpovídající červené). Jako příklad je na obr. 34.19 ukázána závislost indexu lomu na vlnové délce pro tavený křemen. Z této závislosti plyne, že ve svazku obsahujícím obě vlnové délky se při lomu na rozhraní mezi vzduchem a křemenem odchýlí modrá složka (paprsek tvořený vlnou modrého světla) více než červená. (Jestliže pro konkrétní látku v konkrétní oblasti vlnových délek se naopak vlny s kratší vlnovou délkou odchýlí méně než vlny s delší vlnovou délkou, hovoříme o anomální disperzi.)



Obr. 34.19 Index lomu taveného křemene jako funkce vlnové délky. Z grafu je vidět, že paprsek světla s krátkou vlnovou délkou, pro kterou je index lomu vyšší, se láme více, když vstupuje do křemene (nebo z něj vystupuje), než paprsek s delší vlnovou délkou.

Svazek *bílého světla* se skládá ze všech (nebo téměř ze všech) barev viditelného spektra s přibližně stejnou intenzitou. Když takový svazek vidíme, vnímáme bílou barvu, nikoli jednotlivé barvy. V obr. 34.20a dopadá svazek bílého světla na povrch skla. (Protože stránky této knihy jsou bílé, je svazek bílého světla reprezentován šedou barvou. Svazek monochromatického světla obyčejně znázorňujeme červenou barvou). Z lomeného světla na obr. 34.20a jsou znázorněny pouze složky červená a modrá. Protože modrá složka se odchyluje více než červená, je úhel lomu modré θ_{2m} menší než úhel lomu červené $\theta_{2č}$. (Vzpomeňme si, že úhly se měří od normály.) Na obr. 34.20b dopadá svazek bílého světla na rozhraní sklo-vzduch. Modrá složka se opět vychyluje více než červená, protože $\theta_{2m} > \theta_{2č}$.

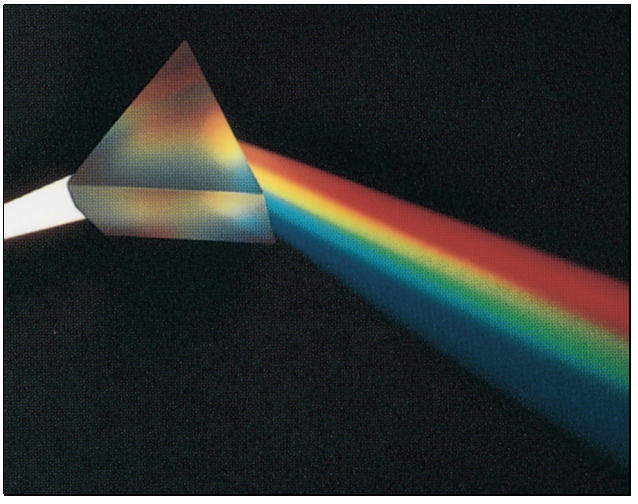


Obr. 34.20 Chromatická disperze bílého světla. Modrá složka je odchylována více než červená. (a) Při průchodu světla ze vzduchu do skla se modrá složka šíří ve směru blíže ke kolmici než červená, (b) při průchodu světla ze skla do vzduchu se modrá složka láme více od kolmice.

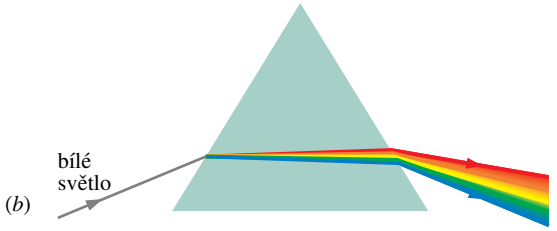
Abychom oddělení složek zvýraznili, můžeme užít skleněný trojboký hranol jako na obr. 34.21a. Disperze na prvním rozhraní (na obr. 34.21a, b vlevo) je zvýrazněna lomem a další disperzí na druhém rozhraní.

Nejpůvabnějším příkladem chromatické disperze je *duha*. Když bílé sluneční světlo dopadá na padající dešťovou kapku, část světla se lomí do kapky, odrazí se od vnitřního povrchu kapky a pak se lomí ven z kapky (obr. 34.22). Jako v případě hranolu i zde rozloží první lom světlo na barevné složky a druhý lom toto rozdělení zvětší.

Duha, kterou vidíme, je tvořena světlem lomeným ve velkém počtu kapek: červená barva pochází z kapek, které jsou poněkud výše na obloze, modrá z kapek, které jsou níže, a barvy mezi nimi od kapek ve středních polohách. Všechny kapky vysílající různé barvy jsou asi 42° od směru daného bodem, který je právě na opačné straně než Slunce z vašeho pohledu. Pokud je déšť rozsáhlý a světlo intenzívní, uvidíte celý oblouk s červenou barvou vně a modrou uvnitř. Vaše duha je pouze vaše, protože jiný pozorovatel vidí světlo pocházející z jiných kapek.



(*a*)

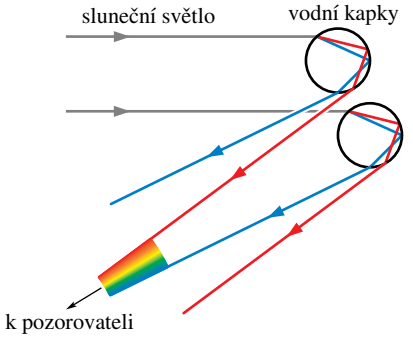


(*b*)

Obr. 34.21 (a) Trojboký hranol rozkládající světlo na barevné složky. (b) Chromatická disperze probíhá na prvním rozhraní a zesiluje se na druhém.



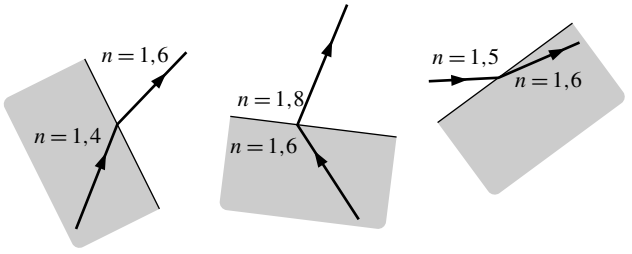
(*a*)



(*b*)

Obr. 34.22 (a) Duha je vždy kruhový oblouk, který má střed ve směru, ve kterém byste se dívali směrem přímo od Slunce. Za normálních podmínek se vám může poštěstit, že uvidíte dlouhý oblouk, ale pokud se díváte ze zvýšeného stanoviště, můžete skutečně vidět celý kruh. (b) Rozklad slunečního světla na jednotlivé barvy, když se světlo láme při vstupu a výstupu z kapek vody, vede ke vzniku duhy. Obrázek ukazuje situaci, kdy sluneční světlo přichází vodorovným směrem. Jsou vyznačeny průběhy červeného a modrého paprsku pro dvě kapky. I mnohé další kapky přispívají k červenému a modrému paprsku i paprskům dalších barev viditelného spektra.

KONTROLA 5: Který z následujících obrázků (pokud vůbec některý) ukazuje fyzikálně možný lom?



(*a*) (*b*) (*c*)

PŘÍKLAD 34.4

Plavec ponořený pod hladinou hledí z bazénu přímo nahoru skrze rozhraní voda-vzduch.

(a) V jakém rozsahu úhlů vidí plavec zdroje světla nad vodou? Předpokládejme, že světlo je monochromatické a index lomu vody je 1,33.

ŘEŠENÍ: Světlo z vnějších zdrojů dopadá do očí plavce poté, co se lomilo na rozhraní vzduch-voda v souhlase

s rov. (34.44). Zaveďme do této rovnice index 1 pro vzduch a index 2 pro vodu. Potom máme pro $n_1 = 1{,}00$ a $n_2 = 1{,}33$; $n_2 > n_1$. To znamená, že lom paprsků při průchodu rozhraním vzduch-voda probíhá směrem k normále, jako v obr. 34.18b. Lom obecného paprsku s úhlem dopadu θ_1 a úhlem lomu θ_2 je ukázán na obr. 34.23a. Oči plavce jsou umístěny do bodu E. Všimněte si, že lomený paprsek svírá se svislicí v bodě E úhel θ_2.

Z rov. (34.44) víme, že úhel lomu θ_2 je s úhlem dopadu θ_1 spojen vztahem

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1. \qquad (34.46)$$

Abychom tedy našli úhly, pod kterými paprsky z vnějších zdrojů dosáhnou bod E, musíme najít příslušný rozsah úhlů θ_1. To nám pak dá rozmezí úhlů θ_2.

Nejmenší hodnota θ_1 je $0°$, což je hodnota pro paprsek dopadající na rozhraní kolmo. Pro ni dá rov. (34.46) hodnotu

$$\sin\theta_2 = \frac{1{,}00}{1{,}33}\sin 0° = 0,$$

tj.

$$\theta_2 = 0°.$$

Dopadající paprsek A na obr. 34.23b ukazuje tuto situaci: dopadající paprsek se neodchyluje, dosáhne bodu E po svislé přímce.

Maximální hodnota θ_1 je přibližně $90°$, tj. hodnota pro světlo, které dopadá téměř rovnoběžně s rozhraním. Rovnice (34.46) dává

$$\sin\theta_2 = \frac{1{,}00}{1{,}33}\sin 90° = 0{,}752,$$

tj.

$$\theta_2 = 48{,}8°.$$

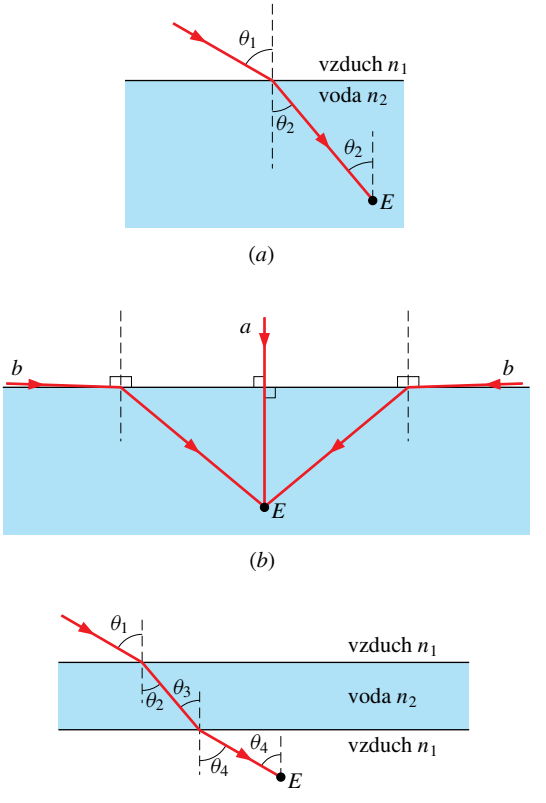
V obr. 34.23b ukazují tuto situaci dva dopadající paprsky b, které dopadají na povrch pod maximálním úhlem ($90°$), ale když dospějí k plavci, svírají se svislicí úhel $48{,}8°$.

Obr. 34.23b ukazuje situaci pouze v jedné rovině. Když budeme otáčet tuto rovinu kolem svislice, vytvoříme celý prostor, který plavec uvidí. A tak všechny lomené paprsky dosahující k plavci od vnějších zdrojů tvoří kužel s vrcholem v E, který protíná rovinu rozhraní voda-vzduch v kruhu přesně nad E. Jeho vrcholový úhel je

$$2\theta_2 = 97{,}6° \doteq 100°. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Zorné pole vnějšího světa je pro plavce vymezeno kružnicí nad jeho hlavou, která tvoří jakési jeho vlastní okno.

(b) Plavec bude mít nyní na očích plaveckou masku. Tenká rovinná destička z průhledného plastického materiálu, skrz kterou plavec hledí, je vodorovná, vnitřek masky je vyplněn vzduchem. V jakém rozsahu úhlů uvidí plavec zdroje nacházející se vně vody? (Zanedbáme lom na čelní plastické destičce; kdybychom ho uvažovali, neměnilo by to výsledek).



Obr. 34.23 Příklad 34.4. (a) Paprsek světla lomící se do vody dopadá do oka plavce v bodě E. Úhel paprsku v E se měří vzhledem k vertikále. (b) Paprsek a kolmý k rozhraní vzduch-voda a paprsek b, téměř rovnoběžný s tímto rozhraním, dopadají do bodu E. (c) Oko plavce je nyní ve vzduchu, který je uvnitř masky z průhledného materiálu. Paprsek dopadající do E se v tomto případě láme na dvou rozhraních vzduch-voda.

ŘEŠENÍ: Abychom našli odpověď, vyšetříme lom libovolného paprsku podle obr. 34.23c. Jako dříve se paprsek lomí na rozhraní vzduchu a vody, ale nyní se musí lomit ještě jednou z vody do vzduchu v masce, aby dosáhl bodu E. Nechť je úhel dopadu při druhém lomu θ_3 a úhel lomu θ_4. Položíme úhel, pod kterým paprsek dopadá do E, rovný θ_4.

Protože obě rozhraní vzduch-voda na obr. 34.23c jsou rovnoběžná, je $\theta_3 = \theta_2$. Podle rov. (34.44) je úhel lomu θ_4 dán vztahem

$$\sin\theta_4 = \frac{n_2}{n_1}\sin\theta_3.$$

Dosazením θ_2 za θ_3 a $\sin\theta_2$ z rov. (34.46) dostaneme

$$\sin\theta_4 = \frac{n_2}{n_1}\sin\theta_2 = \frac{n_2 n_1}{n_1 n_2}\sin\theta_1 = \sin\theta_1,$$

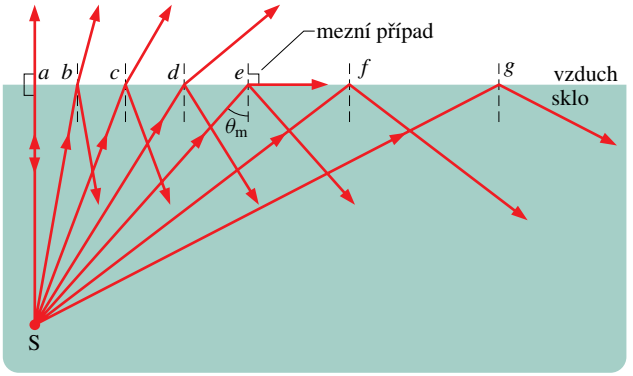
tj.

$$\theta_4 = \theta_1.$$

Vyjádřeno slovy, libovolný paprsek z obr. 34.12c dopadající do bodu E se šíří rovnoběžně s původním směrem. To platí pro všechny paprsky dopadající do E z vnějších zdrojů. Rozsah těchto paprsků sahá od 90° na jedné straně až do 90° na druhé straně. To znamená, že s maskou vidí plavec vnější svět tak, jako by tam voda nebyla, tedy ne „stlačený“ do kužele s vrcholovým úhlem 100°.

34.8 ÚPLNÝ ODRAZ

Obr. 34.24 ukazuje paprsky monochromatického světla z bodového zdroje S uvnitř skla, které dopadají na rozhraní mezi sklem a vzduchem. Paprsek a, který je kolmý k rozhraní, se na rozhraní částečně odrazí, částečně projde, aniž by změnil svůj směr.



Obr. 34.24 Úplný (totální) vnitřní odraz světla z bodového zdroje S umístěného ve skle nastává při všech úhlech dopadu větších než mezní úhel θ_m. Při mezním úhlu se lomené světlo šíří podél rozhraní vzduch-sklo.

Pro paprsky od b do e, které mají postupně větší úhly dopadu, nastává též odraz a lom na rozhraní. Když roste úhel dopadu, roste i úhel lomu. Pro paprsek e je tento úhel roven 90°, to znamená, že se lomený paprsek šíří těsně podél povrchu. Úhel dopadu, který vede k této situaci, nazýváme **mezní úhel** θ_m. Pro úhly větší než je tento úhel, jako jsou na obrázku paprsky f a g, nedojde k lomu vůbec a všechno světlo se odrazí zpět. Mluvíme o **úplném odrazu** neboli o **totální reflexi**.

Abychom našli θ_m, užijeme rov. (34.44). Index 1 přiřadíme sklu, index 2 vzduchu a dosadíme θ_m za θ_1 a 90° za θ_2:

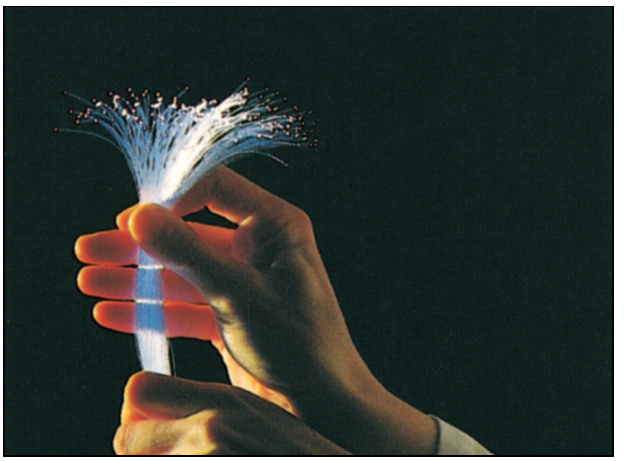
$$n_1 \sin\theta_m = n_2 \sin 90°,$$

což dává

$$\theta_m = \arcsin\frac{n_2}{n_1} \quad \text{(mezní úhel)}. \qquad (34.47)$$

Protože sinus nemůže být větší než jedna, nemůže n_2 být v této rovnici větší než n_1. To znamená, že úplný odraz nemůže nastat, když je zdroj světla v prostředí s nižším indexem lomu. Kdyby zdroj S v obr. 34.24 byl ve vzduchu, všechny paprsky dopadající na rozhraní vzduch-sklo (včetně f a g) by se na rozhraní odrážely i lomily.

Úplný odraz nalezl mnoho aplikací v lékařské technologii. Např. lékař může hledat vřed v žaludku pacienta tak, že zavede do jeho žaludku dva svazky tenkých optických vláken (obr. 34.25). Světlo, které vchází do konce jednoho svazku, je podrobeno mnohonásobnému úplnému odrazu uvnitř vláken. Ačkoli je tedy svazek vláken různě prohnutý, světlo osvítí vnitřek žaludku. Část světla odraženého vnikne do druhého svazku vláken a vyjde ven, kde vytvoří obraz na monitoru, který lékař pozoruje.



Obr. 34.25 Světlo, které vstoupilo do jednoho konce optického vlákna, prochází na jeho druhý konec s malými ztrátami na stěnách vlákna, protože většina světla se na těchto stěnách opakovaně úplně odráží.

PŘÍKLAD 34.5

Na obr. 34.26 je trojboký skleněný hranol ve vzduchu. Paprsek dopadající kolmo na jeho jednu stěnu se úplně odráží na následujícím rozhraní sklo-vzduch. Co můžeme říci o indexu lomu skla n, je-li úhel θ_1 roven 45°?

ŘEŠENÍ: Užijeme rov. (34.47) a položíme index lomu vzduchu n_2 rovný jedné. Za n_1 dosadíme index lomu skla n. Najdeme mezní úhel

$$\theta_m = \arcsin\frac{n_2}{n_1} = \arcsin\frac{1}{n}.$$

Protože nastává úplný odraz, musí být θ_m menší než θ_1, které je 45°. Tedy

$$\arcsin\frac{1}{n} < 45°,$$

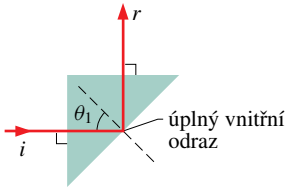
což dává

$$\frac{1}{n} < \sin 45^\circ$$

neboli

$$n > \frac{1}{\sin 45^\circ} = 1{,}4. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Index lomu skla musí být větší než 1,4, jinak úplný odraz pro naznačený paprsek nenastane.



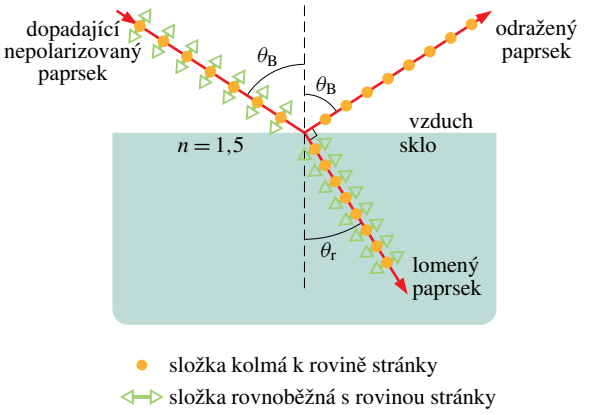
Obr. 34.26 Příklad 34.5. Dopadající paprsek i se úplně odráží na rozhraní sklo-vzduch, stává se z něj odražený paprsek r.

KONTROLA 6: Předpokládejme, že hranol v př. 34.5 má index lomu $n = 1{,}4$. Dojde k úplnému odrazu, jestliže dopadající paprsek ponecháme vodorovný, ale pootočíme hranolem z obr. 34.26 (a) o 10° ve směru otáčení hodinových ručiček, (b) o 10° proti směru otáčení hodinových ručiček?

34.9 POLARIZACE ODRAZEM

Intenzitu slunečního světla, které pozorujeme po odraze např. na vodě, můžeme zvětšovat nebo zmenšovat, když se díváme skrz polarizační destičku (jako třeba polarizujícími slunečními brýlemi) a otáčíme s ní kolem osy pozorování. Odražené světlo je totiž plně nebo částečně polarizováno díky odrazu na povrchu.

Na obr. 34.27 je znázorněn paprsek nepolarizovaného světla dopadajícího na povrch skla. Rozložme vektor intenzity elektrického pole světelných vln do dvou složek. Jako kolmé složky označíme ty, které jsou kolmé k rovině dopadu a tedy i k rovině papíru na obr. 34.27. Na obrázku jsou označeny tečkami (jakoby špičkami vektorů). Jako rovnoběžné označíme ty složky, které jsou rovnoběžné s rovinou dopadu, tj. s rovinou stránky v knize. Na obrázku jsou vyznačeny jako dvojité šipky. Protože jde o světlo nepolarizované, jsou obě složky stejně intenzívní.



Obr. 34.27 Paprsek nepolarizovaného světla dopadá ze vzduchu na povrch skla pod Brewsterovým úhlem θ_B. Vektory intenzity elektrického pole jsou rozloženy na složky kolmé ke stránce (rovině dopadu) a rovnoběžné s ní. Odražené světlo se skládá pouze ze složek kolmých ke stránce, tj. je polarizováno v tomto směru. Lomené světlo je tvořeno původními složkami rovnoběžnými se stránkou a slabšími složkami kolmými ke stránce. Toto světlo je tedy částečně polarizováno.

Odražené světlo má obecně také obě tyto složky, ale s různou intenzitou. To znamená, že odražené světlo je částečně polarizováno — intenzita elektrického pole kmitající v jednom směru má větší amplitudu než intenzita v jiném směru. Když však světlo dopadá pod určitým úhlem, nazývaným **Brewsterův úhel** θ_B, má odražené světlo pouze kolmou složku, jak je to naznačeno na obr. 34.27. Odražené světlo je pak úplně polarizováno ve směru kolmém k rovině dopadu. Rovnoběžná složka dopadajícího světla nezmizí, ale podílí se spolu s kolmou na obou složkách lomeného světla.

Sklo, voda a další dielektrické materiály, které jsme diskutovali v čl. 26.7, mohou při odrazu plně nebo částečně polarizovat světlo. Když vnímáme světlo odražené od takového povrchu, vidíme jasnou skvrnu na povrchu, kde dochází k odrazu. Jestliže je plocha vodorovná jako na obr. 34.27, je odražené světlo polarizováno vodorovně (úplně nebo částečně). Aby nás takové vodorovné plochy neoslňovaly, mají skla polarizačních brýlí svislou polarizaci.

Brewsterův zákon

Pokusem lze ověřit, že pro světlo dopadající pod Brewsterovým úhlem jsou odražený a lomený paprsek navzájem kolmé. Protože odražený paprsek je odražen pod úhlem θ_B (obr. 34.27) a lomený paprsek má úhel θ_r, vidíme, že

$$\theta_B + \theta_r = 90^\circ.$$

Mezi těmito dvěma úhly ale existuje i vztah (34.44).

Označme indexem 1 v rov. (34.44) materiál, kterým prochází dopadající a odražený paprsek. Dostáváme

$$n_1 \sin\theta_B = n_2 \sin\theta_r.$$

Kombinace rovnic vede ke vztahu

$$n_1 \sin\theta_B = n_2 \sin(90^\circ - \theta_B) = n_2 \cos\theta_B,$$

což dává

$$\theta_B = \operatorname{arctg}\frac{n_2}{n_1} \quad \text{(Brewsterův úhel).} \qquad (34.48)$$

(Všimněte si, že indexy 1, 2 v rov. (34.48) nejsou libovolné, protože o jejich významu jsme rozhodli již předem). Pokud se dopadající a odražený paprsek šíří vzduchem, můžeme n_1 aproximovat jedničkou a místo n_2 psát pouze n. Rov. (34.48) má pak tvar

$$\theta_B = \operatorname{arctg} n \quad \text{(Brewsterův zákon).} \qquad (34.49)$$

Tato zjednodušená forma rov. (34.48) se nazývá **Brewsterův zákon**. Úhel i zákon jsou pojmenovány po siru Davidu Brewsterovi, který je zjistil experimentálně v roce 1812.

PŘÍKLAD 34.6

Chceme použít skleněnou destičku s indexem lomu $n = 1{,}57$ k polarizaci světla ve vzduchu.

(a) Při kterém úhlu dopadu bude odražené světlo úplně polarizováno?

ŘEŠENÍ: Protože sklo je ve vzduchu, užijeme rov. (34.49), abychom našli Brewsterův úhel:

$$\theta_B = \operatorname{arctg} n = \operatorname{arctg} 1{,}57 = 57{,}5^\circ. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaký bude odpovídající úhel lomu?

ŘEŠENÍ: Protože $\theta_B + \theta_r = 90^\circ$, máme

$$\theta_r = 90^\circ - \theta_B = 90^\circ - 57{,}5^\circ = 32{,}5^\circ. \quad \text{(Odpověď)}$$

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Elektromagnetické vlny

Oscilace elektrického a magnetického pole ve tvaru postupné vlny nazýváme elektromagnetickou vlnou. Všechny možné frekvence elektromagnetických vln tvoří spektrum. V něm jen úzká část přísluší viditelnému světlu. Elektromagnetická vlna šířící se ve směru osy x má elektrickou intenzitu $\boldsymbol{E} = (0, E, 0)$ a magnetickou indukci $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$. Obě pole jsou k sobě kolmá a jejich hodnoty závisejí na x a t:

$$E = E_m \sin(kx - \omega t), \qquad (34.1)$$

$$B = B_m \sin(kx - \omega t), \qquad (34.2)$$

kde E_m a B_m jsou amplitudy E a B. Elektrické pole je indukováno polem magnetickým a naopak. Rychlost elektromagnetických vln ve vakuu značíme c a platí

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}, \qquad (34.3)$$

$$c = \frac{E}{B}, \qquad (34.5)$$

kde E a B jsou okamžité hodnoty obou polí.

Tok energie

Množství energie přenesené elektromagnetickou vlnou za jednotku času jednotkovou plochou je dáno Poyntingovým vektorem $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}. \qquad (34.21)$$

Směr vektoru $\boldsymbol{S}$ (a tedy i směr šíření vlny a přenosu energie) je kolmý k rovině určené vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$. Střední hodnotu energie $\overline{S}$ prošlé jednotkovou plochou za jednotku času nazýváme *intenzita* I. Je rovna

$$I = \frac{1}{c\mu_0} E_{ef}^2, \qquad (34.26)$$

kde $E_{ef} = E_m/\sqrt{2}$. Bodový zdroj elektromagnetických vln vysílá vlny izotropně, tj. se stejnou intenzitou do všech směrů. Intenzita vln ve vzdálenosti r od bodového zdroje s výkonem P_s je

$$I = \frac{P_s}{4\pi r^2}. \qquad (34.27)$$

Tlak záření

Když dopadá elektromagnetické záření na nějaký povrch, působí na něj tlakem a výslednou silou. Pokud je záření zcela pohlceno, je velikost působící síly rovna

$$F = \frac{IS}{c} \quad \text{(úplné pohlcení),} \qquad (34.32)$$

kde I je intenzita záření a S je obsah plochy kolmé ke směru záření. Pokud je záření úplně odraženo, je velikost síly (v případě kolmého dopadu) rovna

$$F = \frac{2IS}{c} \quad \text{(úplný kolmý odraz).} \qquad (34.33)$$

Tlak záření p_r (radiační tlak) je síla na jednotku plochy:

$$p_r = \frac{I}{c} \quad \text{(úplné pohlcení)} \tag{34.34}$$

a

$$p_r = \frac{2I}{c} \quad \text{(úplný kolmý odraz).} \tag{34.35}$$

Polarizace

Elektromagnetická vlna je polarizována, pokud její vektor $\boldsymbol{E}$ stále kmitá v jedné rovině — v rovině kmitů. Světelné vlny z běžných zdrojů nejsou polarizovány, jsou nepolarizované: jejich polarizace se mění náhodně a rychleji, než můžeme sledovat.

Polarizační destičky

Když do dráhy světla umístíme polarizační destičku, projde jí pouze světlo polarizované rovnoběžně s jejím směrem polarizace. Složky kolmé ke směru polarizace jsou pohlceny. Světlo pak vychází z destičky s polarizací rovnoběžnou se směrem polarizace destičky.

Pokud je dopadající světlo nepolarizované, je intenzita I prošlého světla rovna polovině intenzity světla dopadajícího I_0:

$$I = \tfrac{1}{2} I_0. \tag{34.40}$$

Pokud je dopadající světlo polarizováno, závisí prošlá intenzita na úhlu θ mezi směrem polarizace světla a destičky:

$$I = I_0 \cos^2 \theta. \tag{34.42}$$

Geometrická optika

Geometrická optika je přibližná metoda, v níž jsou světelné vlny aproximovány přímkovými světelnými paprsky.

Odraz a lom

Když světlo dopadá na rozhraní mezi dvěma průhlednými prostředími, dochází obvykle k odrazu a k lomu. Oba paprsky, odražený i lomený, zůstávají v rovině dopadu. Úhel odrazu je roven úhlu dopadu a úhel lomu je s úhlem dopadu spojen vztahem

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1 \quad \text{(lom)}, \tag{34.44}$$

kde $n_1 = c/v_1$ a $n_2 = c/v_2$ jsou indexy lomu prostředí, v nichž se šíří dopadající a lomený paprsek.

Úplný odraz

Vlna procházející rozhraním, na kterém se index lomu zmenšuje, bude úplně odražena (dojde k totální reflexi) tehdy, jestliže úhel dopadu překročí mezní úhel θ_m:

$$\theta_m = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad \text{(mezní úhel).} \tag{34.47}$$

Polarizace odrazem

Odražená vlna bude úplně polarizována s elektrickou intenzitou $\boldsymbol{E}$ kolmou k rovině dopadu, jestliže dopadne na rozhraní pod Brewsterovým úhlem θ_B:

$$\theta_B = \operatorname{arctg} \frac{n_2}{n_1} \quad \text{(Brewsterův úhel).} \tag{34.48}$$

OTÁZKY

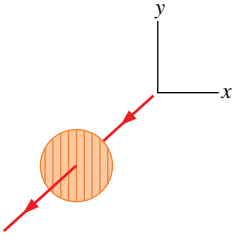
1. Magnetické pole světelné vlny kmitá rovnoběžně s osou y a je dáno vztahem $B_y = B_m \sin(kz - \omega t)$. (a) Ve kterém směru se bude vlna šířit? (b) V jakém směru bude kmitat příslušné elektrické pole?

2. Obr. 34.28 ukazuje směry elektrického a magnetického pole elektromagnetické vlny v určitém okamžiku. Šíří se vlna směrem k nám, nebo od nás?



Obr. 34.28 Otázka 2

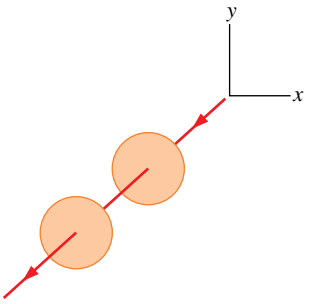
3. (a) Na obr. 34.29 je světelný paprsek, který dopadá na polarizační destičku, jejíž směr polarizace je rovnoběžný s osou y. Otáčíme destičkou o 40° po směru otáčení hodinových ručiček kolem naznačeného směru paprsku. Bude se intenzita prošlého světla během otáčení zvětšovat, zmenšovat, nebo zůstane konstantní jestliže dopadající světlo je (a) nepolarizované, (b) polarizované rovnoběžně s osou x, (c) polarizované ve směru osy y?



Obr. 34.29 Otázka 3

4. Světlo prochází polarizačním systémem se dvěma polarizačními destičkami, jak je naznačeno na obr. 34.30. Jestliže je poměr intenzity vycházejícího světla ke světlu dopadajícímu roven 0,7, bylo původní světlo polarizované nebo ne?

5. Nepolarizované světlo dopadá na polarizační systém se dvěma polarizačními destičkami z obr. 34.30. Vystupující světlo je polarizováno ve směru 20° po směru otáčení hodinových ručiček od osy y a má poloviční intenzitu než původní světlo. Jaké jsou směry polarizace destiček?

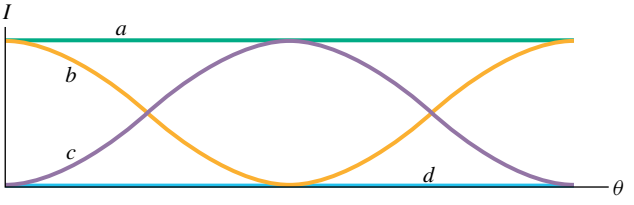


Obr. 34.30 Otázky 4, 5 a 7

6. V obr. 34.16a začněte se světlem, které je původně polarizováno rovnoběžně s osou x, a napište poměr jeho koncové intenzity I_3 k původní intenzitě I_0 jako $I_3/I_0 = A\cos^n\theta$. Jaké bude A, n a θ, když změníme směr polarizace první destičky (a) o 60° proti směru otáčení hodinových ručiček, (b) o 90° ve směru otáčení hodinových ručiček oproti směru ukázanému na obrázku?

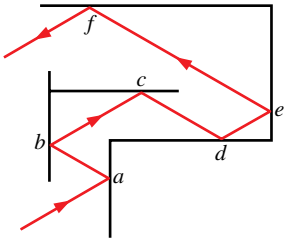
7. Tři polarizační destičky jsou umístěny tak, jako dvě destičky na obr. 34.30. Na systém dopadá původně nepolarizované světlo. Kolik koncových intenzit můžeme vytvořit, pokud jsou směry polarizace tyto: jeden je rovnoběžný s osou y, jeden je stočen od osy y o 20° po směru otáčení hodinových ručiček okolo směru světelného paprsku, jeden je otočen o 20° v opačném smyslu okolo tohoto směru.

8. Otáčejme druhou destičkou v obr. 34.16a od polohy s polarizací ve směru kladné osy y (tj. $\theta = 0$) do směru polarizace podél kladné osy x (tj. $\theta = 90°$). Která z křivek na obr. 34.31 nejlépe vystihuje změny intenzity světla během tohoto otáčení o 90°?



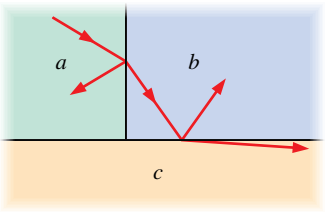
Obr. 34.31 Otázka 8

9. Obr. 34.32 ukazuje mnohonásobný odraz světelného paprsku uvnitř skleněné chodby, kde jsou stěny buď vzájemně rovnoběžné, nebo kolmé. Jaký bude úhel odrazu v místech b, c, d, e, f, jestliže úhel dopadu v místě a je 30°?



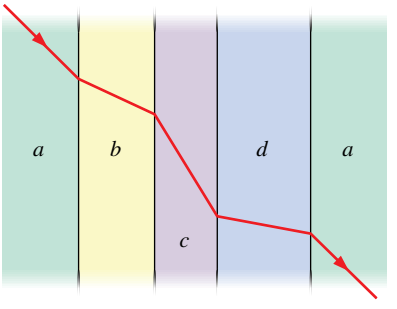
Obr. 34.32 Otázka 9

10. Obr. 34.33 ukazuje paprsky monochromatického světla procházející materiály a, b a c. Seřaďte materiály sestupně podle jejich indexů lomu.



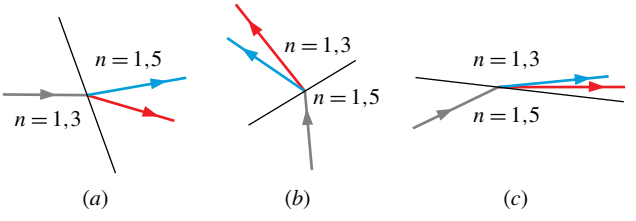
Obr. 34.33 Otázka 10

11. V obr. 34.34 světlo prochází z materiálu a skrz tři vzájemně rovnoběžné vrstvy jiných materiálů a pak zpět do materiálu a. Na obrázku je naznačen lom (nikoli příslušný odraz) na jednotlivých rozhraních. Seřaďte materiály sestupně podle jejich indexů lomu.



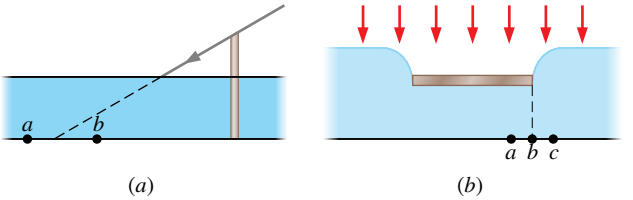
Obr. 34.34 Otázka 11

12. Která z částí obr. 34.35 ukazuje fyzikálně možný případ lomu?



Obr. 34.35 Otázka 12

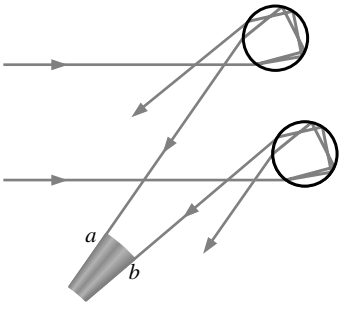
13. (a) Obr. 34.36a ukazuje sluneční paprsek, který prochází do nádržky s vodou těsně nad svislou tyčí. Skončí paprsek v oblasti bodu a, nebo bodu b? (b) Skončí blíže k tyči červená, nebo modrá složka paprsku? (c) Obr. 34.36b znázorňuje plochý předmět (jako je např. žiletka) plovoucí na hladině mělké vodní



Obr. 34.36 Otázka 13

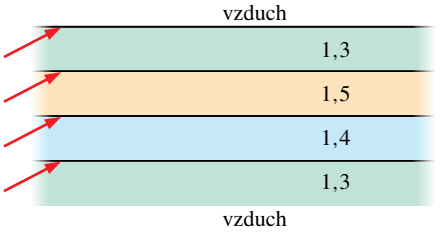
nádržky a osvětlený kolmo shora. Váha žiletky způsobuje, že se hladina vody zakřiví tak, jak je na obrázku ukázáno. Ve které oblasti, *a*, *b*, nebo *c*, bude ležet hrana stínu žiletky? (Řada paprsků se soustřeďuje napravo od hrany stínu a vytváří světlou oblast, kterou nazýváme *kaustika*.)

14. Obr. 34.22 ukazuje některé paprsky slunečního světla odpovědné za vznik primární duhy (která vzniká jedním odrazem uvnitř každé vodní kapky). Slabší, méně často se vyskytující sekundární duha (vznikající dvěma odrazy uvnitř každé kapky) se může objevit nad primární duhou a je tvořena paprsky, které vstupují a vystupují z kapek vody tak, jak je naznačeno na obr. 34.37 (bez naznačení barev). Který z paprsků, *a*, nebo *b*, odpovídá červenému světlu?



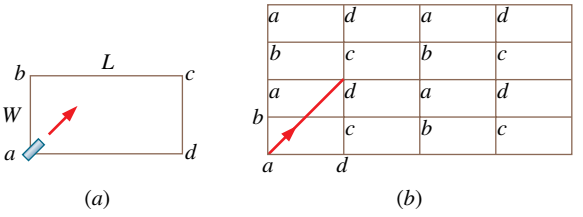
Obr. 34.37 Otázka 14

15. Obr. 34.38 ukazuje čtyři vodorovné vrstvy různých materiálů, nad nimi i pod nimi je vzduch. Jsou uvedeny jejich indexy lomu. Ve které vrstvě (udejte index lomu) je možné úplné zachycení světla, aby po mnoha odrazech světlo vyšlo z pravého konce vrstvy?



Obr. 34.38 Otázka 15

16. Obr. 34.39a ukazuje pohled shora na pravoúhlou místnost s dokonale odrážejícími stěnami. Délka místnosti L a šířka W jsou vyjádřeny celistvým počtem jednotek. Pošlete laserový svazek z rohu *a* pod úhlem 45° vzhledem ke stěnám. V ostatních rozích jsou umístěny malé figurky. Zasáhne paprsek některou z nich? Obr. 34.39b ukazuje, jak to najít zakreslením opakovaných odrazů na stěnách. To, který roh bude první zasažen, závisí na poměru L/W, redukovaném na poměr nejmenších celých čísel. (Např. $4/2$ redukováno na $2/1$.) Obr. 34.39b je nakreslen pro $L/W = 2/1$. Vidíme, že po jednom odrazu je zasažen roh *d*. Určete, který roh je zasažen při libovolném (redukovaném) poměru L/W ve tvaru (a) sudé číslo/liché číslo, (b) liché číslo/sudé číslo, (c) liché číslo/liché číslo.



Obr. 34.39 Otázka 16

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 34.1 Maxwellova duha

1C. Projekt Seafarer byl ambiciózní program konstrukce ohromné antény vyhloubené do země s plochou okolo 4 000 čtverečných mil. Jejím účelem bylo vysílání signálů hluboko ponořeným ponorkám. Jestliže efektivní vlnová délka byla $1{,}0\cdot10^4$ poloměrů Země, jaká bude (a) frekvence a (b) perioda vysílaného záření? Běžné elektromagnetické vlny nepronikají příliš hluboko do vodičů, jako je mořská voda.

2C. (a) Za jak dlouho urazí rádiový signál vzdálenost 150 km od vysílače k přijímací anténě? (b) Měsíc v úplňku vidíme díky odraženému slunečnímu světlu. Před jakou dobou opustilo světlo Slunce, než vstoupilo do našeho oka? Vzdálenost Země–Měsíc je $3{,}8\cdot10^5$ km a vzdálenost Země–Slunce je $1{,}5\cdot10^8$ km. (c) Za jak dlouho urazí světlo vzdálenost $1{,}3\cdot10^9$ km mezi Zemí a kosmickou sondou obíhající kolem Saturna? (d) O Krabí mlhovině, která je od nás vzdálená asi 6 500 světelných let, se předpokládá, že vznikla výbuchem supernovy, kterou pozorovali čínští astronomové v roce 1054 n. l. Ve kterém roce (přibližně) výbuch nastal?

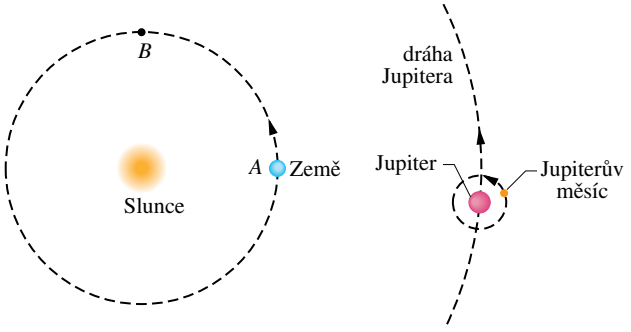
3C. (a) Na Stanfordském lineárním urychlovači lze dodat elektronům kinetickou energii až 18 GeV. Když pak dopadnou na pevný terčík, vybudí rentgenové záření o délce vlny 0,067 fm. Jakou má toto záření frekvenci? (b) Radiová vlna velmi nízké frekvence (VLF) má frekvenci pouze 30 Hz. Jakou má vlnovou délku?

4C. (a) Při jakých vlnových délkách má oko standardního pozorovatele polovinu své maximální citlivosti? (b) Jaká je vlnová délka, frekvence a perioda světla, pro které je oko nejcitlivější?

5C. Ověřte, že na obr. 34.1 jsou mezi dvěma následujícími mocninami 10 stejné vzdálenosti, a to jak na stupnici vlnových délek, tak i na stupnici frekvencí.

6C. Jistý heliový laser emituje červené světlo v úzkém rozmezí vlnových délek kolem 632,8 nm a s „šířkou“ (jako na stupnici obr. 34.1) 0,010 0 nm. Jaký je odpovídající rozsah frekvencí?

7Ú. Jedna z metod měření rychlosti světla vypracovaná Roemerem v r. 1676 spočívala v pozorování zdánlivých dob oběhu jednoho Jupiterova měsíce. Skutečná doba oběhu je 42,5 h. (a) Jakou změnu zdánlivé doby oběhu budete vzhledem ke konečné rychlosti světla předpokládat, když se Země posune na své dráze v obr. 34.40 z bodu A do bodu B? (b) Jaká pozorování je třeba vykonat, aby šlo určit rychlost světla? Pohyb Jupitera zanedbáme. Obr. 34.40 je schematický, není v něm zachováno měřítko.



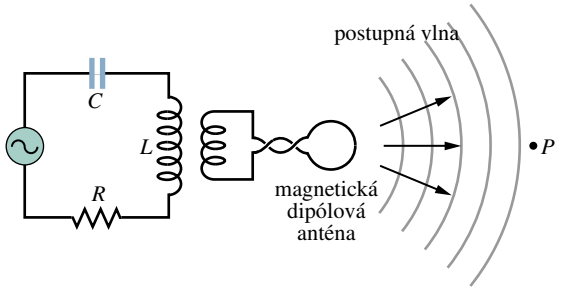
Obr. 34.40 Úloha 7

ODST. 34.2 Postupná elektromagnetická vlna (kvalitativně)

8C. Jaká je vlnová délka elektromagnetické vlny emitované anténou oscilátoru z obr. 34.3, jestliže $L = 0{,}253\,\mu\text{H}$ a $C = 25{,}0\,\text{pF}$?

9C. Jakou indukčnost by musela mít cívka připojená ke kondenzátoru s kapacitou 17 pF, aby se generovala elektromagnetická vlna s vlnovou délkou 550 nm (tj. viditelné záření)? Komentujte svou odpověď!

10Ú. Obr. 34.41 znázorňuje LC oscilátor spojený přenosovou linkou s anténou typu magnetického dipólu. Srovnejte to s obrázkem 34.3, který ukazuje podobné uspořádání, ale s anténou typu elektrického dipólu. (a) Co asi vedlo k označení obou typů? (b) Nakreslete obrázek podobný obr. 34.4, který bude popisovat elektromagnetickou vlnu procházející kolem pozorovatele v bodě P na obr. 34.41.



Obr. 34.41 Úloha 10

ODST. 34.3 Postupná elektromagnetická vlna (kvantitativně)

11C. Rovinná elektromagnetická vlna má maximální hodnotu elektrické intenzity $3{,}20\cdot10^{-4}\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$. Určete maximální hodnotu magnetické indukce.

12C. Elektrická intenzita elektromagnetické vlny je $E_x = 0$, $E_y = 0$, $E_z = 2{,}0\cos(10^{15}\pi(t - x/c))$, kde $c = 3{,}0\cdot10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ a všechny veličiny jsou v soustavě SI. Vlna se šíří ve směru kladné osy x. Napište výrazy pro složky magnetické indukce vlny.

13Ú. Vyjděte z rov. (34.11) a (34.18) a ukažte, že $E(x,t)$ a $B(x,t)$ (elektrická a magnetická složka rovinné postupné vlny) musí splňovat vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}.$$

14Ú. (a) Ukažte, že výrazy (34.1) a (34.2) splňují vlnové rovnice uvedené v úloze 13. (b) Ukažte, že tyto rovnice bude splňovat každý výraz tvaru $E = E_\text{m} f(kx \pm \omega t)$ a $B = B_\text{m} f(kx \pm \omega t)$, kde $f(\xi)$ je libovolná dvakrát derivovatelná funkce proměnné ξ.

ODST. 34.4 Přenos energie a Poyntingův vektor

15C. Najděte směr Poyntingova vektoru $\boldsymbol{S}$ a ukažte, že směr elektrického a magnetického pole na obr. 34.4 až 34.7 v každém okamžiku souhlasí s předpokládaným směrem šíření.

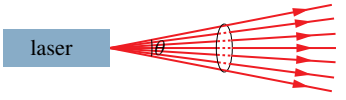
16C. Běžný neodymový laser dává výkon 100 TW v 1,0 ns pulzech při vlnové délce 0,26 μm. Kolik energie je v jednom pulzu?

17C. Nám nejbližší hvězda, Proxima Centauri, je od nás vzdálena 4,3 ly. Předpokládalo se, že naše televizní programy by mohly dospět až k této hvězdě a mohly by být pozorovány hypotetickými obyvateli hypotetické planety obíhající kolem této hvězdy. Předpokládejme, že televizní stanice na Zemi má výkon 1,0 MW. Jaká je intenzita signálu na Proximě Centauri?

18C. Elektromagnetická vlna se šíří směrem záporné osy y. V daném místě a okamžiku má elektrická intenzita směr kladné osy z a velikost $100\,\text{V/m}$. Jaký je směr a velikost magnetické indukce v tomtéž místě a okamžiku?

19C. Střední poloměr Země je $6{,}378\cdot10^6$ m a střední vzdálenost Země od Slunce je $1{,}50\cdot10^8$ km. Jaká část záření emitovaného Sluncem dopadá na terč tvořený Zemí?

20C. Záření vysílané laserem se šíří ve tvaru úzkého kužele s kruhovým průřezem. Vrcholový úhel kužele (obr. 34.42) se nazývá *celková úhlová divergence svazku*. Argonový laser vyzařující na vlnové délce 514,5 nm je při experimentu namířen na Měsíc. Jestliže celková úhlová divergence θ svazku je 0,880 μrad, jaká plocha je na Měsíci laserem ozářena?



Obr. 34.42 Cvičení 20

21C. Intenzita přímého slunečního záření, které není pohlceno atmosférou, je při slunečném dnu $100\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$. Jak daleko byste museli stát od elektrického radiátoru s výkonem 1,0 kW, abyste

pocítili stejnou intenzitu? Předpokládejte, že radiátor září rovnoměrně do všech směrů.

22C. Dokažte, že pro rovinnou postupnou elektromagnetickou vlnu je intenzita, tj. střední energie procházející jednotkovou plochou za jednotku času, dána výrazem

$$\overline{S} = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c} = \frac{c B_m^2}{2\mu_0}.$$

23C. Jaká je intenzita postupné rovinné elektromagnetické vlny, jestliže amplituda magnetické indukce je $B_m = 1{,}0{\cdot}10^{-4}$ T?

24C. Amplituda elektrické intenzity rovinné rádiové vlny má hodnotu 5,00 $V{\cdot}m^{-1}$. Vypočtěte (a) maximální hodnotu magnetické složky a (b) intenzitu vlny.

25Ú. Jdete 150 m přímo proti pouliční lampě a zjistíte, že intenzita vzrostla 1,5krát proti původní hodnotě. Jak daleko jste původně stáli? (Předpokládáme, že lampa je izotropní zdroj záření.)

26Ú. Ověřte, že intenzita elektromagnetické vlny je součin hustoty energie vlny a její rychlosti.

27Ú. Sluneční světlo má na hranici zemské atmosféry intenzitu 1,40 $kW{\cdot}m^{-2}$. Vypočtěte E_m a B_m za předpokladu, že by šlo o rovinnou vlnu.

28Ú. Maximální hodnota intenzity elektrického pole ve vzdálenosti 10 m od bodového zdroje je 2,0 $V{\cdot}m^{-1}$. Jaká je (a) maximální hodnota magnetické indukce a (b) střední intenzita světla v tomto místě? (c) Jaký je výkon zdroje?

29Ú. Frank D. Drake, pracovník programu SETI (Search for Extra-Terrestrial Intelligence — Pátrání po mimozemské inteligenci), řekl, že velký radioteleskop v Arecibo (Portoriko) „může detegovat signál, který přenese na celý zemský povrch výkon pouze 1 pW“ (obr. 34.43). (a) Jaký by byl v tomto případě skutečný signál registrovaný v Arecibo? Anténa má průměr 300 m. (b) Jaký by byl výkon zdroje ve středu naší Galaxie, který by vytvářel takový signál? Střed Galaxie je od nás vzdálen $2{,}2{\cdot}10^4$ světelných let. Předpokládejme, že tento zdroj vyzařuje rovnoměrně do všech směrů.



Obr. 34.43 Úloha 29

30Ú. Helium-neonový laser vyzařující na vlnové délce 632,8 nm má výstupní výkon 3,0 mW a celkovou úhlovou rozbíhavost svazku (viz cvič. 20) 0,17 mrad. (a) Jaká je intenzita svazku ve vzdálenosti 40 m od zdroje? (b) Jaký by byl výkon bodového zdroje, který by vytvářel stejnou intenzitu v téže vzdálenosti?

31Ú. Letadlo letící ve vzdálenosti 10 km od rádiového vysílače zachycuje signál 10 $\mu W{\cdot}m^{-2}$. Vypočtěte amplitudu (a) elektrické intenzity, (b) magnetické indukce tohoto signálu v letadle a (c) celkový výkon vysílače za předpokladu, že vysílá rovnoměrně do všech stran.

32Ú. Během testu kontrolního systému NATO, který pracuje na frekvenci 12 GHz s výkonem 180 kW, se má zjistit přítomnost přilétajícího neviditelného letadla, které je ve vzdálenosti 90 km. Předpokládejme, že radarový paprsek je emitován rovnoměrně do poloprostoru. (a) Jaká je intenzita paprsku v místě letadla? Letadlo odráží radarové vlny, jako kdyby mělo plochu pouze 0,22 m^2. (b) Jaký je letadlem odražený výkon? Jaká je po odrazu v místě radaru (c) intenzita, (d) maximální hodnota intenzity elektrického pole a (e) efektivní hodnota magnetického pole (indukce) odraženého radarového svazku?

ODST. 34.5 Tlak záření

33C. Na černý úplně pohlcující kus lepenky o ploše $S = 2{,}0\,cm^2$ dopadá světlo intenzity 10 $W{\cdot}m^{-2}$. Jaký je na lepence tlak záření vyvolaný světlem?

34C. Ke kompresi plazmatu (systému nabitých částic) pomocí tlaku záření se užívá výkonový laser. Laser vyrábějící pulzy záření se špičkovým výkonem $1{,}5{\cdot}10^3$ MW je zfokusován na plochu 1,0 mm^2 plazmatu s vysokou elektronovou koncentrací. Zjistěte, jaký je tlak působící na plazma za předpokladu, že záření dokonale odráží.

35C. Střední intenzita slunečního záření dopadajícího na hranici zemské atmosféry je 1,4 $kW{\cdot}m^{-2}$. (a) Jaký je tlak záření působící na tento povrch za předpokladu, že je dokonale pohlceno? (b) Jaký je tlak záření v porovnání s atmosférickým tlakem u hladiny moře, který je $1{,}0{\cdot}10^5$ Pa?

36C. Sluneční záření dopadající na hranici zemské atmosféry má intenzitu 1,4 $kW{\cdot}m^{-2}$. (a) Za předpokladu, že se Země (a její atmosféra) chová jako plochý terč kolmý ke slunečním paprskům a že všechna dopadající energie je pohlcena, vypočtěte sílu, která působí na Zemi v důsledku tlaku záření. (b) Srovnejte ji se silou gravitační přitažlivosti mezi Zemí a Sluncem.

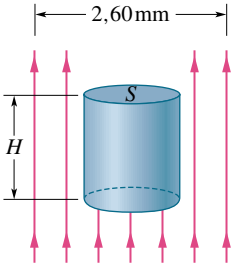
37C. Jaký je tlak záření ve vzdálenosti 1,5 m od žárovky s výkonem 500 W? Předpokládejte, že plocha, na kterou tlak působí, je kolmá ke světelným paprskům a dokonale pohlcující a že žárovka svítí rovnoměrně do všech stran.

38Ú. Rovinná elektromagnetická vlna o vlnové délce 3,0 m prochází vakuem ve směru kladné osy x a její intenzita $\boldsymbol{E}$ s amplitudou o velkosti 300 $V{\cdot}m^{-1}$ má směr osy y. (a) Jaká je frekvence vlny? (b) Jaký je směr a velikost magnetické složky této vlny? (c) Jestliže $E = E_m \sin(kx - \omega t)$, jaké jsou hodnoty k a ω? (d) Jaká je střední časová hodnota toku energie ve $W{\cdot}m^{-2}$ spojeného s touto vlnou? (e) Jestliže vlna dopadá na dokonale

pohlcující arch papíru o ploše $2{,}0\,\mathrm{m}^2$, jaká hybnost mu bude předána a jaký tlak na něj bude vykonávat záření?

39Ú. Helium-neonový laser typu, který se často užívá ve fyzikálních laboratořích, má svazek s výkonem 5,00 mW a vlnovou délku 633 nm. Svazek je zfokusován čočkou do kruhové stopy průměru dvou vlnových délek. Vypočtěte (a) intenzitu zfokusovaného svazku, (b) tlak záření působící na malou dokonale pohlcující kouli, jejíž průměr je roven průměru zfokusované stopy, (c) sílu působící na tuto kuličku a (d) zrychlení, které jí bude uděleno. Předpokládejme, že hustota kuličky je $5{,}00{\cdot}10^3\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

40Ú. V obr. 34.44 je laserový svazek s výkonem 4,60 W a průměrem 2,60 mm namířen nahoru na kruhovou podstavu (průměru $d < 2{,}60$ mm) dokonale odrážejícího válce, který je „nadnášen“ tlakem záření. Hustota válce je $1{,}2\,\mathrm{g/cm^3}$. Jaká je jeho výška H?



Obr. 34.44 Úloha 40

41Ú. Záření intenzity I dopadá kolmo na objekt, který pohlcuje jeho část α a zbytek $1-\alpha$ odráží zpět do směru dopadu. Jaký je tlak záření na tento objekt?

42Ú. Ověřte, že pro rovinnou vlnu dopadající kolmo na rovnou plochu je tlak záření roven hustotě energie ve svazku nad povrchem. (To platí nezávisle na tom, jaká část záření je odražena.)

43Ú. Laserový svazek intenzity I se odráží od dokonale odrážejícího povrchu S, jehož normála svírá se směrem svazku úhel θ. Napište vztah pro tlak záření $p_\mathrm{r}(\theta)$ působící na povrch v poměru k tlaku $p_{\mathrm{r}\perp}$, který by působil, kdyby svazek byl kolmý k povrchu.

44Ú. Ověřte, že střední tlak proudu kulek dopadajících kolmo na rovný povrch je roven dvojnásobku hustoty kinetické energie proudu nad povrchem. Předpokládejte, že kulky jsou povrchem úplně pohlceny. Uvědomte si rozdíl oproti chování světla v úloze 42.

45Ú. Malá vesmírná loď o hmotnosti $1{,}5{\cdot}10^3$ kg (včetně astronauta) se pohybuje v prostoru se zanedbatelnými gravitačními silami. Jestliže astronaut zapne 10 kW laserový svazek, o kolik se změní rychlost lodi za jeden den v důsledku úbytku hybnosti odnesené paprskem?

46Ú. Vesmírná loď by mohla být ve slunečním systému poháněna tlakem záření, pokud by se použila velká plachta z folie. Jak velká by musela plachta být, aby síla vyvinutá tlakem záření právě vykompenzovala přitažlivost Slunce? Předpokládejme, že hmotnost lodi včetně plachty je 1 500 kg, že plachta dokonale odráží světlo a je kolmá ke směru slunečních paprsků. Viz data uvedená v dodatku C. (S větší plachtou by loď byla hnána pryč od Slunce.)

47Ú. Na částici ve slunečním systému působí současně přitažlivost Slunce a tlak záření vyvolaný slunečními paprsky. Předpokládejme, že částice je koule s hustotou $1{,}0{\cdot}10^3\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a že dopadající světlo je jí pohlceno. (a) Ukažte, že pokud je poloměr částice menší než určitá kritická hodnota, bude částice vypuzována ven ze sluneční soustavy. (b) Vypočítejte kritický poloměr.

ODST. 34.6 Polarizace

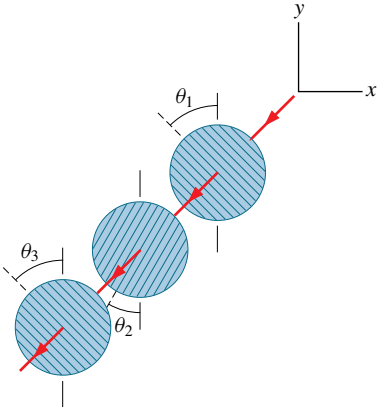
48C. Magnetická indukce elektromagnetické vlny ve vakuu je dána vztahy $B_x = B\sin(kx+\omega t)$, $B_y = B_z = 0$. (a) Jaký je směr šíření vlny? (b) Určete intenzitu elektrického pole. (c) Je vlna polarizovaná? Pokud ano, tedy ve kterém směru?

49C. Paprsek nepolarizovaného světla s intenzitou $10\,\mathrm{mW/m^2}$ prochází polarizační destičkou jako na obr. 34.12. (a) Najděte maximální hodnotu elektrického pole prošlého paprsku. (b) Jaký tlak záření působí na polarizační destičku?

50C. Paprsek nepolarizovaného světla prochází dvěma polarizačními destičkami umístěnými na sobě. Jaký musí být úhel mezi směry polarizace destiček, aby intenzita prošlého světla byla jednou třetinou intenzity světla dopadajícího?

51C. Tři polarizační destičky leží na sobě. První a třetí jsou zkřížené, směr polarizace střední destičky je otočen vůči nim o 45°. Jaká část intenzity původního nepolarizovaného paprsku projde touto sestavou?

52C. Na obr. 34.45 prochází svazek nepolarizovaného světla třemi polarizačními destičkami, jejichž směry polarizace svírají úhly $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 50°$ s osou x. Jaké procento původní intenzity světla projde tímto systémem?



Obr. 34.45 Cvičení 52 a úloha 53

53Ú. Na obr. 34.45 prochází nepolarizované světlo soustavou tří polarizačních destiček, jejichž úhly polarizace svírají úhly $\theta_1 = 40°$, $\theta_2 = 20°$ a $\theta_3 = 40°$ se směrem osy y. Jaké procento původní intenzity světla projde systémem?

54Ú. Paprsek nepolarizovaného světla dopadá na soustavu čtyř polarizačních destiček orientovaných tak, že úhly mezi směry

polarizace sousedních destiček jsou vždy 30°. Jaká část dopadajícího světla projde systémem?

55Ú. Paprsek polarizovaného světla dopadá na systém dvou polarizačních destiček. Směr polarizace první destičky je otočen o úhel θ, druhé o úhel 90° vzhledem ke směru polarizace světla. Jaký je úhel θ, jestliže systémem projde 0,10 intenzity dopadajícího světla?

56Ú. Vodorovný svazek světla polarizovaného ve svislém směru, který má intenzitu 43 W/m^2, prochází dvěma polarizačními destičkami. Směr polarizace první z nich je 70° vzhledem ke svislici, směr druhé je vodorovný. Jaká je intenzita prošlého světla?

57Ú. Předpokládejte, že v úloze 56 je dopadající světlo nepolarizované. Jaká bude potom intenzita prošlého světla?

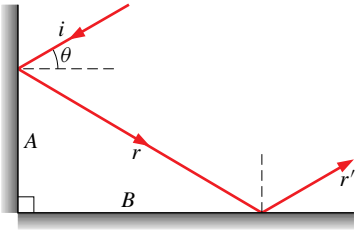
58Ú. Svazek světla částečně polarizovaného můžeme považovat za směs polarizovaného a nepolarizovaného světla. Předpokládejme, že pošleme takový svazek polarizačním filtrem kolmým na svazek a budeme filtrem otáčet o 360°. Jestliže se intenzita prošlého světla mění během otáčení v rozmezí 1 : 5,0, jaká část intenzity původního světla je polarizovaná?

59Ú. Chceme otočit směr polarizace paprsku polarizovaného světla o 90° tím, že ho necháme procházet jednou nebo několika polarizačními destičkami. (a) Jaký je minimální počet potřebných destiček? (b) Jaký je minimální počet destiček, má-li být intenzita prošlého světla větší než 60 % původní intenzity?

60Ú. Na pobřeží je světlo obyčejně částečně polarizováno díky odrazům na písku a vodě. Na určitém pobřeží je za slunného dne před západem slunce vodorovná složka vektoru elektrického pole 2,3krát větší než složka svislá. Stojící pozorovatel si nasadí polarizační brýle, které vyloučí vodorovnou složku pole. (a) Jaká část původní intenzity (před nasazením brýlí) dopadne do jeho očí nyní? (b) Pozorovatel s nasazenými brýlemi se položí na bok. Jaká bude nyní intenzita světla, kterou bude vnímat?

ODST. 34.7 Odraz a lom

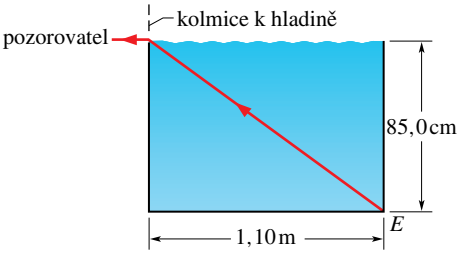
61C. Obr. 34.46 ukazuje světlo odražené od dvou navzájem kolmých ploch A a B. Najděte úhel mezi dopadajícím paprskem i a vycházejícím paprskem r'.



Obr. 34.46
Cvičení 61

62C. Světlo dopadá ve vakuu na povrch skleněné desky. Ve vakuu svírá paprsek úhel 32,0° s normálou k povrchu, zatímco ve skle svírá s touto normálou úhel 21,0°. Jaký je index lomu skla?

63C. Kovová pravoúhlá nádrž z obr. 34.47 je naplněna po okraj neznámou kapalinou. Pozorovatel, jehož oči jsou na úrovni hladiny, vidí právě roh E. Na obrázku je vidět paprsek, který se lomí právě do oka pozorovatele. Určete index lomu kapaliny.

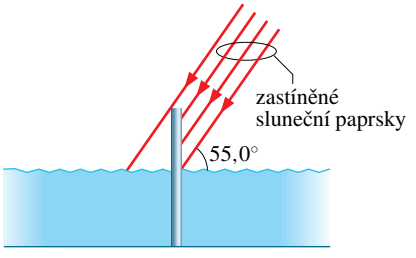


Obr. 34.47
Cvičení 63

64C. Asi v r. 150 n. l. Claudius Ptolemaios udal následující měřené hodnoty úhlů dopadu θ_1 a úhlů lomu θ_2 pro světelný paprsek procházející ze vzduchu do vody. (a) Souhlasí tyto údaje se zákonem lomu? (b) Jestliže ano, jaký vychází index lomu? Tyto údaje jsou zajímavé tím, že jsou pravděpodobně nejstarším popsaným fyzikálním měřením.

θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
10°	8°	50°	35°
20°	15°30′	60°	40°30′
30°	22°30′	70°	45°30′
40°	29°	80°	50°

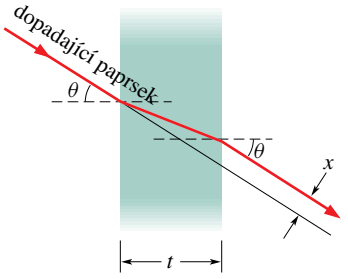
65Ú. Na obr. 34.48 vyčnívá svislá tyč délky 2,00 m do výšky 50,0 cm nad hladinou vody. Sluneční světlo dopadá ze směru 55,0° nad horizontem. Jaká je délka stínu tyče na dně bazénu?



Obr. 34.48 Úloha 65

66Ú. Ryba je 2,00 m pod hladinou klidného jezera. (a) Jaký je průměr kruhu na hladině, kterým může ryba vidět svět vně vody? (b) Když se ryba ponoří hlouběji, tento kruh se zvětší, zmenší, nebo zůstane stejný?

67Ú. Ověřte, že světelný paprsek dopadající na povrch rovné skleněné desky tloušťky t vyjde z opačné strany této desky rovnoběžně se svým původním směrem, ale je posunut stranou, jak ukazuje obr. 34.49. Ukažte, že pro malé úhly dopadu θ je



Obr. 34.49 Úloha 67

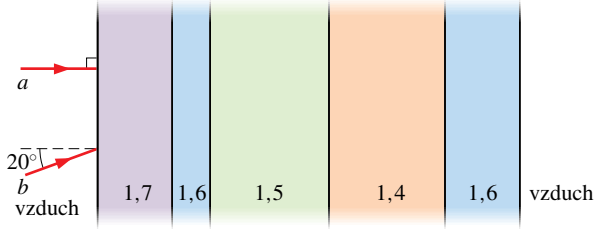
posunutí dáno výrazem

$$x = t\theta\frac{n-1}{n},$$

kde n je index lomu světla a úhel θ je měřen v radiánech.

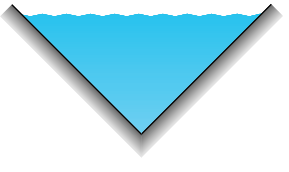
68Ú. Paprsek bílého světla dopadá pod úhlem 35° na plochu hranolu z taveného křemene. Hranol má průřez rovnostranného trojúhelníku. Nakreslete, jak prochází světlo hranolem pro paprsky (a) modrého, (b) žlutozeleného a (c) červeného světla.

69Ú. Na obr. 34.50 procházejí dva světelné paprsky ze vzduchu pěti průhlednými vrstvami plastů, jejichž rozhraní jsou rovnoběžná. Jsou dány jejich indexy lomu, jejich tloušťky jsou neznámé. Paprsky se vynoří opět do vzduchu na pravé straně. Jaký je úhel vycházejícího (a) paprsku *a* a (b) paprsku *b* vzhledem k normále? (c) Jaké by byly odpovědi, kdyby na levé i pravé straně bylo místo vzduchu sklo s indexem lomu $n = 1{,}5$? (*Tip*: Ušetříte mnoho času, pokud problém vyřešíte nejdříve algebraicky.)



Obr. 34.50 Úloha 69

70Ú. Nádoba naplněná vodou na obr. 34.51 má stěny tvořeny zrcadly. (a) Světelný paprsek dopadá kolmo na hladinu vody. Ukažte, že vycházející paprsek je rovnoběžný s paprskem dopadajícím. Předpokládejte dva odrazy na povrchu zrcadel. (b) Opakujte analýzu pro případ šikmého dopadu paprsku ležícího v rovině obrázku.

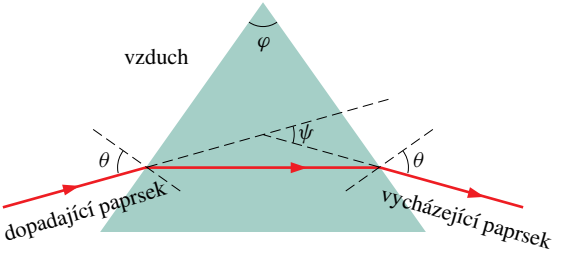


Obr. 34.51 Úloha 70

71Ú. V obr. 34.52 dopadá paprsek na plochu trojbokého skleněného hranolu ve vzduchu. Úhel dopadu θ je zvolen tak, že vycházející paprsek svírá tentýž úhel θ s normálou protilehlé plochy. Ukažte, že index lomu n skla je dán výrazem

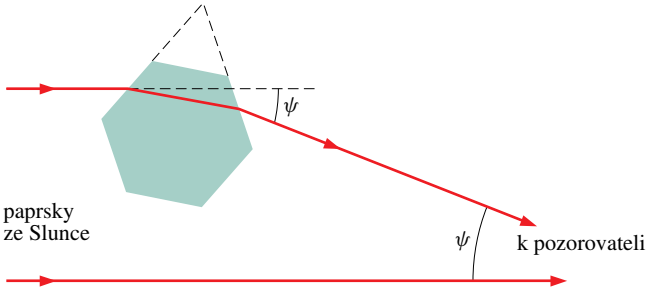
$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(\psi+\varphi)}{\sin\frac{1}{2}\varphi},$$

kde φ je vrcholový úhel hranolu a ψ je *deviační úhel*, tj. celkový úhel, o který se paprsek při průchodu hranolem odchýlil. (Za těchto podmínek má deviační úhel nejmenší možnou hodnotu, která se nazývá *úhel minimální deviace*.)



Obr. 34.52 Úlohy 71 a 81

72Ú. Když je atmosféra chladná, mohou se z vlhkosti vytvářet ledové krystalky různého tvaru. Pokud atmosféra obsahuje ve směru ke Slunci dostatečné množství plochých hexagonálních destiček, objeví se nalevo a napravo 120° od Slunce jasná (někdy barevná) oblast nazývaná *vedlejší Slunce* neboli *paranthelium*, případně v protisměru *protislunce* neboli *antihelium* (angl. Sun dog, tj. sluneční pes). Je vytvářena slunečním světlem, které prošlo ledovými destičkami. Tyto paprsky jsou navzájem rovnoběžné, když dopadají na Zem. Jejich směr se změnil lomem při průchodu ledovou destičkou a ty, které prošly pod úhlem minimální deviace (ukázány na obr. 34.53, viz úlohu 71), mohou vytvořit protislunce. To je vidět pod úhlem ψ od Slunce. Je-li index lomu ledu 1,31, jak velký je úhel ψ?



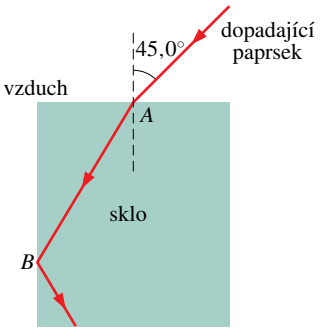
Obr. 34.53 Úloha 72

73Ú. Světelný paprsek prochází rovnostranným trojbokým hranolem ve směru minimální deviace (viz úlohu 71). Celková deviace je $\psi = 30{,}0°$. Jaký je index lomu hranolu?

ODST. 34.8 Úplný odraz

74C. Index lomu benzenu je 1,8. Jaký je mezní úhel pro světelný paprsek procházející z benzenu směrem do vzduchu?

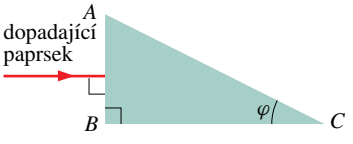
75C. V obr. 34.54 vstupuje světelný paprsek do skleněné desky



Obr. 34.54
Cvičení 75

v místě A a potom se úplně odráží v bodě B. Jaký minimální index lomu může mít sklo na základě této informace?

76C. Na obr. 34.55 je paprsek světla kolmý ke stěně AB skleněného hranolu ($n = 1{,}52$). Najděte největší hodnotu úhlu φ, při kterém je paprsek totálně odražen na stěně AC, jestliže je hranol umístěn (a) ve vzduchu, (b) ve vodě.



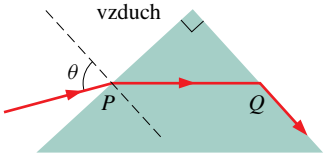
Obr. 34.55
Cvičení 76

77C. Bodový zdroj světla je ponořen 80,0 cm pod povrchem vody. Najděte průměr kruhu na povrchu, ve kterém světlo vystupuje z vody.

78Ú. Skleněná krychle o hraně 10 mm a s indexem lomu 1,5 má ve svém středu malou skvrnu. (a) Jaké části krychle musí být zakryty, aby skvrnu nebylo přímo vidět ze žádného směru pozorování. (Zanedbejte následné chování vnitřně úplně odražených paprsků.) (b) Jak velká část krychle musí být zakryta?

79Ú. Paprsek bílého světla procházející taveným křemenem dopadá na rovinný povrch pod úhlem θ. Je pro vnitřně úplně odražený paprsek možné, aby se zdál (a) namodralý, (b) načervenalý? (c) Jestliže ano, jaká hodnota úhlu θ je k tomu třeba? (*Tip*: Bílé světlo se bude zdát namodralé, když vlnové délky odpovídající červené budou ze spektra odstraněny, a naopak.)

80Ú. Na obr. 34.56 vstupuje světlo do trojbokého hranolu s úhlem 90° v bodě P pod úhlem dopadu θ a potom se jeho část lomí v bodě Q pod úhlem lomu 90°. (a) Jak závisí index lomu hranolu $n(\theta)$ na θ? (b) Jakou maximální hodnotu může index lomu mít? Vyložte, co se děje se světlem v bodě Q, jestliže úhel dopadu v tomto místě je (c) poněkud větší, (d) poněkud menší.



Obr. 34.56
Úloha 80

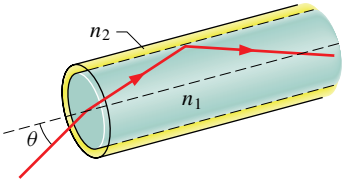
81Ú. Předpokládejme, že hranol na obr. 34.52 má vrcholový úhel $\varphi = 60{,}0°$ a index lomu $n = 1{,}60$. (a) Pro jaký nejmenší úhel dopadu θ může paprsek vstoupit levou stěnou hranolu a vystoupit na pravé straně? (b) Pro jaký úhel dopadu θ vyjde paprsek z hranolu se stejným úhlem θ, jako je tomu na obr. 34.52 (viz úlohu 71)?

82Ú. Bodový zdroj světla je umístěn ve vzdálenosti h pod hladinou velkého hlubokého jezera. (a) Při zanedbání odrazu na hladině s výjimkou úplného odrazu ukažte, že část α světelné energie, která vyjde přímo z povrchu vody, je nezávislá na h a je dána vztahem

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 1/n^2}\right),$$

kde n je index lomu vody. (b) Stanovte tuto část pro $n = 1{,}33$.

83Ú. *Optické vlákno* se skládá ze skleněného jádra (index lomu n_1) obklopeného obalem ($n_2 < n_1$). Předpokládejme, že světlo vstupuje do vlákna ze vzduchu pod úhlem θ vzhledem k ose vlákna, jak je to ukázáno na obr. 34.57. (a) Ukažte, že největší možná hodnota úhlu θ, pod kterým může paprsek vstoupit, aby se pak šířil podél vlákna, je dána vztahem $\theta = \arcsin\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$. (b) Jestliže indexy lomu jádra a pokrytí jsou 1,58 a 1,53, jaká je hodnota úhlu θ?



Obr. 34.57
Úlohy 83 a 84

84Ú. V optickém vlákně (viz úlohu 83) se různé paprsky pohybují po různých dráhách, které vedou i k rozdílným časům šíření. To způsobuje, že světelný pulz se rozmazává, když se šíří vláknem, a tím dochází ke ztrátě informace. Časové zpoždění může být minimalizováno pomocí vhodného návrhu vlákna. Uvažujme paprsek, který proběhne vzdálenost L přímo podél osy vlákna, a jiný, který se opakovaně odrážel pod kritickým úhlem, až dospěl do stejného bodu jako první paprsek. (a) Ukažte, že rozdíl časů průchodu Δt je

$$\Delta t = \frac{L}{c}\frac{n_1}{n_2}(n_1 - n_2),$$

kde n_1 je index lomu skleněného jádra a n_2 index lomu obalu. (b) Vypočtěte Δt pro vlákno z úlohy 83 pro $L = 300$ m.

ODST. 34.9 Polarizace odrazem

85C. (a) Při jakém úhlu dopadu bude světlo odražené od hladiny vody úplně polarizované? (b) Závisí tento úhel na vlnové délce světla?

86C. Světlo šířící se vodou s indexem lomu 1,33 dopadá na skleněnou desku s indexem lomu 1,53. Při jakém úhlu dopadu bude odražené světlo úplně polarizované?

87C. Vypočtěte horní a dolní hranici Brewsterových úhlů pro viditelné světlo dopadající na tavený křemen. Předpokládejte, že hranice vlnových délek jsou 400 nm a 700 nm.

88Ú. Když červené světlo dopadá ve vakuu pod Brewsterovým úhlem na skleněnou desku, je úhel lomu roven 32,0°. Jaký je (a) index lomu skla a (b) Brewsterův úhel?

35
Obrazy



Bar ve Folies-Bergère *Edouarda Maneta okouzluje diváky od roku 1882, kdy byl namalován. Část jeho půvabu spočívá v kontrastu mezi publikem připraveným k představení a barmankou, jejíž oči prozrazují únavu. Ale jeho půvab závisí také na drobných odchylkách od skutečnosti, které Manet skryl v malbě — odchylkách, které dodávají scéně pocit tajemna, dokud nerozpoznáte, co je „chybně". Naleznete je?*

35.1 DVA TYPY OBRAZŮ

Abychom viděli, řekněme, tučňáka, musí naše oko zachytit některé z paprsků šířících se od tučňáka a nasměrovat je na sítnici v pozadí oka. Zrakový systém, počínaje sítnicí a konče zrakovými centry v zadní části mozku, zpracovává podvědomě informace poskytnuté světlem. Tento systém identifikuje hrany, orientace, výplně ploch (textury), tvary a barvy a pak rychle přenese do našeho vědomí **obraz** (reprodukci odvozenou ze světla) tučňáka: vnímáme a poznáváme tučňáka nacházejícího se ve směru, odkud přichází světlo a vidíme ho ve správné vzdálenosti.

Toto zpracování a rozpoznávání provádí zrakový systém také tehdy, nepřicházejí-li světelné paprsky k nám přímo od tučňáka, ale odrážejí-li se k nám od zrcadla nebo lámou-li se na čočkách brýlí. Teď ovšem vidíme tučňáka v tom směru, odkud přicházejí světelné paprsky po odrazu nebo lomu a vzdálenost, kterou vnímáme, může být zcela odlišná od jeho skutečné vzdálenosti.

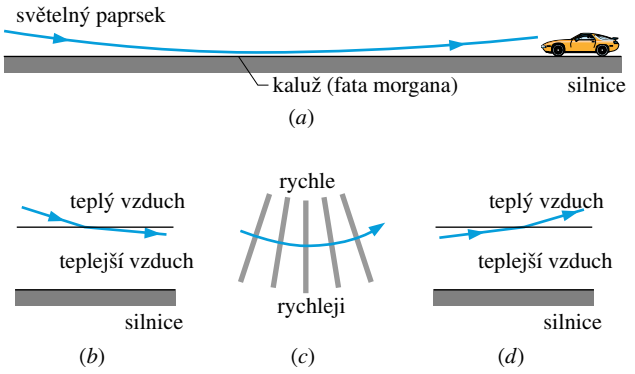
Odrážejí-li se například světelné paprsky směrem k nám na obyčejném rovinném zrcadle, zdá se nám, že tučňák je za zrcadlem, protože paprsky, které přijímáme, přicházejí z tohoto směru. Tučňák ovšem za ním není. Tento typ obrazu, kterému se říká **virtuální obraz**, existuje popravdě pouze v našem mozku, ale přesto říkáme, že existuje v poloze, kterou vnímáme.

Reálný obraz se liší tím, že může být vytvořen na povrchu, jakým je papír nebo projekční plátno. Reálný obraz můžeme vidět (jinak by biografy byly prázdné), ale existence obrazu nezávisí na tom, jestli jej vidíme. Obraz tam bude, i když ho nikdo nebude pozorovat.

V této kapitole budeme zkoumat několik způsobů vytváření virtuálních a reálných obrazů odrazem (na zrcadlech) a lomem (na čočkách). Oba typy obrazu od sebe jasněji rozlišíme. Napřed však jeden případ přirozeného virtuálního obrazu.

Fata morgana

Všeobecně známým příkladem virtuálního obrazu je kaluž vody, která se objeví ve slunných dnech na silnici v určité vzdálenosti před námi, kterou ale nikdy nemůžeme dostihnout. Tato kaluž je fata morgana (druh přeludu) a je vytvářena paprsky přicházejícími od části oblohy před námi nízko nad obzorem (obr. 35.1a). Blíží-li se paprsky k vozovce, procházejí postupně teplejším vzduchem ohřátým vozovkou, která je relativně horká. S rostoucí teplotou mírně roste rychlost světla, protože mírně klesá index lomu vzduchu. Sestupující paprsky postupně procházejí oblastmi s nižšími indexy lomu a jejich směr se spojitě blíží vodorovnému směru (obr. 35.1b).



Obr. 35.1 (a) Paprsek přicházející z dolní části oblohy se láme ve vzduchu ohřátém silnicí (aniž na ni dopadne). Pozorovatel, který zachytí toto světlo, je vnímá tak, jako by pocházelo od kaluže vody na vozovce. (b) Změna směru (zahnutí) sestupujícího paprsku na pomyslném rozhraní mezi teplým vzduchem a vzduchem o něco teplejším (nakresleno zveličeně). (c) Paprsek postupující vodorovně se zahne proto, že spodní část vlnoplochy se pohybuje v teplejším vzduchu rychleji. (d) Stoupající paprsek se zahne na pomyslném rozhraní mezi teplejším vzduchem a vzduchem o něco chladnějším.

Ohýbání paprsku pokračuje i poté, co paprsek běží vodorovně poněkud nad povrchem silnice, protože dolní část příslušné vlnoplochy se nachází v mírně teplejším vzduchu a pohybuje se o něco rychleji než horní část vlnoplochy (obr. 35.1c). Rozdílná rychlost pohybu částí vlnoplochy způsobuje ohýbání paprsku směrem nahoru. Protože paprsek stoupá vzhůru a prochází prostředím s postupně se zvětšujícím indexem lomu, ohýbá se dále (obr. 35.1d).

Zachytí-li naše oko některé z těchto paprsků světla, náš zrakový systém vyvodí automaticky, že přicházejí od předmětu nacházejícího se ve směru zpětného prodloužení zachycených paprsků, tedy z kaluže vody na vozovce. Modravé zbarvení kaluže je způsobeno tím, že světlo pochází z modré oblohy. Protože v zahřátém vzduchu je pravděpodobně turbulence, fata morgana se třpytí, jako by se voda vlnila. Modravé zbarvení a třpyt zvyšují dojem, že jde o kaluž vody; přesto však to, co vidíme, je virtuální obraz spodní části oblohy.

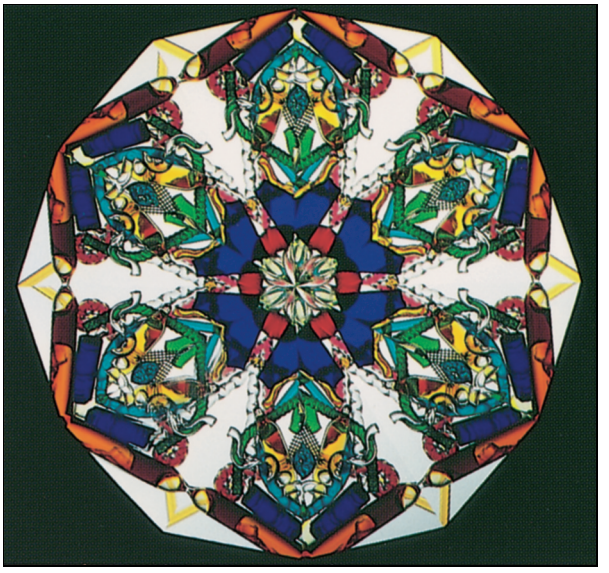
35.2 ROVINNÉ ZRCADLO

Zrcadlo je povrch, který odráží úzký svazek světelných paprsků prakticky do jediného směru. Jiné povrchy jej rozptylují do mnoha směrů nebo jej pohlcují. Leštěný povrch kovu působí jako zrcadlo, betonová stěna nikoli. V tomto článku vyšetříme obrazy vytvořené **rovinným zrcadlem** (rovinnou odraznou plochou).

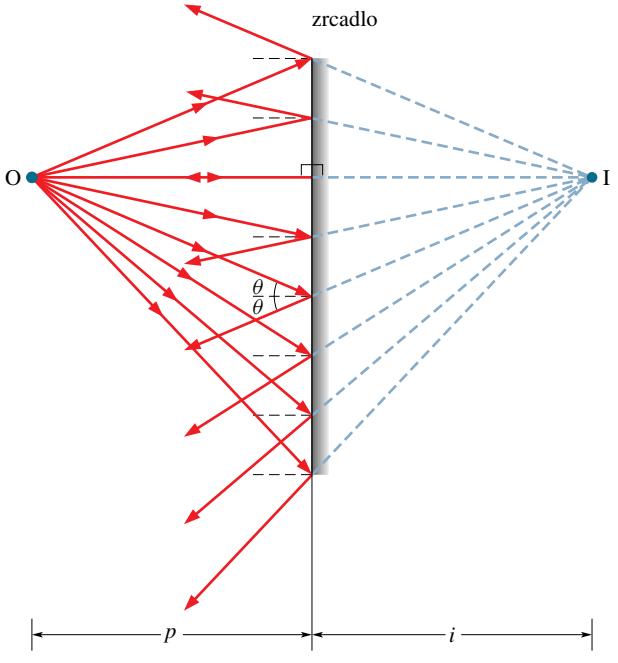
Na obr. 35.2 je bodový zdroj světla O (nazveme jej **předmětem**) a ten leží ve vzdálenosti p před zrcadlem.



Které znaky nás informují, zda není tato fotografie vzhůru nohama? Je jich několik.



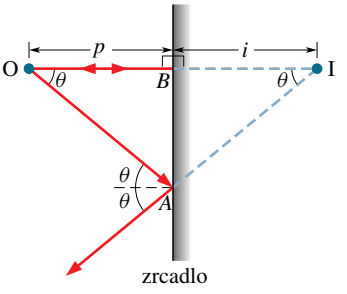
Část z toho, co vidíme při pohledu do kaleidoskopu, jsou předměty nacházející se na vzdálenějším konci trubice; zbytek sestává z obrazů těchto předmětů vytvořených zrcadly, která jsou vložena podélně do trubice. Kolik zrcadel je v trubici a jak jsou uspořádána? (Odpověď naleznete ve výsledcích kontrolních úloh.)



Obr. 35.2 Bodový zdroj světla O, nazývaný *předmětem*, je ve vzdálenosti p před zrcadlem. Světelné paprsky z O dopadající na zrcadlo se od něj odrážejí. Zachytí-li naše oko odražené paprsky, vnímáme bodový zdroj světla I, jako by se nacházel za zrcadlem ve vzdálenosti i od něj. Vnímaný zdroj I je *virtuální obraz* předmětu O.

Světlo dopadající na zrcadlo je znázorněno paprsky, které se šíří ze zdroje O. Odraz světla je znázorněn paprsky šířícími se od zrcadla. Prodloužíme-li odražené paprsky dozadu (za zrcadlo), zjistíme, že prodloužené paprsky se protínají v bodě ležícím ve vzdálenosti i za zrcadlem.

Díváme-li se na zrcadlo na obr. 35.2, zachytí naše oko některé z odražených paprsků. Vnímáme bodový zdroj světla umístěný v průsečíku prodloužených paprsků. Tento bodový zdroj je obraz I předmětu O. Nazveme ho **bodovým obrazem**, protože je to bod, a je to **virtuální obraz**, protože jím paprsky ve skutečnosti neprocházejí. (V případě reálného obrazu, jak uvidíme, paprsky průsečíkem skutečně procházejí.)



Obr. 35.3 Dva paprsky vybrané z mnoha paprsků na obr. 35.2. Paprsek OA svírá s normálou k zrcadlové ploše libovolný úhel θ. Paprsek OB je kolmý k zrcadlu.

Z mnoha paprsků na obr. 35.2 jsou na obr. 35.3 vybrány dva. Jeden dopadá kolmo na zrcadlo v bodě B. Druhý dopadá pod úhlem θ v libovolném bodě A. Oba odražené paprsky prodloužíme za zrcadlo. Pravoúhlé trojúhelníky AOB a AIB mají společnou stranu AB a tři stejné úhly,

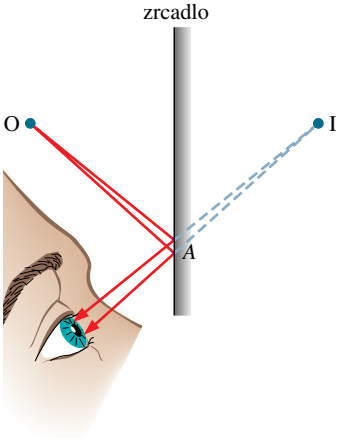
jsou tedy shodné. Shodné jsou i jejich vodorovné strany, tj.

$$|IB| = |OB|, \qquad (35.1)$$

kde $|IB|$ je vzdálenost obrazu a $|OB|$ je vzdálenost předmětu od zrcadla. Rov. (35.1) říká, že obraz je tak daleko za zrcadlem, jako je předmět před ním. Podle dohody je **předmětová vzdálenost** p brána jako kladná veličina a **obrazová vzdálenost** i jako záporná. Pak rov. (35.1) můžeme zapsat jako $|i| = p$ nebo

$$i = -p \quad \text{(rovinné zrcadlo)}. \qquad (35.2)$$

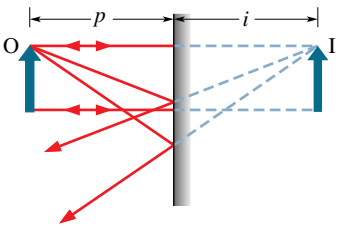
Po odrazu na zrcadle mohou vstoupit do oka pouze ty paprsky, které jsou těsně u sebe. Pro polohu oka znázorněnou na obr. 35.4 se pro vytvoření obrazu využije jen malá část zrcadla v okolí bodu A (část menší než oční pupila). Abychom ji nalezli, zavřeme jedno oko a pozorujme zrcadlový obraz malého předmětu, např. špičku tužky. Potom pohybujme konečkem prstu po zrcadlové ploše, až zakryjeme obraz. Obraz je vytvářen jen malou částí zrcadla pod konečkem prstu.



Obr. 35.4 Úzký svazek paprsků z bodu O vstupuje po odrazu na zrcadle do oka. Při odrazu těchto paprsků je využita malá část zrcadla blízko A. Zdá se, jako by světlo pocházelo z bodu I za zrcadlem.

Rozlehlé předměty

Šipka ve vzdálenosti p před zrcadlem na obr. 35.5 představuje rozlehlý předmět O. Každá malá část předmětu se chová jako bodový předmět z obr. 35.2 a 35.3. Zachytíme-li světlo odražené zrcadlem, vnímáme virtuální obraz I, který se skládá z virtuálních bodových obrazů všech těchto částí předmětu a který se zdá být ve vzdálenosti i za zrcadlem. Vztah mezi i a p udává rov. (35.2).



Obr. 35.5 Rozlehlý předmět O a jeho virtuální obraz I v rovinném zrcadle.

Polohu obrazu rozlehlého předmětu můžeme určit stejně, jak jsme určili polohu bodového předmětu na obr. 35.3: nakreslíme některé z paprsků, které dopadají na zrcadlo z vrcholu šipky, nakreslíme odpovídající odražené paprsky a pak protáhneme odražené paprsky za zrcadlo, až nalezneme jejich průsečík. Ten je obrazem vrcholu předmětu. Pak uděláme totéž pro paprsky ze spodního konce šipky. Z obr. 35.5 zjistíme, že virtuální obraz I má stejnou orientaci a *výšku* (měřenou rovnoběžně se zrcadlem) jako předmět O.

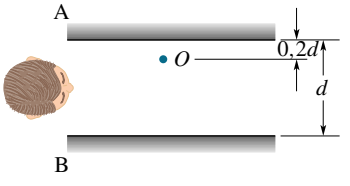
Manetův „Folies-Bergère“

Na obraze *Bar ve Folies-Bergère* vidíme sál s barem odrazem na velkém zrcadle, zavěšeném na stěně za ženou obsluhující bar. Odraz je však poněkud chybný ve třech věcech. Předně si povšimněme lahví vlevo. Manet namaloval jejich odraz v zrcadle, ale nevhodně jej umístil tím, že je namaloval daleko blíže k přední části baru, než ve skutečnosti jsou.

Nyní si všimněme odrazu ženy. Protože se na ženu díváte přímo zepředu, její odraz by měl být za ní a měla by být viditelná pouze jeho malá část (jestli vůbec); přesto Manet namaloval její odraz zcela napravo. Nakonec si všimněme odrazu muže, který na ni hledí. To musíte být vy, protože jak odraz ukazuje, muž stojí přímo před ženou, a tudíž to musí být ten, kdo si prohlíží malbu. Díváte se na Manetovo dílo a vidíte svůj odraz zcela vpravo.

Obraz působí tajemným dojmem, protože nesouhlasí s tím, co bychom očekávali od odrazu na zrcadle a od jeho malby.

KONTROLA 1: Na obrázku se díváte do soustavy dvou svislých rovnoběžných zrcadel A a B ve vzdálenosti d od sebe. Šklebící se obluda sedí na bidélku v bodě O ve vzdálenosti $0{,}2d$ od zrcadla A. Každé zrcadlo vytváří *první* (nejbližší) obraz obludy. Vytváří však také *druhý* obraz, jehož předmětem je první obraz vytvořený protilehlým zrcadlem. Vytváří i *třetí* obraz, jehož předmětem je druhý obraz na protilehlém zrcadle. A tak dále — můžete pozorovat stovky obrazů šklebící se obludy. Jak daleko za zrcadlem A je první, druhý a třetí obraz vytvořený zrcadlem A?



PŘÍKLAD 35.1

Výška Charlese Barkleye je 198 cm. Jak vysoké musí být svislé zrcadlo, aby v něm viděl svou postavu celou?

ŘEŠENÍ: V obr. 35.6 je bod H umístěn ve výšce vrcholu Barkleyovy hlavy, bod E ve výšce jeho očí a bod F ve výšce spodku jeho chodidel. (Pro přehlednost byl bod H nakreslen poněkud výše.) Obrázek ukazuje dráhy paprsků vycházejících z jeho hlavy a jeho chodidel a vstupujících do jeho očí po odrazu na zrcadle v bodě A, resp. v bodě C. Zrcadlo musí pokrývat pouze svislou vzdálenost h mezi těmito body.

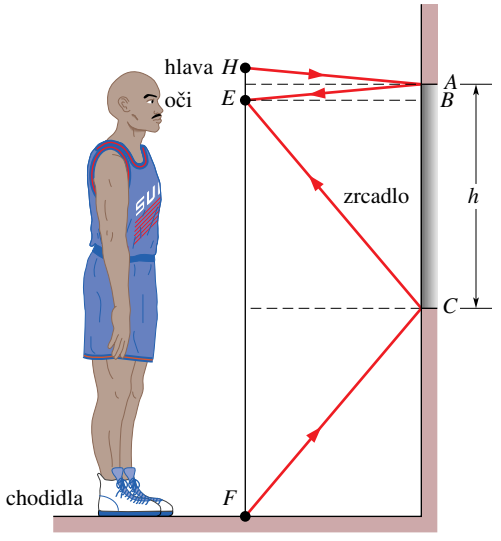
Z geometrie a z rov. (34.43) plyne

$$|AB| = \tfrac{1}{2}|HE| \quad \text{a} \quad |BC| = \tfrac{1}{2}|EF|.$$

Potřebná délka je tedy

$$h = |AB| + |BC| = \tfrac{1}{2}(|HE| + |EF|) = \\ = \tfrac{1}{2}(198\,\text{cm}) = 99\,\text{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Zrcadlo tedy nemusí být delší než polovina atletovy výšky. A tento výsledek nezávisí na jeho vzdálenosti od zrcadla. (Máte-li k dispozici dlouhé zrcadlo, můžete experimentovat tak, že přelepíte novinami ty části zrcadla, které nepřispívají k vašemu obrazu. Zjistíte, že délka, kterou jste ponechali nezakrytou, je právě jedna polovina vaší výšky. Zrcadla umístěná pod bodem C vám umožní prohlížet si obraz podlahy.)



Obr. 35.6 Příklad 35.1. Zrcadlo, v němž můžete vidět celou výšku své postavy, nemusí být delší než polovina vaší výšky.

35.3 KULOVÉ ZRCADLO

Přejděme nyní od obrazů vytvářených rovinnými zrcadly k obrazům vytvářeným zrcadly se zakřivenými povrchy. Budeme uvažovat zejména kulová (sférická) zrcadla, což jsou prostě zrcadla ve tvaru části kulové plochy. Rovinné zrcadlo můžeme pokládat za kulové zrcadlo s nekonečně velkým *poloměrem křivosti*.

Od rovinného ke kulovému zrcadlu

Začněme u rovinného zrcadla na obr. 35.7a, obráceného doleva k předmětu O, který je zakreslen, a k pozorovateli, který zakreslen není. **Vyduté zrcadlo** (též **konkávní**) vytvoříme zakřivením povrchu zrcadla tak, že tvoří vydutou plochu, jaká je na obr. 35.7b. Tímto zakřivením povrchu se mění některé charakteristiky zrcadla a obrazu jím vytvářeného:

1. *Střed křivosti C* (střed kulové plochy, jejíž část tvoří povrch zrcadla) byl u rovinného zrcadla nekonečně vzdálený; u vydutého zrcadla je blíže, ale stále ještě před zrcadlem.

2. *Zorné pole* — rozsah scény, která je odrážena k pozorovateli — bylo široké; nyní je menší.

3. Obraz předmětu byl tak daleko za rovinným zrcadlem, jako byl předmět před ním; u vydutého zrcadla je obraz ještě dále za ním, tj. $|i|$ je větší.

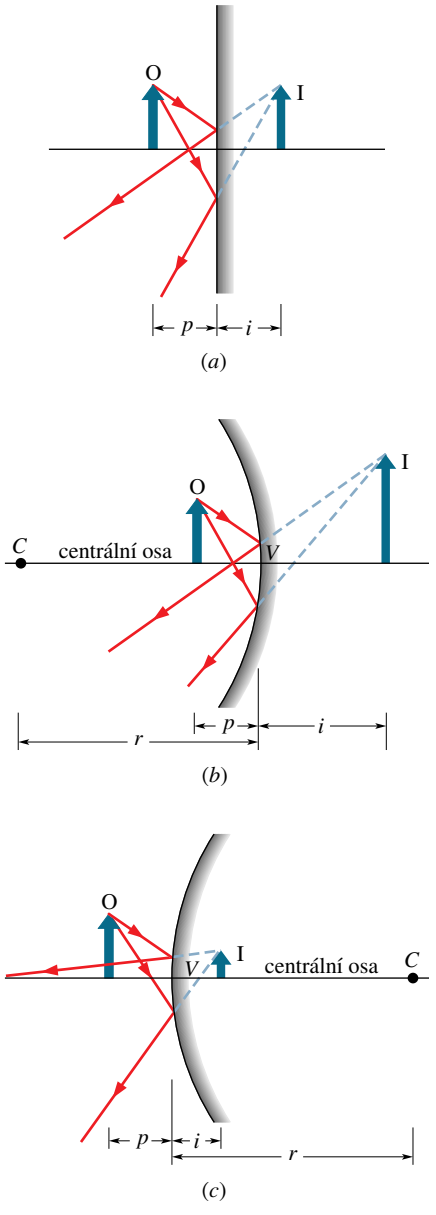
4. Výška obrazu byla rovna výšce předmětu; nyní je výška obrazu větší. Pro tuto vlastnost jsou makeupová zrcátka a zrcátka k holení vydutá — vytvářejí totiž větší obraz tváře.

Vypuklé zrcadlo (též **konvexní**) vytvoříme zakřivením povrchu zrcadla tak, že tvoří vypuklou plochu, jaká je na obr. 35.7c. Takové zakřivení povrchu přesouvá střed křivosti C za zrcadlo a zvětšuje zorné pole. Posouvá též obraz předmětu blíže k zrcadlu a zmenšuje jej. Zrcadla sloužící k dozoru v obchodních domech bývají obvykle vypuklá; díky zvětšení zorného pole jimi lze sledovat větší část prodejny.

Ohniska kulových zrcadel

U rovinného zrcadla je velikost obrazové vzdálenosti i vždy rovna předmětové vzdálenosti p. Dříve, než určíme, v jakém vztahu jsou tyto vzdálenosti pro sférické zrcadlo, musíme se zabývat odrazem světla od předmětu O umístěného v nekonečné vzdálenosti před kulovým zrcadlem na *centrální ose* (neboli *optické ose*) zrcadla. Tato osa prochází středem křivosti C a vrcholem V zrcadla. Protože vzdálenost mezi předmětem a zrcadlem je velká, světelné vlny šířící se z předmětu podél centrální osy jsou při dopadu na zrcadlo rovinné. To znamená, že všechny paprsky představující tuto vlnu jsou při dopadu rovnoběžné s centrální osou.

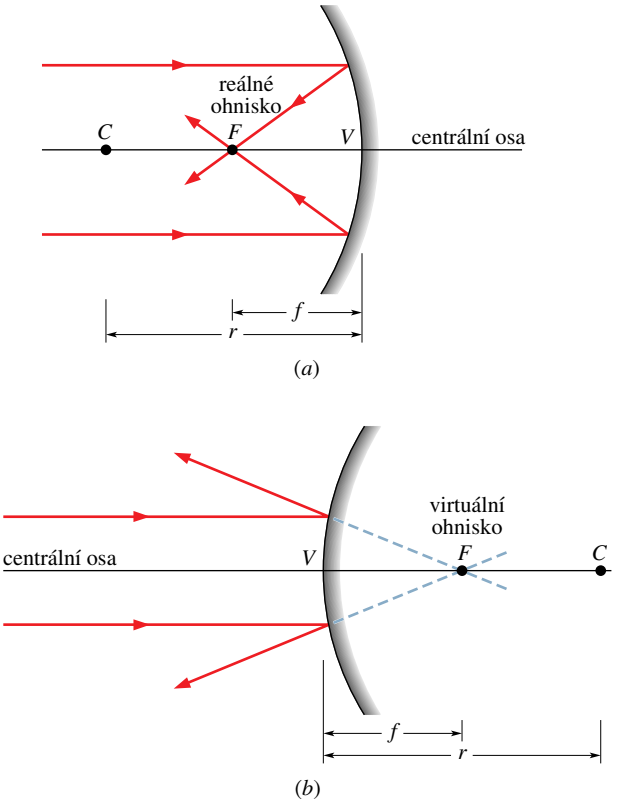
Po dopadu těchto rovnoběžných paprsků na vyduté zrcadlo (obr. 35.8a) se paprsky blízké centrální ose odrážejí tak, že procházejí společným průsečíkem F; dva z těchto paprsků jsou zakresleny na obrázku. Umístíme-li do bodu F



Obr. 35.7 (a) Rovinné zrcadlo vytváří virtuální obraz I předmětu O. (b) Je-li zrcadlo prohnuto tak, že se stane *vydutým*, přesune se obraz dále od něj a zvětší se. (c) Je-li zrcadlo prohnuto tak, že se stane *vypuklým*, přesune se obraz blíže k němu a zmenší se.

list papíru, objeví se na něm bodový obraz nekonečně vzdáleného předmětu O. (To by nastalo pro jakýkoli předmět nekonečně vzdálený ve směru osy.) Bod F nazýváme **ohniskem** (nebo **ohniskovým bodem**) zrcadla a jeho vzdálenost od vrcholu zrcadla **ohniskovou vzdáleností** f zrcadla.

Nahradíme-li vyduté zrcadlo vypuklým, zjistíme, že rovnoběžné paprsky již neprocházejí po odrazu společným bodem. Místo toho se rozbíhají, jak ukazuje obr. 35.8b.



Obr. 35.8 (a) Vyduté zrcadlo soustředí dopadající rovnoběžné paprsky do reálného ohniska F, které leží na téže straně jako paprsky. (b) Vypuklé zrcadlo odráží dopadající rovnoběžné paprsky tak, jako by se rozbíhaly z virtuálního ohniska F, ležícího na opačné straně zrcadla.

Jestliže však naše oko zachytí některé z odražených paprsků, vnímáme světlo tak, jako by přicházelo z bodového zdroje za zrcadlem. Tento zdroj je umístěn ve společném bodě (F na obr. 35.8b), kterým procházejí prodloužené odražené paprsky. Tento bod je ohnisko F vypuklého zrcadla a jeho vzdálenost od vrcholu zrcadla je ohnisková vzdálenost f zrcadla. Umístíme-li do ohniska list papíru, *neobjeví se* na něm obraz předmětu O. Toto ohnisko tedy není stejné povahy jako ohnisko vydutého zrcadla.

Abychom odlišili skutečné ohnisko vydutého zrcadla od ohniska vypuklého zrcadla, které pouze vyvolává vjem bodového zdroje, nazveme první z nich *skutečným* (*reálným*) ohniskem a druhé *zdánlivým* (*virtuálním*) ohniskem. Kromě toho ohniskovou vzdálenost f pokládáme za kladnou veličinu u vydutého zrcadla a za zápornou veličinu u vypuklého zrcadla. Pro zrcadla obou typů jsou ohnisková vzdálenost f a poloměr křivosti r vázány vztahem

$$f = \tfrac{1}{2}r \quad \text{(kulové zrcadlo)}, \tag{35.3}$$

kde r je kladné u vydutého a záporné u vypuklého zrcadla v souladu se znaménky ohniskové vzdálenosti.

35.4 ZOBRAZENÍ KULOVÝM ZRCADLEM

Máme-li definováno ohnisko kulového zrcadla, můžeme najít vztah mezi obrazovou vzdáleností i a předmětovou vzdáleností p pro vydutá a vypuklá kulová zrcadla. Začneme s případem, kdy předmět O je umístěn *mezi vyduté zrcadlo a jeho ohnisko F* (obr. 35.9a). Potom může pozorovatel vidět v zrcadle virtuální obraz předmětu O: obraz se vytváří za zrcadlem a je stejně orientován jako předmět.

Jestliže nyní pohybujeme předmětem dále od zrcadla až do ohniska, obraz postupuje dále za zrcadlo až do nekonečna (obr. 35.9b). Pak je obraz nejasný a nerozeznatelný, protože ani odražené paprsky, ani paprsky prodloužené za zrcadlo se neprotnou v konečné vzdálenosti, aby vytvořily obraz bodu O.

Pohybujeme-li předmětem ještě dále od ohniska, tj. tak, že jeho vzdálenost od zrcadla je *větší než ohnisková vzdálenost*, budou se paprsky odražené od zrcadla sbíhat a vytvoří převrácený obraz I předmětu O před zrcadlem (obr. 35.9c). Tento obraz postupuje z nekonečna, přemísťujeme-li předmět z ohniska. Kdybychom v místě, kde se nachází obraz, podrželi kousek papíru, bude na něm obraz viditelný — říkáme, že obraz je **zaostřený** neboli **fokusovaný** na papír. Protože obraz na papíře skutečně vzniká, je to reálný obraz — paprsky se skutečně protnou a vytvoří obraz nezávisle na tom, zda je přítomen pozorovatel. Obrazová vzdálenost i reálného obrazu je kladná veličina na rozdíl od obrazové vzdálenosti virtuálního obrazu. Dále vidíme, že platí:

Reálné obrazy vznikají na téže straně zrcadla, kde se nachází předmět, virtuální obrazy na opačné straně.

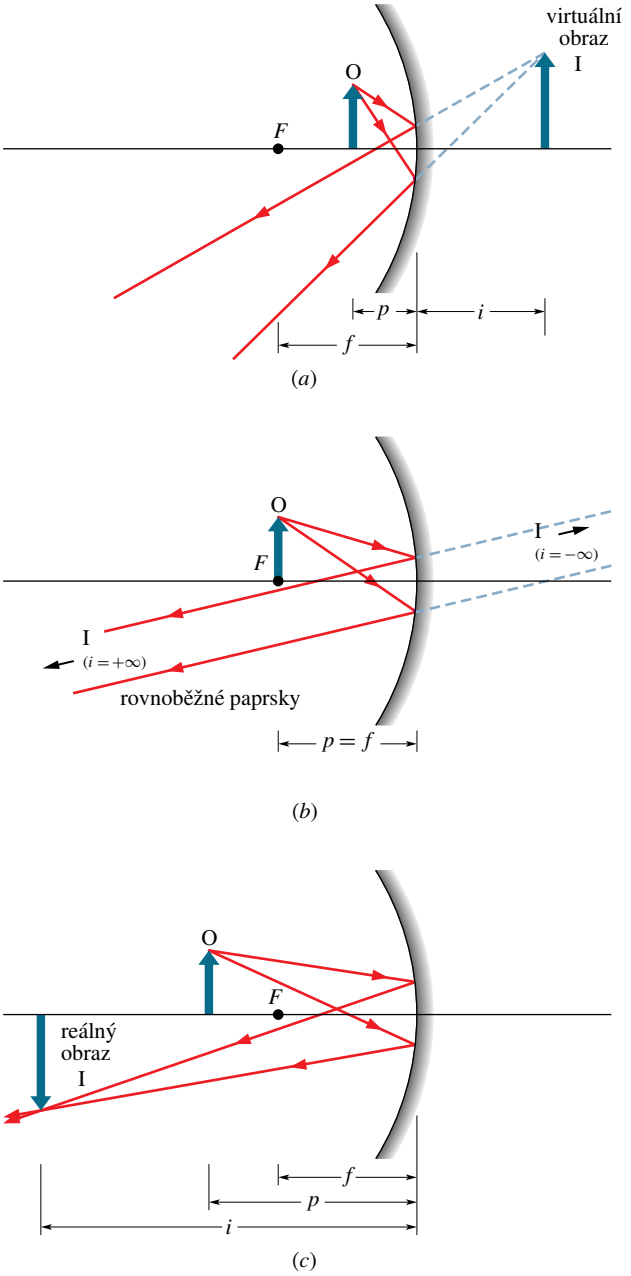
Jak dokážeme v čl. 35.8, svírají-li světelné paprsky jen malé úhly s centrální osou kulového zrcadla, jsou předmětová vzdálenost p, obrazová vzdálenost i a ohnisková vzdálenost f vázány jednoduchým vztahem

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f} \quad \text{(kulové zrcadlo).} \qquad (35.4)$$

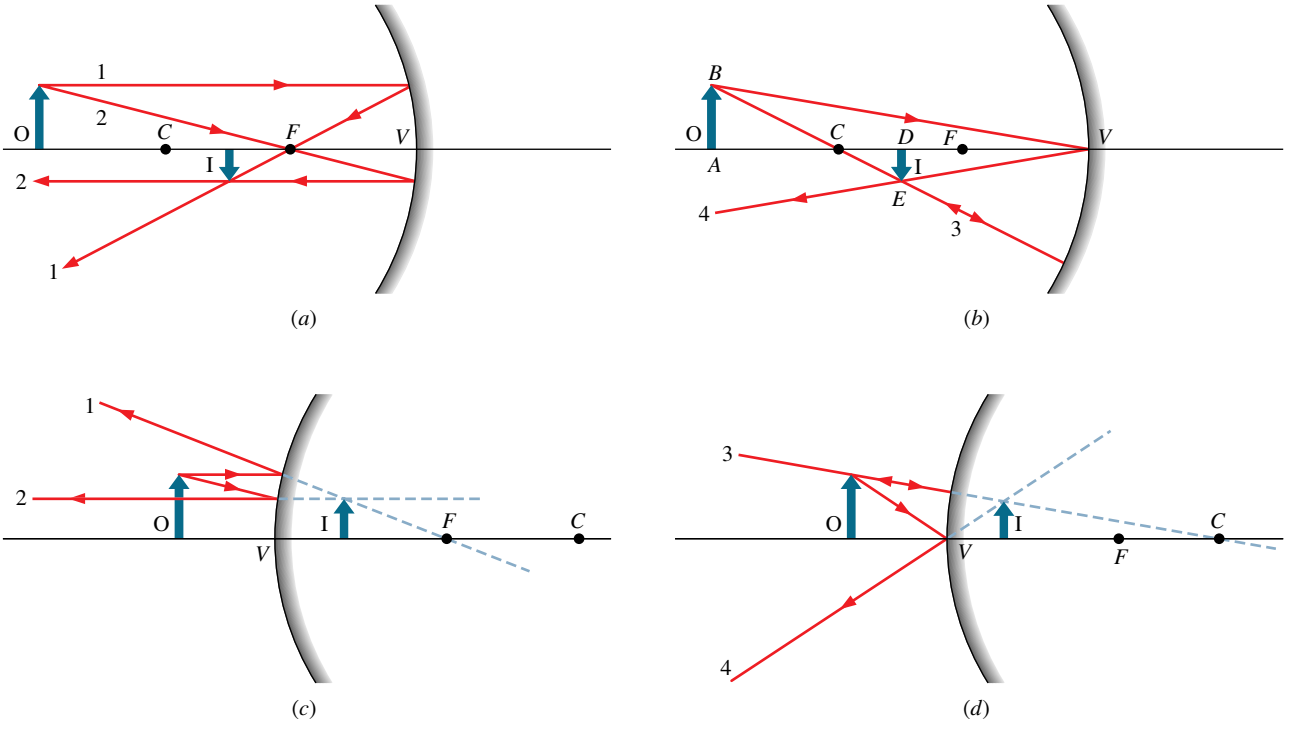
(V obrázcích jako např. obr. 35.9 jsou pro názornost úhly paprsků zveličeny.)

Velikost předmětu, resp. obrazu měřená *kolmo* k centrální ose zrcadla se nazývá *výška předmětu*, resp. *obrazu*. Označme výšku předmětu h a výšku obrazu h'. Pak poměr h'/h nazveme **příčným zvětšením** m zrcadla. Podle dohody opatříme příčné zvětšení znaménkem plus, jsou-li orientace obrazu a předmětu stejné a znaménkem minus, jsou-li opačné. Proto píšeme vztah pro m takto:

$$|m|=\frac{h'}{h} \quad \text{(příčné zvětšení).} \qquad (35.5)$$



Obr. 35.9 (a) Předmět O mezi vydutým zrcadlem a jeho ohniskem a jeho virtuální obraz I. (b) Předmět v ohnisku F. (c) Předmět ve vzdálenosti větší než ohnisková vzdálenost a jeho reálný obraz.



Obr. 35.10 (a, b) Čtyři paprsky, jejichž narýsováním můžeme nalézt obraz libovolného předmětu vytvořený vydutým zrcadlem. Pro polohu předmětu na obrázku vznikne reálný a převrácený obraz menší než předmět. (c, d) Čtyři podobné paprsky pro případ vypuklého zrcadla. Toto zrcadlo vytvoří vždy virtuální obraz orientovaný stejně jako předmět a menší než předmět. (Paprsek 2 v obr. (c) směřoval původně do ohniska F.)

Brzy dokážeme, že příčné zvětšení můžeme zapsat takto:

$$m = -\frac{i}{p} \quad \text{(příčné zvětšení).} \tag{35.6}$$

Pro rovinné zrcadlo, kde $i = -p$, dostaneme $m = +1$. Zvětšení rovné 1 znamená, že velikosti obrazu a předmětu jsou stejné. Znaménko plus značí, že obraz a předmět mají stejnou orientaci. Pro vyduté zrcadlo na obr. 35.9c je $m \doteq$ $\doteq -1{,}5$.

Rov. (35.3) až (35.6) platí pro všechna rovinná, kulová vydutá a kulová vypuklá zrcadla. Kromě těchto rovnic je potřeba, abyste zvládli množství dalších informací o těchto zrcadlech. Vyplněním tab. 35.1 byste si je měli uspořádat. Ve sloupci OBRAZ/POLOHA rozhodněte, zda je obraz na *téže* straně zrcadla jako předmět, nebo na *opačné* straně. Ve sloupci OBRAZ/TYP rozhodněte, zda je obraz *reálný*, nebo *virtuální*. Ve sloupci OBRAZ/ORIENTACE rozhodněte, zda obraz má *stejnou* orientaci jako předmět, nebo zda je *převrácený*. Ve sloupcích ZNAMÉNKO uveďte znaménko veličiny, nebo vyplňte ±, může-li se vyskytnout znaménko obojí.

Nalezení polohy obrazu paprskovou konstrukcí

Na obr. 35.10a, b je znázorněn předmět O umístěný před vydutým zrcadlem. Polohu obrazu libovolného bodu předmětu, který neleží na ose, můžeme určit pomocí *paprskového*

Tabulka 35.1 **Uspořádání informací o zrcadlech**

TYP ZRCADLA	POLOHA PŘEDMĚTU	OBRAZ			ZNAMÉNKO VELIČINY			
		POLOHA	TYP	ORIENTACE	f	r	i	m
Rovinné	kdekoli							
Vyduté	$p < f$							
	$p > f$							
Vypuklé	kdekoli							

obrazce s využitím kterýchkoli dvou paprsků z následujících čtyř speciálních paprsků procházejících tímto bodem.

1. Paprsek původně rovnoběžný s osou se odráží do ohniska (paprsek 1 na obr. 35.10a).
2. Paprsek, který se po průchodu ohniskem odráží od zrcadla, vystupuje rovnoběžně s osou (paprsek 2 na obr. 35.10a).
3. Paprsek, který se odráží po průchodu středem křivosti C od zrcadla, se vrací po stejné přímce (paprsek 3 na obr. 35.10a).
4. Paprsek, který se odráží od zrcadla v průsečíku V zrcadla s osou, se odráží symetricky podle této osy (paprsek 4 na obr. 35.10b).

Obraz zvoleného bodu je v průsečíku libovolných dvou speciálních paprsků. Obraz předmětu nalezneme určením polohy obrazů dvou nebo více jeho bodů. Při užití těchto paprsků u vypuklých zrcadel je zapotřebí poněkud změnit jejich popis (obr. 35.10c, d).

Odvození rov. (35.6)

Nyní jsme schopni odvodit rov. (35.6) ($m = -i/p$), tj. výraz pro příčné zvětšení předmětu zobrazeného zrcadlem. Uvažujme paprsek 4 v obr. 35.10b. Ten se odráží v bodě V tak, že dopadající a odražený paprsek svírají týž úhel s osou zrcadla.

Dva pravoúhlé trojúhelníky ABV a DEV v obrázku jsou podobné, takže můžeme napsat

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|VD|}{|VA|}.$$

Podíl na levé straně (necháme-li stranou otázku znaménka) představuje příčné zvětšení zrcadla. Protože pozorujeme převrácený obraz a tedy zvětšení je *záporné*, označíme jej $-m$. Jenže $|VD| = i$, $|VA| = p$, takže dostáváme

$$m = -\frac{i}{p} \quad \text{(zvětšení)}. \tag{35.7}$$

PŘÍKLAD 35.2

Tarantule výšky h sedí před kulovým zrcadlem s ohniskovou vzdáleností $|f| = 40\,\text{cm}$. Obraz tarantule vytvořený zrcadlem je orientován shodně jako předmět a má výšku $h' = 0{,}20h$.

(a) Je obraz reálný, nebo virtuální a leží na stejné straně jako tarantule, nebo na opačné?

ŘEŠENÍ: Protože obraz je stejně orientován jako předmět (tarantule), musí být virtuální a musí ležet na opačné straně zrcadla. (Tento výsledek snadno zjistíte, máte-li vyplněnu tab. 35.1.)

(b) Je zrcadlo vyduté, nebo vypuklé a jaká je jeho ohnisková vzdálenost f (včetně znaménka)?

ŘEŠENÍ: Můžeme z typu obrazu, který zrcadlo vytváří, určit typ zrcadla? Ne, protože virtuální obraz může být vytvářen oběma typy zrcadel. Můžeme určit typ zrcadla nalezením znaménka f z rov. (35.3) a (35.4)? Ne, na to nemáme dostatek informací. Jediný postup, který nám zbývá, je uvážit informace o zvětšení. Víme, že podíl obrazové výšky h' a výšky předmětu h se rovná 0,20. Z rov. (35.5) vychází

$$|m| = \frac{h'}{h} = 0{,}20.$$

Protože předmět i obraz jsou orientovány shodně, víme, že m musí být kladné: $m = +0{,}20$. Dosazením do rov. (35.6) a jejím řešením, řekněme pro i, dostaneme

$$i = -0{,}20p,$$

což se nezdá být užitečné pro nalezení f. Užitečným se stane po dosazení do rov. (35.4). Z rovnice vychází

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{p} = \frac{1}{-0{,}20p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}(-5+1),$$

odkud nalezneme

$$f = -p/4.$$

Protože p je kladné, f musí být záporné, což znamená, že zrcadlo je vypuklé a jeho ohnisková vzdálenost je

$$f = -40\,\text{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 2: Netopýr klímající na centrální ose kulového zrcadla je zobrazen se zvětšením $m = -4$. Je jeho obraz (a) reálný, nebo virtuální, (b) převrácený, nebo stejně orientovaný jako netopýr a (c) na téže straně jako netopýr, nebo na opačné straně?

35.5 KULOVÝ LÁMAVÝ POVRCH

Od obrazů vytvářených odrazem (reflexí) přejdeme k obrazům vytvářeným lomem (refrakcí) na površích průhledných materiálů, např. skla. Budeme uvažovat pouze kulové povrchy; jejich poloměr křivosti označme r a střed křivosti C. Bodový předmět O umístěný v prostředí s indexem lomu n_1 bude vysílat světlo, které se bude lámat na kulovém rozhraní do prostředí s indexem lomu n_2.

Zajímáme se o to, kdy světelné paprsky po lomu na ploše povrchu nebo rozhraní vytvoří reálný obraz (jehož existence není podmíněna přítomností pozorovatele), nebo virtuální obraz (podmíněný tím, že pozorovatel zachytí paprsky). Odpověď závisí na poměru indexů n_1 a n_2 a na geometrické situaci.

Na obr. 35.11 je znázorněno šest možných výsledků. V každé části obrázku je vystínováno prostředí s větším indexem lomu a předmět O je vždy nalevo od lámavého povrchu v prostředí s indexem lomu n_1. V každé části je zakreslen chod jednoho typického paprsku po lomu na ploše. (Tento paprsek spolu s paprskem šířícím se ve směru optické osy určuje ve všech případech polohu obrazu.)

Normálou k lámavé ploše v bodě dopadu typického paprsku je radiála procházející středem křivosti C. Vstupuje-li paprsek do prostředí s větším indexem lomu, láme se ke kolmici. Vstupuje-li do prostředí s menším indexem lomu, láme se od kolmice. Směřuje-li pak lomený paprsek k centrální ose, vytvoří spolu s ostatními (v obrázku nezakreslenými paprsky) reálný obraz na optické ose. Směřuje-li paprsek od centrální osy, nemůže se reálný obraz vytvořit; zpětné prodloužení tohoto paprsku a také ostatních může vytvořit virtuální obraz za předpokladu (stejného jako u zrcadel), že některé z těchto paprsků zachytí oko pozorovatele.

Reálné obrazy I (v obrazové vzdálenosti i) se tvoří v obr. 35.11a, b tam, kde lomené paprsky *směřují k* centrální ose. Virtuální obrazy vznikají v obr. 35.11c, d tam, kde lomené paprsky *směřují od* centrální osy. Povšimněme si, že v těchto čtyřech případech vznikají reálné obrazy tehdy, nachází-li se předmět poměrně daleko od lámavé plochy a virtuální obrazy tehdy, je-li předmět blíže lámavé plochy. V posledních dvou případech (obr. 35.11e, f) směřují lomené paprsky vždy od centrální osy a vytváří virtuální obraz nezávisle na předmětové vzdálenosti.

Povšimněme si hlavního rozdílu oproti obrazům vzniklým odrazem:

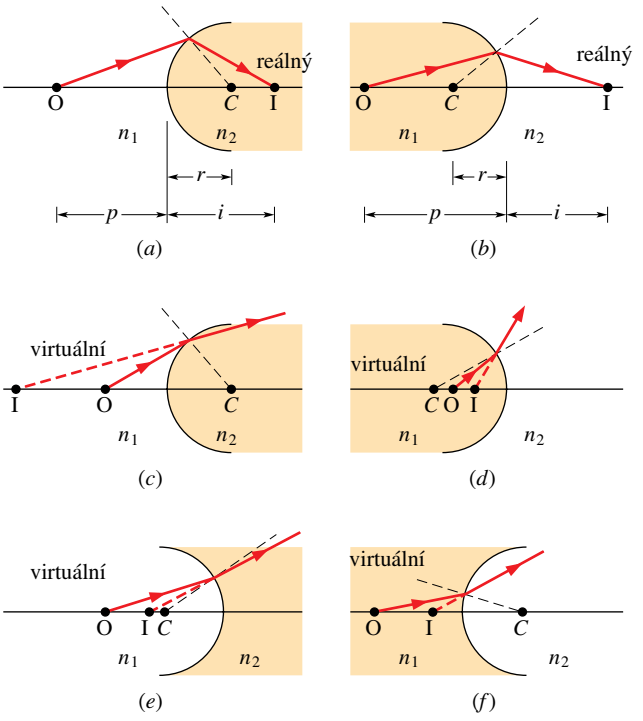
> Reálné obrazy vznikají na opačné straně lámavé plochy, než se nachází předmět; virtuální vznikají na téže straně.

V čl. 35.8 ukážeme, že pro paprsky svírající malé úhly s centrální osou platí

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r}. \qquad (35.8)$$

Předmětová vzdálenost p je stejně jako u zrcadel kladná; obrazová vzdálenost i je kladná pro reálný obraz a záporná pro virtuální obraz. Abychom však měli v rov. (35.8) všechna znaménka správně, musíme ještě užít následujícího pravidla pro znaménko poloměru křivosti r:

> Nachází-li se předmět před vypuklou lámavou plochou, je poloměr křivosti r kladný. Nachází-li se před vydutou plochou, je r záporné.



Obr. 35.11 Šest možných způsobů, při nichž vznikne obraz lomem na kulovém povrchu poloměru r se středem křivosti C. Povrch (rozhraní) odděluje dvě prostředí s indexy lomu n_1 a n_2. Bodový zdroj O je vždy v prostředí s n_1 nalevo od povrchu. Prostředí s menším indexem lomu není vystínováno (myslete si, že je to vzduch, zatímco druhé prostředí je vyplněno sklem). Reálné obrazy vznikají v případech (a) a (b), virtuální obrazy vznikají v ostatních čtyřech případech.

Pozor: toto pravidlo je právě obrácené než pravidlo pro zrcadla.

PŘÍKLAD 35.3

Moskyt z jurského období byl nalezen zalitý v kusu jantaru s indexem lomu 1,6. Jeden povrch jantaru tvoří vypuklá kulová plocha s poloměrem křivosti 3,0 mm (obr. 35.12). Hlava moskyta leží na centrální ose povrchu. Prohlížíme-li ji ve směru osy, jeví se vnořena 5,0 mm do jantaru. V jaké hloubce je ve skutečnosti?

ŘEŠENÍ: Předně si musíme uvědomit, co znamená „jeví se“: znamená to, že pozorovatel (ve vzduchu) vidí obraz hlavy moskyta v jantaru 5,0 mm od kulového povrchu jantaru. Protože předmět (hlava) a jeho obraz jsou na téže straně lámavé plochy, musí být obraz virtuální a tedy $i = -5{,}0$ mm. Index lomu prostředí, v němž leží předmět, je vždy označen n_1; musíme tedy položit $n_1 = 1{,}6$ a $n_2 = 1{,}0$. Konečně protože předmět leží před vydutou lámavou plochou, je její poloměr křivosti záporný, $r = -3{,}0$ mm. Hledáme polohu před-

mětu p. Dosazením těchto údajů do rov. (35.8) dostaneme

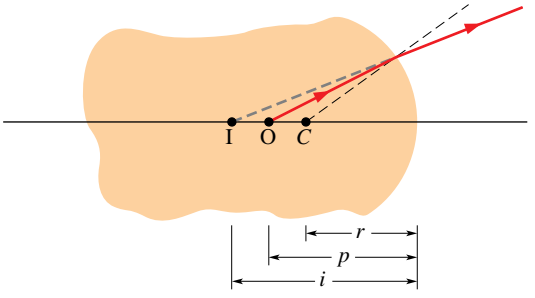
$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r},$$

tedy

$$\frac{1,6}{p} + \frac{1,0}{-5,0\,\text{mm}} = \frac{1,0 - 1,6}{-3,0\,\text{mm}}$$

a

$$p = 4,0\,\text{mm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 35.12 Příklad 35.3. Moskyt z jurského období pohřbený v kusu jantaru; jeho hlava se nachází v bodě O. Kulový lámavý povrch na pravé straně se středem křivosti C vytváří obraz I vnímaný pozorovatelem, který zachytí paprsky šířící se z předmětu O.



Hmyz pohřbený v jantaru přibližně před 25 miliony let. Protože ho pozorujeme přes zakřivený lámavý povrch, nesouhlasí obraz, který vidíme, s polohou předmětu.

KONTROLA 3: Včela se vznáší před vydutým kulovým lámavým povrchem skleněné sochy. (a) Který z případů na obr. 35.11 odpovídá této situaci? (b) Je obraz vytvořený tímto povrchem reálný, nebo virtuální a nachází se na stejné straně jako včela, nebo na opačné?

35.6 TENKÁ ČOČKA

Čočka je průhledné (transparentní) těleso se dvěma lámavými plochami, jejichž centrální osy splývají. Společná centrální osa je centrální osou čočky. Je-li čočka obklopena vzduchem, láme se světlo ze vzduchu do čočky, prochází čočkou a znovu se láme do vzduchu. Při každém lomu se může změnit směr chodu světla.

Čočku, která způsobí, že paprsky původně rovnoběžné s centrální osou se sbíhají (konvergují), nazveme **spojkou** neboli **spojnou (konvergentní) čočkou**. Jestliže čočka místo toho způsobí, že takové paprsky se rozbíhají (divergují), jde o **rozptylku** neboli **čočku rozptylnou (divergentní)**. Umístíme-li předmět před čočky obou typů, mohou lomené světelné paprsky vytvořit obraz tohoto předmětu.

Budeme se zabývat pouze speciálním případem **tenké čočky**, tj. čočkou, jejíž nejtlustší část je tenká ve srovnání s předmětovou vzdáleností p, s obrazovou vzdáleností i a s poloměry křivosti r_1 a r_2 obou povrchů čočky. Budeme také uvažovat pouze světelné paprsky, které svírají malé úhly s centrální osou (v obrázcích jsou tyto úhly zvelíčeny). V čl. 35.8 dokážeme, že za těchto předpokladů má tenká čočka ohniskovou vzdálenost f, která je vázána se vzdálenostmi i a p vztahem

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{i} \qquad \text{(tenká čočka).} \qquad (35.9)$$

Tento vztah má stejný tvar, jaký měla rovnice pro kulová zrcadla. Dokážeme také, že pro tenkou čočku s indexem lomu n obklopenou vzduchem je ohnisková vzdálenost f dána vztahem

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad \text{(tenká čočka ve vzduchu),} \qquad (35.10)$$

kde r_1 je poloměr křivosti povrchu bližšího k předmětu a r_2 je poloměr křivosti druhého povrchu. Znaménka těchto poloměrů určíme podle pravidla pro poloměry lámavých ploch v čl. 35.5. Pro čočku obklopenou jinou látkou než

vzduchem (řekněme rostlinným olejem) s indexem lomu n_m nahradíme n v rov. (35.10) podílem n/n_m. Z předcházejících úvah, na nichž jsou založeny rov. (35.9) a (35.10), vyplývá:

Čočka může vytvářet obraz nějakého předmětu jen tím, že mění směr světelných paprsků. To však může jen tehdy, je-li její index lomu odlišný od indexu lomu látky, která ji obklopuje.

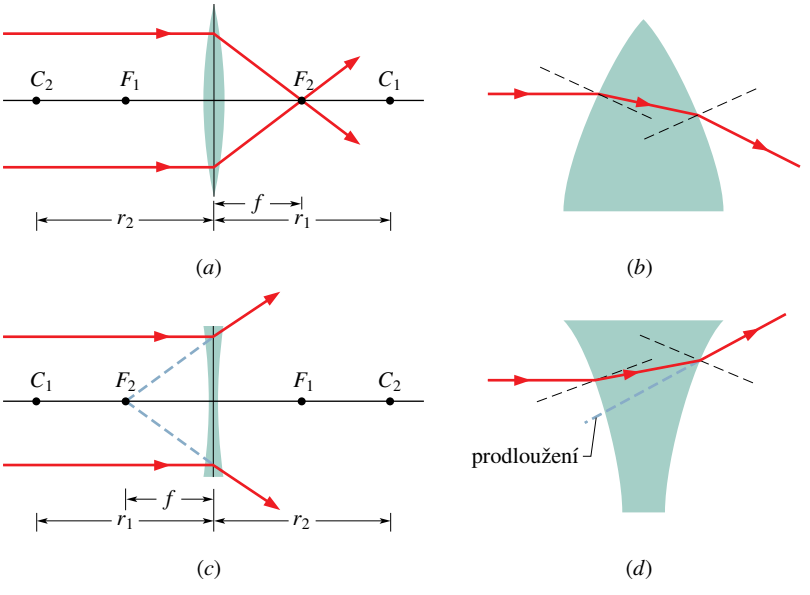
Na obr. 35.13a je tenká čočka s vypuklými lámavými povrchy neboli *stranami* čočky (dvojvypuklá). Procházejí-li jí paprsky, které byly původně rovnoběžné s její centrální osou, lámou se dvakrát, což ukazuje zvětšený obr. 35.13b. Tento dvojí lom způsobuje, že se paprsky sbíhají a procházejí společným bodem F_2 ve vzdálenosti f od středu čočky. Tato čočka je tedy spojná, má v bodě F_2 *reálné* ohnisko (protože paprsky jím skutečně procházejí) a její ohnisková vzdálenost je f. Pošleme-li čočkou paprsky rovnoběžné s optickou osou v opačném směru, nalezneme jiné reálné ohnisko v bodě F_1 na druhé straně čočky. V případě tenké čočky ve vzduchu jsou tato ohniska stejně vzdálena od čočky.

Protože ohniska spojné čočky jsou reálná, pokládáme její ohniskové vzdálenosti f za kladné, stejně jako u vydutého zrcadla s reálným ohniskem. Jenže znaménka v optice mohou být záludná, proto použijeme ke kontrole rov. (35.10). Je-li f kladné, je levá strana rovnice kladná; a co pravá strana? Vyšetřeme ji člen po členu. Index lomu n skla nebo jakéhokoli materiálu je větší než 1, tedy výraz $(n - 1)$ musí být kladný. Protože zdroj světla (kterým je předmět) leží nalevo před vypuklou levou stranou čočky, musí být poloměr křivosti r_1 této strany podle pravidla pro lámavou plochu kladný. Podobně protože předmět leží před vydutou pravou stranou čočky, je poloměr křivosti r_2 této strany záporný. Činitel $(1/r_1 - 1/r_2)$ je tedy kladný a znaménka souhlasí.



Zažehnutí ohně fokusací slunečního světla na noviny pomocí spojné čočky zhotovené z čistého ledu. Čočka byla zhotovena tak, že v mělké nádobě (se zakřiveným dnem) zmrzla voda. (Čočka musí mít hodně velký průměr, protože led silně pohlcuje infračervené záření.)

Na obr. 35.13c je tenká čočka s oběma dutými stranami (dvojdutá). Procházejí-li touto čočkou paprsky rovnoběžné s její centrální osou, lámou se dvakrát, jak je zvětšeně nakresleno na obr. 35.13d. Tyto paprsky se rozbíhají a nikdy neprocházejí společným bodem; proto je tato čočka



Obr. 35.13 (a) Paprsky postupující původně rovnoběžně s centrální osou spojné čočky se sbíhají do ohniska F_2 čočky. Čočka je tenčí než na obrázku, její tloušťka je srovnatelná s tloušťkou svislé přímky procházející čočkou, na níž mění paprsky směr. (b) Zvětšená horní část čočky z obr. (a); normály k povrchům jsou vyznačeny čárkovaně. Povšimněte si, že oba lomy paprsku na površích směrují paprsky dolů k centrální ose. (c) Tytéž původně rovnoběžné paprsky se po průchodu rozptylnou čočkou stanou rozbíhavými. Prodloužené paprsky vycházejí z virtuálního ohniska F_2. (d) Zvětšená horní část čočky z obr. (c). Povšimněte si, že při obou lomech se odchylují paprsky nahoru, od optické osy.

rozptylná (divergentní). Prodloužení těchto paprsků však prochází společným bodem F_2 ve vzdálenosti f od středu čočky. Nazýváme ho *virtuální ohnisko*. (Zachytí-li vaše oko některé z rozbíhavých paprsků, vnímáte jasnou stopu v F_2, jako by tam byl zdroj světla.) Je-li čočka tenká, leží druhé virtuální ohnisko na opačné straně čočky v bodě F_1 umístěném symetricky. Protože ohniska rozptylky jsou virtuální, pokládáme její ohniskovou vzdálenost f za zápornou.

Zobrazování čočkou

Uvažujme nyní, jaké typy obrazu jsou vytvářeny spojkami a rozptylkami. Na obr. 35.14a je předmět O umístěn před ohniskem F_1 spojné čočky (nalevo od F_1). Z chodu dvou paprsků zakreslených v obrázku vidíme, že čočka vytváří reálný převrácený obraz I na opačné straně čočky, než se nachází předmět.

Na obr. 35.14b je předmět umístěn mezi ohniskem F_1 a čočkou (napravo od F_1); čočka pak vytvoří virtuální obraz na téže straně čočky a se stejnou orientaci jako předmět. Spojka tedy může vytvořit jak reálný, tak virtuální obraz v závislosti na tom, je-li předmět nalevo nebo napravo od ohniska.

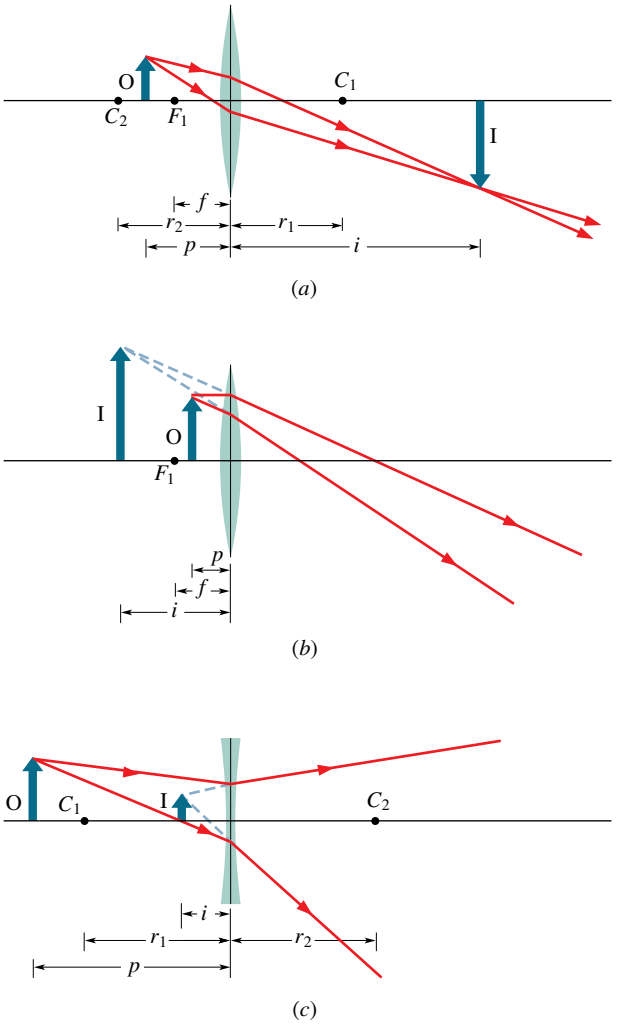
Obr. 35.14c znázorňuje předmět O před rozptylnou čočkou. Nezávisle na předmětové vzdálenosti (nezávisle na tom, zda je O nalevo nebo napravo od virtuálního ohniska) vytvoří tato čočka virtuální obraz, který je na téže straně a má stejnou orientaci jako předmět.

Stejně jako u zrcadel bereme obrazovou vzdálenost i jako kladnou, je-li obraz reálný, a zápornou, je-li virtuální. Nicméně umístění reálných a virtuálních obrazů vytvořených čočkami je opačné než u zrcadel:

> Reálné obrazy se tvoří na opačné straně čočky a virtuální obrazy na téže straně čočky, jako je předmět.

Příčné zvětšení m obrazů vytvořených spojnými a rozptylnými čočkami je dáno rov. (35.5) a (35.6), platnými i pro zrcadla.

V tomto odstavci se po vás chce, abyste si zapamatovali množství informací; měli byste si je utřídit tím, že vyplníte tab. 35.2 pro tenké čočky. Ve sloupci OBRAZ/POLOHA rozhodněte, zda je obraz na *téže* straně, nebo na *opačné* straně čočky jako předmět. Ve sloupci OBRAZ/TYP rozhodněte, zda je obraz *reálný*, nebo *virtuální*. Do sloupce



Obr. 35.14 (a) Reálný převrácený obraz I vytvoří spojná čočka tehdy, je-li předmět O umístěn před ohniskem F_1 spojné čočky (nalevo od něj). (b) Obraz I je virtuální a má stejnou orientaci jako O, je-li O mezi ohniskem a čočkou (napravo od F_1). (c) Rozptylná čočka vytváří virtuální obraz I stejně orientovaný jako předmět O nezávisle na tom, zda předmět leží nalevo od ohniska nebo napravo od něj.

Tabulka 35.2 **Uspořádání informací o čočkách**

TYP ČOČKY	UMÍSTĚNÍ PŘEDMĚTU	OBRAZ			ZNAMÉNKO VELIČINY		
		POLOHA	TYP	ORIENTACE	f	i	m
Spojná	$p < f$						
	$p > f$						
Rozptylná	kdekoli						

OBRAZ/ORIENTACE napište, zda má obraz *stejnou* orientaci jako předmět, nebo zda je *převrácený*.

RADY A NÁMĚTY

Bod 35.1: *Problémy se znaménky u zrcadel a čoček*

Pozor: zrcadlo s vypuklým povrchem má ohniskovou vzdálenost f zápornou; naopak čočka s vypuklými povrchy (dvojvypuklá, bikonvexní) kladnou. Zrcadlo s vydutým povrchem má kladnou ohniskovou vzdálenost; naopak čočka s dutými povrchy (dvojdutá, bikonkávní) má zápornou. Obvyklou chybou je, že se tyto vlastnosti zrcadel a čoček zaměňují.

Nalezení polohy obrazu rozlehlého předmětu paprskovou konstrukcí

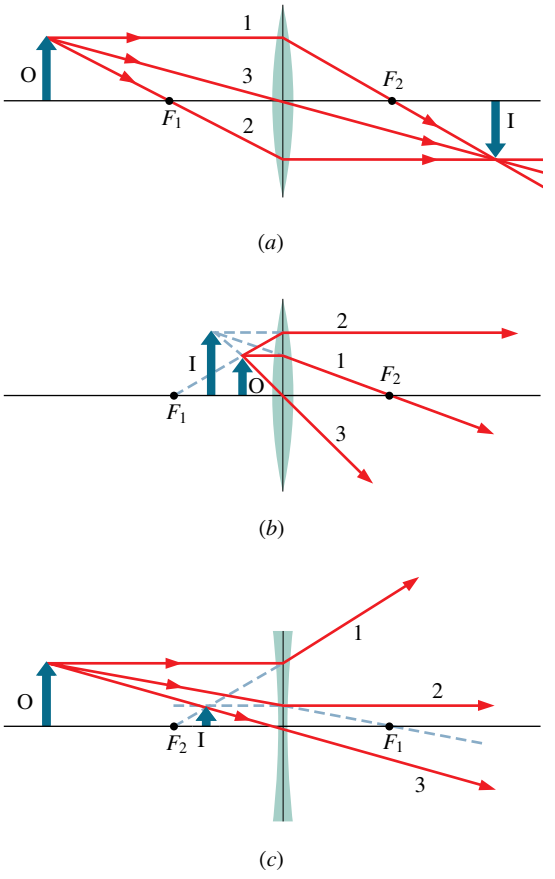
Na obr. 35.15a je znázorněn předmět O před ohniskem F_1 tenké spojné čočky (nalevo od něj). Umístění obrazu jeho libovolného bodu, který neleží na ose (např. vrcholu šipky na obrázku), můžeme nalézt grafickou konstrukcí *paprskového obrazce* pomocí dvou ze tří speciálních paprsků procházejících tímto bodem. Ke speciálním paprskům, vybraným ze všech paprsků procházejících čočkou a vytvářejících obraz, patří tyto:

1. Paprsek původně rovnoběžný s osou čočky prochází po průchodu čočkou ohniskem F_2 (paprsek 1 na obr. 35.15a).
2. Paprsek, který původně procházel ohniskem F_1, vystoupí z čočky rovnoběžně s osou (paprsek 2 na obr. 35.15a).
3. Paprsek, který původně směřoval do středu čočky, z ní vystoupí beze změny směru (paprsek 3 na obr. 35.15a), protože prošel dvěma povrchy čočky, které jsou téměř rovnoběžné. Obraz bodu O je umístěn na druhé straně čočky v průsečíku těchto tří paprsků. Obraz I celého předmětu nalezneme určením obrazů několika jeho bodů.

Obr. 35.15b ukazuje, jak se určí poloha obrazu, je-li předmět umístěn za ohniskem F_1 spojné čočky: využije se prodloužení tří speciálních paprsků. Povšimněme si, že popis paprsku 2 vyžaduje modifikaci (je to nyní paprsek, jehož zpětné prodloužení prochází bodem F_1). Je-li předmět umístěn kdekoli před rozptylnou čočkou (obr. 35.15c), je k určení polohy obrazu zapotřebí pozměnit popis chodu paprsků 1 a 2.

Soustava dvou čoček

Je-li předmět O_1 umístěn před soustavu dvou čoček, jejichž osy splývají (obr. 35.16a), můžeme určit polohu konečného obrazu (tj. obrazu vytvořeného čočkou, která je dále od předmětu) postupným řešením. Čočku bližší k předmětu očíslujeme 1, vzdálenější 2; směr „před čočku“ je „směrem k O“.



Obr. 35.15 Pomocí tří speciálních paprsků určíme polohu obrazu I vytvořeného tenkou čočkou, leží-li předmět O (a) nalevo od ohniska spojné čočky ($p > f$), (b) mezi ohniskem a spojnou čočkou ($p < f$), (c) kdekoli před rozptylnou čočkou.

KROK 1. Vzdálenost předmětu O před čočkou 1 označíme p_1. Potom užitím rov. (35.9) nebo paprskovou konstrukcí nalezneme vzdálenost i_1 obrazu I_1 vytvořeného čočkou 1.

KROK 2. Nyní obraz nalezený v prvním kroku pokládáme za *předmět* pro čočku 2 (tzn. $I_1 = O_2$); přitom již ignorujeme čočku 1. Vznikne-li tento nový předmět před čočkou 2, bereme předmětovou vzdálenost p_2 pro čočku 2 kladně, jak jsme byli zvyklí. Může však vzniknout i za čočkou 2, a pak bereme vzdálenost p_2 záporně: $p_2 < 0$. Užitím rov. (35.9) nebo paprskovou konstrukcí potom nalezneme vzdálenost i_2 (konečného) obrazu vytvořeného čočkou 2.

Podobné řešení po krocích můžeme použít pro libovolný počet čoček nebo v případě, kdy se čočka 2 nahradí zrcadlem.

Celkové příčné zvětšení M soustavy dvou čoček je

součin příčných zvětšení čoček m_1 a m_2:

$$M = m_1 m_2. \qquad (35.11)$$

PŘÍKLAD 35.4

Kudlanka nábožná loví na ose tenké symetrické čočky ve vzdálenosti 20 cm od ní. Její příčné zvětšení při zobrazení čočkou je $m = -0{,}25$ a index lomu materiálu čočky je 1,65.

(a) Určete typ obrazu vytvořeného čočkou, druh čočky, zda se předmět nachází blíže k čočce, nebo dále od ní než ohnisko, na které straně čočky vznikne obraz a zda je obraz převrácený.

ŘEŠENÍ: Z rov. (35.6) ($m = -i/p$) a z dané hodnoty m dostaneme

$$i = -mp = 0{,}25p.$$

Na otázky jsme schopni odpovědět dokonce i bez výpočtů. Protože p je kladné, i musí být také kladné. To znamená, že obraz je reálný a dále že čočka je spojná (jen spojky mohou vytvořit reálný obraz). Předmět se nachází dále od čočky než ohnisko (jen v tomto případě se vytvoří reálný obraz). Obraz je převrácený a na opačné straně čočky než předmět. (Takové jsou vlastnosti reálného obrazu vytvářeného spojkou.)

(b) Jaká je velikost r obou poloměrů křivosti čočky?

ŘEŠENÍ: Čočka je symetrická, proto r_1 (pro povrch bližší k předmětu) a r_2 mají stejnou velikost r. Protože jde o spojnou dvojvypuklou čočku, je $r_1 = +r$ a $r_2 = -r$. Pouze rov. (35.10) obsahuje poloměry křivosti povrchů čočky; postrádáme však hodnotu f, abychom mohli dosadit do této rovnice. Můžeme ji dostat z rov. (35.9), jestliže napřed nalezneme i. Takže nezbývá než dokončit výpočet i dosazením dané hodnoty p:

$$i = -mp = -(-0{,}25)(20\,\text{cm}) = 5{,}0\,\text{cm}.$$

Nyní dostaneme z rov. (35.9)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{(20\,\text{cm})} + \frac{1}{(5{,}0\,\text{cm})},$$

z níž vypočteme $f = 4{,}0\,\text{cm}$.

Rov. (35.10) dává

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{+r} - \frac{1}{-r}\right)$$

a po dosazení známých hodnot

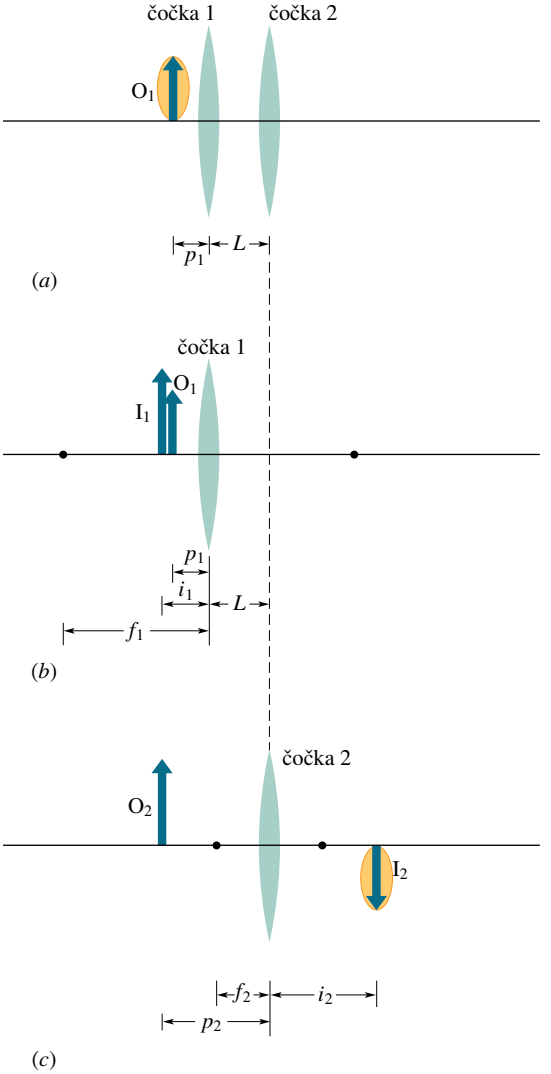
$$\frac{1}{(4{,}0\,\text{cm})} = (1{,}65-1)\frac{2}{r},$$

což dává

$$r = 2(0{,}65)(4{,}0\,\text{cm}) = 5{,}2\,\text{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 35.5

Obilné zrnko na obr. 35.16a je umístěno před dvojicí tenkých souosých čoček 1 a 2 s ohniskovými vzdálenostmi $f_1 = +24\,\text{cm}$ a $f_2 = +9{,}0\,\text{cm}$ a se vzdáleností $L = 10\,\text{cm}$ mezi nimi. Zrnko je 6,0 cm od čočky 1. Kde je jeho výsledný obraz?



Obr. 35.16 Příklad 35.5. (a) Zrnko O_1 je ve vzdálenosti p_1 od prvé čočky soustavy; vzdálenost mezi čočkami je L. Zrnko zobrazíme šipkou. (b) Obraz I_1 je vytvořen samotnou čočkou 1. (c) Obraz I_1 je předmětem O_2 pro zobrazení samotnou čočkou 2, ta vytváří konečný obraz I_2.

ŘEŠENÍ: Tento problém řešíme postupně po krocích. Nejprve si nevšímáme čočky 2 a najdeme obraz předmětu O_1 vytvořený samotnou čočkou 1. Rov. (35.9) napsaná pro čočku 1 je

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{i_1} = \frac{1}{f_1}.$$

Dosazením zadaných hodnot dostaneme

$$\frac{1}{(+6{,}0\,\mathrm{cm})} + \frac{1}{i_1} = \frac{1}{(+24\,\mathrm{cm})},$$

což dává $i_1 = -8{,}0\,\mathrm{cm}$.

Z výsledku vyplývá, že obraz I_1 je 8,0 cm od čočky 1 a je virtuální. (To, že je obraz virtuální, jsme mohli určit z polohy zrnka; zrnko se nachází mezi čočkou 1 a jejím ohniskem.) Protože obraz I_1 je virtuální, nachází se na téže straně čočky a je stejně orientovaný jako předmět, jak je znázorněno v obr. 35.16b.

Ve druhém kroku našeho řešení pokládejme obraz I_1 za předmět O_2 pro druhou čočku; čočku 1 již nepotřebujeme. Protože tento předmět O_2 leží od čočky 2 dále než její ohnisko, můžeme předem odhadnout, že obraz vytvořený čočkou 2 je reálný, převrácený a na opačné straně čočky než předmět O_2. Přesvědčme se o tom.

Předmětová vzdálenost p_2 mezi předmětem O_2 a čočkou 2 je podle obr. 35.16c, b

$$p_2 = L + |i_1| = (10\,\mathrm{cm}) + (8{,}0\,\mathrm{cm}) = 18\,\mathrm{cm}.$$

Potom rov. (35.9), napsaná nyní pro čočku 2, je

$$\frac{1}{(+18\,\mathrm{cm})} + \frac{1}{i_2} = \frac{1}{(+9{,}0\,\mathrm{cm})},$$

tedy

$$i_2 = +18\,\mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kladné znaménko potvrzuje náš odhad: obraz I_2 vytvořený čočkou 2 je reálný, převrácený a na opačné straně čočky 2 než O_2, jak vidíme na obr. 35.16c.

KONTROLA 4: Tenká čočka zobrazí otisk prstu se zvětšením +0,2, je-li otisk o 1,0 cm dále od čočky než její ohnisko. Jaký je druh obrazu a jeho orientace a o jaký druh čočky se jedná?

35.7 OPTICKÉ PŘÍSTROJE

Lidské oko je pozoruhodně účinný orgán. Jeho možnosti můžeme navíc rozšířit ještě mnoha způsoby pomocí optických přístrojů, např. brýlemi, jednoduchou zvětšující čočkou (lupou), filmovými projektory, kamerami (včetně televizních), mikroskopy a dalekohledy. Mnohá z takových zařízení rozšiřují oblast našeho vidění i mimo viditelnou oblast; uveďme jako příklad infračervené kamery a rentgenové mikroskopy.

Vztahy pro zobrazení zrcadlem a tenkou čočkou můžeme použít pro důmyslné optické přístroje jen jako aproximace. Čočky v typickém laboratorním mikroskopu nejsou v žádném případě „tenké“. U většiny optických přístrojů jde o složené čočky (objektivy), které se skládají z několika prvků a jejichž rozhraní nemusí mít kulový tvar. Dále probereme tři optické přístroje a budeme pro jednoduchost předpokládat platnost rovnic pro tenkou čočku.

Lupa (jednoduchá zvětšující čočka)

Normální lidské oko může zaostřit obraz na sítnici (v zadní části oka), je-li předmět umístěn kdekoli od nekonečna až po určitý bod, který nazýváme *blízkým bodem* P_n. Posouvá-li se předmět blíže k oku, před blízký bod, vnímaný obraz na sítnici se rozostří. Poloha blízkého bodu se mění s věkem. Všichni známe lidi, kteří neužívají brýle, ale při čtení drží noviny v natažených rukou; jejich blízký bod se vzdálil. Chcete-li najít svůj blízký bod, odložte brýle nebo kontaktní čočky, zavřete jedno oko a přibližujte stránku k otevřenému oku, až se stane nezřetelnou. V následujícím textu klademe blízký bod do vzdálenosti 25 cm od oka, trochu dále, než je jeho typická vzdálenost ve dvaceti letech.

Na obr. 35.17a je předmět O umístěn do blízkého bodu P_n oka. Velikost obrazu vytvořeného na sítnici závisí na úhlu θ, který předmět zabírá v zorném poli oka (*zorném úhlu*). Posouváním předmětu blíže k oku (obr. 35.17b) se zvětší zorný úhel a tedy i možnost rozlišení detailů předmětu. Protože je však předmět blíže než blízký bod, není již zaostřený, tzn. je nezřetelný.

Ostrost obrazu můžeme obnovit tím, že jej prohlížíme přes spojnou čočku (obr. 35.17c); tu umístíme tak, že se předmět O nachází blízko ohniska F_1, mezi ohniskem a čočkou. Pak prohlížíme virtuální obraz I předmětu O vytvořený čočkou. Tento obraz je mnohem dále než blízký bod a oko jej vidí ostře.

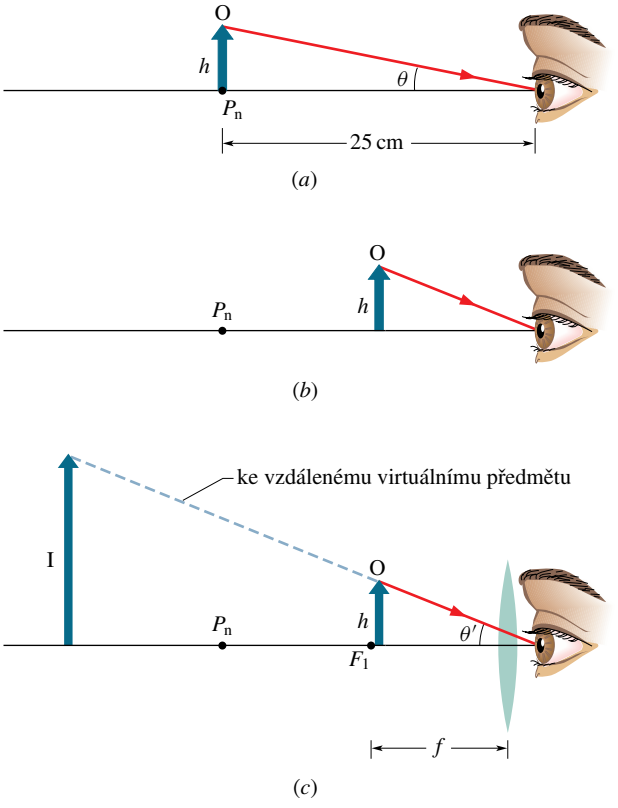
Zorný úhel θ', pod kterým vidíme virtuální obraz, je navíc větší než největší úhel θ, pod nímž vidíme ostře samotný předmět. *Úhlové zvětšení* m_θ (nezaměňovat s příčným zvětšením m) definujeme jako podíl

$$m_\theta = \theta'/\theta.$$

Slovy: úhlové zvětšení lupy dostaneme porovnáním zorného úhlu obrazu vytvořeného lupou a zorného úhlu předmětu umístěného do blízkého bodu pozorovatele.

Z obr. 35.17 plyne za předpokladu, že předmět O je umístěn v ohnisku čočky,

$$\theta \doteq \operatorname{tg}\theta = h/25\,\mathrm{cm} \qquad \text{a} \qquad \theta' \doteq \operatorname{tg}\theta' = h/f,$$



Obr. 35.17 (a) Předmět O výšky h v blízkém bodě P_n našeho oka zaujímá zorný úhel θ. (b) Aby se zorný úhel zvětšil, posuneme předmět blíže k sobě. Pak však nedokážeme předmět zaostřit. (c) Mezi předmět a oko umístíme spojnou čočku tak, že předmět leží blízko ohniska F_1 čočky (mezi nim a čočkou). Obraz vytvořený čočkou je pak dostatečně daleko, abychom na něj mohli oko zaostřit. Zorný úhel θ' obrazu I je nyní větší než zorný úhel předmětu O v případě (a).

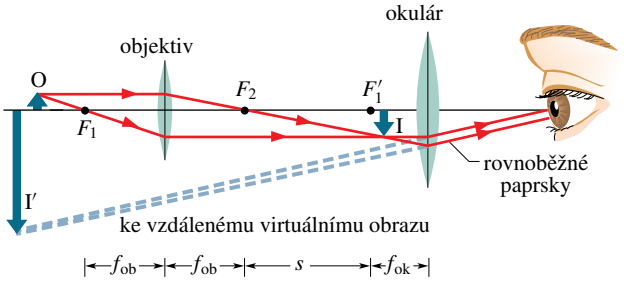
pokud úhly θ a θ' jsou malé. Potom platí

$$m_\theta \doteq \frac{25\,\text{cm}}{f} \quad \text{(lupa)}. \tag{35.12}$$

Mikroskop

Na obr. 35.18 je nakreslen mikroskop složený z tenkých čoček. Přístroj sestává z *objektivu* (čočka bližší předmětu) s ohniskovou délkou f_{ob} a z *okuláru* (čočka bližší oku) s ohniskovou délkou f_{ok}. Užívá se k prohlížení malých předmětů, které se kladou blízko objektivu.

Pozorovaný předmět O se umísťuje nalevo od prvého ohniska F_1 natolik blízko k němu, že můžeme přibližně nahradit předmětovou vzdáleností p ohniskovou vzdáleností f_{ob}. Vzdálenost mezi čočkami nastavujeme tak, že zvětšený a převrácený reálný obraz I vytvořený objektivem se nachází blízko ohniska F_1' okuláru (mezi ohniskem a okulárem). Délka tubusu s (přesněji nazývaná *optickým intervalem*) vyznačená na obr. 35.18 je podstatně větší než f_{ob} a můžeme jí přibližně nahradit vzdálenost i mezi objektivem a obrazem I.



Obr. 35.18 Znázornění mikroskopu složeného z tenkých čoček (není v měřítku). Objektiv vytváří reálný obraz I předmětu O blízko ohniska F_1' okuláru. Obraz I se pak stane předmětem pro okulár, který vytváří konečný virtuální obraz I′; ten je prohlížen pozorovatelem. Ohnisková vzdálenost objektivu je f_{ob}, ohnisková vzdálenost okuláru je f_{ok}, délka optického intervalu (tubusu) je s.

Užijeme-li těchto aproximací pro p a i, můžeme podle rov. (35.6) zapsat příčné zvětšení objektivu takto:

$$m = -\frac{i}{p} = -\frac{s}{f_{ob}}. \tag{35.13}$$

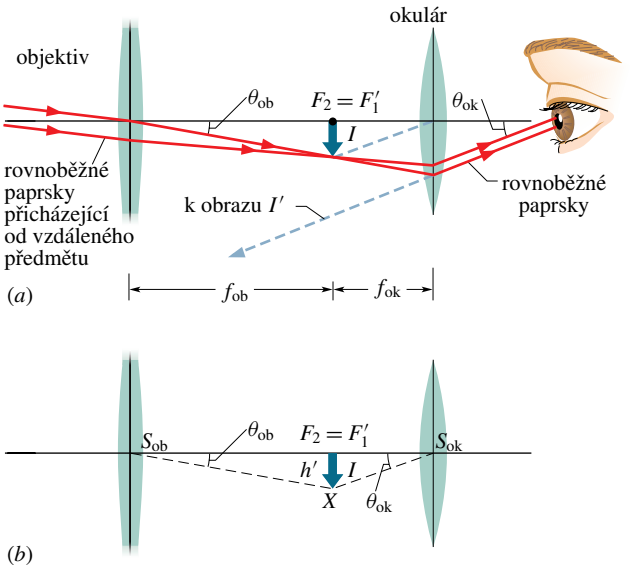
Protože obraz I je umístěn blízko ohniska okuláru F_1' (mezi F_1' a okulárem), slouží okulár jako lupa; pozorovatel vidí přes ni výsledný (virtuální, převrácený) obraz I′. Celkové zvětšení přístroje je součin příčného zvětšení m objektivu (rov. (35.13)) a úhlového zvětšení m_θ okuláru (rov. (35.12)), tj.

$$M = mm_\theta = -\frac{s}{f_{ob}}\frac{25\,\text{cm}}{f_{ok}} \quad \text{(mikroskop)}. \tag{35.14}$$

Dalekohled

Jsou dalekohledy různých typů. Popíšeme jednoduchý refrakční dalekohled sestávající z objektivu a okuláru. Na obr. 35.19 jsou oba prvky reprezentovány jednoduchými čočkami, ačkoli v praxi u většiny dalekohledů jsou tvořeny složitými systémy čoček.

Uspořádání dalekohledů a mikroskopů jsou podobná, dalekohledy jsou však navrhovány k pozorování velkých předmětů ve velkých vzdálenostech, jako např. galaxií, hvězd a planet, zatímco mikroskopy jsou navrhovány k účelům právě opačným. Tento rozdíl vyžaduje, aby u dalekohledu na obr. 35.19 splývalo druhé ohnisko objektivu F_2 s prvním ohniskem okuláru F_1', zatímco u mikroskopu na obr. 35.18 jsou tato ohniska oddělena optickým intervalem (délkou tubusu) s.



Obr. 35.19 (a) Schéma refrakčního dalekohledu složeného z tenkých čoček. Objektiv vytváří reálný obraz I vzdáleného světelného zdroje (předmětu); paprsky vstupující do objektivu jsou přibližně rovnoběžné. (Předpokládáme, že jeden konec předmětu leží na centrální ose.) Ve společných ohniscích F_2 a F_1' vzniká obraz I, který je předmětem pro okulár; okulár vytváří ve velké vzdálenosti od pozorovatele konečný virtuální obraz I′. Objektiv má ohniskovou vzdálenost f_{ob}, okulár má ohniskovou vzdálenost f_{ok}. (b) Obraz I má výšku $h' = |F_2X|$; paprsek $S_{ob}X$ svírá s osou úhel θ_{ob}, paprsek XS_{ok} svírá s osou úhel θ_{ok}.

Na obr. 35.19a dopadají na objektiv rovnoběžné paprsky ze vzdáleného předmětu svírající s osou dalekohledu úhel θ_{ob} a po průchodu objektivem vytvoří reálný, převrácený obraz I ve společném ohnisku $F_2 = F_1'$. Tento obraz je předmětem pro okulár; pozorovatel vidí přes okulár vzdálený (stále převrácený) virtuální obraz I′. Paprsky určující tento obraz svírají s osou dalekohledu úhel θ_{ok}.

Úhlové zvětšení m_θ dalekohledu je podíl θ_{ok}/θ_{ob}. Podle obr. 35.19b za předpokladu, že paprsky svírají malé úhly s osou, můžeme psát $\theta_{ob} = h'/f_{ob}$ a $\theta_{ok} = h'/f_{ok}$; z toho dostaneme

$$m_\theta = -\frac{f_{ob}}{f_{ok}} \quad \text{(dalekohled)}, \qquad (35.15)$$

kde záporné znaménko značí, že obraz I′ je převrácený. Slovy: Úhlové zvětšení dalekohledu dostaneme jako podíl zorného úhlu obrazu vytvořeného dalekohledem a zorného úhlu vzdáleného předmětu, pod kterým pozorujeme předmět bez dalekohledu.

Při návrhu astronomického dalekohledu je požadované zvětšení pouze jedním, snadno dosažitelným faktorem. Dobrý teleskop by měl mít jasný obraz, což je určeno jeho *světelností*. To je důležité při pozorování slabých objektů, jakými jsou např. vzdálené galaxie. Dosahuje se toho volbou co možná největšího průměru objektivu. U dalekohledu je též důležitá jeho *rozlišovací schopnost*, což je schopnost rozlišit dva objekty (řekněme hvězdy), jejichž úhlová vzdálenost je malá. Dalším důležitým faktorem je zorné pole dalekohledu. Teleskop určený pro pozorování galaxií (které zaujímají malou část zorného pole) se v mnohém liší od teleskopu navrženého pro sledování meteorů (které se pohybují v širokém rozmezí zorného pole).

Konstruktér dalekohledu musí též přihlédnout k rozdílům mezi reálnými čočkami a ideálními tenkými čočkami, o nichž jsme diskutovali. Reálná čočka s kulovými povrchy nevytvoří ostré obrazy; tato vada se nazývá *sférická aberace* (*otvorová vada*). Protože dále úhel lomu na dvou površích skutečné čočky závisí na vlnové délce, reálná čočka nefokusuje světlo rozdílných vlnových délek do téhož bodu; tato vada se nazývá *chromatická aberace* (*barevná vada*).

Stručná diskuse v žádném případě nevyčerpala faktory pro návrh astronomických dalekohledů; je jich ještě mnohem více. Podobný výčet bychom ovšem mohli sestavit pro každý další optický přístroj s vysokým rozlišením.



35.8 TŘI ODVOZENÍ

Kulové zrcadlo — rov. (35.4)

Na obr. 35.20 je bodový předmět O na centrální ose vydutého kulového zrcadla dále od zrcadla než jeho střed křivosti C. Paprsek vycházející z O, který svírá s osou úhel α, se odrazí v bodě A od zrcadla a protne osu v I. Paprsek šířící se z O ve směru osy se odrazí ve vrcholu V zrcadla nazpět a také prochází bodem I. Je tedy I obrazem O; je to *reálný* obraz, protože jím paprsky skutečně procházejí. Hledejme obrazovou vzdálenost i.

K tomu užijeme věty, která říká, že vnější úhel v trojúhelníku se rovná součtu dvou protilehlých vnitřních úhlů. Aplikujme ji na trojúhelníky OAC a OAI v obr. 35.20; dostaneme

$$\beta = \alpha + \theta \qquad \text{a} \qquad \gamma = \alpha + 2\theta.$$

Vyloučíme-li z těchto dvou rovnic θ, dostaneme

$$\alpha + \gamma = 2\beta. \qquad (35.16)$$

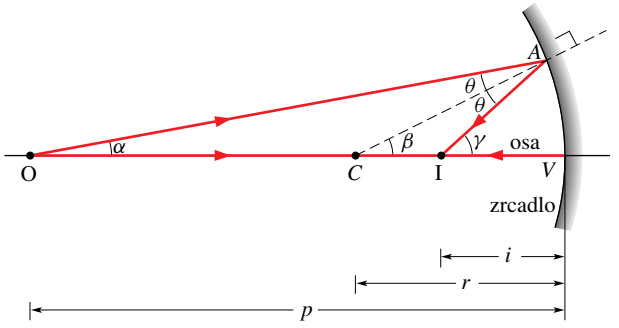
Úhly α, β a γ můžeme napsat v radiánech takto:

$$\alpha \doteq \frac{\widehat{AV}}{|VO|} = \frac{\widehat{AV}}{p}, \qquad \beta = \frac{\widehat{AV}}{|VC|} = \frac{\widehat{AV}}{r}$$

a

$$\gamma \doteq \frac{\widehat{AV}}{|VI|} = \frac{\widehat{AV}}{i}. \qquad (35.17)$$

Pouze vztah pro β je přesný, protože oblouk $\widehat{AV}$ má střed v C. Vztahy pro α a γ platí jen přibližně, jsou-li tyto úhly dostatečně malé (tj. jsou-li paprsky blízké centrální ose). Dosazením rov. (35.17) do rov. (35.16), dosazením $2f$ za r podle rov. (35.3) a dělením délkou oblouku $\widehat{AV}$ dostaneme rov. (35.4), tedy vztah, který jsme měli dokázat.



Obr. 35.20 Vyduté kulové zrcadlo vytváří reálný bodový obraz I odrazem světelných paprsků z bodového předmětu O.

Lámavá plocha — rov. (35.8)

Paprsek vycházející z bodového předmětu O v obr. 35.21 a dopadající do bodu A se láme podle rov. (34.44),

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2.$$

Je-li úhel α malý, jsou také úhly θ_1 a θ_2 malé a siny těchto úhlů mohou být nahrazeny samotnými úhly. Předcházející rovnice bude mít tvar

$$n_1\theta_1 \doteq n_2\theta_2. \qquad (35.18)$$

Opět užijeme faktu, že vnější úhel v trojúhelníku se rovná součtu dvou protilehlých vnitřních úhlů. Aplikujme jej na trojúhelníky COA a ICA a dostaneme

$$\theta_1 = \alpha + \beta \qquad \text{a} \qquad \beta = \theta_2 + \gamma. \qquad (35.19)$$

Vyloučíme-li θ_1 a θ_2 z rov. (35.18) užitím rov. (35.19), dostaneme

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta. \qquad (35.20)$$

Úhly α, β a γ v radiánech jsou rovny

$$\alpha \doteq \frac{\widehat{AV}}{p}; \quad \beta = \frac{\widehat{AV}}{r}; \quad \gamma \doteq \frac{\widehat{AV}}{i}. \qquad (35.21)$$

Pouze druhá z těchto rovnic platí přesně. Ostatní dvě platí pouze přibližně, protože I a O nejsou středy kruhového oblouku $\widehat{AV}$. Pro dostatečně malý úhel α (pro paprsky blízké ose) jsou však nepřesnosti zanedbatelné. Dosazení rov. (35.21) do rov. (35.20) vede přímo k rov. (35.8), tedy ke vztahu, který jsme měli dokázat.

Tenká čočka — rov. (35.9) a (35.10)

Budeme postupovat tak, že každý povrch čočky budeme pokládat za samostatnou lámavou plochu a obraz vytvořený prvním povrchem užijeme jako předmět pro druhý povrch.

Začneme s tlustou skleněnou „čočkou“ tloušťky L zobrazenou na obr. 35.22a, jejíž levý a pravý povrch mají poloměry r' a r''. Bodový předmět O′ umístíme poblíž levého povrchu. Paprsek vycházející z O′ a postupující podél centrální osy se při vstupu do čočky nebo výstupu z ní nevychyluje.

Druhý paprsek, vycházející z O′ pod úhlem α (od centrální osy), protíná levý povrch v bodě A', láme se a protíná druhý (pravý) povrch v bodě A''. Paprsek se opět láme a kříží osu v bodě I″. Bod I″ je průsečíkem dvou paprsků vycházejících z O′ a tedy výsledným obrazem bodu O′ vytvořeným po lomu na obou plochách.

Obr. 35.22b ukazuje, že první (levý) povrch vytváří také obraz předmětu O′ — virtuální obraz I'. K nalezení jeho polohy užijeme rov. (35.8)

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r}.$$

Položíme-li $n_1 = 1$ a $n_2 = n$ a uvědomíme-li si, že obrazová vzdálenost je záporná (tj. $i = -i'$), dostaneme

$$\frac{1}{p'} - \frac{n}{i'} = \frac{n-1}{r'}. \qquad (35.22)$$

V této rovnici je i' kladné číslo, protože záporné znaménko odpovídající virtuálnímu obrazu bylo již do ní zahrnuto.

Obr. 35.22c ukazuje druhý povrch. Pokud pozorovatel v bodě A'' neví o existenci prvního povrchu, myslí si, že světlo dopadající do tohoto bodu vychází z bodu I′ a že oblast nalevo od druhého povrchu je vyplněna sklem, jak je v obrázku vyznačeno. Virtuální obraz I′ vytvořený prvním povrchem slouží tedy jako reálný předmět O″ pro druhý povrch. Vzdálenost tohoto předmětu od druhého povrchu je

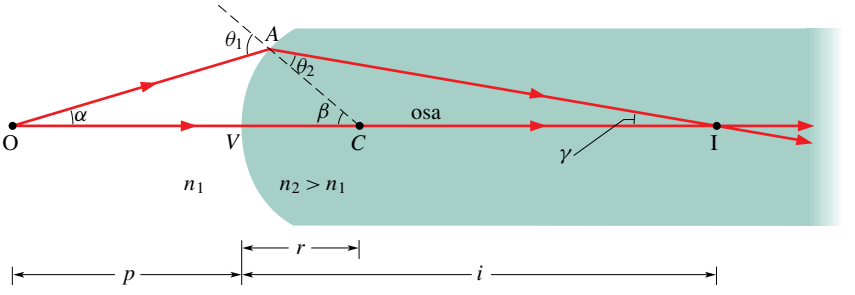
$$p'' = i' + L. \qquad (35.23)$$

Než použijeme rov. (35.8) na druhý povrch, musíme položit $n_1 = n$ a $n_2 = 1$, protože předmět je jakoby vnořen do skla. Rov. (35.8) po dosazení z rov. (35.23) je

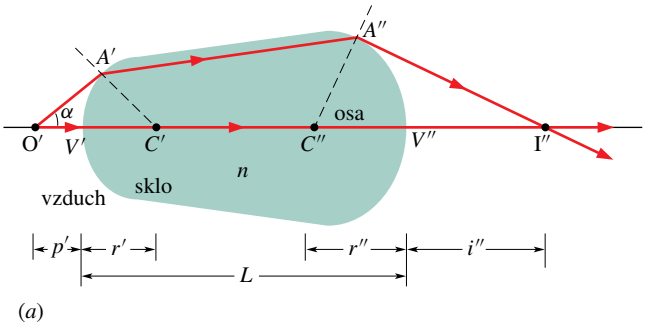
$$\frac{n}{i' + L} + \frac{1}{i''} = \frac{1-n}{r''}. \qquad (35.24)$$

Předpokládejme nyní, že tloušťka L „čočky“ z obr. 35.22a je tak malá, že ji můžeme zanedbat proti jiným délkám (např. p', i', p'', i'', r', r''). V následujícím textu zavedeme tuto *aproximaci pro tenkou čočku*. Položíme-li $L = 0$ a upravíme-li pravou stranu rov. (35.24), dostaneme z ní

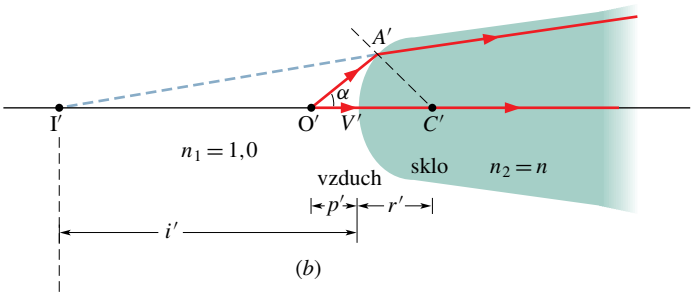
$$\frac{n}{i'} + \frac{1}{i''} = -\frac{n-1}{r''}. \qquad (35.25)$$



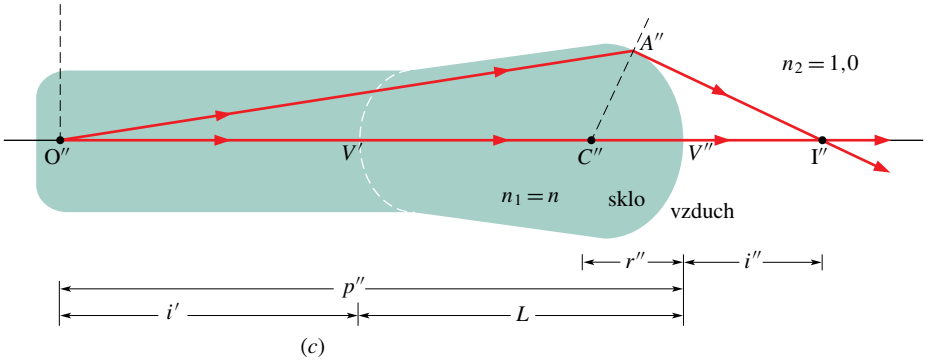
Obr. 35.21 Paprsky vycházející z bodového předmětu O se lámou na kulovém vypuklém rozhraní dvou prostředí a vytvářejí reálný bodový obraz I



(a)



(b)



(c)

Obr. 35.22 (a) Dva paprsky vycházející z bodového předmětu O′ se po lomu na dvou kulových površích „čočky“ protínají v bodě I″ — reálném bodovém obraze. Předmět leží před vypuklým povrchem na levé straně a vydutým povrchem na pravé straně čočky. Paprsek jdoucí body A' a A'' prochází ve skutečnosti čočkou po dráze blízké ose. Lomy (b) na levém povrchu a (c) na pravém povrchu jsou nakresleny odděleně.

Sečtení rov. (35.22) a (35.25) vede na vztah

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{i''} = (n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right).$$

Změníme-li označení vzdálenosti původního předmětu na p a vzdálenost konečného obrazu na i, dostaneme

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = (n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right), \qquad (35.26)$$

což jsou až na malé změny v označení rov. (35.9) a (35.10), tedy vztahy, které jsme měli dokázat.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Reálné a virtuální obrazy

Obraz je reprodukce předmětu vytvořená světlem. Může-li se obraz vytvořit na nějakém povrchu (stínítku), jde o *reálný obraz*, který může existovat i tehdy, není-li přítomen pozorovatel. Jestliže vznik obrazu je podmíněn přítomností zrakové soustavy pozorovatele, jde o *virtuální obraz*.

Tvoření obrazu

Kulová zrcadla, kulové lámavé povrchy a *tenké čočky* mohou vytvářet obrazy světelného zdroje — předmětu změnou směru paprsků vycházejících ze zdroje. Obraz vzniká, jestliže se přesměrované paprsky protínají (při tvoření reálného obrazu), nebo když se protínají zpětně prodloužené paprsky (tvoření virtuálního obrazu). Jsou-li paprsky dostatečně blízké *centrální ose*, platí následující vztahy pro *předmětovou vzdálenost* p (která je kladná) a *obrazovou vzdálenost* i (která je kladná pro reálné obrazy a záporná pro virtuální obrazy):

1. Kulové zrcadlo:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}=\frac{2}{r}, \qquad (35.4, 35.3)$$

kde f je ohnisková vzdálenost zrcadla a r je jeho poloměr křivosti. *Rovinné zrcadlo* je zvláštní případ kulového zrcadla, pro něž $r \to \infty$, takže $p = -i$. Reálné obrazy se tvoří na téže straně zrcadla, kde je umístěn předmět, zatímco virtuální obrazy jsou na opačné straně.

2. Lámavý kulový povrch:

$$\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{i}=\frac{n_2-n_1}{r} \quad \text{(jeden povrch)}, \qquad (35.8)$$

kde n_1 je index lomu prostředí, v němž je umístěn předmět, n_2 je index lomu na druhé straně lámavého povrchu a r je poloměr křivosti povrchu. Je-li předmět před vypuklým lámavým povrchem, je poloměr r kladný, je-li předmět před vydutým povrchem, je r záporné. Reálný obraz se vytvoří na opačné straně lámavého povrchu, než je předmět, virtuální obraz na téže straně jako předmět.

3. Tenká čočka:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right), \qquad (35.9, 35.10)$$

kde f je ohnisková vzdálenost čočky, n je index lomu materiálu čočky, r_1 a r_2 jsou poloměry křivosti obou stran čočky, což jsou kulové povrchy. Je-li předmět před vypuklým povrchem čočky, je poloměr křivosti kladný, je-li předmět před vydutým povrchem, je poloměr křivosti záporný. Reálné obrazy se vytvářejí na opačné straně čočky, než je předmět, virtuální obrazy na téže straně jako předmět.

Příčné zvětšení

Příčné zvětšení m při zobrazení kulovým zrcadlem nebo čočkou je

$$m=-\frac{i}{p}. \qquad (35.6)$$

Velikost m je dána vztahem

$$|m|=\frac{h'}{h}, \qquad (35.5)$$

kde h a h' jsou výšky (měřené kolmo k centrální ose) předmětu a obrazu.

Optické přístroje

Tři optické přístroje zvětšující rozsah lidského vidění jsou:

1. *Lupa (jednoduchá zvětšovací čočka)*, jejíž *úhlové zvětšení* m_θ je dáno vztahem

$$m_\theta \doteq \frac{25\,\text{cm}}{f}, \qquad (35.12)$$

kde f je ohnisková vzdálenost čočky.

2. *Mikroskop*, jehož celkové zvětšení M je

$$M = m m_\theta = -\frac{s}{f_{\text{ob}}}\frac{25\,\text{cm}}{f_{\text{ok}}}, \qquad (35.14)$$

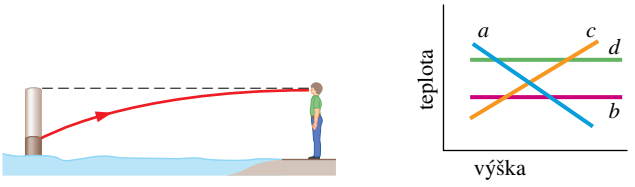
kde m je příčné zvětšení objektivu, m_θ je úhlové zvětšení okuláru, s je délka optického intervalu mikroskopu, f_{ob} je ohnisková vzdálenost objektivu a f_{ok} je ohnisková vzdálenost okuláru.

3. *Dalekohled*, jehož *úhlové zvětšení* m_θ je

$$m_\theta = -\frac{f_{\text{ob}}}{f_{\text{ok}}}. \qquad (35.15)$$

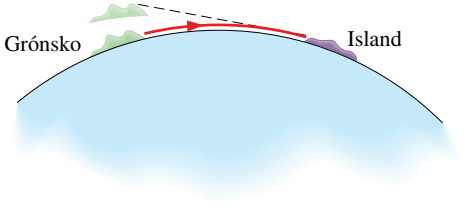
OTÁZKY

1. Jezerní příšery, mořští muži a mořské panny byly „bezpečně spatřeny“ lidmi, kteří buď stáli na břehu, nebo na nízké palubě lodi. Při pozorování z takové polohy nízko nad hladinou může pozorovatel zachytit světelné paprsky, které vycházejí z nějakého plovoucího předmětu (řekněme klády nebo delfína) a slabě se ohýbají dolů k pozorovateli (jeden je zakreslen na obr. 35.23a). Pozorovatel potom vidí předmět jakoby prodloužený nahoru (a pravděpodobně oscilující následkem turbulence vzduchu), který se může podobat některé z proslulých nestvůr. Na obr. 35.23b je několik typů vztahů mezi teplotou vzduchu a výškou nad hladinou. Který z nich nejlépe ilustruje podmínky, za kterých vzniká tento jev?



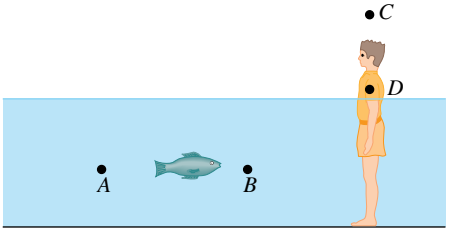
Obr. 35.23 Otázky 1 a 2

2. Když byl Erik Rudý vypovězen ostatními Vikingy z Islandu, zamířil přímo k nejbližší části Grónska. Z pozorování náhodné faty morgany, která přenesla virtuální obraz Grónska přes zakřivený povrch Země (obr. 35.24), pravděpodobně věděl, kde se tato dosud neobjevená země nachází. Na obr. 35.23b jsou závislosti teploty vzduchu na výšce nad Zemí. Která z nich nejlépe odpovídá podmínkám vzniku takové faty morgany?



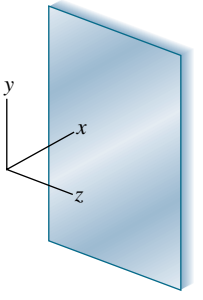
Obr. 35.24 Otázka 2

3. Na obr. 35.25 je nakreslena ryba a lovec ryb ve vodě. (a) Vidí lovec rybu v oblasti kolem bodu A, nebo B? (b) Vidí ryba lovcovy (chtivé) oči v oblasti kolem bodu C, nebo D?



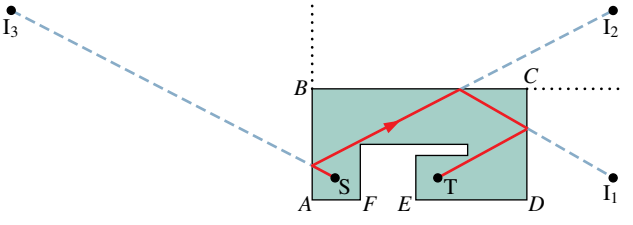
Obr. 35.25 Otázka 3

4. Na obr. 35.26 je souřadnicová soustava umístěná před rovinným zrcadlem s osou x kolmou na zrcadlo. Nakreslete obraz tohoto systému vytvořený zrcadlem. (a) Stojíte-li před zrcadlem, je váš obraz převrácený (vzhůru nohama)? (b) Jsou levá a pravá strana zaměněny (jak se obecně věří)? (c) Co je vlastně zaměněno?



Obr. 35.26 Otázka 4

5. Na obr. 35.27 je půdorys místnosti se stěnami pokrytými rovinnými zrcadly. Je zde také nakreslena dráha světelného paprsku od zdroje S po stínítko T. Světlo se mezi S a T třikrát odráží. Paprsek, který „zasáhne“ po třech odrazech terčík, se musí odrazit od zrcadel AB, BC a CD. Jeho dráhu určíme následujícím postupem. Nakreslíme virtuální obraz I_1 stínítka T v zrcadle CD. Ten znovu zobrazíme v zrcadle BC (jeho tečkovaném prodloužení) a jeho virtuální obraz označíme I_2. Ten znovu zobrazíme v zrcadle AB (jeho prodloužení) a jeho virtuální obraz označíme I_3. Zaměříme-li paprsek do bodu I_3, paprsek zasáhne po třech odrazech stínítko T. Existuje způsob, jak zasáhnout stínítko (a) po dvou odrazech, (b) po čtyřech odrazech?

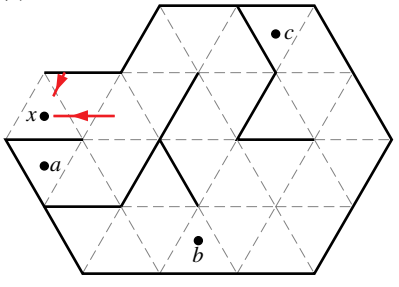


Obr. 35.27 Otázka 5

6. Jste-li v zrcadlovém bludišti (obr. 35.28a), zdá se vám, že se od vás rozbíhá mnoho „virtuálních chodeb“, protože vidíte vícenásobné odrazy od zrcadel tvořících stěny bludiště. Zrcadla jsou umístěna na některých stěnách pravidelných a opakujících se trojbokých hranolů. Půdorys odlišného bludiště je na obr. 35.28b; každou oddělující stěnu uvnitř bludiště pokrývá zrcadlo. Stojíte-li ve vchodu v místě x, (a) kterou z oblud a, b a c ukrytých v bludišti můžete vidět v některé z virtuálních chodeb rozbíhajících se od vchodu? (b) Kolikrát se každá z viditelných oblud objeví v chodbě? (c) Co je na vzdáleném konci chodby? (*Tip*:



(a)



(b)

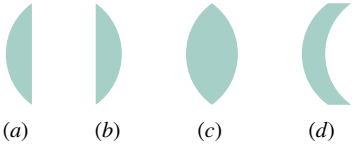
Obr. 35.28 Otázka 6

Dva zakreslené paprsky přicházejí z virtuálních chodeb; sledujte jejich chod zpětně v bludišti. Procházejí trojúhelníkem s obludou? Jestliže ano, kolikrát? Doplňující analýzu najdete v Jearl Walker, The Amateur Scientist, *Scientific American*, Vol. 254, pages 120–126, June 1986.)

7. Tučňák se odkolébá po centrální ose vydutého zrcadla z jeho ohniska do dáli. (a) Jak se pohybuje jeho obraz? (b) Jak se mění výška jeho obrazu: spojitě roste, spojitě se zmenšuje, nebo se mění nějakým složitějším způsobem?

8. Ve filmu *Jurský park* sleduje *Tyrannosaurus rex* džíp, v jehož zpětném zrcátku vidíme obraz tyranosaura. Na zrcátku je natištěno (výhrůžně humorné) varování: „Předměty v zrcátku jsou blíže, než se zdají“. Je zrcadlo rovinné, vypuklé, nebo vyduté?

9. Na obr. 35.29 jsou čtyři tenké čočky z téhož materiálu. Jejich povrchy jsou buď rovinné, nebo mají stejný poloměr křivosti $r = 10\,\text{cm}$. Bez počítání na papíře seřaďte čočky sestupně podle velikosti jejich ohniskových vzdáleností.



(a) (b) (c) (d)

Obr. 35.29 Otázka 9

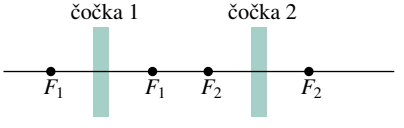
10. Předmět leží před tenkou symetrickou spojkou. Bude obrazová vzdálenost vzrůstat, klesat, nebo zůstane stejná, budeme-li zvětšovat (a) index lomu n čočky, (b) velikost poloměrů křivosti obou povrchů čočky, (c) index lomu n_0 okolního prostředí; přitom je stále $n_0 < n$.

11. Vyduté zrcadlo a spojná čočka (ze skla $n = 1{,}5$) mají ve vzduchu ohniskovou vzdálenost 3 cm. Budou-li ve vodě ($n = 1{,}33$), bude jejich ohnisková vzdálenost větší, menší, nebo rovna 3 cm?

12. Spojka s indexem lomu 1,5 je postupně ponořena do tří kapalin s indexy lomu 1,3, 1,5 a 1,7. (a) Seřaďte kapaliny (uveďte jejich indexy lomu) sestupně podle velikosti ohniskové vzdálenosti f, kterou v nich má čočka. (b) Určete znaménko f pro každou kapalinu.

13. V tabulce je uvedeno šest variací základního uspořádání dvou tenkých čoček, které je znázorněno na obr. 35.30. (Body označené F_1 a F_2 jsou ohniska čoček 1 a 2.) Předmět se nachází nalevo ve vzdálenosti p_1 od čočky 1 (obr. 35.16). (a) Pro které variace jste schopni *bez počítání* říci, zda konečný obraz (obraz vytvořený čočkou 2) je nalevo, nebo napravo od čočky 2 a zda má stejnou orientaci jako předmět? (b) Pro tyto „snadné“ variace zapište polohu obrazu slovy „vpravo“, nebo „vlevo“ a orientaci obrazu „stejná“, nebo „opačná“.

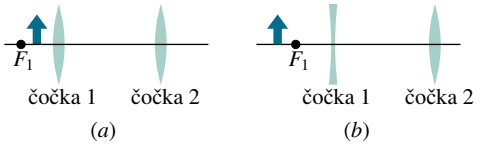
VARIACE	ČOČKA 1	ČOČKA 2	
1	spojná	spojná	$p_1 < f_1$
2	spojná	spojná	$p_1 > f_1$
3	rozptylná	spojná	$p_1 < f_1$
4	rozptylná	spojná	$p_1 > f_1$
5	rozptylná	rozptylná	$p_1 < f_1$
6	rozptylná	rozptylná	$p_1 > f_1$



Obr. 35.30 Otázka 13

14. Na obr. 35.31 jsou znázorněny dvě situace, při nichž je předmět před dvěma tenkými čočkami, jejichž ohniskové vzdálenosti mají stejnou velikost (nakresleno je jen jedno ohnisko). Jestliže

v obou případech posouváme čočku 2 blíže k čočce 1, bude se finální obraz (vytvořený čočkou 2) pohybovat nalevo, napravo, nebo bude zůstávat na místě?



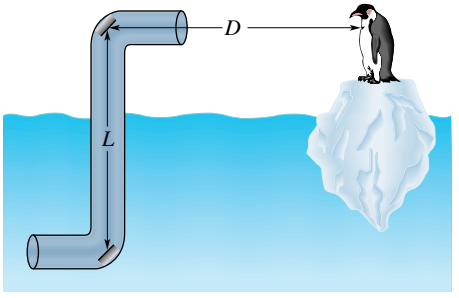
Obr. 35.31 Otázka 14

15. Světelné paprsky vyvolávající zrakový vjem nejvíce mění směr při lomu na rohovce (na rozhraní vzduch — oko). Rohovka má index lomu poněkud větší než voda. (a) Díváme-li se pod vodou, je změna směru při lomu na rohovce větší, menší, nebo stejná jako ve vzduchu? (b) Středoamerická ryba *Anableps anableps* může současně vidět nad hladinou vody i pod ní, protože plave s očima částečně vynořenýma nad hladinou. Aby vidění v obou prostředích bylo zřetelné, musí být poloměr křivosti ponořené části rohovky větší, menší, nebo stejný jako u vynořené části?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 35.2 Rovinné zrcadlo

1C. Na obr. 35.32 je idealizovaný periskop z ponorky sestávající ze dvou rovnoběžných zrcadel skloněných pod úhlem 45° vzhledem k svislé ose periskopu; vzdálenost mezi zrcadly je L. Tučňák je ve vzdálenosti D od horního zrcadla. (a) Je obraz, který vidí důstojník hledící do periskopu, reálný, nebo virtuální? (b) Má stejnou orientaci jako tučňák, nebo opačnou? (c) Je velikost obrazu větší, nebo menší než výška tučňáka, nebo má stejnou velikost? (d) Jaká je vzdálenost obrazu od dolního zrcadla?



Obr. 35.32 Cvičení 1

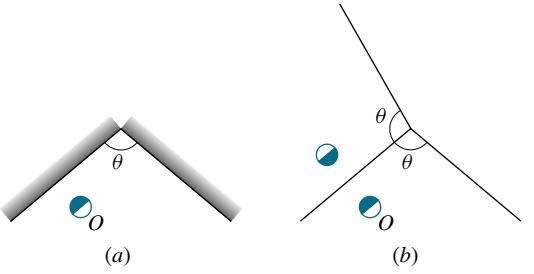
2C. Pohybujete-li se rychlostí v přímo k rovinnému zrcadlu, jakou rychlostí se pohybuje váš obraz směrem k vám v souřadnicové soustavě spojené (a) s vámi a (b) se zrcadlem?

3C. Mol je 10 cm před rovinným zrcadlem přibližně v úrovni vašich očí; vy jste za molem, 30 cm od zrcadla. Na jakou vzdálenost musíte zaostřit oči, abyste viděli obraz mola v zrcadle, tj. jaká je vzdálenost mezi vašima očima a zdánlivou polohou obrazu?

4C. Obraz kolibříka v rovinném zrcadle prohlížíte kamerou. Kamera je 4,30 m před zrcadlem. Ptáček je ve výšce kamery, 5,00 m napravo od vás a 3,30 m od zrcadla. Na jakou vzdálenost musíte zaostřit kameru, abyste dostali ostrou fotografii obrazu, tj. jaká je vzdálenost mezi objektivem a zdánlivou polohou obrazu?

5C. Světlo se šíří z bodu A do bodu B odrazem na zrcadle v bodě O. Ukažte bez výpočtu, že délka AOB je minimální, je-li úhel dopadu θ rovný úhlu odrazu φ. (*Tip*: Uvažte polohu zrcadlového virtuálního obrazu bodu A).

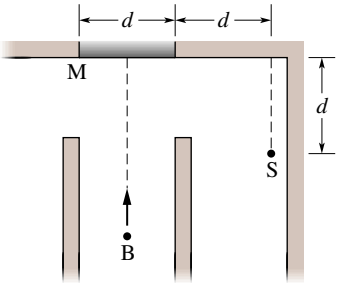
6C. Na obr. 35.33a je pohled shora na dvě svislá rovinná zrcadla a předmět O umístěný mezi nimi. Podíváte-li se do zrcadel, uvidíte mnoho obrazů předmětu O. Můžete je najít tak, že nakreslíte obraz předmětu mezi zrcadly vytvořený každým z obou zrcadel; na obr. 35.33b je obraz v levém zrcadle. Pak kreslíme obraz obrazu. Pokračujeme v tom doleva i doprava, dokud se obrazy za zrcadly nesetkají nebo nepřekrývají. Pak můžete obrazy spočítat. (a) Kolik obrazů uvidíte, je-li $\theta = 90°$? (b) Nakreslete jejich polohy a orientace (podobně jako na obr. 35.33b).



Obr. 35.33 Cvičení 6 a úloha 7

7Ú. Opakujte cvičení 6 pro úhel θ mezi zrcadly rovný (a) 45°, (b) 60°, (c) 120°. (d) Objasněte, proč existuje více možných odpovědí na otázku (c).

8Ú. Na obr. 35.34 je půdorys chodby, která je zakončena rovinným zrcadlem M. Chodbou se plíží lupič B přímo ke středu zrcadla. Je-li $d = 5{,}0$ m, jak daleko od zrcadla bude, když jej hlídač S poprvé spatří?



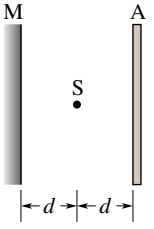
Obr. 35.34 Úloha 8

9Ú. Dokažte: Otočí-li se rovinné zrcadlo o úhel α, opíše odra-

žený paprsek úhel 2α. Ukažte, že tento výsledek je pravdivý pro $\alpha = 45°$.

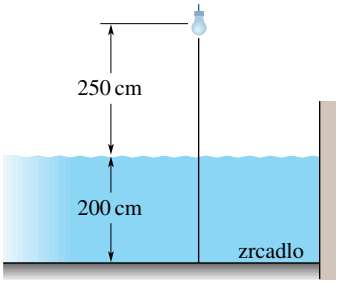
10Ú. Bodový zdroj je 10 cm od rovinného zrcadla, oko pozorovatele (s průměrem pupily 5,0 mm) je 20 cm od zrcadla. Uvažujme oko i zdroj ležící na téže přímce kolmé k povrchu zrcadla a nalezněme na zrcadle oblast, která je využita při pozorování obrazu bodového zdroje. (*Tip*: Upravte obr. 35.4.)

11Ú. Umístěme bodový zdroj světla S do vzdálenosti d před stínítko A. Jak se změní intenzita světla ve středu stínítka, umístíme-li dokonale odrazné zrcadlo M do vzdálenosti d za zdroj jako na obr. 35.35? (*Tip*: Užijte rov. (34.27).)



Obr. 35.35 Úloha 11

12Ú. Na obr. 35.36 je malá žárovka zavěšena 250 cm nad hladinou vody plaveckého bazénu. Hloubka vody je 200 cm; dno bazénu je pokryto velkým zrcadlem. Jak hluboko pod povrchem zrcadla je obraz žárovky? (*Tip*: Sestrojte diagram pro dva paprsky jako na obr. 35.3, ale přitom uvažte, že se směr paprsků při lomu mění. Předpokládejte, že paprsky běží blízko svislé osy procházející žárovkou a užijte aproximace $\sin\theta \doteq \operatorname{tg}\theta \doteq \theta$ platné pro malé úhly.)



Obr. 35.36 Úloha 12

13Ú. V optice, mikrovlnné technice a jiných aplikacích se hodně užívá *koutový odražeč*, sestávající ze tří rovinných zrcadel spojených dohromady tak, že tvoří roh krychle. Toto zařízení má následující vlastnost: paprsek dopadající na ně se po třech odrazech vrací nazpět přesně ve směru nesouhlasně rovnoběžném. Dokažte tuto vlastnost.

ODST. 35.4 Zobrazení kulovým zrcadlem

14C. Rov. (35.4) platí přesně pouze tehdy, omezíme-li se na paprsky šířící se téměř podél centrální osy zrcadla; paprsky nakreslené v obr. 35.7b, c toto nesplňují (pro větší názornost). Změřte pravítkem r a p v těchto dvou částech obr. 35.7 a vypočítejte podle rov. (35.4) hodnotu i. Pak změřte i a srovnejte naměřenou hodnotu s hodnotou vypočtenou.

15C. Vyduté zrcadlo užívané při holení má poloměr křivosti 35,0 cm. Je umístěno tak, že (nepřevrácený) obraz tváře je 2,50krát zvětšený. Jak daleko je tvář od zrcadla?

16Ú. Doplňte tab. 35.3, jejíž každý řádek se vztahuje k určité kombinaci předmětu a rovinného, nebo kulového zrcadla (vydutého, nebo vypuklého). Vzdálenosti jsou v centimetrech. Pokud chybí znaménko veličiny, najděte ho. Načrtněte každou kombinaci a zakreslete paprsky postačující k určení polohy předmětu a jeho obrazu.

Tabulka 35.3 **Úloha 16: Zrcadla**

Typ	f	r	i	p	m	Reálný obraz?	Převrácený obraz?
(a) Vyduté	20			+10			
(b)				+10	+1,0	ne	
(c)	+20			+30			
(d)				+60	−0,50		
(e)		−40	−10				
(f)	20				+0,10		
(g) Vypuklé		40	4,0				
(h)				+24	0,50		ano

17Ú. Krátký přímý předmět délky L leží na centrální ose kulového zrcadla ve vzdálenosti p od něj. (a) Ukažte, že jeho obraz v zrcadle má délku L' rovnou

$$L' = L\left(\frac{f}{p-f}\right)^2.$$

(*Tip*: Najděte polohu obou konců předmětu.) (b) Ukažte, že *podélné zvětšení* $m' = L'/L$ je rovno m^2, kde m je příčné zvětšení.

18Ú. (a) Světélkující bod se pohybuje po centrální ose rychlostí v_0 směrem ke kulovému zrcadlu. Ukažte, že obraz tohoto bodu se pohybuje rychlostí

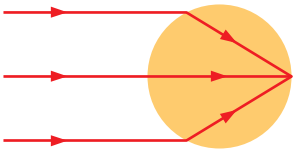
$$v_1 = -v_0\left(\frac{r}{2p-r}\right)^2,$$

kde p je vzdálenost světélkujícího bodu od zrcadla v libovolném okamžiku. (*Tip*: Vyjděte z rov. (35.4).) Dále předpokládejte, že zrcadlo je vyduté s $r = 15$ cm a že $v_0 = 5{,}0$ cm/s. Najděte rychlost obrazu, je-li (b) $p = 30$ cm (bod je daleko před ohniskem), (c) $p = 8{,}0$ cm (bod je blízko ohniska mezi ním a zrcadlem), (d) $p = 10$ mm (bod je velmi blízko zrcadla).

ODST. 35.5 Kulový lámavý povrch

19Ú. Svazek rovnoběžných paprsků z laseru dopadá na pevnou průhlednou kouli s indexem lomu n (obr. 35.37). (a) Vzniká-li bodový obraz na zadním povrchu koule, jaký je její index lomu? (b) Při jakém indexu lomu by vznikl bodový obraz ve středu koule? Je to možné?

20Ú. Vyplňte tab. 35.4, jejíž každý řádek se vztahuje k určité kombinaci bodového předmětu a kulového lámavého povrchu



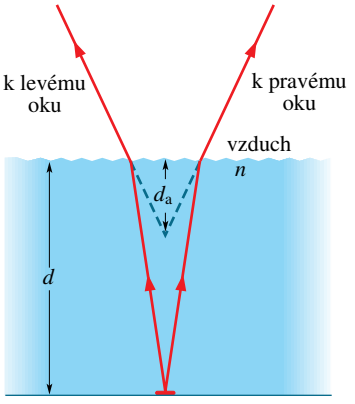
Obr. 35.37 Úloha 19

oddělujícího dvě látky s různým indexem lomu. Vzdálenosti jsou v centimetrech. Chybí-li u číselné hodnoty znaménko, určete je. Načrtněte každou kombinaci a vyznačte v ní paprsky postačující k určení polohy předmětu a obrazu.

Tabulka 35.4 **Úloha 20: Kulové lámavé plochy**

	n_1	n_2	p	i	r	PŘEVRÁCENÝ OBRAZ?
(a)	1,0	1,5	+10		+30	
(b)	1,0	1,5	+10	−13		
(c)	1,0	1,5		+600	+30	
(d)	1,0		+20	−20	−20	
(e)	1,5	1,0	+10	−6,0		
(f)	1,5	1,0		−7,5	−30	
(g)	1,5	1,0	+70		+30	
(h)	1,5		+100	+600	−30	

21Ú. Díváte se dolů na minci, která leží na dně nádrže s kapalinou v hloubce d a jejíž index lomu je n (obr. 35.38). Protože se díváte oběma očima a každé z nich zachytí jiné světelné paprsky od mince, zdá se vám, jako by se mince nacházela v průsečíku zpětně prodloužených paprsků přijímaných levým a pravým okem; tedy v hloubce d_a namísto d. Předpokládejte, že tyto paprsky jsou blízké svislici procházející mincí a ukažte, že $d_a = d/n$. (*Tip*: Užijte aproximace $\sin\theta \doteq \operatorname{tg}\theta \doteq \theta$ platné pro malé úhly.)



Obr. 35.38 Úloha 21

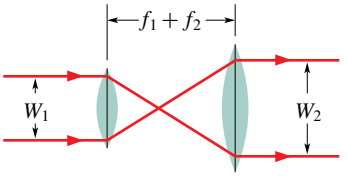
22Ú. V nádrži plave 20 mm tlustá vrstva vody ($n = 1{,}33$) na 40 mm tlusté vrstvě tetrachlormethanu CCl_4 ($n = 1{,}46$). Na dně nádrže leží mince. V jaké hloubce pod horní hladinou vody vidíte minci? (*Tip*: Užijte výsledku a předpokladů z úlohy 21 a pracujte s paprskovým obrazcem.)

23Ú*. Zlatá rybka plave v kulovém akváriu poloměru R ve vzdálenosti $R/2$ od jeho skleněné stěny. S jakým zvětšením vidíme rybku, když ji zvenčí pozorujeme z nejbližší možné vzdálenosti? Index lomu vody v akváriu je 1,33. Zanedbejte vliv skleněné stěny akvária. Předpokládejte, že pozorovatel se dívá jedním okem. (*Tip*: Rovnice (35.5) platí, rov. (35.6) neplatí. Pracujte s paprskovým obrazcem a předpokládejte, že paprsky jsou blízké přímce, podél které se pozorovatel dívá.)

ODST. 35.6 Tenká čočka

24C. Předmět je 20 cm nalevo od tenké rozptylné čočky, jejíž ohnisková vzdálenost je 30 cm. Jaká je obrazová vzdálenost i? Nalezněte polohu obrazu pomocí paprskového obrazce.

25C. Dvě souosé spojné čočky s ohniskovými vzdálenostmi f_1 a f_2 jsou umístěny ve vzdálenosti $f_1 + f_2$ od sebe (obr. 35.39). Takové zařízení se nazývá *rozšiřovač (expander) svazku* a užívá se často ke zvětšení průměru svazku paprsků vystupujícího z laseru. (a) Je-li W_1 šířka dopadajícího svazku, ukažte, že šířka vystupujícího svazku je $W_2 = (f_2/f_1)W_1$. (b) Ukažte, že soustavu jedné rozptylné a jedné spojné čočky je možno rovněž užít jako expanderu svazku. Dopadající paprsky rovnoběžné s osou soustavy by měly vystoupit rovněž rovnoběžně s osou.



Obr. 35.39 Cvičení 25

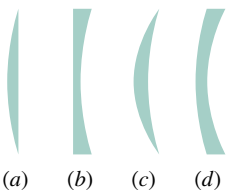
26C. Vypočítejte poměr intenzity svazku vystupujícího z expanderu ve cvič. 25 k intenzitě dopadajícího svazku.

27C. Čočka omezená dvěma vypuklými povrchy (bikonvexní) je vyrobena ze skla o indexu lomu 1,5. Jeden povrch má mít dvojnásobný poloměr křivosti než druhý a ohnisková vzdálenost by měla být 60 mm. Jaké jsou poloměry křivosti?

28C. Tenká čočka s ohniskovou vzdáleností 20,0 cm vytváří na stínítku obraz Slunce. Jaký je poloměr obrazu? (Potřebná data o Slunci najdete v dodatku C).

29C. Čočka je vyrobena ze skla o indexu lomu 1,5. Jedna její strana je plochá, druhá je vypuklá s poloměrem křivosti 20 cm. (a) Najděte její ohniskovou vzdálenost. (b) Je-li předmět umístěn 40 cm před čočkou, kde se nachází jeho obraz?

30C. Užitím rov. (35.10) rozhodněte, které z tenkých čoček na obr. 35.40 změní dopadající svazek paprsků rovnoběžných s centrální osou na svazek sbíhavý a které na svazek rozbíhavý.



Obr. 35.40 Cvičení 30

31C. Rovnice

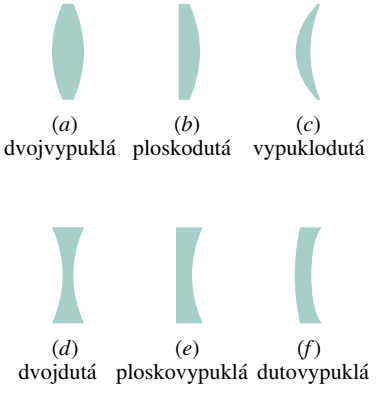
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}$$

se nazývá *Gaussův* tvar rovnice pro tenkou čočku. Jiný tvar (*Newtonův*) obsahuje vzdálenost x předmětu od prvního ohniska a vzdálenost x' druhého ohniska od obrazu. Dokažte, že platí

$$xx' = f^2.$$

32C. Filmová kamera, jejíž objektiv je jednoduchá čočka s ohniskovou vzdáleností 75 mm, snímá obraz osoby vysoké 180 cm stojící ve vzdálenosti 27 m. Jaká je výška obrazu osoby na filmu?

33Ú. Máte k dispozici sadu skleněných disků ($n = 1{,}5$) a stroj k broušení čoček, který je nastaven na broušení povrchů s poloměrem křivosti 40 cm nebo 60 cm. Máte zhotovit sadu šesti čoček znázorněných na obr. 35.41. Jaká bude ohnisková vzdálenost každé z těchto čoček? Které čočky mohou vytvořit reálný a které virtuální obraz Slunce? (*Tip*: Pokud můžete volit ze dvou poloměru křivostí, volte ten menší.)



Obr. 35.41 Úloha 33

34Ú. Doplňte co nejúplněji tab. 35.5. Každý řádek tabulky se vztahuje k určité kombinaci předmětu a tenké čočky. Vzdálenosti jsou v centimetrech. Ve sloupci TYP zapište S pro spojnou čočku a R pro rozptylnou. Chybí-li u hodnoty (s výjimkou hodnoty indexu lomu) znaménko, určete je. Načrtněte každou kombinaci a vyznačte v obrázku paprsky postačující k určení polohy předmětu a obrazu.

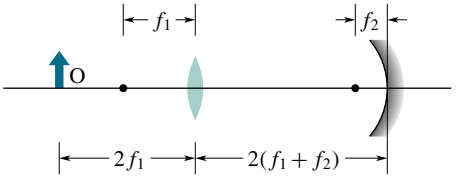
Tabulka 35.5 **Úloha 34: Tenké čočky**

TYP	f	r_1	r_2	i	p	n	m	REÁLNÝ OBRAZ?	PŘEVRÁCENÝ OBRAZ?
(a) S	10				+20				
(b)	+10				+5,0				
(c)	10				+5,0		> 1,0		
(d)	10				+5,0		< 1,0		
(e)		+30	−30		+10	1,5			
(f)		−30	+30		+10	1,5			
(g)		−30	−60		+10	1,5			
(h)					+10		0,50		ne
(i)					+10		−0,50		

35Ú. Spojka s ohniskovou vzdáleností +20 cm je umístěna 10 cm vlevo od rozptylky s ohniskovou vzdáleností −15 cm. Je-li předmět umístěn 40 cm nalevo od spojky, určete polohu a vlastnosti konečného obrazu vytvořeného rozptylkou.

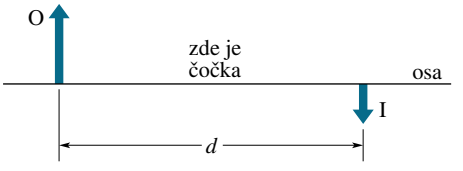
36Ú. Předmět je umístěn 1,0 m před spojkou s ohniskovou vzdáleností 0,50 m, která je 2,0 m před rovinným zrcadlem. (a) V jaké vzdálenosti od čočky bychom viděli výsledný obraz, kdybychom se dívali přes čočku směrem k zrcadlu (těsně kolem předmětu)? (b) Je výsledný obraz reálný, nebo virtuální? (c) Je výsledný obraz orientován stejně jako předmět, nebo je převrácený? (d) Jaké je příčné zvětšení?

37Ú. Na obr. 35.42 je předmět umístěn před spojnou čočkou ve vzdálenosti rovné dvojnásobku její ohniskové vzdálenosti f_1. Na druhé straně čočky je vyduté zrcadlo s ohniskovou vzdáleností f_2; vzdálenost zrcadla od čočky je $2(f_1 + f_2)$. (a) Určete polohu, typ, orientaci a příčné zvětšení výsledného obrazu, který pozorujeme okem, díváme-li se přes čočku směrem k zrcadlu těsně kolem předmětu. (b) Nakreslete paprskový obrazec k určení polohy obrazu.



Obr. 35.42 Úloha 37

38Ú. Na obr. 35.43 je předmět O a jeho reálný převrácený obraz I vytvořený určitou čočkou (která není zakreslena); vzdálenost obrazu od předmětu, měřená podél centrální osy je $d = 40{,}0$ cm. Obraz má právě poloviční výšku předmětu. (a) Jaký druh čočky je třeba použít k zobrazení předmětu? (b) Jak daleko od předmětu je třeba umístit čočku? (c) Jaká je ohnisková vzdálenost čočky?



Obr. 35.43 Úloha 38

39Ú. Předmět je 20 cm nalevo od čočky s ohniskovou vzdáleností +10 cm. Druhá čočka s ohniskovou vzdáleností +12,5 cm je 30 cm napravo od první čočky. (a) Najděte polohu a relativní velikost konečného obrazu. (b) Ověřte vaše výpočty tím, že narýsujete soustavu čoček ve vhodném měřítku a zkonstruujete paprskový obrazec. (c) Je konečný obraz reálný, nebo virtuální? (d) Je převrácený?

40Ú. Dvě tenké čočky s ohniskovými vzdálenostmi f_1 a f_2 se dotýkají. Dokažte, že jsou ekvivalentní jedné tenké čočce s ohniskovou vzdáleností

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}.$$

41Ú. Optická mohutnost čočky φ je definována vztahem $\varphi = 1/f$, kde f je její ohnisková vzdálenost. Jednotka optické mohutnosti je *dioptrie*; 1 dioptrie $= 1\,\mathrm{D} = 1\,\mathrm{m}^{-1}$. (a) Proč je takto definovaná veličina vhodná pro vyjádření vlastnosti čoček? (b) Ukažte, že výsledná optická mohutnost dvou čoček, které jsou těsně u sebe (v doteku), je $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, kde φ_1 a φ_2 jsou optické mohutnosti těchto čoček. (*Tip*: Viz úlohu 40.)

42Ú. Osvětlený diapozitiv je ve vzdálenosti 44 cm od promítacího plátna. V jaké vzdálenosti od diapozitivu musíme umístit čočku o ohniskové vzdálenosti 11 cm, aby na plátně vznikl ostrý obraz diapozitivu?

43Ú. Ukažte, že vzdálenost předmětu od reálného obrazu vytvořeného tenkou spojnou čočkou je vždy větší nebo rovna čtyřnásobku ohniskové vzdálenosti čočky.

44Ú. Svítící předmět a stínítko jsou v konstantní vzdálenosti d_1 od sebe. (a) Ukažte, že spojná čočka s ohniskovou vzdáleností f umístěná mezi předmět a stínítko vytvoří reálný obraz na stínítku pro dvě polohy čočky; vzdálenost mezi těmito polohami je

$$d = \sqrt{d_1(d_1 - 4f)}.$$

(b) Ukažte, že podíl velikostí těchto dvou obrazů je

$$\left(\frac{d_1 - d}{d_1 + d}\right)^2.$$

45Ú. Úzký svazek rovnoběžných paprsků dopadá zleva na skleněnou kouli a směřuje do jejího středu. (Koule je vlastně čočkou, jistě však není *tenkou* čočkou.) Pokládejte úhel dopadu paprsků za přibližně rovný 0° a předpokládejte, že index lomu skla $n < 2{,}0$. Najděte obrazovou vzdálenost i (vzdálenost obrazu od pravé strany koule) a vyjádřete ji pomocí n a poloměru r koule. (*Tip*: K určení polohy obrazu vytvořeného lomem na levé straně koule použijte rov. (35.8); pak pokládejte tento obraz za předmět pro zobrazení lomem na pravé straně koule a určete polohu konečného obrazu. Je při druhém zobrazení předmětová vzdálenost p kladná, nebo záporná?)

ODST. 35.7 Optické přístroje

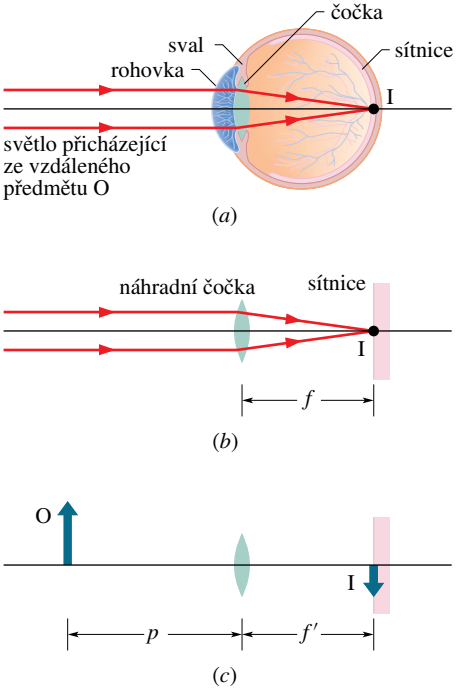
46C. Mikroskop znázorněný na obr. 35.18 má ohniskovou vzdálenost objektivu 4,00 cm a okuláru 8,00 cm. Vzdálenost mezi čočkami je 25,0 cm. (a) Jaká je délka optického intervalu s? (b) Jak daleko od objektivu musíme umístit předmět, aby obraz I vznikl blízko ohniska F_1' (mezi F_1' a okulárem), jak je zakresleno na obr. 35.18? (c) Jaké bude pak příčné zvětšení objektivu? (d) Jaké bude úhlové zvětšení m_θ okuláru? (e) Jaké bude celkové zvětšení M mikroskopu?

47C. Astronomický dalekohled má úhlové zvětšení 36 a průměr objektivu 75 mm. Jaký minimální průměr musí mít okulár, aby sebral všechno světlo, které vstoupilo do objektivu ze vzdáleného zdroje umístěného na ose dalekohledu?

48Ú. Lupa s ohniskovou vzdáleností f je umístěna blízko oka osoby, jejíž blízký bod P_n leží 25 cm od oka. Předmět je umístěn tak, že jeho obraz vytvořený čočkou se nachází v bodě P_n. (a) Jaké je úhlové zvětšení lupy? (b) Jaké bude úhlové zvětšení, přemístí-li se předmět tak, že jeho obraz se nachází v nekonečnu? (c) Najděte hodnoty úhlového zvětšení v případech (a) a (b) pro $f = 10$ cm. (Prohlížení obrazu v bodě P_n vyžaduje určitou námahu očních svalů, zatímco prohlížení obrazu v nekonečnu pro většinu lidí námahu nevyžaduje.)

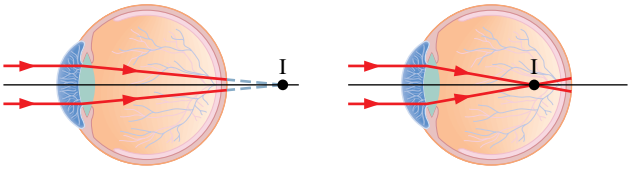
49Ú. (a) Ukažte, že pohybuje-li se předmět O na obr. 35.17c z ohniska F_1 směrem k oku, pohybuje se obraz z nekonečna a úhel θ' (a tedy i úhlové zvětšení m_θ) roste. (b) Pokračujete-li v tomto přibližování, v jaké poloze obrazu bude mít m_θ maximální užitečnou hodnotu? (Můžete dále zvětšovat m_θ, ale obraz už nebude ostrý.) (c) Ukažte, že maximální užitečná hodnota m_θ je $1 + (25\,\mathrm{cm})/f$. (d) Ukažte, že v této situaci jsou si úhlové a příčné zvětšení rovny.

50Ú. Na obr. 35.44a je schéma *lidského oka*. Světlo vstupuje do oka po lomu na rohovce, prochází otvorem (pupilou o proměnném průměru 1,5 mm až 5 mm) a je dále usměrněno čočkou, jejíž tvar (a tedy i schopnost fokusovat světlo) je ovládán svaly. Rohovku a oční čočku můžeme pokládat za jednoduchou tenkou čočku (obr. 35.44b). Jsou-li svaly uvolněny, fokusuje „normální“ oko rovnoběžný svazek paprsků od vzdáleného předmětu do bodu na sítnici v pozadí oka, kde začíná zpracování vizuálních informací. Přeneseme-li předmět blíže k oku, svaly změní tvar čočky tak, že paprsky vytvoří na sítnici převrácený reálný obraz (obr. 35.44c). (a) Nechť ohnisková vzdálenost f náhradní tenké čočky při relaxaci (uvolnění svalu) je 2,50 cm. Jaká musí být ohnisková vzdálenost f' této čočky, abychom ostře viděli předmět ve vzdálenosti $p = 40{,}0$ cm? (b) Musí oční svaly zvětšit, nebo zmenšit poloměry křivosti oční čočky, aby se změnila ohnisková vzdálenost na f'?



Obr. 35.44 Úloha 50

51Ú. *Dalekozraké* oko fokusuje rovnoběžné paprsky tak, že by obraz vznikl za sítnicí (obr. 35.45a). *Krátkozraké* oko vytvoří obraz před sítnicí (obr. 35.45b). (a) Jakou korekční čočku navrhnete pro každou z těchto vad? Nakreslete paprskový obrazec pro oba případy. (b) Potřebujete-li brýle jen ke čtení, jste krátkozraký, nebo dalekozraký? (c) K čemu slouží bifokální brýle, jejichž spodní a horní část mají rozdílné ohniskové vzdálenosti?



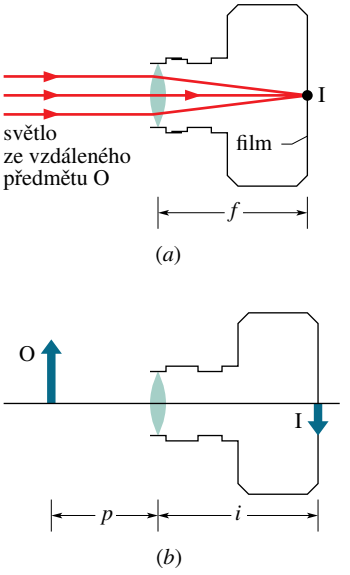
Obr. 35.45 Úloha 51

52Ú. Na obr. 35.46a je schéma *fotografického přístroje*. Abychom zaostřili obraz na film v zadní části kamery, posouváme čočku (objektiv) dopředu nebo dozadu. U určité kamery, u níž je vzdálenost mezi čočkou a filmem nastavena na $f = 5{,}0\,\text{cm}$, se sbíhají rovnoběžné paprsky přicházející ze vzdáleného předmětu O do bodového obrazu na filmu. Předmět přemístíme blíže do vzdálenosti $p = 100\,\text{cm}$ a vzdálenost mezi čočkou a filmem nastavíme tak, že na filmu vznikne reálný převrácený obraz (obr. 35.46b). (a) Jaká je pak vzdálenost mezi čočkou a filmem (obrazová vzdálenost i)? (b) Jak se změnila vzdálenost čočka–film?

53Ú. Při pozorování určitým mikroskopem je předmět 10,0 mm od objektivu, vzdálenost mezi objektivem a okulárem je 300 mm a obraz vytvořený mezi nimi je 50,0 mm od okuláru. Jaké je celkové zvětšení mikroskopu?

PRO POČÍTAČ

54Ú. Rovnice $1/p + 1/i = 2/r$ pro kulová zrcadla je pouze aproximací, která platí tehdy, je-li obraz tvořen pouze paprsky svírajícími malé úhly s centrální osou. Mnohé paprsky ve skuteč-



Obr. 35.46 Úloha 52

nosti svírají velké úhly, což poněkud rozmazává obraz. Abyste zjistili, do jaké míry to nastává, můžete užít počítače. Podívejte se na obr. 35.20 a uvažujte paprsek vycházející z bodového zdroje (předmětu) na centrální ose, který s ní svírá úhel α.

Najděte napřed průsečík paprsku se zrcadlem. Jsou-li souřadnice tohoto bodu x a y a je-li počátek zvolen ve středu křivosti, potom $y = (x + p - r)\,\text{tg}\,\alpha$ a $x^2 + y^2 = r^2$, kde p je předmětová vzdálenost a r je poloměr křivosti zrcadla. K určení úhlu β užijte vztahu $\text{tg}\,\beta = y/x$ a k určení hodnoty γ pak užijte vztahu $\alpha + \gamma = 2\beta$. Nakonec užijte vztahu $\text{tg}\,\gamma = y/(x + i - r)$, z něhož naleznete obrazovou vzdálenost i.

(a) Nechť $r = 12\,\text{cm}$ a $p = 20\,\text{cm}$. Pro každou z následujících hodnot $\alpha = 0{,}500;\ 0{,}100;\ 0{,}010\,0$ najděte polohu obrazu, tj. polohu průsečíku odraženého paprsku s centrální osou. Srovnejte tento výsledek s hodnotou zjištěnou z rovnice $1/p + 1/i = 2/r$. (b) Opakujte výpočty pro $p = 4{,}00\,\text{cm}$.

36
Interference



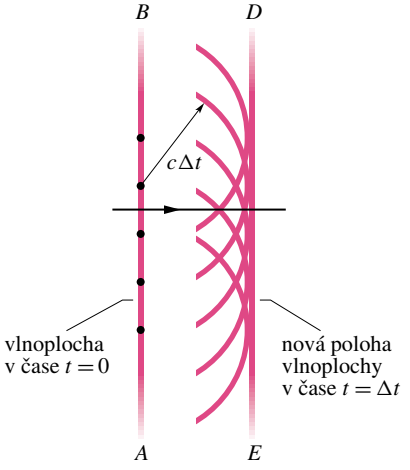
Povrch křídel motýlů z rodu ***Morpho*** *je na první pohled nádherně modrozelený. Ale na rozdíl od barev většiny těles je matný třpyt motýlího křídla vyvolaný něčím opravdu pozoruhodným. Jestliže totiž změníte směr pozorování nebo jestliže se křídlo pohybuje, odstín zbarvení se mění. Vypadá to, že křídlo je barevně proměnné a modrozelené zbarvení skrývá „pravou“, matně hnědou barvu, kterou vidíme na spodní ploše křídla. Co je tak odlišného na vrchní ploše, co způsobuje tuto zajímavou podívanou?*

36.1 INTERFERENCE

Duha ukazuje, že sluneční světlo je složeno ze všech barev viditelného spektra. Barvy se objevují v duze proto, že světlo různých vlnových délek prochází dešťovými kapkami, které duhu vytvářejí, v různých směrech. Avšak mýdlová bublina nebo olejová skvrna mohou rovněž vytvářet jasné barvy, které tentokrát nevznikají lomem světla, ale konstruktivní a destruktivní **interferencí** světla. Vzájemným skládáním vln se zesilují nebo potlačují určité barvy ve spektru dopadajícího světla. Interference vln je tedy projevem superpozice vlnění shodným s tím, který byl probírán v kap. 17.

Toto selektivní zesílení nebo zeslabení světla určitých vlnových délek má mnoho aplikací. Když například světlo dopadá na obyčejný skleněný povrch, pak asi 4 % dopadající energie se odráží, takže procházející svazek je o toto množství zeslaben. Tyto nežádoucí ztráty mohou být vážným problémem ve složitých optických soustavách s mnoha prvky. Tenká průhledná *interferenční vrstva*, vytvořená na skleněném povrchu, může pomocí destruktivní interference omezit množství odraženého světla a tím zesílit světlo procházející. Na přítomnost takové vrstvy ukazuje modré zbarvení objektivů kamer. Interferenční vrstvy mohou být také použity ke zvýšení — a nikoli ke snížení — schopnosti ploch odrážet světlo.

Abychom pochopili interferenci, musíme opustit omezující geometrickou optiku a využít dokonalejších prostředků vlnové optiky. Jak uvidíme, je vskutku interference asi nejpřesvědčivější důkaz, že světlo je vlnění — protože interferenci nelze vyložit jinak, než pomocí vln.



Obr. 36.1 Konstrukce šíření rovinné vlny ve vakuu na základě Huygensova principu.

36.2 SVĚTLO JAKO VLNA

Prvním, kdo předložil přesvědčivou vlnovou teorii světla, byl holandský fyzik Christian Huygens v roce 1678. Jeho teorie není tak rozsáhlá jako pozdější Maxwellova elektromagnetická teorie světla, je matematicky jednodušší a dodnes se používá. Její velkou předností je, že první vysvětlila zákon odrazu a lomu pomocí šíření vln a vyložila fyzikální smysl indexu lomu.

Huygensova vlnová teorie je založena na geometrické konstrukci, která dovoluje stanovit, kde se bude nalézat vlnoplocha v libovolném pozdějším čase, jestliže známe její současnou polohu. Tato konstrukce vyplývá z **Huygensova principu**, který zní:

> Všechny body na vlnoploše slouží jako bodové zdroje sekundárních kulových vlnoploch. Po nějakém čase Δt bude novou polohou vlnoplochy tečná plocha k těmto sekundárním vlnoplochám.

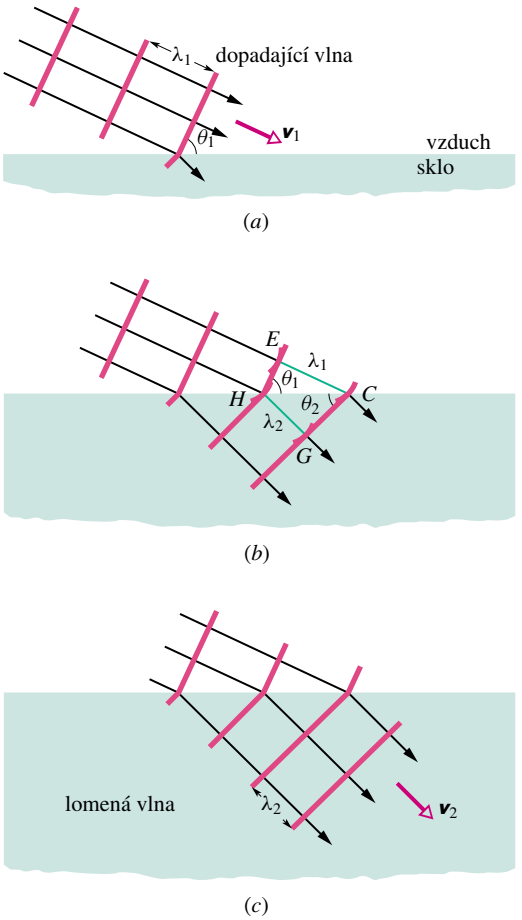
Uvedeme jednoduchý příklad. Vlevo na obr. 36.1 je poloha vlnoplochy rovinné vlny, šířící se ve vakuu doprava, reprezentována rovinou AB kolmou k nákresně. Kde bude vlnoplocha po čase Δt? Použijme některé body roviny AB (tečky) jako zdroje sekundárních kulových vlnek, které jsou emitovány v čase $t = 0$. V čase Δt bude mít poloměr všech těchto kulových vlnek hodnotu $c\Delta t$, kde c je rychlost šíření světla ve vakuu. Nakreslíme rovinu DE, tečnou k těmto vlnkám v čase Δt. Tato rovina představuje vlnoplochu rovinné vlny v čase Δt; je rovnoběžná s rovinou AB a její vzdálenost od ní je $c\Delta t$.

Zákon lomu

Užijeme nyní Huygensova principu k odvození zákona lomu který je vyjádřen rov. (34.44) (Snellův zákon). Obr. 36.2 ukazuje situaci při lomu několika vlnoploch na rovinném rozhraní mezi vzduchem (prostředí 1) a sklem (prostředí 2). Vybereme libovolně vlnoplochy, mezi nimiž je vzdálenost λ_1, která odpovídá vlnové délce v prostředí 1. Nechť je rychlost světla ve vzduchu v_1 a ve skle v_2. Platí, že $v_2 < v_1$.

Úhel θ_1 v obr. 36.2a je úhel mezi vlnoplochou a rozhraním; je stejně velký jako úhel mezi *normálou* k vlnoploše (tj. dopadajícím paprskem) a *normálou* k rozhraní — tedy θ_1 je úhel dopadu.

Jakmile vlna vstoupí do skla (obr. 36.2b), bude čas $t_1 = \lambda_1/v_1$, potřebný k rozšíření vlnky z bodu E do bodu C, stejný jako čas $t_2 = \lambda_2/v_2$, potřebný k rozšíření vlnky menší rychlostí ve skle z bodu H do bodu G. Porovnáním



Obr. 36.2 Lom rovinné vlny na rozhraní vzduch — sklo, zkonstruovaný pomocí Huygensova principu. Vlnová délka ve skle je menší než vlnová délka ve vzduchu. Pro zjednodušení není zakreslena odražená vlna.

těchto časů získáme vztah

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}, \tag{36.1}$$

který ukazuje, že vlnové délky světla ve dvou prostředích jsou úměrné rychlostem světla v těchto prostředích.

Z Huygensova principu vyplývá, že lomem vzniklá vlnoplocha musí být tečnou rovinou v bodě G k oblouku o poloměru λ_2 se středem v H. Je orientována tak, jak ukazuje obrázek. Poznamenejme, že úhel θ_2 mezi vlnoplochou vzniklou lomem a rozhraním je úhlem lomu.

Pro pravoúhlé trojúhelníky HCE a HCG na obr. 36.2b můžeme psát

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda_1}{|HC|} \quad \text{(pro trojúhelník } HCE\text{)}$$

a

$$\sin\theta_2 = \frac{\lambda_2}{|HC|} \quad \text{(pro trojúhelník } HCG\text{)}.$$

Dělením první z těchto dvou rovnic rovnicí druhou a užitím rov. (36.1) nalezneme

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{36.2}$$

Index lomu každého prostředí je definován jako poměr rychlosti světla c ve vakuu k rychlosti světla v v tomto prostředí. Potom

$$n = \frac{c}{v} \quad \text{(index lomu)}. \tag{36.3}$$

Pro naše dvě prostředí máme

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{a} \quad n_2 = \frac{c}{v_2}. \tag{36.4}$$

Spojením rov. (36.2) a (36.4) nalezneme

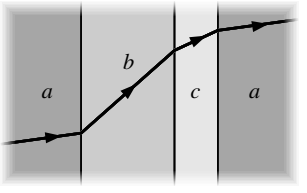
$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{36.5}$$

neboli

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad \text{(zákon lomu)}, \tag{36.6}$$

což je zákon lomu zavedený v kap. 34.

KONTROLA 1: Obrázek ukazuje paprsek monochromatického světla, procházejícího rovnoběžnými rozhraními ze vstupního prostředí a přes vrstvy z látky b a c a potom opět do látky a. Seřaďte prostředí sestupně podle rychlosti šíření světla.



Vlnová délka a index lomu

Viděli jsme, že vlnová délka světla se změní, jestliže se změní rychlost světla při přechodu rozhraním z jednoho prostředí do druhého. Dále podle rov. (36.3) závisí rychlost světla v libovolném prostředí na jeho indexu lomu. Z toho plyne, že vlnová délka světla v libovolném prostředí závisí na indexu lomu tohoto prostředí. Nechť dokonale monochromatické světlo má ve vakuu vlnovou délku λ a rychlost šíření c, zatímco v prostředí o indexu lomu n má

vlnovou délku λ_n a rychlost v. Potom můžeme rov. (36.1) vyjádřit jako

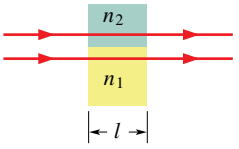
$$\lambda_n = \lambda \frac{v}{c}. \tag{36.7}$$

Užitím rov. (36.3) dostaneme

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}. \tag{36.8}$$

Tento výraz vyjadřuje vztah vlnové délky světla v libovolném prostředí k jeho vlnové délce ve vakuu: čím větší je index lomu prostředí, tím menší je vlnová délka světla v tomto prostředí.

Tato skutečnost je důležitá v případech zahrnujících interferenci světelných vln. Například na obr. 36.3 mají *vlny paprsků* (tzn. vlny reprezentované paprsky) stejnou



Obr. 36.3 Dva světelné paprsky, šířící se dvěma prostředími s různými indexy lomu.

vlnovou délku λ a jsou zpočátku, ve vzduchu ($n \doteq 1$), ve fázi. Jedna z vln prochází prostředím 1 o indexu lomu n_1 a délce l. Druhá prochází prostředím 2 o indexu lomu n_2 a stejné délce l. Protože se vlnové délky v obou prostředích liší, nezůstanou obě vlny po jejich opuštění obecně ve fázi.

Fázový rozdíl mezi dvěma světelnými vlnami se může změnit, jestliže se vlny šíří různými látkami, které mají různé indexy lomu.

Jak ukážeme, změna fázového rozdílu určuje interferenci světelných vln, které dospěly do nějakého společného bodu. Abychom nalezli jejich nový fázový rozdíl, měřený ve vlnových délkách, musíme nejdříve stanovit počet N_1 vlnových délek, které jsou obsaženy podél dráhy l v prostředí 1. Podle rov. (36.8) je vlnová délka v prostředí 1 rovna $\lambda_1 = \lambda/n_1$, takže

$$N_1 = \frac{l}{\lambda_1} = \frac{l n_1}{\lambda}. \tag{36.9}$$

Analogicky stanovíme počet N_2 vlnových délek, kterými lze vyjádřit vzdálenost l v prostředí 2, v němž je vlnová délka rovna $\lambda_2 = \lambda/n_2$:

$$N_2 = \frac{l}{\lambda_2} = \frac{l n_2}{\lambda}. \tag{36.10}$$

Abychom nalezli nový fázový rozdíl mezi vlnami, vypočítáme rozdíl N_1 a N_2. Za předpokladu $n_2 > n_1$ dostaneme

$$N_2 - N_1 = \frac{l n_2}{\lambda} - \frac{l n_1}{\lambda} = \frac{l}{\lambda}(n_2 - n_1). \tag{36.11}$$

Předpokládejme, že hodnota rozdílu fází vln podle rovnice (36.11) je 45,6 vlnové délky. To je ekvivalentní případu, v němž jsou počáteční fáze obou vln shodné a posunutí jedné z nich je vzhledem ke druhé rovno 45,6 vlnové délky. Je-li rozdíl fází celočíselným násobkem vlnové délky (např. 45), jsou obě vlny opět ve fázi. Důležitá je pouze desetinná část násobku (zde 0,6). Fázový rozdíl 45,6 vlnové délky je ekvivalentní fázovému rozdílu 0,6 vlnové délky.

Fázový rozdíl 0,5 vlnové délky uvede vlny do opačné fáze. Jestliže takové vlny dospěly do nějakého společného bodu, dojde k destruktivní interferenci, projevující se tmavým, neosvětleným místem. Naproti tomu při fázovém rozdílu 0,0 nebo 1,0 vlnové délky dojde ke konstruktivní interferenci vln a osvětlení společného bodu bude maximální. Vzhledem k oběma uvedeným krajním případům odpovídá náš fázový rozdíl 0,6 vlnové délky přechodné situaci, která je bližší k destruktivní interferenci, takže osvětlení ve společném bodě bude slabé.

Fázový rozdíl se obvykle vyjadřuje v jednotkách rovinného úhlu, tzn. v radiánech nebo ve stupních. Vyjádření fázového rozdílu v jednotce rovné vlnové délce je však názornější. Fázovému rozdílu jedné vlnové délky odpovídá fázový rozdíl 2π rad nebo 360°.

PŘÍKLAD 36.1

Dvě světelné vlny, které jsou na obr. 36.3 reprezentovány paprsky, mají před vstupem do prostředí 1 a 2 vlnovou délku 550,0 nm. Prostředím 1 je vzduch a prostředím 2 je plastová vrstva tloušťky 2,600 μm o indexu lomu 1,600.

(a) Jaký je fázový rozdíl vystupujících vln, vyjádřený ve vlnových délkách?

ŘEŠENÍ: Z rov. (36.11) pro $n_1 = 1{,}000$, $n_2 = 1{,}600$, $l = 2{,}600\,\mu\text{m}$ a $\lambda = 550{,}0\,\text{nm}$ dostaneme

$$N_2 - N_1 = \frac{l}{\lambda}(n_2 - n_1) = \frac{(2{,}600\cdot 10^{-6}\,\text{m})}{(5{,}500\cdot 10^{-7}\,\text{m})}(1{,}600 - 1{,}000) = 2{,}84, \qquad \text{(Odpověď)}$$

což je ekvivalentní fázovému rozdílu 0,84 vlnové délky.

(b) Jestliže paprsky svírají malý úhel, setkají se vlny v témže bodě vzdáleného stínítka. Jaký typ interference v tomto bodě vytvoří?

ŘEŠENÍ: Faktický fázový rozdíl 0,84 vlnové délky odpovídá přechodnému případu, který je bližší ke konstruktivní interferenci (1,0) než k interferenci destruktivní (0,5).

(c) Jaký je fázový rozdíl v radiánech a ve stupních?

ŘEŠENÍ: V radiánech

$$(0{,}84)(2\pi\,\text{rad}) = 5{,}3\,\text{rad}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Ve stupních

$$(0{,}84)(360^\circ) = 302^\circ \doteq 300^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

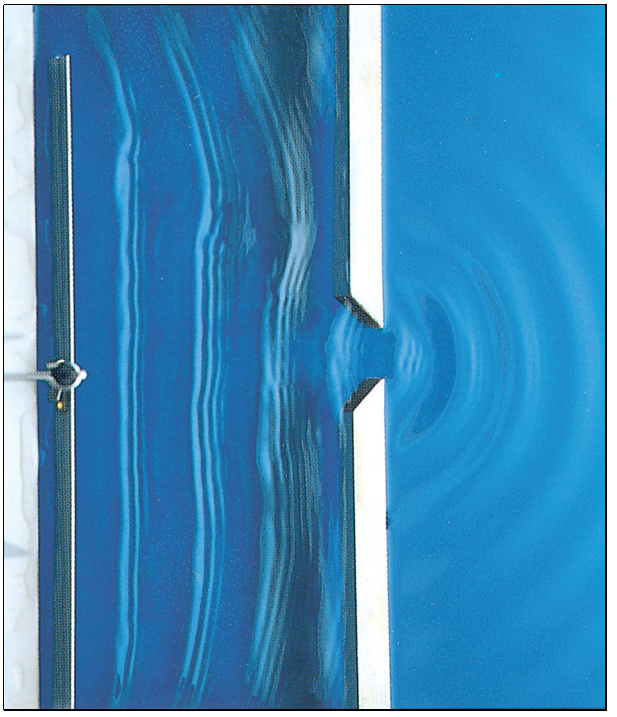
KONTROLA 2: Dvě světelné vlny, reprezentované na obr. 36.3 paprsky, mají stejné vlnové délky a jejich počáteční fáze jsou shodné. (a) Která vrstva má větší index lomu, jestliže délce horní vrstvy odpovídá 7,60 vlnové délky a délce dolní vrstvy odpovídá 5,50 vlnové délky? (b) Jestliže oba paprsky navzájem odkloníme, setkají se v tomtéž bodě na vzdáleném stínítku. Dojde tam k interferenci konstruktivní, částečně konstruktivní, částečně destruktivní, nebo destruktivní?

36.3 DIFRAKCE

V následující části rozebereme pokus, který poprvé prokázal, že světlo je vlna. Abychom byli na to připraveni, musíme zavést pojem **difrakce** (ohyb) vln, označující jev, který budeme podrobně zkoumat v kap. 37. Její podstata je následující: jestliže vlna dopadá na překážku s otvorem, jehož rozměry jsou srovnatelné s vlnovou délkou, část vlny, která otvorem projde, se rozšíří — bude *difraktovat* (ohýbat se) — do oblasti za stínítkem. Její šíření odpovídá šíření dílčích vlnoploch v Huygensově konstrukci na obr. 36.1. Difrakci vykazují vlny všech typů, tedy nejenom světelné vlny; obr. 36.4 ukazuje difrakci vodních vln, šířících se na vodní hladině v mělké nádobě.

Obr. 36.5a schematicky zobrazuje rovinnou vlnu o vlnové délce λ, dopadající na stínítko se štěrbinou, která má šířku $a = 6{,}0\lambda$ a je kolmá k nákresně. Za štěrbinou se vlna rozšíří i do stran. Obr. 36.5b (s $a = 3{,}0\lambda$) a obr. 36.5c ($a = 1{,}5\lambda$) ilustrují základní vlastnost difrakce: čím užší je štěrbina, tím širší je oblast difrakce.

Difrakce omezuje použitelnost geometrické optiky, ve které šíření elektromagnetických vln vyjadřujeme paprsky. Jestliže se skutečně pokoušíme vytvořit paprsek průchodem světla úzkou štěrbinou nebo soustavou úzkých štěrbin, bude difrakce našemu úsilí bránit, protože vždy způsobí šíření světla i do stran. Dokonce čím užší štěrbinu použijeme (ve snaze vytvořit užší svazek), tím větší je toto rozšíření. Proto



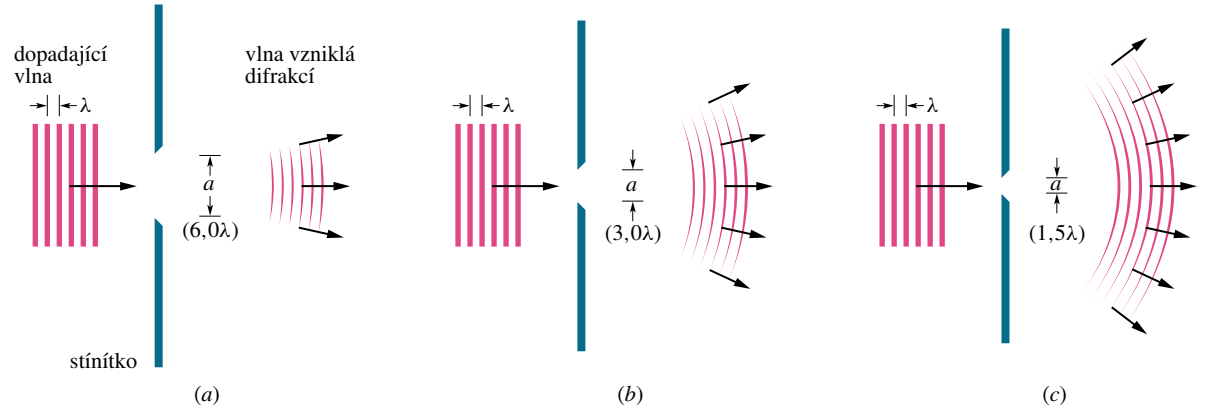
Obr. 36.4 Difrakce vodních vln v mělké nádobě. Vlny pohybující se zleva doprava se za otvorem v přepážce rozšíří podél vodní hladiny.

je geometrická optika použitelná pouze tehdy, když štěrbiny nebo jiné clony, které mohou být umístěny do dráhy světla, nemají rozměry srovnatelné s vlnovou délkou světla nebo menší.

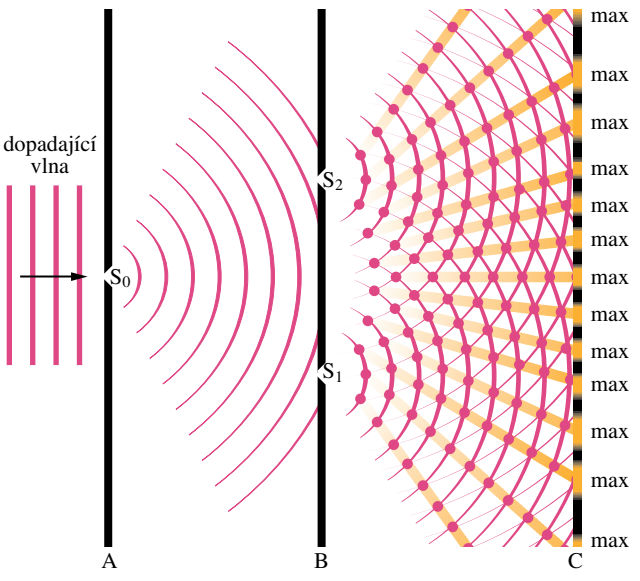
36.4 YOUNGŮV INTERFERENČNÍ POKUS

V roce 1801 Thomas Young experimentálně prokázal, že světlo je vlna, zatímco většina fyziků v té době pokládala světlo za proud částic. Demonstroval, že světlo vykazuje interferenci stejně jako vodní vlny, zvukové vlny a všechny ostatní typy vln. Kromě toho dokázal změřit střední vlnovou délku slunečního světla; jím zjištěná hodnota 570 nm je obdivuhodně blízká dnes uznávané hodnotě 555 nm. Prozkoumáme nyní Youngův historický pokus jako příklad interference světelných vln.

Obr. 36.6 uvádí základní uspořádání Youngova pokusu. Světlo ze vzdáleného monochromatického zdroje osvětluje štěrbinu S_0 na stínítku A. Difrakcí vzniklé světlo osvětluje dvě štěrbiny S_1 a S_2 ve stínítku B. Difrakcí na těchto dvou štěrbinách vzniknou za stínítkem B dvě válcové vlny (průsečnice jejich vlnoploch s nákresnou jsou na obrázku zobrazeny částmi kružnic); v této oblasti vlna z jedné štěrbiny interferuje s vlnou z druhé štěrbiny.

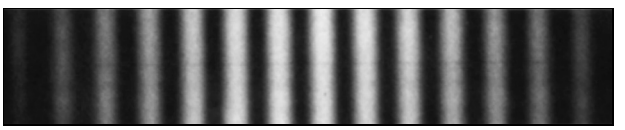


Obr. 36.5 Schematické znázornění difrakce. Pro danou vlnovou délku je difrakce výraznější pro menší šířku štěrbiny a. Obrázky ukazují případy pro (a) šířku štěrbiny $a = 6{,}0\lambda$, (b) šířku štěrbiny $a = 3{,}0\lambda$, (c) šířku štěrbiny $a = 1{,}5\lambda$. Ve všech třech případech se stínítko se štěrbinou rozprostírá kolmo pod i nad nákresnu.



Obr. 36.6 Tento obrázek je příčným řezem; stínítka, štěrbiny a interferenční obrazec jsou protaženy pod nákresnu a nad ní. V Youngově interferenčním experimentu dochází k difrakci dopadajícího monochromatického světla na štěrbině S_0, která působí jako bodový zdroj světla o polokruhových *vlnoplochách*. Po dopadu na stínítko B je světlo difraktováno na štěrbinách S_1 a S_2, které působí jako dva bodové zdroje světla. Světelné vlny postupující ze štěrbin S_1 a S_2 se vzájemně překrývají a interferují. Na projekčním stínítku C vzniká interferenční obrazec maxim a minim.

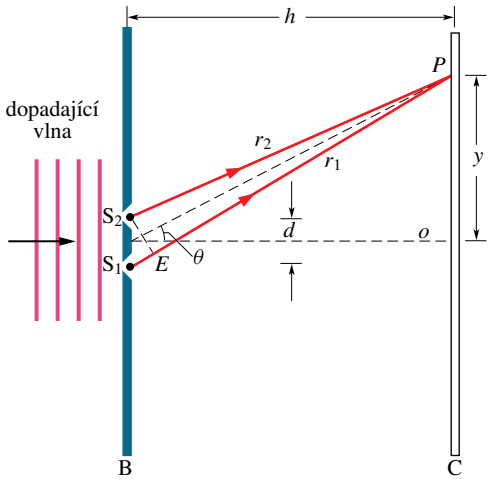
Na „momentce“ obr. 36.6 jsou tečkami vyznačeny body, ve kterých dochází ke konstruktivní interferenci (vznikají interferenční maxima). Z těchto bodů můžeme pozorovat pouze ty, které jsou v rovině stínítka, vloženého do šířících se vln. Body interferenčních maxim vytvářejí na stínítku svítící řady — nazývané *světlé pruhy, světlé proužky* nebo (volněji řečeno) *maxima* — které se rozprostírají napříč stínítka (pod nákresnou v obr. 36.6 a nad ní). Tmavé oblasti — nazývané *tmavé pruhy, tmavé proužky* nebo (volněji řečeno) *minima* — jsou výsledkem destruktivní interference a jsou patrné mezi světlými proužky. (Přesněji řečeno: *maxima* a *minima* odpovídají středům pruhů.) Struktura světlých a tmavých proužků na stínítku se nazývá **interferenční obrazec.** Fotografie interferenčního obrazce je na obr. 36.7; pro úsporu místa je fotografie pootočena o 90°.



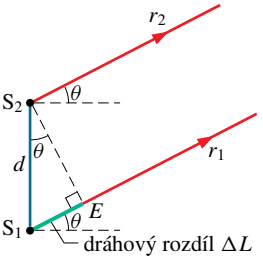
Obr. 36.7 Fotografie interferenčního obrazce vytvořeného v sestavě podle obr. 36.6. Zobrazuje čelný pohled na část stínítka C a je otočena o 90°. Střídající se maxima a minima se nazývají *interferenční proužky*. Podobají se dekoračnímu proužku užívanému někdy na šatech a závěsech.

Lokalizace proužků

V *Youngově dvojštěrbinovém interferenčním pokusu*, jak uvedený experiment nazýváme, vytvářejí vlny proužky, ale jak se vlastně určí jejich poloha? Abychom nalezli odpověď, budeme uvažovat uspořádání podle obr. 36.8a. Rovinná vlna monochromatického světla dopadá na dvě štěrbiny S_1 a S_2 na stínítku B; světlo na štěrbinách difraktuje a na stínítku C vytváří interferenční obrazec. Sestrojíme středovou osu o jako kolmici ke stínítku C ze středu vzdálenosti mezi štěrbinami. Na stínítku zvolíme libovolný bod P a označíme θ úhel, který svírá spojnice P se středem mezi štěrbinami a středovou osou. V bodě P končí paprsek r_1 vlny šířící se ze spodní štěrbiny a paprsek r_2 vlny šířící se z horní štěrbiny.



(a)



(b)

Obr. 36.8 (a) Vlny ze štěrbin S_1 a S_2 (nad a pod nákresnou) se skládají v libovolném bodě P na stínítku C ve vzdálenosti y od středové osy. Úhel θ je vhodnou veličinou ke stanovení polohy P. (b) Pro $h \gg d$ můžeme r_1 a r_2 považovat přibližně za rovnoběžné paprsky, šířící se pod úhlem θ vzhledem ke středové ose o.

Tyto vlny mají při výstupu ze štěrbin stejnou fázi, protože jsou částmi téže vlnoplochy dopadající vlny. Aby ale obě vlny dospěly od štěrbin do téhož bodu P, musí projít různé vzdálenosti. Je to podobný případ jako v čl. 18.4 se zvukovými vlnami, takže dospíváme k závěru:

Jestliže se dvě vlny šíří dráhami o různých délkách, jejich fázový rozdíl se může změnit.

Změna fázového rozdílu je způsobena *dráhovým rozdílem* ΔL cest, kterými se vlny šíří. Uvažujme dvě vlny se stejnou fází, které se šíří cestami s dráhovým rozdílem ΔL a potom procházejí nějakým společným bodem. Jestliže je ΔL nula nebo celočíselný násobek vlnové délky, vlny dospějí do společného bodu ve fázi a interferují konstruktivně. Jestliže to platí pro vlny s dráhami r_1 a r_2 na obr. 36.8, pak bod P leží na světlém proužku. Pokud je ΔL lichý násobek poloviny vlnové délky, dopadají vlny do společného bodu přesně s opačnou fází a interferují destruktivně. Jestliže to platí pro dráhy r_1 a r_2, bude v bodě P tmavý proužek. (A samozřejmě můžeme mít přechodný stav interference s takovým osvětlením v P, které odpovídá hodnotám mezi světlým a tmavým proužkem.) Tedy:

To, co se objeví v Youngově interferenčním pokusu v každém bodě stínítka, je určeno dráhovým rozdílem ΔL paprsků, které do tohoto bodu dospěly.

Polohu každého světlého nebo tmavého proužku můžeme určit z úhlu θ od středové osy o k proužku. Abychom nalezli θ, musíme jej vyjádřit pomocí ΔL. Podle obr. 36.8a začneme nalezením takového bodu E na paprsku r_1, ve kterém je délka dráhy z E do P rovna délce dráhy z S_2 do P. Pak dráhový rozdíl ΔL mezi oběma paprsky je právě vzdálenost $|S_1E|$.

Vztah mezi úhlem θ a vzdáleností $|S_1E|$ je složitý, ale můžeme jej značně zjednodušit, jestliže uspořádáme experiment tak, aby vzdálenost h od štěrbin ke stínítku byla mnohem větší, než je vzdálenost d mezi štěrbinami. V takovém případě můžeme považovat paprsky r_1, r_2 za vzájemně rovnoběžné a šířící se pod úhlem θ k ose (obr. 36.8b). Potom také můžeme považovat trojúhelník S_1S_2E za pravoúhlý s vnitřním úhlem θ u vrcholu S_2. Pro tento trojúhelník je $\sin\theta = \Delta L/d$ a tedy

$$\Delta L = d\sin\theta \quad \text{(dráhový rozdíl)}. \tag{36.12}$$

Ukázali jsme, že pro světlý proužek musí být ΔL nula nebo celočíselný násobek vlnové délky. Užitím rov. (36.12) můžeme tento požadavek vyjádřit jako

$$\Delta L = d\sin\theta = (\text{celé číslo})(\lambda) \tag{36.13}$$

neboli

$$d\sin\theta = m\lambda, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\text{(maxima — světlé proužky)}. \tag{36.14}$$

Pro tmavé proužky musí být ΔL lichým násobkem poloviny vlnové délky. Opět užitím rov. (36.12) můžeme tento požadavek vyjádřit jako

$$\Delta L = d\sin\theta = (\text{liché číslo})(\tfrac{1}{2}\lambda) \tag{36.15}$$

neboli

$$d\sin\theta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\text{(minima — tmavé proužky)}. \tag{36.16}$$

Pomocí rov. (36.14) a (36.16) můžeme nalézt úhel θ libovolného proužku a tedy i jeho polohu; kromě toho můžeme hodnotu m užít k označení proužku. Pro $m = 0$ udává rov. (36.14), že světlý proužek leží ve směru $\theta = 0$, tzn. na středové ose. Toto *středové (centrální) maximum* je místem, ve kterém vlny, šířící se ze dvou štěrbin, mají dráhový rozdíl $\Delta L = 0$, proto mají i nulový fázový rozdíl.

Například pro $m = 2$ rov. (36.14) udává, že *světlé* proužky jsou ve směru

$$\theta = \arcsin\left(\frac{2\lambda}{d}\right)$$

nahoru nebo dolů vzhledem k ose. Vlny ze dvou štěrbin dospějí do místa těchto proužků při $\Delta L = 2\lambda$ a tedy s rozdílem fází odpovídajícím dvěma vlnovým délkám. Tyto proužky se nazývají proužky *druhého řádu* (ve smyslu $m = 2$) neboli *druhá vedlejší maxima* (druhá maxima od středového maxima), nebo jsou označovány jako druhé proužky od středového maxima.

Pro $m = 1$ z rov. (36.16) vyplývá, že *tmavé* proužky jsou ve směru

$$\theta = \arcsin\left(\frac{1{,}5\lambda}{d}\right)$$

nad nebo pod osou. Vlny ze dvou štěrbin dorazí do míst těchto proužků s $\Delta L = 1{,}5\lambda$ a s fázovým rozdílem odpovídajícím 1,5 vlnové délky. Tyto proužky se nazývají *druhé tmavé proužky* neboli *druhá minima*, protože to jsou druhé tmavé proužky od středové osy. (První tmavý proužek neboli první minimum se nachází v těch místech, pro která je v rov. (36.16) $m = 0$.)

Rov. (36.14) a (36.16) byly odvozeny pro případ, že $h \gg d$. Lze je však také užít, jestliže mezi štěrbiny a projekční stínítko vložíme spojnou čočku a stínítko posuneme do ohniska čočky. (Stínítko je potom v *ohniskové rovině* čočky, tzn. v rovině kolmé ke středové ose v ohnisku.) Paprsky, které se sejdou v libovolném místě stínítka, musí být před dopadem na čočku rovnoběžné — což odpovídá původně rovnoběžným paprskům na obr. 35.13a, které jsou čočkou soustředěny do bodu.

KONTROLA 3: Jaké jsou ΔL (jako násobek vlnové délky λ) a fázový rozdíl (ve vlnových délkách) dvou paprsků na obr. 36.8a, jestliže bod P (a) odpovídá třetímu vedlejšímu maximu a (b) třetímu minimu?

PŘÍKLAD 36.2

Jaká je vzdálenost na stínítku C na obr. 36.8a mezi sousedními maximy v blízkosti středu interferenčního obrazce? Vlnová délka λ světla je 546 nm, vzdálenost štěrbin d je 0,12 mm a vzdálenost h stínítka od štěrbin je 55 cm. Předpokládejte, že úhel θ na obr. 36.8 je dostatečně malý, takže je oprávněné použít přibližného vztahu $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta \approx \theta$, ve kterém je úhel θ vyjádřen v radiánech.

ŘEŠENÍ: Z obr. 36.8 vidíme, že pro nějaké číslo m (jeho malá hodnota zajišťuje, aby odpovídající maximum bylo v blízkosti středu obrazce) platí

$$\operatorname{tg}\theta \approx \theta = \frac{y_m}{h},$$

kde y_m je vzdálenost m-tého maxima od osy. Z rov. (36.14) pro příslušnou hodnotu m dostaneme

$$\sin\theta \approx \theta = \frac{m\lambda}{d}.$$

Jestliže porovnáme oba výrazy pro θ a řešíme je vzhledem k y_m, nalezneme

$$y_m = \frac{m\lambda h}{d}. \qquad (36.17)$$

Podobně pro sousední vzdálenější proužek platí

$$y_{m+1} = \frac{(m+1)\lambda h}{d}. \qquad (36.18)$$

Vzdálenost mezi sousedními maximy nalezneme odečtením hodnoty rov. (36.17) od hodnoty rov. (36.18):

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda h}{d} =$$
$$= \frac{(546\cdot10^{-9}\ \text{m})(55\cdot10^{-2}\ \text{m})}{(0{,}12\cdot10^{-3}\ \text{m})} =$$
$$= 2{,}50\cdot10^{-3}\ \text{m} \doteq 2{,}5\ \text{mm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pokud jsou d a θ na obr. 36.8a malé, rozteč mezi interferenčními proužky nezávisí na m; šířka proužků je také stejná.

36.5 KOHERENCE

Nutnou podmínkou, aby se interferenční obrazec objevil na stínítku C v obr. 36.6 je, aby se fázový rozdíl světelných vln, dopadajících do libovolného bodu P stínítka, neměnil s časem. To je případ podle obr. 36.6, protože vlny šířící se od štěrbin S_1 a S_2 jsou částmi jediné světelné vlny osvětlující štěrbiny. Protože fázový rozdíl zůstává konstantní, je světlo ze štěrbin S_1 a S_2 dokonale **koherentní.**

Přímé sluneční světlo je částečně koherentní; vlny slunečního světla dopadajícího do dvou bodů mají konstantní fázový rozdíl pouze tehdy, jestliže jsou tyto body blízko u sebe. Jestliže se podíváte zblízka na svůj nehet v jasném slunečním světle, můžete vidět interferenční obrazec, nazývaný anglicky *speckle*: nehet je jakoby pokryt barevnými

skvrnkami (speckle = skvrnka). Tento jev pozorujete proto, že světelné vlny, vzniklé rozptylem ve velmi blízkých bodech nehtu, jsou dostatečně koherentní k tomu, aby ve vašem oku spolu interferovaly. Štěrbiny ve dvojštěrbinovém pokusu však nejsou navzájem dostatečně blízko, takže v přímém slunečním světle je světlo ve štěrbinách vzájemně **nekoherentní.** Abychom získali koherentní světlo, propustíme sluneční světlo jedinou štěrbinou; protože je tato štěrbina úzká, světlo, které jí projde, je koherentní. Úzká štěrbina dále způsobí, že svazek světla se v důsledku difrakce rozšíří a osvětlí obě štěrbiny koherentním světlem.

Jestliže nahradíme štěrbiny dvěma stejnými, ale nezávislými monochromatickými světelnými zdroji, jakými jsou dva tenké rozžhavené dráty, fázový rozdíl vln se rychle a náhodně mění. Je to proto, že světlo je vyzařováno z drátů velkým množstvím atomů, které září náhodně a nezávisle po velmi krátkou dobu (řádu nanosekund). Následkem toho se v libovolném bodě projekční plochy rychle mění interference vln z obou zdrojů mezi konstruktivní a destruktivní. Oko (a většina běžných optických detektorů) takové změny nemůže sledovat a nemůže vidět interferenční obrazec. Proužky zmizí a stínítko je osvětleno stejnoměrně. A právě takové světlo nazýváme nekoherentní.

Laser se liší od běžných světelných zdrojů tím, že jeho atomy vyzařují světlo koordinovaně, takže poskytují koherentní světlo. Toto světlo je navíc téměř monochromatické, je vyzařováno v úzkém svazku s malou rozbíhavostí a může být fokusováno do stopy, jejíž rozměry jsou srovnatelné s vlnovou délkou světla.

36.6 INTENZITA PŘI INTERFERENCI SVĚTLA ZE DVOU ŠTĚRBIN

Rov. (36.14) a (36.16) vyjadřují, jak jsou na stínítku C rozložena maxima a minima jako funkce úhlu θ při interferenci ze dvou štěrbin podle obr. 36.8. Chceme nyní odvodit vztah pro intenzitu I proužků jako funkci θ.

Světlo opouštějící štěrbiny je ve fázi. Předpokládejme však, že složky vektoru intenzity elektrického pole světelných vln, které dospějí do bodu P na obr. 36.8 ze dvou štěrbin, nejsou ve fázi a mění se s časem podle vztahů

$$E_1 = E_0 \sin \omega t \tag{36.19}$$

a

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \varphi), \tag{36.20}$$

kde ω je úhlová frekvence obou vln a φ je fázová konstanta vlny E_2. Poznamenejme, že obě vlny mají stejnou amplitudu E_0 a fázový rozdíl φ. Protože se tento fázový rozdíl nemění, vlny jsou koherentní. Ukážeme, že tyto dvě vlny se budou v bodě P skládat a způsobí osvětlení o intenzitě I, dané vztahem

$$I = 4I_0 \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi, \tag{36.21}$$

kde

$$\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta. \tag{36.22}$$

V rov. (36.21) je I_0 intenzita světla, které přichází na stínítko z jedné štěrbiny, když druhá štěrbina je dočasně zakryta. Předpokládejme, že ve srovnání s vlnovou délkou jsou štěrbiny tak úzké, že intenzita světla z jedné štěrbiny je prakticky stejná v celé oblasti stínítka, na kterém proužky zkoumáme.

Rov. (36.21) a (36.22) vyjadřují průběh intenzity I ve struktuře proužků na obr. 36.8 v závislosti na úhlu θ. Obsahují také informaci o rozložení maxim a minim. Ověřme si to.

Rozbor rov. (36.21) ukazuje, že maxima intenzity se objeví, když

$$\tfrac{1}{2}\varphi = m\pi, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{36.23}$$

Jestliže dosadíme tento výsledek do rov. (36.22), nalezneme

$$2m\pi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \ldots$$

neboli

$$d \sin\theta = m\lambda, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(maxima)}, \tag{36.24}$$

což je přesně rov. (36.14), tedy vztah, který jsme dříve odvodili pro polohu maxim.

Minima se ve struktuře proužků objeví, když

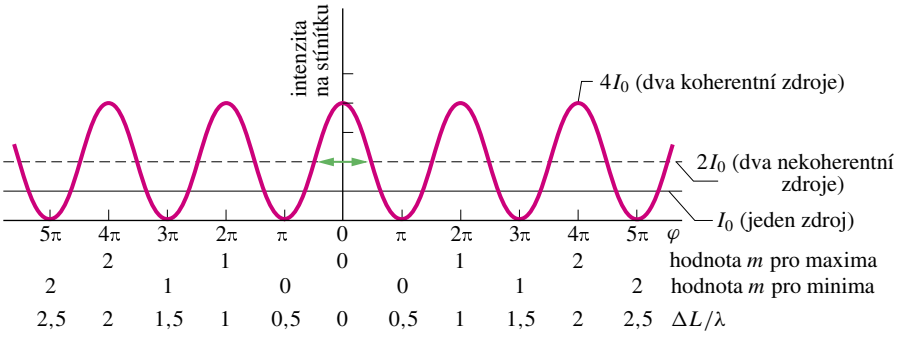
$$\tfrac{1}{2}\varphi = (m + \tfrac{1}{2})\pi, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Jestliže toto dosadíme do rov. (36.22), dospějeme ihned k rovnici

$$d \sin\theta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(minima)}, \tag{36.25}$$

což je právě rov. (36.16), tedy vztah, který jsme odvodili pro polohu tmavých proužků.

Křivka na obr. 36.9, sestrojená podle vztahu (36.21), ukazuje rozložení intenzity při interferenci světla ze dvou štěrbin v závislosti na fázovém rozdílu φ na stínítku. Plná



Obr. 36.9 Graf podle rov. (36.21) ukazuje průběh intenzity jako funkci fázového rozdílu mezi vlnami z obou štěrbin ve dvojštěrbinovém interferenčním obrazci. I_0 je (rovnoměrná) intenzita na stínítku v případě, že je jedna štěrbina zakryta. *Střední* intenzita v interferenčním obrazci je $2I_0$ a *maximální* intenzita (pro koherentní světlo) je $4I_0$.

vodorovná čára určuje I_0, (stejnoměrnou) intenzitu na stínítku v případě, že je jedna štěrbina zakryta. Povšimněte si v rov. (36.21) a v grafu, že intenzita I (která je vždy kladná) se mění od nuly v minimech do $4I_0$ v maximech.

Jestliže jsou vlny ze dvou zdrojů (štěrbin) *nekoherentní*, takže vztah jejich fází je proměnný, struktura proužků nevznikne a intenzita má ve všech bodech stínítka stejnou hodnotu $2I_0$; tuto hodnotu vyjadřuje vodorovná přerušovaná čára na obr. 36.9.

Energie nemůže interferencí vznikat ani zanikat, ale pouze se na stínítku přerozdělí. *Průměrná* intenzita na stínítku má tedy stejnou hodnotu $2I_0$ bez ohledu na to, zda jsou zdroje koherentní nebo ne. To vyplývá z rov. (36.21); jestliže dosadíme $1/2$, což je střední hodnota druhé mocniny funkce kosinus, vztah se redukuje na $\overline{I} = 2I_0$.

Odvození rov. (36.21) a (36.22)

Složky intenzity elektrického pole E_1 a E_2, dané rovnicemi (36.19) a (36.20), budeme skládat metodou fázorů, probíranou v čl. 17.10. Na obr. 36.10a jsou vlny se složkami E_1 a E_2 vyjádřeny fázorem velikosti E_0, který se otáčí kolem počátku úhlovou rychlostí ω. Hodnoty E_1 a E_2 v kterémkoli čase jsou projekcí příslušného fázoru na svislou osu. Obr. 36.10a zobrazuje fázory a jejich projekce v libovolném čase t. V souladu s rov. (36.19) a (36.20) má fázor úhel otáčení ωt a fázor E_2 má úhel otáčení $\omega t + \varphi$.

Sčítání složek polí E_1 a E_2 ve fázorovém diagramu provádíme podle obr. 36.10b jako skládání vektorů. Velikost vektorového součtu je amplituda E výsledné vlny, která má určitou fázovou konstantu β. Abychom nalezli amplitudu E z obr. 36.10b, upozorněme, že úhly označené β jsou stejné, protože se jedná o protilehlé úhly u základny rovnoramenného trojúhelníku. Protože pro trojúhelníky platí, že vnější úhel je roven součtu obou protilehlých vnitřních úhlů ($\varphi = \beta + \beta$), vidíme, že $\beta = \varphi/2$. Potom máme

$$E = 2(E_0 \cos\beta) = 2E_0 \cos\tfrac{1}{2}\varphi. \qquad (36.26)$$

Jestliže umocníme obě strany tohoto vztahu, dostaneme

$$E^2 = 4E_0^2 \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi. \qquad (36.27)$$

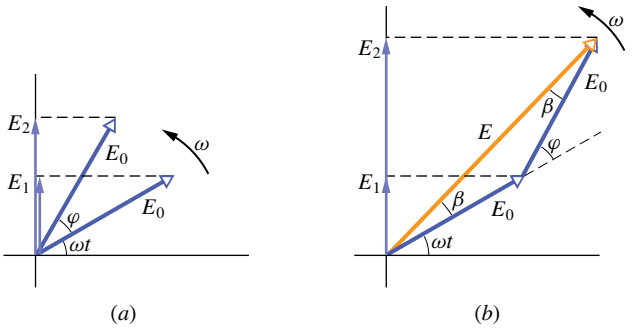
Z rov. (34.24) víme, že intenzita elektromagnetické vlny je úměrná druhé mocnině její amplitudy, takže vlny, které skládáme podle obr. 36.10b a jejichž amplitudy jsou E_0, mají intenzitu I_0 úměrnou E_0^2 a výsledná vlna s amplitudou E má intenzitu I úměrnou E^2. Potom

$$\frac{I}{I_0} = \frac{E^2}{E_0^2}.$$

Dosazením do tohoto vztahu z rov. (36.27) a úpravou dostaneme

$$I = 4I_0 \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi,$$

což je vztah, který jsme měli odvodit.



Obr. 36.10 (a) Fázory, znázorňující složky intenzity elektrického pole vln, zadané rov. (36.19) a (36.20). Oba mají velikost E_0 a otáčejí se rychlostí ω. (b) Vektorový součet obou fázorů dává fázor, představující výslednou vlnu s amplitudou E a fázovou konstantou β.

Zbývá odvodit rov. (36.22), která vyjadřuje fázový rozdíl mezi skládajícími se vlnami v nějakém bodě P na stínítku v obr. 36.8 ve směru úhlu θ, určujícím polohu tohoto bodu.

Fázový rozdíl φ v rov. (36.20) souvisí s dráhovým rozdílem S_1E na obr. 36.8. Jestliže S_1E je $\frac{1}{2}\lambda$, potom φ je π; jestliže S_1E je λ, pak φ je 2π atp. Z toho lze vyvodit

$$(\text{fázový rozdíl}) = \frac{2\pi}{\lambda}(\text{dráhový rozdíl}). \qquad (36.28)$$

Dráhový rozdíl S_1E na obr. 36.8b je právě $d \sin\theta$, takže rov. (36.28) dává

$$\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta,$$

což je právě rov. (36.22), tedy druhý vztah, který jsme měli odvodit.

Skládání více než dvou vln

V obecnějším případě bychom chtěli nalézt výsledek skládání více než dvou harmonických vln. Obecný postup je následující:

1. Sestrojíme řadu fázorů představujících funkce, které chceme skládat. Zakreslujeme je postupně a zachováváme správné vztahy fází mezi sousedními fázory.

2. Zakreslíme vektorový součet této posloupnosti. Jeho délka je úměrná amplitudě výsledného fázoru. Úhel mezi výsledným vektorem a prvním fázorem je výsledná fáze vzhledem k prvnímu fázoru. Průmět tohoto vektorového součtu na svislou osu dává časový průběh výsledné vlny.

PŘÍKLAD 36.3

Nalezněte výslednou vlnu $E(t)$ superpozicí následujících vln:

$$E_1 = E_0 \sin\omega t,$$
$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + 60^\circ),$$
$$E_3 = E_0 \sin(\omega t - 30^\circ).$$

ŘEŠENÍ: Výsledná vlna je

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) + E_3(t).$$

Při použití metody fázorů k nalezení tohoto součtu zvolíme hodnoty fázorů v libovolném čase t. Abychom řešení zjednodušili, zvolíme $t = 0$; fázory, příslušející třem vlnám, jsou pro tento okamžik zobrazeny na obr. 36.11. Při skládání fázorů postupujeme stejně jako při skládání jakýchkoli jiných vektorů. Součet vodorovných složek E_1, E_2 a E_3 je

$$\sum E_h = E_0 \cos 0 + E_0 \cos 60^\circ + E_0 \cos(-30^\circ) =$$
$$= E_0 + 0{,}500E_0 + 0{,}866E_0 = 2{,}37E_0.$$

Součet svislých složek, což je hodnota E v čase $t = 0$, je

$$\sum E_v = E_0 \sin 0 + E_0 \sin 60^\circ + E_0 \sin(-30^\circ) =$$
$$= 0 + 0{,}866E_0 - 0{,}500E_0 = 0{,}366E_0.$$

Výsledná vlna $E(t)$ má amplitudu E_V

$$E_V = \sqrt{(2{,}37E_0)^2 + (0{,}366E_0)^2} = 2{,}4E_0$$

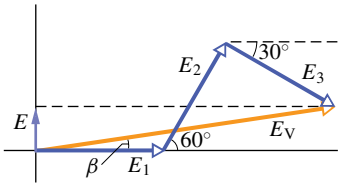
a fázový úhel β vzhledem k fázoru E_1 je

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{0{,}366E_0}{2{,}37E_0}\right) = 8{,}8^\circ.$$

Pro výslednou vlnu můžeme nyní psát

$$E = E_V \sin(\omega t + \beta) =$$
$$= 2{,}4E_0 \sin(\omega t + 8{,}8^\circ). \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pozor na správnou interpretaci úhlu β na obr. 36.11: je to konstantní úhel mezi E_V a E_1, i když se všechny čtyři vektory otáčejí jako celek kolem počátku. Úhel mezi E_V a vodorovnou osou nezůstává roven β.



Obr. 36.11 Příklad 36.3. Tři fázory E_1, E_2 a E_3, zobrazené v čase $t = 0$, se skládají ve výsledný fázor E_V.

KONTROLA 4: Každá ze čtyř dvojic světelných vln dopadá do určitého bodu na projekční ploše. Vlny mají stejnou vlnovou délku. Jejich amplitudy a fázové rozdíly v dosaženém bodě jsou (a) $2E_0$, $6E_0$ a π rad; (b) $3E_0$, $5E_0$ a π rad; (c) $9E_0$, $7E_0$ a 3π rad; (d) $2E_0$, $2E_0$ a 0 rad. Seřaďte dvojice podle velikosti výsledné intenzity světla v těchto bodech. (*Tip*: Nakreslete fázory.)

36.7 INTERFERENCE NA TENKÉ VRSTVĚ

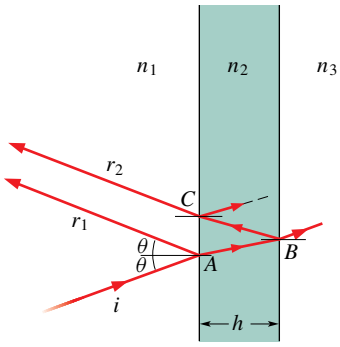
Barvy, které vidíme, když sluneční světlo dopadá na mýdlovou bublinu nebo na olejovou skvrnu, jsou důsledkem interference světelných vln odražených od přední a zadní plochy tenké průhledné vrstvy. Tloušťka mýdlové nebo olejové vrstvy je obvykle řádově rovna jednotkám vlnových délek obsažených ve (viditelném) světle. (Nebudeme se zabývat většími tloušťkami, protože ty potlačí koherenci světla potřebnou k vytvoření barev pomocí interference. Zaměříme se pouze na menší tloušťky.)

Obr. 36.12 ukazuje tenkou průhlednou vrstvu tloušťky L o indexu lomu n_2, osvětlenou intenzívním světlem vlnové délky λ ze vzdáleného bodového zdroje. Předpokládejme, že na obou stranách vrstvy je vzduch, takže na obr. 36.12 je $n_1 = n_3$. Pro zjednodušení také připusťme, že

světelné paprsky jsou téměř kolmé k vrstvě ($\theta \approx 0$). Zajímáme se, zda pro pozorovatele, který se dívá téměř kolmo, je vrstva světlá, nebo tmavá. (Jak je možné, aby vrstva byla tmavá, když je intenzívně osvětlena? Uvidíme.)

Světlo, představované paprskem i, dopadá na čelní (levou) plochu vrstvy v bodě A, kde se jednak odráží, jednak láme. Odražený paprsek r_1 vstupuje do oka pozorovatele. Lomené světlo protíná vrstvu v bodě B zadního rozhraní, kde se také odráží a láme. Světlo odražené v B se vrací zpět vrstvou k bodu C, kde se opět jak odráží, tak i láme. Světlo vzniklé v C, představované paprskem r_2, vstupuje do pozorovatelova oka také.

Jestliže světelné vlny příslušející paprskům r_1 a r_2 jsou v oku ve fázi, vytvářejí interferenční maximum a oblast AC na vrstvě je pro pozorovatele světlá. Jestliže mají opačnou fázi, vytvářejí interferenční minimum a oblast AC je pro pozorovatele tmavá, přestože je osvětlená. A jestliže vlny mají fázový rozdíl z intervalu mezi oběma krajními případy, pak dochází k přechodnému stavu interference a osvětlení pozorované oblasti má odpovídající hodnotu mezi maximální a minimální intenzitou.



Obr. 36.12 Světelné vlny, představované paprskem i, dopadají na tenkou vrstvu tloušťky h s indexem lomu n_2. Paprsky r_1 a r_2 příslušejí světelným vlnám, odraženým na přední a zadní ploše vrstvy. (Všechny tři paprsky jsou ve skutečnosti téměř kolmé k vrstvě.) Interference vln, znázorněných pomocí r_1 a r_2, závisí na jejich fázovém rozdílu. Index lomu n_1 prostředí vlevo se může lišit od indexu lomu prostředí vpravo, ale tentokrát předpokládáme, že obě prostředí tvoří vzduch. Pro něj je $n_1 = n_3 = 1{,}0$, což je menší hodnota než n_2.

Základem toho, co pozorovatel vidí, je tedy fázový rozdíl mezi vlnami, znázorněnými paprsky r_1 a r_2. Oba paprsky jsou odvozeny z téhož paprsku i, ale během cesty, při které se vytváří paprsek r_2, se světlo šíří vrstvou dvakrát (z A do B a potom z B do C), kdežto cesta paprsku r_1 neobsahuje průchod vrstvou. Protože úhel θ je blízký k nule, vyjádříme přibližně dráhový rozdíl mezi vlnami paprsků r_1 a r_2 hodnotou $2h$. Avšak ke zjištění fázového rozdílu mezi vlnami nedovedeme nalézt počet vlnových délek λ, který odpovídá dráhovému rozdílu $2h$. Je to nemožné ze dvou důvodů: (1) dráhový rozdíl vzniká v jiném prostředí, než je vzduch, a (2) odrazy zahrnují jevy, které mohou změnit fázi.

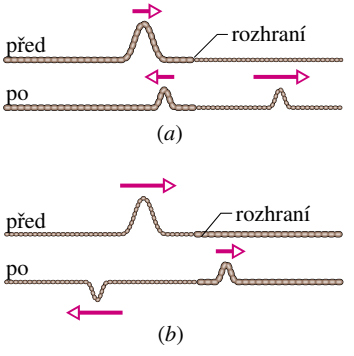
Fázový rozdíl mezi dvěma vlnami se může změnit, jestliže u jedné nebo u obou došlo k odrazu.

Dříve než budeme pokračovat ve výkladu o interferenci na tenké vrstvě, musíme rozebrat změnu fáze způsobenou odrazem.

Změna fáze při odrazu

Lom na rozhraní dvou prostředí nikdy nezpůsobí fázovou změnu. Ale odraz, v závislosti na indexu lomu na obou stranách rozhraní, může tuto změnu způsobit. Obr. 36.13 ukazuje, co se děje, když odraz způsobí fázovou změnu; k ilustraci je užito pulzu v hustším vlákně (podél kterého se pulz šíří pomaleji) a lehčím vlákně (podél kterého se pulz šíří rychleji).

Když pulz šířící se na obr. 36.13a podél tužšího provazu dojde na rozhraní s měkčím provazem, pulz se částečně přenáší a částečně odráží, aniž by docházelo ke změně jeho orientace. Pro světlo tato situace odpovídá dopadající vlně, šířící se v prostředí s vyšším indexem lomu n (tedy v prostředí opticky hustším; připomeňme, že větší n znamená nižší rychlost). V tomto případě vlna, která je na rozhraní odražena, svou fázi nezmění, změna fáze při odrazu je rovna nule.



Obr. 36.13 Změny fáze při odrazu pulzu na rozhraní dvou napnutých provazů s různými délkovými hustotami. Rychlost vlny je větší v lehčím provazu. (a) Pulz přichází z provazu s větší hustotou. (b) Pulz přichází z provazu s menší hustotou. Pouze v tomto případě dochází ke změně fáze.

Když pulz šířící se v obr. 36.13b rychleji podél lehčího vlákna dosáhne rozhraní s vláknem s větší délkovou hustotou, má prošlý pulz stejnou orientaci jako dopadající pulz, ale odražený pulz je obrácený. Pro harmonickou vlnu toto převrácení představuje fázovou změnu π rad neboli dráhový rozdíl polovinu vlnové délky. Pro světlo tato situace odpovídá dopadající vlně, šířící se v prostředí s menším indexem

lomu (v prostředí opticky řidším s větší rychlostí). V tomto případě vlna, která se na rozhraní odrazí, změní svou fázi o π rad neboli o polovinu vlnové délky. Tyto výsledky můžeme shrnout pro světlo v pojmech indexu lomu prostředí, od kterého se světlo odráží:

Odraz	Fázové posunutí odrazem od prostředí
řidšího	0
hustšího	0,5 vlnové délky

Světlo po odrazu od opticky hustšího prostředí (např ze vzduchu od skla), tedy mění fázi; kdo má rád říkadla, bude si pamatovat, že „když se světlo se sklem srazí, odrazí se v protifázi“.

Rovnice pro interferenci na tenké vrstvě

V této kapitole jsme poznali tři způsoby, při kterých může docházet ke změně fázového rozdílu mezi dvěma vlnami:

1. odrazem,
2. šířením vln po různě dlouhých dráhách,
3. šířením vln prostředími o různých indexech lomu.

Odraz světla na tenké vrstvě, při němž vznikají vlny reprezentované na obr. 36.12 paprsky r_1 a r_2, poskytuje všechny tři uvedené způsoby. Uvažujme je postupně jeden po druhém.

Nejdříve přezkoumáme oba odrazy na obr. 36.12. V bodě A na prvním rozhraní se dopadající vlna (ve vzduchu) odráží od prostředí, které má z obou prostředí vyšší index lomu, takže odražená vlna, odpovídající paprsku r_1, je fázově posunuta o 0,5 vlnové délky. V bodě B na zadním rozhraní se dopadající vlna odráží od prostředí (vzduch), které má nižší index lomu, takže odraz nezpůsobí fázové posunutí odražené vlny, a tedy ani té části, která vystupuje jako paprsek r_2. Tuto informaci můžeme vyjádřit prvním řádkem v tab. 36.1. Říká, že vlny, odpovídající paprskům r_1 a r_2, mají zatím jako důsledek fázového posunutí odrazem fázový rozdíl 0,5 vlnové délky, a tedy jejich fáze jsou opačné.

Nyní musíme uvažovat dráhový rozdíl $2h$, který vzniká proto, že paprsek r_2 projde vrstvou dvakrát. (Tento rozdíl $2h$ je uveden v druhém řádku tab. 36.1). Jestliže vlny příslušející paprskům r_1 a r_2 jsou ve fázi, takže konstruktivně interferují, musí délka dráhy $2h$ způsobit další fázový rozdíl 0,5, 1,5, 2,5, … vlnových délek. Pouze potom bude výsledný fázový rozdíl celočíselným násobkem vlnové délky. Aby tedy vrstva byla světlá, musíme mít

$$2h = \frac{\text{liché číslo}}{2} \cdot \text{vlnová délka} \quad \text{(pro vlny ve fázi).} \tag{36.29}$$

Tabulka 36.1 **Schéma pro interferenci na tenké vrstvě ve vzduchu**[a]

	r_1	r_2
Fázové posunutí odrazem	0,5 vlnová délka	0
Dráhový rozdíl	$2h$	
Index lomu prostředí, ve kterém dochází k dráhovému rozdílu	n_2	
Vlny jsou ve fázi[a]	$2h = \frac{\text{liché číslo}}{2} \cdot \frac{\lambda}{n_2}$	
Vlny mají opačné fáze	$2h = \text{celé číslo} \cdot \frac{\lambda}{n_2}$	

[a] Platí pro $n_2 > n_1$ a $n_2 > n_3$.

Vlnovou délkou v uvedených vztazích rozumíme vlnovou délku λ_2 světla v prostředí obsahujícím dráhu $2h$, tzn. v prostředí s indexem lomu n_2. Rov. (36.29) můžeme tedy napsat jako

$$2h = \frac{\text{liché číslo}}{2} \cdot \lambda_2 \quad \text{(pro vlny ve fázi).} \tag{36.30}$$

Jestliže namísto toho, aby vlny byly ve fázi, dochází k destruktivní interferenci, dráhový rozdíl $2h$ buď nesmí způsobit žádný další fázový rozdíl, nebo musí způsobit fázový rozdíl rovný 1, 2, 3, … vlnovým délkám. Pouze tehdy zůstane výsledný fázový rozdíl lichým násobkem poloviny vlnové délky. Vrstva tedy bude tmavá, jestliže bude mít

$$2h = \text{celé číslo} \cdot \text{vlnová délka}, \tag{36.31}$$

kdy opět vlnovou délkou se rozumí vlnová délka λ_2 v prostředí, obsahujícím dráhu $2h$. Máme tedy

$$2h = \text{celé číslo} \cdot \lambda_2 \quad \text{(vlny mají opačnou fázi).} \tag{36.32}$$

Nyní opět uvažujme, že vlna příslušející paprsku r_2 se šíří prostředím o indexu lomu n_2, kdežto vlna paprsku r_1 nikoli. Rov. (36.8) ($\lambda_n = \lambda/n$) použijeme k vyjádření vlnové délky vlny uvnitř vrstvy ve tvaru

$$\lambda_2 = \frac{\lambda}{n_2}, \tag{36.33}$$

kde λ je vlnová délka dopadajícího světla ve vakuu (a přibližně také ve vzduchu). Dosazení rov. (36.33) do rov. (36.30) a nahrazení *liché číslo*/2 výrazem $(m + 1/2)$ dává

$$2h = (m + \tfrac{1}{2})\frac{\lambda}{n_2}, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\text{(maxima — vrstva ve vzduchu je světlá).} \tag{36.34}$$

Podobně nahrazení m za *celé číslo* v rov. (36.32) dává

$$2h = m\frac{\lambda}{n_2}, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \ldots$$

(minima — vrstva ve vzduchu je tmavá). (36.35)

Pro danou tloušťku h určují rov. (36.34) a (36.35) ty vlnové délky světla, pro které se vrstva jeví jako světlá, resp. tmavá (jedna vlnová délka pro každou hodnotu m). Pro světlo s jinými vlnovými délkami je vrstva světlá jen částečně. Pro danou vlnovou délku λ vyjadřují rov. (36.34) a (36.35) tloušťky vrstvy, pro které se vrstva v tomto světle jeví jako světlá nebo tmavá (jedna vrstva pro každé m). Při jiné tloušťce vidíme vrstvu opět jen v částečném jasu.

Ke zvláštnímu případu dochází, když je vrstva tak tenká, že h je mnohem menší než λ, např. $h < 0{,}1\lambda$. Potom dráhový rozdíl $2h$ lze zanedbat a fázový rozdíl mezi r_1 a r_2 je pouze důsledkem fázového posunutí odrazem. Jestliže vrstva na obr. 36.12, kde odrazy způsobí fázový rozdíl 0,5 vlnových délek, má tloušťku $h < 0{,}1\lambda$, pak vlny, příslušející paprskům r_1 a r_2, mají opačné fáze, a vrstva je tedy tmavá bez ohledu na vlnovou délku a intenzitu světla, které ji osvětluje. Tomuto případu přísluší v rov. (36.35) $m = 0$. Při každém $h < 0{,}1\lambda$ se vrstva na obr. 36.12 jeví tmavá. Další, větší tloušťka, při které je vrstva tmavá, odpovídá $m = 1$.

Obr. 36.14 ukazuje svislou mýdlovou blánu, nahoře tenkou, dole pod vlivem tíhové síly tlustší. Blána je osvětlena intenzívním bílým světlem. Její horní část je ale tak tenká, že je tmavá. Ve středu (poněkud tlustším) vidíme proužky (nebo pásy), jejichž barva závisí především na vlnové délce, pro kterou při příslušné tloušťce dochází v odraženém světle ke konstruktivní interferenci. Směrem k dolní (nejtlustší) části vrstvy jsou proužky postupně užší a barvy se začínají překrývat a mizet.

RADY A NÁMĚTY

Bod 36.1: *Rovnice tenké vrstvy*

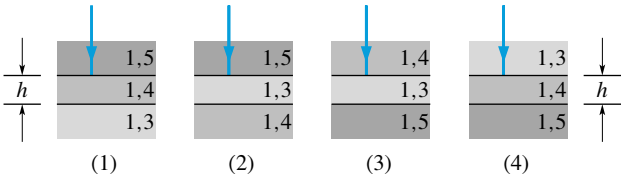
Někteří studenti si myslí, že rov. (36.34) dávají interferenční maxima a rov. (36.35) interferenční minima pro všechny případy tenkých vrstev. To však není pravda. Tyto vztahy byly odvozeny pouze pro případ, pro který je na obr. 36.12 $n_2 > n_1$ a $n_2 > n_3$.

Rovnice pro jiné relativní hodnoty indexů lomu lze odvodit pomocí úvah následujících v další části této kapitoly a vytvořením nové verze tab. 36.1. V každém z případů dospějete k závěrům shodným s rov. (36.34) a (36.35), ale někdy rov. (36.34) bude dávat minima a (36.35) bude dávat maxima — tedy opak toho, co jsme již ukázali. Co která rovnice vyjadřuje, záleží na tom, zda odrazy na obou rozhraních způsobují stejný fázový posuv.



Obr. 36.14 Odraz světla od mýdlové blány napnuté ve svislém drátěném oku. Horní část je tak tenká, že odražené světlo dává destruktivní interferenci, proto je tato část tmavá. Barevné interferenční proužky nebo pásy zdobí zbylou část vrstvy, ale jsou narušovány prouděním kapaliny, která je vlivem tíhové síly postupně stahována uvnitř vrstvy dolů.

KONTROLA 5: Obrázek ukazuje čtyři případy, ve kterých se světlo odráží od tenké vrstvy (jako na obr. 36.12) s uvedenými indexy lomu. (a) Pro které případy způsobuje odraz nulový fázový rozdíl mezi oběma odraženými paprsky? (b) Pro které případy bude vrstva tmavá, jestliže dráhový rozdíl $2h$ způsobí fázový rozdíl 0,5 vlnové délky?



PŘÍKLAD 36.4

Bílé světlo o stejné intenzitě v celé viditelné oblasti vlnových délek (400 – 690) nm dopadá kolmo na vrstvu o indexu lomu $n_2 = 1{,}33$ a tloušťce $h = 320$ nm ve vzduchu. Při jakých vlnových délkách se pozorovateli jeví vrstva nejjasněji osvětlená?

ŘEŠENÍ: Tento případ odpovídá situaci podle obr. 36.12, pro kterou rov. (36.34) vyjadřuje interferenční maximum. Jejím řešením vzhledem k λ a dosazením zadaných hodnot získáme

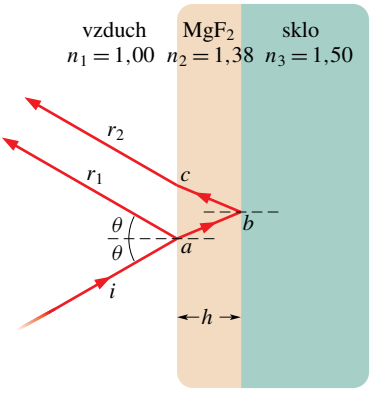
$$\lambda = \frac{2n_2h}{m+\frac{1}{2}} = \frac{2(1{,}33)(320\text{ nm})}{m+\frac{1}{2}} = \frac{851\text{ nm}}{m+\frac{1}{2}}.$$

Pro $m = 0$ dostaneme vlnovou délku $\lambda = 1\,700$ nm, která leží v infračervené oblasti. Pro $m = 1$ nalezneme $\lambda = 567$ nm, což je žlutozelené světlo blízké středu viditelné oblasti. Pro $m = 2$, $\lambda = 340$ nm, která je v ultrafialové oblasti. Vlnová délka viditelné oblasti, při které vidí pozorovatel vrstvu nejvíce osvětlenou, je tedy

$$\lambda = 567\text{ nm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 36.5

Skleněná čočka je na jedné straně pokryta tenkou vrstvou fluoridu hořečnatého (MgF_2), která snižuje odrazivost povrchu čočky (obr. 36.15). Index lomu MgF_2 je 1,38 a index lomu skla je 1,50. Jaká je nejmenší tloušťka vrstvy, která interferencí odstraňuje odrazivost ve středu oblasti viditelného spektra ($\lambda = 550$ nm)? Předpokládejte, že se světlo šíří přibližně kolmo k ploše čočky.



Obr. 36.15 Příklad 36.5. Nežádoucí odrazy od skla můžeme pro vybranou vlnovou délku potlačit napařením tenké průhledné vrstvy fluoridu hořečnatého vhodně zvolené tloušťky.

ŘEŠENÍ: Obr. 36.15 se liší od obr. 36.12 tím, že nyní je $n_3 > n_2 > n_1$. To znamená, že dochází k fázovému posunutí 0,5 vlnové délky vlivem odrazu jak na předním, tak i na zadním rozhraní tenké vrstvy. Při sestavování tabulky odpovídající tab. 36.1 uvedeme v prvním řádku 0,5 a 0,5. Ve druhém a třetím řádku je rozdíl drah rovněž $2h$ a dochází k němu v prostředí (zde MgF_2), které má index lomu n_2. Po odrazech zůstanou vlny, odpovídající paprskům r_1 a r_2, ve fázi. Aby tyto vlny měly opačnou fázi a od čočky se tedy neodrážely, musí být dráhový rozdíl $2h$ uvnitř vrstvy

$$2h = \frac{(\text{liché číslo})}{2} \cdot \text{vlnová délka} =$$
$$= (m+\tfrac{1}{2})\lambda_2, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Dosazení λ/n_2 za λ_2 vede ke vztahu

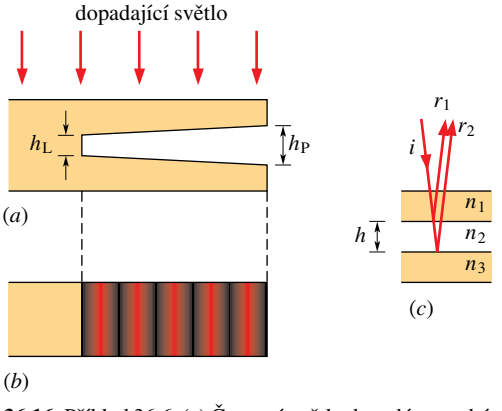
$$2h = (m+\tfrac{1}{2})\frac{\lambda}{n_2}, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Hledáme nejmenší tloušťku vrstvy, tzn. nejmenší h. Zvolíme tedy pro m nejmenší hodnotu, $m = 0$. Řešením vzhledem k h a dosazením zadaných hodnot dostaneme

$$h = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{(550\text{ nm})}{4(1{,}38)} = 99{,}6\text{ nm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 36.6

Obr. 36.16a ukazuje průhledný plastový blok s tenkým klínem, vyříznutým vpravo v plastu. Široký svazek červeného světla o vlnové délce $\lambda = 632{,}8$ nm směřuje dolů přes vršek bloku (v dopadovém úhlu 0°). Část světla se odráží zpět od vrchní a spodní plochy klínu, který působí jako tenká vrstva (vzduchu) o tloušťce, která se stejnoměrně a postupně mění od h_L na levém konci do h_P na pravém konci. Pozorovatel dívající se dolů na blok vidí interferenční obrazec, obsahující podél klínu šest tmavých proužků a pět světlých červených proužků. Jaká je změna tloušťky $\Delta h = h_P - h_L$ klínu?



Obr. 36.16 Příklad 36.6. (a) Červené světlo dopadá na tenký vzduchový klín v průhledném plastovém bloku. Tloušťka klínu je h_L na levém konci a h_P na pravém konci. (b) Pohled shora na blok: interferenční obrazec podél oblasti klínu obsahuje šest tmavých a pět jasných červených proužků. (c) Znázornění dopadajícího paprsku i, odražených paprsků r_1 a r_2 a tloušťky h v libovolném místě klínu.

ŘEŠENÍ: Tato tenká vrstva se od předchozích liší tím, že má proměnnou tloušťku; proto vidíme podél klínu několik tmavých a světlých proužků. Protože tmavých proužků vidíme více než světlých, vzniká zřejmě tmavý proužek na levém

i na pravém konci vrstvy. Odpovídající interferenční obrazec je na obr. 36.16b a můžeme ho použít k určení změny tloušťky Δh klínu. Označme h tloušťku vrstvy v obecném místě podél klínu a použijeme obr. 36.16c. Z toho, co víme o fázovém posunutí vlivem odrazu, plyne, že fázové posunutí pro vlnu paprsku r_1 je nula a pro vlnu paprsku r_2 je 0,5 vlnové délky. Při sestavování tabulky v souladu s tab. 36.1 uvedeme v prvním řádku 0 a 0,5. Ve druhém a třetím řádku je rozdíl drah rovněž $2h$ a vzniká v prostředí (zde vzduch) s indexem lomu n_2. Pro destruktivní interferenci nalezneme, že

$$2h = \text{celé číslo} \cdot \frac{\lambda}{n_2} = m\frac{\lambda}{n_2}. \qquad (36.36)$$

Tento vztah můžeme použít v libovolném místě podél klínu, kde vidíme tmavé proužky. Nejnižší hodnota celého čísla m je závislá na nejmenší tloušťce klínu, kde leží tmavý proužek.

Tmavý proužek pozorujeme na levém konci, kde je tloušťka klínu nejmenší. Užitím rov. (36.36) pro tento konec, dosazením h_L místo h a řešením vzhledem k h_L dostaneme

$$h_L = \frac{m_L\lambda}{2n_2}, \qquad (36.37)$$

kde m_L je celé číslo odpovídající tmavému proužku na levém konci a n_2 je index lomu prostředí uvnitř klínu (vzduch).

Rov. (36.36) můžeme rovněž použít pro pravý konec klínu, kde pozorujeme jiný tmavý proužek. Tloušťka je zde h_P a celé číslo odpovídající tomuto tmavému proužku je $m_L + 5$ (protože tento proužek je pátým proužkem od proužku na levém kraji klínu). Dosazením h_P za h a $m_L + 5$ za m v rov. (36.36) dostaneme

$$h_P = \frac{(m_L + 5)\lambda}{2n_2}. \qquad (36.38)$$

Odečtením rov. (36.37) od rov. (36.38) nalezneme změnu tloušťky Δh klínu:

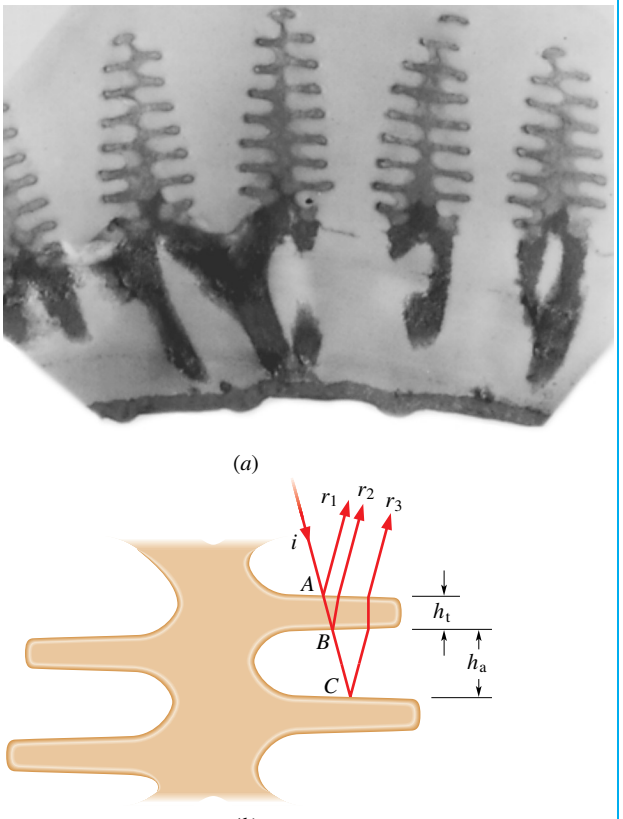
$$\Delta h = h_P - h_L = \frac{(m_L + 5)\lambda}{2n_2} - \frac{m_L\lambda}{2n_2} = \frac{5}{2}\frac{\lambda}{n_2}.$$

Dosazením $632{,}8\cdot10^{-9}$ m za λ a 1,00 za n_2 do této rovnice dostaneme

$$\Delta h = \frac{5}{2}\frac{(632{,}8\cdot10^{-9}\text{ m})}{(1{,}00)} = \\ = 1{,}58\cdot10^{-6}\text{ m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 36.7

Duhové zbarvení povrchu křídel motýlů z rodu *Morpho* je důsledkem konstruktivní interference světla, odraženého na tenkých terasovitě uspořádaných stupních průsvitných kutikul (buněčných blan na povrchu křídel). Ty jsou rovnoběžné s povrchem křídel a rozšiřují se směrem dolů ze středové části, kolmé ke křídlu. Řez středovou částí a terasovitými stupni ukazuje snímek z elektronového mikroskopu na obr. 36.17a. Stupně mají index lomu $n = 1{,}53$ a tloušťku $h_t = 63{,}5$ nm a jsou odděleny mezerou (vzduch) tloušťky $h_a = 127$ nm. Světlo na ně dopadá kolmo (obr. 36.17b, v němž je pro přehlednost schématu použit šikmý chod příslušných paprsků). Pro jakou vlnovou délku viditelného světla vzniká při odrazu interferenční maximum?



Obr. 36.17 Příklad 36.7. (a) Snímek z elektronového mikroskopu ukazuje řez terasovitou strukturou kutikul, které vystupují z horní plochy křídla motýlů z rodu Morpho. (b) Světelné vlny, odrážející se v bodech A a B na stupni, interferují v oku pozorovatele; odpovídají jim paprsky r_1 a r_2. Vlna paprsku r_1 také interferuje s vlnou, která se odráží v bodě C a přísluší jí paprsek r_3.

ŘEŠENÍ: Podle obr. 36.17b uvažujme nejdříve paprsky r_1 a r_2, u kterých dochází k odrazu v bodech A a B. Tento případ je shodný s případem na obr. 36.12, takže interferenční maxima udává rov. (36.34). Jejím řešením pro λ dostáváme

$$\lambda = \frac{2n_2h}{m + \frac{1}{2}}.$$

Dosazením $h_t = 63{,}5$ nm za h a $n = 1{,}53$ za n_2 dostaneme

$$\lambda = \frac{2nh_t}{m + \frac{1}{2}} = \frac{2(1{,}53)(63{,}5\text{ nm})}{m + \frac{1}{2}} = \frac{194\text{ nm}}{m + \frac{1}{2}}.$$

Pro $m = 0$ nalezneme interferenční maximum pro vlnovou délku $\lambda = 388\,\text{nm}$ v ultrafialové oblasti. Pro všechny větší hodnoty m je λ ještě menší, tedy hlouběji v ultrafialovém pásmu. Paprsky r_1 a r_2 tedy nevytvářejí jasně modrozelené zbarvení *Morpho*.

Uvažujme nyní v obr. 36.17b paprsky r_1 a r_3. Vlna, která projde terasovitým stupněm a vzduchovou mezerou k dalšímu stupni, se od něho odráží v bodě C. Potom se šíří zpět nahoru a vytváří vlnu, které na obrázku přísluší paprsek r_3. Dráhový rozdíl mezi vlnami paprsků r_1 a r_3 je $2h_t + 2h_a$. Tento případ se podstatně liší od případu podle obr. 36.12, takže rov. (36.34) nemůžeme použít. Abychom pro interferenční maxima nalezli rovnici odpovídající nové situaci, musíme nejdříve uvažovat odrazy a potom vypočítat vlnové délky podél dráhového rozdílu $2h_t$ a $2h_a$.

Každý z odrazů v bodech A a C způsobí fázový rozdíl poloviny vlnové délky. Samotné odrazy tedy přivedou vlny paprsků r_1 a r_3 do fáze. Ale aby tyto vlny byly skutečně ve fázi, musí být počet vlnových délek podél dráhového rozdílu $2h_t + 2h_a$ roven celému číslu. Vlnová délka terasovitého stupně je $\lambda_n = \lambda/n$. Tedy počet vlnových délek podél dráhy $2h_t$ je

$$N_t = \frac{2h_t}{\lambda_n} = \frac{2h_t n}{\lambda}.$$

Podobně počet vlnových délek podél dráhy $2h_a$ je

$$N_a = \frac{2h_a}{\lambda}.$$

K tomu, aby vlny příslušející paprskům r_1 a r_3 byly ve fázi, potřebujeme, aby součet $N_t + N_a$ byl roven celému číslu m. Pro interferenční maximum tedy platí

$$\frac{2h_t n}{\lambda} + \frac{2h_a}{\lambda} = m, \quad \text{kde } m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Řešením vzhledem k λ a dosazením zadaných hodnot dostaneme

$$\lambda = \frac{2(63{,}5\,\text{nm})(1{,}53) + 2(127\,\text{nm})}{m} = \frac{448\,\text{nm}}{m}.$$

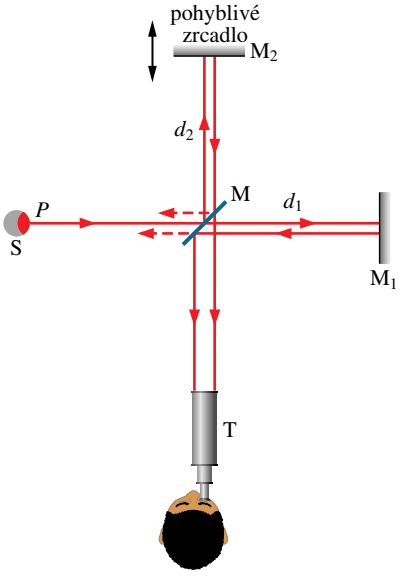
Pro $m = 1$ nalezneme

$$\lambda = 448\,\text{nm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato vlnová délka odpovídá jasně modrozelenému zbarvení horního povrchu křídla motýla *Morpho*. Pokud světlo nedopadá přesně kolmo k rozhraní terasovitého stupně, ale poněkud šikmo, změní se dráhy vln reprezentovaných paprsky r_1 a r_3, a tím i vlnová délka interferenčního maxima. Díváme-li se tedy na křídlo, které se pohybuje, pak se stále nepatrně mění vlnové délky, pro které je křídlo nejjasnější. To způsobuje duhový lesk povrchu křídla.

36.8 MICHELSONŮV INTERFEROMETR

Interferometr je zařízení, kterým můžeme měřit s vysokou přesností délky nebo délkové změny pomocí interferenčních proužků. Popíšeme interferometr, který navrhl a postavil A. A. Michelson v roce 1881. Uvažujme světlo, které vychází z bodu P na prostorovém (nebodovém) zdroji S (obr. 36.18) a dopadá na *dělič svazku* M. Je jím zrcadlo, které propouští polovinu dopadajícího světla a odráží zbytek. Podle obrázku pro jednoduchost předpokládáme, že má zanedbatelnou tloušťku. Na děliči M se tedy světlo rozdělí na dvě vlny. Jedna postupuje po průchodu děličem k zrcadlu M_1; druhá postupuje po odrazu na děliči směrem k zrcadlu M_2. Na zrcadlech se vlny odrážejí a vracejí se zpět podél směrů dopadů a nakonec vstupují společně do dalekohledu T. Pozorovatel vidí strukturu zakřivených nebo přímých interferenčních proužků podobných pruhům na zebře.



Obr. 36.18 Michelsonův interferometr. Ukazuje dráhu světla vznikajícího v bodě P plošného zdroje S. Zrcadlo M rozdělí světlo na dva svazky, které se odrážejí od zrcadel M_1 a M_2 zpět k M a potom k dalekohledu T. V dalekohledu pozorovatel vidí obraz interferenčních proužků.

Dráhový rozdíl obou vln při jejich setkání je $2d_2 - 2d_1$ a jakákoli změna tohoto dráhového rozdílu způsobí mezi oběma vlnami změnu fáze v oku. Jestliže například zrcadlo M_2 je posunuto o vzdálenost $\lambda/2$, dráhový rozdíl se změní o λ a struktura proužků se posune o jeden proužek (jako by se každý pruh na zebře posunul tam, kde byl předtím sousední tmavý pruh). Podobně pohyb zrcadla M_2 o $\lambda/4$ způsobí posunutí o polovinu proužku (každý pruh na zebře

se posune o svou šířku — tmavý pruh se posune do místa světlého, světlý do místa tmavého).

Posunutí struktury proužků může být také způsobeno vložením průhledné látky do optické dráhy jednoho ze zrcadel, např. M_1. Jestliže má látka tloušťku h a index lomu n, potom počet vlnových délek podél dráhy světla, zahrnující dvojnásobný průchod světla látkou, je

$$N_m = \frac{2h}{\lambda_n} = \frac{2hn}{\lambda}. \qquad (36.39)$$

Počet vlnových délek v téže tloušťce $2h$ vzduchu je

$$N_a = \frac{2h}{\lambda}. \qquad (36.40)$$

Světlo vracející se od zrcadla M_1 prodělá v látce změnu fáze (vyjádřenou ve vlnových délkách)

$$N_m - N_a = \frac{2hn}{\lambda} - \frac{2h}{\lambda} = \frac{2h}{\lambda}(n-1). \qquad (36.41)$$

Při každé změně fáze odpovídající jedné vlnové délce se struktura proužků posune o jeden proužek. Z toho vyplývá, že určením počtu proužků, o které se struktura posune vlivem vložené látky, a dosazením tohoto čísla za $N_m - N_a$ v rov. (36.41) můžeme určit tloušťku h této látky v hodnotách λ.

Tímto postupem můžeme vyjádřit délku objektů pomocí násobků vlnové délky světla. V Michelsonově době byl standard délky — metr — přijat na základě mezinárodní dohody jako vzdálenost mezi dvěma jemnými ryskami na určité kovové tyči, uložené v Sèvres blízko Paříže. Michelson byl schopen pomocí svého interferometru ukázat, že standard metru byl roven 1 553 163,5 vlnové délky definovaného monochromatického červeného světla, vyzařovaného ze světelného zdroje obsahujícího kadmium. Za toto pečlivé měření obdržel Michelson v roce 1907 Nobelovu cenu za fyziku. Jeho práce položila základ k opuštění (v roce 1961) tyčového metru jako standardu délky a ke změně definice metru na násobky vlnové délky světla. Avšak ani tento vlnově délkový standard nebyl dostatečně přesný, aby uspokojil rostoucí požadavky vědy a techniky, a v roce 1983, jak bylo již dříve uvedeno, byl nahrazen novým standardem, založeným na hodnotě rychlosti světla.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Huygensův princip

Šíření vln v prostoru, včetně světla, můžeme často určit Huygensovým principem, podle kterého všechny body vlnoplochy slouží jako bodové zdroje kulových sekundárních vln. Po čase t bude poloha nové vlnoplochy určena tečnou plochou k těmto sekundárním vlnám.

Zákon lomu a odrazu můžeme odvodit z Huygensova principu pomocí předpokladu, že index lomu každého prostředí je $n = c/v$, kde v je rychlost světla v prostředí a c je rychlost světla ve vakuu.

Vlnová délka a index lomu

Vlnová délka λ_n světla v prostředí závisí na jeho indexu lomu n:

$$\lambda_n = \lambda/n, \qquad (36.8)$$

kde λ je vlnová délka světla ve vakuu. Vzhledem k této závislosti se může fázový rozdíl mezi dvěma vlnami změnit, jestliže vlny procházejí různými látkami s odlišnými indexy lomu.

Geometrická optika a difrakce

Pokusy vytvořit úzký paprsek průchodem světla úzkou štěrbinou selhávají, protože *difrakcí* na štěrbině se světlo rozšíří i do oblasti geometrického stínu. Pro popis chování světla na štěrbině nedostačuje výklad pomocí geometrické optiky (kap. 34 a 35) a musí se výhradně vycházet z metod vlnové optiky.

Youngův pokus

Světlo, které v *Youngově interferenčním (dvojštěrbinovém) pokusu* projde jednou štěrbinou, dopadá na dvě štěrbiny ve stínítku. Světlo vycházející z těchto štěrbin se rozbíhá (vlivem difrakce) a v oblasti za stínítkem interferuje. Interferencí vzniknou interferenční proužky na pozorovacím stínítku.

Intenzita světla v kterémkoli bodě stínítka závisí na rozdílu délek drah ze štěrbin k tomuto bodu. Jestliže je tento rozdíl roven celočíselnému násobku vlnových délek, dochází ke konstruktivní interferenci a vzniklá intenzita je maximální. Jestliže je roven lichému násobku poloviny vlnové délky, dochází k destruktivní interferenci a intenzita je minimální. Podmínky pro maximum a minimum intenzity jsou

$$d \sin\theta = m\lambda, \quad \text{když } m = 0, 1, 2, \ldots \text{ (maxima — světlé proužky)}, \qquad (36.14)$$

$$d \sin\theta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda, \quad \text{když } m = 0, 1, 2, \ldots \text{ (minima — tmavé proužky)}, \qquad (36.16)$$

kde θ je úhel šíření světla se středovou osou o a d je mezera mezi štěrbinami.

Koherence

Jestliže dvě prostupující se vlny vytvářejí pozorovatelný interferenční obrazec, nemění se s časem jejich fázový rozdíl, tzn. že vlny musí být *koherentní*. Když se dvě koherentní vlny v prostoru překrývají, můžeme nalézt výslednou intenzitu užitím fázorů.

Intenzita při interferenci světla ze dvou štěrbin

V Youngově interferenčním experimentu dávají dvě vlny, každá o intenzitě I_0, výslednou vlnu, jejíž intenzita na stínítku je

$$I = 4I_0 \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi, \quad \text{kde } \varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta. \qquad (36.21, 36.22)$$

Rov. (36.14) a (36.16), určující polohy světlých a tmavých proužků, jsou obsaženy v předchozích vztazích.

Interference na tenké vrstvě

Když světlo dopadá na tenkou průhlednou vrstvu, vlny odražené od přední a zadní plochy interferují. Pro případ téměř kolmého dopadu jsou podmínky pro maximum a minimum intenzity světla odraženého od vrstvy ve vzduchu

$$2h = (m + \tfrac{1}{2})\frac{\lambda}{n_2}, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \ldots$$

(maxima — vrstva ve vzduchu je světlá), (36.34)

$$2h = m\frac{\lambda}{n_2}, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \ldots$$

(minima — vrstva ve vzduchu je tmavá), (36.35)

kde n_2 je index lomu vrstvy, h je její tloušťka a λ je vlnová délka světla ve vzduchu.

Jestliže světlo dopadá na rozhraní mezi prostředími o různých indexech lomu z prostředí s nižším indexem lomu, odraz způsobí v odražené vlně fázovou změnu π rad, tj. polovinu vlnové délky. V jiných případech nedochází při odrazu ke změně fáze. Lom na rozhraní nezpůsobí fázové posunutí.

Michelsonův interferometr

V *Michelsonově interferometru* je světelná vlna rozdělena na dvě vlny, které se po průchodu dráhami o různých délkách opět setkají, takže interferují a vytvářejí obrazec proužků. Změna délky dráhy jedné z vln dovoluje velmi přesně vyjádřit délku ve vlnových délkách světla spočtením proužků, o které se obrazec posune.

OTÁZKY

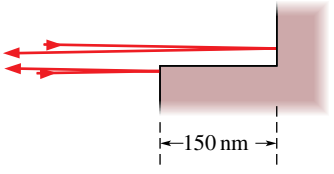
1. Na obr. 36.19 procházejí tři pulzy světla — a, b a c — stejné vlnové délky vrstvami z plastu s uvedenými indexy lomu. Seřaďte pulzy sestupně podle jejich doby průchodu plastem.



Obr. 36.19 Otázka 1

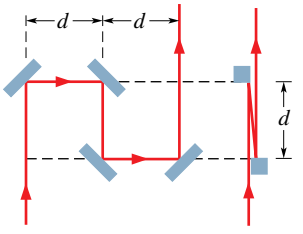
2. Světlo se šíří podél 1 500 nm dlouhé nanostruktury. Jestliže je vlnová délka (a) 500 nm a (b) 1 000 nm a na jednom konci nanostruktury má průběh vlny vrchol, je na druhém konci vrchol, nebo úžlabí vlny?

3. Obr. 36.20 ukazuje dva paprsky světla o vlnové délce 600 nm, které se odrážejí od povrchů skel, mezi nimiž je vzdálenost 150 nm. Vlny příslušející paprskům jsou před dopadem do prostoru skel ve fázi. (a) Jaký je dráhový rozdíl paprsků? (b) Jsou odražené vlny po opuštění prostoru skel ve fázi, mají opačnou fázi, nebo jsou v nějakém stavu mezi oběma uvedenými případy?



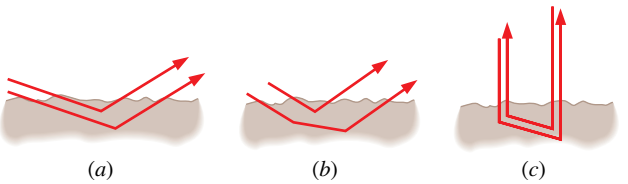
Obr. 36.20 Otázka 3

4. Obr. 36.21 ukazuje dva světlené paprsky příslušející vlnám, které jsou na počátku ve fázi a odrážejí se na několika skleněných plochách. Dráhový rozdíl způsobený šikmým chodem paprsků ve druhém případě je zanedbatelný. (a) Jaký je dráhový rozdíl těchto paprsků? Ve vlnových délkách λ vyjádřete, (b) jaký musí být tento dráhový rozdíl, aby vlny po výstupu měly opačnou fázi, a (c) jaká je nejmenší hodnota d, která tento výsledný fázový rozdíl umožní.



Obr. 36.21 Otázka 4

5. Obr. 36.22 ukazuje tři případy, ve kterých dva paprsky slunečního světla nepatrně pronikají pod povrch Měsíce a jsou jím rozptylovány. Přepokládejme, že vlny příslušející těmto paprskům jsou před dopadem ve fázi. Ve kterých případech jsou odpovídající si vlny po výstupu s největší pravděpodobností ve fázi? (Právě když je Měsíc v úplňku, dosahuje jeho jas vrcholu a je o 25 % větší než v předcházející a následující noci, protože při úplňku zachytíme světelné vlny, které se po rozptylu na měsíčním povrchu vracejí zpět ke Slunci a v našich očích dochází k jejich konstruktivní interferenci.)



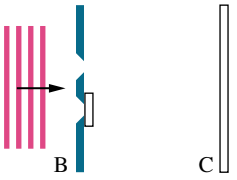
Obr. 36.22 Otázka 5

6. Jestliže je dráhový rozdíl dvou paprsků v bodě P na obr. 36.8 (a) 2,2λ, (b) 3,5λ, (c) 1,8λ a (d) 1,0λ, existuje v tomto bodě interferenční maximum, minimum, nebo přechod mezi oběma extrémy blíže k maximu, nebo blíže k minimu? Pro každý z uvedených případů uveďte hodnotu m odpovídající příslušnému maximu, nebo minimu.

7. (a) Jestliže se v interferenčním obrazci při dvojštěrbinovém experimentu posouváme od světlého proužku k sousednímu vzdálenějšímu světlému proužku, vzrůstá dráhový rozdíl ΔL, nebo klesá? (b) Jak velký rozdíl, vyjádřený ve vlnových délkách λ, odpovídá přechodu mezi oběma proužky?

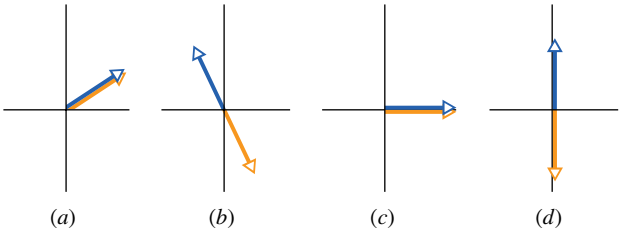
8. Jak se chová vzdálenost mezi proužky ve dvojštěrbinovém interferenčním obrazci: vzrůstá, klesá, nebo zůstává stejná, jestliže (a) mezera mezi štěrbinami vzrůstá, (b) barva světla se mění od červené k modré, (c) celé zařízení se ponoří do nádoby s sherry? (d) Jestliže jsou štěrbiny osvětleny bílým světlem, pak v kterémkoli vedlejším maximu je blíže ke středovému maximu modrá, nebo červená složka světla?

9. Na obr. 36.23 je ve dvojštěrbinovém experimentu spodní štěrbina překryta průhlednou tenkou vrstvou z plastu. Ta způsobí, že centrální maximum (proužek, kde se vlny setkávají s nulovým fázovým rozdílem) se na pozorovacím stínítku posune; bude to nahoru, nebo dolů? (*Tip*: Je vlnová délka světla v plastu větší, nebo menší než ve vzduchu?)



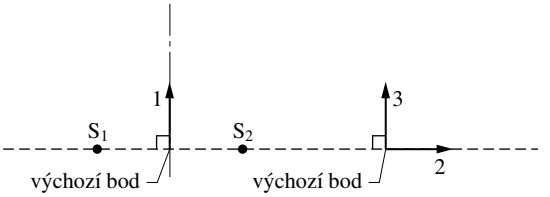
Obr. 36.23 Otázka 9

10. Obr. 36.24 představuje v různých časech fázorové vyjádření dvou světelných vln, setkávajících se ve čtyřech rozdílných bodech projekčního stínítka při dvojštěrbinovém interferenčním experimentu. Za předpokladu, že všech osm fázorů má stejnou délku, seřaďte body podle intenzity světla v nich (od největší k nejmenší).



Obr. 36.24 Otázka 10

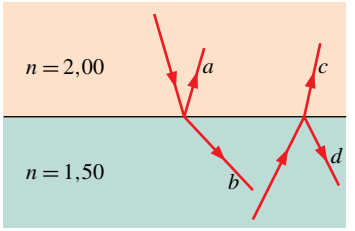
11. Obr. 36.25 ukazuje dva zdroje S_1 a S_2, které ve všech směrech vysílají rádiové vlny o vlnové délce λ. Zdroje jsou ve fázi a vzdálenost mezi nimi je rovna 1,5λ. Svislá čerchovaná čára je kolmá osa, půlící vzdálenost mezi zdroji. (a) Jestliže vyjdeme z počátečního bodu a pohybujeme se podél cesty 1, vytváří interference v každém místě dráhy maximum, minimum, nebo střídání maxim a minim? Totéž opakujte (b) pro cestu 2 a (c) pro cestu 3.



Obr. 36.25 Otázka 11

12. Mléko je tekutá suspense tuku ve vodním roztoku. Jestliže podržíte lžíci částečně naplněnou mlékem ve slunečním světle, uvidíte v blízkosti okraje hladiny mihotající se barevné skvrnky. Co je jejich příčinou?

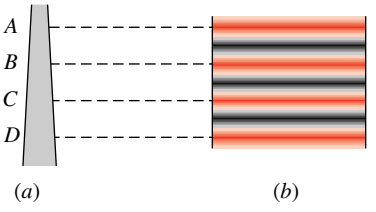
13. Obr. 36.26 ukazuje dva paprsky světla dopadajícího na rozhraní, na němž se světlo odráží a láme. Které ze vzniklých vln jsou těsně u rozhraní fázově posunuty?



Obr. 36.26 Otázka 13

14. Předpokládejme, že vztah $2h = (m + 1/2)\lambda/n_2$ je podmínkou vzniku interferenčního maxima pro určitou tenkou vrstvu. (a) Čemu odpovídá pro danou tloušťku číslo $m = 2$: maximu pro druhou nejdelší vlnovou délku, nebo pro druhou nejkratší vlnovou délku, nebo pro třetí nejdelší vlnovou délku, nebo pro třetí nejkratší vlnovou délku? (b) Jaká hodnota m při dané vlnové délce odpovídá třetí nejmenší tloušťce, dávající maximum?

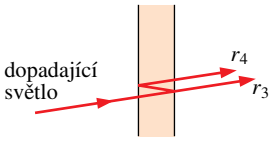
15. Obr. 36.27a ukazuje příčný řez svislou tenkou vrstvou, jejíž tloušťka vzrůstá následkem tíhy směrem dolů. Obr. 36.27b je čelný pohled na vrstvu, ukazující čtyři světlé interferenční proužky, které vzniknou, když je vrstva osvětlena kolmo dopadajícím svazkem červeného světla. Na obrázku jsou označeny body, které odpovídají v příčném řezu světlým proužkům. V měřítku vlnových délek vyjádřete, jaký je rozdíl v tloušťce vrstvy mezi (a) body A a B a (b) body B a D.



Obr. 36.27 Otázka 15

16. Obr. 36.28 zobrazuje průchod kolmého svazku světla tenkou vrstvou ve vzduchu (pro přehlednost jsou paprsky nakresleny

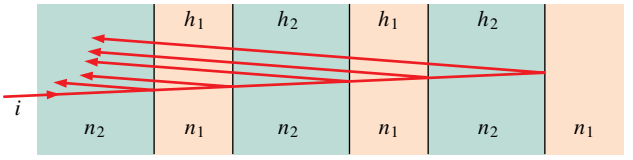
vzhledem k rozhraní jako šikmo dopadající). (a) Dochází u vlny související s paprskem r_3 k fázovému posunutí vlivem odrazu? (b) Jaké fázové posunutí, vyjádřené ve vlnových délkách, způsobí odrazy vlny, které odpovídají paprsku r_4? (c) Jaký je dráhový rozdíl mezi paprsky r_3 a r_4, jestliže tloušťka vrstvy je h?



Obr. 36.28 Otázka 16

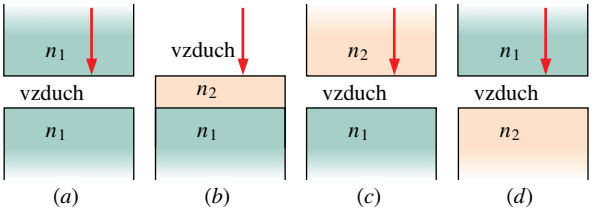
17. Sluneční světlo dopadá na tenkou skvrnu oleje, která plove na vodě; index lomu vody je větší než index lomu oleje. Okraj vrstvy má tloušťku $h < 0{,}1\lambda$. Je tento okraj tmavý (stejně jako tenká oblast mýdlové vrstvy na obr. 36.14), nebo světlý?

18. Oči některých živočichů obsahují elementární odražeče, orientující světlo k čidlům, která ho pohlcují. U měkkýše hřebenatky jsou odražeče tvořeny mnoha tenkými transparentními vrstvami se střídajícím se vyšším a nižším indexem lomu. Při vhodných tloušťkách vrstev se vlny, odražené od jednotlivých rozhraní, dostávají navzájem do fáze a superpozicí dávají mnohem jasnější odraz než jediný biologický povrch nebo vrstva. Obr. 36.29 ukazuje takové uspořádání střídajících se vrstev společně s odrazy jediného dopadajícího paprsku i. Pomocí indexů lomu n_1 a n_2 a vlnové délky λ viditelného světla budou tloušťky (a) $h_1 = \lambda/(4n_1)$ a $h_2 = \lambda/(4n_2)$, nebo (b) $h_1 = \lambda/(2n_1)$ a $h_2 = \lambda/(2n_2)$?



Obr. 36.29 Otázka 18

19. Obr. 36.30 uvádí čtyři případy, ve kterých světlo vlnové délky λ dopadá kolmo na velmi tenkou vrstvu. Uvedené indexy lomu jsou $n_1 = 1{,}33$ a $n_2 = 1{,}50$. Ve všech případech má vrstva tloušťku $h < 0{,}1\lambda$. Ve kterých případech bude odraz světla odstraněn interferencí na tenké vrstvě?



Obr. 36.30 Otázka 19

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 36.2 Světlo jako vlna

1C. Vlnová délka žlutého světla ve vzduchu je 589 nm. (a) Jaká je jeho frekvence? (b) Jaká je jeho vlnová délka ve skle, jehož index lomu je 1,52? (c) Z výsledků (a) a (b) nalezněte jeho rychlost v tomto skle.

2C. O kolik větší je rychlost světla (v metrech za sekundu) v safíru než v diamantu? (Viz tab. 34.1.)

3C. Užitím Huygensova principu odvoďte zákon odrazu.

4C. V určité kapalině byla naměřena rychlost žlutého světla (ze sodíkové výbojky) $1{,}92{\cdot}10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jaký je index lomu této kapaliny?

5C. Jaká je rychlost světla o vlnové délce 550 nm v taveném křemenu? (Viz obr. 34.19.)

6C. Pohybuje-li se elektron látkou rychlostí, jež převyšuje rychlost světla v této látce, vyzařuje elektromagnetické vlny (*Čerenkovův jev*). Jakou nejmenší rychlost musí mít elektron v kapalině o indexu lomu 1,54, aby zářil?

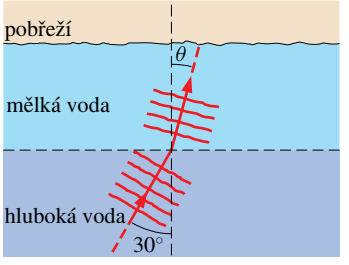
7C. Laserový svazek se šíří podél osy 1 609 m dlouhé přímé části potrubí. Potrubí obsahuje vzduch o normální teplotě a tlaku (viz tab. 34.1), ale může být také evakuováno. Ve kterém případě a o kolik bude doba průchodu svazku větší?

8Ú. Táhneme tyčí ve vodě rychlostí v, která je větší než rychlost u vln na hladině. Použitím Huygensovy konstrukce pro vlny vyvolané ve vodě tyčí, ukažte, že se vytváří kuželová vlnoplocha, jejíž vrcholový úhel 2θ (obr. 18.22) je dán vztahem

$$\sin\theta = \frac{u}{v}.$$

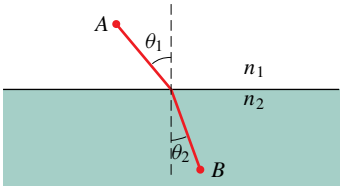
Ta je známá jako kýlová vlna od přídě lodi nebo rázová vlna, způsobená objektem pohybujícím se ve vzduchu rychlostí převyšující rychlost zvuku.

9Ú. Mořské vlny se blíží ke břehu rychlostí $4{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod úhlem 30° k normále tak, jak ukazuje obr. 36.31. Předpokládejte, že hloubka vody se v určité vzdálenosti změní a rychlost vlny v těchto místech poklesne na $3{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jaký je úhel θ mezi směrem šíření vlny a normálou v blízkosti břehu? (Použijte stejný zákon lomu jako pro světlo.) Vysvětlete, proč největší vlny dorazí ke břehu ve směru normály, i kdyby se ve velké vzdálenosti šířily pod různými úhly.



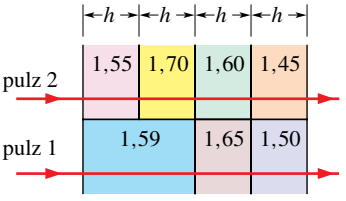
Obr. 36.31 Úloha 9

10Ú. Na obr. 36.32 se světlo šíří z bodu A do bodu B dvěma prostředími s indexy lomu n_1 a n_2. Ukažte, že dráha, která vyžaduje nejmenší dobu průchodu z A do B, je ta, pro níž v_1 a v_2 na obrázku vyhovují rov. (36.6).



Obr. 36.32 Úloha 10

11Ú. Obr. 36.33 ukazuje dva světelné pulzy šířící se vrstvami z plastu o uvedených indexech lomu a o tloušťkách h a $2h$. (a) Který pulz projde plastem v kratším čase? (b) V násobcích h/c vyjádřete rozdíl mezi dobami průchodů pulzů.



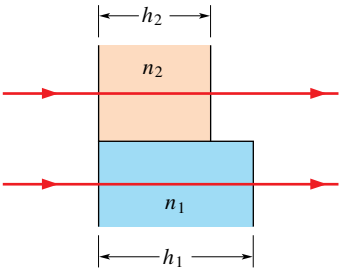
Obr. 36.33 Úloha 11

12Ú. Podle obr. 36.3 předpokládejte dvě světlené vlny ve vzduchu o vlnové délce 400 nm, jejichž počáteční fáze jsou shodné. Jedna vlna prochází skleněnou vrstvou o indexu lomu $n_1 = 1{,}60$ a tloušťce h. Druhá vlna prochází stejně tlustou plastovou vrstvou o indexu lomu $n_2 = 1{,}50$. (a) Jaká je (nejmenší) hodnota h, jestliže rozdíl fází vln při jejich výstupu je 5,65 rad? (b) K jakému typu interference dochází, jestliže vlny dospějí po výstupu z vrstev do nějakého společného bodu?

13Ú. Předpokládejte, že dvě vlny na obr. 36.3 mají ve vzduchu vlnové délky 500 nm. Jaký je jejich fázový rozdíl, vyjádřený ve vlnových délkách, po průchodu prostředími 1 a 2, jestliže (a) $n_1 = 1{,}50$, $n_2 = 1{,}60$ a $h = 8{,}50\,\mu$m; (b) $n_1 = 1{,}62$, $n_2 = 1{,}72$ a $h = 8{,}50\,\mu$m; (c) $n_1 = 1{,}59$, $n_2 = 1{,}79$ a $h = 3{,}25\,\mu$m? (d) Předpokládejte, že v každém z těchto tří případů se vlny po výstupu objeví ve společném bodě. Seřaďte uvedené případy podle intenzity, kterou mají vlny v tomto bodě.

14Ú. Podle obr. 36.3 uvažujte dvě světelné vlny, jejichž vlnové délky ve vzduchu jsou 620 nm a počáteční fáze se liší o π rad. Indexy lomu prostředí jsou $n_1 = 1{,}45$ a $n_2 = 1{,}65$. (a) Jaká je nejmenší tloušťka h, která způsobí, že se vlny po jednom průchodu prostředím dostanou přesně do fáze? (b) Jaká je následující větší tloušťka h, při které k tomu opět dojde?

15Ú. Dvě světelné vlny o vlnových délkách 600,0 nm jsou při šíření vzduchem ve fázi. Potom, jak je zřejmé z obr. 36.34, procházejí vrstvami z plastu, přitom je $h_1 = 4{,}00\,\mu$m, $h_2 = 3{,}50\,\mu$m, $n_1 = 1{,}40$ a $n_2 = 1{,}60$. (a) Jaký je fázový rozdíl obou vln, vyjádřený ve vlnových délkách λ, po jejich výstupu z vrstev? (b) K jakému typu interference dochází, jestliže se vlny později setkají v nějakém společném bodě?



Obr. 36.34 Úloha 15

ODST. 36.4 Youngův interferenční pokus

16C. Monochromatické zelené světlo o vlnové délce 550 nm osvětluje dvě rovnoběžné úzké štěrbiny, mezi jejichž středy je vzdálenost 7,70 μm. Vypočtěte úhlovou polohu (θ na obr. 36.8) světlého proužku třetího řádu (pro $m = 3$) (a) v radiánech a (b) ve stupních.

17C. Jaký je fázový rozdíl mezi vlnami ze dvou štěrbin, které v Youngově experimentu vytvářejí m-tý tmavý proužek?

18C. Jestliže se rozteč mezi štěrbinami d v Youngově experimentu dvakrát zvětší, jak se musí změnit vzdálenost l stínítka od štěrbin, aby vzdálenost mezi proužky zůstala stejná?

19C. Předpokládejte, že k Youngovu experimentu je použito modrozelené světlo s vlnovou délkou 500 nm. Vzdálenost středů štěrbin je 1,20 mm a stínítko je ve vzdálenosti 5,40 m od štěrbin. Jaká je vzdálenost světlých proužků?

20C. Nalezněte rozteče štěrbin ve dvojštěrbinovém uspořádání, které vytvoří na vzdáleném stínítku interferenční proužky, jejichž úhlová vzdálenost je 0,018 rad. Předpokládejte sodíkové světlo ($\lambda = 589$ nm).

21C. Dvojštěrbinové uspořádání vytváří pro sodíkové světlo ($\lambda = 589$ nm) interferenční proužky, jejichž úhlová vzdálenost je $3{,}50 \cdot 10^{-3}$ rad. Pro jakou vlnovou délku by byla úhlová vzdálenost proužků o 10 % větší?

22C. Ve dvojštěrbinovém uspořádání je mezi štěrbinami vzdálenost rovna stonásobku vlnové délky světla, které štěrbinami prochází. (a) Jaká je úhlová vzdálenost v radiánech mezi středovým maximem a přilehlým vedlejším maximem? (b) Jaká je vzdálenost mezi těmito maximy na stínítku vzdáleném 50,0 cm od štěrbin?

23C. Ve dvojštěrbinovém experimentu (obr. 36.8) je $\lambda = 546$ nm, $d = 0{,}10$ mm a $h = 20$ cm. Jaká je na projekční ploše vzdálenost pátého maxima a sedmého minima od středového maxima?

24C. Při dvojštěrbinovém uspořádání vznikají pro sodíkové světlo ($\lambda = 589$ nm) interferenční proužky, jejichž úhlová vzdálenost je 0,20°. Jaká je úhlová vzdálenost proužků, jestliže je celé zařízení ponořeno do vody ($n = 1{,}33$)?

25C. Dva zdroje rádiové frekvence, mezi nimiž je vzdálenost 2,0 m, vyzařují ve fázi s $\lambda = 0{,}50$ m. Detektor se pohybuje kolem obou zdrojů po kruhové dráze v rovině, která oba zdroje

obsahuje. Aniž byste použili písemný výpočet, nalezněte, kolik maxim zjistíme.

26C. Zdroje A a B vysílají dlouhé rádiové vlny o vlnové délce 400 m. Fáze vlny vyzařované ze zdroje A předbíhá fázi vlny ze zdroje B o 90°. Vzdálenost r_A od A k detektoru je větší o 100 m než příslušná vzdálenost r_B. Jaký je fázový rozdíl obou vln v detektoru?

27Ú. Ve dvojštěrbinovém experimentu je vzdálenost mezi štěrbinami 5,0 mm a štěrbiny jsou 1,0 m od projekčního stínítka. Na stínítku lze vidět dva interferenční obrazce: jeden, vytvořený světlem o vlnové délce 480 nm, a druhý, vytvořený světlem o vlnové délce 600 nm. Jaká je na stínítku vzdálenost mezi světlými proužky třetího řádu ($m = 3$) těchto dvou rozdílných obrazců?

28Ú. Jaká je vlnová délka použitého světla, jestliže vzdálenost mezi prvním a desátým minimem dvojštěrbinového obrazce je 18 mm, mezera mezi štěrbinami je 0,15 mm a vzdálenost stínítka od štěrbin je 50 cm?

29Ú. Na obr. 36.35 jsou stejné zdroje vln A a B, které jsou ve fázi a mají stejnou vlnovou délku λ. Vzdálenost mezi zdroji je $d = 3{,}00\lambda$. Nalezněte na ose x největší vzdálenost od zdroje A, pro kterou nastává destruktivní interference. Vyjádřete tuto vzdálenost ve vlnových délkách.



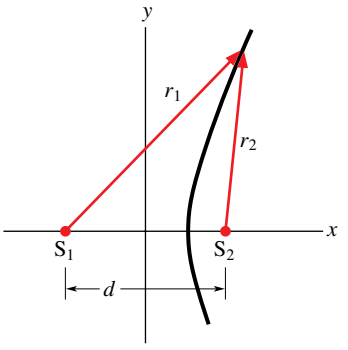
Obr. 36.35 Úlohy 29 a 39

30Ú. Laserové světlo o vlnové délce 632,8 nm z dvojštěrbinového zařízení v přední části učebny prochází celou místností. Ve vzdálenosti 20,0 m se odráží od zrcadla zpět na projekční plochu v rovině štěrbin, kde se vytvoří interferenční obrazec. Vzdálenost mezi sousedními světlenými proužky je 10,0 cm. (a) Jaká je vzdálenost mezi štěrbinami? (b) Co se stane s obrazcem, jestliže přednášející překryje jednu štěrbinu průhlednou fólií a tím se prodlouží příslušná dráha o délku rovnající se 2,50 násobku vlnové délky?

31Ú. Sodíkové světlo ($\lambda = 589$ nm) osvětluje dvě štěrbiny, mezi jejichž středy je vzdálenost $d = 2{,}0$ mm. Vzdálenost štěrbin od projekčního stínítka h je 40 mm. K jaké chybě (v procentech) dochází užitím rov. (36.14) při určení polohy světlého proužku pro $m = 10$ na stínítku oproti výpočtu s přesným rozdílem délek drah?

32Ú. Dva bodové zdroje S_1 a S_2 na obr. 36.36 vyzařují vlny se shodnou fází a frekvencí. Ukažte, že všechny křivky (tak jak je nakresleno), podél nichž je fázový rozdíl vln paprsků r_1 a r_2 konstantní, jsou hyperboly. (*Tip*: Konstantní fázový rozdíl zahrnuje konstantní rozdíl mezi délkami r_1 a r_2.)

33Ú. Tenkou šupinku slídy ($n = 1{,}58$) použijeme k překrytí jedné štěrbiny v dvojštěrbinovém uspořádání. Středový proužek



Obr. 36.36 Úloha 32

se posune do místa, které dříve příslušelo sedmému vedlejšímu světlému proužku ($m = 7$). Jaká je tloušťka slídy, jestliže $\lambda = 550$ nm? (*Tip*: Uvažte vlnovou délku ve slídě.)

34Ú. Jedna štěrbina v dvojštěrbinové sestavě je zakryta tenkou skleněnou destičkou o indexu lomu 1,4 a druhá štěrbina tenkou skleněnou destičkou o indexu lomu 1,7. Bod na stínítku, do kterého padlo středové maximum před vložením destiček, odpovídá nyní světlému proužku pro $m = 5$. Za předpokladu, že $\lambda = 480$ nm a že destičky jsou stejně tlusté, nalezněte hodnotu jejich tloušťky t.

ODST. 36.6 Intenzita při interferenci světla ze dvou štěrbin

35C. Nalezněte součet y následujících veličin:

$$y_1 = 10 \sin \omega t \quad \text{a} \quad y_2 = 8{,}0 \sin(\omega t + 30°).$$

36C. Dvě vlny o stejné frekvenci mají amplitudy 1,00 a 2,00. Interferují v bodě, ve kterém je rozdíl jejich fází 60,0°. Jaká je výsledná amplituda?

37C. Světlo o vlnové délce 600 nm dopadá kolmo na dvě rovnoběžné úzké štěrbiny, jejichž vzdálenost je 0,60 mm. Nakreslete rozdělení intenzity na vzdáleném stínítku jako funkci úhlu θ z intervalu hodnot $0 \leqq \theta \leqq 0{,}004\,0$ rad.

38C. Metodou fázorů sečtěte následující veličiny:

$$y_1 = 10 \sin \omega t,$$
$$y_2 = 15 \sin(\omega t + 30°)$$

a

$$y_3 = 5{,}0 \sin(\omega t - 45°).$$

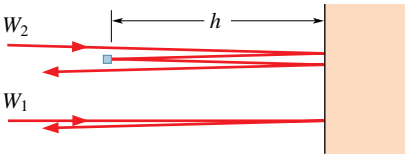
39Ú. Na obr. 36.35 označují A a B bodové zdroje elektromagnetických vln o vlnové délce 1,00 m. Zdroje, jejichž vzájemná vzdálenost je $d = 4{,}00$ m, vyzařují se stejným výkonem vlny, mající stejnou fázi. (a) V jaké vzdálenosti od zdroje A jsou detegována první tři interferenční maxima, jestliže se detektor pohybuje podél osy x doprava od zdroje A? (b) Je intenzita nejbližšího minima přesně rovna nule? (*Tip*: Závisí intenzita vln z bodového zdroje na vzdálenosti od něho?)

40Ú. Vodorovná dvojstranná šipka na obr. 36.9 označuje body na křivce průběhu intenzity, ve kterých je hodnota intenzity středového proužku rovna polovině maximální intenzity. Ukažte, že úhlová vzdálenost mezi těmito body na stínítku je $\Delta\theta = \lambda/(2d)$ a to za předpokladu, že θ na obr. 36.8 je dostatečně malé, takže $\sin\theta \approx \theta$.

41Ú*. Předpokládejte, že štěrbiny ve dvojštěrbinovém zařízení nemají stejnou šířku a že amplituda světla dopadajícího z širší štěrbiny do středové části projekčního stínítka je dvakrát větší než od užší štěrbiny. Odvoďte vztah pro intenzitu světla I na stínítku v závislosti na úhlu θ odpovídající rov. (36.21) a (36.22).

ODST. 36.7 Interference na tenké vrstvě

42C. Na obr. 36.37 se světelná vlna W_1 jedenkrát odrazí od zrcadlové plochy, zatímco světelná vlna W_2 se odrazí dvakrát od této plochy a jednou od střepiny zrcadla ve vzdálenosti h od zrcadla. Před dopadem jsou vlny ve fázi a mají vlnovou délku 620 nm. Nepatrně šikmý chod paprsků zanedbejte. (a) Pro jaké nejmenší hodnoty h jsou odražené vlny přesně ve fázi? (b) O kolik se musí střepina posunout, aby vlny měly právě opačnou fázi?



Obr. 36.37 Cvičení 42

43C. Předpokládejte, že světelné vlny ze cvič. 42 mají na počátku opačnou fázi. Nalezněte výraz pro hodnoty h, vyjádřené pomocí vlnových délek λ, pro případy, ve kterých jsou odražené vlny ve fázi.

44C. Intenzívní světlo o vlnové délce 585 nm dopadá kolmo na mýdlovou blánu ($n = 1{,}33$) tloušťky 1,21 μm ve vzduchu. Je světlo odražené na obou plochách blány blíže k destruktivní interferenci, nebo ke konstruktivní interferenci?

45C. Světlo o vlnové délce 624 nm dopadá na mýdlovou blánu ($n = 1{,}33$) ve vzduchu. Pro které dvě nejmenší tloušťky této blány dochází při odrazu ke konstruktivní interferenci?

46C. Aby se pomocí interference odstranil odraz kolmo dopadajícího červeného světla o vlnové délce 680 nm, je čočka o indexu lomu větším než 1,30 pokryta tenkou průhlednou vrstvou o indexu lomu 1,30. Jakou nejmenší tloušťku musí vrstva mít?

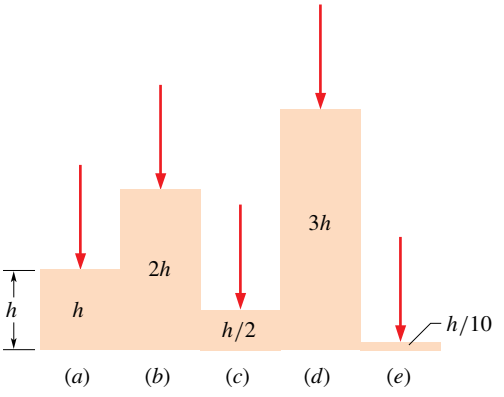
47C. Aby se pomocí interference odstranil odraz kolmo dopadajícího světla o vlnové délce λ, je čočka o indexu lomu větším než 1,30 pokryta tenkou průhlednou vrstvou o indexu lomu 1,25. Jaké nejmenší tloušťky vrstvy, vyjádřené v λ, je k tomu zapotřebí?

48C. Tenká vrstva ve vzduchu o tloušťce 0,410 μm je osvětlena bílým světlem, které dopadá kolmo na její povrch. Index lomu vrstvy je 1,50. Pro jaké vlnové délky viditelného světla odraženého od obou rozhraní dochází ke konstruktivní interferenci?

49C. Umělé drahokamy v kostýmové bižuterii jsou skla s indexem lomu 1,50. Aby se zvýšila jejich odrazivost, jsou často pokryta vrstvou oxidu křemičitého s indexem lomu 2,00. Jaká nejmenší tloušťka vrstvy zajistí, aby při odrazu kolmo dopadajícího světla o vlnové délce 560 nm docházelo na vrstvě ke konstruktivní interferenci?

50C. Přejeme si napařit na tavený křemen ($n = 1{,}50$) průhlednou látku ($n = 1{,}25$) tak, aby odraz světla o vlnové délce 600 nm byl odstraněn pomocí interference. Jakou nejmenší tloušťku musí vrstva mít, aby k tomu došlo?

51Ú. Na obr. 36.38 dopadá ze vzduchu světlo vlnové délky 600 nm kolmo na pět oblastí průhledné látky. Tato látka má index lomu 1,50. Tloušťka každé oblasti je vyjádřena pomocí $h = 4{,}00\,\mu$m. Pro kterou z oblastí bude pro světlo odražené od horní a dolní plochy docházet ke konstruktivní interferenci?



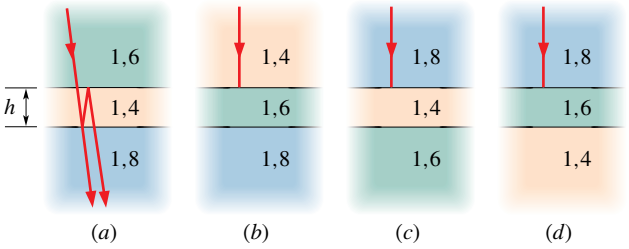
Obr. 36.38 Úloha 51

52Ú. Na obr. 36.39 dopadá světlo vlnové délky 600 nm kolmo na čtyři tenké vrstvy tloušťky h. Indexy lomu těchto vrstev a prostředí nad i pod nimi jsou uvedeny na obrázku. Nechť v každém z případů vyjadřuje λ vlnovou délku světla ve vzduchu a n_2 index lomu tenké vrstvy. Uvažujte pouze prošlé světlo složené ze dvou částí tak, jak je to uvedeno na obr. 36.39a: z části přímo prošlého světla a z té části, která vystupuje po dvou odrazech. Pro které případy výraz

$$\lambda = \frac{2hn_2}{m}, \text{ kde } m = 0, 1, 2, \ldots,$$

dává vlnové délky, při kterých dochází v prošlém světle ke konstruktivní interferenci?

53Ú. Z poškozené cisternové lodi v Perském zálivu uniká petrolej ($n = 1{,}20$) a vytváří na hladině vody ($n = 1{,}30$) mastnou skvrnu. (a) Jestliže pohlížíte z letadla přímo dolů, zatímco Slunce je nad vámi, oblast skvrny o tloušťce 460 nm se pro určitou vlnovou délku viditelného světla jeví světlá, protože dochází ke konstruktivní interferenci v odraženém světle. Pro kterou vlnovou délku (nebo vlnové délky) k tomu dochází? (b) Jestliže jste v akvalungu ponořeném pod touž oblastí skvrny, pro kterou



Obr. 36.39 Úlohy 52, 53 a 56

vlnovou délku (nebo vlnové délky) viditelné oblasti je intenzita prošlého světla největší? (*Tip*: Užijte obr. 36.39a s odpovídajícími indexy lomu.)

54Ú. Rovinná vlna monochromatického světla dopadá kolmo na tenkou vrstvu oleje stejné tloušťky, která pokrývá skleněnou desku. Vlnovou délku světla můžeme spojitě měnit. Destruktivní interferenci pozorujeme pro vlnové délky 500 nm a 700 nm a pro žádné jiné vlnové délky z intervalu mezi uvedenými hodnotami. Nalezněte tloušťku olejové vrstvy, jestliže index lomu oleje je 1,30 a index lomu skla je 1,50.

55Ú. Odraz kolmo dopadajícího bílého světla od mýdlové blány ve vzduchu má interferenční maximum při 600 nm a minimum při 450 nm, přitom mezi těmito hodnotami neexistuje žádné další minimum. Jaká je tloušťka vrstvy (všude stejně silné), jestliže její index lomu je $n = 1{,}33$?

56Ú. Tabule skla, majícího index lomu 1,40, je pokryta vrstvou látky o indexu lomu 1,55 tak, aby se pomocí konstruktivní interference dosáhlo nejvyšší propustnosti zeleného světla o vlnové délce 525 nm. (a) Jaká je nejmenší tloušťka vrstvy, která to umožňuje? (*Tip*: Užijte obr. 36.39a se změněnými indexy lomu.) (b) Proč takto preferovány nejsou i jiné části viditelného spektra? (c) Bude propustnost některých barev výrazně snížena? Jestliže ano, tak kterých?

57Ú. Rovinná monochromatická světelná vlna ve vzduchu dopadá kolmo na tenkou vrstvu oleje na skleněné desce. Vlnovou délku zdroje světla můžeme měnit spojitě. V odraženém světle pozorujeme destruktivní interferenci pro vlnové délky 500 nm a 700 nm a již pro žádné jiné mezi těmito uvedenými hodnotami. Index lomu skla je 1,50. Ukažte, že index lomu oleje musí být menší než 1,50.

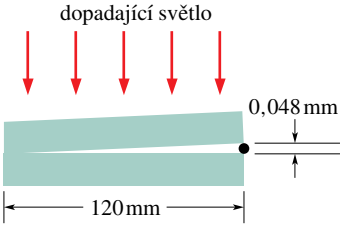
58Ú. Tenká vrstva acetonu ($n = 1{,}25$) pokrývá tlustou skleněnou desku ($n = 1{,}50$). Bílé světlo dopadá kolmo na vrstvu. V odraženém světle se objeví destruktivní interference pro 600 nm a konstruktivní interference pro 700 nm. Vypočítejte tloušťku acetonové vrstvy.

59Ú. Předpokládejte, že podle obr. 36.12 dopadá světlo na tenkou vrstvu pod úhlem $\theta_i > 0$. Nalezněte vztah podobný rov. (36.34) a (36.35), který určuje interferenční maximum pro vlny, odpovídající paprskům r_1 a r_2. Vlnová délka je λ, tloušťka je h a $n_2 > n_1 = n_3 = 1{,}0$.

60Ú. Z prostředí o indexu lomu n_1 dopadá monochromatické světlo o vlnové délce λ kolmo na tenkou vrstvu o stejné tloušťce $h > 0{,}1\lambda$ a o indexu lomu n_2. Světlo prošlé vrstvou vstupuje do prostředí o indexu lomu n_3. Nalezněte výrazy pro nejmenší tloušťku (pomocí λ a indexu lomu) pro následující případy: (a) nejméně světla se odráží (takže nejvíce světla prochází) pro $n_1 < n_2 > n_3$; (b) nejméně světla se odráží (a tedy nejvíce světla prochází) pro $n_1 < n_2 < n_3$; (c) nejvíce světla se odráží (a nejméně světla prochází) pro $n_1 < n_2 < n_3$.

61Ú. V př. 36.5 předpokládejte, že vrstva odstraňuje odraz kolmo dopadajícího světla o vlnové délce 550 nm. Vypočtěte poměrné snížení odrazivosti vrstvou pro 450 nm a 650 nm.

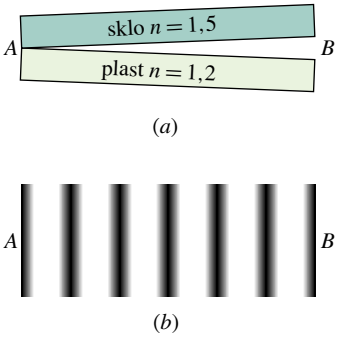
62Ú. Na obr. 36.40 směřuje široký svazek světla vlnové délky 683 nm dolů přes horní z dvojice desek. Desky dlouhé 120 mm se na levém konci dotýkají a na pravém konci jsou odděleny drátem o průměru 0,048 mm. Vzduch mezi deskami působí jako tenká vrstva. Kolik světlých proužků bude vidět pozorovatel, dívající se dolů přes horní desku?



Obr. 36.40
Úlohy 62 a 63

63Ú. Na obr. 36.40 směřuje bílé světlo dolů přes dvojici skleněných desek. Na levém konci se desky dotýkají a na pravém konci je mezi ně vložen drát (o průměru 0,048 mm); vzduch mezi deskami působí jako tenká vrstva. Pozorovatel dívající se přes horní desku vidí na této vrstvě světlé a tmavé proužky. (a) Je na levé straně vidět tmavý, nebo světlý proužek? (b) Vpravo od tohoto konce dochází k destruktivní interferenci v různých místech pro různé vlnové délky. Objeví se interferenční minimum nejdříve pro červený, nebo pro modrý konec viditelného spektra?

64Ú. Na obr. 36.41a se široký svazek světla o vlnové délce 600 nm šíří dolů skleněnou deskou ($n = 1{,}5$), která s deskou



Obr. 36.41
Úloha 64

z plastu ($n = 1{,}2$) vytváří tenký vzduchový klín, působící jako tenká vrstva. Pozorovatel, dívající se dolů přes horní desku, vidí strukturu proužků podle obr. 36.41b se středy tmavých proužků na koncích A a B. (a) Jaká je tloušťka klínu v bodě B? (b) Kolik tmavých proužků bude pozorovatel vidět, jestliže vzduch mezi deskami nahradíme vodou ($n = 1{,}33$)?

65Ú. Široký svazek světla o vlnové délce 630 nm dopadá kolmo na tenkou klínovou vrstvu s indexem lomu 1,50. V procházejícím světle vidí pozorovatel podél celé délky vrstvy 10 světlých proužků a 9 tmavých proužků. O kolik se na této délce změnila tloušťka vrstvy?

66Ú. Dvě skleněné desky se jedním koncem dotýkají, takže vytvářejí vzduchový klín, který působí jako tenká vrstva. Široký svazek světla vlnové délky 480 nm směřuje kolmo k první desce. Díváme-li se do světla odraženého od desek, vidíme interferenční obrazec způsobený vzduchovým klínem. O kolik je klín tlustší v místě šestnáctého světlého proužku, než v místě šestého světlého proužku?

67Ú. Široký svazek monochromatického světla směřuje kolmo přes plochy dvou skleněných desek, které se na jednom konci dotýkají, takže mezi nimi vzniká vzduchový klín. Díváme-li se do světla odraženého od tenkého vzduchového klínu, vidíme na celé délce klínu 4 001 tmavých proužků. Jestliže je vzduch odčerpán a mezi deskami je vakuum, vidíme 4 000 tmavých proužků. Vypočtěte z těchto údajů index lomu vzduchu.

68Ú. Na obr. 36.42a je čočka o poloměru křivosti R, ležící na rovinné skleněné desce, osvětlena shora světlem o vlnové délce λ. Obr. 36.42b ukazuje kruhové interferenční proužky (označované jako *Newtonovy kroužky*), které přísluší místům různé tloušťky d vzduchové vrstvy mezi čočkou a deskou. Nalezněte poloměr r interferenčních maxim za předpokladu, že $r/R \ll 1$.

69Ú. V experimentu s Newtonovými kroužky (viz úlohu 68) je poloměr křivosti R čočky 5,0 m a její průměr je 20 mm. (a) Kolik světlých kroužků vznikne? Předpokládejte, že $\lambda = 589$ nm. (b) Kolik světlých kroužků by vzniklo, kdyby zařízení bylo ponořeno do vody ($n = 1{,}33$)?

70Ú. Zařízení ke sledování Newtonových kroužků je použito ke stanovení poloměru křivosti čočky (obr. 36.42 a úloha 68). Měřením ve světle vlnové délky 546 nm bylo zjištěno, že poloměry n-tého a $(n + 20)$-tého světlého proužku jsou 0,162 cm a 0,368 cm. Vypočítejte poloměr křivosti spodní, vypuklé plochy čočky.

71Ú. (a) Užijte výsledek úlohy 68 k tomu, abyste ukázali, že rozdíl poloměrů sousedních světlých Newtonových kroužků (maxim) je za předpokladu $m \gg 1$ dán vztahem

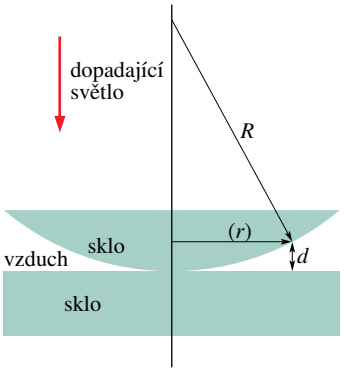
$$\Delta r = r_{m+1} - r_m \doteq \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda R/m}.$$

(b) Dále ukažte, že obsah plochy mezi světlými kroužky je za předpokladu $m \gg 1$ dán vztahem

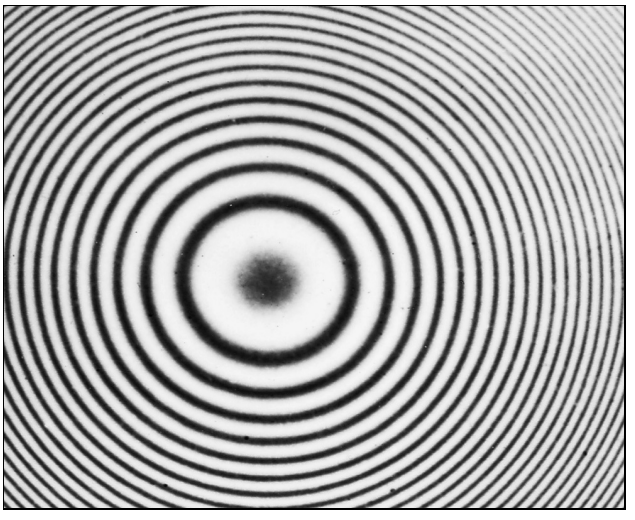
$$S = \pi\lambda R.$$

Všimněte si, že tato plocha nezávisí na m.

72Ú. Na obr. 36.43 vyzařuje mikrovlnný vysílač ve výšce a nad hladinou rozsáhlého jezera vlny o vlnové délce λ směrem k přijímači na opačném břehu ve výšce x nad hladinou. Mikrovlny, odražené od vody, interferují s mikrovlnami, které dospěly z vysílače přímo. Za předpokladu, že délka jezera l je mnohem



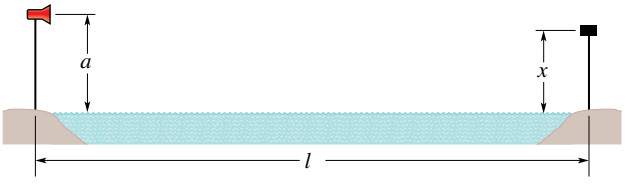
(*a*)



(*b*)

Obr. 36.42 Úlohy 68 a 71

větší než a a x a že $a \leqq \lambda$, určete, pro jaké hodnoty x je signál v přijímači největší. (*Tip*: Způsobí odraz fázovou změnu?)



Obr. 36.43 Úloha 72

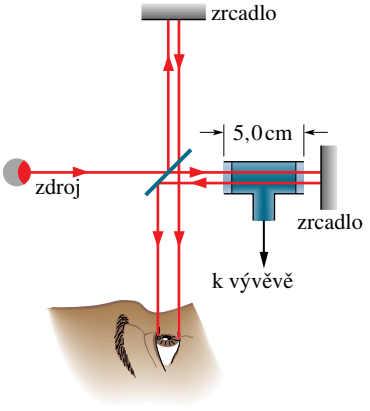
ODST. 36.8 Michelsonův interferometr

73C. Posuneme-li zrcadlo M_2 v Michelsonově interferometru o 0,233 mm, posune se interferenční obrazec o 792 proužků. Jaká je vlnová délka světla vytvářejícího strukturu proužků?

74C. Tenká vrstva o indexu lomu $n = 1{,}40$ je umístěna v jedné větvi Michelsonova interferometru kolmo k optické dráze. Jaká je tloušťka vrstvy, jestliže způsobí posunutí o 7,0 proužků v obrazci, vytvořeném pomocí světla o vlnové délce 589 nm?

75Ú. Vzduchotěsná komora 5,0 cm dlouhá se skleněnými

okénky je umístěna v jedné větvi Michelsonova interferometru tak, jak ukazuje obr. 36.44. Je použito světlo o vlnové délce $\lambda = 500\,\text{nm}$. Jestliže je vzduch z komory zcela vyčerpán, dojde k posunutí o 60 proužků. Z těchto údajů nalezněte index lomu vzduchu při atmosférickém tlaku.



Obr. 36.44 Úloha 75

76Ú. Sodík může vyzařovat světlo o dvou vlnových délkách, $\lambda_1 = 589{,}10\,\text{nm}$ a $\lambda_2 = 589{,}59\,\text{nm}$. Jestliže použijeme sodíkové světlo v Michelsonově interferometru, o jakou vzdálenost musíme jedno zrcadlo přemístit, aby v interferenčním obrazci pro jednu vlnovou délku došlo v případě druhé vlnové délky ke změně struktury o 1,00 proužek.

77Ú. Napište výraz pro intenzitu pozorovanou v Michelsonově interferometru (obr. 36.18) v závislosti na poloze pohyblivého zrcadla. Polohu zrcadla měřte od bodu, ve kterém je $d_1 = d_2$.

78Ú. Ke konci 19. století většina vědců předpokládala, že světlo (každá elektromagnetická vlna) potřebuje k šíření určité médium a že se nemůže šířit vakuem. Jedním důvodem k této domněnce bylo, že každý jiný typ vln vědcům známých vyžadoval prostředí. Tak např. zvukové vlny se mohou šířit vzduchem nebo zemí, ale nemohou se šířit vakuem. Z toho vědci vyvozovali, že když se světlo šíří ze Slunce nebo jiné hvězdy k Zemi, nemůže procházet vakuem; musí se šířit nějakým médiem, které vyplňuje okolní prostor a ve kterém se také pohybuje Země. Světlo má v tomto médiu, které bylo nazváno *éterem*, rychlost šíření c.

V roce 1887 Michelson a Edward Morley užili verse Michelsonova interferometru ke zkoumání vlivu éteru na šíření světla v tomto zařízení. Konkrétně pohyb zařízení éterem, související s pohybem Země kolem Slunce, by ovlivnil interferenční obrazec vytvořený zařízením. Vědci přepokládali, že Slunce je vzhledem k éteru takřka nehybné, proto rychlost interferometru vůči éteru by byla rychlostí Země kolem Slunce.

Obr. 36.45a ukazuje základní uspořádání zrcadel v experimentu z roku 1887. Zrcadla byla upevněna na masivní desce, která byla uložena na vrstvě rtuti, takže deskou bylo možné snadno otáčet kolem svislé osy. Michelson a Morley totiž chtěli sledovat vliv orientace větví vzhledem k pohybu éteru na změnu interferenčního obrazce. Posunutí proužků v interferenčním obrazci během otáčení by bylo jasným důkazem existence éteru.

Na obr. 36.45b je pohled shora na dráhu světla v interferometru. Aby se zvýšila citlivost zařízení vzhledem k základní verzi interferometru na obr. 36.18, odráží se světlo podél větví interferometru několikrát. Tento opakovaný odraz zvýšil efektivní délku každé větve na 10 m. I přes zvýšenou složitost uspořádání je interferometr na obr. 36.45a, b principiálně shodný s verzí interferometru na obr. 36.18; proto můžeme k diskusi použít obr. 36.18 s tím, že délka každé větve d_1 a d_2 se rovná 10 m.

Předpokládejme, že existuje éter, ve kterém se světlo šíří rychlostí c. Obr. 36.45c ukazuje boční pohled na větev délky d_1 z hlediska souřadnicového systému spojeného s éterem při pohybu interferometru éterem doprava rychlostí $\boldsymbol{v}$. (Pro jednoduchost je dělič svazku z obr. 36.18 nakreslen rovnoběžně se zrcadlem M_1 ve vzdáleném konci větve.) Obr. 36.45d ukazuje větev právě v okamžiku, kdy se dílčí část světla (znázorněna tečkou) začíná šířit podél větve. Toto světlo budeme sledovat s cílem nalézt délku dráhy v této větvi.

Světlo se pohybuje rychlostí c éterem vpravo směrem k zrcadlu M_1, které se pohybuje vpravo rychlostí $\boldsymbol{v}$. Obr. 36.45e ukazuje polohu M a M_1 v okamžiku, kdy světlo dospělo k zrcadlu M_1 a odráží se od něj. Světlo se nyní šíří éterem vlevo rychlostí c, zatímco M se pohybuje vpravo. Obr. 36.45f ukazuje polohy M a M_1 v okamžiku, kdy se světlo vrátilo k M.

(a) Ukažte, že celkový čas šíření tohoto světla z M do M_1 a potom zpět do M je

$$t_1 = \frac{2cd_1}{c^2 - v^2},$$

a tedy že délka dráhy L_1, prošlá světlem podél této větve, je

$$L_1 = ct_1 = \frac{2c^2 d_1}{c^2 - v^2}.$$

Obr. 36.45g je pohledem na větev délky d_2; větev se také pohybuje vpravo rychlostí $\boldsymbol{v}$ éterem. Pro jednoduchost je dělič svazku z obr. 36.18 nyní nakreslen rovnoběžně se zrcadlem M_2 ve vzdáleném konci této větve. Obr. 36.45h ukazuje větev právě v okamžiku, kdy část světla (tečka) se začíná šířit podél větve. Protože se větev při průchodu světla pohybuje vpravo, dráha světla je odchýlena šikmo vpravo k poloze, kterou bude mít zrcadlo M v okamžiku, kdy světlo k němu dospělo (obr. 36.45i). Odraz světla od M_2 orientuje světlo šikmo vpravo k poloze zrcadla M, kterou bude mít v okamžiku, kdy se světlo k němu vrátí (obr. 36.45j).

(b) Ukažte, že celkový čas průchodu světla od M do M_2 a potom zpět k M je

$$t_2 = \frac{2d_2}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

a tedy že délka dráhy L_2, prošlá světlem podél této větve, je

$$L_2 = ct_2 = \frac{2cd_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Dosaďte d za d_1 a d_2 ve výrazech pro L_1 a L_2. Potom rozložte oba výrazy pomocí binomického rozvoje (uvedeném v dodatku E a vyloženém v bodě 7.2); ponechte první dva členy v každém rozvoji.

(c) Ukažte, že délka dráhy L_1 je větší než délka dráhy L_2 a že jejich rozdíl ΔL je

$$\Delta L = \frac{dv^2}{c^2}.$$

(d) Dále ukažte, že fázový rozdíl mezi světlem šířícím se podél L_1 a světlem šířícím se podél L_2 je

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{dv^2}{\lambda c^2},$$

kde λ je vlnová délka světla. Tento fázový rozdíl určuje soustavu proužků vytvořenou světlem z jednotlivých větví v dalekohledu interferometru.

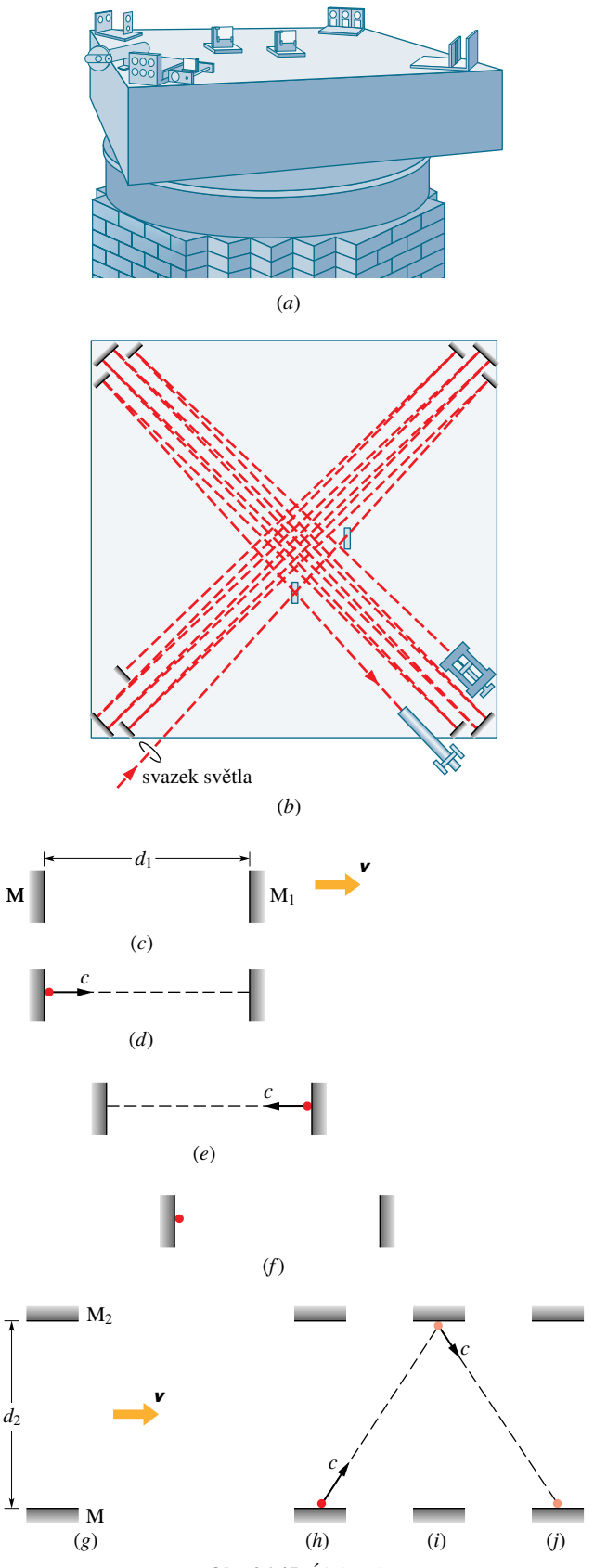
Nyní se interferometr pootočí o 90°, takže větev délky d_2 je orientována podél pohybu éteru a větev délky d_1 je kolmá k tomuto směru.

(e) Ukažte, že posunutí v soustavě proužků v důsledku otočení je

$$\text{posunutí} = \frac{2dv^2}{\lambda c^2}.$$

(f) Odhadněte posunutí dosazením $c = 3{,}0{\cdot}10^8\ \text{m}{\cdot}\text{s}^{-1}$, $d = 10\ \text{m}$ a $\lambda = 500\ \text{nm}$ a užitím dat o Zemi, uvedených v dodatku C.

Tento očekávaný posun proužku by měl být snadno pozorovatelný. Avšak Michelson a Morley žádné posunutí proužků nepozorovali, což vyvolalo vážné pochybnosti o existenci éteru. Myšlenka éteru proto zanikla. Mimoto, nulový výsledek Michelsona a Morleye vedl, alespoň nepřímo, k Einsteinově speciální teorii relativity.



Obr. 36.45 Úloha 78

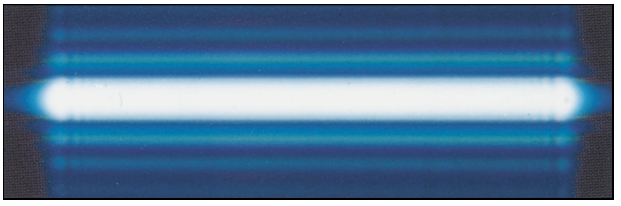
37
Difrakce



Georges Seurat namaloval ***Nedělní odpoledne na ostrově La Grande Jatte*** *nikoli obvyklými tahy štětcem, ale pouze velkým počtem malých barevných teček, což je malířský styl nazývaný pointilismus. Stojíte-li dost blízko malby, můžete ty tečky vidět, avšak když se od ní vzdálíte, splývají a nelze je rozlišit. Navíc se barva určitého místa obrazu mění, když se vzdalujete — proto také Seurat touto technikou maloval. Čím je tato změna barvy způsobena?*

37.1 DIFRAKCE A VLNOVÁ TEORIE SVĚTLA

V kap. 36 jsme definovali difrakci poněkud volně — jako rozšíření světelného svazku vymezeného úzkou štěrbinou. Jde však o víc než o rozšíření, neboť světlo vytváří interferenční obrazec, který nazýváme **difrakčním obrazcem**. Například monochromatické světlo vycházející z nějakého vzdáleného zdroje (nebo laseru) a procházející úzkou štěrbinou vytváří na pozorovacím stínítku difrakční obrazec podobný obr. 37.1. Tento obrazec tvoří široké **centrální** maximum s několika užšími a méně intenzívními maximy (nazývanými **sekundární** neboli **vedlejší** maxima) po obou stranách. Mezi maximy jsou minima.

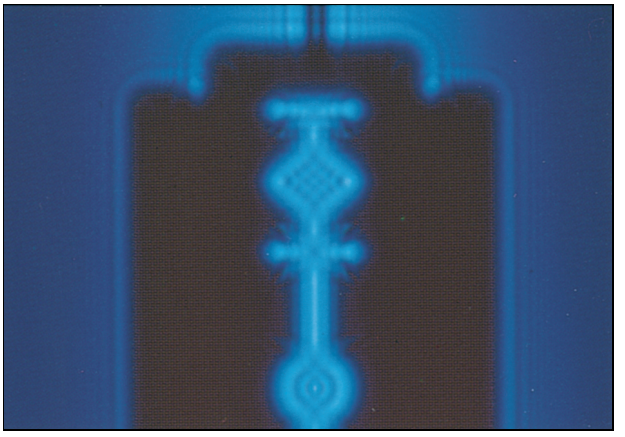


Obr. 37.1 Difrakční obrazec, který se objeví na pozorovacím stínítku, na něž dopadá světlo prošlé úzkou vodorovnou štěrbinou. Difrakce způsobuje, že se světlo rozšíří kolmo k dlouhým stranám štěrbiny. Vzniká tak interferenční obrazec tvořený širokým centrálním maximem a méně intenzívními a užšími sekundárními (neboli vedlejšími) maximy, která jsou oddělena minimy.

Podle geometrické optiky naprosto nelze takový obrazec očekávat. Kdyby se světlo šířilo přímočaře, tedy jako paprsky, propustila by štěrbina pouze některé z těchto paprsků a ty by vytvořily na pozorovacím stínítku ostrý a jasný obraz štěrbiny. Docházíme tedy — stejně jako v kap. 36 — k závěru, že geometrická optika je pouze aproximací.

K difrakci dochází nejenom, když světlo prochází úzkým otvorem (např. štěrbinou nebo špendlíkovou dírkou). Nastává také, když světlo míjí nějaký okraj, např. okraje žiletky na obr. 37.2. Všimněte si maxim a minim, která jsou jak uvnitř, tak vně žiletky a jsou přibližně rovnoběžná s okraji. Míjí-li světlo např. levý svislý okraj, vychýlí se vpravo i vlevo, interferuje a vytvoří obrazec okolo levého okraje. Část obrazce vpravo leží ve skutečnosti v místech, jež by byla stínem žiletky, kdyby platila geometrická optika.

S častým příkladem difrakce se setkáte, pohlédnete-li na jasnou modrou oblohu a vidíte jemné skvrny a vláknité struktury vznášející se v zorném poli. Tyto vznášející se struktury vznikají tím, že světlo míjí okraje drobounkých kousků sklivcového moku (průhledný materiál vyplňující převážnou část oční bulvy). Tyto kousky se odlomily a vznášejí se ve vodní vrstvě těsně před sítnicí, která deteguje světlo. Difrakční obrazec na jednom z těchto vznášejících se kousků je onou vznášející se strukturou, kterou máte ve svém zorném poli. Díváte-li se špendlíkovou dírkou v neprůhledném stínítku, takže světlo vstupující do vašeho oka je přibližně rovinnou vlnou, je možné, že budete moci v difrakčním obrazci rozlišit jednotlivá maxima a minima.



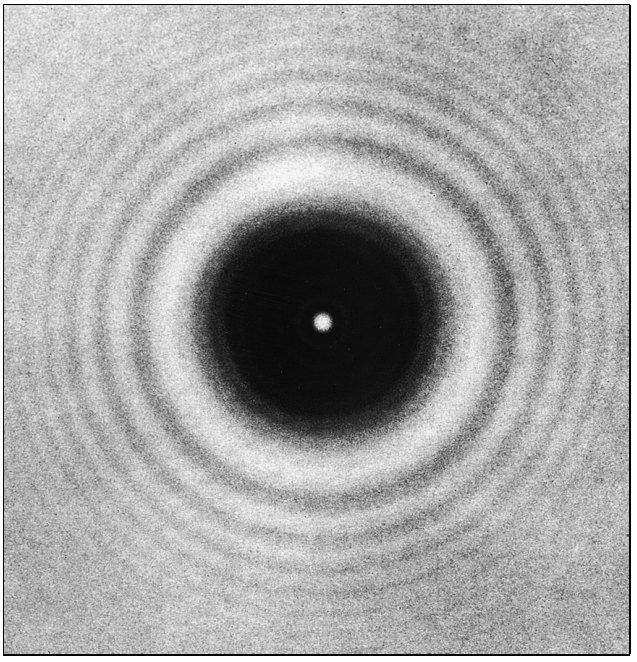
Obr. 37.2 Difrakce monochromatického světla na žiletce. Všimněte si maxim a minim intenzity.

Fresnelova světlá stopa

Difrakci lze vysvětlit vlnovou teorií světla. Tuto teorii vytvořil původně Christian Huygens; po 123 letech ji použil Young k výkladu interference na dvojštěrbině. Byla však přijímána velmi pomalu; byla totiž protikladem Newtonovy teorie, podle níž je světlo proudem částic.

Na počátku 19. století převažovalo Newtonovo hledisko také ve francouzských vědeckých kruzích. Augustin Fresnel, tehdy mladý vojenský inženýr, však věřil ve vlnovou teorii světla a předložil Francouzské akademii věd práci, v níž podal výklad svých experimentů založený na vlnové teorii.

Akademie, v níž převládali Newtonovi stoupenci, zamýšlela zpochybnit vlnové hledisko a vypsala v roce 1819 soutěž o cenu na pojednání o difrakci. Fresnel zvítězil. Newtonovi stoupenci však nezměnili své názory a nebyli ani umlčeni. Jeden z nich, S. D. Poisson, poukázal na tento „podivný výsledek“: Kdyby byla Fresnelova teorie správná, musely by světelné vlny jdoucí kolem okraje kuličky proniknout do oblasti stínu kuličky a vytvořit světlou stopu přesně uprostřed stínu. Tuto předpověď proslulého matematika ověřovali Fresnel a Arago a ukázalo se (obr. 37.3), že předpovězená *Fresnelova světlá stopa* — jak ji dnes nazýváme — tam skutečně je. Nic neposílí důvěryhodnost teorie více než experiment potvrzující některou z jejích nečekaných a zdánlivě paradoxních předpovědí.



Obr. 37.3 Fresnelova difrakce na disku. Všimněte si soustředných difrakčních kružnic a Fresnelovy světlé stopy ve středu obrazce. Tento experiment je v podstatě týž jako experiment, jímž Fresnel přesvědčil soutěžní výbor o správnosti své teorie, neboť okrajem průřezu koule použité v tehdejším experimentu i disku použitého zde je kružnice.

V optice zpravidla studujeme difrakci na rovinných objektech jako jsou difrakční stínítko, štěrbina, kruhový otvor v neprůhledném plechu apod. Tradičně se optické difrakční jevy rozdělují na Fresnelovu a Fraunhoferovu difrakci. V případě **Fresnelovy difrakce** se zajímáme o intenzitu (resp. amplitudu a fázi) jako funkci polohy v nějaké rovině pozorování umístěné v konečné vzdálenosti za difrakčním stínítkem. V případě **Fraunhoferovy difrakce** vyšetřujeme rozložení intenzity jako funkci směru, tedy jako funkci polohy v rovině v nekonečnu. V tomto smyslu lze na Fraunhoferovu difrakci pohlížet jako na speciální případ Fresnelovy difrakce. Tento speciální případ je však velmi důležitý při studiu zobrazení optickými soustavami. Roviny s obrazem nevlastní roviny (např. ohnisková rovina čočky) bývají totiž významnými rovinami optického systému. Proto se také ve většině učebnic — včetně naší — věnuje Fraunhoferovým difrakčním jevům více pozornosti. Jejich matematický popis je naštěstí také výrazně jednodušší než popis Fresnelových difrakčních jevů. V této kapitole se Fresnelovy difrakce týká pouze čl. 37.1; obr. 37.2 a 37.3 mohou posloužit jako příklady zajímavých Fresnelových difrakčních jevů. Naproti tomu čl. 37.2 až 37.8 se vztahují k Fraunhoferově difrakci a na obr. 37.9 a 37.15 jsou typické Fraunhoferovy difrakční jevy.

Významným mezníkem v praktickém využívání difrakce je rok 1912. Tehdy byla poprvé pozorována a interpretována difrakce rentgenového záření na krystalu a od té doby se využívá difrakce rentgenového záření (a též elektronů a neutronů — čl. 39.6) ke studiu struktur látek. Touto cestou difrakce velmi pozitivně ovlivnila rozvoj celé přírodovědy, neboť jejím prostřednictvím byla nalezena struktura obrovského počtu látek (řádově 10^5) a teorie difrakce také umožnila zrod celých vědních disciplín (např. molekulární biologie). O difrakci rentgenového záření na krystalové mřížce pojednává čl. 37.9. Jde vlastně opět o difrakci Fraunhoferova typu, neboť se měří difraktovaná intenzita v závislosti na směru. Avšak objekt, na němž k difrakci dochází, je trojrozměrný krystal, a ne rovinné difrakční stínítko jako v případě optické difrakce.

37.2 DIFRAKCE NA ŠTĚRBINĚ. POLOHY MINIM

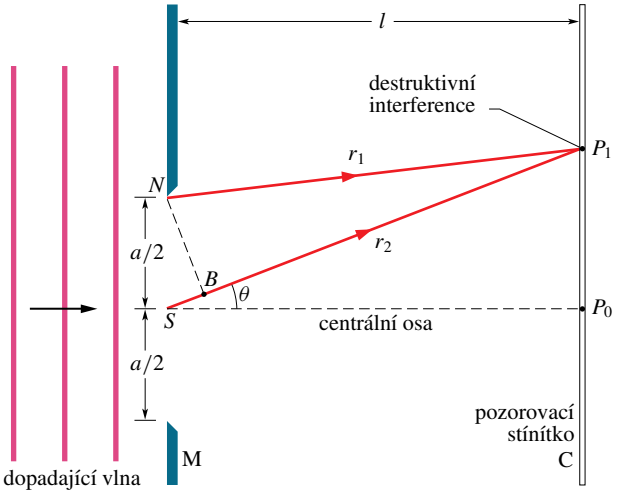
Uvažujme nyní o tom, jak rovinná světelná vlna o vlnové délce λ difraktuje na dlouhé a úzké štěrbině šířky a v jinak nepropustném stínítku M, jak je to v řezu naznačeno na obr. 37.4a. (V tomto obrázku je délka štěrbiny ve směru kolmém ke stránce.) Vlny vycházející z různých bodů štěrbiny dojdou do roviny pozorování C a tam interferují a vytvářejí difrakční obrazec ze světlých a tmavých proužků (interferenční maxima a minima). K určení polohy těchto proužků použijeme obdobné procedury jako v případě interferenčního obrazce od dvou štěrbin. Popis difrakce je však matematicky náročnější, a proto budeme v první fázi hledat podmínky pouze pro polohy tmavých proužků.

Než to však uděláme, zdůvodníme centrální jasný proužek patrný na obr. 37.1: Tento proužek je způsoben tím, že vlny vycházející ze všech bodů štěrbiny urazí přibližně stejnou dráhu do středu obrazce, takže jsou ve fázi. O ostatních světlých proužcích můžeme pouze říci, že jsou přibližně uprostřed mezi sousedními tmavými proužky.

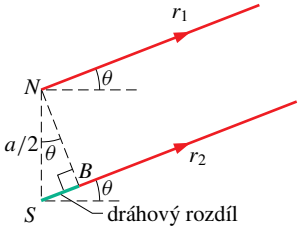
K nalezení tmavých proužků užijeme chytré (a zjednodušující) strategie, která rozdělí všechny paprsky procházející štěrbinou do dvojic a pak hledá, za jakých podmínek se vlny odpovídající paprskům v každém páru vzájemně vyruší. Obr. 37.4a ukazuje, jak používáme této strategie ke stanovení polohy prvního tmavého proužku v bodě P_1. Nejprve si představíme, že je štěrbina rozdělena do dvou *zón* téže šířky $a/2$. Potom vedeme do bodu P_1 světelný paprsek r_1 z horního bodu horní zóny a světelný paprsek r_2 z horního bodu spodní zóny. Centrální osa je vedena středem štěrbiny kolmo ke stínítku C a paprsek r_2 svírá úhel θ s touto osou.

Vlny příslušející dvojici paprsků r_1 a r_2 jsou v bodech

štěrbiny ve fázi, neboť vycházejí z téže vlnoplochy procházející štěrbinou. Aby však vytvořily první tmavý proužek v bodě P_1, musejí se jejich fáze v bodě P_1 lišit o π. Tento fázový rozdíl vznikne jako důsledek dráhového rozdílu $\lambda/2$. Aby vlna r_2 dosáhla bodu P_1, musí urazit delší dráhu než vlna r_1. Abychom tento dráhový rozdíl vyjádřili, vyznačíme na paprsku r_2 takový bod B, že vzdálenost od B k P_1 je táž jako délka paprsku r_1. Pak dráhový rozdíl obou paprsků je roven vzdálenosti mezi středem štěrbiny S a bodem B.



(*a*)



(*b*)

Obr. 37.4 (a) Vlny z horních bodů dvou zón šířky $a/2$ interferují v bodě P_1 roviny pozorování C destruktivně. (b) Poněvadž je zřejmě $l \gg a$, můžeme považovat paprsky r_1 a r_2 za přibližně rovnoběžné a svírající úhel θ s centrální osou.

Je-li pozorovací stínítko C blízko štěrbiny (jako je tomu na obr. 37.4a), je obtížné difrakční obrazec na stínítku C matematicky popsat. Matematika se však výrazně zjednoduší, je-li vzdálenost l mnohem větší než šířka štěrbiny a. Pak můžeme přibližně považovat paprsky r_1 a r_2 za rovnoběžné; označme θ úhel, který svírají s centrální osou (obr. 37.4b). Můžeme proto aproximovat trojúhelník určený bodem B, horním bodem štěrbiny N a středem štěrbiny S pravoúhlým trojúhelníkem, jehož jeden vnitřní úhel je θ. Dráhový rozdíl paprsků r_1 a r_2 (jenž je roven vzdálenosti bodu B od středu štěrbiny S) je pak roven $(a/2)\sin\theta$.

Tuto analýzu můžeme opakovat pro kteroukoli jinou dvojici paprsků vycházejících z odpovídajících si bodů v obou zónách (např. ze středů zón) a došlých do bodu P_1. Každá taková dvojice paprsků má týž dráhový rozdíl $(a/2)\sin\theta$. Položíme-li tento společný dráhový rozdíl roven $\lambda/2$, dostaneme

$$\frac{a}{2}\sin\theta = \frac{\lambda}{2},$$

tj.

$$a\sin\theta = \lambda \quad \text{(první minimum)}. \tag{37.1}$$

Je-li dána šířka štěrbiny a a vlnová délka λ, dává rov. (37.1) úhel θ prvního tmavého proužku nad (a vzhledem k symetrii) i pod centrální osou.

Všimněme si, že začneme-li s $a > \lambda$, a potom štěrbinu zužujeme ponechávajíce vlnovou délku λ konstantní, úhel prvního tmavého proužku roste. To znamená, že difrakční obrazec od *užší* štěrbiny je *širší*. Pro $a = \lambda$ je úhel prvních tmavých proužků 90°. Poněvadž tyto tmavé proužky lemují centrální jasný proužek, musí tento jasný proužek pokrývat celé pozorovací stínítko.

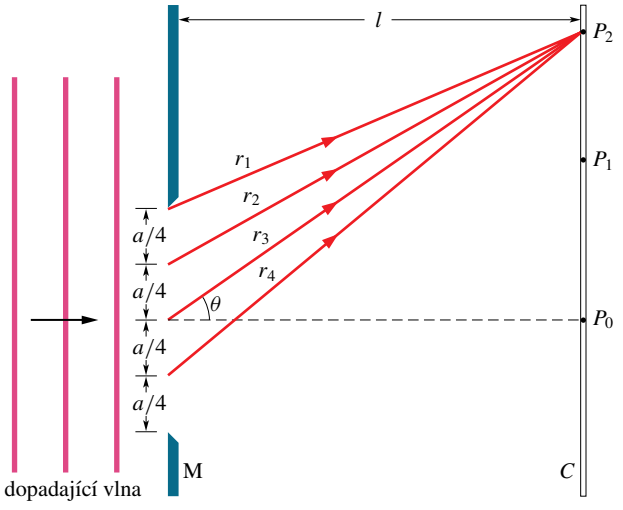
Obdobným způsobem najdeme druhé tmavé proužky nad a pod centrální osou. Rozdíl je pouze v tom, že nyní rozdělíme štěrbinu do *čtyř* zón stejné šířky $a/4$, jak je to vyznačeno na obr. 37.5a. Pak vedeme paprsky r_1, r_2, r_3 a r_4 z horních bodů těchto zón do bodu P_2, jímž prochází druhý tmavý proužek nad centrální osou. Aby tento tmavý proužek vznikl, musí být dráhový rozdíl paprsků r_1 a r_2 jakož i r_2 a r_3 a také r_3 a r_4 roven $\lambda/2$.

Při $l \gg a$ můžeme přibližně považovat tyto čtyři paprsky za rovnoběžné; úhel, který svírají s centrální osou, označíme θ. Abychom vyjádřili dráhové rozdíly, veďme horním bodem každé ze čtyř zón kolmice k paprskům, jak je to naznačeno v obr. 37.5b. Vzniknou tak pravoúhlé trojúhelníky, jejichž jedna strana je vždy hledaným dráhovým rozdílem. Z horního trojúhelníka je vidět, že dráhový rozdíl paprsků r_1 a r_2 je $(a/4)\sin\theta$. Podobně ze spodního trojúhelníka vyplývá, že dráhový rozdíl paprsků r_3 a r_4 je rovněž $(a/4)\sin\theta$. Dráhový rozdíl mezi každou dvojicí paprsků vycházejících z odpovídajících si bodů sousedních zón je vždy $(a/4)\sin\theta$. Poněvadž v každém takovém případě je dráhový rozdíl roven $\lambda/2$, dostáváme

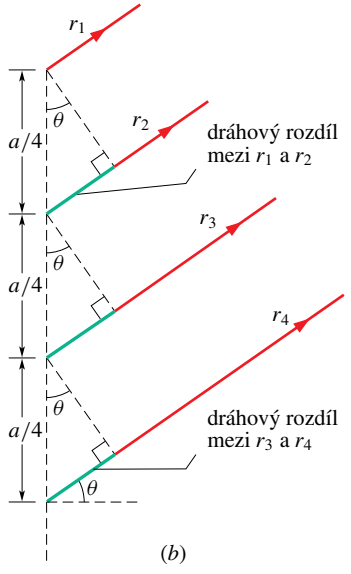
$$\frac{a}{4}\sin\theta = \frac{\lambda}{2},$$

což dává

$$a\sin\theta = 2\lambda \quad \text{(druhé minimum)}. \tag{37.2}$$



(a)



(b)

Obr. 37.5 (a) Vlny z horních bodů čtyř zón o šířce $a/4$ se v bodě P_2 interferencí vyruší. (b) Je-li $l \gg a$, můžeme považovat paprsky r_1, r_2, r_3 a r_4 za rovnoběžné a svírající s centrální osou úhel θ.

Tak bychom mohli pokračovat a hledat polohy tmavých proužků v difrakčním obrazci. Vždy bychom rozdělili štěrbinu na sudý počet stejně širokých zón, takže by bylo možné vytvořit dvojice zón a vlny z nich vycházející by se vyrušily. Shledali bychom, že tmavé proužky lze lokalizovat pomocí této obecné rovnice:

$$a \sin\theta = m\lambda, \qquad \text{kde } m = 1, 2, 3, \ldots$$
$$\text{(minima — tmavé proužky).} \qquad (37.3)$$

Tento výsledek si můžete zapamatovat takto: Nakreslete si trojúhelník podobně jako na obr. 37.4b, avšak pro celou štěrbinu šířky a a všimněte si, že dráhový rozdíl paprsků vycházejících z horního a dolního bodu štěrbiny je roven $a \sin\theta$. Rov. (37.3) tedy říká:

Tmavé proužky při difrakci na štěrbině vznikají tehdy, když dráhový rozdíl $a \sin\theta$ mezi horním a dolním paprskem je roven λ, 2λ, 3λ, …

Může se zdát, že je to špatně, protože vlny odpovídající těmto dvěma konkrétním paprskům jsou navzájem přesně ve fázi. Každá z nich je však také jednou z dvojice vln, jejichž fáze jsou navzájem přesně opačné, takže se vyruší.

Rov. (37.1) až (37.3) jsou odvozeny za předpokladu $l \gg a$. Tyto rovnice však platí také, umístíme-li mezi štěrbinu a pozorovací stínítko spojnou čočku a posuneme-li pozorovací stínítko tak, aby splývalo s ohniskovou rovinou spojky. Paprsky, které nyní docházejí do kteréhokoli bodu stínítka, byly přesně rovnoběžné (a nikoli jen přibližně), když vycházely ze štěrbiny. Jsou jako ony původně rovnoběžné paprsky na obr. 35.13a, které jsou čočkou fokusovány do bodu.

KONTROLA 1: Osvětlíme dlouhou a úzkou štěrbinu modrým světlem a pozorujeme na stínítku difrakční obrazec. Co se stane, jestliže (a) osvětlíme štěrbinu žlutým světlem, nebo (b) zúžíme štěrbinu. Rozšíří se difrakční obrazec na obě strany od jasného centrálního maxima, nebo se zúží?

PŘÍKLAD 37.1

Štěrbina šířky a je osvětlena bílým světlem.

(a) Při které šířce a bude první minimum pro červené světlo o vlnové délce $\lambda = 650\,\text{nm}$ pod úhlem $\theta = 15°$?

ŘEŠENÍ: Pro první minimum je v rov. (37.3) $m = 1$. Vypočteme-li z ní a, dostaneme

$$a = \frac{m\lambda}{\sin\theta} = \frac{(1)(650\,\text{nm})}{\sin 15°}$$
$$= 2\,511\,\text{nm} \doteq 2{,}5\,\mu\text{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Má-li tedy být centrální maximum při bílém dopadajícím světle vymezeno úhlem $\pm 15°$, musí být štěrbina skutečně velmi úzká, zhruba čtyři vlnové délky. Uvědomte si, že jemný lidský vlas má průměr asi $100\,\mu\text{m}$.

(b) Jakou vlnovou délku λ' má světlo, jehož první vedlejší maximum je odchýleno o 15°, tj. koinciduje s prvním minimem červeného světla.

ŘEŠENÍ: Toto maximum je zhruba uprostřed mezi prvním a druhým minimem odpovídajícím vlnové délce λ'. Nedopustíme se velké chyby, když v rov. (37.3) položíme $m = 1{,}5$, takže $a \sin\theta = 1{,}5\lambda'$.

Vypočteme λ', dosadíme známé hodnoty a dostaneme

$$\lambda' = \frac{a \sin\theta}{1{,}5} = \frac{(2\,511\text{ nm}) \sin 15^\circ}{1{,}5} \doteq$$
$$\doteq 430\text{ nm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Světlo o této vlnové délce je fialové. První vedlejší maximum světla o vlnové délce 430 nm bude vždy koincidovat s prvním minimem světla o vlnové délce 650 nm, a to nezávisle na tom, jaká je šířka štěrbiny. Je-li štěrbina relativně úzká, bude úhel θ, pod nímž dochází k tomuto překrytí, relativně velký a naopak.

37.3 INTENZITA PŘI DIFRAKCI NA ŠTĚRBINĚ (KVALITATIVNĚ)

V čl. 37.2 jsme poznali, jak se najdou polohy maxim a minim v difrakčním obrazci na štěrbině. Nyní se budeme věnovat obecnějšímu problému: budeme hledat výraz pro intenzitu I v difrakčním obrazci jako funkci úhlu θ, tj. jako funkci úhlové polohy bodu pozorovacího stínítka.

Za tím účelem rozdělíme štěrbinu na obr. 37.4a na N zón o stejné šířce Δx tak malé, abychom mohli předpokládat, že každá zóna působí jako zdroj Huygensových vlnek. Vlnky došlé do obecného bodu P pozorovacího stínítka složíme, a tím určíme amplitudu E_θ výsledné vlny v bodě P. Úhel θ je opět úhel, který svírá spojnice středu stínítka a bodu P s normálou k rovině štěrbiny. Intenzita světla v bodě P je pak úměrná čtverci amplitudy E_θ. Pro stanovení E_θ potřebujeme znát fázové vztahy mezi vlnkami došlými do bodu P. Fázový rozdíl souvisí s dráhovým rozdílem vztahem

$$\begin{matrix}\text{fázový}\\ \text{rozdíl}\end{matrix} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \begin{matrix}\text{dráhový}\\ \text{rozdíl}\end{matrix}.$$

Dráhový rozdíl dvou vlnek došlých od dvou sousedních zón do bodu P o úhlové souřadnici θ je $\Delta x \sin\theta$. Fázový rozdíl $\Delta\varphi$ dvou vlnek ze sousedních zón je tedy

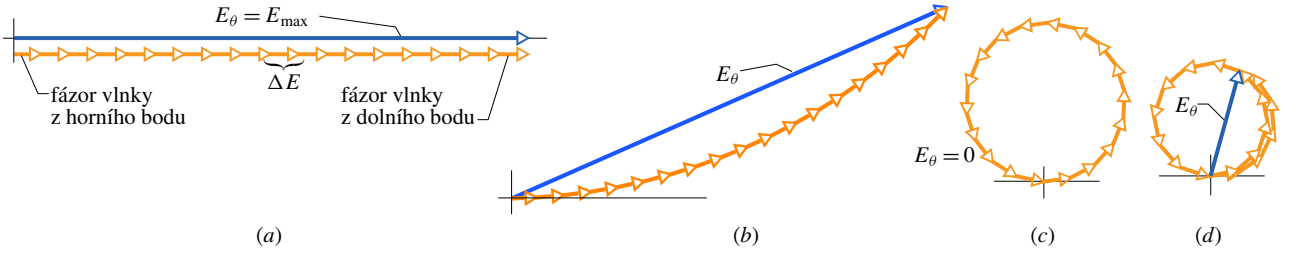
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \sin\theta. \qquad (37.4)$$

Předpokládáme, že všechny vlnky došlé do bodu P mají touž amplitudu ΔE. Abychom nalezli amplitudu E_θ výsledné vlny v bodě P, sečteme amplitudy ΔE jako fázory. Za tím účelem sestavíme diagram N fázorů. Vlnce vycházející z každé zóny štěrbiny přísluší vždy jeden fázor.

V bodě P_0 na ose (tj. $\theta = 0$, obr. 37.4a) je podle rov. (37.4) fázový rozdíl $\Delta\varphi$ nulový. To znamená, že vlnky jsou ve fázi: odpovídající diagram fázorů je na obr. 37.6a. Sousedící fázory představují vlnky od sousedních zón a těsně na sebe navazují. Fázový rozdíl mezi vlnkami je nulový, a proto je úhel mezi každou dvojicí sousedních fázorů nulový. Amplituda E_θ vlny v bodě P_0 je vektorovým součtem těchto fázorů. Toto uspořádání fázorů dává ovšem největší hodnotu amplitudy E_θ. Označíme tuto hodnotu $E_{\max}$; je to tedy hodnota amplitudy E_θ pro $\theta = 0$.

Dále uvažujeme bod P, který je odchýlen od centrální osy o malý úhel θ. Z rov. (37.4) nyní vyplývá, že fázový rozdíl $\Delta\varphi$ mezi vlnkami od sousedních zón už není nulový. Obr. 37.6b ukazuje příslušný fázový diagram. Fázory jsou opět uspořádány těsně za sebou, avšak sousední fázory nyní svírají úhel $\Delta\varphi$. Amplituda E_θ v tomto novém bodě je stále vektorovým součtem fázorů, avšak je menší než amplituda na obr. 37.6a. To znamená, že intenzita světla je v tomto novém bodě P menší než v bodě P_0.

Zvětšujeme-li dále úhel θ, vzrůstá úhel $\Delta\varphi$ mezi sousedními fázory a vznikne situace, kdy se řetěz fázorů úplně uzavře, takže špička posledního fázoru dosáhne počátku prvního fázoru (obr. 37.6c). Amplituda E_θ je nyní nulová, což znamená, že je také nulová intenzita světla. Dosáhli jsme prvního minima — nebo tmavého proužku — difrakčního obrazce. Fázový rozdíl mezi prvním a posledním fázorem je nyní 2π (v radiánech), což znamená, že



Obr. 37.6 Fázorové diagramy pro $N = 18$ fázorů odpovídajících 18 zónám štěrbiny. Výsledné amplitudy E_θ jsou vyznačeny pro (a) centrální maximum P_0 ve směru $\theta = 0$, (b) bod P stínítka v malé úhlové vzdálenosti θ od centrální osy, (c) první minimum a (d) první vedlejší maximum.

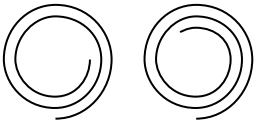
dráhový rozdíl mezi horním a dolním paprskem procházejícím štěrbinou je jedna vlnová délka. Vzpomeňme si, že to je podmínka, kterou jsme nalezli pro první difrakční minimum.

Při dalším růstu úhlu θ roste fázový rozdíl $\Delta\varphi$ mezi sousedními fázory, řetěz fázorů se začne zavíjet do sebe a výsledný závit se začne zmenšovat. Amplituda E_θ nyní vzrůstá, až dosáhne maximální hodnoty při uspořádání znázorněném na obr. 37.6d. Toto uspořádání odpovídá prvnímu vedlejšímu maximu difrakčního obrazce.

Zvětšíme-li θ o trochu víc, způsobí zmenšení závitu pokles amplitudy E_θ, což znamená, že se zmenší také intenzita. Když θ dostatečně vzroste, dosáhne opět špička posledního fázoru počátku prvního fázoru. To odpovídá druhému minimu.

Touto kvalitativní metodou bychom mohli pokračovat a určovat maxima a minima difrakčního obrazce. Budeme se však raději věnovat kvantitativní metodě.

KONTROLA 2: Obrázky představují fázorové diagramy pro body po obou stranách jistého difrakčního maxima. (Ve srovnání s obr. 37.6 jsou tyto diagramy hladší, jsou totiž vytvořeny větším počtem fázorů.) (a) O které maximum jde? (b) Jaká je přibližná hodnota m (v rov. (37.3), jež přísluší tomuto maximu?)



(*a*) (*b*)

37.4 INTENZITA PŘI DIFRAKCI NA ŠTĚRBINĚ (KVANTITATIVNĚ)

Rov. (37.3) určuje polohu minim na stínítku C při difrakci na štěrbině jako funkci úhlu θ (obr. 37.4a). Nyní však chceme odvodit výraz pro intenzitu v difrakčním obrazci jako funkci θ. Konstatujeme a v dalším odvodíme, že tato intenzita je dána výrazem

$$I = I_{\max}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \qquad (37.5)$$

kde

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta. \qquad (37.6)$$

Symbol α pouze zjednodušuje zápis vztahu mezi úhlem θ, který určuje polohu bodu na pozorovacím stínítku, a světelnou intenzitou I_θ v tomto bodě. $I_{\max}$ je největší hodnota intenzity I_θ v difrakčním obrazci a je to intenzita centrálního maxima (pro něž je $\theta = 0$). Symbol φ je fázový rozdíl (v radiánech) mezi vlnkami vycházejícími z horního a dolního bodu štěrbiny.

Rozbor rov. (37.5) ukazuje, že minima intenzity se objevují, když

$$\alpha = m\pi, \quad \text{kde } m = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (37.7)$$

Dosadíme-li tento výsledek do rov. (37.6), shledáme, že

$$m\pi = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta, \quad \text{kde } m = 1, 2, 3, \ldots,$$

nebo

$$a\sin\theta = m\lambda, \quad \text{kde } m = 1, 2, 3, \ldots$$
$$\text{(minima — tmavé proužky)}, \qquad (37.8)$$

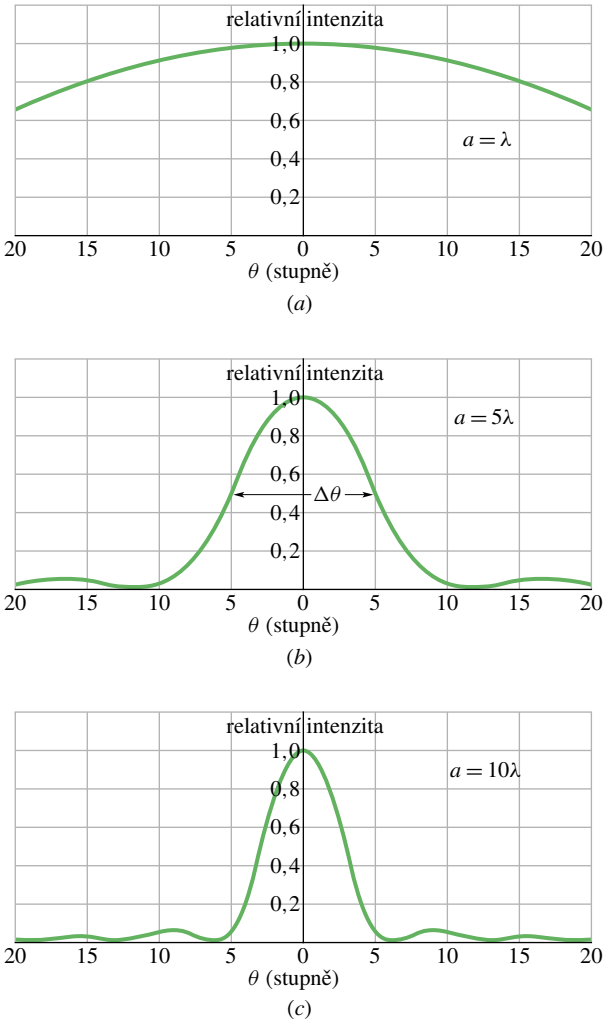
což je přesně rov. (37.3), tj. podmínka pro polohy minim, kterou jsme odvodili dříve.

Obr. 37.7 ukazuje grafy rozložení intenzity v difrakčním obrazci štěrbiny vypočtené z rov. (37.5) a (37.6) pro tři šířky štěrbiny: $a = \lambda$, $a = 5\lambda$ a $a = 10\lambda$. Všimněte si, že s rozšiřováním štěrbiny (v poměru k vlnové délce) se zužuje centrální difrakční maximum. To znamená, že světlo je štěrbinou méně úhlově vychylováno. Vedlejší maxima se rovněž zužují. V limitě, když šířka a štěrbiny je mnohem větší než vlnová délka λ, vedlejší maxima vymizí, neboť splynou s centrálním maximem. (Difrakce však nastává i v tomto případě, a to na okrajích široké štěrbiny; podobá se difrakci na hranách žiletky v obr. 37.2.)

Odvození rov. (37.5) a (37.6)

Oblouk fázorů na obr. 37.8 představuje vlnky, které došly do obecného bodu P pozorovacího stínítka (obr. 37.4), jemuž přísluší určitý malý úhel θ. Amplituda E_θ výsledné vlny v bodě P je vektorovým součtem těchto fázorů. Rozdělíme-li štěrbinu na obr. 37.4 do infinitezimálních zón šířky Δx, bude se oblouk fázorů na obr. 37.8 blížit oblouku kružnice o poloměru R, jak je vyznačeno v obrázku. Délka oblouku musí být $E_{\max}$, což je amplituda ve středu difrakčního obrazce. Kdybychom totiž tento oblouk napřímili, dostali bychom uspořádání fázorů podle obr. 37.6a (srov. obr. 37.8).

Úhel φ v dolní části obr. 37.8 je fázový rozdíl mezi infinitezimálními vektory na levé a pravé straně oblouku $E_{\max}$. Z geometrie vyplývá, že je to také úhel φ mezi oběma poloměry R zakreslenými v obr. 37.8. Čárkovaná čára v obrázku



Obr. 37.7 Relativní intenzita při difrakci na štěrbině pro tři různé poměry a/λ. Čím širší je štěrbina, tím užší je centrální difrakční maximum.

pak vytváří dva shodné pravoúhlé trojúhelníky s úhlem $\frac{1}{2}\varphi$. Z nich je zřejmé, že

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{E_\theta}{2R}. \tag{37.9}$$

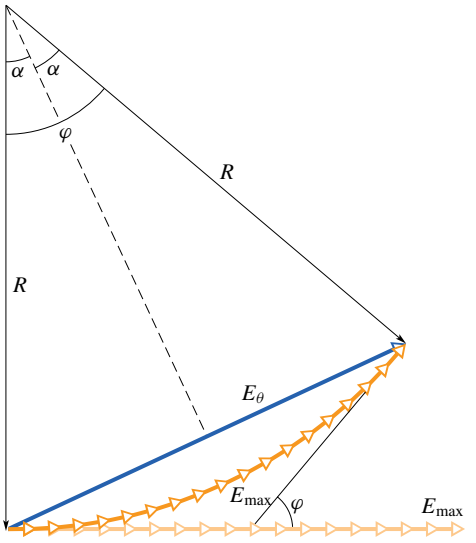
Považujeme-li $E_{\max}$ za kruhový oblouk, platí v obloukové míře

$$\varphi = \frac{E_{\max}}{R}.$$

Vypočteme-li z této rovnice R a dosadíme do rov. (37.9), dostaneme po úpravě

$$E_\theta = \frac{E_{\max}}{\frac{1}{2}\varphi}\sin\tfrac{1}{2}\varphi. \tag{37.10}$$

V kap. 34.4 jsme viděli, že intenzita elektromagnetické vlny je úměrná čtverci amplitudy jejího elektrického pole.



Obr. 37.8 Konstrukce použitá k výpočtu intenzity v difrakci na štěrbině. Nakreslená situace odpovídá obr. 37.6b.

Zde to znamená, že maximum intenzity $I_{\max}$ (ve středu difrakčního obrazce) je úměrné $E_{\max}^2$ a intenzita I pod úhlem θ je úměrná E_θ^2. Platí tedy

$$\frac{I}{I_{\max}} = \frac{E_\theta^2}{E_{\max}^2}. \tag{37.11}$$

Dosadíme-li za E_θ z rov. (37.10) a položíme-li $\alpha = \frac{1}{2}\varphi$, dospíváme k následujícímu výrazu pro intenzitu jako funkci θ:

$$I = I_{\max}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2.$$

Ale to je právě rov. (37.5), jedna ze dvou rovnic, které jsme chtěli odvodit.

Druhá rovnice, kterou chceme odvodit, určuje vztah mezi α a θ. Podle rov. (37.4) souvisí fázový rozdíl mezi vlnkami z nejvyššího a nejnižšího bodu štěrbiny s příslušným dráhovým rozdílem podle vztahu

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta,$$

kde a je součet šířek Δx infinitezimálních proužků. Protože však platí $\varphi = 2\alpha$, dostáváme rov. (37.6).

PŘÍKLAD 37.2

Vypočtěte intenzity prvních tří vedlejších maxim v difrakčním obrazci od štěrbiny na obr. 37.1 vyjádřené v poměru k hlavnímu centrálnímu maximu.

ŘEŠENÍ: Vedlejší maxima jsou přibližně uprostřed mezi minimy, jejichž polohy udává rov. (37.7) ($\alpha = m\pi$). Polohám vedlejších maxim tedy přibližně odpovídá

$$\alpha = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\pi, \qquad \text{kde } m = 1, 2, 3, \ldots$$

a α je vyjádřeno v radiánech. Dosadíme-li tento výsledek do rov. (37.5), dostaneme

$$\frac{I}{I_{\max}} = \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)^2,$$

$$\text{kde } m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Prvnímu vedlejšímu maximu odpovídá $m = 1$ a jeho relativní intenzita je

$$\frac{I_1}{I_{\max}} = \left(\frac{\sin\left(1+\frac{1}{2}\right)\pi}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)^2 = \left(\frac{\sin 1{,}5\pi}{1{,}5\pi}\right)^2 =$$

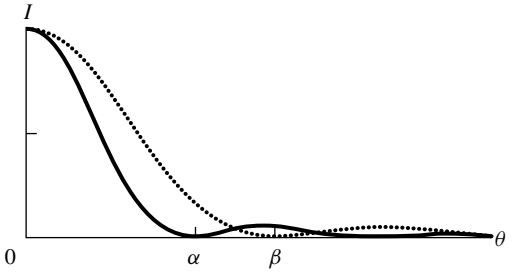
$$= 4{,}503\cdot 10^{-2} \doteq 4{,}5\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pro $m = 2$ a $m = 3$ najdeme

$$\frac{I_2}{I_{\max}} = 1{,}6\,\% \quad \text{a} \quad \frac{I_3}{I_{\max}} = 0{,}83\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

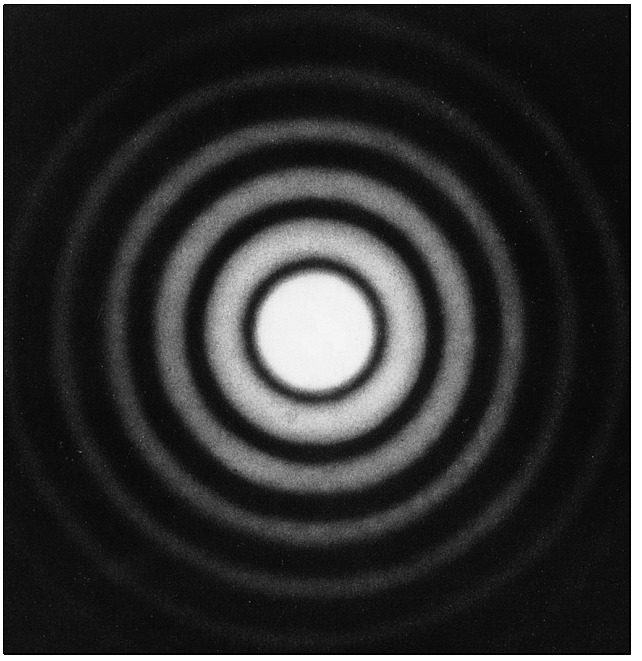
Intenzita dalších vedlejších maxim rychle klesá. Aby byla viditelná vedlejší maxima na obr. 37.1, byl difrakční obrazec úmyslně přeexponován.

KONTROLA 3: Difrakce na štěrbině byla provedena dvakrát: poprvé vlnovou délkou 650 nm, podruhé 430 nm. Grafy intenzity I jako funkce úhlu θ jsou pro oba difrakční obrazce vyneseny na obrázku. Jakou barvu budeme pozorovat (a) pod úhlem α a (b) pod úhlem β, použijeme-li obou vlnových délek současně?



37.5 DIFRAKCE NA KRUHOVÉM OTVORU

Budeme se nyní zabývat difrakcí na kruhové *apertuře*, tj. na kruhovém otvoru, jaký tvoří např. okraj kruhové čočky, jíž prochází světlo. Obr. 37.9 ukazuje obraz vzdáleného bodového zdroje (např. hvězdy) vzniklý na fotografickém filmu umístěném v ohniskové rovině spojné čočky. Obrazem není bod, jak by naznačovaly úvahy založené na geometrické optice, ale kruhový disk obklopený několika sekundárními kroužky, jejichž intenzita postupně slábne. Porovnání s obr. 37.1 nás nenechává na pochybách, že máme co činit s difrakčním jevem. Zde je však otvorem kruh o průměru d, a ne pravoúhlá štěrbina.



Obr. 37.9 Difrakční obrazec na kruhovém otvoru. Všimněte si centrálního maxima a kruhových sekundárních maxim. Tato sekundární maxima jsou mnohem slabší než centrální maximum. Snímek musel být přeexponován, aby vedlejší maxima na obrázku byla patrná.

Analýza těchto obrazců je složitá. Ukazuje se však, že první minimum difrakčního obrazce na kruhovém otvoru o průměru d nastává, když

$$\sin\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{d} \qquad \begin{matrix}\text{(1. minimum;}\\ \text{kruhový otvor).}\end{matrix} \qquad (37.12)$$

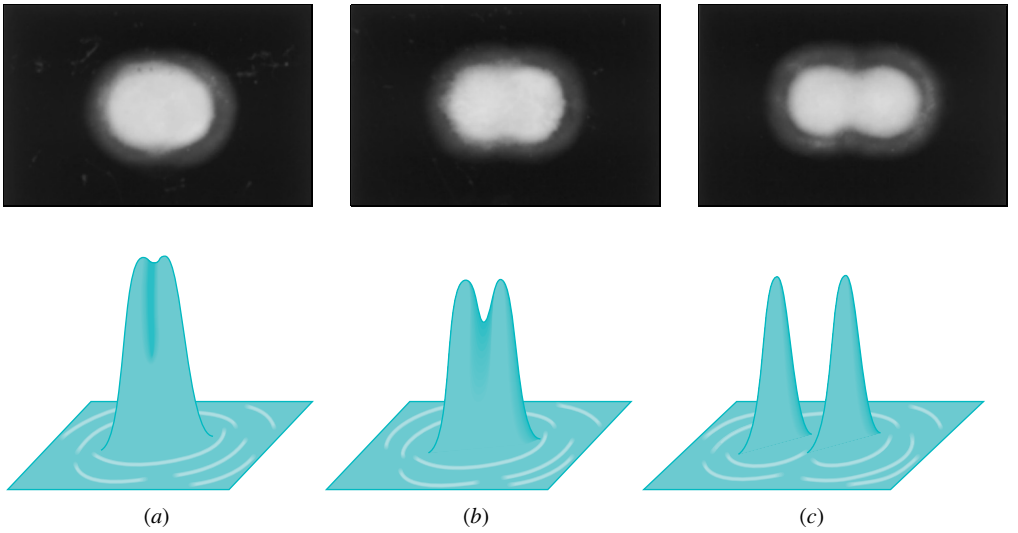
Porovnejme to s rov. (37.1)

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a} \qquad \begin{matrix}\text{(1. minimum;}\\ \text{štěrbina),}\end{matrix} \qquad (37.13)$$

která udává polohu prvního minima v difrakčním obrazci na dlouhé a úzké štěrbině šířky a. Hlavním rozdílem je faktor 1,22, který souvisí s kruhovým tvarem otvoru.

Rozlišení

Obrazy vytvořené čočkou jsou difrakčními obrazci. To je významné, chceme-li rozlišit dva vzdálené bodové objekty,



Obr. 37.10 Nahoře jsou obrazy dvou bodových zdrojů (hvězd) vytvořené spojkou. Dole jsou odpovídající rozložení intenzity. V (a) je úhlová vzdálenost zdrojů tak malá, že je nelze rozlišit, v (b) je lze rozlišit tak tak a v (c) jsou již rozlišeny zřetelně. Rayleighovo kritérium je splněno v případě (b), kdy centrální maximum jednoho difrakčního obrazce koinciduje s prvním minimem druhého.

jejichž úhlová vzdálenost je malá. Obr. 37.10 ukazuje fotografie a odpovídající rozložení intenzity v obrazech dvou vzdálených bodových objektů (např. hvězd), jejichž úhlová vzdálenost je malá. V obr. 37.10a nejsou objekty rozlišeny, neboť tomu brání difrakce. Difrakční obrazce obou objektů se totiž překrývají do té míry, že nelze rozeznat, jde-li o jeden objekt nebo o dva. V obr. 37.10b jsou objekty tak právě rozlišeny a v obr. 37.10c jsou zcela rozlišeny.

V obr. 37.10b je úhlová vzdálenost oněch dvou zdrojů taková, že centrální maximum difrakčního obrazce jednoho zdroje je v místě prvního minima difrakčního obrazce druhého zdroje. Této podmínce se říká **Rayleighovo kritérium** rozlišení. Z rov. (37.12) vyplývá, že dva objekty, které jsou podle tohoto kritéria právě rozlišeny, musejí mít úhlovou vzdálenost θ_R danou výrazem

$$\theta_R = \arcsin \frac{1{,}22\lambda}{d}.$$

Poněvadž jde o malé úhly, můžeme nahradit $\sin\theta_R$ úhlem θ_R vyjádřeným v radiánech:

$$\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{d} \quad \text{(Rayleighovo kritérium).} \qquad (37.14)$$

Rayleighovo kritérium rozlišení je pouhou aproximací, neboť rozlišení závisí na mnoha faktorech, např. na poměru jasu zdrojů a jejich okolí, na turbulenci vzduchu mezi zdroji a pozorovatelem a na kvalitě pozorovatelova zraku. Při výpočtech, které budou následovat, však budeme pro jednoduchost považovat rov. (37.14) za přesné kritérium: Je-li úhlová vzdálenost θ zdrojů větší než θ_R, rozlišíme oba zdroje od sebe, je-li menší, nemůžeme je rozlišit.

Chceme-li použít čočky k rozlišení objektů úhlově od sebe málo vzdálených, je žádoucí, aby difrakční obrazec byl co nejmenší. Podle rov. (37.14) toho lze dosáhnout jednak zvětšením průměru čočky, jednak použitím světla s menší vlnovou délkou.

Z tohoto důvodu se v mikroskopii často používá ultrafialového světla. Má kratší vlnovou délku, a proto umožňuje pozorovat jemnější detaily, než by bylo možné pozorovat týmž mikroskopem za použití viditelného světla. V kap. 40 pojednáme o tom, že svazky elektronů se za jistých okolností chovají jako vlny. V *elektronovém mikroskopu* mohou mít tyto svazky vlnovou délku o pět řádů kratší, než je vlnová délka viditelného světla. Elektronovým mikroskopem lze proto studovat detaily, které by byly zastřeny



Tento obrázek, získaný špionážní družicí a publikovaný v roce 1984, ukazuje konstrukci sovětské mateřské letadlové lodi. Obrázek byl „vyčištěn“ počítačem, tj. byly odstraněny difrakční jevy a zlepšeno rozlišení. Na současných obrázcích ze špionážních družic lze rozlišit ještě mnohem menší detaily.

difrakčními efekty, kdybychom použili optického mikroskopu. Příklad je na obr. 37.11.



Obr. 37.11 Snímek roztoče na zádech blechy ježka získaný rastrovacím elektronovým mikroskopem. Barvy jsou umělé.

PŘÍKLAD 37.3

Kruhová spojná čočka o průměru $d = 32\,\text{mm}$ a s ohniskovou vzdáleností $f = 24\,\text{cm}$ vytváří ve své ohniskové rovině obrazy vzdálených bodových objektů. Používá se světla o vlnové délce $\lambda = 550\,\text{nm}$.

(a) Bereme v úvahu difrakci na apertuře čočky. Jakou úhlovou vzdálenost musejí mít dva bodové objekty, aby splňovaly Rayleighovo kritérium rozlišení?

ŘEŠENÍ: Na obr. 37.12 jsou dva vzdálené bodové zdroje P_1 a P_2, čočka a pozorovací stínítko v ohniskové rovině čočky. Vpravo je vynesena intenzita I jako funkce polohy na stínítku. Úhlová vzdálenost θ_0 objektů je rovna úhlové vzdálenosti θ_i obrazů. Mají-li tedy obrazy splňovat Rayleighovo kritérium rozlišení, musejí být úhlové vzdálenosti po obou stranách čočky dány rov. (37.14) (za předpokladu malých úhlů). Dosadíme-li zadané hodnoty, dostaneme z rov. (37.14)

$$\theta_0 = \theta_i = \theta_R = 1{,}22\frac{\lambda}{d} = \frac{1{,}22(550\cdot10^{-9}\,\text{m})}{(32\cdot10^{-3}\,\text{m})} = 2{,}1\cdot10^{-5}\,\text{rad}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Při této úhlové vzdálenosti leží centrální maximum jedné z křivek intenzity na obr. 37.12 v prvním minimu druhé křivky.

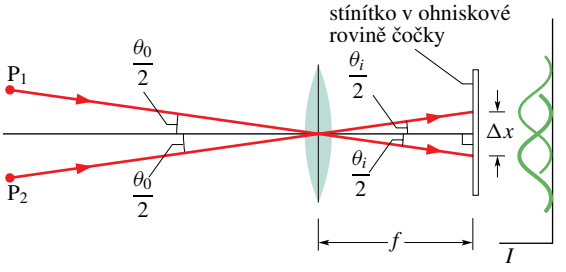
(b) Jaká je vzdálenost Δx středů obrazů v ohniskové rovině? (Jinými slovy, jaká je vzdálenost centrálních maxim obou křivek?)

ŘEŠENÍ: Z kteréhokoli z obou trojúhelníků mezi čočkou a stínítkem na obr. 37.12 je vidět, že $\text{tg}\,\theta_i/2 = \Delta x/(2f)$. Úpravou a aproximací $\text{tg}\,\theta \doteq \theta$ dostáváme

$$\Delta x = f\theta_i, \qquad (37.15)$$

kde θ_i je v radiánech. Dosazením konkrétních hodnot příslušných veličin dostaneme:

$$\Delta x = (0{,}24\,\text{m})(2{,}1\cdot10^{-5}\,\text{rad}) = 5{,}0\,\mu\text{m}. \quad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 37.12 Příklad 37.3. Světlo ze dvou vzdálených bodových objektů P_1 a P_2 prochází spojnou čočkou a vytváří na stínítku v ohniskové rovině čočky obrazy obou objektů. V obrázku je zakreslen pouze jeden reprezentativní paprsek z každého objektu. Obrazy nejsou body, ale difrakční obrazce a rozložení intenzity v nich je přibližně vyznačeno v pravé části obrázku. Úhlová vzdálenost objektů je θ_0 a úhlová vzdálenost obrazu je θ_i; vzdálenost mezi centrálními maximy obrazů je Δx.

PŘÍKLAD 37.4

Považujme barevné tečky v Seuratově obrazu *Nedělní odpoledne na ostrově La Grande Jatte* za kolečka, která jsou těsně u sebe a jejichž středy mají vzdálenost $l = 2{,}0\,\text{mm}$ (obr. 37.13). Předpokládejme, že pupila oka má průměr $d = 1{,}5\,\text{mm}$. Z jaké nejmenší pozorovací vzdálenosti už nelze rozlišit jednotlivé barevné tečky obrazu?



Obr. 37.13 Příklad 37.4. Model teček v Seuratově obrazu

ŘEŠENÍ: Vezměme v úvahu libovolné dvě sousedící tečky, které lze rozlišit, jsme-li blízko obrazu. Vzdalujeme-li se od obrazu, jsme schopni rozeznat tečky, dokud jejich úhlová

vzdálenost θ neklesne pod hodnotu danou Rayleighovým kritériem (rov. (37.14)):

$$\theta_R = 1{,}22\frac{\lambda}{d}. \qquad (37.16)$$

Poněvadž úhlové vzdálenosti jsou malé, můžeme nahradit $\sin\theta$ úhlem θ a psát

$$\theta = \frac{l}{h}, \qquad (37.17)$$

kde h je vzdálenost našeho oka od teček.

Položíme θ v rov. (37.17) rovno θ_R v rov. (37.16) a vypočteme h. Dostaneme

$$h = \frac{ld}{1{,}22\lambda}. \qquad (37.18)$$

Rov. (37.18) říká, že h je větší pro menší λ. Vzdalujeme-li se tedy od obrazu, jsou sousedící červené tečky (v důsledku delší vlnové délky) nerozeznatelné dříve než sousedící modré tečky. Chceme-li tedy stanovit nejmenší vzdálenost, ze které nevidíme rozlišeny *žádné* barevné tečky, dosadíme do rov. (37.18) $\lambda = 400$ nm (modré nebo fialové světlo) a zadané hodnoty. Vypočteme, že

$$h = \frac{(2{,}0\cdot10^{-3}\text{ m})(1{,}5\cdot10^{-3}\text{ m})}{1{,}22(400\cdot10^{-9}\text{ m})} = 6{,}1\text{ m}. \text{ (Odpověď)}$$

V této nebo větší vzdálenosti se barvy všech sousedících teček navzájem mísí. Barva, kterou vnímáme v místě kterékoli tečky na obrazu, je smíšená barva, která ve skutečnosti v tomto místě nemusí vůbec být. Jinými slovy, Seurat využívá očí pozorovatele k tomu, aby si dotvořily barvy jeho díla.

KONTROLA 4: Předpokládejme, že difrakce na pupile vašeho oka způsobuje, že jste jen tak tak schopen rozlišit dvě červené tečky. Zesílíte-li osvětlení ve svém okolí, průměr pupily se zmenší. Zlepší se pak rozlišitelnost teček, nebo se zhorší? Berte v úvahu pouze difrakci. (Svou odpověď můžete podložit experimentem.)

37.6 DIFRAKCE NA DVOJŠTĚRBINĚ

Při pokusech s dvojštěrbinou v kap. 36 jsme mlčky předpokládali, že štěrbiny jsou úzké ve srovnání s vlnovou délkou světla, které je osvětluje, tj. $a \ll \lambda$. Při tak úzkých štěrbinách zaujímá centrální maximum difrakčního obrazce každé z obou štěrbin celé pozorovací stínítko. Všechny světlé interferenční proužky, které při interferenci světla od takových dvou štěrbin vzniknou, pak mají přibližně stejnou intenzitu (obr. 36.9).

Při pokusech s viditelným světlem však nebývá podmínka $a \ll \lambda$ splněna. Jsou-li štěrbiny poměrně široké, vznikají při interferenci světla od dvou štěrbin světlé proužky, které nemají stejnou intenzitu. Intenzita proužků je ve skutečnosti modifikována difrakcí světla na každé ze štěrbin.

Na obr. 37.14a je jako příklad vyneseno rozložení intenzity, které by odpovídalo interferenčnímu obrazci od dvou štěrbin, kdyby byly obě štěrbiny nekonečně tenké (a tím $a \ll \lambda$); všechny světlé proužky by měly touž intenzitu. Rozložení intenzity na obr. 37.14b odpovídá difrakčnímu obrazci od jedné štěrbiny, která má konečnou šířku. Difrakční obrazec má široké centrální maximum a slabší vedlejší maxima v blízkosti $\pm17°$. Graf na obr. 37.14c představuje výsledný interferenční obrazec od dvou štěrbin konečné šířky. Graf byl sestrojen tak, že křivka na obr. 37.14b posloužila jako obálka grafu intenzity na obr. 37.14a. Polohy proužků zůstávají nezměněny, mění se pouze intenzita.

Obr. 37.15a ukazuje skutečný obrazec, v němž je zřejmá jak interference od dvou štěrbin, tak difrakce na štěrbině. Je-li jedna ze štěrbin zakryta, vznikne difrakční obrazec příslušející jedné štěrbině, jenž je reprodukován na obr. 37.15b. Všimněte si souvislosti mezi obr. 37.15a a 37.14c a mezi obr. 37.15b a 37.14b. Při porovnávání těchto obrázků nezapomeňte, že obr. 37.15 byl úmyslně přeexponován, aby byla zviditelněna slabá vedlejší maxima, a že na obrázku jsou zachycena dvě vedlejší maxima (nikoli jen jedno).

Vezmeme-li v úvahu difrakční jevy, je intenzita v interferenčním obrazci od dvojštěrbiny charakterizována výrazem

$$I = I_{max}(\cos^2\beta)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \quad \text{(dvojštěrbina)}, \qquad (37.19)$$

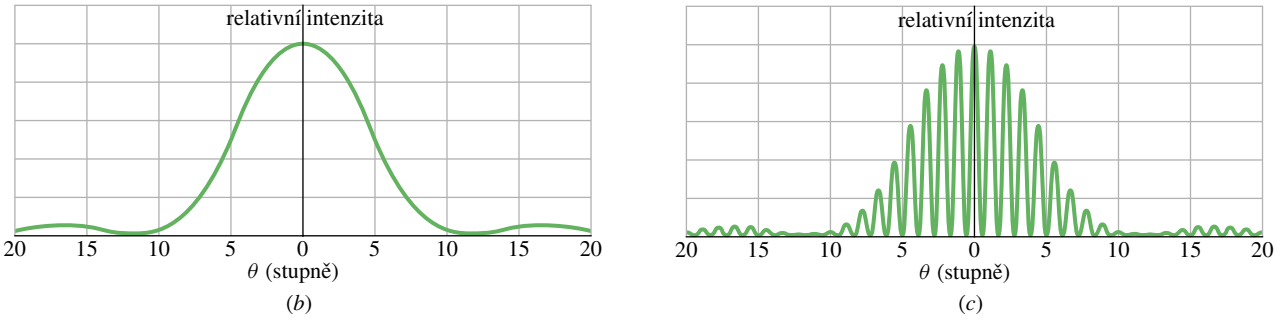
kde

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta \qquad (37.20)$$

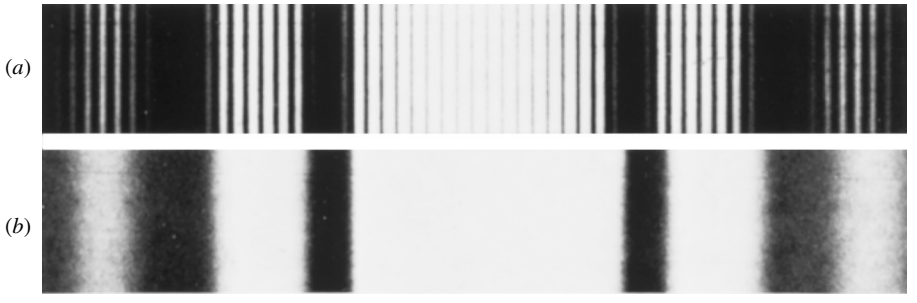
a

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta. \qquad (37.21)$$

Zde d je vzdálenost středů štěrbin a a je šířka štěrbin. Věnujte pozornost tomu, že pravá strana rov. (37.19) je součinem maximální intenzity I_{max} a dalších dvou faktorů: (1) *Interferenční faktor* $\cos^2\beta$ pochází od interference světla na dvou štěrbinách, mezi nimiž je vzdálenost d (srov. rov. (36.21) a (36.22)). (2) *Difrakční faktor* $(\sin\alpha/\alpha)^2$ charakterizuje difrakci na jedné štěrbině šířky a (srov. rov. (37.5) a (37.6)).



Obr. 37.14 (a) Rozložení intenzity ve dvojštěrbinovém interferenčním obrazci při velmi úzkých štěrbinách. (b) Rozložení intenzity při difrakci na štěrbině, jejíž šířka a není velmi malá. (c) Rozložení intenzity při difrakci na dvou štěrbinách šířky a. Křivka v obr. (b) působí jako obálka. Omezuje totiž intenzitu dvojštěrbinových proužků v obr. (a). Všimněte si, že první minima difrakčního obrazce v (b) potlačují dvojštěrbinové interferenční proužky, které by byly v obr. (c) v okolí 12°.



Obr. 37.15 (a) Interferenční proužky od soustavy dvou štěrbin. Porovnejte s obr. 37.14c. (b) Difrakční obrazec od jedné štěrbiny. Porovnejte s obr. 37.14b.

Analyzujme tyto faktory. Je-li např. v rov. (37.21) $a \to 0$, je $\alpha \to 0$ a $(\sin\alpha)/\alpha \to 1$. Rov. (37.19) se pak redukuje na rovnici charakterizující interferenční obrazec od dvou velmi úzkých štěrbin s roztečí d. Podobně položíme-li v rov. (37.20) $d = 0$, znamená to fyzikálně, že obě štěrbiny splynou v jednu štěrbinu šířky a. Z rov. (37.20) plyne, že $\beta = 0$ a tedy $\cos^2\beta = 1$. V tomto případě se rov. (37.19) redukuje na rovnici charakterizující difrakční obrazec od jedné štěrbiny šířky a.

V difrakčním obrazci od dvojštěrbiny popsaném rovnicí (37.19) a ilustrovaném obr. 37.15a se prolíná interference a difrakce. Oběma těmito pojmy označujeme jevy, jejichž podstatou je superpozice: V určitém bodě skládáme vlny s různou fází. Skládáme-li vlny vycházející z konečného (a obvykle malého) počtu elementárních koherentních zdrojů — jako při pokusech s dvojštěrbinou s $a \ll \lambda$ — mluvíme o *interferenci*. Skládáme-li vlny vycházející z jedné vlnoplochy — jako při pokusech s jednou štěrbinou — mluvíme o *difrakci*. Toto rozlišování interference a difrakce (poněkud umělé a ne vždy dodržované) je docela vhodné, nesmíme však zapomínat, že oba superpoziční jevy bývají přítomny současně (jako např. na obr. 37.15a).

PŘÍKLAD 37.5

Při experimentování s dvojštěrbinou je rozteč štěrbin $d = 19{,}44\,\mu\text{m}$, šířka štěrbin $a = 4{,}050\,\mu\text{m}$ a světlo má vlnovou délku $\lambda = 405\,\text{nm}$.

(a) Kolik světlých proužků je uvnitř centrálního proužku difrakční obálky?

ŘEŠENÍ: Centrální proužek je vymezen prvními difrakčními minimy, jejichž úhlovou polohu θ udává rov. (37.3) při $m = 1$:

$$a \sin\theta = \lambda. \qquad (37.22)$$

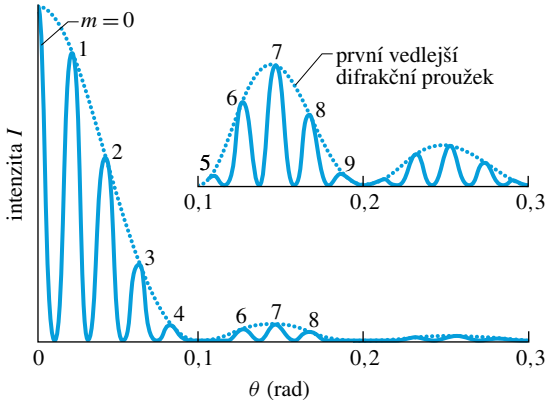
Polohy světlých proužků v interferenčním obrazci od dvojštěrbiny udává rov. (36.14):

$$d \sin\theta = m\lambda, \text{ kde } m = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (37.23)$$

Vydělením rov. (37.23) a (37.22) dostaneme hodnotu m interferenčního proužku, který koinciduje s prvním difrakčním minimem difrakčního obrazce od jedné štěrbiny. Dosadíme-li do tohoto podílu zadané hodnoty, dostaneme

$$m = \frac{d}{a} = \frac{(19{,}44\ \mu\text{m})}{(4{,}050\ \mu\text{m})} = 4{,}8.$$

První difrakční minimum je tedy těsně před interferenčním proužkem s $m = 5$. V rozmezí centrálního difrakčního proužku máme centrální světlý proužek ($m = 0$) a čtyři světlé proužky (až do $m = 4$) po obou jeho stranách. Celkem je tedy uvnitř centrálního difrakčního proužku devět interferenčních proužků interferenčního obrazce od dvojštěrbiny. Obr. 37.16 ukazuje světlé proužky po jedné straně centrálního světlého proužku.



Obr. 37.16 Příklad 37.5. Rozložení intenzity v pravé polovině dvojštěrbinového interferenčního experimentu. Difrakční obálka je vyznačena tečkami. Vložený graf ukazuje (svisle roztažené) rozložení intenzity v prvním a druhém vedlejším difrakčním proužku.

(b) Kolik světlých interferenčních proužků je v oblasti vymezené prvními vedlejšími proužky difrakční obálky?

ŘEŠENÍ: Vnější hranici prvních vedlejších difrakčních proužků tvoří druhá difrakční minima. Úhlovou polohu θ těchto minim dává rov. (37.3) pro $m = 2$:

$$a \sin\theta = 2\lambda. \qquad (37.24)$$

Vydělením rov. (37.23) a (37.24) zjistíme, že

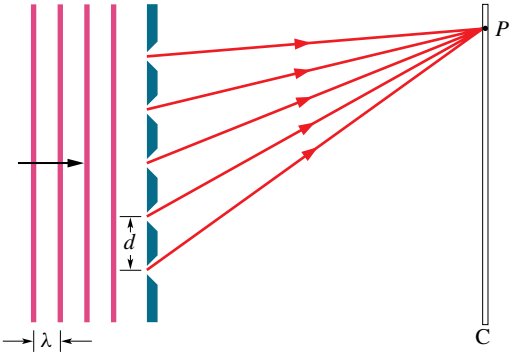
$$m = \frac{2d}{a} = \frac{2(19{,}44\ \mu\text{m})}{(4{,}050\ \mu\text{m})} = 9{,}6.$$

Z toho vyplývá, že druhé difrakční minimum se nalézá těsně před světlým interferenčním proužkem, jehož poloha je dána rov. (37.23) s $m = 10$. V prvním difrakčním proužku máme tedy interferenční proužky od $m = 5$ do $m = 9$, tj. celkem 5 světlých proužků interferenčního obrazce od dvojštěrbiny. (Jsou ukázány ve vloženém grafu na obr. 37.16.) Světlý interferenční proužek s $m = 5$ je však téměř potlačen prvním difrakčním minimem a je příliš nezřetelný, takže jej nebudeme počítat. Uvnitř prvního vedlejšího difrakčního proužku jsou tedy jen čtyři světlé interferenční proužky.

KONTROLA 5: Co se stane, zvětšíme-li vlnovou délku světla v př. 37.5 na 550 nm: zvětší se, zmenší se, nebo se nezmění (a) šířka centrálního difrakčního proužku a (b) počet světlých interferenčních proužků uvnitř centrálního difrakčního proužku?

37.7 DIFRAKČNÍ MŘÍŽKY

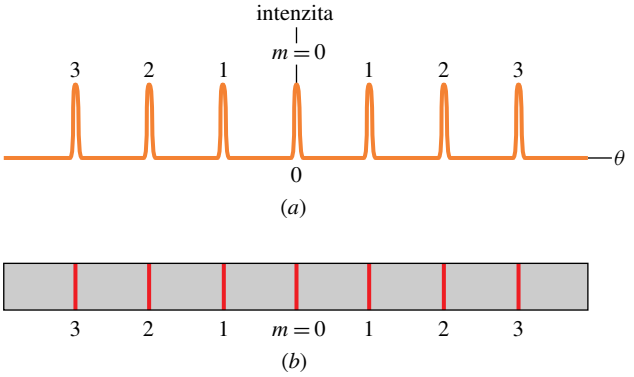
Při studiu světla a objektů, které světlo emitují nebo pohlcují, je jedním z nejužitečnějších nástrojů **difrakční mřížka**. V porovnání s dvojštěrbinou na obr. 36.8 má toto zařízení mnohem větší počet N štěrbin, jimž se často říká vrypy; někdy je jich dokonce několik tisíc na milimetru. Idealizovaná mřížka tvořená pouze pěti štěrbinami je znázorněna na obr. 37.17. Prochází-li štěrbinami monochromatické světlo, vznikají úzké interferenční proužky, jichž lze využít ke stanovení vlnové délky světla. (Difrakční mřížky mohou být také tvořeny rovnoběžnými zářezy v nepropustném materiálu uspořádanými podobně jako štěrbiny na obr. 37.17. Světlo pak neprochází prázdnými štěrbinami, ale je rozptylováno zářezy zpět a interferenční proužky vytváří na straně dopadajícího světla.)



Obr. 37.17 Idealizovaná difrakční mřížka tvořená pouze pěti štěrbinami. Na vzdáleném stínítku C vzniká interferenční obrazec.

Představme si, že na mřížku dopadá monochromatické světlo a že postupně zvyšujeme počet štěrbin od dvou až po nějaké velké číslo N. Rozložení intenzity se přitom vyvíjí od typického obrazce odpovídajícího dvojštěrbině (obr. 37.14c) přes mnohem komplikovanější obrazec až

k jednoduchému obrazci nakreslenému na obr. 37.18a. Maxima jsou velmi úzká (proto se nazývají *čáry*) a jsou oddělena poměrně širokými tmavými oblastmi. Obr. 37.18b ukazuje, co bychom viděli na stínítku, kdybychom použili červeného světla helium-neonového laseru.

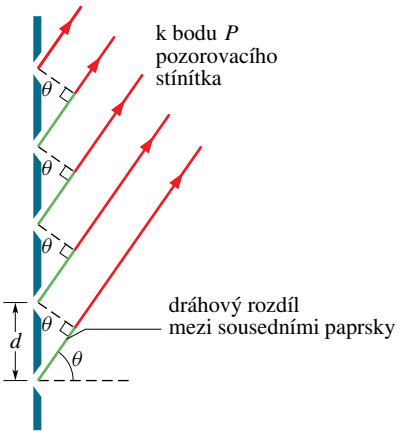


Obr. 37.18 (a) Rozložení intenzity vytvořené difrakční mřížkou s velkým počtem štěrbin má tvar úzkých píků. Na obrázku jsou označeny číslem m, které udává řád píku. (b) Odpovídající světlé proužky, které pozorujeme na stínítku, se nazývají čáry. Jsou rovněž označeny číslem m. Obrázek ukazuje nultý, první, druhý a třetí řád.

Použijeme nyní známé procedury, abychom nalezli úhlové polohy světlých čar na stínítku. Budeme předpokládat, že toto stínítko je tak daleko od mřížky, že paprsky přicházející do určitého bodu P stínítka byly přibližně rovnoběžné, když vycházely z mřížky (obr. 37.19). Na každou dvojici sousedních štěrbin použijeme touž úvahu, kterou jsme použili při interferencích od dvojštěrbiny. Vzdálenost d mezi štěrbinami se nazývá *mřížková konstanta*. (Zaujímá-li N štěrbin šířku w, je $d = w/(N-1)$.) Dráhový rozdíl sousedních paprsků je opět $d \sin\theta$ (obr. 37.19), kde θ je úhel mezi centrální osou mřížky a směrem vedoucím k bodu P. V místě P je světlá čára tehdy, když dráhový rozdíl sousedních paprsků je celistvý násobek vlnové délky, tj. když

$$d \sin\theta = m\lambda, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(maxima — čáry)}, \tag{37.25}$$

kde λ je vlnová délka světla. Každé celé číslo m představuje určitou čáru a můžeme ho proto použít k jejímu označení jako na obr. 37.18. Tato celá čísla pak nazýváme *čísla řádu* a čáry se označují jako čára nultého řádu (centrální čára s $m = 0$), čára prvního řádu, čára druhého řádu atd.



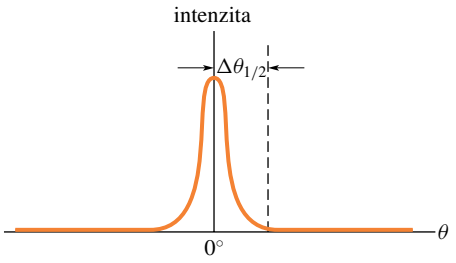
Obr. 37.19 Paprsky jdoucí ze štěrbin difrakční mřížky ke vzdálenému bodu P jsou přibližně rovnoběžné. Dráhový rozdíl mezi každými dvěma sousedními paprsky je $d \sin\theta$, kde θ je úhel vyznačený na obrázku. (Štěrbiny leží ve směru kolmém ke stránce.)

Přepíšeme-li rov. (37.25) do tvaru $\theta = \arcsin(m\lambda/d)$, vidíme, že úhel mezi centrální osou a směrem k určité čáře (řekněme k čáře třetího řádu) závisí při dané mřížce na vlnové délce použitého světla. Prochází-li tedy mřížkou světlo, můžeme určit jeho vlnovou délku pomocí rov. (37.25), změříme-li úhly čar vyšších řádů. Tímto způsobem lze analyzovat a identifikovat i světlo obsahující několik neznámých vlnových délek. Pomocí dvojštěrbiny (čl. 36.4) takovou analýzu udělat nelze, i když platí táž rovnice a závislost na vlnové délce je tedy stejná. Při interferenci na dvojštěrbině se totiž světlé proužky příslušející různým vlnovým délkám příliš překrývají, takže je nelze rozlišit.

Šířka čar

Schopnost mřížky rozlišit (oddělit) čáry různých vlnových délek závisí na šířce těchto čar. Odvodíme zde výraz pro *pološířku* centrální čáry (tj. čáry, pro niž je $m = 0$) a potom uvedeme výraz pro pološířky čar vyšších řádů. Pološířku centrální čáry definujeme jako úhel $\Delta\theta_{1/2}$ mezi středem čáry $\theta = 0$ a místem, kde končí čára a začíná tmavá oblast s prvním minimem (obr. 37.20). V tomto minimu se N paprsků od N štěrbin mřížky vzájemně vyruší. (Skutečná šířka centrální čáry je ovšem $2\Delta\theta_{1/2}$, je však zvykem porovnávat šířky čar pomocí pološířek.)

V čl. 37.2 při difrakci na štěrbině jsme měli rovněž co činit s rušením velkého počtu paprsků. Odvodili jsme rov. (37.3), jíž můžeme — vzhledem k podobnosti obou případů — použít i zde a najít první minimum. Tato rovnice říká, že první minimum nastává, když dráhový rozdíl horního a dolního paprsku je roven λ. Při difrakci na štěrbině je tento rozdíl $a \sin\theta$. Pro mřížku tvořenou N štěrbinami



Obr. 37.20 Položířka $\Delta\theta_{1/2}$ centrální čáry je úhel mezi středem této čáry a sousedním minimem v grafu intenzity I jako funkce θ (srov. Obr. 37.18a).

je vzdálenost mezi horní a dolní štěrbinou $(N-1)d$, což při velkém počtu štěrbin můžeme nahradit výrazem Nd (obr. 37.21), kde d je vzdálenost mezi sousedními štěrbinami. Dráhový rozdíl mezi horním a dolním paprskem je tedy v našem případě $Nd\sin\theta_{1/2}$. První minimum proto vznikne, když

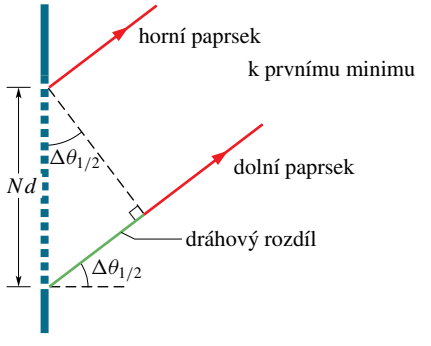
$$Nd\sin\Delta\theta_{1/2}\approx\lambda. \qquad (37.26)$$

Poněvadž úhel $\Delta\theta_{1/2}$ je malý, je $\sin\Delta\theta_{1/2}\approx\Delta\theta_{1/2}$ (v radiánech). Dosadíme-li to do rov. (37.26), dostaneme pro položířku centrální čáry výraz

$$\Delta\theta_{1/2}=\frac{\lambda}{Nd} \quad \text{(položířka centrální čáry).} \qquad (37.27)$$

Uvádíme bez důkazu, že i položířka kterékoli jiné čáry závisí na poloze čáry vzhledem k centrální ose a je rovna

$$\Delta\theta_{1/2}=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta} \quad \text{(položířka čáry difraktované ve směru } \theta\text{).} \qquad (37.28)$$



Obr. 37.21 Vzdálenost mezi horní a dolní štěrbinou mřížky tvořené N štěrbinami je přibližně Nd. Dráhový rozdíl mezi horním a dolním paprskem procházejícím mřížkou je $Nd\sin\Delta\theta_{1/2}$, kde $\Delta\theta_{1/2}$ má význam vyznačený na obrázku. (Pro zřetelnost je zde úhel $\Delta\theta_{1/2}$ přehnaně velký.)

Všimněte si, že při dané vlnové délce λ a při dané rozteči d mezi štěrbinami se s rostoucím počtem N štěrbin šířka čar zmenšuje. Ze dvou difrakčních mřížek může tedy mřížka s vyšším N lépe rozlišit vlnové délky, neboť její difrakční čáry jsou užší a méně se překrývají.

Aplikace difrakčních mřížek

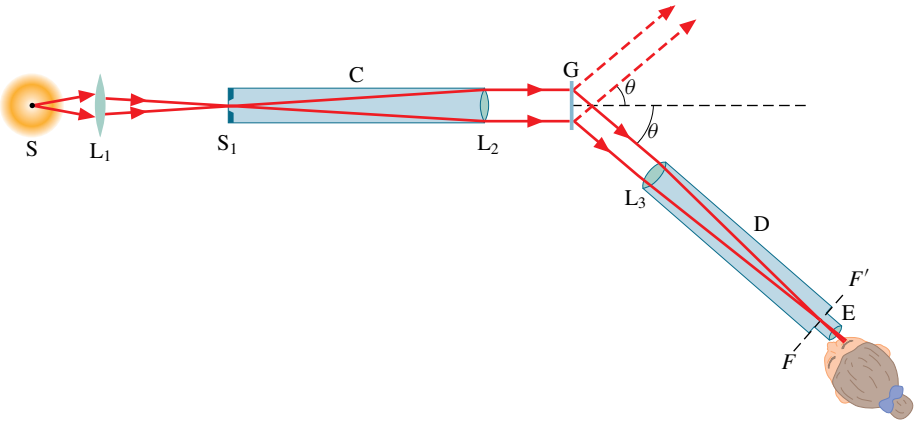
Difrakčních mřížek se často používá k určení vlnových délek emitovaných nejrůznějšími zdroji světla od lamp po hvězdy. *Mřížkový spektroskop*, který používá mřížku k tomuto účelu, je na obr. 37.22. Světlo ze zdroje S je čočkou L_1 fokusováno na štěrbinu S_1 umístěnou v ohniskové rovině čočky L_2. Světlo vycházející z tubusu C (zvaného *kolimátor*) je rovinná vlna a ta kolmo dopadá na mřížku G. Na ní dochází k difrakci a vzniká difrakční obrazec s centrální čárou řádu $m=0$ pod úhlem $\theta=0$, tedy podél centrální osy mřížky.

Difrakční obrazec, který by se objevil na stínítku, si můžeme prohlédnout dalekohledem. Zajímá-li nás intenzita ve směru θ, nastavíme prostě dalehohled D do tohoto směru (obr. 37.22). Čočka L_3 dalekohledu fokusuje světlo difraktované pod úhlem θ (a pod nepatrně menším a větším úhlem) do své ohniskové roviny FF' nacházející se uvnitř dalekohledu. Okulárem E si tento fokusovaný obrazec zvětšíme.

Budeme-li měnit úhel θ dalekohledu, můžeme prozkoumat celý difrakční obrazec. S výjimkou nultého řádu $m=0$ je v každém řádu původní světlo rozloženo podle vlnových délek (tj. podle barvy), takže s pomocí rov. (37.25) můžeme určit, které vlnové délky zdroj emituje. Jestliže vlnové délky emitovaného světla jsou ze širokého intervalu, pozorujeme — otáčíme-li dalekohledem v rozmezí úhlů odpovídajících nějakému řádu m — široký pás barev, jehož krátkovlnému okraji přísluší menší úhel θ a dlouhovlnému větší. Emituje-li zdroj diskrétní vlnové délky, pozorujeme diskrétní svislé čáry v barvě příslušných vlnových délek.

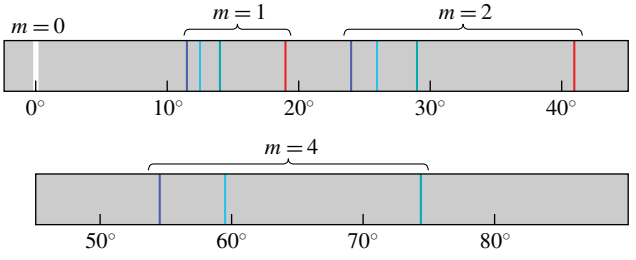
Například světlo emitované výbojkou naplněnou plynným vodíkem má ve viditelné oblasti čtyři diskrétní vlnové délky. Pozorujeme-li toto světlo přímo, jeví se bílé. Jestliže ho však pozorujeme mřížkovým spektroskopem, můžeme v několika řádech rozlišit čáry čtyř barev odpovídající těmto vlnovým délkám viditelné oblasti. (Tyto čáry se nazývají *emisní čáry*.) Čtyři řády jsou znázorněny na obr. 37.23. V centrálním řádu ($m=0$) se čáry všech čtyř vlnových délek překrývají a vytvářejí jedinou bílou čáru v primárním směru $\theta=0$. Ve vyšších řádech jsou barvy separovány.

Pro přehlednost není v obr. 37.23 vyznačen třetí řád; překrývá se totiž s druhým a čtvrtým řádem. Červená čára čtvrtého řádu chybí, neboť mřížka, kterou jsme použili, ji nevytváří (jde o mřížku z př. 37.6). Pokusíme-li se totiž pomocí rov. (37.25) vypočítat úhel θ pro vlnovou délku

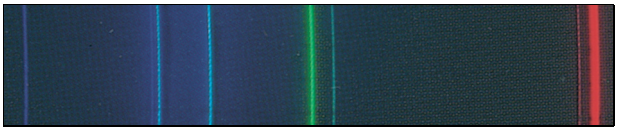


Obr. 37.22 Jednoduchý mřížkový spektroskop používaný k analýze vlnových délek světla emitovaného zdrojem S.

odpovídající červené barvě a řádu $m = 4$, shledáme, že $\sin\theta$ je větší než jedna, což není možné. Říkáme pak, že čtvrtý řád je pro tuto mřížku *neúplný*. Nemusí však být neúplný pro mřížku s větší mřížkovou konstantou d, která difraktuje čáry pod menšími úhly θ, než jak je to nakresleno v obr. 37.23. Na obr. 37.24 je fotografie emisních čar kadmia ve viditelné oblasti.



Obr. 37.23 Nultý, první, druhý a čtvrtý řád emisních čar vodíku ve viditelné oblasti. Všimněte si, že při větších úhlech je vzdálenost mezi čárami větší. (Jsou také slabší a širší, to však zde není vyznačeno.)



Obr. 37.24 Viditelné emisní čáry kadmia pozorované mřížkovým spektroskopem.

PŘÍKLAD 37.6

Difrakční mřížka má $1{,}26{\cdot}10^4$ vrypů rovnoměrně rozmístěných v šířce $w = 25{,}4$ mm. Kolmo na ni dopadá modré světlo o vlnové délce 450 nm.

(a) Jaké úhly svírají s centrální osou maxima druhého řádu?

ŘEŠENÍ: Mřížková konstanta je

$$d = \frac{w}{N} = \frac{(25{,}4{\cdot}10^{-3}\ \text{m})}{(1{,}26{\cdot}10^4)} = 2{,}016{\cdot}10^{-6}\ \text{m} = 2016\ \text{nm}.$$

V rov. (37.25) odpovídá maximům druhého řádu $m = 2$. Pro $\lambda = 450$ nm tak dostáváme

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{2(450\ \text{nm})}{(2\,016\ \text{nm})} = 0{,}446,$$
$$\theta = 26{,}51^\circ \doteq 26{,}5^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je položířka čáry druhého řádu?

ŘEŠENÍ: Z rov. (37.28) vypočteme

$$\Delta\theta_{1/2} = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} = \frac{(450\ \text{nm})}{(1{,}26{\cdot}10^4)(2\,016\ \text{nm})\cos 26{,}51^\circ}$$
$$= 1{,}98{\cdot}10^{-5}\ \text{rad}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 6: Obrázek ukazuje čáry různého řádu monochromatického červeného světla vytvořené difrakční mřížkou. (a) Nachází se střed obrazce vpravo, nebo vlevo? (b) Přepneme-li na zelené monochromatické světlo, budou položířky čar v týchž řádech větší, menší, nebo stejné jako položířky čar na obrázku?





Jemné vrypy o šířce 0,5 μm na kompaktním disku dělají z disku difrakční mřížku. Svítí-li na disk malý zdroj bílého světla, tvoří difraktované světlo barevné pruhy, které jsou směsicí difrakčních obrazců od vrypů.



37.8 MŘÍŽKY: DISPERZE A ROZLIŠOVACÍ SCHOPNOST

Disperze

Má-li mřížka posloužit k rozlišení vlnových délek, které jsou si blízké (jako v mřížkovém spektroskopu), musí mřížka difrakční obrazec dostatečně roztáhnout, aby difrakční čáry příslušných vlnových délek byly odděleny. Toto roztažení, nazývané **disperze**, je definováno vztahem

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} \quad \text{(definice disperze).} \qquad (37.29)$$

V tomto vzorci je $\Delta\theta$ úhlová vzdálenost dvou čar, jejichž vlnové délky se liší o $\Delta\lambda$. Čím větší je D, tím větší je vzdálenost dvou emisních čar, jejichž vlnové délky se liší o $\Delta\lambda$. V dalším bude ukázáno, že disperze mřížky závisí na úhlu θ a je dána vztahem

$$D = \frac{m}{d\cos\theta} \quad \text{(disperze mřížky).} \qquad (37.30)$$

Chceme-li tedy mít vysokou disperzi, musíme použít mřížky s malou mřížkovou konstantou (malé d) a pracovat ve vysokém řádu (velké m). Všimněte si, že disperze nezávisí na počtu vrypů. V soustavě SI je jednotkou D stupeň na metr nebo radián na metr.

Rozlišovací schopnost

Aby bylo možné rozlišit spektrální čáry blízkých vlnových délek, musí být šířky čar co nejužší. Jinak řečeno, mřížka musí mít vysokou **rozlišovací schopnost** R, definovanou podílem

$$R = \frac{\lambda_{\text{stř}}}{\Delta\lambda} \quad \text{(definice rozlišovací schopnosti).} \qquad (37.31)$$

Zde $\lambda_{\text{stř}}$ je průměr vlnových délek dvou spektrálních čar, které lze ještě považovat za separované a $\Delta\lambda$ je rozdíl jejich vlnových délek. Čím je R větší, tím blíže mohou být dvě emisní čáry, přičemž se dají ještě rozlišit. V dalším bude ukázáno, že rozlišovací schopnost mřížky je dána jednoduchým výrazem

$$R = Nm \quad \text{(rozlišovací schopnost mřížky).} \qquad (37.32)$$

Abychom dosáhli vysoké rozlišovací schopnosti, musí mít mřížka mnoho vrypů (velké N v rov. (37.32)).

Odvození rov. (37.30)

Vyjděme z rov. (37.25), která určuje polohy spektrálních čar v difrakčním obrazci mřížky:

$$d\sin\theta = m\lambda.$$

Považujme θ a λ za proměnné a diferencujme tuto rovnici. Dostaneme

$$d\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = m\,\mathrm{d}\lambda.$$

Nahradíme-li diferenciály malými rozdíly, dostaneme

$$d\cos\theta\Delta\theta = m\Delta\lambda, \qquad (37.33)$$

tj.

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}.$$

Podíl na levé straně je disperze D (srov. rov. (37.29)); tím jsme tedy odvodili rov. (37.30).

Odvození rov. (37.32)

Vyjděme z rov. (37.33), která byla odvozena z rov. (37.25), jež určuje polohy čar v difrakčním obrazci vytvořeném mřížkou. V rov. (37.33) značí $\Delta\lambda$ malý rozdíl vlnových délek dvou vln difraktovaných mřížkou a $\Delta\theta$ je jejich úhlová vzdálenost v difrakčním obrazci. Má-li být $\Delta\theta$ nejmenším úhlem, který dovoluje rozlišit dvě čáry, musí být (podle Rayleighova kritéria) roven pološířce každé z čar. Tuto pološířku udává rov. (37.28):

$$\Delta\theta_{1/2} = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta}.$$

Ztotožníme-li $\Delta\theta_{1/2}$ v této rovnici s $\Delta\theta$ v rov. (37.33), shledáme, že

$$\frac{\lambda}{N} = m\Delta\lambda.$$

Odtud ihned plyne, že

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm.$$

To je však rov. (37.32), kterou jsme chtěli odvodit.

Porovnání disperze a rozlišovací schopnosti

Rozlišovací schopnost mřížky nesmíme zaměňovat s disperzí mřížky. V tab. 37.1 jsou uvedeny charakteristiky tří mřížek, všechny jsou osvětleny světlem s vlnovou délkou $\lambda = 589\,\text{nm}$ a difraktované světlo pozorujeme v prvním řádu ($m = 1$ v rov. (37.25)). Ověřte si, že tabelované hodnoty D a R lze vypočítat z rov. (37.30), resp. rov. (37.32). (Při výpočtech D musíte převést rad/m na °/μm.)

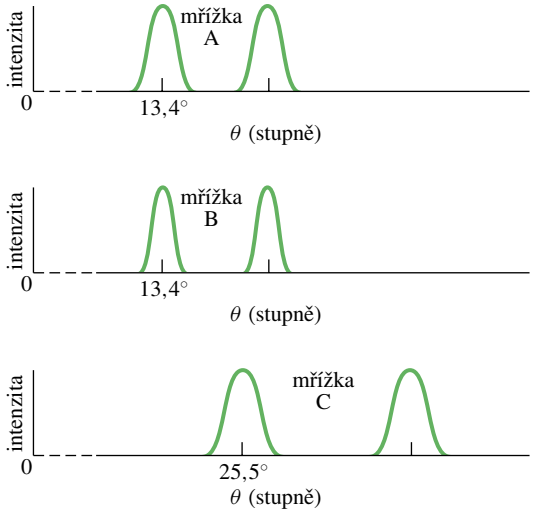
Za podmínek uvedených v tab. 37.1 mají mřížky A a B touž *disperzi* a A a C touž *rozlišovací schopnost*.

Tabulka 37.1 **Tři mřížky**[a]

MŘÍŽKA	N	d (nm)	θ	D (°/μm)	R
A	10 000	2 540	13,4°	23,2	10 000
B	20 000	2 540	13,4°	23,2	20 000
C	10 000	1 370	25,5°	46,3	10 000

[a] Údaje odpovídají $\lambda = 589\,\text{nm}$ a $m = 1$.

Obr. 37.25 představuje rozložení intenzity světla v difrakčním obrazci (profily čar) vytvořeném těmito mřížkami při difrakci světla o dvou vlnových délkách λ_1 a λ_2 v blízkosti $\lambda = 589\,\text{nm}$. Mřížka B s vyšší rozlišovací schopností vytváří užší čáry a je schopna rozlišit čáry, jejichž vlnové délky jsou si mnohem bližší než ty, jež jsou nakresleny v obrázku. Mřížka C s vyšší disperzí vytváří větší úhlovou vzdálenost mezi čárami.



Obr. 37.25 Rozložení intenzity v difrakčním obrazci vytvořeném světlem o dvou vlnových délkách, které prošlo mřížkami z tab. 37.1. Mřížka B má největší rozlišovací schopnost a mřížka C největší disperzi.

PŘÍKLAD 37.7

Na difrakční mřížku z př. 37.6 kolmo dopadá žluté světlo sodíkové výbojky. Toto světlo obsahuje dvě blízké emisní čáry (známé jako sodíkový dublet) o vlnových délkách 589,00 nm a 589,59 nm.

(a) Pod jakým úhlem se objeví maximum prvního řádu příslušné kratší z těchto vlnových délek?

ŘEŠENÍ: Maximum prvního řádu odpovídá hodnotě $m = 1$ v rov. (37.25). Z př. 37.6a víme, že mřížková konstanta d je 2 016 nm, takže

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{1(589{,}00\,\text{nm})}{(2\,016\,\text{nm})} = 0{,}292,$$
$$\theta = 16{,}99^\circ \doteq 17^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je v prvním difrakčním řádu úhlová vzdálenost čar sodíkového dubletu?

ŘEŠENÍ: Zde vstupuje do hry *disperze* mřížky. Rov. (37.30) dává hodnotu disperze

$$D = \frac{m}{d\cos\theta} = \frac{1}{(2\,016\,\text{nm})\cos 16{,}99^\circ} =$$
$$= 5{,}187\cdot 10^{-4}\,\text{rad/nm}.$$

Z rov. (37.29), jež je definiční rovnicí disperze, plyne

$$\Delta\theta = D\Delta\lambda =$$
$$= (5{,}187\cdot 10^{-4}\,\text{rad/nm})(589{,}59\,\text{nm} - 589{,}00\,\text{nm}) =$$
$$= 3{,}06\cdot 10^{-4}\,\text{rad} = 0{,}017\,5^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek závisí na mřížkové konstantě d, nikoli však na počtu vrypů mřížky.

(c) Jak blízké mohou být vlnové délky dvou čar, které lze ještě touto mřížkou oddělit v prvním řádu?

ŘEŠENÍ: Zde vstupuje do hry *rozlišovací schopnost* mřížky. Podle rov. (37.32) je rozlišovací schopnost

$$R = Nm = (1{,}26\cdot 10^4)(1) = 1{,}26\cdot 10^4.$$

Z rov. (37.31), jež je definiční rovnicí rozlišovací schopnosti, plyne

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{(589\,\text{nm})}{(1{,}26\cdot 10^4)} = 0{,}046\,7\,\text{nm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato mřížka může tedy snadno rozlišit obě sodíkové čáry, neboť rozdíl jejich vlnových délek je 0,59 nm. Všimněte si, že tento výsledek závisí pouze na počtu vrypů mřížky a je nezávislý na mřížkové konstantě d, tj. na vzdálenosti sousedních vrypů.

(d) Kolik musí mít mřížka vrypů, aby právě rozlišila čáry sodíkového dubletu?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (37.31), jež je definiční rovnicí R, musí mít mřížka rozlišovací schopnost

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{(589\,\text{nm})}{(0{,}59\,\text{nm})} = 998.$$

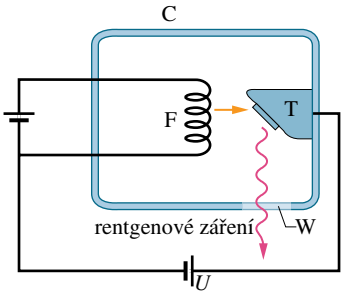
Podle rov. (37.32) je počet vrypů potřebný k dosažení této rozlišovací schopnosti (v prvním řádu)

$$N = \frac{R}{m} = \frac{(998)}{(1)} = 998 \quad \text{vrypů.} \quad \text{(Odpověď)}$$

Poněvadž naše mřížka má zhruba 13krát více vrypů, může čáry sodíkového dubletu snadno rozlišit, jak jsme již ukázali v (c).

37.9 RENTGENOVÁ DIFRAKCE

Rentgenové záření je elektromagnetické záření, jehož vlnová délka je řádu angströmů: $1\,\text{Å} = 10^{-10}\,\text{m}$ přesně. Porovnejte to s vlnovou délkou středu viditelného spektra, jež je $550\,\text{nm} = 5{,}5{\cdot}10^{-7}\,\text{m}$. Obr. 37.26 ukazuje, že rentgenové záření vzniká, když elektrony emitované žhavým vláknem F a urychlené napětím U dopadají na kovový terčík T.



Obr. 37.26 Rentgenové záření vzniká, když elektrony emitované rozžhaveným vláknem F a urychlené napětím U dopadají na kovový terčík T. „Okénko“ W v evakuované komůrce C je pro rentgenové záření propustné.

K rozlišování různých vlnových délek rentgenového záření nelze použít standardní optickou mřížku. Z rovnice (37.25) plyne, že např. pro $\lambda = 1\,\text{Å} = 0{,}1\,\text{nm}$ a $d = 3\,000\,\text{nm}$ je maximum prvního řádu pod úhlem θ:

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{(1)(0{,}1\,\text{nm})}{(3\,000\,\text{nm})} = 0{,}000\,03,$$
$$\theta = 0{,}001\,9^\circ.$$

To není prakticky použitelné, protože je to příliš blízké centrálnímu maximu. Potřebujeme mřížku s $d \doteq \lambda$, ale protože vlnové délky rentgenového záření jsou zhruba stejné jako průměry atomů, nelze takové mřížky mechanicky vyrobit.

V roce 1912 připadl německý fyzik Max von Laue na myšlenku, že krystalická pevná látka, kterou tvoří pravidelné uspořádání atomů, by mohla být přirozenou trojrozměrnou „difrakční mřížkou“ pro rentgenové záření. Krystal je tvořen tak, že se v něm opakuje jistá základní formace atomů — **elementární buňka**. V případě nejjednodušší kubické mřížky vypadá situace jako na obr. 37.27. Elementární buňka je krychle o hraně velikosti a_0; tato délka se nazývá **mřížkový parametr** (dříve též **mřížková konstanta**). (Bohužel se tato mřížka, jako většina jednoduchých a názorných modelů, v přírodě téměř nevyskytuje. Údajně v ní krystaluje polonium Po.)

Dopadá-li na krystal svazek rentgenového záření, je toto záření krystalovou strukturou *rozptylováno*, tj. mění se jeho směr. V některých směrech interferují rozptýlené vlny destruktivně, a tím vznikají minima intenzity; v jiných směrech je interference konstruktivní, což dává maxima intenzity. Tento proces rozptylu a interference je určitou formou difrakce, i když se nepodobá difrakci světla procházejícího štěrbinou nebo míjejícího nějakou hranu, o níž jsme už pojednali.

I když je proces difrakce rentgenového záření na krystalu složitý, lze směry maxim určit pomocí jednoduché představy. Tyto směry odpovídají totiž situaci, jako by se rentgenové záření odráželo na soustavě rovnoběžných *reflexních rovin* (nebo *krystalových rovin*) proložených atomy krystalu. V každé z těchto rovin jsou atomy pravidelně uspořádány. (Ve skutečnosti se rentgenové záření neodráží; těchto fiktivních rovin používáme pouze proto, abychom zjednodušili analýzu skutečného difrakčního jevu.)

Na obr. 37.27b jsou tři roviny soustavy s *mezirovinnou vzdáleností* d, na nichž se odrážejí vyznačené paprsky dopadajícího rentgenového záření. Paprsky 1, 2 a 3 se odrážejí od první, druhé, resp. třetí roviny. Při každém odrazu je úhel dopadu i úhel odrazu roven θ. Na rozdíl od zvyklostí v optice jsou tyto úhly vztaženy k odrážející rovině a ne k normále této roviny. V případě nakresleném na obr. 37.27b je mezirovinná vzdálenost d rovna mřížkové konstantě a_0.

Obr. 37.27c znázorňuje odraz na dvou sousedních rovinách v pohledu ve směru kolmém k rovině dopadu. Vlny odpovídající paprskům 1 a 2 dopadají na krystal ve fázi. Po odrazu musejí být opět ve fázi, neboť odrazy a odrážející roviny jsme definovali pouze proto, abychom vysvětlili maxima intenzity při difrakci rentgenového záření na krystalu. Na rozdíl od světelných paprsků se paprsky rentgenového záření při vstupu do krystalu nelámou; index lomu rentgenového záření je tedy roven jedné. Když vlny odpovídající paprskům 1 a 2 vystupují z krystalu, je proto jejich fázový rozdíl určen výhradně jejich dráhovým rozdílem. Aby tyto vlny byly ve fázi, musí být jejich dráhový rozdíl roven celistvému násobku vlnové délky rentgenového záření.

Čárkované kolmice na obr. 37.27c ukazují, že dráhový rozdíl je $2d\sin\theta$. Tak tomu ovšem je pro každou dvojici

sousedních rovin v soustavě znázorněné na obr. 37.27b. Nastává tedy maximum intenzity při rentgenové difrakci za podmínky

$$2d \sin\theta = m\lambda, \qquad \text{kde } m = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{(Braggův zákon)}, \qquad (37.34)$$

kde m udává řád maxima intenzity. Rov. (37.34) se nazývá **Braggův zákon**, neboť ji poprvé odvodil britský fyzik W. L. Bragg. (V roce 1915 sdílel se svým otcem Nobelovu cenu za to, že použili rentgenového záření ke studiu struktury krystalů.) Úhel dopadu a odrazu v rov. (37.34) se nazývá **Braggův úhel**.

Na obr. 37.27d má krystalová struktura touž orientaci jako na obr. 37.27a, ale úhel, pod nímž vstupuje svazek do struktury, je jiný než na obr. 37.27b. Máme-li vysvětlit difrakci rentgenového záření Braggovým zákonem i v tomto případě, musíme k novému úhlu dopadu najít jinou soustavu rovin s jinou mezirovinnou vzdáleností d a jiným Braggovým úhlem θ.

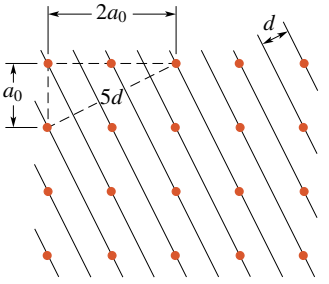
Obr. 37.28 ukazuje, jak souvisí mezirovinná vzdálenost d s mřížkovou konstantou a_0. Pro tu konkrétní soustavu rovin, která je na obrázku nakreslena, platí

$$5d = \sqrt{5}a_0$$

neboli

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{5}}. \qquad (37.35)$$

Obr. 37.28 naznačuje, jak lze nalézt rozměry elementární buňky, jestliže rentgenovou difrakcí změříme mezirovinnou vzdálenost.



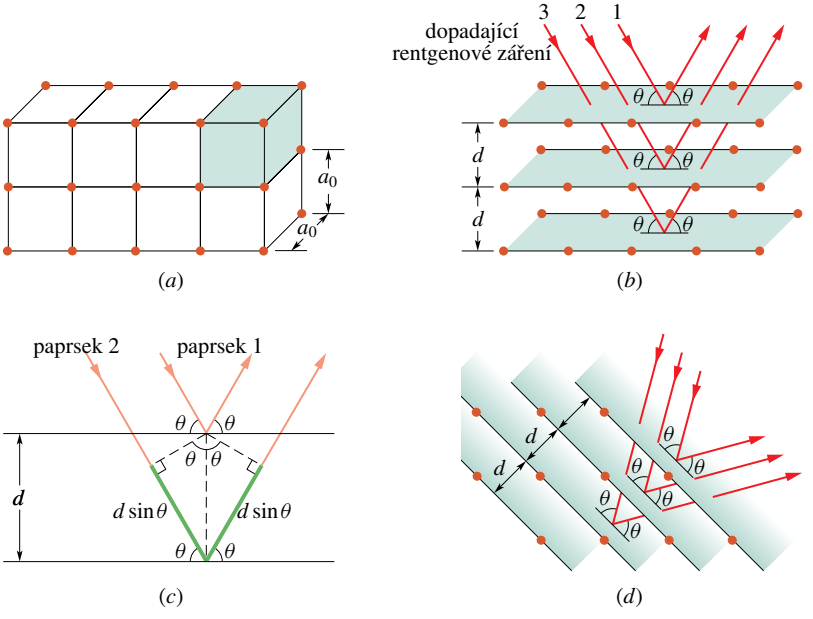
Obr. 37.28 Soustava mřížkových rovin ve struktuře obr. 37.27a a způsob, jak nalézt vztah mezi délkou hrany a_0 elementární buňky a mezirovinnou vzdáleností d.

Difrakce rentgenového záření je mocným nástrojem pro studium jak rentgenových spekter, tak uspořádání atomů v krystalech. Ke studiu spektra zvolíme určitou soustavu krystalových rovin, jejichž mezirovinnou vzdálenost d známe. Tyto roviny efektivně odrážejí různé vlnové délky pod různými úhly. K určení vlnové délky pak můžeme použít detektor, který je schopen rozlišovat jeden úhel od druhého. Naopak krystal můžeme studovat pomocí svazku monochromatického rentgenového záření a určit nejen mezirovinné vzdálenosti různých soustav krystalových rovin, ale i strukturu elementární buňky.

PŘÍKLAD 37.8

Pod jakým Braggovým úhlem musí dopadat rentgenové záření s $\lambda = 1{,}10$ Å na soustavu rovin znázorněnou na obr. 37.28, mají-li odrazy na rovinách dávat maximum intenzity? Předpokládejte $a_0 = 5{,}63$ Å.

ŘEŠENÍ: Mezirovinnou vzdálenost d těchto rovin dává



Obr. 37.27 (a) Prostá kubická mřížka. Elementární buňka je vyznačena stínováním. (b) Dopadající rentgenové záření difraktuje na struktuře (a). Rentgenové záření difraktuje tak, jako by se odráželo od soustavy rovnoběžných rovin, tj. s úhlem dopadu rovným úhlu odrazu. Oba tyto úhly se měří od krystalových rovin, nikoli od normály, jak tomu bylo v optice. (c) Dráhový rozdíl vln efektivně odražených dvěma sousedními rovinami je $2d \sin\theta$. (d) Jiná orientace rentgenového záření vzhledem ke struktuře. Nyní rentgenové záření efektivně odráží jiná soustava rovin.

rov. (37.35):

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{5}} = \frac{(5{,}63\ \text{Å})}{\sqrt{5}} = 2{,}518\ \text{Å}.$$

Braggovy úhly vyplývají z rov. (37.34):

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{2d} = \frac{m(1{,}10\ \text{Å})}{2(2{,}518\ \text{Å})} = (0{,}218\,4m).$$

Možná maxima nastávají pod úhly $\theta = 12{,}6°$ ($m = 1$), $\theta = 25{,}9°$ ($m = 2$), $\theta = 40{,}9°$ ($m = 3$) a $\theta = 60{,}9°$ ($m = 4$). Maxima vyššího řádu nemohou existovat, neboť by vyžadovala, aby byl $\sin\theta$ větší než 1.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Difrakce

Dopadají-li vlny na hranu nebo na překážku či otvor, rozšíří se směry šíření těchto vln a dojde k interferenci. Tento jev se nazývá *difrakce*.

Difrakce na štěrbině

Vlny procházející dlouhou úzkou štěrbinou šířky a vytvářejí difrakční obrazec na štěrbině. Ten má centrální maximum a další maxima oddělená minimy. Měříme-li úhly od centrální osy, mají minima úhlovou souřadnici θ vyhovující rovnici

$$a\sin\theta = m\lambda, \quad \text{kde } m = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{(minima)}. \qquad (37.3)$$

Intenzita difrakčního obrazce pod libovolným úhlem θ je

$$I = I_{\max}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \quad \text{kde } \alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta \qquad (37.5, 37.6)$$

a $I_{\max}$ je intenzita ve středu obrazce.

Difrakce na kruhovém otvoru

Difrakce na kruhovém otvoru nebo čočce o průměru d vytváří centrální maximum a soustředná maxima a minima. První minimum je pod úhlem θ určeným rovnicí

$$\sin\theta = 1{,}22\,\frac{\lambda}{d} \quad \text{(první minimum; kruhový otvor)}. \qquad (37.12)$$

Rayleighovo kritérium

Rayleighovo kritérium říká, že dva objekty jsou na hranici rozlišení, jestliže centrální difrakční maximum jednoho padne do prvního minima druhého. Úhlová vzdálenost objektů musí být alespoň

$$\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{d} \quad \text{(Rayleighovo kritérium)}, \qquad (37.14)$$

kde d je poloměr apertury.

Difrakce na dvojštěrbině

Vlny procházející dvěma štěrbinami, z nichž každá má šířku a a mezi jejichž středy je vzdálenost d, vytvářejí difrakční obrazec. Jeho intenzitu I jako funkci úhlu θ udává vztah

$$I = I_{\max}(\cos^2\beta)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \quad \text{(dvojštěrbina)}, \qquad (37.19)$$

kde $\beta = (\pi d/\lambda)\sin\theta$ a α má týž význam jako při difrakci na jedné štěrbině.

Difrakce na mnoha štěrbinách

Difrakce na N (mnoha) štěrbinách dává maxima (čáry) pod úhly θ určenými rovnicí

$$d\sin\theta = m\lambda, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(maxima)} \qquad (37.25)$$

s pološirkou čar danou výrazem

$$\Delta\theta_{1/2} = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} \quad \text{(pološirka čáry difraktované ve směru } \theta). \qquad (37.28)$$

Difrakční mřížka

Difrakční mřížka je soustava „štěrbin“ používaná k rozložení vlny do složek o různých vlnových délkách tím, že oddělí a roztáhnou difrakční maxima těchto složek. Mřížku charakterizuje její disperze D a rozlišovací schopnost R:

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}, \qquad (37.29, 37.30)$$

$$R = \frac{\lambda_{\text{stř}}}{\Delta\lambda} = Nm. \qquad (37.31, 37.32)$$

Rentgenová difrakce

Pravidelné uspořádání atomů v krystalu představuje trojrozměrnou difrakční mřížku pro vlny s krátkou vlnovou délkou, tj. pro rentgenové záření. Pro účely analýzy si můžeme představit, že atomy jsou uspořádány v rovinách s mezirovinnou vzdáleností d. V důsledku konstruktivní interference mohou vznikat difrakční maxima. Objevují se tehdy, když směr θ dopadu vlny měřený od těchto rovin a vlnová délka λ záření splňují Braggův zákon:

$$2d\sin\theta = m\lambda, \quad \text{kde } m = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{(Braggův zákon)}. \qquad (37.34)$$

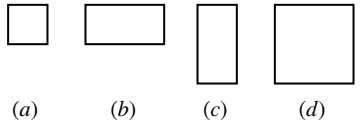
OTÁZKY

1. Světlo o frekvenci f osvětlující dlouhou a úzkou štěrbinu vytváří difrakční obrazec. (a) Rozšíří se difrakční obrazec od svého středu, nebo se naopak zúží, když použijeme světla o frekvenci $1{,}3f$? (b) Rozšíří se, nebo se zúží difrakční obrazec, když celé zařízení ponoříme do čirého kukuřičného sirupu?

2. Experimentujete s difrakcí na štěrbině a používáte světla o vlnové délce λ. Co budete pozorovat na vzdáleném pozorovacím stínítku v bodech, v nichž dráhový rozdíl paprsků procházejících horním a spodním bodem štěrbiny je (a) 5λ, (b) $4{,}5\lambda$?

3. Mluvíte stejně hlasitě, jednou do hlásné trouby, podruhé bez ní. Ve kterém případě vás osoba stojící přímo před vámi slyší hlasitěji?

4. Na obr. 37.29 jsou čtyři obdélníkové otvory, z nichž vycházejí buď zvukové nebo světelné vlny. Strany mají délky buď L nebo $2L$, kde L je trojnásobek vlnové délky. Uspořádejte sestupně otvory podle toho, jak difrakcí rozšíří vlnový svazek ve směru (a) vodorovném, (b) svislém.



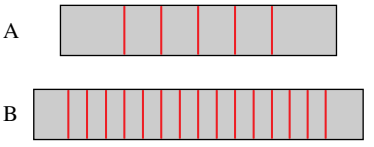
Obr. 37.29 Otázka 4

5. Při difrakci na štěrbině je dráhový rozdíl paprsků vycházejících z horního a dolního bodu štěrbiny a jdoucích do určitého bodu pozorovacího stínítka roven 4,0 vlnové délky. Kolik překrývajících se kružnic obsahuje řetěz fázorů ve fázorovém diagramu obdobném diagramům na obr. 37.6?

6. Pozorujete-li večer pouliční světla ze svého bytu přes záclony, můžete vidět zajímavé difrakční obrazce. Např. má-li tkanivo záclon oka ve tvaru obdélníčků, vidíte difrakční obrazec ve tvaru kříže, jsou-li oka šestiúhelníková, vidíte šesticípou hvězdici. Pozorujete-li takto semafory na křižovatce, které difrakční obrazce jsou větší: zelené, nebo červené?

7. Mnozí lidé vidí v noci kruhy (tzv. *entopické halo*) obklopující pouliční svítilny v jinak tmavém prostředí. Tyto kruhy jsou první vedlejší difrakční maxima difrakčních obrazců struktur, o nichž se domníváme, že jsou uvnitř rohovky (nebo možná čočky) oka pozorovatele. (Centrální maxima těchto obrazců překrývá svítilna.) (a) Byl by určitý kruh větší, nebo menší, kdyby svítilna změnila světlo z modrého na červené? (b) Je vnější okraj kruhu modrý, nebo červený, vydává-li svítilna bílé světlo?

8. Na obr. 37.30 jsou znázorněny jasné proužky, které jsou v centrálním maximu difrakční obálky ve dvojštěrbinovém difrakčním experimentu užívajícím světlo téže vlnové délky. Je (a) šířka štěrbiny a, (b) vzdálenost štěrbin d, (c) hodnota poměru d/a v experimentu B větší, menší, nebo stejná jako v experimentu A?



Obr. 37.30 Otázka 8

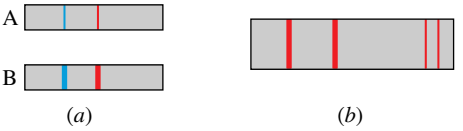
9. Obr. 37.31 ukazuje červenou a zelenou čáru téhož řádu v obrazci vytvořeném difrakční mřížkou. Zvětšíme-li počet vrypů mřížky (například odstraněním pásky, která polovinu vrypů zakrývala), zvětší se, zmenší se, nebo zůstanou stejné (a) položířky čar a (b) vzdálenost čar? (c) Posunou se čáry vpravo, vlevo, nebo zůstanou na místě?



Obr. 37.31 Otázky 9 a 10

10. Jestliže bychom za podmínek otázky 9 a obr. 37.31 zvětšili mřížkovou konstantu, zvětšily by se, zmenšily by se, nebo by zůstaly nezměněné (a) položířky čar a (b) vzdálenosti čar? (c) Posunuly by se čáry vpravo, vlevo, nebo by zůstaly na místě?

11. (a) Čáry na obr. 37.32a vznikly difrakcí světla téhož spektrálního složení na mřížkách A a B. Čáry jsou téhož řádu a také úhly θ jsou stejné. Která mřížka má větší počet vrypů? (b) Obr. 37.32b ukazuje čáry dvou řádů vytvořené difrakční mřížkou za použití světla se dvěma vlnovými délkami v červené oblasti spektra. Která dvojice čar je vyššího řádu m, ta vpravo, nebo ta vlevo? Je střed difrakčního obrazce vpravo, nebo vlevo na (c) obr. 37.32a, (d) obr. 37.32b?



Obr. 37.32 Otázka 11

12. (a) Zvětší se, zmenší se, nebo zůstane beze změny nejmenší rozdíl $\Delta\lambda$ dvou vlnových délek, které může určitá difrakční mřížka rozlišit, jestliže se zvětší vlnová délka? (b) Je v určitém oboru vlnových délek (řekněme kolem 500 nm) $\Delta\lambda$ větší v prvním, nebo ve třetím řádu?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 37.2 Difrakce na štěrbině. Polohy minim

1C. Na štěrbinu o šířce 0,022 mm dopadá monochromatické světlo a první difrakční minimum svírá se směrem dopadajícího světla úhel 1,8°. Jaká je vlnová délka použitého světla?

2C. Monochromatické světlo o vlnové délce 441 nm dopadá na úzkou štěrbinu. Stínítko je ve vzdálenosti 2,00 m a na něm je vzdálenost mezi druhým difrakčním minimem a centrálním maximem 1,50 cm. (a) Vypočtěte difrakční úhel θ druhého minima. (b) Stanovte šířku štěrbiny.

3C. Světlo o vlnové délce 633 nm dopadá na úzkou štěrbinu. Úhel mezi prvním difrakčním minimem na jedné straně centrálního maxima a prvním minimem na druhé straně je 1,20°. Jaká je šířka štěrbiny?

4C. Na štěrbinu dopadá světlo o vlnových délkách λ_a a λ_b zvolených tak, že první difrakční minimum komponenty λ_a koinciduje s druhým minimem komponenty λ_b. (a) Jak spolu obě vlnové délky souvisejí? (b) Koincidují ještě nějaká minima?

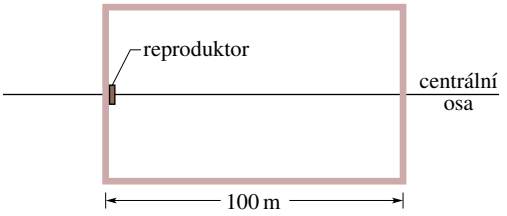
5C. Na stínítku vzdáleném 40 cm od štěrbiny je vzdálenost mezi prvním a pátým minimem difrakčního obrazce 0,35 mm. Použité světlo má vlnovou délku 550 nm. (a) Stanovte šířku štěrbiny. (b) Vypočtěte úhel θ prvního difrakčního minima.

6C. Jaký musí být poměr šířky štěrbiny a vlnové délky, aby bylo první difrakční minimum pod úhlem $\theta = 45{,}0°$?

7C. Na štěrbinu o šířce $a = 0{,}40$ mm dopadá rovinná vlna s vlnovou délkou 590 nm. Mezi štěrbinou a pozorovacím stínítkem je tenká spojná čočka s ohniskovou vzdáleností +70 cm, která fokusuje světlo na stínítko. (a) Jak daleko je stínítko od čočky? (b) Jaká je na stínítku vzdálenost mezi středem difrakčního obrazce a prvním minimem?

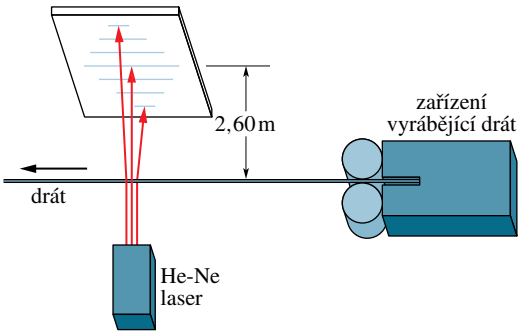
8Ú. Na štěrbinu o šířce 1,00 mm dopadá světlo o vlnové délce 589 nm. Difrakční obrazec pozorujeme na stínítku ve vzdálenosti 3,00 m. Jaká je vzdálenost mezi prvními dvěma difrakčními minimy na téže straně centrálního difrakčního maxima?

9Ú. Zvuková vlna o frekvenci 3 000 Hz a rychlosti 343 m/s difraktuje na obdélníkovém otvoru reproduktoru a šíří se velkým auditoriem. Otvor, jehož vodorovná šířka je 30,0 cm, je umístěn proti stěně ve vzdálenosti 100 m (obr. 37.33). Ve kterých místech této stěny budou posluchači v prvním difrakčním minimu a tedy budou jen s obtížemi slyšet zvuk? (Zanedbejte odrazy od stěn.)



Obr. 37.33 Úloha 9

10Ú. Výrobci drátů (a jiných věcí s malými rozměry) používají někdy laseru, aby kontinuálně kontrolovali tloušťku výrobku. Na drát dopadá laserový svazek a vzniká difrakční obrazec, který je prakticky stejný jako difrakční obrazec od štěrbiny o šířce rovné průměru vlákna (obr. 37.34). Předpokládejte, že na drát svítí He-Ne laser, jehož světlo má vlnovou délku 632,8 nm, a že difrakční obrazec pozorujete na stínítku ve vzdálenosti 2,60 m. Požadovaná šířka drátu je 1,37 mm. Jaká je vzdálenost mezi oběma minimy desátého řádu (po obou stranách centrálního maxima)?



Obr. 37.34 Úloha 10

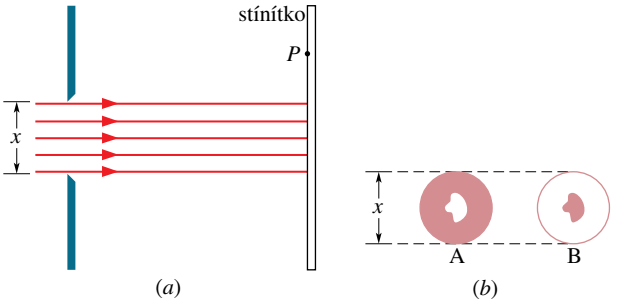
ODST. 37.4 Intenzita při difrakci na štěrbině (kvantitativně)

11C. Na štěrbinu o šířce 0,10 mm dopadá světlo o vlnové délce 589 nm. Uvažujte paprsky difraktované pod úhlem $\theta = 30°$ a vypočtěte, jaký je na stínítku fázový rozdíl Huygensových vlnek z horního bodu štěrbiny a z jejího středu. (*Tip*: Viz rov. (37.4).)

12C. Monochromatické světlo s vlnovou délkou 538 nm dopadá na štěrbinu o šířce 0,025 mm. Vzdálenost mezi štěrbinou a stínítkem je 3,5 m. Uvažujte o bodu na stínítku, který je od centrálního maxima ve vzdálenosti 1,1 cm. (a) Vypočtěte úhel θ pro tento bod. (b) Vypočtěte α. (c) Vypočtěte poměr intenzity v tomto bodě a intenzity centrálního maxima.

13Ú. Jestliže zdvojnásobíte šířku štěrbiny, vzroste intenzita centrálního maxima difrakčního obrazce čtyřikrát, i když intenzita procházející rozšířenou štěrbinou je pouze dvojnásobná. Vysvětlete to kvantitativně.

14Ú. **Babinetův princip.** Monochromatický svazek rovnoběžných paprsků světla dopadá na vymezující otvor o průměru $x \gg \lambda$. Bod P vzdáleného pozorovacího stínítka leží v geometrickém stínu (obr. 37.35). Do vymezujícího otvoru jsou postupně umístěny dvě překážky: A je nepropustný kruh s otvorem a B je „fotografickým negativem“ překážky A. Ukažte pomocí představ o superpozici vlnění, že intenzita v bodě P je stejná, ať difrakce nastává na kterémkoli z objektů A a B.



Obr. 37.35 Úloha 14

15Ú. Pološirka centrálního difrakčního maxima je definována jako úhel mezi dvěma body centrálního maxima, v nichž je intenzita rovna polovině intenzity ve středu obrazce (obr. 37.7b). (a) Ukažte, že intenzita klesne na polovinu maximální hodnoty, když $\sin^2\alpha = \alpha^2/2$. (b) Ověřte, že $\alpha = 1{,}39$ rad (zhruba 80°) je řešením transcendentní rovnice v (a). (c) Ukažte, že pološirka je $\Delta\theta = 2\arcsin(0{,}443\lambda/a)$. (d) Vypočtěte pološirky centrálního maxima pro štěrbiny, jejichž šířky jsou 1,0, 5,0 a 10 vlnových délek.

16Ú. (a) Ukažte, že hodnoty α odpovídající maximům intenzity při difrakci na štěrbině lze přesně stanovit derivováním rov. (37.5) podle α a anulováním této derivace, což dává podmínku $\operatorname{tg}\alpha = \alpha$. (b) Nalezněte hodnoty α splňující tento vztah. Můžete postupovat buď tak, že vynesete křivku $y = \operatorname{tg}\alpha$ a přímku $y = \alpha$ a odečtete jejich průsečíky, nebo tak, že najdete příslušné hodnoty α zkusmo pomocí kapesního kalkulátoru. (c) Stanovte (necelé) hodnoty m odpovídající maximům v difrakčním obrazci od štěrbiny. Všimněte si, že vedlejší maxima nejsou přesně uprostřed mezi minimy.

17Ú*. Odvoďte tento výraz pro intenzitu v difrakčním obrazci od mřížky tvořené třemi štěrbinami:

$$I = \tfrac{1}{9} I_{\max}(1 + 4\cos\varphi + 4\cos^2\varphi),$$

kde $\varphi = (2\pi d \sin\theta)/\lambda$. Předpokládejte, že $a \ll \lambda$. Inspirujte se odvozením odpovídajícího výrazu pro dvojštěrbinu (rovnice (36.21)).

ODST. 37.5 Difrakce na kruhovém otvoru

18C. Předpokládejte, že svítilna v otázce 7 emituje světlo o vlnové délce 550 nm. Má-li kruh úhlový průměr přibližně 2,5°, jaký je (délkový) průměr struktury v oku, která tento kruh způsobuje?

19C. Mezi dvěma reflektory přibližujícího se automobilu je vzdálenost 1,4 m. Při jaké (a) úhlové vzdálenosti a (b) maximální vzdálenosti od automobilu je oko rozliší? Předpokládejte, že průměr pupily je 5,0 mm, a počítejte s vlnovou délkou 550 nm. Předpokládejte také, že rozlišení omezuje pouze difrakce.

20C. Astronaut letí v raketoplánu 160 km nad Zemí a tvrdí, že je právě tak schopen rozlišit dva bodové zdroje na zemském povrchu. Předpokládejte ideální podmínky a vypočtěte (a) úhlovou a (b) délkovou vzdálenost těchto zdrojů. Počítejte s $\lambda = 540$ nm a průměrem pupily astronautova oka 5,0 mm.

21C. Stanovte minimální vzdálenost dvou bodů na povrchu Měsíce, které může rozlišit 200palcový $= 5{,}1$ m dalekohled na Mount Palomaru. Předpokládejte, že tato vzdálenost je určena difrakčními jevy. Vzdálenost od Země na Měsíc je $3{,}8\cdot10^5$ km. Počítejte s vlnovou délkou 550 nm.

22C. Stěna velkého pokoje je obložena kachlemi, v nichž jsou po 5,0 mm vyvrtány drobné dírky. Jak daleko může být člověk od takového obložení, aby ještě rozlišil jednotlivé dírky? Předpokládejte ideální podmínky, průměr pupily pozorovatelova oka 4,0 mm a vlnovou délku osvětlení místnosti 550 nm.

23C. Pupila lidského oka má průměr 5,00 mm. Jak daleko od sebe musejí být dva malé objekty, abychom jejich obrazy právě rozlišili, jsou-li 250 mm od oka a osvětleny světlem o vlnové délce 500 nm?

24C. Odhadněte, jaká je za ideálních podmínek vzdálenost dvou objektů na planetě Marsu, které může ještě rozlišit pozorovatel na Zemi (a) prostým okem a (b) 200palcovým dalekohledem na Mount Palomaru. Vzdálenost k Marsu je $8{,}0\cdot10^7$ km, průměr pupily je 5,0 mm, vlnová délka světla je 550 nm.

25C. Superman je schopen vidět pomocí rentgenového záření o vlnové délce 0,10 nm a jeho pupila má průměr 4,0 mm. Z jaké maximální výšky je schopen rozeznat padouchy od hrdinů za předpokladu, že k tomu potřebuje rozlišit body vzdálené od sebe 5,0 cm?

26C. Křižník používá radaru s vlnovou délkou 1,6 cm. Kruhová anténa má průměr 2,3 m. Jaká je nejmenší vzdálenost mezi dvěma motorovými čluny, které může tento radarový systém rozlišit jako dva oddělené objekty ze vzdálenosti 6,2 km?

27Ú. Jaderně čerpané rentgenové lasery jsou považovány za možnou zbraň k ničení prvních stupňů mezikontinentálních balistických střel ve vzdálenostech až 2 000 km. Jedním z omezení takového zařízení je rozšíření svazku v důsledku difrakce, jež má za následek snížení intenzity. Uvažujte laser pracující na vlnové délce 1,40 nm. Elementem emitujícím světlo je konec drátu o průměru 0,200 mm. (a) Vypočtěte průměr centrálního svazku na terči ve vzdálenosti 2 000 km od zdroje svazku. (b) Kolikrát se zmenší intenzita svazku na cestě k terči? (Laser je zažehnut v prostoru mimo atmosféru, takže ztráty pohlcením v atmosféře není třeba brát v úvahu.)

28Ú. (a) Jak daleko musíte být od zrnek červeného písku, abyste byl právě na hranici rozlišení jednotlivých zrn, je-li průměr vaší pupily 1,5 mm, zrnka jsou kulovitá o poloměru 50 μm a světlo od zrn písku má vlnovou délku 650 nm? (b) Kdyby byla zrnka modrá a světlo od nich mělo vlnovou délku 400 nm, byla by vaše vzdálenost v otázce (a) větší, nebo menší?

29Ú. Barvy krovek svižníka (obr. 37.36) vznikají interferencí na tenkých kutikulárních vrstvách. Kromě toho tvoří tyto vrstvy šupinky o průměru 60 μm, které vytvářejí různé barvy. Barvy, které vidíte, jsou pak pointilistickou směsí barev vzniklých interferencí na tenkých vrstvách, jež se mění podle toho, odkud se

díváte. Odhadněte vzdálenost, ze které musíte pozorovat krovky, abyste podle Rayleighova kritéria byli na hranici rozlišení různých barevných šupin. Počítejte s vlnovou délkou světla 550 nm a s průměrem pupily vašeho oka 3,00 mm.



Obr. 37.36 Úloha 29. Zabarvení svižníků je pointilistickou směsí barev vzniklých interferencí na tenkých vrstvách.

30Ú. (a) Podmořským zdrojem zvuku pro detekci ponorek je kruhová membrána o průměru 60 cm kmitající s frekvencí 25 kHz. Ve velké vzdálenosti od zdroje odpovídá rozložení intenzity zvuku difrakčnímu obrazci na kruhovém otvoru, jehož průměr je týž jako průměr membrány. Počítejte s rychlostí zvuku ve vodě 1 450 m/s a zjistěte úhel mezi normálou k membráně a směrem prvního minima. (b) Zopakujte to pro zdroj mající (slyšitelnou) frekvenci 1,0 kHz.

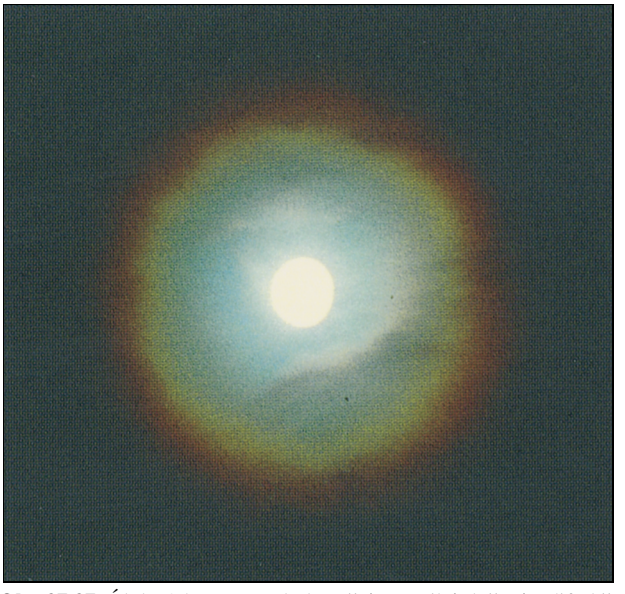
31Ú. V červnu 1985 byl z optické základny amerického letectva v Maui na Hawai vyslán laserový svazek, který se odrazil zpět od raketoplánu *Discovery*, když přelétal Maui ve výšce 220 mil. Průměr centrálního maxima svazku na raketoplánu byl 30 stop a vlnová délka svazku 500 nm. Jaký je efektivní průměr laserové apertury na základně v Maui? (*Tip*: Jedinou příčinou rozšiřování laserového svazku je difrakce; předpokládejte kruhovou výstupní aperturu.)

32Ú. Na špionážní družici ve výšce 160 km nad zemským povrchem byla čočka s ohniskovou vzdáleností 3,6 m, která je schopna rozlišit pozemní objekty o velikosti 30 cm; s její pomocí bylo snadno možné měřit velikost vzduchových nasávacích ventilů letadel. Jaký je efektivní průměr čočky, považujeme-li difrakci za jediný omezující faktor? Předpokládejte $\lambda = 550$ nm.

33Ú. Radar pracující s milimetrovou vlnou vysílá užší svazek než konvenční mikrovlnný radar, a je proto méně zranitelný protiradarovými střelami. (a) Vypočtěte úhlovou šířku centrálního maxima (od prvního minima k prvnímu minimu) vytvořeného 220 GHz radarovým svazkem vyslaným kruhovou anténou o průměru 55,0 cm. (Frekvence je zvolena tak, aby padla do málo pohlcujícího atmosférického „okna“.) (b) Vypočtěte stejný údaj pro radar na křižníku ze cvič. 26.

34Ú. (a) Jaká je úhlová vzdálenost dvou hvězd, jejichž obrazy lze ještě rozlišit Thawovým refraktorem Alleghenské observatoře v Pittsburghu? Průměr objektivu je 76 cm a jeho ohnisková vzdálenost je 14 m. Předpokládejte $\lambda = 550$ nm. (b) Stanovte vzdálenost mezi těmito ještě rozlišitelnými hvězdami, je-li každá z nich ve vzdálenosti 10 světelných let od Země. (c) Nalezněte průměr prvního tmavého kroužku v difrakčním obrazci, vytvořeného obrazem jedné hvězdy v dalekohledu. Tento průměr lze změřit na fotografické desce umístěné v ohniskové rovině objektivu. Předpokládejte, že struktura obrazu souvisí pouze s difrakcí na apertuře objektivu a nikoli s vadami objektivu.

35Ú. Kruhová překážka dává týž difrakční obrazec jako kruhový otvor stejného průměru (s výjimkou směrů velmi blízkých $\theta = 0$.) Drobné kapičky vody ve vzduchu jsou příkladem takových překážek. Pozorujete-li Měsíc přes rozptýlené vodní kapičky, např. mlhu, vidíte difrakční obrazec od mnoha kapiček. Výsledkem je jasné kolo okolo Měsíce (obr. 37.37). V blízkosti Měsíce je obrazec bílý. (a) Jaká barva je na hranici tohoto bílého obrazce? Červená, nebo modrá? (b) Předpokládejte, že ohraničující kruh má úhlový průměr 1,5krát větší, než je úhlový průměr Měsíce 0,50°. Jak asi jsou velké kapičky mlhy?



Obr. 37.37 Úloha 35. Korona okolo Měsíce vzniká složením difrakčních obrazců od kapiček vody ve vzduchu.

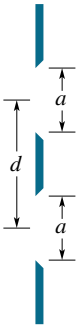
36Ú. Ve společném sovětsko-francouzském experimentu, jenž svazkem světla monitoroval povrch Měsíce, byly pulzy světla z rubínového laseru ($\lambda = 0{,}69\,\mu$m) nasměrovány k Měsíci reflektorem (dalekohledem) se zrcadlem o poloměru 1,3 m. Odražeč na Měsíci se choval jako kruhové rovinné zrcadlo o poloměru 10 cm a odrážel světlo přímo zpět do dalekohledu na Zemi. Odražené světlo tak prošlo dalekohledem a bylo detegováno v ohnisku. Jaká část původní světelné energie byla detektorem

snímána? Předpokládejte, že v obou směrech šíření je veškerá energie soustředěna v centrálním difrakčním maximu.

ODST. 37.6 Difrakce na dvojštěrbině

37C. Centrální difrakční obálka difrakčního obrazce od dvojštěrbiny obsahuje 11 světlých proužků a první difrakční minima eliminují světlé proužky (tj. koincidují s nimi). Kolik světlých proužků je mezi prvním a druhým minimem difrakční obálky?

38C. Kolik světlých interferenčních proužků leží v centrální difrakční obálce, je-li na obr. 37.38 $d = 2a$?



Obr. 37.38 Cvičení 38 a úloha 39

39Ú. Při $d = a$ v obr. 37.38 splynou obě štěrbiny v jednu o šířce $2a$. Ukažte, že rov. (37.19) se redukuje na rovnici vztahující se k difrakčnímu obrazci od takové štěrbiny.

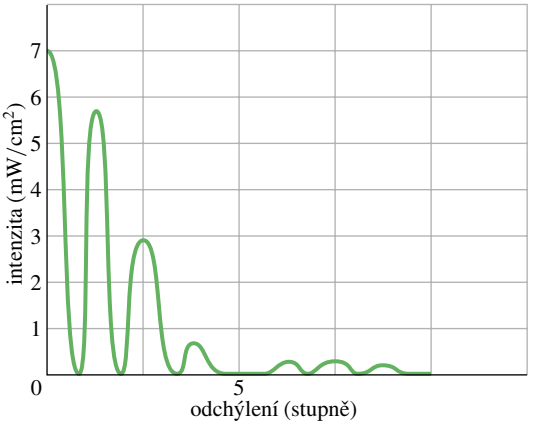
40Ú. (a) Jaký musí být poměr d/a dvojštěrbiny, aby difrakce eliminovala čtvrtý světlý vedlejší proužek? (b) Které jiné světlé proužky jsou rovněž eliminovány?

41Ú. Dvě štěrbiny o šířce a a s roztečí d jsou osvětleny koherentním světlem o vlnové délce λ. Jaká je rozteč světlých interferenčních proužků pozorovaných na stínítku ve vzdálenosti l od dvojštěrbiny?

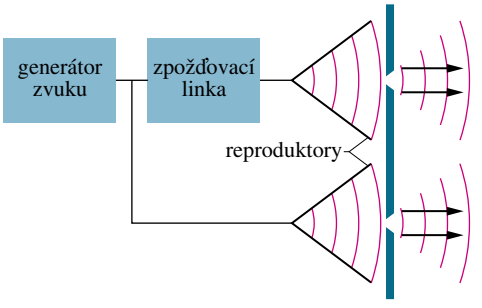
42Ú. (a) Kolik proužků se objeví mezi prvními difrakčními minimy difrakční obálky po obou stranách centrálního maxima v difrakčním obrazci na dvojštěrbině, když $\lambda = 550\,\text{nm}$, $d = 0{,}150\,\text{mm}$ a $a = 30\,\mu\text{m}$? (b) Jaký je poměr intenzity třetího světlého proužku k intenzitě centrálního proužku?

43Ú. Světlo o vlnové délce 440 nm prochází dvojštěrbinou a vytváří difrakční obrazec, v němž intenzita I závisí na difrakčním úhlu θ podle obr. 37.39. Vypočtěte (a) šířku štěrbin a (b) vzdálenost mezi štěrbinami. (c) Ověřte hodnoty intenzity odpovídající v grafu interferenčním proužkům s $m = 1$ a $m = 2$.

44Ú. Dvojštěrbina pro difrakci zvuku (s roztečí štěrbin d a šířkou štěrbin a) je napájena dvěma reproduktory, jak to ukazuje obr. 37.40. S použitím zpožďovací linky lze měnit fázi jednoho z reproduktorů. Popište podrobně, jak se bude měnit velmi vzdálený difrakční obrazec na dvojštěrbině, bude-li se měnit fázový rozdíl obou reproduktorů od nuly do 2π. Vezměte v úvahu jak difrakční, tak interferenční efekty.



Obr. 37.39 Úloha 43



Obr. 37.40 Úloha 44

ODST. 37.7 Difrakční mřížky

45C. Difrakční mřížka široká 20,0 mm má 6 000 vrypů. (a) Vypočtěte vzdálenost d mezi sousedními vrypy. (b) Pod kterými úhly se objeví maxima intenzity, má-li dopadající záření vlnovou délku 589 nm?

46C. Difrakční mřížka má 200 vrypů/mm a dává maximum intenzity pod úhlem $\theta = 30{,}0°$. (a) Jaké jsou možné vlnové délky dopadajícího viditelného světla? (b) Jakým barvám odpovídají?

47C. Mřížka má 315 vrypů/mm. Pro kterou vlnovou délku viditelného spektra lze pozorovat difrakci pátého řádu?

48C. Kolik řádů celého viditelného spektra (400 nm až 700 nm) může vzniknout na mřížce s 400 vrypy/mm kromě řádu $m = 0$?

49C. Difrakční mřížka o šířce 3,00 cm dává druhý řád difrakce světla o vlnové délce 600 nm pod úhlem 33,0°. Jaký je celkový počet vrypů mřížky?

50C. Někteří tropičtí vírníkovití brouci jsou zbarveni optickou interferencí pocházející od šupinek vytvářejících difrakční mřížku. (My pozorujeme světlo rozptýlené a nikoli prošlé.) Když světlo dopadá kolmo na tuto mřížku, je úhel mezi maximy prvního řádu (po obou stranách maxima nultého řádu) asi 26°. Jaká je její mřížková konstanta? Za vlnovou délku světla vezměte hodnotu 550 nm.

51C. Difrakční mřížku o šířce 1,0 cm tvoří 10 000 rovnoběžných štěrbin. Monochromatické světlo dopadající kolmo na

mřížku je v prvním řádu odchýleno o 30°. Jaká je jeho vlnová délka?

52Ú. Světlo o vlnové délce 600 nm dopadá kolmo na difrakční mřížku. Úhly dvou sousedních maxim jsou určeny podmínkami $\sin\theta = 0{,}2$ a $\sin\theta = 0{,}3$. Maximum čtvrtého řádu chybí. (a) Jaká je vzdálenost sousedních štěrbin? (b) Jaká je nejmenší možná šířka štěrbin? (c) Které řády maxim intenzity vytváří mřížka za předpokladu, že má parametry odvozené v (a) a (b)?

53Ú. Difrakční mřížku tvoří štěrbiny o šířce 300 nm a s roztečí 900 nm. Kolmo na mřížku dopadá monochromatická rovinná vlna s vlnovou délkou $\lambda = 600$ nm. (a) Kolik je v celém obrazci difrakčních maxim? (b) Jaká je šířka spektrální čáry pozorované v prvním řádu, má-li mřížka 1 000 štěrbin?

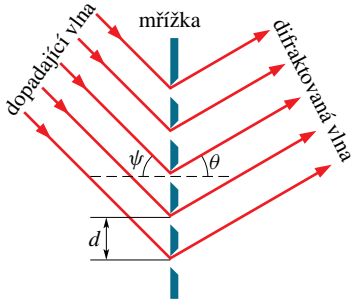
54Ú. Předpokládejte, že viditelné spektrum je vymezeno vlnovými délkami 430 nm a 680 nm. Vypočtěte, kolik vrypů na milimetr má mřížka, která rozloží spektrum prvního řádu do úhlu 20°.

55Ú. Světlo výbojky dopadá kolmo na mřížku s roztečí štěrbin 1,73 μm. Ostrá maxima zeleného světla pozorujeme pod úhly $\theta = \pm 17{,}6°$, $+37{,}3°$, $-37{,}1°$, $+65{,}2°$ a $-65{,}0°$. Vypočtěte vlnovou délku zeleného světla, která nejlépe vyhovuje těmto hodnotám.

56Ú. Na mřížku dopadá světlo pod úhlem ψ (obr. 37.41). Ukažte, že světlé proužky se objeví pod úhly θ, které splňují rovnici

$$d(\sin\psi + \sin\theta) = m\lambda, \text{ kde } m = 0, 1, 2, \ldots .$$

(Porovnejte tuto rovnici s rov. (37.25).) V této kapitole jsme probírali pouze speciální případ $\psi = 0$.



Obr. 37.41 Úloha 56

57Ú. Světlo o vlnové délce 600 nm dopadá pod různými úhly na mřížku s $d = 1{,}50$ μm. Vyjádřete graficky úhlovou odchylku α směru maxima prvního řádu od směru dopadu jako funkci úhlu dopadu, tj. $\alpha = \alpha(\psi)$. (Viz úlohu 56.)

58Ú. Dvě emisní čáry mají vlnové délky λ a $\lambda + \Delta\lambda$, kde $\Delta\lambda \ll \lambda$. Ukažte, že jejich úhlová vzdálenost v mřížkovém spektrometru je přibližně dána výrazem

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{(d/m)^2 - \lambda^2}},$$

kde d je mřížková konstanta a m je řád, ve kterém se čáry pozorují. Všimněte si, že úhlová vzdálenost je ve vyšších řádech větší než v nižších řádech.

59Ú. Na mřížku kolmo dopadá bílé světlo (sestávající z vlnových délek od 400 nm do 700 nm). Ukažte, že druhý řád se překrývá s třetím řádem, a to nezávisle na hodnotě mřížkové konstanty d.

60Ú. Ukažte, že mřížka vytvořená ze střídajících se propustných a nepropustných proužků stejné šířky eliminuje všechna maxima sudých řádů (s výjimkou $m = 0$).

61Ú. Na mřížku s 350 vrypy na milimetr dopadá kolmo bílé světlo, jehož spektrum pozorujeme na stínítku ve vzdálenosti 30 cm od mřížky. Ve stínítku vyřízneme štěrbinu širokou 10 mm, která je rovnoběžná s centrálním maximem a jejíž vnitřní okraj je ve vzdálenosti 50 mm od centrálního maxima. Vypočtěte interval vlnových délek, které projdou štěrbinou.

62Ú. Odvoďte rov. (37.28) pro pološirku čáry difraktované ve směru θ.

ODST. 37.8 Mřížky: disperze a rozlišovací schopnost

63C. Čára D ve spektru sodíku je dubletem s vlnovými délkami 589,0 nm a 589,6 nm. Vypočtěte minimální počet čar, které musí mít mřížka, aby rozlišila tento dublet ve spektru druhého řádu. Viz př. 37.7.

64C. Mřížka má 600 vrypů/mm a šířku 5,0 mm. (a) Jaký nejmenší interval vlnových délek může rozlišit ve třetím řádu při $\lambda = 500$ nm? (b) Kolik maxim vyšších řádů lze pozorovat?

65C. Zdroj obsahující směs atomů vodíku a deuteria emituje červené světlo se dvěma vlnovými délkami, jejichž střední hodnota je 656,3 nm a vzdálenost mezi nimi je 0,180 nm. Najděte minimální počet vrypů, které musí mít mřížka, má-li rozlišit tyto čáry v prvním řádu.

66C. (a) Kolik vrypů musí mít difrakční mřížka široká 4,00 cm, má-li ve druhém řádu rozlišit vlnové délky 415,496 nm a 415,487 nm? (b) Jaké jsou difrakční úhly příslušných maxim intenzity?

67C. Kolmo na difrakční mřížku dopadá světlo sodíkového dubletu jako v př. 37.7. Difrakce třetího řádu svírá s normálou úhel 10° a dublet je v tomto řádu na hranici rozlišení. Nalezněte (a) mřížkovou konstantu a (b) šířku celé mřížky.

68C. Ukažte, že disperze mřížky je $D = (\operatorname{tg}\theta)/\lambda$.

69C. Mřížka má 40 000 vrypů a šířku 76 mm. (a) Jakou disperzi D lze očekávat pro první tři řády sodíkového světla ($\lambda = 589$ nm)? (b) Jaká je v těchto řádech rozlišovací schopnost mřížky?

70Ú. Na difrakční mřížku kolmo dopadá světlo složené ze dvou vlnových délek, 500 nm a 600 nm. Požadujeme, aby (1) difrakční úhly θ prvních a druhých maxim pro obě tyto vlnové délky byly menší nebo nejvýše rovny 30°, (2) disperze byla co největší a (3) chyběl třetí řád pro vlnovou délku 600 nm. (a) Jaká by měla být mřížková konstanta? (b) Jaká je nejmenší možná šířka jednotlivých štěrbin mřížky? (c) Které řády maxim intenzity vlnové délky 600 nm mřížka vytvoří při hodnotách odvozených v (a) a (b)?

71Ú. (a) Úhel θ udává polohu čáry vzniklé difrakcí na mřížce. Vyjádřete součin pološirky této čáry a rozlišovací schopnosti jako funkci úhlu θ. (b) Uveďte číselnou hodnotu tohoto součinu pro první řád a mřížku z úlohy 53.

72Ú. Mřížka má rozlišovací schopnost $R = \lambda_{\text{stř}}/\Delta\lambda = Nm$. (a) Ukažte, že odpovídající rozdíl frekvencí Δf, které lze ještě rozlišit, je dán výrazem $\Delta f = c/(Nm\lambda)$. (b) Ukažte s pomocí obr. 37.17, že časy, za které světlo proběhne dráhy odpovídající oběma krajním paprskům, se liší o hodnotu $\Delta t = (Nd/c)\sin\theta$. (c) Ukažte, že $(\Delta f)(\Delta t) = 1$ nezávisle na parametrech mřížky. Předpokládejte $N \gg 1$.

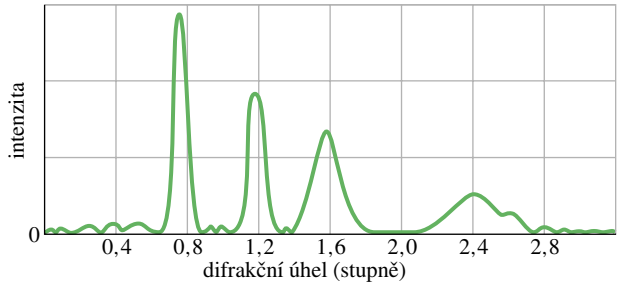
ODST. 37.9 Rentgenová difrakce

73C. Rentgenové záření o vlnové délce 0,12 nm vykazuje na krystalu fluoridu lithného reflexi druhého řádu pod Braggovým úhlem 28°. Jaká je mezirovinná vzdálenost reflexních rovin v krystalu?

74C. Jaký je nejmenší Braggův úhel pro reflexi rentgenového záření o vlnové délce 30 pm na reflexních rovinách krystalu vápence s mezirovinnou vzdáleností 0,30 nm?

75C. Nastává-li reflexe prvního řádu pod Braggovým úhlem 3,4°, pod jakým úhlem nastane reflexe druhého řádu na téže soustavě reflexních rovin?

76C. Na obr. 37.42 je graf intenzity rentgenového záření difraktovaného krystalem v závislosti na difrakčním úhlu. Rentgenové záření obsahuje dvě vlnové délky a mezirovinná vzdálenost reflexních rovin je 0,94 nm. O které dvě vlnové délky jde?



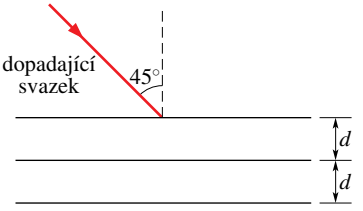
Obr. 37.42 Cvičení 76

77C. Svazek rentgenového záření o vlnové délce λ vykazuje reflexi prvního řádu, dopadá-li na stěnu krystalu pod úhlem 23° a svazek rentgenového záření o vlnové délce 97 pm vykazuje reflexi třetího řádu, dopadá-li na touž krystalovou stěnu pod úhlem 60°. Najděte (a) mezirovinnou vzdálenost a (b) vlnovou délku λ za předpokladu, že oba svazky reflektují na téže soustavě reflexních rovin.

78C. Svazek rentgenového záření o určité vlnové délce dopadá na krystal tak, že svírá 30,0° s jistou soustavou reflexních rovin, jejíž mezirovinná vzdálenost je 39,8 pm. Jaká je vlnová délka rentgenového záření, nastává-li na těchto rovinách reflexe prvního řádu?

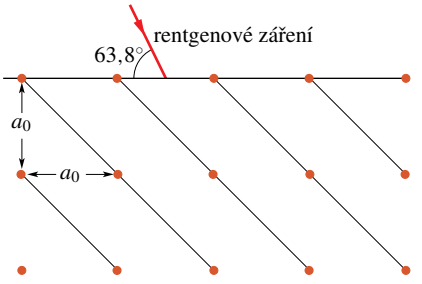
79C. Dokažte, že není možné současně určit vlnovou délku záření i mezirovinnou vzdálenost reflexních rovin v krystalu pouze ze změřených Braggových úhlů několika řádů.

80Ú. Na obr. 37.43 je schematicky naznačen svazek tvrdého rentgenového záření s vlnovými délkami v rozsahu od 95,0 pm do 140 pm, který dopadá na soustavu reflexních rovin s mezirovinnou vzdáleností $d = 275$ pm. Při kterých vlnových délkách budou reflexe na těchto rovinách představovat difrakční maxima intenzity?



Obr. 37.43 Úlohy 80 a 83

81Ú. Reflexe prvního řádu nastává na reflexních rovinách vyznačených na obr. 37.44, když svazek rentgenového záření o vlnové délce 0,260 nm svírá s horní stěnou krystalu úhel 63,8°. Jaká je hodnota mřížkové konstanty a_0?



Obr. 37.44 Úloha 81

82Ú. Uvažujte dvojrozměrnou čtvercovou krystalovou strukturu, např. jednu stěnu struktury znázorněné na obr. 37.27a. Jednou z mezirovinných vzdáleností reflexních rovin je mřížková konstanta a_0. (a) Vypočtěte a zakreslete dalších pět menších mezirovinných vzdáleností. (b) Ukažte, že tyto výsledky v (a) splňují obecnou rovnici

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

kde h a k jsou nesoudělná celá čísla.

83Ú. Svazek rentgenového záření o vlnové délce 0,125 nm dopadá na horní stěnu krystalu pod úhlem 45,0° (obr. 37.43). Reflexní roviny mají mezirovinnou vzdálenost $d = 0{,}252$ nm. O jaké úhly je třeba krystal pootočit kolem osy kolmé k rovině obrázku, aby odrazy na těchto reflexních rovinách dávaly difrakční maxima intenzity?

38
Relativita



Dnešní dálková navigace soustavně sleduje a aktualizuje přesné polohy a rychlosti letadel. Systém navigačních družic NAVSTAR dovoluje určovat kdekoli na Zemi polohy s přesností asi 16 m a rychlosti s přesností asi 2 cm/s. Kdyby se však nepočítalo s relativistickými jevy, rychlosti by nemohly být určeny s větší přesností než asi 20 cm/s, což je pro moderní navigační systémy nedostatečné. Jak může něco tak abstraktního, jako je Einsteinova speciální teorie relativity, hrát roli při něčem tak praktickém, jako je navigace?

38.1 CO VŠECHNO PATŘÍ K RELATIVITĚ

Relativita se zabývá měřením událostí (něčeho, co se stalo nebo stane): kde a kdy se staly a jak jsou libovolné dvě události vzdáleny v prostoru a v čase. Dále se relativita stará o to, jak transformovat výsledky takových měření a jiná data mezi vztažnými soustavami, které se vzájemně pohybují. (Odtud název *relativita*.) O takových věcech jsme diskutovali v čl. 4.8 a 4.9.

Transformacím a pohybům vztažných soustav fyzikové roku 1905 dobře rozuměli a byla to pro ně vpodstatě rutinní záležitost. Tehdy Albert Einstein (obr. 38.1) uveřejnil svou **speciální teorii relativity**. Přívlastek *speciální* znamená, že teorie se zabývá pouze **inerciálními vztažnými soustavami**; ty se navzájem pohybují konstantními rychlostmi. (Einsteinova *obecná teorie relativity* se zabývá složitější situací, kdy se vztažné soustavy pohybují zrychleně; v této kapitole se výraz *relativita* vztahuje pouze k inerciálním vztažným soustavám.)



Obr. 38.1 Einstein na počátku 20. století, za svým stolem v patentovém úřadu v Bernu ve Švýcarsku. Byl zde zaměstnán v době, kdy publikoval svou speciální teorii relativity.

Einstein ohromil vědecký svět, když vyšel ze dvou drtivě prostých postulátů a ukázal, že dosavadní představy o relativitě byly mylné, ačkoli si na ně každý natolik zvykl, že působily jako nepochybný požadavek zdravého rozumu. Tento údajný zdravý rozum však byl odvozen ze zkušenosti, která se týkala pouze věcí, jež se pohybují dosti pomalu. Einsteinova relativita, která se ukázala být správná pro všechny možné rychlosti, předpověděla mnoho jevů, jež působily na první pohled bizarně, protože je nikdo nezakusil.

Einstein zejména ukázal, že prostor a čas jsou vzájemně provázány, že tedy čas dělící dvě události závisí na tom, jak daleko od sebe proběhly, a naopak. A toto provázání je různé pro různé pozorovatele, kteří se vzájemně pohybují. Jedním z důsledků je, že čas neběží jediným daným tempem, jako by s mechanickou pravidelností odtikával na nějakých perfektních dědečkových hodinkách, jimiž se řídí celý vesmír. Čas lze vlastně v jistém smyslu regulovat: relativní pohyb dokáže změnit tempo, jímž čas běží. Před rokem 1905 by si na to troufalo pomyslet snad jen několik snílků. Dnes jsou si tím jisti inženýři a vědci, protože jejich zkušenost se speciální relativitou nově zformovala jejich zdravý rozum.

Speciální relativita má pověst nesnadného tématu. Matematicky obtížná není, přinejmenším v podobě, jakou má v této knize. Její nesnadnost však tkví v tom, že je třeba velmi pozorně sledovat, *kdo* danou událost měří, *co* na ní měří a *jak* toto měření provádí. A to může být obtížné, protože výsledek někdy protiřečí zkušenosti. Než budete číst dál, může se vám hodit přehled některých poznatků ze speciální relativity, které už byly v této knize diskutovány. Vodítkem je tab. 38.1.

Tabulka 38.1 **Dřívější zmínky o relativitě**

ČLÁNEK	JMÉNO
4.10	Vzájemný pohyb při vysokých rychlostech
7.8	Kinetická energie při vysokých rychlostech
8.8	Hmotnost a energie
10.6	Jaderné reakce a radioaktivní rozpad

38.2 POSTULÁTY

Nyní probereme dva relativistické postuláty, na nichž je Einsteinova teorie založena.

Postulát relativity: Fyzikální zákony jsou stejné pro pozorovatele ve všech inerciálních vztažných soustavách. Žádná soustava není preferována.

Galilei předpokládal, že zákony *mechaniky* jsou stejné ve všech inerciálních vztažných soustavách. (Newtonův první pohybový zákon ve své historické formulaci je jedním z důležitých důsledků.) Einstein rozšířil tuto myšlenku, aby obsahovala *všechny* fyzikální zákony, zejména zákony elektromagnetismu a optiky. Postulát *neříká*, že měřené hodnoty všech fyzikálních veličin jsou stejné pro všechny

inerciální pozorovatele; většinou tomu ani tak není. Stejné jsou *fyzikální zákony*, jimiž jsou výsledky měření vázány.

Postulát rychlosti světla: Rychlost světla ve vakuu má stejnou velikost c ve všech směrech a ve všech inerciálních vztažných soustavách, nezávislou na rychlosti zdroje.

Tento postulát můžeme formulovat také tak, že v přírodě existuje *mezní rychlost* c, jež je stejně velká ve všech směrech a ve všech inerciálních soustavách. Světlo se pohybuje touto mezní rychlostí stejně jako všechny částice o nulové hmotnosti. Dále žádná částice, která má nenulovou hmotnost, nemůže rychlosti c nikdy dosáhnout, i kdyby byla urychlována jakkoli dlouho. Ba ani žádná informace, ať už je přenášená jakkoli a čímkoli, nemůže letět rychleji než světlo. Pokud se něco pohybuje rychleji než světlo — třeba stín nebo světelná stopa na stínítku — pak na to nikdy nelze „zavěsit" nějakou informaci a poslat ji tak dál.

Oba postuláty byly vyčerpávajícím způsobem ověřovány a nebyly nalezeny žádné výjimky z jejich platnosti.

Mezní rychlost

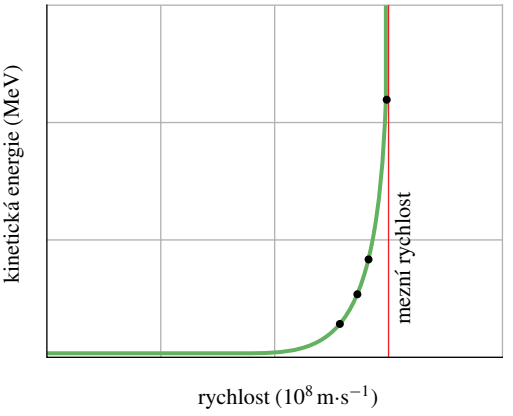
To, že opravdu existuje mez pro rychlost urychlovaných elektronů, ukázal roku 1964 experiment W. Bertozziho. Elektrony v něm byly urychlovány na různé měřené rychlosti (obr. 38.2) a byla také — nezávislou metodou — měřena jejich kinetická energie. Bertozzi zjistil, že když síla působící na velmi rychlý elektron roste, pak i měřená kinetická energie roste na velmi vysoké hodnoty, ale rychlost elektronu již podstatně nevzrůstá. Elektrony byly urychlovány nejméně na 0,999 999 999 95 rychlosti světla — tak blízko této rychlosti, jak jen bylo možné — ale pořád to byla rychlost menší než mezní rychlost.

Testování postulátu rychlosti světla

Je-li rychlost světla stejná ve všech inerciálních vztažných soustavách, znamená to, že rychlost světla emitovaného pohybujícím se zdrojem by měla být stejná jako rychlost světla, které emituje týž zdroj v klidu vzhledem k dané laboratoři. Tento požadavek byl přímo ověřován v experimentu, který se vyznačoval vysokou přesností. „Zdrojem světla" byl *neutrální pion* (symbol π^0), nestabilní částice s krátkou dobou života, která může vzniknout v důsledku srážek v urychlovači částic. Rozpadá se na dva γ-paprsky v procesu

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma. \qquad (38.1)$$

Paprsky γ jsou součástí elektromagnetického spektra a splňují postulát rychlosti světla stejně jako viditelné světlo.



Obr. 38.2 Tečkami jsou vyznačeny naměřené hodnoty kinetické energie elektronu v závislosti na naměřené rychlosti elektronu. Ať dodáme elektronu (anebo libovolné jiné hmotné částici) kolik chceme energie, jeho rychlost nikdy nedosáhne ani nepřevýší mezní rychlost — rychlost světla. (Spojitá křivka ukazuje závislost podle Einsteinovy teorie relativity.)

V experimentu z roku 1964 fyzikové z CERNu, laboratoře částicové fyziky poblíž Ženevy, vytvořili svazek pionů pohybující se rychlostí $0{,}999\,75c$ vzhledem k laboratoři. Pak experimentátoři měřili rychlost γ-paprsků emitovaných těmito velmi rychle se pohybujícími zdroji. Zjistili, že rychlost světla emitovaného piony je stejně velká, jako byla v případě, kdy byly piony v laboratoři v klidu.

PŘÍKLAD 38.1

Lze ukázat, že elektron s kinetickou energií 20 GeV (mluvívá se o 20 GeV-elektronu) má rychlost $v = 0{,}999\,999\,999\,67c$. Zúčastní-li se takový elektron závodu se světelným pulzem se startem v okolí Slunce a s cílem u nejbližší hvězdy (Proxima Centauri, vzdálenost 4,3 světelné roky čili $4{,}0{\cdot}10^{16}$ m), s jakým časovým náskokem světelný pulz zvítězí?

ŘEŠENÍ: Je-li L vzdálenost hvězdy, je rozdíl časů putování

$$\Delta t = \frac{L}{v} - \frac{L}{c} = L\frac{c-v}{vc}.$$

Zde v je natolik blízké c, že můžeme ve jmenovateli výrazu (ne však v čitateli!) položit $v = c$. Pak dostaneme

$$\Delta t = \frac{L}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \\ = \frac{(4{,}0{\cdot}10^{16}\ \mathrm{m})(1 - 0{,}999\,999\,999\,67)}{(3{,}0{\cdot}10^{8}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})} = \\ = 0{,}044\ \mathrm{s} = 44\ \mathrm{ms}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

38.3 MĚŘENÍ UDÁLOSTÍ

Událost je něco, co se stalo nebo stane a čemu pozorovatel může připsat tři prostorové souřadnice (x, y, z) a jednu souřadnici časovou (t). Z ohromného počtu možných událostí uveďme (1) rozsvícení a zhasnutí malé žárovky, (2) srážku dvou částic, (3) průchod světelného pulzu vyznačeným bodem, (4) výbuch, (5) průchod hodinové ručičky přes rysku na obvodu hodin. Pozorovatel, který je vázán na jistou inerciální vztažnou soustavu, může události A připsat následující souřadnice:

ZÁZNAM UDÁLOSTI A	
SOUŘADNICE	HODNOTA
x	3,58 m
y	1,29 m
z	0 m
t	34,5 s

Protože v relativitě jsou prostor a čas vzájemně provázány, nazýváme tyto souřadnice společným názvem **prostoročasové souřadnice**. Souřadnicová soustava je dána v rámci vztažné soustavy pozorovatele.

Daná událost může být zaznamenána libovolným počtem pozorovatelů, kteří jsou spojeni s různými inerciálními vztažnými soustavami. Obecně vzato, různí pozorovatelé připíší téže události různé prostoročasové souřadnice. Upozorněme, že v žádném slova smyslu nelze říci, že událost „patří“ do určité vztažné inerciální soustavy. Událost je prostě něco, co se událo nebo udá, a kdokoli se na ni může v kterékoli vztažné soustavě dívat a připisovat jí prostoročasové souřadnice.

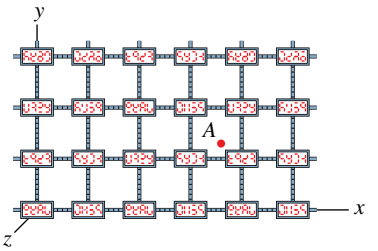
Takové připsání může ovšem narazit na praktickou potíž. Dejme tomu, že například 1 km od vás napravo praskne balon a 2 km od vás nalevo je odpálena raketa, přičemž obojí se stane v 9:00 dopoledne. Vy ale nezaznamenáte obě události přesně v 9:00 dopoledne, protože v tu dobu vás světlo od nich se šířící ještě nedostihlo. Protože světlo z odpálení rakety má delší cestu, dospěje k vašim očím později než světlo z prasknutí balonu, a tak se vám bude zdát, že k odpálení došlo později než k prasknutí. Chcete-li se dostat ke skutečnému času a připsat oběma událostem čas 9:00 dopoledne, musíte vypočítat doby putování světla a odečíst je od časů příchodu.

V složitějších případech může být tento postup velmi pracný a potřebovali bychom prostší metodu, která by automaticky vyloučila jakoukoli potřebu starat se o dobu cesty od události k pozorovateli. K tomu stačí si představit myšlenou mříž z měřicích tyčí osazenou hodinami a prostupující pozorovatelovu inerciální soustavu (mříž se pohybuje s pozorovatelem, jako by byla tuhým tělesem). Taková konstrukce může vypadat uměle, ale ušetří nás mnoha zmatků a výpočtů a dovolí nám nalézt prostorové souřadnice, časovou souřadnici a tím prostoročasové souřadnice, jak dále vyložíme.

1. **Prostorové souřadnice.** Představme si, že pozorovatelova souřadnicová soustava je prostoupena hustou trojrozměrnou mříží z měřicích tyčí, v níž každý soubor tyčí je rovnoběžný s jednou ze tří souřadnicových os. Tyto tyče umožňují určit souřadnice ve směru os. Je-li měřenou událostí například zapnutí malé žárovky, pak pozorovateli pro označení polohy této události stačí zaznamenat tři prostorové souřadnice v místě vzplanutí žárovky.

2. **Časová souřadnice.** Pro určení časové souřadnice si představme, že každý průsečík mříže měřicích tyčí je vybaven malými hodinami, na nichž může pozorovatel odečítat údaj ve chvíli, kdy byly osvětleny danou událostí. Obr. 38.3 zviditelňuje „prolézačku“ hodin a měřicích tyčí, jak jsme ji popsali.

Soubor hodin musí být správně synchronizován. Nestačí připravit soubor stejných hodin, nastavit na nich stejný čas a pak je roznést na určená místa. Nevíme například, zda pohybující se hodiny nezmění tempo svého chodu. (Ve skutečnosti je změní.) Musíme hodiny nejprve rozmístit a *potom* je synchronizovat.



Obr. 38.3 Řez trojrozměrným polem hodin a měřicích tyčí, kterými pozorovatel může přiřadit události její prostoročasové souřadnice. Záblesk světla (bod A) má souřadnice zhruba $x = 3{,}7$ tyčí, $y = 1{,}2$ tyčí, $z = 0$. Časovou souřadnici udávají ty hodiny, které jsou v daném okamžiku v těsné blízkosti události A.

Kdybychom znali způsob, jak posílat signály nekonečnou rychlostí, byla by synchronizace jednoduchá. Neznáme však signál, který by měl tuto vlastnost. Užijeme proto k našim synchronizujícím signálům světlo (které chápeme šíře tak, že zahrnuje celé elektromagnetické spektrum), protože víme, že ve vakuu se světlo šíří největší možnou rychlostí, mezní rychlostí c.

Uvedeme jeden z mnoha způsobů, jímž lze synchronizovat soubor hodin pomocí světelných signálů. Pozorovateli pomáhá velký počet spolupracovníků, z nichž každý

se stará o jedny hodiny. Pozorovatel stojí v bodě, který byl zvolen jako počátek, a posílá světelný pulz v okamžiku, kdy na hodinách v počátku je údaj $t = 0$. Když světelný pulz dospěje ke kterémukoli pomocníkovi, ten nastaví na svých hodinách údaj $t = r/c$, kde r je vzdálenost mezi ním a počátkem. Tím jsou hodiny synchronizovány.

3. **Prostoročasové souřadnice.** Pozorovatel nyní může připsat každé události prostoročasové souřadnice, když prostě zaznamená čas na hodinách u dané události a polohu, jak ji udávají nejbližší měřicí tyče. Jde-li o dvě události, pozorovatel vypočte jejich časový rozdíl jako rozdíl časů na hodinách u daných událostí, a rozdílnost jejich poloh v prostoru určí pomocí rozdílů souřadnic na tyčích u těchto událostí. Tak se vyhneme nesnázím, které by v praxi přineslo čekání, až k pozorovateli dospějí signály od událostí, a následné počítání dob, po které tyto signály putovaly.

38.4 RELATIVITA SOUČASNOSTI

Předpokládejme, že jeden pozorovatel (Slávek) zjišťuje, že dvě nezávislé události (Rudá a Modrá) nastávají ve stejném čase. Dejme tomu, že další pozorovatel (Sylva), který se pohybuje konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ vzhledem ke Slávkovi, zaznamenává tytéž události. Zjistí i Sylva, že události nastaly ve stejném čase?

Odpověď je v obecném případě záporná.

Pokud se dva pozorovatelé vzájemně pohybují, pak se nebudou obecně shodovat v tom, které události jsou současné. Když je jeden pozorovatel označí za současné, pro druhého obecně současné nebudou, a opačně.

Nemůžeme říci, že jeden pozorovatel má pravdu a druhý se mýlí. Jejich pozorování mají stejnou platnost a není důvodu dávat některému z nich přednost.

Konstatování, že dva protichůdné výroky o téže věci mohou být správné, se zdá být podivným důsledkem Einsteinovy teorie. Ale již v kap. 18 jsme probírali jiný případ, kdy pohyb může ovlivnit měření, aniž to vede k rozporným výsledkům: u Dopplerova jevu závisí frekvence zvukové vlny na relativním pohybu pozorovatele a zdroje. Dva pozorovatelé, kteří se navzájem pohybují, mohou tedy naměřit rozdílné frekvence pro tutéž vlnu. A obě měření jsou správná.

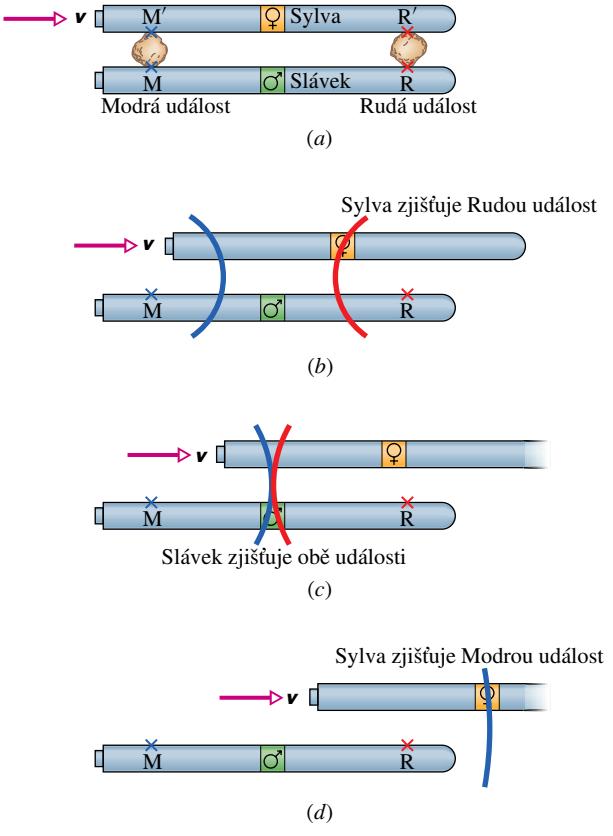
Uzavřeme:

Současnost není absolutním pojmem, ale pojmem relativním, který závisí na vztažné soustavě, v níž pozorovatel stojí.

Je-li relativní rychlost pozorovatele mnohem menší než rychlost světla, pak měřené rozdíly současnosti pro různé pozorovatele jsou příliš malé, než abychom je zaznamenali. Tak je tomu ve všech zkušenostech z našeho běžného života, a proto působí relativita současnosti tak neobvykle.

Bližší pohled na současnost

Objasněme relativitu současnosti na příkladu, který je založen na postulátu relativity a netýká se přímo hodin či měřicích tyčí. Obr. 38.4 ukazuje dvě dlouhé kosmické lodě (KL Sylva a KL Slávek), které mohou sloužit jako inerciální vztažné soustavy pro pozorovatele Sylvu a Slávka. Oba pozorovatelé stojí uprostřed svých lodí. Lodě jsou situovány podél společné osy x, relativní rychlost Sylvy vůči Slávkovi je $\boldsymbol{v}$. Obr. 38.4a ukazuje lodě se dvěma pozorovateli, kteří se právě míjejí.



Obr. 38.4 Kosmické lodi Sylvy a Slávka a události ze Slávkova pohledu. Sylvina loď letí napravo rychlostí $\boldsymbol{v}$. (a) Rudá událost nastává v místech R, R′ a Modrá v místech M, M′. Každá z nich vysílá svou světelnou vlnu. (b) Sylva zjišťuje vlnu od Rudé události. (c) Slávek zjišťuje vlny od obou událostí současně. (d) Sylva zjišťuje vlnu od Modré události.

Do lodí narazí dva velké meteority, jeden z nich vyvolá červenou záři (událost Rudá) a druhý modrou záři (událost Modrá). Tyto události nebudou nutně současné. Každá udá-

lost zanechá trvalou stopu na obou lodích v místech R, R′ a M, M′.

Předpokládejme, že čela světelných vln šířících se z obou událostí dostihnou Slávka ve stejném čase, jak to ukazuje obr. 38.4c. Předpokládejme dále, že Slávek pak zjistí měřením, že se vskutku nacházel přesně uprostřed mezi stopami M a R na své lodi, když k oběma událostem došlo.

SLÁVEK řekne: Světlo z události Rudá a světlo z události Modrá mě dostihlo ve stejném čase. Ze stop na své lodi jsem zjistil, že jsem stál uprostřed mezi oběma místy, z nichž světlo vyšlo. Události Rudá a Modrá jsou tedy současnými událostmi.

Jak ale ukazuje zamyšlení nad obr. 38.4b, rozšiřující se čelo vlny z události Rudá dostihne Sylvu *dříve* než rozšiřující se čelo vlny z události Modrá.

SYLVA řekne: Světlo z události Rudá mě dostihlo dříve než světlo z události Modrá. Ze stop na své lodi jsem zjistila, že i já jsem stála uprostřed mezi oběma zdroji světla. Události tedy *nebyly* současné, událost Rudá předcházela události Modrá.

Tato hlášení spolu nesouhlasí. Přesto *oba* pozorovatelé mluví pravdu.

Dobře si povšimněme, že je pouze jedno čelo vlny, které se šíří z místa každé události, a že *toto čelo vlny se pohybuje stejnou rychlostí c v obou vztažných soustavách*, přesně tak, jak si to žádá postulát rychlosti světla.

Mohlo by se stát, že meteority by narazily do lodí takovým způsobem, že obě vzplanutí by pro Sylvu nastala současně. Kdyby tomu tak bylo, Slávek by je prohlásil za nesoučasná. Zkušenosti obou pozorovatelů jsou naprosto symetrické.

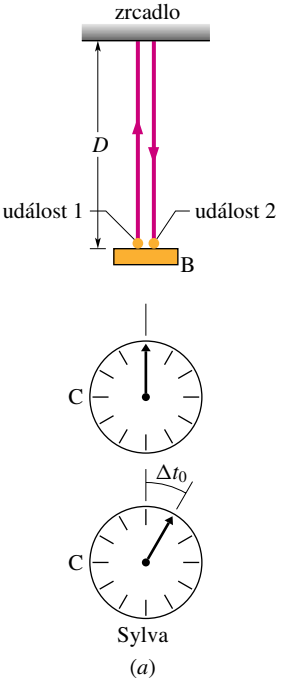
38.5 RELATIVITA ČASU

Jestliže pozorovatelé, kteří se vzájemně pohybují, měří časový interval (čili *časovou odlehlost*) mezi dvěma událostmi, dojdou obecně k rozdílným výsledkům. Proč? Protože prostorová odlehlost událostí může ovlivnit časový interval, který pozorovatelé měří.

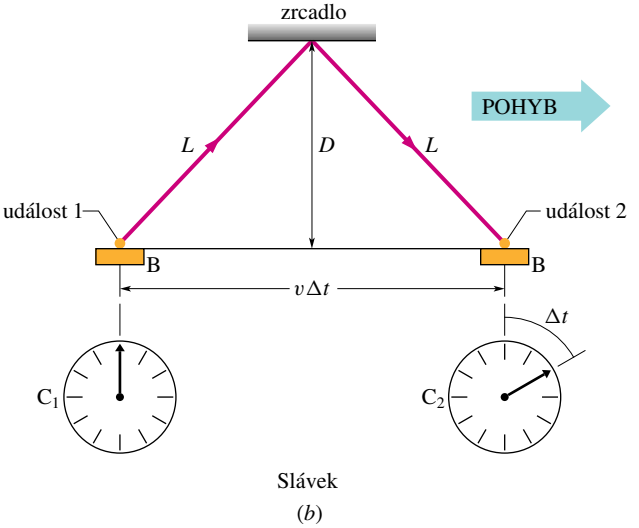
Časový interval mezi dvěma událostmi závisí na tom, jak jsou od sebe prostorově vzdáleny, tj. jejich prostorové a časové odlehlosti jsou provázány.

V tomto odstavci diskutujeme uvedenou provázanost na speciálním příkladu, kdy *pro jednoho z obou pozorovatelů jsou obě události soumístné, tj. nastávají ve stejném místě*. Obecnějšími příklady se budeme zabývat až v čl. 38.7.

Obr. 38.5a ukazuje podstatu experimentu, který provádí Sylva, jež se svým vybavením jede vlakem konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ vzhledem k nádraží. Světelný pulz opouští světelný zdroj B (událost 1), pohybuje se svisle vzhůru, zrcadlo jej odráží svisle dolů a nakonec je pulz opět zachycen



Sylva
(*a*)



Slávek
(*b*)

Obr. 38.5 (a) Sylva, sedící ve vlaku, měří dobu Δt_0 mezi událostmi 1 a 2 jedinými hodinami C ve vlaku. Údaj hodin je ukázán dvakrát: nejprve pro událost 1, pak pro 2. (b) Slávek, pozorující děj ze stanice, potřebuje dvoje synchronizované hodiny — C_1 pro událost 1 a C_2 pro událost 2. Naměří jimi dobu Δt.

u zdroje (událost 2). Sylva naměří určitý časový interval Δt_0 mezi dvěma událostmi, který je spojen se vzdáleností D od zdroje k zrcadlu vztahem

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c} \quad \text{(Sylva)}. \tag{38.2}$$

V Sylvině vztažné soustavě dochází k těmto událostem v témže místě a ona potřebuje jen jedny hodiny C v tomto místě, aby změřila časový interval. Na obr. 38.5a jsou hodiny C nakresleny dvakrát, na počátku a na konci časového intervalu.

Uvažme nyní, jak tytéž události měří Slávek, který během průjezdu vlaku stojí na nádražním nástupišti. Protože Sylvino vybavení se během světelného pulzu pohybuje spolu s vlakem, Slávek vidí dráhu světla tak, jak je ukázána na obr. 38.5b. Pro něho dochází k oběma událostem v různých místech jeho vztažné soustavy. Chce-li tedy Slávek změřit časový interval mezi událostmi, musí užít *dvojích* synchronizovaných hodin, C_1 a C_2, z nichž každé jsou na místě jedné z událostí. Podle Einsteinova postulátu rychlosti světla se světlo šířilo stejnou rychlostí c pro Slávka i pro Sylvu. Pro Slávka však světlo urazilo vzdálenost $2L$ mezi událostmi 1 a 2. Časový interval, který Slávek mezi oběma událostmi naměřil, je

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \quad \text{(Slávek)}, \tag{38.3}$$

kde

$$L = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + D^2}. \tag{38.4}$$

Podle rov. (38.2) můžeme L přepsat jako

$$L = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}c\Delta t_0\right)^2}. \tag{38.5}$$

Vyloučíme-li L z rov. (38.3) a (38.5) a vypočteme-li Δt, dostáváme

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{38.6}$$

Rov. (38.6) nám umožňuje porovnat časové hodnoty Δt a Δt_0, jak je změřili Slávek a Sylva. Protože v musí být menší než c, musí být jmenovatel v rov. (38.6) menší než jedna. Proto Δt musí být větší než Δt_0: Slávek naměří *větší* časový interval mezi dvěma událostmi než Sylva. Slávek a Sylva změřili časový interval mezi *týmiž* dvěma událostmi, ale jejich vzájemný pohyb způsobil, že šlo o různá měření. Uzavíráme, že relativní pohyb může změnit *tempo* průběhu času mezi dvěma událostmi; klíčem k tomuto jevu je fakt, že rychlost světla je pro oba pozorovatele stejná.

Rozdíl mezi Slávkovým a Sylviným měřením vyjádříme užitím následující terminologie:

> Nastávají-li dvě události na stejném místě v jisté inerciální vztažné soustavě, pak časový interval mezi nimi měřený v této soustavě se nazývá **vlastním časovým intervalem** nebo **vlastní dobou**. Měření odpovídajícího časového intervalu v jiné inerciální vztažné soustavě dá vždy výsledek, který je větší.

Sylva tedy měří vlastní časový interval a Slávek měří časový interval, který je větší. (Termín *vlastní* nesmíme chápat tak, že jiné měření dává nesprávný či nereálný výsledek.) Zvětšení časového intervalu mezi dvěma událostmi oproti vlastnímu intervalu nazýváme **dilatací času**. (Dilatace znamená prodloužení neboli roztažení; tudíž časový interval se prodlužuje neboli roztahuje.)

Bezrozměrový podíl v/c v rov. (38.6) značíme zpravidla jako β; nazývejme ho **rychlostním parametrem**. Je to tedy rychlost vyjádřená jako zlomek rychlosti světla. Bezrozměrovou převrácenou hodnotu odmocniny v rov. (38.6) značíme často jako γ a nazýváme **Lorentzovým faktorem**

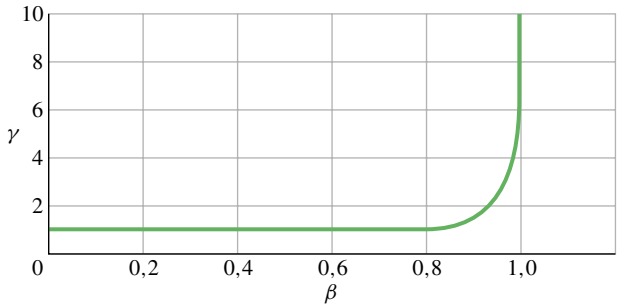
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{38.7}$$

S těmito označeními můžeme přepsat rov. (38.6) jako

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad \text{(dilatace času)}. \tag{38.8}$$

Rychlostní parametr β je vždy menší než jedna, a pokud v není rovno nule, je γ vždy větší než jedna. Rozdíl mezi γ a 1 však není výrazný, dokud neplatí $v > 0{,}1c$. Takže „stará relativita“ je docela dobře použitelná pro $v < 0{,}1c$, ale pro větší hodnoty v musíme užít speciální relativity. Jak ukazuje obr. 38.6, velikost γ prudce roste, když se β blíží jedné (čili v se blíží k c). Čím je tedy větší relativní rychlost mezi Sylvou a Slávkem, tím větší je časový interval měřený Slávkem, až pro dostatečně velkou rychlost se prodlouží téměř ve věčnost.

Můžete se ptát, co řekne Sylva na to, že Slávek naměřil větší časový interval, než jaký naměřila ona. Nebude to pro ni žádným překvapením, protože podle ní Slávek nesynchronizoval své hodiny C_1 a C_2, ačkoli tvrdí, že to učinil. Připomeňme, že pozorovatelé pohybující se vůči sobě se neshodují v tom, co je současné. Slávek tedy tvrdí, že obojí jeho hodiny ukazovaly současně stejný čas v době, kdy nastala událost 1. Podle Sylvy však byly Slávkovy hodiny C_2 nesprávně nastaveny. Když tedy na nich Slávek odečítal čas události 2, zaznamenal podle Sylvy příliš velký čas, a proto připsal oběma událostem větší časový interval než Sylva.



Obr. 38.6 Lorentzův faktor γ jako funkce rychlostního parametru $\beta = v/c$.

Dva testy dilatace času

1. **Mikroskopické hodiny.** Subatomární částice zvané *miony* jsou nestabilní. To znamená, že mion se v krátké době po svém vzniku *rozpadne* (přemění na částice jiných typů). *Doba života* mionu je časový interval mezi jeho vznikem (událost 1) a jeho rozpadem (událost 2). Jsou-li miony v klidu a jejich doby života jsou měřeny nehybnými hodinami (např. v laboratoři), pak jejich průměrná doba života je 2 200 μs. Je to vlastní časový interval, protože pro každý mion nastávají události 1 a 2 v témže místě ve vztažné soustavě mionu. Tento vlastní časový interval označíme Δt_0 a vztažnou soustavu, v níž bylo provedeno měření, nazveme *klidovou soustavou* mionu.

Pokud se však miony pohybují (např. vůči laboratoři), pak měření jejich dob života provedené laboratorními hodinami povede k větší (dilatované) průměrné době života. Pro potvrzení tohoto závěru byla provedena měření průměrné doby života mionů pohybujících se rychlostí $0{,}999\,4c$ vzhledem k laboratorním hodinám. Z rov. (38.7) s $\beta = 0{,}999\,4$ lze obdržet pro tuto rychlost Lorentzův faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}999\,4)^2}} = 28{,}87,$$

což je podstatně větší než jedna. Rov. (38.8) pak dává pro průměrnou dilatovanou dobu života

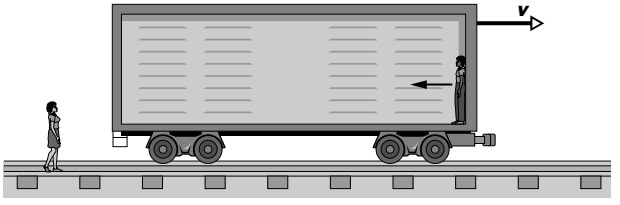
$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = (28{,}87)(2{,}200\,\mu\text{s}) = 63{,}5\,\mu\text{s}.$$

Skutečně pozorovaná hodnota potvrdila tento výsledek v mezích pozorovacích chyb.

2. **Makroskopické hodiny.** V říjnu 1977 Joseph Hafele a Richard Keating uskutečnili vskutku ohromující experiment. Nechali čtvery přenosné atomové hodiny dvakrát obletět kolem světa na komerčních leteckých linkách; každé z nich v jiném směru. Cílem bylo „testovat Einsteinovu teorii relativity pomocí makroskopických hodin“. Jak jsme právě viděli, předpověď časové dilatace podle Einsteinovy teorie byla potvrzena v mikroskopickém měřítku, ale něco docela jiného je vidět potvrzení na skutečných hodinách. Taková makroskopická měření byla umožněna pouze velmi vysokou přesností moderních atomových hodin. Hafele a Keating ověřili předpovědi teorie s přesností 10 %. (Einsteinova *obecná* teorie relativity, která předpovídá, že tempo chodu hodin je ovlivněno gravitací, hraje v daném experimentu rovněž roli.)

O několik let později fyzikové z univerzity v Marylandu provedli podobný experiment se zvýšenou přesností. Oblétali s atomovými hodinami Chesapeakskou zátoku stále dokola po dobu 15 h a podařilo se jim potvrdit předpověď časové dilatace s přesností lepší než 1 %. Když se dnes atomové hodiny přenášejí z jednoho místa na druhé kvůli kalibraci či z jiných důvodů, bere se vždy ohled na časovou dilataci způsobenou jejich pohybem.

KONTROLA 1: Stojíme u železničních kolejí, když nás náhle vyděsí relativistický nákladní vagon řítící se kolem nás, jak je ukázáno na obrázku. Ve vagonu je dobře vybavený hobo (americký železniční tulák) Jack, který posílá laserový pulz od přední k zadní stěně vagonu. (a) Dá naše měření rychlosti pulzu větší, menší, nebo stejný výsledek jako měření Jackovo? (b) Je Jackovo měření doby letu pulzu měřením vlastního času? (c) Jsou Jackova a naše měření doby letu pulzu spojena rov. (38.8)?



PŘÍKLAD 38.2

Váš hvězdolet míjí Zemi relativní rychlostí $0{,}999\,0c$. Po uplynutí 10,0 roků se zastavíte na pozorovatelně LP13 a pak cestujete zpět k Zemi stejnou relativní rychlostí. Cesta zabere dalších 10,0 roků (vašeho času). Jak dlouho trvá cesta podle měření vykonaných na Zemi? (Zanedbejte jakýkoli vliv způsobený zrychlením během zastavování a rozletu.)

ŘEŠENÍ: Začátek i konec cesty tam (Země – LP13) nastávají ve vaší vztažné soustavě, tj. ve vašem hvězdoletu, na stejném místě. Měříte tedy vlastní čas Δt_0 cesty, který je určen jako 10,0 y. Rov. (38.6) dává odpovídající čas Δt, jak je naměřen v pozemské vztažné soustavě

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{(10{,}0\,\text{y})}{\sqrt{1-(0{,}999\,0c/c)^2}} = \\ = (22{,}37)(10{,}0\,\text{y}) = 224\,\text{y}.$$

Při cestě zpět (LP13 – Země) máme stejnou situaci a stejné

údaje. Celková cesta tedy zabere 20 roků vašeho času, ale

$$\Delta t_{\text{celk}} = 2(224\,\text{y}) = 448\,\text{y} \qquad \text{(Odpověď)}$$

pozemského času. Jinými slovy, zestárl jste o 20 let, zatímco Země zestárla o 448 let. Ačkoli nelze (pokud dnes víme) cestovat do minulosti, není vyloučeno cestování např. do budoucnosti Země pomocí velmi rychlého relativního pohybu, který změní tempo plynutí času.

PŘÍKLAD 38.3

Elementární částice nazvaná *kladný kaon* (K^+) má v klidu průměrnou dobu života 0,123 7 μs, tj. jedná se o dobu života měřenou v klidové soustavě kaonu. Vytvářejí-li se kladné kaony s rychlostí $0{,}990c$ vzhledem k laboratorní vztažné soustavě, jak daleko se v této soustavě během své doby života dostanou?

ŘEŠENÍ: V laboratorní soustavě je vzdálenost d uražená kaonem spojena s jeho rychlostí $v = 0{,}990c$ a dobou jeho letu Δt_{k} vztahem $d = v\Delta t_{\text{k}}$. (Toto tvrzení není ovlivněno relativitou, protože všechny veličiny se měří v téže vztažné soustavě.) Kdybychom neužívali speciální relativity, doba letu by činila 0,123 7 μs, což je doba života částice, a tudíž jeho délka by byla

$$d = v\Delta t_{\text{k}} = (0{,}990)(3{,}00\cdot10^{8}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})(1{,}237\cdot10^{-7}\ \text{s}) = \\ = 36{,}7\ \text{m} \qquad \text{(chybná odpověď).}$$

Je však třeba užít speciální relativity a doba letu kaonu v laboratorní soustavě je jeho dilatovaná doba života Δt. Podle rov. (38.6) můžeme najít Δt ze znalosti vlastní doby života kaonu $\Delta t_0 = 0{,}123\,7$ μs měřené v jeho klidové soustavě

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \\ = \frac{(0{,}123\,7\cdot10^{-6}\ \text{s})}{\sqrt{1-(0{,}990c/c)^2}} = 8{,}769\cdot10^{-7}\ \text{s}.$$

To je sedmkrát větší než vlastní doba života kaonu. (Tento výpočet přihlížel k relativitě, protože jsme museli přepočítat data z klidové soustavy částice do soustavy laboratorní.) Nyní najdeme délku cesty kaonu v laboratorní soustavě jako

$$d = v\Delta t = \\ = (0{,}990)(3{,}00\cdot10^{8}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})(8{,}769\cdot10^{-7}\ \text{s}) = \\ = 260\ \text{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato vzdálenost je sedmkrát větší než podle naší první (nesprávné) odpovědi. Experimenty tohoto druhu, které ověřují speciální relativitu, jsou už po desetiletí pro fyzikální laboratoře rutinní záležitostí.

38.6 RELATIVITA DÉLKY

Chcete-li měřit délku tyče, která je vůči vám v klidu, můžete — až vám zbude čas — zaznamenat polohy jejich konců na dlouhém nehybném měřítku a oba údaje odečíst. Pokud se ale tyč pohybuje, musíte zaznamenat polohy koncových bodů *současně* (ve vaší vztažné soustavě). Jinak by se vaše měření nemohlo nazývat měřením délky. Obr. 38.7 naznačuje potíže, na něž narážíme, když chceme změřit délku pohybujícího se tučňáka zaznamenáním polohy jeho hrudi a zad v rozdílných časech. Protože současnost je relativní a ovlivňuje měření délky, je i délka relativní veličinou.

Nechť L_0 je délka tyče, kterou měříte, když je tyč v klidu (za předpokladu, že vy i tyč jste v téže vztažné soustavě, klidové soustavě tyče). Jestliže se naopak tyč vzhledem k vám pohybuje rychlostí v *ve směru délky tyče*, naměříte délku L danou vztahem

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L_0}{\gamma} \qquad \text{(kontrakce délky).} \quad (38.9)$$

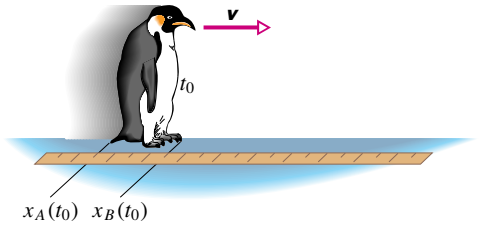
Protože Lorentzův faktor γ je při relativním pohybu vždy větší než jedna, je L vždy menší než L_0. Relativní pohyb způsobuje **kontrakci délky** a L se nazývá **kontrahovaná délka**. Protože γ s rychlostí v roste, roste s relativní rychlostí i kontrakce délky.

Délka objektu L_0 měřená v jeho klidové soustavě je **vlastní délka** čili **klidová délka**. Měření délky v každé vztažné soustavě, která koná relativní pohyb rovnoběžný s touto délkou, dává výsledek, který je vždy menší než vlastní délka.

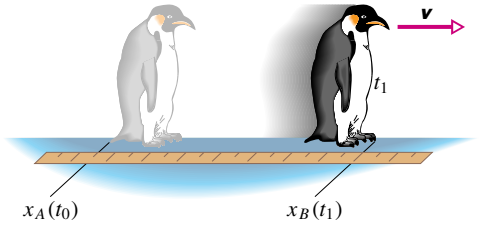
Pozor: kontrakce délky nastává pouze ve směru relativního pohybu. Dodejme, že měřená délka nemusí být délkou objektu, jako je tyč či obruč. Může to být i délka (či vzdálenost) mezi dvěma objekty v téže klidové soustavě — například vzdálenost Slunce a blízké hvězdy (které jsou alespoň přibližně vůči sobě v klidu).

Zkracuje se objekt *opravdu*? Realita je založena na pozorováních a měřeních; jestliže výsledky vždy vzájemně souhlasí a nelze najít žádnou chybu, pak to, co bylo pozorováno a měřeno, je reálné. V tomto smyslu se objekt opravdu zkracuje. Přesněji bychom však mohli říci, že zkrácení objektu je *opravdu změřeno* — pohyb ovlivňuje měření a tím i realitu.

Musí blesková fotografie ukázat zkrácení objektu? Nikoli, protože není pořízena zachycením světla, které objekt emitoval v určitém okamžiku (současně). Zaznamenává světlo z objektu, které dospělo do kamery v okamžiku expozice filmu, bez ohledu na to, kdy bylo emitováno.



(*a*)



(*b*)

Obr. 38.7 Chceme-li měřit délku pohybujícího se tučňáka měřením polohy jeho hrudi a zad, musíme je měřit současně (v naší vztažné soustavě). Tak je tomu v (a), ale nikoli v (b).

Měříte-li zkrácenou délku, například délku tyče, co řekne o vašem měření pozorovatel pohybující se spolu s tyčí? Podle něho jste nezaznamenali polohu obou konců tyče současně. (Připomeňme, že pozorovatelé ve vzájemném pohybu se neshodují v tom, co je současné.) Z hlediska zmíněného pozorovatele jste nejprve zaznamenali polohu předního konce tyče a teprve o něco později polohu zadního konce. Proto jste změřili délku, která je menší než vlastní délka.

Odvození rov. (38.9)

Kontrakce délky přímo souvisí s dilatací času. Uvažujme ještě jednou naše dva pozorovatele. Sylva, která sedí ve vlaku projíždějícím nádražím, stejně jako Slávek, který stojí na nástupišti, chtějí změřit délku nástupiště. Slávek užije plátěného metru a zjistí délku L_0. Je to vlastní délka, protože nástupiště je vzhledem k němu v klidu. Slávek také zjišťuje, že Sylva ve vlaku projede kolem této délky za čas $\Delta t = L_0/v$, kde v je rychlost vlaku. Je tedy

$$L_0 = v\Delta t \quad \text{(Slávek)}. \tag{38.10}$$

Časový interval Δt není vlastním časovým intervalem, protože dvě události, které jej ohraničují (Sylvino míjení začátku a konce nástupiště), nastávají ve dvou různých místech a Slávek musí užít dvojích synchronizovaných hodin, aby interval Δt změřil.

Pro Sylvu se však nástupiště pohybuje. Zjišťuje, že obě události, které měřil Slávek, nastávají *v témže místě* v její vztažné soustavě. Může jim přiřadit čas pomocí jediných nehybných hodin, takže interval Δt_0, který měří, je vlastní časový interval. Pro ni je délka nástupiště L dána vztahem

$$L = v\Delta t_0 \quad \text{(Sylva)}. \tag{38.11}$$

Vydělíme-li rov. (38.11) rovnicí (38.10) a užijeme pro dilataci času rov. (38.8), dostaneme

$$\frac{L}{L_0} = \frac{v\Delta t_0}{v\Delta t} = \frac{1}{\gamma}$$

neboli

$$L = \frac{L_0}{\gamma}, \tag{38.12}$$

což je rov. (38.9) pro kontrakci délky.

PŘÍKLAD 38.4

Na obr. 38.8 se Sylva (v bodě A) a Slávkova kosmická loď (o vlastní délce $L_0 = 230$ m) míjejí konstantní relativní rychlostí v. Sylva měří časový interval 3,57 μs, po který ji loď míjí (od průchodu bodu B do průchodu bodu C). Jaký je rychlostní parametr β mezi Sylvou a lodí?

ŘEŠENÍ: Kdyby relativní rychlost v Slávka vzhledem k Sylvě byla menší než 0,1 c, mohli bychom na danou situaci pohlížet jako v kap. 2, kde jsme mluvili o kosmické lodi délky L a rychlosti v, jež míjí Sylvu za časový interval

$$\Delta t = \frac{L}{v}.$$

(Tento závěr nebere ohled na relativitu.)

Nyní však pravděpodobně jde o relativistický problém, kde $v > 0{,}1c$. V tomto případě víme, že délka L, kterou Sylva měří, není vlastní délka L_0 lodi, ale kontrahovaná délka, daná rov. (38.9)

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

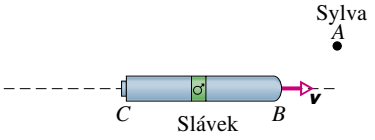
(Tento závěr zahrnuje relativitu, protože transformujeme data mezi Slávkovou a Sylvinou soustavou.) Podle Sylvy je nyní čas potřebný pro průlet dán vztahem

$$\Delta t = \frac{\text{zkrácená délka } L}{v} = \frac{L_0\sqrt{1-\beta^2}}{\beta c}.$$

Vyjádříme-li odtud β a dosadíme dané údaje, nalézáme po jednoduchém výpočtu

$$\beta = \frac{L_0}{\sqrt{(c\Delta t)^2 + L_0^2}} = \frac{(230\text{ m})}{\sqrt{(3{,}00\cdot 10^8\text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2(3{,}57\cdot 10^{-6}\text{ s})^2 + (230\text{ m})^2}} = 0{,}210, \quad \text{(Odpověď)}$$

takže relativní rychlost Sylvy vzhledem k lodi je 21 % rychlosti světla. Poznamenejme, že zde je důležitý pouze relativní pohyb Slávka a Sylvy; zda je někdo z nich v klidu např. vůči kosmodromu, není podstatné. Na obr. 38.8 bereme Sylvu jako nehybnou, ale mohli bychom považovat za nehybnou i loď, kdežto Sylva by kolem ní letěla. Na našich výsledcích by se nic nezměnilo.



Obr. 38.8 Příklad 38.4. Sylva měří, jak dlouho trvá lodi, když ji v bodě A míjí.

KONTROLA 2: V př. 38.4 měří Sylva dobu průletu kosmické lodě. Dělá-li to i Slávek, (a) je některé z měření měřením vlastního času? (b) Které měření dá menší výsledek?

PŘÍKLAD 38.5

Překvapila vás supernova a chcete uniknout explozi kosmickou lodí v naději, že prudce vyvržená hmota vás nedostihne. Váš Lorentzův faktor vzhledem k inerciální vztažné soustavě okolních hvězd je 22,4.

(a) Víte, že budete v bezpečí, až urazíte alespoň $9{,}00{\cdot}10^{16}$ m ve vztažné soustavě okolních hvězd. Jak dlouho poletíte vzhledem k této soustavě?

ŘEŠENÍ: Délka $L_0 = 9{,}00{\cdot}10^{16}$ m je vlastní délkou ve vztažné soustavě okolních hvězd, protože oba její konce jsou v této soustavě v klidu. Obr. 38.6 nám říká, že při tak velkém Lorentzově faktoru je vaše relativní rychlost vzhledem k hvězdám $v \doteq c$. V této aproximaci si proběhnutí délky L_0 žádá čas

$$\Delta t = \frac{L_0}{v} = \frac{L_0}{c} = \frac{(9{,}00{\cdot}10^{16}\ \mathrm{m})}{(3{,}00{\cdot}10^{8}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})} = \\ = 3{,}00{\cdot}10^{8}\ \mathrm{s} = 9{,}49\ \mathrm{y}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jak dlouho trvá tento únik pro vás (ve vaší vztažné soustavě)?

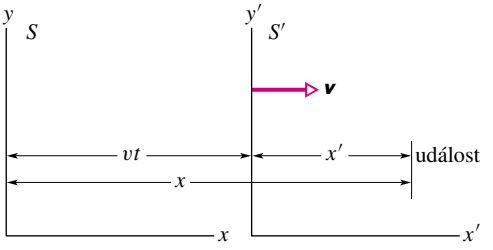
ŘEŠENÍ: Ve vaší vztažné soustavě je vzdálenost, kterou urazíte, kontrahovaná délka L. Ta vám uplývá relativní rychlostí $v \doteq c$. Rov. (38.9) nám říká, že $L = L_0/\gamma$. Takže čas, který změříte po průletu kontrahované délky, je

$$\Delta t_0 = \frac{L}{v} = \frac{L_0/\gamma}{v} = \frac{L_0}{c\gamma} = \\ = \frac{(9{\cdot}10^{16}\ \mathrm{m})}{(3{,}00{\cdot}10^{8}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(22{,}4)} = \\ = 1{,}339{\cdot}10^{7}\ \mathrm{s} = 0{,}424\ \mathrm{y}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

To je vlastní čas, protože začátek a konec průletu nastává ve vaší vztažné soustavě (ve vaší kosmické lodi) ve stejném bodě. Můžete prověřit oprávněnost obou odpovědí, když je dosadíte do rov. (38.8) (pro časovou dilataci) a vypočtete γ.

38.7 LORENTZOVA TRANSFORMACE

Jak ukazuje obr. 38.9, inerciální vztažná soustava S' se pohybuje rychlostí v vzhledem k soustavě S ve společném kladném směru jejich vodorovných os, označených jako x a x'. Pozorovatel v S přiřazuje události prostoročasové souřadnice x, y, z, t a pozorovatel v S' jí přiřazuje souřadnice x', y', z', t'. Jak spolu oba soubory čísel souvisejí?



Obr. 38.9 Dvě inerciální vztažné soustavy: soustava S' má rychlost $\boldsymbol{v}$ vůči S.

Řekněme ihned (i když by si to žádalo důkaz), že souřadnice y a z ve směru kolmém k pohybu nejsou pohybem ovlivněny. Platí tedy $y = y'$ a $z = z'$. Dále se budeme zabývat jen vztahy mezi x a x' a mezi t a t'.

Galileovy transformační rovnice

Dokud Einstein nepublikoval speciální teorii relativity, předpokládalo se, že uvedené čtyři souřadnice spolu souvisejí *Galileovými transformačními rovnicemi*

$$x' = x - vt, \\ t' = t \qquad (38.13)$$

(Galileovy transformační rovnice; platné přibližně pro malé rychlosti).

Tyto rovnice jsou zapsány za předpokladu, že $t = t' = 0$ ve chvíli, kdy počátky S a S' splývají. Můžete ověřit první rovnici pomocí obr. 38.9. Druhá rovnice znamená, že čas běží pro pozorovatele v obou vztažných soustavách stejně. Před Einsteinem se to zdálo každému vědci tak zřejmě pravdivé, že se o tom ani nezmiňovali. Je-li rychlost v malá ve srovnání s c, slouží rov. (38.13) docela dobře.

Lorentzovy transformační rovnice

Uvedeme bez důkazu, že správné transformační rovnice, které zůstávají platné pro všechny rychlosti až po rychlost světla, mohou být odvozeny z relativistických postulátů. Výsledkem jsou **Lorentzovy transformační rovnice***:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \qquad (38.14)$$

(Lorentzovy transformační rovnice; platí při všech rychlostech).

Povšimněme si, že prostorové hodnoty x a časové hodnoty t jsou vázány první a poslední rovnicí. Toto provázání prostoru a času je hlavním zvěstováním Einsteinovy teorie, jež mnozí z jeho současníků dlouho nechtěli uznat.

Na relativistické rovnice se klade formální požadavek, aby se redukovaly na obvyklé klasické rovnice, když c jde do nekonečna. Kdyby tedy byla rychlost světla nekonečně velká, byly by *všechny* konečné rychlosti „malé" a klasické rovnice by nikdy nepřestaly platit. Položíme-li $c \to \infty$ v rov. (38.14), pak $\gamma \to 1$ a tyto rovnice se redukují — jak jsme očekávali — na Galileovy rovnice (38.13). Ověřte si to.

Rov. (38.14) jsou zapsány ve tvaru, který je užitečný, pokud známe x a t a chceme najít x' a t'. Můžeme však chtít i opak. Pak prostě rozřešíme rov. (38.14) pro x a t a obdržíme

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt'), \\ t &= \gamma(t' + vx'/c^2). \end{aligned} \qquad (38.15)$$

Srovnání ukazuje, že ať už vyjdeme z rov. (38.14) nebo (38.15), dostaneme druhou soustavu záměnou čárkovaných a nečárkovaných souřadnic a obrácením znaménka relativní rychlosti v.

Rov. (38.14) a (38.15) spojují souřadnice jediné události, jak ji vidí oba pozorovatelé. Někdy se nezajímáme o souřadnice jediné události, ale o rozdíly souřadnic páru událostí. Označíme-li tedy naše události 1 a 2, chceme spojit

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{a} \quad \Delta t = t_2 - t_1,$$

jak je měří pozorovatel v S, a

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 \quad \text{a} \quad \Delta t' = t'_2 - t'_1,$$

jak je měří pozorovatel v S'.

* Můžete se divit, proč nemluvíme o *Einsteinových transformačních rovnicích* (a o *Einsteinově faktoru* γ). H. A. Lorentz fakticky odvodil tyto rovnice před Einsteinem, ale jak velký holandský fyzik sám velkoryse uznal, neprovedl zbývající smělý krok k uznání těchto rovnic za vyjádření skutečné povahy prostoru a času. Teprve taková interpretace, již poprvé provedl Einstein, je jádrem relativity.

Tab. 38.2 uvádí Lorentzovy rovnice v různých tvarech vhodných pro zkoumání páru událostí. Tyto rovnice byly odvozeny prostým dosazením rozdílů (jako Δx a $\Delta x'$) za čtyři proměnné v rov. (38.14) a (38.15).

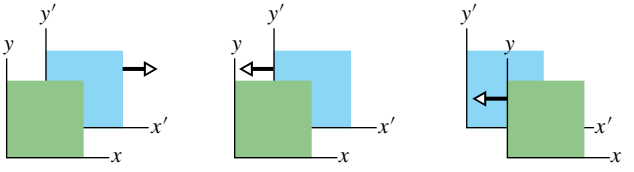
Tabulka 38.2 **Lorentzova transformace pro dvojici událostí**

(1) $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$	(1′) $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$
(2) $\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$	(2′) $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Pozor: při dosazování hodnot rozdílů nesmíme poplést pořadí událostí, a pokud je některý z rozdílů záporný, nesmíme zapomenout na znaménko.

KONTROLA 3: Následující obrázek ukazuje tři situace, v nichž modrá vztažná soustava a zelená vztažná soustava se vzájemně pohybují podél společného směru svých os x a x', jak to vyjadřuje vektor rychlosti spojený s jednou ze soustav. Volme modrou soustavu jako nehybnou. Rozhodněte pak pro každou situaci, zda veličina v v rovnicích tab. 38.2 je kladná, nebo záporná.



38.8 NĚKTERÉ DŮSLEDKY LORENTZOVÝCH ROVNIC

Nyní užijeme transformačních rovnic tab. 38.2, abychom se ujistili o některých závěrech, ke kterým jsme dříve došli na základě argumentů přímo založených na postulátech.

Současnost

Vezměme rov. (2) z tab. 38.2

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right). \qquad (38.16)$$

Nastanou-li dvě události v různých místech ve vztažné soustavě S' z obr. 38.9, pak $\Delta x'$ v této rovnici není nulové. Z toho plyne, že i když jsou události současné v S' (takže

$\Delta t' = 0$), nebudou současné v soustavě S. Časový interval mezi nimi v S bude

$$\Delta t = \gamma \frac{v\Delta x'}{c^2} \quad \text{(současné události v } S'\text{)}.$$

To souhlasí s naším závěrem v čl. 38.4.

Dilatace času

Nyní předpokládejme, že obě události jsou soumístné, tj. nastávají v témže místě v S' (takže $\Delta x' = 0$), ale v různých časech (takže $\Delta t' \neq 0$). Rov. (38.16) se tedy redukuje na

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \quad \text{(soumístné události v } S'\text{)}. \qquad (38.17)$$

Tím je potvrzena dilatace času. Protože obě události nastávají v témže místě v S', může být časový interval $\Delta t'$ mezi nimi měřen jedinými hodinami umístěnými v tomto místě. Za těchto podmínek je měřený interval vlastním časovým intervalem a můžeme jej označit jako Δt_0. Pak rov. (38.17) dává

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad \text{(dilatace času)},$$

což je přesně rov. (38.8) pro dilataci času.

Kontrakce délky

Vezměme rov. (1′) z tab. 38.2:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t). \qquad (38.18)$$

Leží-li tyč rovnoběžně s osami x, x' z obr. 38.9 a je-li v klidu ve vztažné soustavě S', může pozorovatel v S' měřit délku beze spěchu. Hodnota $\Delta x'$, kterou obdrží odečtením souřadnic koncových bodů tyče, bude vlastní délka L_0.

V soustavě S se tyč pohybuje. To znamená, že Δx můžeme považovat za délku tyče, pouze když jsou souřadnice koncových bodů změřeny *současně*, to jest je-li $\Delta t = 0$. Klademe-li $\Delta x' = L_0$, $\Delta x = L$ a $\Delta t = 0$ v rov. (38.18), dostáváme

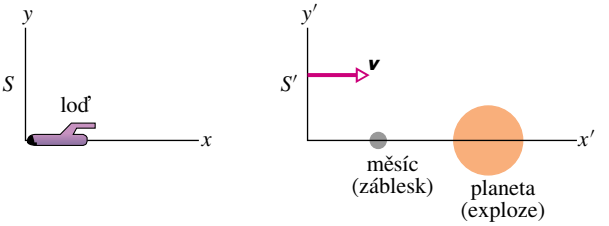
$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad \text{(kontrakce délky)}, \qquad (38.19)$$

což je přesně rov. (38.9) pro kontrakci délky.

PŘÍKLAD 38.6

Ze Země byl vyslán hvězdolet, aby zkontroloval naši stanici na planetě P1407, jejíž měsíc obývá bojovná skupina Reptalů, kteří se k lidem často chovají nepřátelsky. Hvězdolet se pohybuje po přímce, a když mine planetu a měsíc, je z něho pozorován vysokoenergetický mikrovlnný záblesk na měsíční základně Reptalů a o 2,43 s později exploze na naší stanici, která je vzhledem ke vztažné soustavě hvězdoletu vzdálena $0{,}77{\cdot}10^8$ m od základny Reptalů. Snad Reptalové napadli naši stanici a posádka hvězdoletu by se měla připravit na boj s nimi.

(a) Rychlost hvězdoletu vzhledem k planetě a měsíci je $0{,}980c$. Jaká je vzdálenost mezi zábleskem a explozí a časový interval mezi nimi změřený v inerciální soustavě planeta + měsíc (a tudíž odpovídající posádce stanice a základny)?



Obr. 38.10 Příklad 38.6. Planeta a její měsíc stojící vůči vztažné soustavě S' se pohybují rychlostí v vzhledem ke kosmické lodi, která stojí vůči systému S.

ŘEŠENÍ: Situace je znázorněna na obr. 38.10, kde soustava hvězdoletu S je považována za nehybnou a soustava planeta+ + měsíc S' se vůči ní pohybuje kladnou rychlostí (doprava). (Tato volba není nutná — mohli bychom volit za nehybnou i soustavu planeta + měsíc. Pak bychom $\boldsymbol{v}$ v obr. 38.10 spojili se soustavou S a orientovali doleva; v by pak bylo zápornou veličinou. Výsledek by zůstal stejný.) Označme indexy (e) a (z) explozi a záblesk.

Je třeba si uvědomit, že údaje v zadání $\Delta T = 2{,}43$ s, $\Delta X = 0{,}77{\cdot}10^8$ m nejsou časovým ani prostorovým intervalem mezi událostmi (z) a (e). ΔT představuje dobu, která uplynula na kosmické lodi od přijetí informace o záblesku na měsíci do přijetí informace o explozi na planetě, přičemž tyto informace se od svých zdrojů šířily rychlostí světla. ΔX je vzdálenost od měsíce k planetě ve vztažné soustavě spojené s lodí. Události (z) a (e) však nemusely nastat současně, a proto vzdálenost mezi nimi může být jiná.

Musíme tedy nejprve najít časový interval Δt a vzdálenost Δx mezi událostmi (z) a (e). Tyto veličiny souvisejí s veličinami ΔX a ΔT vztahy

$$\Delta X = \Delta x - v\Delta t, \quad \Delta T = \Delta t + \frac{\Delta x}{c},$$

které v podstatě vyjadřují, že dráha = rychlost · čas pro rovnoměrný a přímočarý pohyb planety a světelného signálu vyslaného z ní v době exploze. Dosazením do těchto vztahů a vyřešením rovnic dostáváme

$$\Delta x = x_e - x_z = +4{,}00{\cdot}10^8 \text{ m}$$

a

$$\Delta t = t_e - t_z = +1{,}10 \text{ s}.$$

Zde Δx je kladná veličina, protože v obr. 38.10 je souřadnice exploze x_e větší než souřadnice x_z pro blýsknutí; Δt je rovněž kladná veličina, protože čas exploze t_e je větší (pozdější) než čas t_z záblesku.

Hodnoty $\Delta x'$ a $\Delta t'$ obdržíme transformováním dat soustavy S do soustavy S' planeta — měsíc. Protože uvažujeme pár událostí, bereme transformační rovnice z tab. 38.2, a to (1′) a (2′):

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \tag{38.20}$$

a

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right). \tag{38.21}$$

Zde $v = +0{,}980c$ a Lorentzův faktor je

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(+0{,}980c/c)^2}} = 5{,}025\,2.$$

Rov. (38.20) tedy dává

$$\begin{aligned}\Delta x' &= (5{,}025\,2)[(4{,}00{\cdot}10^8\ \mathrm{m} - \\ &\quad - (+0{,}980)(3{,}00{\cdot}10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(1{,}10\ \mathrm{s}))] = \\ &= 3{,}85{\cdot}10^8\ \mathrm{m} \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

a rov. (38.21) dává

$$\begin{aligned}\Delta t' &= (5{,}025\,2)\left((1{,}10\ \mathrm{s}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(+0{,}980)(3{,}00{\cdot}10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(4{,}00{\cdot}10^8\ \mathrm{m})}{(3{,}00{\cdot}10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}\right) = \\ &= -1{,}04\ \mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

(b) Jaký je význam znaménka minus ve vypočtené hodnotě $\Delta t'$?

ŘEŠENÍ: Zopakujme, jak jsme původně definovali časový interval mezi zábleskem a explozí: $\Delta t = t_e - t_z = +1{,}10$ s. Abychom byli v souladu s volbou označení, naše definice $\Delta t'$ musí být $t'_e - t'_z$; zjistili jsme tedy, že

$$\Delta t' = t'_e - t'_z = -1{,}04\ \mathrm{s}.$$

To znamená, že $t'_z > t'_e$; tedy ve vztažné soustavě planeta — měsíc nastal záblesk 1,04 s *po* explozi, nikoli 1,10 s *před* explozí, jak bylo pozorováno v soustavě hvězdoletu.

(c) Mohl záblesk způsobit explozi, nebo mohla exploze způsobit záblesk?

ŘEŠENÍ: Pořadí událostí měřených ve vztažné soustavě planeta — měsíc je opačné, než jak bylo změřeno v soustavě hvězdoletu. Tak či onak, kdyby mezi oběma událostmi byla příčinná souvislost, musela by se od jedné události přenést informace, aby způsobila druhou. Najděme předpokládanou rychlost informace. V soustavě hvězdoletu je tato rychlost

$$v_{\mathrm{info}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(4{,}00{\cdot}10^8\ \mathrm{m})}{(1{,}10\ \mathrm{s})} = 3{,}64{\cdot}10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}},$$

avšak tato rychlost je nemožná, protože převyšuje c. V soustavě planeta — měsíc je tato rychlost $3{,}70{\cdot}10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, což je rovněž nemožné. Žádná z událostí nemohla tedy způsobit druhou; jsou to tedy příčinně *nespojené* události. Posádka hvězdoletu proto nemusí proti Reptalům zakročit.

PŘÍKLAD 38.7

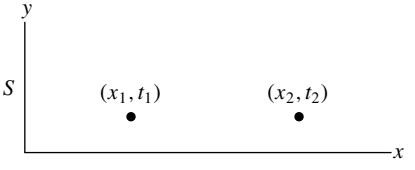
Obr. 38.11 ukazuje inerciální vztažnou soustavu S, v níž událost 1 (auto odmrští kámen, souřadnice x_1 a t_1) způsobuje událost 2 (kámen vás zasáhne, souřadnice x_2 a t_2). Existuje jiná inerciální soustava, v níž měření těchto událostí jim dá opačné pořadí v čase, takže následek bude předcházet příčině? Můžete pak být obviněn, že jste pozdější událost způsobil?

ŘEŠENÍ: Abychom našli časový rozdíl $\Delta t'$ páru událostí v soustavě S', známe-li data soustavy S, užijeme rov. (2′) tab. 38.2

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right). \tag{38.22}$$

Zopakujme, že v je relativní rychlost S vůči S'. Pokládáme soustavu S za nehybnou; S' má pak rychlost v.

Nechť $\Delta t = t_2 - t_1$. Pak Δt je kladná veličina, a máme-li se držet zvoleného označení, musíme klást $\Delta x = x_2 - x_1$ a $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Jak předpokládá obr. 38.11, Δx je kladná veličina, protože $x_2 > x_1$.



Obr. 38.11 Příklad 38.7. Událost 1 (příčina) s prostoročasovými souřadnicemi (x_1, t_1) vyvolá událost 2 (důsledek) o prostoročasových souřadnicích (x_2, t_2). Může být v nějaké jiné vztažné soustavě časové pořadí příčina–důsledek obrácené?

Zajímá nás, zda $\Delta t'$ může být záporná veličina, což by znamenalo, že čas t'_1 události 1 je pozdější (a tedy větší) než čas t'_2 události 2. Z rov. (38.22) vidíme, že $\Delta t'$ může být záporné, pouze když

$$\frac{v\Delta x}{c^2} > \Delta t.$$

Tato podmínka může být nahrazena ekvivalentním vyjádřením

$$\frac{\Delta x/\Delta t}{c}\,\frac{v}{c} > 1.$$

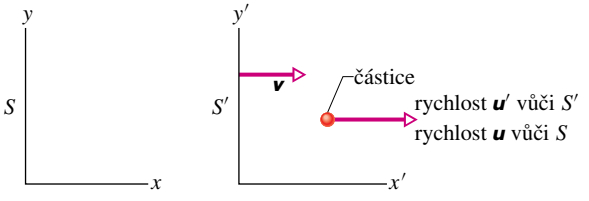
Poměr $\Delta x/\Delta t$ je rychlost, s níž se informace (zde přenášená kamenem) pohybuje od události 1, aby způsobila událost 2. Tato rychlost nemůže přesáhnout c. (Informace se může šířit rychlostí c, je-li přenášena světlem, kámen se ovšem pohybuje pomaleji.) Takže $(\Delta x/\Delta t)/c$ může být nanejvýš 1 a v/c

nemůže být rovno ani větší než 1. Levá strana dané nerovnosti musí být tedy menší než 1 a nerovnost tedy nemůže být splněna.

Takže neexistuje žádná soustava S', v níž by událost 2 předcházela svou příčinu, událost 1. Obecněji, ačkoli pořadí příčinně nespojených událostí může být v relativitě někdy obráceno (jako je tomu v př. 38.6), události představující příčinu a následek nemohou být nikdy takto přehozeny.

38.9 RELATIVISTICKÉ SKLÁDÁNÍ RYCHLOSTÍ

Chceme nyní užít Lorentzových transformačních rovnic ke srovnání rychlostí jedné a téže pohybující se částice, jak je změří dva pozorovatelé v různých inerciálních vztažných soustavách S a S'. Předpokládáme stále, že S' se pohybuje vzhledem k S rychlostí v.



Obr. 38.12 Vztažná soustava S' se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ vůči soustavě S. Částice má rychlost $\boldsymbol{u}'$ vůči soustavě S' a rychlost $\boldsymbol{u}$ vůči soustavě S.

Omezme se na případ, kdy se částice pohybuje stálou rychlostí rovnoběžně s osami x a x', jako je tomu na obr. 38.12. Nechť částice během svého pohybu vyšle dva signály. Každý pozorovatel změří prostorový a časový interval mezi těmito dvěma událostmi. Provedená čtyři měření jsou spojena rovnicemi 1 a 2 z tab. 38.2.

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t'),$$
$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right).$$

Dělíme-li první z těchto rovnic druhou, dostáváme

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + v\Delta x'/c^2}.$$

Dělíme-li čitatele i jmenovatele pravé strany $\Delta t'$, obdržíme

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + v}{1 + v(\Delta x'/\Delta t')/c^2}.$$

V limitě je však $\Delta x/\Delta t$ právě rychlost u částice měřená v S a $\Delta x'/\Delta t'$ rychlost u' částice měřená v S'. Tak konečně dostaneme

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad \text{(relativistické skládání rychlostí)}, \tag{38.23}$$

což je relativistický transformační vztah pro rychlost. S jiným označením jsme diskutovali tuto rovnici v čl. 4.10. Možná si ho znovu přečtete a zvláště si pak prostudujete př. 4.15 a 4.16. Když v rov. (38.23) formálně položíme $c \to \infty$, redukuje se na klasickou neboli galileovskou rovnici pro skládání (sčítání) rychlostí

$$u = u' + v \quad \text{(klasické skládání rychlostí)}. \tag{38.24}$$

38.10 DOPPLERŮV JEV PRO SVĚTLO

V čl. 18.8 jsme diskutovali Dopplerův jev (posuv naměřené frekvence) pro zvukové vlny šířící se ve vzduchu. Pro takové vlny závisí Dopplerův jev na dvou rychlostech. Jsou to rychlosti zdroje a pozorovatele vzhledem ke vzduchu, který je prostředím přenášejícím vlny.

Jinak je tomu se světelnými vlnami, protože ty (jako elektromagnetické vlny vůbec) nepotřebují žádné prostředí a mohou se šířit i ve vakuu. Pro světelné vlny ve vakuu závisí Dopplerův jev jen na jedné rychlosti — na relativní rychlosti $\boldsymbol{v}$ zdroje vůči detektoru, jak je měřena ze vztažné soustavy kteréhokoli z nich. Nechť f_0 je **vlastní frekvence** zdroje, to jest frekvence, kterou měří pozorovatel v klidové soustavě zdroje. Nechť f je frekvence měřená pozorovatelem, který se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ vzhledem k této klidové soustavě. Je-li rychlost $\boldsymbol{v}$ namířena směrem od zdroje, je

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{(zdroj a detektor se vzájemně vzdalují)}, \tag{38.25}$$

kde $\beta = v/c$. Je-li rychlost $\boldsymbol{v}$ namířena směrem ke zdroji, musíme změnit znaménka před oběma symboly β v rov. (38.25).

Podle rov. (38.25), pokud vzdálenost mezi zdrojem a detektorem roste, je naměřená frekvence menší než vlastní frekvence f_0. Zopakujme, že $f = c/\lambda$, kde λ je vlnová délka světla. Vidíme tedy, že zmenšení frekvence odpovídá zvětšení vlnové délky. V čl. 18.9 jsme takový vzrůst vlnové délky nazvali *rudým posuvem* (protože rudá část viditelného světla má největší vlnovou délku). Podobně, pokud se vzdálenost zdroj — detektor zmenšuje, je f větší než f_0; to odpovídá zmenšení vlnové délky, to jest *modrému posuvu*.

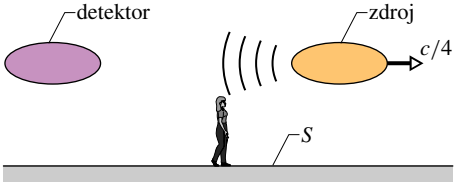
Pro malé rychlosti ($\beta \ll 1$) můžeme rov. (38.25) rozepsat podle mocnin β a aproximovat jako

$$f = f_0\left(1 - \beta + \tfrac{1}{2}\beta^2\right) \quad \text{(pro malé rychlosti)}. \qquad (38.26)$$

Odpovídající vzorec pro zvukové či jakékoli jiné vlny s výjimkou světelných má v dané aproximaci stejné první dva členy (kde β je podíl rychlosti detektoru a rychlosti vlnění), ale rozdílný koeficient ve třetím členu. Relativistický vliv se tedy projevuje až ve členu úměrném β^2.

Jak jsme krátce diskutovali v kap. 18, policejní radarové zařízení užívá Dopplerova jevu pro mikrovlny. Zdroj v tomto zařízení emituje mikrovlnný signál o jisté frekvenci f_0 vzhledem k silnici. Auto, které se pohybuje ve směru k zařízení, přijímá mikrovlnný signál, jehož frekvence je posunuta Dopplerovým jevem k frekvenci f v rov. (38.25) (s opačným znaménkem β). Auto odrazí vlnu zpět k radarovému zařízení. Protože auto se pohybuje k radaru, detektor zařízení přijímá odražený signál, jehož frekvence je dále posunuta. Zařízení porovnává naměřenou frekvenci s frekvencí f_0 a počítá rychlost auta.

KONTROLA 4: Obrázek ukazuje zdroj, který emituje světlo o vlastní frekvenci f_0 během pohybu doprava s rychlostí $c/4$ měřenou ze vztažné soustavy S. Obrázek dále ukazuje detektor světla, který měří frekvenci $f > f_0$ pro emitované světlo. (a) Pohybuje se detektor doleva, či doprava? (b) Je rychlost detektoru měřená ze vztažné soustavy S větší, menší, nebo rovna $c/4$?



Příčný Dopplerův jev

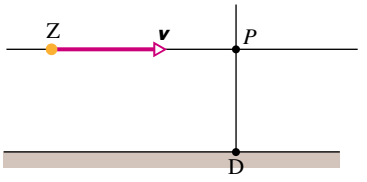
Zatím jsme zde i v kap. 18 diskutovali Dopplerův jev pouze pro situace, v nichž se zdroj a detektor pohybovaly ve směru k sobě či od sebe. Obr. 38.13 ukazuje odlišné uspořádání, v němž zdroj Z míjí detektor D. Když Z dosáhne bodu P, je jeho rychlost kolmá na spojnici Z a D a v tomto okamžiku se zdroj bodu D neblíží ani nevzdaluje. Podle nerelativistické fyziky (tj. při malých rychlostech zdroje) pak D při registraci vln emitovaných v bodě P měří stejnou frekvenci (bez Dopplerova jevu), jakou emituje zdroj. Při vysoké rychlosti zdroje se však i zde projevuje Dopplerův jev, kterému říkáme *příčný Dopplerův jev**. Světlo frekvence f_0 emitované v bodě P přijme detektor D s frekvencí f rovnou

$$f = f_0\sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{(příčný Dopplerův jev)}. \qquad (38.27)$$

Pro malé rychlosti zdroje ($\beta \ll 1$) můžeme rov. (38.27) rozvinout do mocninné řady podle β a aproximovat jako

$$f = f_0\left(1 - \tfrac{1}{2}\beta^2\right) \quad \text{(pro malé rychlosti)}. \qquad (38.28)$$

První člen je shodný s tím, co bychom dostali v nerelativistické fyzice, takže relativistický jev pro zdroje pohybující se vysokými rychlostmi opět vzniká až ve členu úměrném β^2.



Obr. 38.13 Zdroj světla Z letí rychlostí $\boldsymbol{v}$ kolem detektoru D. Podle speciální teorie relativity nastane příčný Dopplerův jev, když zdroj prochází bodem P. Jeho rychlost je tam kolmá na spojnici ZD. Podle klasické teorie by Dopplerův jev v takovém případě nastat neměl.

Policejní radarové zařízení může v principu určit rychlost auta i v případě, že dráha radarového pulzu je kolmá (příčná) k dráze auta. Ovšem rov. (38.25) nám říká, že vzhledem k malé hodnotě β je relativistický člen $\beta^2/2$ v příčném Dopplerově jevu i u rychlých aut nesmírně malý. Je tedy $f \approx f_0$ a radarové zařízení vypočte nulovou rychlost. Proto se policisté vždy snaží vyslat radarový pulz podél dráhy auta, aby dostali Dopplerův jev, který odpovídá skutečné rychlosti auta. Každá odchylka od přímého směru působí ve prospěch motoristy, protože měřenou rychlost zmenšuje.

Příčný Dopplerův jev je fakticky dalším testem dilatace času. Přepíšeme-li rov. (38.27) zavedením periody T kmitů emitované světelné vlny namísto její frekvence, máme (protože $T = 1/f$)

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma T_0, \qquad (38.29)$$

* Příčný Dopplerův jev je univerzálním projevem dilatace času, takže rov. (38.27) a (38.28) platí pro libovolné vlny v situaci, kdy pozorovatel je v klidu vůči prostředí, v němž se vlny šíří, a zdroj se pohybuje relativistickou rychlostí. Platí to tedy i pro zvukové vlny, pohybuje-li se jejich zdroj dostatečně rychle, aby byl jev vůbec patrný. Obdobně i pro „podélný" Dopplerův jev lze uvážením dilatace času obdržet univerzální vzorce pro změnu frekvence jakéhokoli vlnění, vyvolanou pohybem zdroje nebo pozorovatele vůči prostředí, v němž se vlnění šíří. Pro světelné vlny pak v těchto vzorcích klademe $w = c$, kde w je rychlost vlnění v daném prostředí. V důsledku relativistických postulátů výsledná rov. (38.25) již nezávisí ani na volbě vztažné soustavy ani na tom, zda se pohybuje zdroj či pozorovatel. Zvídavý čtenář má v této chvíli dostatek znalostí, aby se o tom sám přesvědčil.

kde $T_0 = 1/f_0$ je **vlastní perioda**. Jak ukazuje srovnání s rov. (38.8), je rov. (38.29) prostě vztahem pro časovou dilataci, protože perioda je časový interval.

Navigační systém NAVSTAR

Každá družice systému NAVSTAR nepřetržitě vysílá rádiové signály, které udávají její polohu, s frekvencí, jež je určována a udržována přesnými atomovými hodinami. Je-li signál zachycen např. detektorem v letadle, je jeho frekvence posunuta Dopplerovým jevem. Zaznamenáváme-li zároveň signály vysílané z různých družic NAVSTARu, je detektor schopen určit směr ke každé družici a směr její rychlosti. Z Dopplerova posunu pro signál pak detektor určuje rychlost letadla.

Užijme hrubých odhadů, abychom ukázali, jak to funguje. Rychlost družice NAVSTARu vzhledem ke středu Země je v poměru $1{,}0{\cdot}10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Příslušné β je okolo $3{,}0{\cdot}10^{-5}$. Člen $\beta^2/2$ v rov. (38.26) a (38.28) (tj. relativistický člen) je tedy asi $4{,}5{\cdot}10^{-10}$. Jinými slovy, relativita mění Dopplerův jev měřeného signálu v poměru $4{,}5 : 10^{10}$, což zdánlivě sotva stojí za pozornost.

A přece je to důležité. Atomové hodiny na družicích jsou tak přesné, že kolísání frekvence družicového signálu činí pouze $2 : 10^{12}$. Z rov. (38.28) vidíme, že β (a tedy v) závisí na odmocnině z f/f_0. Uvedené kolísání frekvence hodin způsobuje tedy kolísání

$$\sqrt{2{\cdot}10^{-12}} = 1{,}4{\cdot}10^{-6}$$

pro měřenou hodnotu relativní rychlosti mezi družicí a letadlem.

Protože v je dáno hlavně velkou rychlostí družice $1{,}0{\cdot}10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, znamená to, že rychlost letadla může být určena s přesností asi

$$(1{,}4{\cdot}10^{-6})(1{,}0{\cdot}10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = 1{,}4\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}.$$

Předpokládejme, že letadlo letí hodinu (3 600 s). Známe-li jeho rychlost s přesností $1{,}4\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$, můžeme jeho polohu po uplynutí hodiny předpovědět s přesností

$$(0{,}014\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(3\,600\,\mathrm{s}) = 50\,\mathrm{m},$$

což je pro moderní navigaci přijatelné.

Kdyby se nepřihlíželo k relativistickým jevům, nemohla by být rychlost letadla známa s menší neurčitostí než $21\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$ a jeho poloha po hodině letu by nemohla být předpovězena lépe než s chybou 760 m.

38.11 NOVÝ POHLED NA HYBNOST

Nechť řada pozorovatelů, každý ve své inerciální soustavě, pozoruje izolovanou srážku dvou částic. Podle klasické mechaniky, jak jsme již viděli, všichni zjišťují, že platí zákon zachování hybnosti, i když naměří různé rychlosti srážejících se částic. To znamená, že podle všech pozorovatelů je hybnost systému částic stejná, jako byla před srážkou.

Jak tuto situaci ovlivní relativita? Zjišťujeme, že budeme-li i nadále definovat hybnost $\boldsymbol{p}$ jako $m\boldsymbol{v}$, tedy jako součin hmotnosti m a rychlosti, pak se hybnost pro všechny inerciální pozorovatele *nezachová*. Máme dvě možnosti: (1) vzdát se zákona zachování hybnosti nebo (2) uvážit, zda nelze definovat hybnost částice nějak jinak, aby zákon zachování hybnosti zůstal v platnosti. Zvolíme si druhou cestu.

Uvažujme částici, která se pohybuje konstantní rychlostí v ve směru osy x. Klasicky má její hybnost velikost

$$p = mv = m\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{(klasická hybnost)}, \qquad (38.30)$$

kde Δx je vzdálenost, kterou částice urazí za čas Δt.

Abychom našli relativistický výraz pro hybnost, vyjdeme z nové definice

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0}.$$

Zde Δx je stále vzdálenost, kterou urazí pohybující se částice, jak ji vidí pozorovatel, vůči němuž se pohybuje. Avšak Δt_0 je čas, který částice potřebuje na proběhnutí oné vzdálenosti nikoli tak, jak jej měří pozorovatel sledující pohybující se částici ze svého stanoviště, ale jak jej měří pozorovatel pohybující se spolu s ní. Protože částice je vzhledem k tomuto druhému pozorovateli v klidu, je čas, který měří, vlastním časem Δt_0.

Užijeme-li vzorce pro dilataci času (rov. (38.8)), můžeme psát

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\gamma.$$

Ale protože $\Delta x/\Delta t$ je právě rychlost částice v, platí

$$p = \gamma m v \quad \text{(hybnost)}. \qquad (38.31)$$

Povšimněme si, že od klasické definice podle rov. (38.30) se rov. (38.31) liší jen Lorentzovým faktorem γ. Tento rozdíl je však důležitý: na rozdíl od klasické hybnosti se relativistická hybnost blíží k nekonečné hodnotě, když v se blíží k c.

Veličina m je zde hmotnost měřená v klidové soustavě. Někteří autoři ji proto označují jako m_0 a nazývají *klidovou hmotností*, zatímco γm_0 označují jako m a nazývají *relativistickou hmotností*. Klasický vztah pro hybnost pak zůstává formálně zachován, rozumíme-li pod m relativistickou hmotnost závislou na použité vztažné soustavě. Tato terminologie převládá v naší učebnicové literatuře, zatímco ve fyzice elementárních částic je běžnější terminologie a symbolika, které se přidržujeme zde.

Definici danou rov. (38.31) můžeme zobecnit do vektorového tvaru:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v} \quad \text{(hybnost)}. \tag{38.32}$$

Tuto definici jsme uvedli v čl. 9.4 bez zdůvodnění jako předzvěst věcí, s nimiž se setkáme. Dodejme bez důkazu, že přijmeme-li definici hybnosti danou rov. (38.32), můžeme užívat zákona zachování hybnosti i pro libovolně vysoké rychlosti částic.

38.12 NOVÝ POHLED NA ENERGII

V čl. 7.8 jsme bez dalšího rozboru uvedli relativistický výraz pro kinetickou energii částice

$$E_k = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right).$$

Tento výraz nyní můžeme přepsat jako

$$E_k = mc^2(\gamma - 1) \quad \text{(kinetická energie)}. \tag{38.33}$$

V čl. 7.8 jsme ukázali, že — ač se to může zdát nečekané — tento výraz se redukuje na obvyklé klasické $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ při malých rychlostech. Dodejme, že rov. (38.33) můžeme odvodit úplně stejně jako klasický výraz pro kinetickou energii: Kinetická energie je rovna práci, kterou je potřeba dodat pro urychlení částice z klidu na uvažovanou rychlost. Všimněme si některých důsledků rov. (38.33).

Celková energie

Začneme tím, že definujeme *celkovou energii* E částice jako γmc^2. S pomocí rov. (38.33) pak můžeme psát

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 + E_k \quad \text{(celková energie jediné částice)}. \tag{38.34}$$

Interpretujeme rov. (38.34) jako vyjádření faktu, že celková energie E pohybující se částice se skládá z členu mc^2, který nazveme **klidovou energií** částice, a z členu E_k, což je její kinetická energie. V tab. 8.1 najdeme klidové energie některých částic a jiných objektů. Například klidová energie elektronu je 0,511 MeV a protonu 938 MeV.

Celková energie systému částic je

$$E = \sum_{j=1}^{n} E_j = \sum_{j=1}^{n} (\gamma_j m_j c^2) = \sum_{j=1}^{n} m_j c^2 + \sum_{j=1}^{n} E_{k,j}$$

(celková energie systému částic). (38.35)

Zákon zachování energie se v relativitě vyjádří takto:

Pro izolovaný systém částic zůstává celková energie E, která je definována rov. (38.35), konstantní bez ohledu na to, jaké interakce se mezi částicemi odehrávají.

Při každé izolované reakci či srážkovém procesu, který zahrnuje dvě nebo více částic, musí být tedy celková energie systému před procesem stejná jako po něm. Během procesu se může měnit klidová energie interagujících částic, ale pak se musí měnit i jejich energie kinetická tak, aby se celková energie nezměnila.

Úvahy tohoto druhu souvisejí s proslulým Einsteinovým vztahem $E = mc^2$ (rov. (38.34) pro $E_k = 0$), ze kterého plyne, že klidová energie může být přeměněna na jiné formy energie. A obráceně, všechny reakce — ať již chemické či jaderné — při nichž se energie uvolňuje či pohlcuje, zahrnují odpovídající změnu klidové energie složek reakce. Vztah $E = mc^2$ jsme detailně prodiskutovali v čl. 8.8.

Hybnost a kinetická energie

V klasické mechanice je hybnost částice rovna $p = mv$ a její kinetická energie je $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Vyloučíme-li z těchto dvou rovnic v, dostaneme přímý vztah mezi hybností a kinetickou energií

$$p^2 = 2E_k m \quad \text{(klasicky)}. \tag{38.36}$$

Podobný vztah můžeme najít i v relativitě vyloučením v z relativistické definice hybnosti (rov. (38.31)) a z relativistické definice kinetické energie (rov. (38.33)). Po krátkém výpočtu pak dostaneme

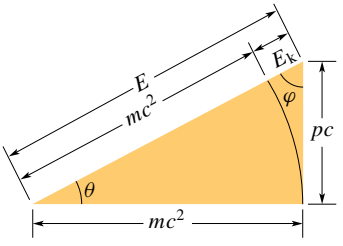
$$(pc)^2 = E_k^2 + 2E_k mc^2. \tag{38.37}$$

Pomocí rov. (38.34) můžeme přepsat rov. (38.37) do podoby vztahu mezi hybností p a celkovou energií E částice

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \tag{38.38}$$

Pravoúhlý trojúhelník z obr. 38.14 nám pomůže, abychom si tento užitečný vztah zapamatovali. Můžeme také ukázat, že v něm platí

$$\sin\theta = \beta \quad \text{a} \quad \sin\varphi = 1/\gamma. \tag{38.39}$$



Obr. 38.14 Užitečná mnemotechnická pomůcka pro relativistický vztah mezi celkovou energií E, klidovou energií mc^2, kinetickou energií E_k a velikostí hybnosti p.

Z rov. (38.38) vidíme, že součin pc má stejný rozměr jako energie E; jednotku hybnosti p tedy můžeme vyjádřit jako jednotku energie dělenou c. V částicové fyzice se také většinou hybnost částic udává v jednotkách MeV/c nebo GeV/c.

KONTROLA 5: Jsou (a) kinetická energie, (b) celková energie 1 GeV elektronu větší, menší, nebo stejné jako energie 1 GeV protonu?

PŘÍKLAD 38.8

(a) Jaká je celková energie E elektronu s kinetickou energií $E_k = 2{,}53$ MeV?

ŘEŠENÍ: Pro celkovou energii platí (rov. (38.34))

$$E = mc^2 + E_k.$$

Z tab. 8.1 najdeme pro elektron $mc^2 = 0{,}511$ MeV, takže

$$E = (0{,}511\ \text{MeV} + 2{,}53\ \text{MeV}) = 3{,}04\ \text{MeV}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je hybnost p elektronu?

ŘEŠENÍ: Z rov. (38.38)

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

můžeme po dosazení psát

$$(3{,}04\ \text{MeV})^2 = (pc)^2 + (0{,}511\ \text{MeV})^2.$$

Pak

$$pc = \sqrt{(3{,}04\ \text{MeV})^2 - (0{,}511\ \text{MeV})^2} = 3{,}00\ \text{MeV},$$

a udáváme-li hybnost v jednotkách energie dělené c, máme

$$p = 3{,}00\ \text{MeV}/c. \quad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaký je Lorentzův faktor γ pro uvažovaný elektron?

ŘEŠENÍ: Z rov. (38.34) máme

$$E = \gamma mc^2.$$

Pro $E = 3{,}04$ MeV a $m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ kg pak je

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{(3{,}04\cdot10^6\ \text{eV})(1{,}6\cdot10^{-19}\ \text{J/eV})}{(9{,}11\cdot10^{-31}\ \text{kg})(3{,}0\cdot10^8\ \text{m·s}^{-1})^2} = 5{,}93. \quad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 38.9

Nejenergetičtější proton, jaký byl kdy zjištěn v kosmických paprscích, měl ohromující kinetickou energii $3{,}0\cdot10^{20}$ eV (tato energie by stačila ohřát lžičku čaje o několik stupňů).

(a) Vypočtěte Lorentzův faktor γ a rychlost v protonu.

ŘEŠENÍ: Řešíme rov. (38.33) pro γ a dostáváme

$$\gamma = \frac{E_k + mc^2}{mc^2} = \frac{E_k}{mc^2} + 1 = \frac{(3{,}0\cdot10^{20}\ \text{eV})}{(938\cdot10^6\ \text{eV})} + 1 = 3{,}198\cdot10^{11} \doteq 3{,}2\cdot10^{11}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Zde jsme užili jako klidovou energii protonu 938 MeV.

Tato vypočtená hodnota pro γ je tak velká, že k nalezení v nemůžeme užít definice γ z rov. (38.7). Zkuste to: kalkulačka vám sdělí, že β je prakticky rovno 1, a tudíž v je prakticky rovno c. Fakticky je v téměř rovno c, ale my potřebujeme přesnější odpověď a tu můžeme dostat, když nejprve vyřešíme rov. (38.7) pro $1 - \beta$. Nejprve pišme:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1-\beta)}},$$

kde jsme užili toho, že β je natolik blízké jedničce, že $1 + \beta$ je velmi blízké dvěma. Řešení pro $1 - \beta$ pak dává

$$1 - \beta = \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1}{2(3{,}198\cdot10^{11})^2} = 4{,}9\cdot10^{-24} \doteq 5\cdot10^{-24}.$$

Je tedy

$$\beta = 1 - 5\cdot10^{-24},$$

a protože $v = \beta c$, je

$$v \approx 0{,}999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,995c. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Předpokládejme, že proton se pohybuje po dráze $9{,}8\cdot10^4$ světelných roků, což je průměr naší Galaxie. Za jak dlouho asi proton urazí tuto dráhu z hlediska společné vztažné soustavy Země + Galaxie?

ŘEŠENÍ: Právě jsme viděli, že *ultrarelativistický* proton se pohybuje rychlostí jen nepatrně menší než c. Průměr Galaxie proletí světlo za $9{,}8\cdot10^4$ roků a protonu to bude trvat skoro stejnou dobu. Cesta protonu z naší vztažné soustavy Země + + Mléčná dráha trvá tedy

$$\Delta t = 9{,}8\cdot10^4\ \text{y}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jak dlouho trvá cesta z hlediska klidové soustavy protonu?

ŘEŠENÍ: Protože začátek i konec cesty nastal v klidové vztažné soustavě protonu v témže místě, totiž v místě, kde byl samotný proton, hledáme vlastní čas cesty. Můžeme užít vzorec pro dilataci času (rov. (38.8)) a transformovat Δt ze soustavy Země + Mléčná dráha do klidové soustavy protonu

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{(9{,}8\cdot 10^4\ \text{y})}{(3{,}198\cdot 10^{11})} = \\ = 3{,}06\cdot 10^{-7}\ \text{y} = 9{,}7\ \text{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V naší soustavě trvá cesta 98 000 roků. V soustavě protonu trvá 9,7 s! Jak jsme slíbili na začátku této kapitoly, relativní pohyb může změnit tempo, jímž plyne čas, a zde podáváme extrémní příklad.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Postuláty

Speciální teorie relativity je založena na dvou postulátech:

1. Zákony fyziky jsou stejné pro pozorovatele ve všech inerciálních vztažných soustavách. Žádná soustava není preferována.
2. Rychlost světla ve vakuu má stejnou hodnotu c ve všech směrech ve všech inerciálních vztažných soustavách, a to nezávisle na rychlosti zdroje.

Rychlost světla c ve vakuu je největší rychlost, jaké může dosáhnout cokoli, co přenáší energii či informaci.

Souřadnice události

Tři prostorové souřadnice a jedna časová souřadnice určují *událost*. Jedním z úkolů speciální teorie relativity je určit souvislost mezi souřadnicemi, jak je událostem připisují dva pozorovatelé, kteří se vzájemně pohybují rovnoměrně a přímočaře.

Současné události

Jestliže se dva pozorovatelé vůči sobě pohybují, nebudou obecně souhlasit v tom, zda dvě události jsou současné. Jestliže jeden pozorovatel zjišťuje, že dvě události v různých místech jsou současné, druhý to popírá, a naopak. Současnost *není* absolutním pojmem, ale pojmem relativním, závislým na pohybu pozorovatele. Relativita současnosti je přímým důsledkem konečnosti mezní rychlosti c.

Dilatace času

Jestliže dvě po sobě jsoucí události nastávají v témže místě v inerciální vztažné soustavě (jsou v ní soumístné), pak časový interval mezi nimi Δt, měřený na jediných hodinách v místě, kde události nastaly, nazýváme *vlastní čas* mezi událostmi. *Pozorovatelé v soustavách, které se vůči této soustavě pohybují, naměří pro tuto dobu větší hodnotu.* Pro pozorovatele pohybujícího se relativní rychlostí v je měřený časový interval

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\,\Delta t_0$$

(dilatace času). (38.6–38.8)

Zde $\beta = v/c$ je *rychlostní parametr* a $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ je *Lorentzův faktor*. Důležitým důsledkem dilatace času je to, že pohybující se hodiny jdou pomaleji z hlediska měření pozorovatele, který je v klidu.

Kontrakce délky

Délka L_0 objektu měřená pozorovatelem v inerciální vztažné soustavě, v níž je objekt v klidu, se nazývá jeho *vlastní délka*. *Pozorovatelé v soustavách, které se vůči této soustavě pohybují rovnoběžně s danou délkou, naměří kratší délku.* Pro pozorovatele, který se pohybuje relativní rychlostí v, je měřená délka

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L_0}{\gamma} \quad \text{(kontrakce délky).} \qquad (38.9)$$

Lorentzova transformace

Rovnice *Lorentzovy transformace* spojují prostoročasové souřadnice události, jak je vidí pozorovatelé ve dvou inerciálních soustavách S a S', kde S' se pohybuje relativně k S rychlostí v v kladném směru os x a x'. Čtyři souřadnice jsou spojeny vztahy

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \qquad (38.14)$$

(Lorentzovy transformační rovnice; platí pro všechny rychlosti).

Relativistické skládání rychlostí

Pohybuje-li se částice rychlostí u' v kladném směru x' v inerciální vztažné soustavě S', která se sama pohybuje rychlostí v ve směru osy x další inerciální soustavy S, pak výsledná rychlost u částice měřená v S je

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad \text{(relativistické rychlosti).} \qquad (38.23)$$

Relativistický Dopplerův jev

Pohybuje-li se zdroj emitující světelné vlny o frekvenci f_0 směrem od detektoru relativní rychlostí $\boldsymbol{v}$, pak frekvence f měřená detektorem je

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \begin{matrix}\text{(zdroj a detektor}\\ \text{se vzájemně vzdalují).}\end{matrix} \qquad (38.25)$$

Příčný Dopplerův jev

Je-li relativní pohyb zdroje kolmý na spojnici zdroj — detektor, má dopplerovský vzorec tvar

$$f = f_0\sqrt{1-\beta^2}. \tag{38.27}$$

Tento *příčný Dopplerův jev* je dán dilatací času.

Hybnost a energie

Definice hybnosti $\boldsymbol{p}$, kinetické energie E_k a celkové energie E platné při všech možných rychlostech jsou

$$\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v} \quad \text{(hybnost)}, \tag{38.32}$$

$$E_k = mc^2(\gamma - 1) \quad \text{(kinetická energie)}, \tag{38.33}$$

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 + E_k \quad \text{(celková energie jediné částice)}. \tag{38.34}$$

Při těchto definicích nabývá princip zachování celkové energie pro systém částic tvar

$$E = \sum_{j=1}^{n} E_j = \sum_{j=1}^{n} (\gamma_j m_j c^2) = \sum_{j=1}^{n} m_j c^2 + \sum_{j=1}^{n} E_{kj}$$

(celková energie systému částic). (38.35)

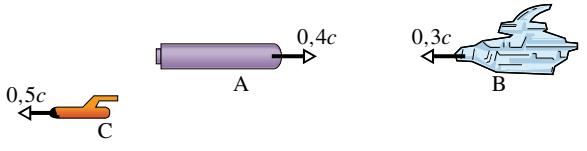
Často jsou užitečné dva další vztahy pro energii, odvoditelné z rov. (38.22), (38.33) a (38.34)

$$(pc)^2 = E_k^2 + 2E_k mc^2, \tag{38.37}$$

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \tag{38.38}$$

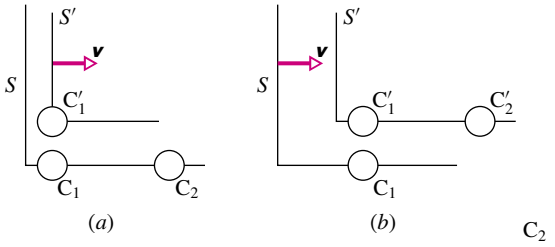
OTÁZKY

1. Na obr. 38.15 vysílá kosmická loď A laserový pulz k lodi B, která jí letí vstříc, zatímco výzvědná loď C se vzdaluje. Napsané rychlosti lodí jsou měřeny v téže vztažné soustavě. Seřaďte lodě podle velikosti rychlosti pulzu, jak ji naměří na každé lodi.



Obr. 38.15 Otázky 1 a 10

2. Obr. 38.16a ukazuje dvoje hodiny v nehybné soustavě S (v této soustavě jsou synchronizovány) a jedny hodiny v pohybující se soustavě S'. Hodiny C_1 a C_1' ukazují v okamžiku, kdy se míjejí, nulu. Když se míjejí hodiny C_1' a C_2, které hodiny (a) ukazují menší údaj, (b) měří vlastní čas?

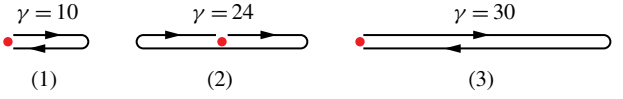


Obr. 38.16 Otázky 2 a 3

3. Obr. 38.16b ukazuje dvoje hodiny v nehybné soustavě S' (v této soustavě jsou synchronizovány) a jedny hodiny v pohybující se soustavě S. Hodiny C_1 a C_1' ukazují v okamžiku, kdy se míjejí, nulu. Když se míjejí hodiny C_1 a C_2', které hodiny (a) ukazují menší údaj, (b) měří vlastní čas?

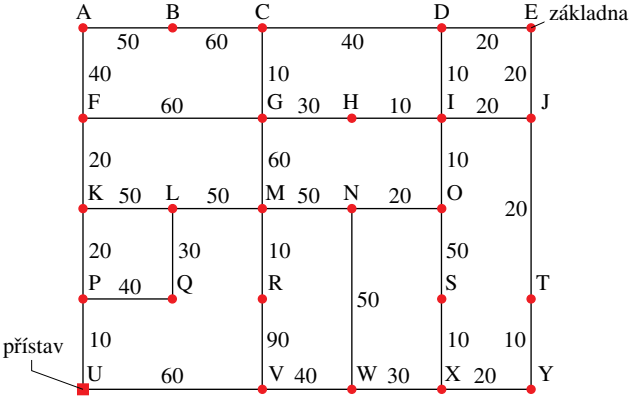
4. Slávek opouští Venuši na kosmické lodi letící na Mars a míjí Sylvu, která žije na Zemi, relativní rychlostí $0{,}5c$. (a) Oba měří dobu letu Venuše – Mars. Kdo měří vlastní čas: Slávek, Sylva, nebo oba? (b) Během cesty Slávek posílá světelný pulz k Marsu. Oba měří dobu letu pulzu. Kdo měří vlastní čas?

5. Obr. 38.17 ukazuje tři situace, v nichž hvězdolet míjí Zemi (tečka) a potom podnikne let s obratem, který jej vrací zpět k Zemi. Každé lodi je přiřazen jistý Lorentzův faktor. V klidové soustavě Země jsou vzdálenosti cest dány takto: cesta (1), $2D$; cesta (2), $4D$; cesta (3), $6D$. Bez psaných výpočtů a při zanedbání časů potřebných ke změně rychlostí seřaďte situace podle cestovních dob, jak se jeví v klidové soustavě (a) Země, (b) hvězdoletu. (*Tip*: Viz př. 38.5.)



Obr. 38.17 Otázka 5

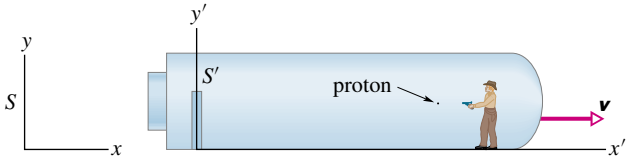
6. Obr. 38.18 je mapa cestovních linek, které jsou v mezihvězdné oblasti povoleny tamní vládou. Každá linka (mezi dvěma uzly označenými písmeny) má připsánu maximální hodnotu faktoru γ, který je na ní povolen. V klidové soustavě uzlů



Obr. 38.18 Otázka 6

jsou vzdálenosti sousedních uzlů L, nebo $2L$. (a) Najděte cestu z Přístavu na Základnu, která minimalizuje váš cestovní čas (při zanedbání času potřebného ke změně γ). (*Tip*: Viz př. 38.5.) Kdo změří (b) menší čas, (c) menší délku této cesty: vy, nebo ten, kdo je vzhledem k uzlům v klidu?

7. Obr. 38.19 ukazuje kosmickou loď (spojenou s palubní vztažnou soustavou S'), která nás míjí (naše vztažná soustava je S).



Obr. 38.19 Otázka 7

Proton je vystřelen téměř světelnou rychlostí podél osy lodě zepředu dozadu. (a) Je prostorový rozdíl $\Delta x'$ mezi místem vystřelení protonu a místem jeho dopadu na zadní stěnu kladný, nebo záporný? (b) Je časový rozdíl $\Delta t'$ mezi těmito událostmi kladná, nebo záporná veličina?

8. (a) Nechť pozorovatel na obr. 38.9 v soustavě S' měří dvě události nastávající v témže místě (dejme tomu v x'), ale nikoli v témže čase. Je možné, aby je pozorovatel v soustavě S zjistil ve stejném místě? (b) Nastávají-li dvě události současně v témže místě pro jednoho pozorovatele, budou současné pro všechny ostatní pozorovatele? (c) Nastanou v témže místě pro všechny ostatní pozorovatele?

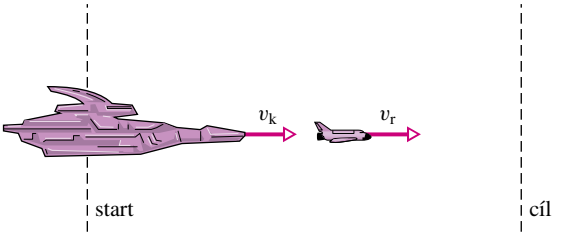
9. Obr. 38.20 ukazuje hvězdolet a asteroid. Ve čtyřech situacích jsou zadány rychlosti hvězdoletu vzhledem k nám (nacházíme se na průzkumné kosmické lodi) a rychlosti asteroidu vzhledem k hvězdoletu: (a) $+0{,}4c$, $+0{,}4c$; (b) $+0{,}5c$, $+0{,}3c$; (c) $+0{,}9c$, $-0{,}1c$; (d) $+0{,}3c$, $+0{,}5c$. Bez psaných výpočtů seřaďte situace sestupně podle velikosti relativní rychlosti asteroidu vzhledem k nám.



Obr. 38.20 Otázka 9

10. Kosmické lodě A a B na obr. 38.15 se pohybují přímo proti sobě; všechny uvažované rychlosti jsou měřeny v téže vztažné soustavě. Je rychlost lodě A vzhledem k lodi B větší, menší, nebo rovna $0{,}7c$?

11. Obr. 38.21 ukazuje jeden ze dvou kosmických křižníků, které spolu soutěží. Každý křižník dospěje na startovní čáru a vypustí raketu, která se pohybuje k cílové čáře. Jako hodnotitelé soutěže jste nehybní vzhledem ke startovní i cílové čáře. Rychlosti v_k křižníků vzhledem k vám a rychlosti v_r raket vzhledem k jejich křižníkům jsou: (1) $0{,}70c$, $0{,}40c$; (2) $0{,}40c$, $0{,}70c$; (3) $0{,}20c$, $0{,}90c$; (4) $0{,}50c$, $0{,}60c$. Všechny následující „výpočty“ provádějte bez papíru, jenom „z hlavy“. Seřaďte rakety sestupně (a) podle velikosti jejich relativní rychlosti vzhledem k vám, (b) podle vzdáleností, které jejich piloti měří od startovní k cílové čáře. (c) Každý křižník posílá své raketě signál s frekvencí f_0, měřeno na palubě křižníku. Seřaďte rakety sestupně podle velikosti pozorovaných frekvencí.



Obr. 38.21 Otázka 11

12. Jste na palubě hvězdoletu a přijímáte signály ze čtyř raket, které se pohybují přímo od vás, nebo přímo k vám. Signály mají stejnou vlastní frekvenci f_0. Rychlost a směr (obojí relativně k vám) raket jsou: (a) $0{,}3c$ k vám; (b) $0{,}6c$ k vám; (c) $0{,}3c$ od vás; (d) $0{,}6c$ od vás. Seřaďte rakety sestupně podle frekvencí, které jste zaznamenali.

13. Obr. 38.22 ukazuje tři kosmické lodě, které se pohybují doprava, nebo doleva podle zakreslené osy. Všechny emitují mikrovlnné signály o téže vlastní frekvenci f_0. Loď C deteguje signál od lodě A s frekvencí $f_1 > f_0$. Loď A deteguje signál od lodě B s frekvencí $f_2 < f_0$. Je frekvence signálu z lodě B detegovaná lodí C menší než f_0, větší než f_1, nebo leží mezi f_0 a f_1?



Obr. 38.22 Otázka 13

14. Klidová a celková energie tří částic, vyjádřeny pomocí jisté základní jednotky A, jsou: (1) A, $2A$; (2) A, $3A$; (3) $3A$, $4A$. Bez psaných výpočtů seřaďte částice sestupně podle (a) jejich hmotnosti, (b) jejich kinetické energie, (c) jejich Lorentzova faktoru, (d) jejich rychlosti.

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 38.2 Postuláty

1C. Jaký zlomek rychlosti světla představuje každá z následujících rychlostí (tj. jaký je rychlostní parametr β)? (a) Typická rychlost posunu kontinentů (3 cm/rok). (b) Rychlostní limit na dálnici (120 km/h). (c) Nadzvukové letadlo 2,5 machů (1 200 km/h). (d) Úniková rychlost z povrchu Země. (e) Typická rychlost kosmologického vzdalování kvazarů ($3{,}0{\cdot}10^4$ km/s).

2C. I když odhlédneme od jevů způsobených rotací a oběhem Země, není laboratorní soustava přesně vzato inerciální, protože částice, která je do ní vložena s nulovou rychlostí, nezůstane obecně v klidu a začne padat. Často ovšem události probíhají tak rychle, že můžeme gravitační zrychlení ignorovat a považovat danou soustavu za inerciální. Uvažujme například elektron s rychlostí $v = 0{,}992c$, který vletěl vodorovně do laboratorní komory a proletěl vzdálenost 20 cm. (a) Jak dlouho tato cesta trvala? (b) O kolik během letu elektron spadl? Co můžete říci o přijatelnosti laboratoře jakožto inerciálního systému v tomto případě?

3Ú. Najděte rychlost částice, která se na dráze dlouhé 6,0 světelných roků opozdí o 2,0 roky za světlem.

ODST. 38.5 Relativita času

4C. Jaký musí být rychlostní parametr β, je-li Lorentzův faktor γ roven (a) 1,01, (b) 10,0, (c) 100, (d) 1 000?

5C. Střední doba života nehybných mionů byla naměřena jako 2,2 μs. Střední doba života velmi rychlých mionů ve výtrysku kosmických paprsků pozorovaná ze Země byla naměřena jako 16 μs. Najděte rychlost těchto kosmických mionů vzhledem k Zemi.

6Ú. Nestabilní vysokoenergetická částice vstupuje do detektoru a proběhne úsek 1,05 mm, než se rozpadne. Její rychlost vzhledem k detektoru je $0{,}992c$. Jaká je její doba života, tj. jak dlouho by částice setrvala v detektoru do rozpadu, kdyby v něm byla v klidu?

7Ú. Srážkou vysokoenergetické částice kosmického záření s atomovým jádrem vznikl ve vysokých vrstvách zemské atmosféry pion. Ten pak letěl k Zemi rychlostí $0{,}99c$. Ve vztažné soustavě, v níž jsou piony v klidu, je průměrná doba jejich života do rozpadu 26 ns. Měříme-li v soustavě spojené se Zemí, jak dlouho se průměrně takový pion bude pohybovat atmosférou, než se rozpadne?

8Ú. Chcete podniknout cestu kosmické lodi ze Země a vrátit se zpět. Budete se 6 měsíců pohybovat konstantní rychlostí po přímce, načež se stejnou konstantní rychlostí vrátíte. Po návratu se chcete ocitnout na Zemi, na níž zatím uběhlo tisíc let. (a) Jak rychle musíte letět? (b) Záleží na tom, zda se pohybujete po přímce? Kdybyste například cestoval rok po kružnici, uběhlo by i potom do vašeho návratu 1 000 let na pozemských hodinách?

ODST. 38.6 Relativita délky

9C. Tyč leží rovnoběžně s osou x vztažné soustavy S a pohybuje se podél ní rychlostí $0{,}630c$. Její klidová délka je 1,70 m. Jaká bude její délka měřená v soustavě S?

10C. Pozorovatel zjistil, že délka kosmické lodě je přesně rovna polovině její klidové délky. (a) Jaká je rychlost lodě v jeho soustavě? (b) Kolikrát pomaleji jdou hodiny v lodi ve srovnání s hodinami pozorovatele?

11C. Metrová tyč v soustavě S' svírá s osou x' úhel 30°. Pohybuje-li se tato soustava rovnoběžně s osou x rychlostí $0{,}90c$ vzhledem k soustavě S, jaká je délka tyče měřená v S?

12C. Elektron s $\beta = 0{,}999\,987$ se pohybuje podél osy vakuové trubice, která má délku 3,00 m, jak ji měří v laboratoři pozorovatel S, který je vzhledem k trubici v klidu. Pozorovatel S', který je v klidu vzhledem k elektronu, však zjišťuje, že trubice se pohybuje rychlostí $v = \beta c$. Jakou délku trubice pozorovatel S' naměří?

13C. Klidový poloměr Země je 6 378 km a rychlost, s níž obíhá okolo Slunce, má velikost 30 km/s. Dejme tomu, že se Země pohybuje touto rychlostí kolem pozorovatele. Jak se pro tohoto pozorovatele zkrátí poloměr Země ve směru pohybu?

14C. Kosmická loď klidové délky 130 m se pohybuje kolem výzkumné stanice rychlostí $0{,}740c$. (a) Jaká je délka lodě měřená ze stanice? (b) Jaký časový interval zaznamenají staniční hodiny mezi průchodem začátku a konce lodě?

15Ú. Kosmická poutnice opustila Zemi a pohybuje se rychlostí $0{,}99c$ k hvězdě Vega, která je vzdálena 26 ly. Jaký čas zabere cesta na pozemských hodinách, (a) než poutnice dosáhne Vegy, (b) než pozemští pozorovatelé dostanou zprávu o jejím dosažení? O kolik zestárne podle výpočtu pozemských pozorovatelů poutnice (z jejího hlediska) od startu po dosažení Vegy?

16Ú. Letadlo, jehož klidová délka je 40,0 m, se pohybuje vzhledem k Zemi stálou rychlostí 630 m/s. (a) Na jaký zlomek své klidové délky se zkrátí pro pozorovatele na Zemi? (b) Jak dlouho potrvá na pozemských hodinách, než se hodiny v letadle zpozdí o 1,00 μs? (Užijte pro své výpočty speciální relativitu.)

17Ú. (a) Je v principu možné, aby někdo cestoval ze Země do středu Galaxie (který je vzdálen asi 23 000 světelných let) během normální doby života? Pro vysvětlení užijte argumentů založených na dilataci času nebo na kontrakci délky. (b) Jaké konstantní rychlosti by bylo třeba, aby byl takový výlet uskutečněn za 30 let (vlastního času)?

ODST. 38.8 Některé důsledky Lorentzových rovnic

18C. Pozorovatel S připisuje události prostoročasové souřadnice $x = 100$ km a $t = 200$ μs. Jaké jsou souřadnice této události v soustavě S', která se pohybuje ve směru rostoucího x rychlostí $0{,}950c$ vzhledem k S? Předpokládejme $x = x' = 0$ v čase $t = t' = 0$.

19C. Pozorovatel S hlásí, že událost nastala na jeho ose x v místě $x = 3{,}00{\cdot}10^8$ m v čase $t = 2{,}50$ s. (a) Pozorovatel S' se pohybuje ve směru rostoucího x rychlostí $0{,}400c$. Dále je $x = x' = 0$ v čase $t = t' = 0$. Jaké souřadnice přiřadí události pozorovatel S'? (b) Jaké souřadnice by jí přiřadil, kdyby se pohyboval stejnou rychlostí ve směru *klesajícího* x?

20C. Inerciální soustava S' se pohybuje rychlostí $0{,}60c$ vzhledem k soustavě S (obr. 38.9). Dále je $x = x' = 0$ v čase $t = t' = 0$. Jsou pozorovány dvě události. V soustavě S nastává událost 1 v počátku v čase $t = 0$ a událost 2 nastává na ose x v místě $x = 3{,}0$ km v čase $t = 4{,}0\,\mu$s. Jaké časy přiřadí týmž událostem pozorovatel S'? Vysvětlete rozdíl v pořadí časů.

21C. Experimentátor zařídí současné rozsvícení dvou žárovek. Velká žárovka vzplane v počátku jeho vztažné soustavy a malá v místě $x = 30{,}0$ km. Pozorovatel pohybující se rychlostí $0{,}250c$ ve směru rostoucího x uvidí tato vzplanutí. (a) Jaký časový interval mezi nimi určí? (b) Které vzplanutí nastane podle něho dříve?

22C. V tab. 38.2 mohou být Lorentzovy transformační rovnice v pravém sloupci odvozeny z rovnic v levém sloupci prostě výměnou čárkovaných a nečárkovaných prostoročasových souřadnic a současně se změnou znaménka v. Ověřte to přímým algebraickým výpočtem.

23Ú. Hodiny se pohybují podél osy x rychlostí $0{,}600c$ a ukazují nulu, když míjejí počátek. (a) Vypočtěte jejich Lorentzův faktor. (b) Jaký čas budou hodiny ukazovat, když letí nad místem se souřadnicí $x = 180$ m?

24Ú. Pozorovatel S vidí velký světelný záblesk 1 200 m od sebe a malý světelný záblesk o 720 m blíže přesně ve směru k velkému záblesku. Změří časový interval mezi záblesky 5,00 μs, přičemž k velkému záblesku došlo dříve. (a) Jaká je relativní rychlost ✔ (udejte velikost i směr) druhého pozorovatele S', podle něhož došlo k oběma zábleskům v témže místě? (b) Ke kterému záblesku došlo dříve z hlediska S'? (c) Jaký časový interval mezi nimi S' naměřil?

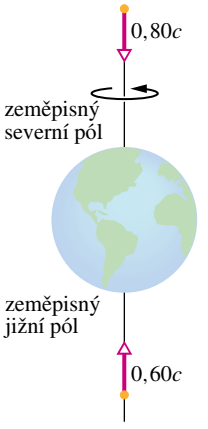
25Ú. V úloze 24 pozorovatel S vidí záblesky na týchž místech jako předtím, ale jsou si nyní méně vzdáleny v čase. Jak blízké si mohou být v čase v soustavě S, aby bylo ještě možné najít soustavu S', v níž nastávají ve stejném místě?

ODST. 38.9 Relativistické skládání rychlostí

26C. Částice se pohybuje podél osy x' soustavy S' rychlostí $0{,}40c$. Soustava S' se pohybuje rychlostí $0{,}60c$ vzhledem k soustavě S. Jaká je rychlost částice v soustavě S?

27C. Soustava S' se pohybuje vzhledem k soustavě S rychlostí $0{,}62c$ ve směru rostoucího x. V soustavě S' je změřena rychlost částice $0{,}47c$ ve směru rostoucího x'. Osy x, x' jsou souhlasně rovnoběžné. (a) Jaká je rychlost částice vzhledem k soustavě S? (b) Jaká by byla rychlost částice vzhledem k S, kdyby se částice pohybovala (rychlostí $0{,}47c$) ve směru *klesajícího* x' v soustavě S'? V obou případech srovnejte vaše odpovědi a předpovědi podle klasických transformačních rovnic.

28C. Dvě částice kosmického záření letěly podél zemské osy. Jedna měla rychlost $0{,}80c$ a dosáhla severního pólu, druhá měla rychlost $0{,}60c$ a dosáhla jižního pólu (obr. 38.23). Jakou relativní rychlostí se částice k sobě blížily? (*Tip*: Je užitečné považovat Zemi a jednu z částic za dvě inerciální vztažné soustavy.)



Obr. 38.23 Cvičení 28

29C. Je zjištěno, že galaxie A se od nás vzdaluje rychlostí $0{,}35c$. Galaxie B, umístěná v přesně opačném směru, se od nás vzdaluje stejnou rychlostí. Jakou rychlost vzdalování najde pozorovatel v galaxii A pro (a) naši Galaxii, (b) pro galaxii B?

30C. Z měření rudého posuvu světla emitovaného kvazarem Q_1 bylo zjištěno, že se od nás vzdaluje rychlostí $0{,}800c$. Kvazar Q_2, který leží v témže směru v prostoru, ale je k nám blíže, se od nás vzdaluje rychlostí $0{,}400c$. Jakou rychlost kvazaru Q_2 by naměřil pozorovatel na kvazaru Q_1?*

31Ú. Kosmická loď, jejíž klidová délka je 350 m, má rychlost $0{,}82c$ vzhledem k jisté vztažné soustavě. Mikrometeorit, který má rovněž rychlost $0{,}82c$ v této soustavě, míjí loď v protisměru. Jak dlouho trvá, než ji mine, podle měření vykonaného na lodi?

32Ú. Má-li družice obletět Zemi na nízké dráze, musí mít rychlost asi 27 000 km/h. Nechť dvě takové družice oblétají Zemi v opačných směrech. (a) Jaká je jejich relativní rychlost, když se míjejí, podle klasické Galileovy transformační rovnice? (b) Jaké relativní chyby se dopustíme, když neužijeme (správné) relativistické transformační rovnice?

33Ú. Speciální kosmická loď je poháněna mohutnými výbuchy; každý zvýší její rychlost o $0{,}5c$. Kolik výbuchů je potřeba, aby loď z klidu překročila rychlost $0{,}999c$?

34Ú. Flotila kosmických lodí, která je dlouhá 1,00 ly (ve své klidové soustavě), se pohybuje rychlostí $0{,}800c$ vzhledem k pozemní stanici S. Posel cestuje zezadu na čelo flotily rychlostí

---

* Kvazary jsou ve velkých vzdálenostech, při kterých nelze zanedbat zakřivení prostoročasu, jímž se zabývá obecná teorie relativity. Řešení úlohy by proto měla předcházet obecně relativistická analýza pojmu rychlosti (co se rozumí relativní rychlostí vzdálených objektů v zakřiveném prostoročase). V prvním přiblížení, pro informativní odhad, může čtenář tuto komplikaci ignorovat.

$0{,}950c$ vzhledem k S. Jak dlouho trvá jeho cesta, je-li měřena (a) v poslově klidové soustavě, (b) v klidové soustavě flotily, (c) pozorovatelem v soustavě S?

ODST. 38.10 Dopplerův jev pro světlo

35C. Kosmická loď pohybující se od Země rychlostí $0{,}900c$ podává zprávu na frekvenci (měřené v soustavě lodě) 100 MHz. Na jakou frekvenci musejí být pozemští pozorovatelé naladěni, aby zprávu slyšeli?

36C. Ve spektru kvazaru 3C9 se objevují některé běžné vodíkové spektrální čáry, jsou však natolik posunuty ve směru k červenému konci spektra, že pozorované vlnové délky jsou třikrát větší, než jaké se pozorují u vodíkových atomů, které jsou v klidu v laboratoři. (a) Ukažte, že klasická Dopplerova rovnice dává v této situaci relativní rychlost vzdalování větší než c. (b) Za předpokladu, že relativní pohyb 3C9 vzhledem k Zemi je dán čistě vzdalováním, najděte rychlost vzdalování, jakou předvídá relativistická Dopplerova rovnice.

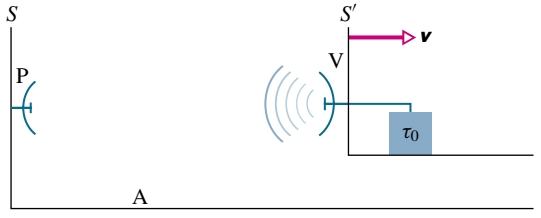
37C. Určete dopplerovský posuv vlnové délky $\lambda - \lambda_0$ (pokud k němu dochází) pro D_2 čáru sodíku (589,00 nm) emitovanou zdrojem pohybujícím se po kružnici konstantní rychlostí $v = 0{,}100c$, jak jej změří pozorovatel umístěný ve středu kružnice.

38Ú. Kosmická loď se vzdaluje od Země rychlostí $0{,}20c$. Cestujícím v lodi se světelný zdroj na zádi lodi jeví jako modrý ($\lambda = 450$ nm). Jakou barvu bude mít tento zdroj pro pozorovatele na Zemi, kteří se dívají za odlétající lodí?

39Ú. Radarový vysílač v místě V je klidný vůči vztažné soustavě S', která se pohybuje doprava rychlostí v vůči vztažné soustavě S (obr. 38.24). Mechanický měřič času (v podstatě hodiny) v soustavě S' s periodou τ_0 (měřenou v S') způsobuje, že vysílač emituje pravidelné radarové pulzy, které se pohybují rychlostí světla a jsou přijímány v P, což je přijímač, který je v klidu v S. (a) Jaká je perioda τ časoměřiče, jak ji určuje pozorovatel, který je v bodě A v klidu v soustavě S? (b) Ukažte, že na přijímači P časový interval mezi pulzy přicházejícími z V není τ ani τ_0, ale

$$\tau_P = \tau_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

(c) Vysvětlete, proč přijímač P a pozorovatel A, kteří jsou v téže vztažné soustavě, měří rozličnou periodu vysílače. (*Tip*: Hodiny a radarový pulz nejsou totéž.)



Obr. 38.24 Úloha 39

ODST. 38.12 Nový pohled na energii

40C. Jakou práci je třeba vykonat, aby se rychlost elektronu změnila z klidu na (a) $0{,}50c$, (b) $0{,}990c$, (c) $0{,}999\,0c$?

41C. Elektron se pohybuje rychlostí, jakou by mohl oběhnout Zemi kolem rovníku za 1,00 s. (a) Jaká je tato rychlost v poměru k rychlosti světla? (b) Jaká je jeho kinetická energie E_k? (c) Kolikaprocentní chybu uděláme, užijeme-li k výpočtu E_k klasického vzorce?

42C. Najděte rychlostní parametr β a Lorentzův faktor γ pro elektron, jehož kinetická energie je (a) 1,00 keV, (b) 1,00 MeV, (c) 1,00 GeV.

43C. Najděte rychlostní parametr β a Lorentzův faktor γ pro částici, jejíž kinetická energie je 10,0 MeV, je-li touto částicí (a) elektron, (b) proton, (c) α-částice.

44C. Jaká je rychlost elektronu, jehož kinetická energie je 100 MeV?

45C. Částice má rychlost $0{,}990c$ v laboratorní vztažné soustavě. Jaká je její kinetická energie, celková energie a hybnost, je-li touto částicí (a) proton, (b) elektron.

46C. V roce 1979 byla spotřeba elektrické energie v USA asi $2{,}2 \cdot 10^{12}$ kW·h. Jaká hmotnost je ekvivalentní této energii? Je pro vaši odpověď důležité, zda tato energie byla získána spalováním fosilních paliv, v jaderných elektrárnách, nebo v hydrocentrálách?

47C. Kvazary jsou považovány za jádra aktivních galaxií v raných stadiích jejich vývoje. Typický kvazar vyzařuje energii s výkonem 10^{41} W. Jak rychle se mění hmotnost kvazaru ztrátou této energie? Jaký násobek hmotnosti Slunce za rok kvazar vyzáří?

48Ú. Jaká práce se musí vykonat, aby se rychlost elektronu zvýšila (a) z $0{,}18c$ na $0{,}19c$, (b) z $0{,}98c$ na $0{,}99c$? Povšimněte si, že vzrůst rychlosti je v obou případech $0{,}01c$.

49Ú. Jaká je rychlost částice, (a) jejíž kinetická energie je rovna dvojnásobku její klidové energie, (b) jejíž celková energie je rovna dvojnásobku její klidové energie?

50Ú. Do částice o hmotnosti m, která je v klidu v inerciální soustavě S, narazí stejná částice rychlostí $c/2$. Jakou rychlost vůči S má jejich *těžišťová soustava* S_T? (Stejně jako v klasické mechanice je v S_T úhrnná hybnost systému před srážkou rovna nule. Jak tomu bude po srážce? Co když srážka nebude pružná?)

51Ú. (a) Jaké napětí urychlí elektron na rychlost c podle klasické fyziky? (b) Jakou rychlost získá při tomto napětí elektron ve skutečnosti?

52Ú. Částice o hmotnosti m má hybnost mc. Určete její (a) Lorentzův faktor, (b) rychlost, (c) kinetickou energii?

53Ú. Jaká musí být hybnost částice o hmotnosti m, aby její celková energie třikrát převyšovala klidovou energii?

54Ú. Uvažujme následující částice pohybující se v prázdném prostoru: 2,0 eV foton, 0,40 MeV elektron, 10 MeV proton. (a) Která částice se pohybuje nejrychleji? (b) Která nejpomaleji? (c) Která má největší hybnost? (d) Která má nejmenší hybnost? (*Tip*: Foton je částice světla s nulovou klidovou hmotností.)

55Ú. Aspirinová tableta má hmotnost 320 mg. Kolik kilometrů bychom mohli ujet v automobilu při spotřebě ekvivalentní ener-

gie? Předpokládejme, že v automobilu 1 litr paliva vystačí na 13 km jízdy a energie získaná z paliva je $3{,}5{\cdot}10^7$ J/l.

56Ú. (a) Je-li změřena kinetická energie E_k a hybnost p částice, mělo by být možné najít její hmotnost m a částici tak identifikovat. Ukažte, že platí

$$m = \frac{(pc)^2 - E_k^2}{2E_k c^2}.$$

(b) Ukažte, že tento výraz se při $u/c \to 0$, kde u je rychlost částice, redukuje na výsledek, který bylo možno očekávat. (c) Najděte hmotnost částice, jejíž kinetická energie je 55,0 MeV a jejíž hybnost je 121 MeV/c. Vyjádřete svou odpověď pomocí hmotnosti elektronu.

57Ú. Při vysokoenergetické srážce mezi částicí kosmického záření a částicí v horní vrstvě zemské atmosféry 120 km nad hladinou moře vznikl pion. Pion má celkovou energii $E = 1{,}35{\cdot}10^5$ MeV a pohybuje se svisle směrem dolů. Ve vlastní klidové soustavě se rozpadá za 35,0 ns po svém vzniku. Jak vysoko nad hladinou moře dojde k rozpadu (ve vztažné soustavě spojené se Zemí)? Klidová energie pionu je 139,6 MeV.

58Ú. Průměrná doba života mionů v klidu je 2,20 μs. Laboratorní měření mionů pohybujících se ve svazku vystupujícím z urychlovače dávají průměrnou dobu života mionů 6,90 μs. Jaká je (a) rychlost, (b) kinetická energie, (c) hybnost těchto mionů vzhledem k laboratoři? Hmotnost mionu je 207krát větší než hmotnost elektronu.

59Ú. (a) Kolik energie se uvolní při výbuchu jaderné bomby obsahující 3,0 kg štěpného materiálu? Předpokládejme, že 0,10 % hmotnosti se přemění v uvolněnou energii. (b) Jaká hmotnost TNT by při explozi uvolnila stejnou energii? Předpokládejme, že každý mol TNT uvolňuje při explozi 3,4 MJ. Molekulová hmotnost TNT je 0,227 kg/mol. (c) Kolikrát efektivnější je jaderná exploze než výbuch TNT při stejné hmotnosti výbušniny? Porovnejte zlomek hmotnosti, který se v obou případech změní v energii.

60Ú. V článku 29.5 jsme ukázali, že částice o náboji Q a o hmotnosti m pohybující se rychlostí v kolmo k homogennímu magnetickému poli B se pohybuje po kružnici poloměru r, který je dán rov. (29.16)

$$r = \frac{mv}{QB}.$$

Ukázali jsme také, že perioda T kruhového pohybu je nezávislá na rychlosti částice. Tyto výsledky platí pouze tehdy, když $v \ll c$. Pro rychlejší částice musíme k výpočtu poloměru kruhové dráhy použít vzorce

$$r = \frac{p}{QB} = \frac{m(\gamma v)}{QB} = \frac{mv}{QB\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Tato rovnice platí při všech rychlostech. Vypočtěte poloměr dráhy 10,0 MeV elektronu, který se pohybuje kolmo na homogenní magnetické pole o indukci 2,20 T užitím (a) klasických, (b) relativistických vzorců. (c) Vypočtěte periodu $T = 2\pi r/v$ kruhového pohybu. Je výsledek nezávislý na rychlosti elektronu?

61Ú. Ionizační měření ukazují, že jistá jaderná částice o malé hmotnosti má dvojnásobný elementární náboj $Q = 2e$ a pohybuje se rychlostí $v = 0{,}710c$. Poloměr křivosti její trajektorie v magnetickém poli o indukci 1,00 T je 6,28 m. (Trajektorie je kružnice, jejíž rovina je kolmá k magnetickému poli.) Najděte hmotnost částice a stanovte, o jakou částici jde. (*Tip*: Jaderné částice o nízké hmotnosti jsou složeny z neutronů (které nemají náboj) a protonů (s nábojem $+e$) ve zhruba stejném množství. Považujte hmotnost každé z těchto částic za 1,00 u. Viz také úlohu 60.)

62Ú. 10 GeV proton kosmického záření doletěl k Zemi s rychlostí $\boldsymbol{v}$ kolmou k zemskému magnetickému poli indukce $\boldsymbol{B}$ v oblasti, kde průměrná hodnota magnetické indukce Země je 55 μT. Jaký je poloměr zakřivení dráhy protonu v této oblasti? (Viz úlohu 60.)

63Ú. 2,50 MeV elektron se pohybuje kolmo k magnetickému poli na dráze, jejíž poloměr křivosti je 3,0 cm. Jaké je magnetické pole $\boldsymbol{B}$? (Viz úlohu 60.)

64Ú. Protonový synchrotron ve Fermilabu urychluje protony na kinetickou energii 500 GeV. Při tak velké energii jsou relativistické jevy důležité; například když roste rychlost protonu, roste rovněž čas, po který proton obíhá kruhovou dráhu v synchrotronu. V cyklotronu, kde magnetické pole a oscilátor mají pevně dané parametry, vede toto časové prodloužení ke ztrátě synchronizace mezi obíháním protonu a oscilátorem. To vylučuje opakované urychlování; proton tak nedosáhne energie vyšší než 500 GeV. V synchrotronu se však velikost magnetického pole a frekvence mění tak, aby prodloužení času dovolily.

Při energii 500 GeV vypočtěte (a) Lorentzův faktor, (b) rychlostní parametr, (c) magnetické pole na orbitě protonu, která má poloměr křivosti 750 m. (Viz úlohu 60, za klidovou energii protonu dosaďte 938,3 MeV.)

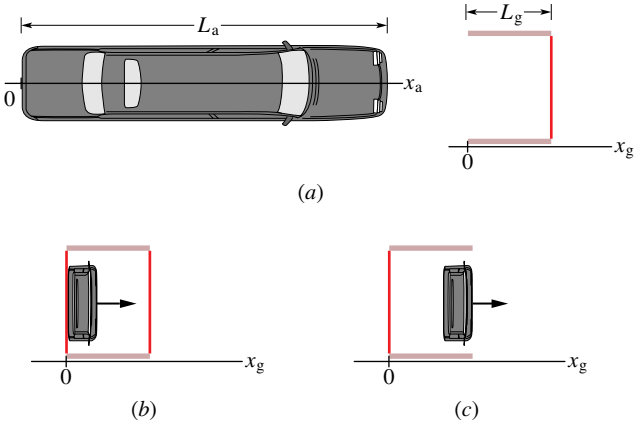
PRO POČÍTAČ

65Ú. Kosmická sonda opouští Zemi a letí rychlostí 0,97c. Hodiny na Zemi v sondě byly na počátku nastaveny na nulu. Každých 6,0 h kontrola vysílá signál (šířící se rychlostí světla) k sondě a žádá si odpověď. Sonda okamžitě posílá zpět odezvu zahrnující údaj jejích hodin v době, kdy byl zachycen signál. Pro každý z prvních pěti signálů vypočtěte čas na pozemských hodinách, v němž odpověď dorazila na Zemi, a čas, který je v odpovědi sdělován. Vypočtěte také vzdálenost sondy od Země v době, kdy každý z daných signálů je sondou zachycen.

PROBLÉM

66. *Problém auta v garáži.* Automobilista právě koupil nejdelší limuzínu světa, jejíž vlastní délka je $L_a = 30{,}5$ m. Na obr. 38.25a ji vidíme parkovat před garáží, jejíž vlastní délka je $L_g = 6{,}00$ m. Garáž má přední vrata (která vidíme otevřena) a zadní vrata (která vidíme zavřena). Limuzína je zřejmě delší než garáž. Přesto garážmistr, který něco ví o relativistické kontrakci délky,

uzavírá sázku s automobilistou, že auto lze umístit do garáže, i když budou oboje vrata zavřena. Automobilista, který ve fyzice tak daleko nedošel, prohlašuje takovou věc za principiálně nemožnou.



Obr. 38.25 Úloha 66

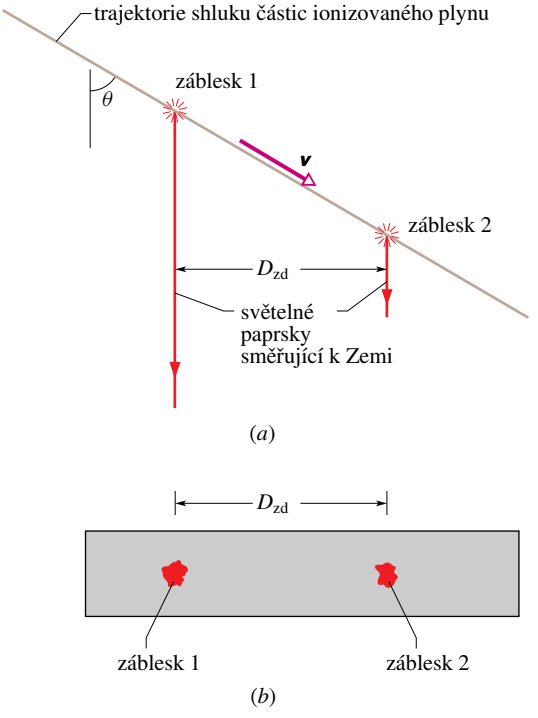
Abychom rozebrali představy garážmistra, spojme osu x_a s limuzínou, nechť $x_a = 0$ na jejím zadním nárazníku, dále spojme osu x_g s garáží a nechť $x_g = 0$ na jejích (nyní otevřených) předních vratech. Automobilista vyjede s limuzínou přímo proti předním vratům rychlostí $0{,}998\,0c$ (což je pochopitelně technicky i finančně fantazie). Automobilista je v klidu ve vztažné soustavě x_a, garážmistr ve vztažné soustavě x_g.

Uvažujme dvě události. *Událost 1*: Když zadní nárazník projede předními vraty, tato vrata se zavřou. Nechť čas této události je pro oba pány nulový: $t_{g1} = t_{a1} = 0$. Událost nastává v místě $x_a = x_g = 0$. Obr. 38.25b ukazuje událost 1 z hlediska vztažné soustavy x_g. *Událost 2*: Když přední nárazník dosáhne zadních vrat, vrata se otevřou. Obr. 38.25c ukazuje událost 2 z hlediska vztažné soustavy x_g.

Jaké jsou podle garážmistra (a) délka limuzíny, (b) prostoročasové souřadnice x_{g2} a t_{g2} události 2? (c) Po jaký čas je limuzína „uvězněna“ v garáži s oběma vraty zavřenými?

Uvažujme nyní situaci z hlediska vztažné soustavy x_a, v níž se garáž řítí kolem limuzíny rychlostí $-0{,}998c$. Odpovězte z hlediska automobilisty na otázky: (d) Jaká je délka letící garáže, (e) jaké jsou prostoročasové souřadnice x_{a2} a t_{a2} události 2, (f) je limuzína po nějaký čas v garáži s oběma vraty zavřenými, (g) která z událostí 1, 2 nastala dříve? (h) Popište stručně událostí 1, 2, jak je vidí automobilista. (Jsou tyto události příčinně závislé, tj. může jedna z nich způsobit druhou?) (i) A poslední otázka: Kdo vyhrál sázku?

67. *Nadsvětelné výtrysky.* Obr. 38.26a ukazuje dráhu shluku částic ve výtrysku ionizovaného plynu, který byl vyvržen z galaxie. Shluk se pohybuje konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ pod úhlem θ ve směru k Zemi. Shluk náhodně emituje světelné záblesky, které můžeme zaznamenat na Zemi. Na obr. 38.26a jsou vyznačeny dva záblesky, oddělené dobou t, která je měřena v nehybné soustavě poblíž záblesků. Záblesky jsou znázorněny na obr. 38.26b, jako bychom je fotografovali na týž film, nejprve když světlo záblesku 1 dostihne Zemi a později, když ji dostihne světlo záblesku 2. Zdánlivá vzdálenost D_{zd}, kterou projde shluk mezi dvěma záblesky, je průmět délky dráhy shluku, jak jej vidí pozorovatel. Zdánlivý čas T_{zd} mezi záblesky je rozdíl příchozích časů světla od těchto záblesků. Zdánlivá rychlost shluku je tedy $V_{zd} = D_{zd}/T_{zd}$. Jak budou vyjádřeny pomocí v, t a θ (a) D_{zd}, (b) T_{zd}? (c) Odhadněte V_{zd} pro $v = 0{,}980c$ a $\theta = 30{,}0°$.



Obr. 38.26 Úloha 67

39

Fotony a de Broglieho vlny



Stopy drobných bublinek v tomto obrázku z bublinkové komory ukazují, kudy se pohybovaly elektrony (stopy vybarveny zeleně) a pozitrony (červené stopy). Jedna γ-částice, která vletěla do komory shora a nezanechala žádnou stopu, vytrhla elektron z jednoho z atomů vodíku, kterými je komora naplněna, a přeměnila se na pár elektron-pozitron. Další γ-částice vytvořila jiný pár o trochu níž. Tyto dráhy (zakřivené magnetickým polem) jasně ukazují, že elektrony a pozitrony jsou částice, které se pohybují podél určitých drah. Přesto tyto částice mohou být také interpretovány jako vlny. Může být částice vlnou?

39.1 NOVÝ SMĚR

Naše diskuse Einsteinovy teorie relativity nás zavedla do světa daleko od obvyklé zkušenosti, do světa objektů pohybujících se rychlostí blízkou rychlosti světla. Einsteinova teorie překvapivě předpovídá, že rychlost chodu hodin záleží na tom, jak rychle se hodiny pohybují vzhledem k pozorovateli: čím rychleji se pohybují, tím pomalejší je jejich chod. Tato i další předpovědi teorie vydržely všechny možné testy, které se dosud podařilo vymyslet, a teorie relativity vedla k hlubšímu a uspokojivějšímu pohledu na podstatu prostoru a času.

Nyní se chystáme prozkoumat jiný svět, který je mimo obvyklou zkušenost — subatomový svět. Setkáme se s celou řadou překvapení, která, i když mohou často vypadat neuvěřitelně, vedla fyziky krok za krokem k hlubšímu pohledu na podstatu světa kolem nás.

Kvantová fyzika, jak se tento nový předmět nazývá, umí odpovědět na otázky jako: Proč svítí hvězdy? Proč jsou prvky seřazeny tak, jak se objevují v periodické tabulce prvků? Jak pracuje tranzistor a jiné mikroelektronické prvky? Proč měď vede elektrický proud a sklo ne? Kvantová fyzika pokrývá celou chemii včetně biochemie. Musíme jí tedy porozumět, pokud chceme pochopit samotný život.

Některé předpovědi kvantové fyziky se zdají podivné i fyzikům a filozofům, kteří studují její základy. Nicméně i tato teorie obstála v každém experimentálním testu — a bylo jich hodně — bez nejmenších problémů. Její předpovědi nikdy neselhaly.

39.2 SVĚTELNÉ VLNY A FOTONY

Popsali jsme světlo jako vlnu, která má vlnovou délku λ, frekvenci f a rychlost c spojené vztahem

$$c = \lambda f. \qquad (39.1)$$

V kap. 34 jsme na základě Maxwellových rovnic ukázali, že světelná vlna je vzájemně provázaná kombinace elektrického a magnetického pole, z nichž každé se mění s frekvencí f. Dále jsme ukázali, že viditelné světlo je součástí elektromagnetického spektra, které se rozprostírá ve spojitém rozsahu vlnových délek od γ-záření po dlouhé rádiové vlny.

V roce 1905 Einstein navrhl hypotézu, která neplyne z Maxwellových rovnic a přináší první z našich kvantových překvapení: při emisi nebo absorpci světla atomem se nepředává energie spojitě, ale diskrétně, tedy po malých „kouscích“ energie, **kvantech**. Toto kvantum světla nazýváme od roku 1926 **foton**.

Má-li světelná vlna frekvenci f, pak podle Einsteinovy hypotézy je energie E předaná jedním fotonem rovna

$$E = hf \quad \text{(energie fotonu)}. \qquad (39.2)$$

Zde h je **Planckova konstanta**, která má hodnotu

$$h = 6{,}63\cdot10^{-34}\ \text{J·s} = 4{,}14\cdot10^{-15}\ \text{eV·s}. \qquad (39.3)$$

Vedle ní (a ještě častěji) se používá tzv. redukovaná Planckova konstanta, která má hodnotu

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}054\cdot10^{-34}\ \text{J·s}.$$

Planckova konstanta je základní konstanta kvantové fyziky, stejně jako rychlost světla c je základní konstanta relativistické fyziky. Rychlost světla c je velká, ale konečná; kdyby byla nekonečná, nebyla by potřeba teorie relativity. Podobně Planckova konstanta h je malá, ale nenulová; kdyby byla nulová, nebyla by potřeba kvantová teorie.

KONTROLA 1: Seřaďte následující záření podle jemu příslušné energie fotonu od nejvyšší po nejnižší: (a) žluté světlo sodíkové výbojky, (b) γ-částice emitovaná radioaktivním jádrem, (c) rádiová vlna vyslaná anténou rozhlasové stanice, (d) mikrovlnný svazek vysílaný radarem pro řízení letového provozu.

PŘÍKLAD 39.1

100 W sodíková výbojka je umístěna ve středu velké koule absorbující veškeré světlo, které na ni dopadá. S jakou četností dopadají fotony na kouli? Vlnová délka sodíkového světla je 590 nm.

ŘEŠENÍ: Z rov. (39.2) je energie fotonu pro sodíkové světlo

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6{,}63\cdot10^{-34}\ \text{J·s})(3{,}00\cdot10^{8}\ \text{m·s}^{-1})}{(590\cdot10^{-9}\ \text{m})} = 3{,}37\cdot10^{-19}\ \text{J}.$$

Pokaždé, když atom sodíku vyzáří foton, ztrácí energii $3{,}37\cdot10^{-19}$ J, tedy energii 2,1 eV. Kdykoli koule pohlcuje světlo, přebírá energii jen po „kvantech“ této velikosti.

Abychom našli četnost R, s jakou jsou fotony absorbovány na kouli, vydělíme rychlost, s níž výbojka vyzařuje energii (výkon P), hodnotou E:

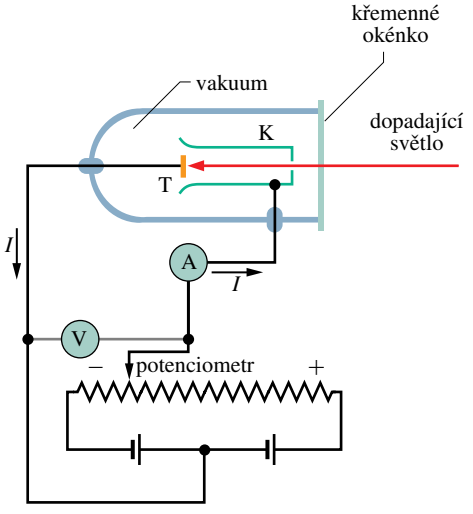
$$R = \frac{P}{E} = \frac{(100\ \text{W})}{(3{,}37\cdot10^{-19}\ \text{J/foton})} = 2{,}97\cdot10^{20}\ \text{fotonů/s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

To je opravdu hodně! Pokud bychom mohli číst slova (jako jakési „fotony“ informace) tímto tempem, pak přečteme všechny knihy v knihovně Kongresu USA asi za nanosekundu.

39.3 FOTOELEKTRICKÝ JEV

Ozařujeme-li svazkem světla s dostatečně krátkou vlnovou délkou čistý kovový povrch, vyráží světlo z tohoto povrchu elektrony. Tento **fotoelektrický jev**, stručně také **fotoefekt**, se využívá v mnoha zařízeních včetně televizních kamer, snímacích elektronek a převaděčů obrazu pro noční vidění — noktovizorů. Einstein použil svou hypotézu fotonu při vysvětlení tohoto jevu, který nemůže být jednoduše pochopen pomocí klasické fyziky.

Rozebereme nyní dva fotoelektrické pokusy, z nichž každý používá zařízení z obr. 39.1. V něm světlo o frekvenci f vyráží při dopadu na terč T elektrony. Napětí U mezi terčem T a kolektorem K volíme tak, aby se tyto elektrony (kterým říkáme **fotoelektrony**) odsály. Takto vytváříme **fotoelektrický proud** I (stručně též **fotoproud**), který měříme ampérmetrem A.



Obr. 39.1 Zařízení pro studium fotoelektrického jevu. Dopadající světlo osvětluje terč T a emituje elektrony, které dopadají na kolektor K. Elektrony se pohybují v obvodu ve směru opačném, než podle konvence ukazují šipky pro proud. Baterií a potenciometrem se nastaví potřebné napětí mezi terčem a kolektorem.

První fotoelektrický pokus

Posuvným kontaktem z obr. 39.1 nastavíme napětí U tak, že kolektor K je záporný vzhledem k terči T. Působením tohoto napětí zpomalujeme vyražené elektrony. Napětí U pak měníme tak dlouho, dokud nedosáhne hodnotu, které říkáme **brzdné napětí** U_b; fotoproud I při něm právě klesne na nulu. Pro $U = U_b$ jsou i elektrony emitované s nejvyšší energií zastaveny, a to těsně před dopadem na kolektor. Pak kinetická energie $E_{k,max}$ těchto elektronů s nejvyšší energií je

$$E_{k,max} = eU_b, \tag{39.4}$$

kde e je elementární náboj.

Měření ukazuje, že pro světlo dané frekvence *nezávisí* $E_{k,max}$ *na intenzitě zdroje světla*. Ať je zdroj oslnivě jasný nebo tak slabý, že jej stěží pozorujeme (nebo cokoli mezi tím), nejvyšší kinetická energie emitovaných elektronů má vždy stejnou hodnotu.

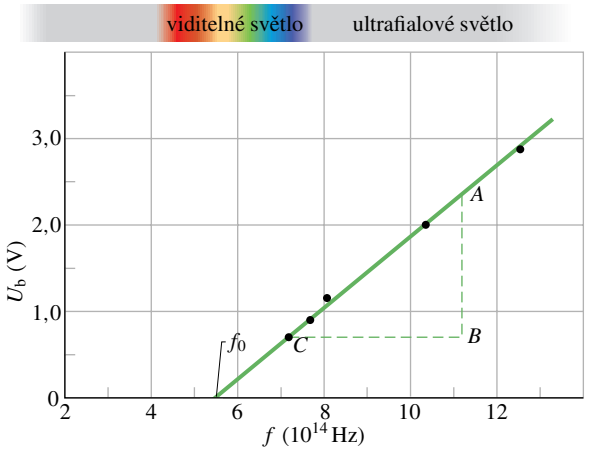
Tento jev *nedokážeme* vysvětlit pomocí klasické fyziky. Považujeme-li dopadající světlo za klasickou elektromagnetickou vlnu, budou elektrony terče kmitat pod vlivem střídavého elektrického pole dopadající světelné vlny. Za jistých podmínek získá kmitající elektron dost energie k tomu, aby unikl z povrchu terče. Když zvýšíme intenzitu dopadajícího svazku světla, zvýšíme tím amplitudu střídavého elektrického pole a zdá se rozumné předpokládat, že toto silnější střídavé pole dodá větší „kopanec“ emitovaným elektronům. To je ale v protikladu s tím, co pozorujeme. Pro danou frekvenci dávají jak intenzívní, tak slabý světelný svazek stejně velký maximální kopanec unikajícím elektronům.

Naproti tomu pozorovaný výsledek přirozeně vyplyne z představy světla jako toku fotonů. Maximální energie, kterou elektron v terči T z obr. 39.1 může získat od dopadajícího světla, je pak energie jednotlivého fotonu. Zvyšováním intenzity světla se zvyšuje *počet* fotonů dopadajících na povrch terče, ale *energie každého fotonu* daná rov. (39.2) zůstává stejná. Maximální kinetická energie dodaná elektronu se tedy nemění.

Druhý fotoelektrický pokus

V tomto pokusu měníme frekvenci f dopadajícího světla a měříme s ním spojený brzdný potenciál U_b. Obr. 39.2 ukazuje závislost U_b na f. Všimněme si, že fotoelektrický jev nenastane, jestliže je frekvence nižší než jistá **prahová frekvence** f_0; ukazuje se, že tomu tak je *nezávisle na intenzitě dopadajícího světla*.

To je další záhada pro klasickou fyziku. Pokud světlo považujeme za elektromagnetickou vlnu, musíme předpokládat, že nezávisle na tom, jak nízká je její frekvence, mohou být elektrony emitovány vždy, pokud jim dodáme dost energie — tedy pokud použijeme dostatečně intenzívní zdroj. *To se ale nestane*. Pro světlo s frekvencí nižší než prahovou fotoelektrický jev nenastane, ať už je světlo jakkoli intenzívní.



Obr. 39.2 Brzdný potenciál U_b jako funkce frekvence f dopadajícího světla pro sodíkový terč T v zařízení z obr. 39.1 (data změřil R. A. Millikan v roce 1916).

Existenci prahové frekvence ale můžeme očekávat, pokud je energie předávána fotony. Elektrony jsou v terči drženy elektrostatickými silami. (Pokud by tomu tak nebylo, vypadávaly by z terče už vlastní vahou.) Aby elektrony právě unikly z terče, musí získat jistou minimální energii Φ, kde Φ je vlastnost materiálu terče, které říkáme **výstupní práce**. Pokud energie hf předaná elektronu přesahuje výstupní práci materiálu (tedy pokud platí $hf > \Phi$), může elektron uniknout z povrchu terče. Pokud předaná energie nepřesahuje výstupní práci (tedy pokud platí $hf < \Phi$), elektrony uniknout nemohou. To je přesně to, co obr. 39.2 ukazuje.

Fotoelektrický zákon

Einstein shrnul výsledky obou fotoelektrických pokusů do jediné rovnice

$$hf = E_{k,max} + \Phi \quad \text{(fotoelektrický zákon)}, \quad (39.5)$$

která vyjadřuje zákon zachování energie pro jednotlivou interakci mezi fotonem o frekvenci f a elektronem z terče o výstupní práci Φ. Zbývající energie $(hf - \Phi)$, kterou elektron získá při interakci, se projeví jako jeho kinetická energie. Za nejvýhodnějších podmínek může elektron vystoupit z povrchu bez úbytku této kinetické energie a ocitne se pak mimo terč s maximální možnou energií $E_{k,max}$.

Přepišme rov. (39.5) dosazením za $E_{k,max}$ z rov. (39.4). Po malých úpravách dostaneme

$$U_b = \frac{h}{e} f - \frac{\Phi}{e}. \quad (39.6)$$

Podíly h/e a Φ/e jsou konstantní, a tak očekáváme lineární závislost změřeného brzdného potenciálu U_b na frekvenci f, jak ukazuje obr. 39.2. Dále pak směrnice přímky by měla být rovna h/e. Pro kontrolu změříme na obr. 39.2 vzdálenosti $|AB|$ a $|BC|$ a píšeme

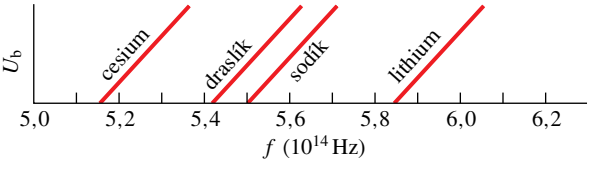
$$\frac{h}{e} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{(2{,}35 - 0{,}72)\,\text{V}}{(11{,}2{\cdot}10^{14} - 7{,}2{\cdot}10^{14})\,\text{Hz}} = \\ = 4{,}1{\cdot}10^{-15}\,\text{V}{\cdot}\text{s}.$$

Vynásobením výsledku elementárním nábojem e dostaneme

$$h = (4{,}1{\cdot}10^{-15}\,\text{V}{\cdot}\text{s})(1{,}6{\cdot}10^{-19}\,\text{C}) = \\ = 6{,}6{\cdot}10^{-34}\,\text{J}{\cdot}\text{s}.$$

Tato hodnota Planckovy konstanty souhlasí s hodnotami měřenými pomocí jiných metod.

KONTROLA 2: Obrázek ukazuje data podobná obr. 39.2 pro terče z cesia, draslíku, sodíku a lithia. Přímky zobrazující závislosti jsou rovnoběžné. (a) Seřaďte terče sestupně podle jejich výstupní práce. (b) Seřaďte závislosti sestupně podle hodnoty h, kterou určují.



PŘÍKLAD 39.2

Fólie z draslíku je ve vzdálenosti $r = 3{,}5$ m od izotropního zdroje světla, který má výkon $P = 1{,}5$ W. Výstupní práce pro draslík je $\Phi = 2{,}2$ eV. Předpokládejte, že energie je přenášena dopadajícím světelným svazkem spojitě a plynule (tedy jako by platila klasická fyzika a fotony neexistovaly). Jak dlouho potrvá, než fólie vstřebá dostatek energie, aby mohla emitovat elektron? Předpokládejte, že fólie absorbuje všechnu dopadající energii a že elektron, který bude emitován, absorbuje energii dopadající na kruhovou plošku o poloměru $5{,}0{\cdot}10^{-11}$ m, daném typickým poloměrem atomu.

ŘEŠENÍ: Spočtěme si intenzitu I (výkon/plocha) světelné energie, dopadající na vzorek. Z ní můžeme snadno určit, za jak dlouho absorbuje studovaná ploška energii 2,2 eV.

Předpokládejme, že energie emitovaná ze zdroje je rozložena stejnoměrně v rozšiřující se kulové vlnoploše se středem ve zdroji. Z rov. (34.27) je intenzita světla v místě fólie

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{(1{,}5\,\text{W})}{4\pi(3{,}5\,\text{m})^2} = 9{,}74{\cdot}10^{-3}\,\text{W}{\cdot}\text{m}^{-2}.$$

Dopadá-li na plochu $S = \pi(5{,}0{\cdot}10^{-11}\ \mathrm{m})^2 = 7{,}85{\cdot}10^{-21}\ \mathrm{m}^2$ světlo s intenzitou I po dobu t, pohltí se energie $E = ISt = Rt$. Tok R energie ploškou „průřezu atomu“ je

$$R = IS = (9{,}74{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{W{\cdot}m^{-2}})(7{,}85{\cdot}10^{-21}\ \mathrm{m}^2) = 7{,}65{\cdot}10^{-23}\ \mathrm{W}.$$

Jestliže tuto energii bude „nasávat“ jediný elektron, potřebuje k získání 2,2 eV dobu

$$t = \frac{\Phi}{R} = \frac{(2{,}2\ \mathrm{eV})}{(7{,}65{\cdot}10^{-23}\ \mathrm{J{\cdot}s^{-1}})}\left(\frac{1{,}60{\cdot}10^{-19}\ \mathrm{J}}{1\ \mathrm{eV}}\right) = 4\,600\ \mathrm{s} \doteq 1{,}3\ \mathrm{h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Museli bychom tedy čekat více než hodinu od zapnutí zdroje světla na to, aby začaly být emitovány elektrony. Skutečná čekací doba je méně než 10^{-9} s. Elektron zřejmě nemusí čekat a postupně „sát“ energii z dopadající vlny; pohltí tuto energii *celou naráz* v jediné interakci fotonu s elektronem.

PŘÍKLAD 39.3

Nalezněte výstupní práci sodíku z dat vynesených v obr. 39.2.

ŘEŠENÍ: Prahová frekvence f_0, při které graf v obr. 39.2 protíná osu frekvence, je přibližně $5{,}5{\cdot}10^{14}$ Hz. Fotony při této frekvenci mají energii přesně rovnou výstupní práci, a tak můžeme rov. (39.2) psát jako

$$E = hf_0 = \Phi,$$

což dává

$$\Phi = hf_0 = (6{,}63{\cdot}10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s})(5{,}5{\cdot}10^{14}\ \mathrm{Hz}) = 3{,}6{\cdot}10^{-19}\ \mathrm{J} = 2{,}3\ \mathrm{eV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

39.4 FOTONY MAJÍ HYBNOST

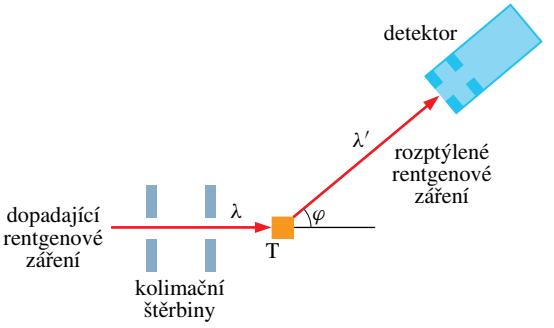
V roce 1916 rozšířil Einstein svou hypotézu o fotonech o předpoklad, že při interakci světla s hmotou předávají fotony nejen energii, ale i hybnost. Stejně jako energie se i hybnost předává po diskrétních kvantech a v jednotlivých bodech namísto rozměrnějších oblastí prostoru.

Velikost hybnosti p fotonu spojeného s vlnou o frekvenci f je

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad \text{(hybnost fotonu).} \qquad (39.7)$$

Rov. (39.2) ($E = hf = hc/\lambda$) a rov. (39.7) nám říkají například to, že fotony ve svazku rentgenového záření ($\lambda \approx$ $\approx 0{,}05$ nm) mají mnohem větší hodnotu jak energie, tak hybnosti než fotony viditelného světla ($\lambda \approx 500$ nm).

O několik let později, v roce 1923, prováděl Arthur Compton z Washingtonovy univerzity v St. Louis pokus, který podpořil názor, že jak hybnost, tak energie světla jsou předávány fotony. V tomto pokusu dopadal svazek rentgenového záření o vlnové délce λ na uhlíkový terč, jak ukazuje obr. 39.3. Compton měřil vlnové délky a intenzity rentgenových paprsků rozptýlených tímto terčem do různých směrů.



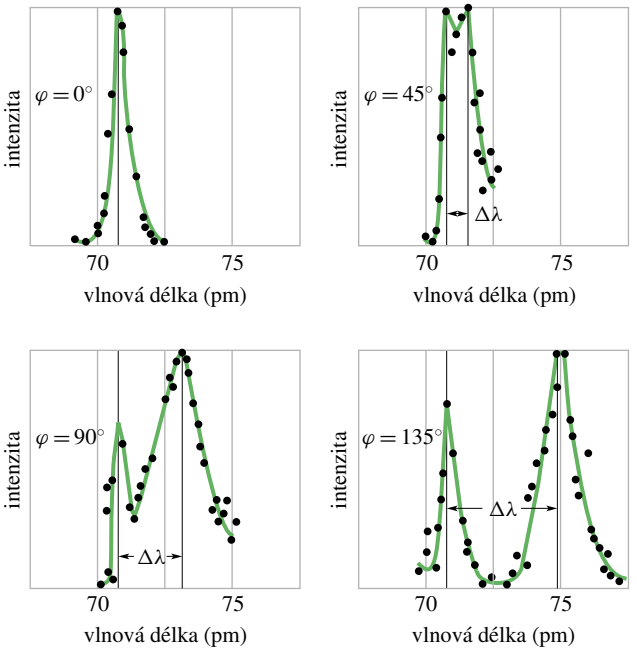
Obr. 39.3 Comptonovo zařízení. Svazek rentgenového záření o vlnové délce $\lambda = 71{,}1$ pm dopadá na uhlíkový terč T. Rentgenové záření rozptýlené na terči pozorujeme pro různé úhly φ vůči směru dopadajícího záření. Detektor měří jak intenzitu rozptýleného rentgenového záření, tak jeho vlnovou délku.

Obr. 39.4 ukazuje jeho výsledky. I když v dopadajícím svazku byla prakticky jediná vlnová délka ($\lambda = 71{,}1$ pm), vidíme, že rozptýlený svazek obsahuje velký rozsah vlnových délek se dvěma výraznými píky v intenzitě. Jeden pík má střed kolem dopadající vlnové délky λ, druhý kolem jiné hodnoty λ'; rozdíl $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ nazýváme **Comptonův posuv**. Hodnota Comptonova posuvu se mění s úhlem, pod kterým je rozptýlené rentgenové záření detegováno.

Obr. 39.4 je z pohledu klasické fyziky další záhada. Pokud považujeme dopadající svazek rentgenového záření za elektromagnetickou vlnu, musíme si představit elektrony v uhlíkovém terči, jak kmitají pod vlivem střídavého elektrického pole dopadající vlny. Elektron bude kmitat s frekvencí střídavého elektrického pole a — podobně jako maličká anténa rádiového vysílače — bude vyzařovat *na stejné frekvenci*. Rozptýlené rentgenové záření by mělo mít stejnou frekvenci, a tedy i stejnou vlnovou délku jako dopadající svazek. Ale nemá.

Compton interpretoval rozptyl rentgenových paprsků na uhlíku pomocí fotonů jako přenos energie a hybnosti mezi dopadajícím rentgenovým svazkem a volně vázanými elektrony v uhlíkovém terči. Podívejme se nejdříve kvalitativně a pak kvantitativně na to, jak kvantově mechanické představy vedou k pochopení Comptonových výsledků.

Předpokládejme, že interakce mezi dopadajícím rentgenovým svazkem a elektronem v klidu se účastní jediný



Obr. 39.4 Comptonovy výsledky pro čtyři hodnoty úhlu rozptylu φ. Všimněte si, že hodnota Comptonova posuvu $\Delta\lambda$ roste pro rostoucí úhel rozptylu φ.

foton o energii $E = hf$. Směr rentgenového záření se obecně změní (říkáme, že se rentgenový foton rozptyluje) a elektron se začne pohybovat. Elektron tedy získá jistou kinetickou energii. Protože se energie při interakci zachovává, musí být energie rozptýleného fotonu $E' = hf'$ menší než energie dopadajícího fotonu. Rozptýlené rentgenové záření tedy musí mít nižší frekvenci f', a proto i delší vlnovou délku λ', než dopadající rentgenové záření; to je v souladu s Comptonovým měřením na obr. 39.4. Tento druh rozptylu s posuvem frekvence nazýváme **Comptonův rozptyl**.

Při kvantitativním postupu nejprve použijeme zákon zachování energie. Obr. 39.5 znázorňuje „srážku“ mezi rentgenovým fotonem a volným elektronem, který je na počátku v klidu. Po srážce vystupuje rentgenové záření o vlnové délce λ' pod úhlem φ a elektron se pohybuje ve směru daném úhlem θ. Zákon zachování energie pak dává

$$hf = hf' + E_k,$$

kde hf je energie dopadajícího fotonu, hf' je energie rozptýleného fotonu a E_k je kinetická energie elektronu po srážce. Protože elektrony mohou získat rychlost srovnatelnou s rychlostí světla, musíme pro kinetickou energii elektronu použít relativistický vzorec podle rov. (38.33)

$$E_k = mc^2(\gamma - 1),$$

kde m je hmotnost elektronu a γ je Lorentzův koeficient

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Dosazením za E_k do zákona zachování energie dostaneme

$$hf = hf' + mc^2(\gamma - 1)$$

a odtud dosazením $c/\lambda = f$ a $c/\lambda' = f'$ získáme

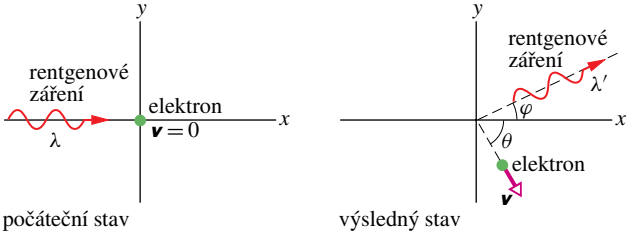
$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} + mc(\gamma - 1). \qquad (39.8)$$

Dále použijeme (vektorově) zákon zachování hybnosti na srážku rentgenového fotonu s elektronem podle obr. 39.5. Hybnost dopadajícího a rozptýleného fotonu určuje rovnice (39.7) ($p = h/\lambda$) a hybnost elektronu po srážce rov. (38.31) ($p = \gamma mv$). Napíšeme-li zvlášť rovnice pro zachování složek hybnosti ve směru x a y, dostaneme

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\varphi + \gamma mv\cos\theta \quad \text{(složka } x\text{)} \qquad (39.9)$$

a

$$0 = \frac{h}{\lambda'}\sin\varphi - \gamma mv\sin\theta \quad \text{(složka } y\text{)}. \qquad (39.10)$$



Obr. 39.5 Rentgenové záření o vlnové délce λ interaguje s elektronem v klidu. Rentgenový svazek je rozptýlen do úhlu φ a jeho vlnová délka vzroste na λ'. Elektron se pohybuje s rychlostí $\boldsymbol{v}$ pod úhlem θ.

Chceme najít výraz pro Comptonův posuv rozptýleného rentgenového záření $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$. Z pěti proměnných ($\lambda, \lambda', v, \varphi$ a θ), které vystupují v rov. (39.8), (39.9) a (39.10), vyloučíme v a θ, které se vztahují jen k elektronu po srážce. Po složitějších úpravách dostaneme závislost Comptonova posuvu na úhlu rozptylu φ:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi) \quad \text{(Comptonův posuv)}. \qquad (39.11)$$

Konstantní veličina $h/(mc)$ se nazývá **Comptonova vlnová délka** elektronu. Rov. (39.11) přesně souhlasí s Comptonovými experimentálními výsledky.

A pro úplnost…

Zbývá nám vysvětlit pík na vlnové délce dopadajícího záření ($\lambda = 71{,}1$ pm) na obr. 39.4a. Ten nevzniká při rozptylu rentgenových paprsků na velmi volně vázaných elektronech v terči, ale při rozptylu na elektronech, které jsou *těsně* vázány k atomům uhlíku, z nichž je terč vyroben. Každá taková srážka je pak vlastně srážkou mezi dopadajícím rentgenovým fotonem a celým atomem uhlíku. Dosadíme-li za m v rov. (39.11) hmotnost atomu uhlíku (která je zhruba 22 000krát větší než hmotnost elektronu), vidíme, že posuv $\Delta\lambda$ je 22 000krát menší než Comptonův posuv pro elektron, a tedy příliš malý na to, abychom jej mohli zjistit. Proto pro rentgenové záření rozptýlené při těchto srážkách naměříme vlnovou délku stejnou, jako má dopadající rentgenové záření.

PŘÍKLAD 39.4

Rentgenové záření o vlnové délce $\lambda = 22$ pm (energie fotonu 56 keV) se rozptyluje na uhlíkovém terči pod úhlem 85° vůči dopadajícímu svazku.

(a) Jaký je Comptonův posuv rozptýleného svazku?

ŘEŠENÍ: Z rov. (39.11) máme

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi) = \\ = \frac{(6{,}63\cdot10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s})(1 - \cos 85^\circ)}{(9{,}11\cdot10^{-31}\ \mathrm{kg})(3{,}00\cdot10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})} = \\ = 2{,}21\cdot10^{-12}\ \mathrm{m} \doteq 2{,}2\ \mathrm{pm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká část α z počáteční energie rentgenového fotonu je při tomto rozptylu předána elektronu?

ŘEŠENÍ: Podíl ztráty energie je

$$\alpha = \frac{E - E'}{E} = \frac{hf - hf'}{hf} = \frac{c/\lambda - c/\lambda'}{c/\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda'} = \\ = \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}. \qquad (39.12)$$

Dosazením dostaneme

$$\alpha = \frac{(2{,}21\ \mathrm{pm})}{(22\ \mathrm{pm} + 2{,}21\ \mathrm{pm})} = 0{,}091 \text{ neboli } 9{,}1\ \%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Ačkoli Comptonův posuv $\Delta\lambda$ nezávisí na vlnové délce λ dopadajícího rentgenového záření (rov. (39.11)), *relativní* ztráta energie rentgenového záření závisí na λ. Jak ukazuje rov. (39.12), relativní ztráta roste, když se vlnová délka dopadajícího záření zmenšuje.

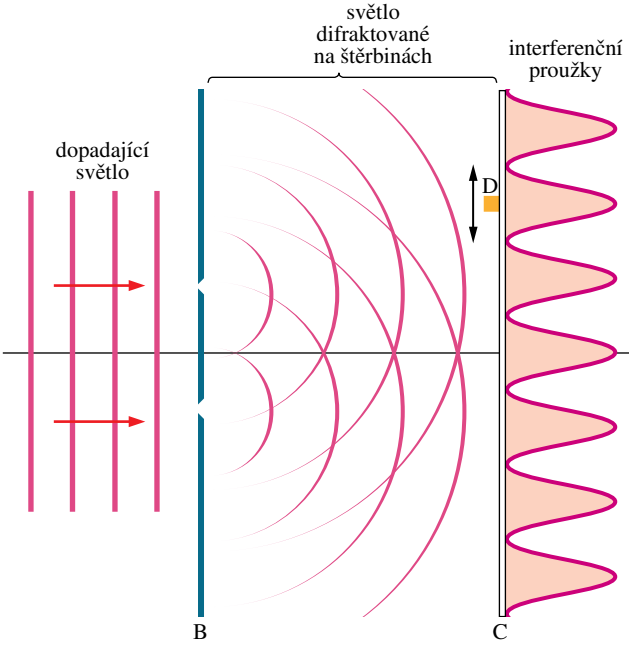
KONTROLA 3: Srovnejte Comptonův rozptyl pro rentgenové záření ($\lambda \doteq 20$ pm) a viditelné světlo ($\lambda \doteq 500$ nm) pro daný úhel rozptylu. Kde je větší (a) Comptonův posuv, (b) relativní posuv vlnové délky, (c) relativní změna energie fotonu a (d) energie předaná elektronu?

39.5 SVĚTLO JAKO VLNA PRAVDĚPODOBNOSTI

Může se to zdát podivné, že světlo může být vlna a přesto vzniká a při interakci zaniká jako určité kvantum energie — foton. Nový pohled na pokus s dvojštěrbinou z čl. 36.4 nám pomůže tuto záhadu objasnit. Budeme uvažovat tři verze tohoto důležitého pokusu.

Standardní verze

Obr. 39.6 nám připomene původní pokus prováděný Thomasem Youngem v roce 1801, který jsme viděli na obr. 36.6. Světlo dopadá na stínítko B se dvěma úzkými rovnoběžnými štěrbinami. Světelné vlny vycházejí z obou štěrbin, původně jediný směr šíření se rozšíří difrakcí, takže se po dopadu na stínítko C překrývají. Interferencí vzniká obrazec, kde se střídají minima a maxima intenzity. V čl. 36.4 jsme brali existenci těchto interferenčních proužků jako důkaz vlnové podstaty světla.



Obr. 39.6 Světlo dopadá na stínítko B, které obsahuje dvě rovnoběžné štěrbiny. Světlo na nich difraktuje. Obě difraktované vlny dopadají na stínítko C, skládají se a vytvářejí interferenční proužky. Malý detektor fotonů D v rovině stínítka C klapne pokaždé, když absorbuje foton.

Do jednoho bodu v rovině stínítka umístíme malý detektor fotonů D — například fotoelektrické zařízení, které klapne, když pohltí foton. Detektor bude v náhodné okamžiky klapat a každé klapnutí signalizuje přenos energie od světelné vlny na stínítko — dopad jednoho fotonu.

Posouváme-li velmi pomalu detektor nahoru a dolů, jak je znázorněno na obr. 39.6, bude se četnost klapání zvětšovat a zmenšovat tak, jak bude detektor postupně procházet maximy a minimy, která přesně odpovídají poloze maxim a minim v interferenčních proužcích.

Co je podstatou tohoto myšleného experimentu? Nedokážeme předpovědět, kdy bude foton detegován v daném bodě na stínítku C; fotony jsou detegovány v každém bodě v náhodných časových okamžicích. Můžeme však předpovědět, že *pravděpodobnost*, že foton bude detegován v daném bodě v zadaném časovém intervalu, je úměrná intenzitě světla dopadajícího na stínítko C.

V čl. 34.4 jsme viděli, že intenzita I světelné vlny je v každém bodě úměrná čtverci amplitudy E_m proměnného elektrického pole.

Pravděpodobnost, že foton bude detegován (za jednotku času) v malém objemu se středem v daném bodě světelné vlny, je úměrná čtverci amplitudy vektoru intenzity elektrického pole vlny v tomto bodě.

Tím jsme vytvořili pravděpodobnostní popis světelné vlny, a tedy jiný způsob, jak se dívat na světlo. Je to nejen elektromagnetická vlna, ale i **vlna!pravděpodobnosti**. To znamená, že každému bodu světelné vlny můžeme přiřadit číslo – pravděpodobnost (za jednotku času), že foton může být detegován v malém objemu kolem tohoto bodu.

Jednofotonová verze

Jednofotonovou verzi pokusu s dvojštěrbinou poprvé provedl G. I. Taylor v roce 1909 a pokus byl od té doby mnohokrát zopakován. Od standardní verze se liší tím, že zdroj světla je natolik slabý, že další foton je náhodně emitován až poté, co předcházející foton dopadl na stínítko. Překvapivě se na stínítku C stále vytvářejí interferenční proužky, pokud pokus probíhá dostatečně dlouho (v Taylorově prvním pokusu to bylo po dobu několika měsíců).

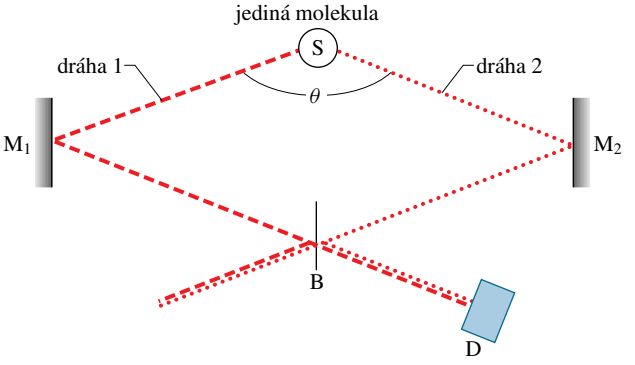
Jak můžeme tento jednofotonový dvojštěrbinový pokus vysvětlit? Dříve, než se vůbec pustíme do interpretace výsledků, měli bychom si položit otázky jako: Když se v aparatuře pohybuje jediný foton, kterou štěrbinou ve stínítku B prochází? Jak tento foton „ví“, že se někde vyskytuje další štěrbina, a že tedy může interferovat? Může jediný foton nějak projít oběma štěrbinami a interferovat sám se sebou?

Mějme na paměti, že fotony se projevují jen při interakci světla s hmotou. Víme tedy, že fotony *vznikají* ve zdroji, který vytváří dopadající světlo na obr. 39.6, a že *zanikají* na stínítku C, kde světlo interaguje s pevnou látkou, ze které je stínítko složeno. Mezi zdrojem a detektorem však *postulujeme*, že se světlo pohybuje *ne* jako tok fotonů, ale jako vlna pravděpodobnosti. Tato vlna může difraktovat na každé cloně nezávisle na tom, jak slabý je zdroj světla. Obě difraktované vlny, každá od jedné štěrbiny, spolu mohou interferovat, když se setkají v daném bodě stínítka C, kde pak na stínítku vytvářejí maxima a minima „proužků pravděpodobnosti“. Fotony pak budeme přednostně detegovat v oblastech maximální pravděpodobnosti. V oblastech minima, kde je pravděpodobnost nulová, detegovány nebudou.

Toto vypadá jako uspokojivé vysvětlení jednofotonového pokusu, neboť klasická fyzika nenabízí vůbec žádné vysvětlení. Podle známého fyzika Richarda Feynmana je jednofotonový pokus na dvojštěrbině jev, který není možné, *absolutně* není možné, vysvětlit klasickým způsobem a který je vlastní povaze kvantové fyziky.

Jednofotonová širokoúhlá verze

Obr. 39.7 ukazuje uspořádání v další verzi dvojštěrbinového pokusu, který provedli Ming Lai a Jean-Claude Diels na Univerzitě v Novém Mexiku v roce 1992. Zdroj S obsahuje molekuly, které emitují jednotlivé fotony dostatečně dlouho po sobě. Zrcadla M_1 a M_2 odrážejí světlo emitované ze zdroje tak, že prochází po dvou různých drahách 1 a 2 svírajících úhel θ blízký 180°. Toto uspořádání se liší od standardního dvojštěrbinového pokusu, u něhož je velmi malý úhel mezi oběma drahami světelných vln dopadajících na obě štěrbiny.



Obr. 39.7 Světlo jediného fotonu emitované ze zdroje S se pohybuje po dvou vzdálených drahách a interferuje samo se sebou na detektoru D po spojení na děliči svazku B. (Ming Lai and Jean-Claude Diels, *Journal of the Optical Society of America B*, 9, 2290–2294, December 1992.)

Po odrazu od zrcadel M_1 a M_2 se světelné vlny, pohybující se podél drah 1 a 2, setkávají na děliči svazku B. (*Dělič svazku* je optické zařízení, které propouští polovinu dopadajícího světla a odráží druhou polovinu.) Na pravé straně děliče z obr. 39.7 se světelná vlna, která se pohybovala po dráze 2 a odrazila od B, spojuje se světelnou vlnou, která se pohybovala po dráze 1 a prošla děličem B. Obě tyto vlny pak spolu interferují při dopadu na detektor D (*fotonásobič* detegující jednotlivé fotony).

Výstup z detektoru je série náhodně rozložených elektrických pulzů; každý pulz signalizuje detekci jednoho fotonu. V pokusu se dělič B pomalu pohybuje ve vodorovném směru (zde maximálně jen asi o 50 μm) a výstup z detektoru se zaznamenává na zapisovači. Posun děliče B mění délku dráhy 1 a 2 a vytváří fázový rozdíl mezi světelnými vlnami, které dopadají na detektor D. Na výstupním signálu z detektoru se objevují interferenční maxima a minima.

Tento pokus se dá těžko pochopit pomocí tradičních pojmů. Například emituje-li molekula jediný foton, pohybuje se foton po dráze 1 nebo po dráze 2 v obr. 39.7 (nebo po nějaké zcela jiné dráze)? Může se snad současně pohybovat po obou drahách? Abychom našli odpověď, předpokládáme, že emitující molekula při kvantovém přechodu na nižší hladinu energie vyzařuje vlnu pravděpodobnosti do všech směrů. Pokus vzorkuje tuto vlnu ve dvou směrech, zvolených tak, že jsou prakticky protilehlé.

Vidíme, že všechny tři verze pokusu na dvojštěrbině můžeme interpretovat, předpokládáme-li, že (1) světlo ve zdroji vzniká jako jednotlivé fotony, (2) světlo se v detektoru pohlcuje jako jednotlivé fotony a (3) světlo se pohybuje mezi zdrojem a detektorem jako vlna pravděpodobnosti.

39.6 ELEKTRONY A DE BROGLIEHO VLNY

Fyzikové jen zřídkakdy udělali chybu, když předpokládali symetrii v přírodě. Zjistíme-li, že proměnné magnetické pole vytváří elektrické pole, můžeme usuzovat jako Faraday a Maxwell, že proměnné elektrické pole vytváří pole magnetické. A ono ho také vytváří.

V roce 1924 se francouzský fyzik Louis de Broglie rovněž dovolával symetrie. Svazek světla je vlna, ale předává energii a hybnost hmotě v kvantech — fotonech. Proč nemohou mít svazky částic podobné vlastnosti? Proč nemůžeme považovat pohybující se elektron — nebo jakoukoli jinou částici — za **vlnu hmoty**?

De Broglie navrhl, že rov. (39.7) ($p = h/\lambda$) neplatí jen pro fotony, ale také pro hmotné částice — například pro elektrony. V čl. 39.4 jsme použili tuto rovnici, abychom přiřadili fotonu hybnost p, známe-li vlnovou délku λ vlny příslušné fotonu. Nyní tento vztah použijeme ve tvaru

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \text{(de Broglieho vlnová délka)} \qquad (39.13)$$

k přiřazení vlnové délky λ částici, která má hybnost o velikosti p. Vlnová délka určená rov. (39.13) se nazývá **de Broglieho vlnová délka** pohybující se částice.

De Broglieho hypotézu o existenci vlnových vlastností hmoty poprvé experimentálně ověřili v roce 1927 C. J. Davisson a L. H. Germer z Bellových laboratoří a George P. Thomson z Aberdeenské univerzity ve Skotsku. V roce 1989 byla vlnová podstata elektronů demonstrována i pokusem s dvojštěrbinou, kterou jsme použili pro diskusi vlnové podstaty světla.

Obr. 39.8 je fotografický důkaz existence vln hmoty, **de Broglieho vln**, v nedávno provedeném experimentu. V tomto experimentu byl vytvářen interferenční obrazec elektrony, posílanými *jeden za druhým* zařízením s dvojštěrbinou. Toto zařízení bylo podobné, jaké jsme používali dříve pro demonstrování optické interference, až na to, že pozorovací stínítko pracovalo stejně jako obvyklá televizní obrazovka. Když elektron dopadne na stínítko, vyvolá světelný záblesk a jeho poloha je zaznamenána.

Prvních několik elektronů neodhalilo nic zajímavého; zdánlivě dopadaly na stínítko v náhodných bodech (dva horní obrázky). Po dopadu několika tisíc elektronů se na obrazovce objevuje obrazec se světlými proužky v místech, kam dopadlo mnoho elektronů, a s tmavými, kam dopadlo elektronů málo. Tento obrazec je přesně to, co bychom očekávali při interferenci vln. To znamená, že *každý* elektron prošel zařízením jako de Broglieho vlna; část, která prošla jednou štěrbinou, interferovala s částí, která prošla druhou štěrbinou. Tato interference pak určila pravděpodobnost, že se elektron při dopadu objeví v daném bodě stínítka. Mnoho elektronů dopadlo do oblastí odpovídajících jasným proužkům při optické interferenci, málo elektronů dopadlo do oblastí odpovídajících tmavým proužkům.

Podobné interference byly pozorovány pro protony, neutrony a řadu atomů. V roce 1994 byly prokázány i pro molekuly jodu I_2, které jsou nejen 500 000krát hmotnější než elektrony, ale jsou i mnohem složitější. V roce 1999 byly interference demonstrovány i pro mnohem složitější *fulerény* (*buckyballs*) C_{60} a C_{70}. (Fulerény jsou molekuly, které vypadají jako fotbalový míč vytvořený ze 60, resp. 70 atomů uhlíku.) Takové malé objekty, jako jsou elektrony, protony, atomy a molekuly, se zřejmě pohybují jako de Broglieho vlny. Když však uvažujeme větší a složitější objekty, musíme dojít k tomu, že již přestává mít smysl uvažovat vlnovou podstatu objektu. Pak se dostáváme do našeho známého nekvantového světa, jehož fyzikálním vlastnostem jsme

se věnovali v předchozích kapitolách. Krátce, elektron je de Broglieho vlna a může interferovat sám se sebou, ale kočka není de Broglieho vlna a nemůže sama se sebou interferovat (což musí být pro kočky velká úleva).

Obr. 39.9a ukazuje jiný pokus, který můžeme použít pro demonstraci rozptylu buď elektronů, nebo rentgenového záření na krystalech. Svazek částic jednoho nebo druhého druhu dopadá na terč tvořený práškem s malými krystalky hliníku. Rentgenové záření má jistou vlnovou délku λ. Elektrony mají energii takovou, aby jejich vlnová délka λ byla stejná. Po rozptylu na krystalech má vystupující svazek válcovou symetrii kolem počátečního směru dopadu a v důsledku Braggova rozptylu na atomových rovinách hliníku (viz čl. 37.9) vytváří soustředné kroužky na fotografickém filmu. Obr. 39.9b ukazuje výsledky pro rentgenové záření, obr. 39.9c ukazuje výsledky pro svazek elektronů. Geometrie kroužků je stejná a ukazuje, že jak rentgenové záření, tak elektrony se chovají v tomto pokusu jako vlny.

V současné době považujeme vlnovou podstatu hmoty za samozřejmou. Difrakce elektronů nebo neutronů se běžně používá pro studium atomové struktury pevných látek a kapalin. De Broglieho vlny jsou při tomto studiu důležitým doplňkem rentgenového záření. Elektrony pronikají do menší hloubky než rentgenové záření, a jsou proto užitečné pro studium vlastností povrchů. Rentgenové záření interaguje ve vzorku zejména s elektrony, a proto není vhodné pro určení polohy atomů o malé hmotnosti (především vodíku), které mají málo elektronů. Naproti tomu neutrony interagují s jádry atomů v terči, a jsou proto užitečné tam, kde nelze použít rentgenové záření.

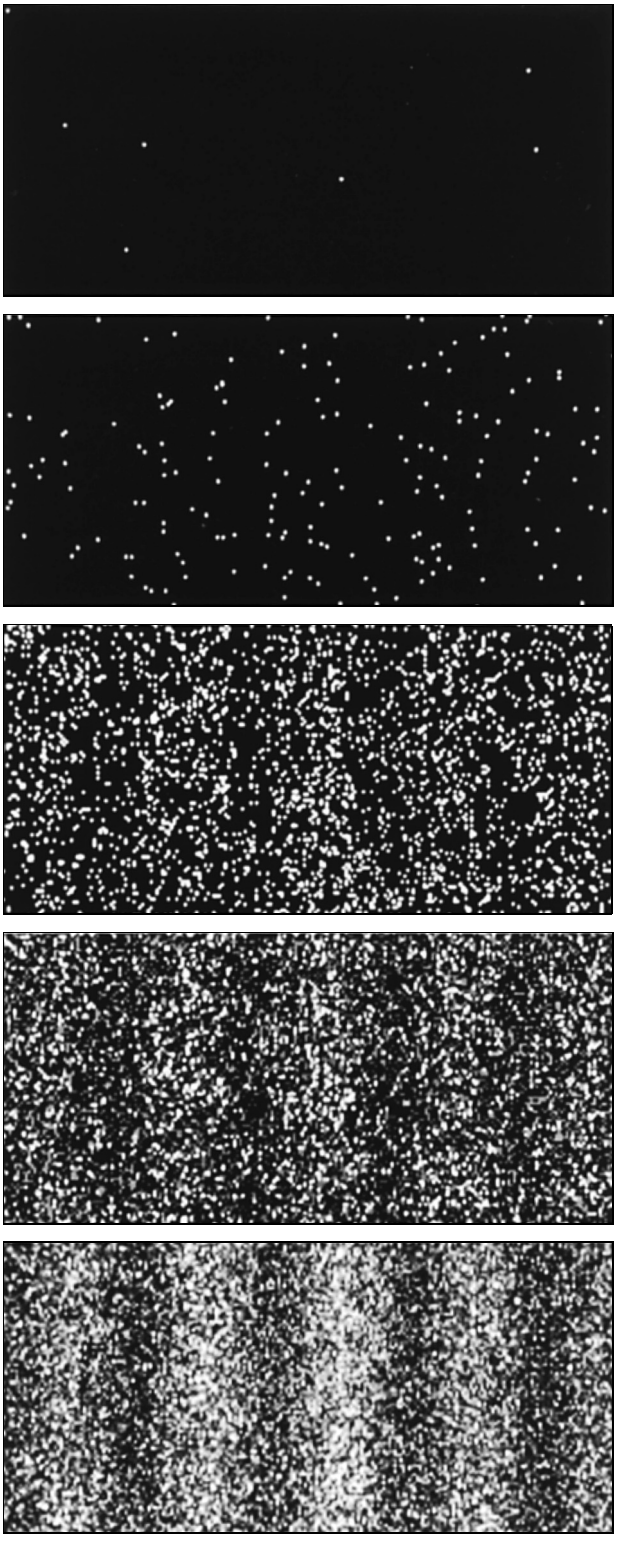
Obr. 39.10 ukazuje strukturu tuhého benzenu, jak ji můžeme určit pomocí difrakce neutronů. Každý ze soustředných modrých kroužků ukazuje polohu jednoho ze šesti atomů uhlíku, které vytvářejí známý benzenový kruh. Každý červený kroužek pak ukazuje polohu atomu vodíku vázaného k atomu uhlíku.

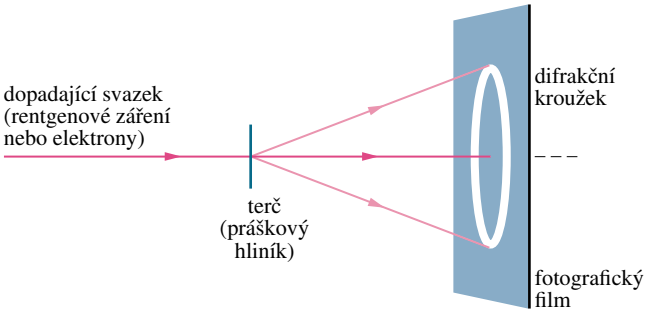
Vlny a částice

Obr. 39.8, 39.9 a 39.10 přesvědčivě dokazují vlnovou podstatu hmoty. Máme ale nejméně stejně tolik pokusů, které svědčí o částicové podstatě hmoty. Vezměme si jako příklad stopy vytvořené elektrony z úvodního obrázku k této kapitole. Tyto stopy — řada bublinek vytvořených v bublinkové komoře naplněné kapalným vodíkem — naznačují průchod částice. Kde je tedy ta vlna?

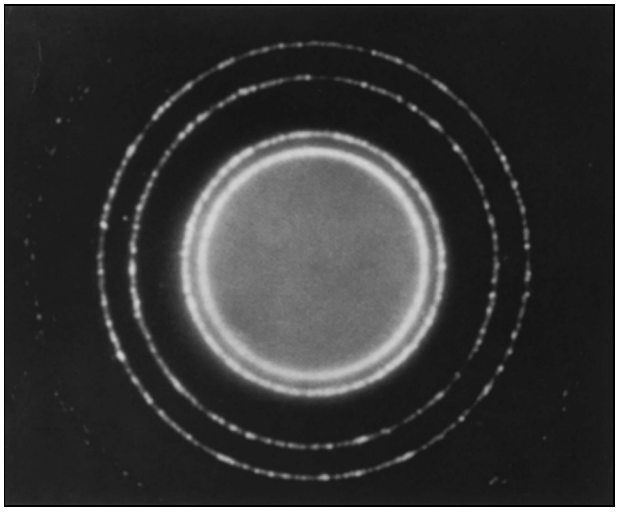
Abychom si zjednodušili situaci, vypneme magnetické pole, takže řada bublinek bude ležet na přímce. Každou bublinku můžeme považovat za bod detekce elektronu. De Broglieho vlny, které se pohybují mezi dvěma body de-

Obr. 39.8 Vytváření interferenčního obrazce pomocí svazku elektronů při pokusu na dvojštěrbině podobně jako na obr. 39.6. De Broglieho vlny jsou stejně jako světelné vlny vlnami pravděpodobnosti. Shora dolů je přibližný počet elektronů v obrazci 7, 100, 3 000, 20 000 a 70 000.

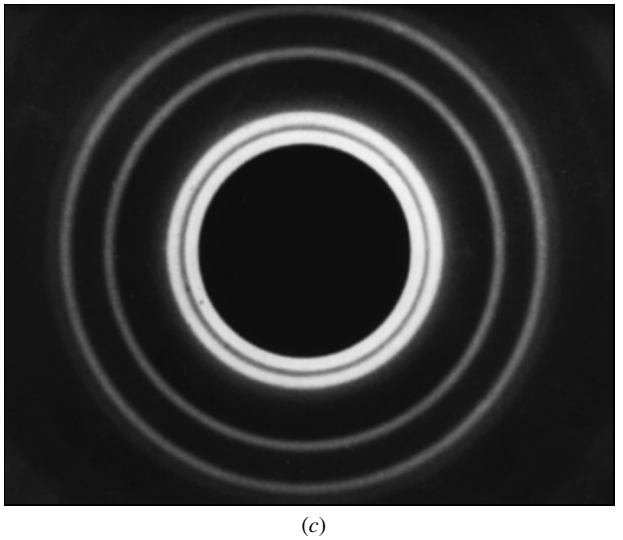




(*a*)

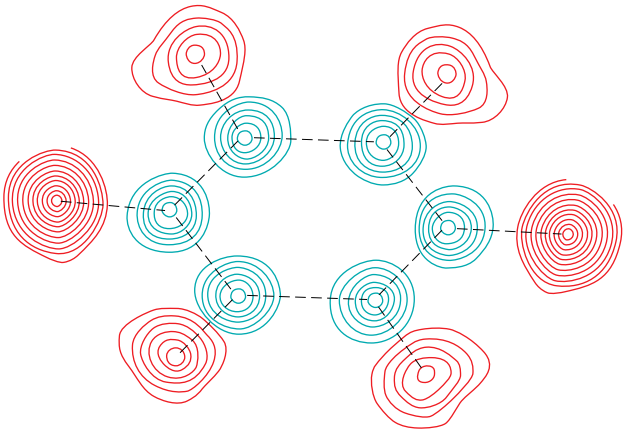


(*b*)



(*c*)

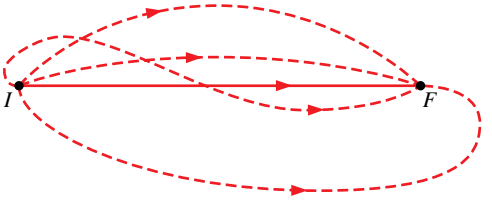
Obr. 39.9 (a) Experimentální uspořádání pro demonstraci vlnového charakteru dopadajícího svazku. (b) Difrakční obrazec pro dopadající rentgenový svazek (elektromagnetická vlna). (c) Difrakční obrazec pro dopadající svazek elektronů („vlna hmoty“). Základní geometrie obou obrazců je shodná.



Obr. 39.10 Atomová struktura benzenu zobrazená pomocí difrakce neutronů. Uzavřené křivky ukazují hustotu elektronů v pevném terči. Můžeme snadno vidět známý benzenový kruh se šesti atomy uhlíku (modře) a k nim vázané atomy vodíku (červeně).

tekce, jako jsou I a F na obr. 39.11, prozkoumávají všechny možné dráhy, z nichž některé jsou znázorněny.

Obecně pro každou dráhu spojující body I a F bude existovat blízká dráha taková, že vlny sledující obě dráhy se vyruší interferencí. To ale neplatí pro přímku spojující body I a F; v tomto případě vlny na sousedních drahách zesilují vlnu postupující po přímce. Bublinky vytvářející stopu částice pak můžeme považovat za sérii detekčních bodů, ve kterých částicová vlna prodělala konstruktivní interferenci.



Obr. 39.11 Několik z mnoha drah spojujících body I a F, ve kterých jsou částice detegovány. Pouze ty částicové vlny, které sledují dráhy blízké přímce spojující oba body, interferují tak, že se sčítají. Pro všechny další dráhy se vlny sledující sousední dráhy interferencí vyruší. Proto částicová vlna sleduje přímkovou dráhu.

PŘÍKLAD 39.5

Jaká je vlnová délka de Broglieho vlny elektronu, jehož kinetická energie je 120 eV?

ŘEŠENÍ: De Broglieho vlnovou délku najdeme z rovnice (39.13) ze známé hybnosti elektronu. Z nerelativistického vztahu $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ můžeme ukázat, že pro $E_k = 120\,\text{eV}$ je $v = 6{,}5\cdot10^6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, což je velikost dostatečně malá vzhledem k rychlosti světla. To nám dovoluje použí-

vat nerelativistické vztahy jak pro kinetickou energii, tak pro hybnost ($p = mv$). Vyloučíme-li rychlost v v obou výrazech, dostaneme

$$p = \sqrt{2mE_k} = \\ = \sqrt{2(9{,}11\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg})(120\,\mathrm{eV})(1{,}60\cdot10^{-19}\,\mathrm{J/eV})} = \\ = 5{,}91\cdot10^{-24}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}.$$

Z rov. (39.13) pak je

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{(6{,}63\cdot10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})}{(5{,}91\cdot10^{-24}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})} = \\ = 1{,}12\cdot10^{-10}\,\mathrm{m} = 112\,\mathrm{pm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

To odpovídá typické velikosti atomu.

KONTROLA 4: Elektron a proton mají stejnou (a) kinetickou energii, (b) hybnost, (c) rychlost. Která z částic má v každém vyjmenovaném případě kratší de Broglieho vlnovou délku?

39.7 SCHRÖDINGEROVA ROVNICE

Jednoduchá vlna libovolného typu, ať už je to vlna na struně, zvuková vlna nebo světelná vlna, je popsána pomocí nějaké veličiny, která se mění v prostoru a čase způsobem typickým pro vlnu. Například pro světelné vlny je takovouto veličinou $\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$, elektrická složka vlny. Pozorovaná hodnota v libovolném bodě pak záleží na souřadnicích tohoto bodu a na čase, ve kterém se provádí pozorování.

Jakou proměnnou veličinou máme popsat de Broglieho vlnu? Můžeme čekat, že tato veličina, které budeme říkat **vlnová funkce** $\Psi(x, y, z, t)$, bude složitější než odpovídající veličina pro světlo, protože de Broglieho vlna kromě energie a hybnosti také přenáší hmotnost a často i elektrický náboj. Ukazuje se, že funkce Ψ (velké řecké písmeno *psí*) je v matematickém smyslu komplexní funkce; to znamená, že její hodnoty můžeme psát jako $a + \mathrm{i}b$, kde a a b jsou reálná čísla a $\mathrm{i}^2 = -1$.

Ve všech případech, se kterými se v dalším setkáme, mohou být prostorové a časové proměnné separovány a Ψ můžeme psát ve tvaru součinu

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \qquad (39.14)$$

kde $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence de Broglieho vlny. Funkce ψ (malé řecké písmeno *psí*) představuje jen prostorově závislou část úplné, i na čase závislé funkce Ψ. V dalším se takřka výlučně budeme zabývat funkcí ψ. Vznikají pak dvě otázky: co znamená vlnová funkce a jak ji najdeme?

Co znamená vlnová funkce? De Broglieho vlna je podobně jako světelná vlna vlnou pravděpodobnosti. Předpokládejme například, že hmota dopadá na malý detektor částic; potom pravděpodobnost, že částice bude detegována v určitém časovém intervalu, je úměrná $|\psi|^2$, kde $|\psi|$ je absolutní hodnota vlnové funkce v místě detektoru. I když ψ je obvykle komplexní veličina, $|\psi|^2$ je vždycky reálná, a to nezáporná. *Fyzikální smysl* má tedy nikoli samotné ψ, ale veličina $|\psi|^2$, které říkáme **hustota pravděpodobnosti**. Volně řečeno:

Pravděpodobnost detekce částice (za jednotku času) v malém objemu se středem v daném bodě je pro de Broglieho vlny úměrná hodnotě $|\psi|^2$ v tomto bodě.

Protože funkce ψ je obvykle komplexní, čtverec její absolutní hodnoty najdeme vzájemným vynásobením funkce ψ a funkce ψ^*, *komplexně sdružené* k funkci ψ. (Pro nalezení ψ^* nahradíme imaginární jednotku „i“ při každém výskytu v ψ výrazem $-\mathrm{i}$.)

Jak najdeme vlnovou funkci? Zvukové vlny a vlny na struně jsou popsány rovnicemi newtonovské mechaniky. Světelné vlny jsou popsány Maxwellovými rovnicemi. De Broglieho vlny jsou popsány **Schrödingerovou rovnicí**, kterou zavedl v roce 1926 rakouský fyzik Erwin Schrödinger.

V mnoha případech, které budeme diskutovat, se budeme zabývat pohybem částice podél osy x v oblasti, ve které působení síly na částici lze popsat změnou potenciální energie $E_p(x)$ částice. Schrödingerova rovnice se pak zjednoduší na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - E_p(x)]\psi = 0 \\ \text{(Schrödingerova rovnice pro pohyb v jednom rozměru),} \qquad (39.15)$$

kde E je celková mechanická energie (součet potenciální a kinetické energie) pohybující se částice. Schrödingerovu rovnici nemůžeme odvodit ze základnějších principů; *je* sama základní princip. S ostatními principy ovšem souvisí (problém 86).

Je-li $E_p(x)$ v rov. (39.15) rovna nule, pak tato rovnice popisuje **volnou částici**, tedy takovou pohybující se částici, na kterou nepůsobí žádné síly. Celková energie částice je v tomto případě rovna její kinetické energii, a tedy E v rov. (39.15) je $\frac{1}{2}mv^2$. Rovnice pak má tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{mv^2}{2}\right)\psi = 0.$$

Po dosazení $p = mv$ ji můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 \psi = 0.$$

Podle rov. (39.13) je výraz p/h roven $1/\lambda$, kde λ je de Broglieho vlnová délka pohybující se částice. Dále víme, že $2\pi/\lambda$ je úhlový vlnočet* k, definovaný v rov. (17.5). Po dosazení do předchozí rovnice dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + k^2\psi = 0 \quad \text{(Schrödingerova rovnice pro volnou částici).} \tag{39.16}$$

Rov. (39.16) má obecné řešení

$$\psi(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \tag{39.17}$$

kde A a B jsou libovolné konstanty. Snadno ukážeme, že toto je skutečně řešením rov. (39.16), protože dosazením $\psi(x)$ a její druhé derivace dostaneme identitu.

Dosazením rov. (39.17) do rov. (39.14) najdeme, že časově závislá vlnová funkce Ψ volné částice pohybující se podél osy x je

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= \psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \\ &= (A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \\ &= A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+\omega t)}. \end{aligned} \tag{39.18}$$

Nalezení hustoty pravděpodobnosti $|\psi|^2$

Z čl. 17.5 víme, že *každá funkce* tvaru $F(kx \pm \omega t)$ představuje postupnou vlnu. To platí jak pro exponenciální funkci v rov. (39.18), tak pro sinusovou závislost, kterou jsme dosud používali pro popis vlnění struny. Obě vyjádření spolu souvisí pomocí vztahů

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \quad \text{a} \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta,$$

kde θ je libovolný úhel.

První člen na pravé straně rov. (39.18) představuje vlnu pohybující se v kladném směru osy x a druhý člen vlnu pohybující se v záporném směru osy x. Obecné řešení (rov. (39.18)) převedeme na případ pohybu v kladném směru osy x tak, že položíme konstantu B v rov. (39.18) a (39.17) rovnu nule, a současně označíme konstantu A jako ψ_0. Rov. (39.17) pak dostane tvar

$$\psi(x) = \psi_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}. \tag{39.19}$$

Pro spočtení hustoty pravděpodobnosti musíme určit čtverec absolutní hodnoty $\psi(x)$. Dostaneme

$$|\psi|^2 = |\psi_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}|^2 = (\psi_0^2)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}|^2.$$

* V kvantové fyzice se úhlový vlnočet k často nazývá vlnové číslo.

Protože

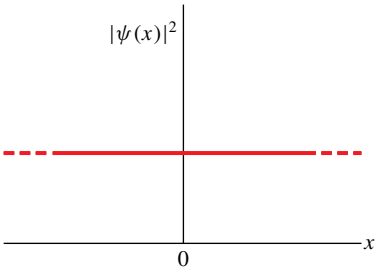
$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}|^2 = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx})^* = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}kx} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

dostaneme

$$|\psi|^2 = (\psi_0^2)(1)^2 = \psi_0^2.$$

Obr. 39.12 znázorňuje závislost hustoty pravděpodobnosti $|\psi|^2$ na x pro volnou částici — je to přímka rovnoběžná s osou x od $-\infty$ do $+\infty$. Vidíme, že hustota pravděpodobnosti $|\psi|^2$ je stejná pro všechny hodnoty x, což znamená, že částice má stejnou pravděpodobnost být kdekoli podél osy x. Žádná poloha částice tedy není preferována.

Význam tohoto tvrzení si ozřejmíme v další části.



Obr. 39.12 Graf hustoty pravděpodobnosti $|\psi|^2$ pro volnou částici pohybující se v kladném směru osy x. Protože $|\psi|^2$ má stejnou konstantní hodnotu pro všechny hodnoty x, částice má v každém bodě stejnou pravděpodobnost, že bude detegována.

39.8 HEISENBERGŮV PRINCIP NEURČITOSTI

To, že volná částice v obr. 39.12 nemá žádnou preferovanou polohu, je náš první příklad použití **Heisenbergova principu neurčitosti**, který postuloval v roce 1927 německý fyzik Werner Heisenberg. Tento princip říká, že částici nelze současně přiřadit polohu ***r*** a hybnost ***p*** s neomezenou přesností.

Heisenbergův princip neurčitosti stanoví pro složky ***r*** a ***p*** tyto meze:

$$\begin{aligned}\Delta x\,\Delta p_x &\geqq \hbar, \\ \Delta y\,\Delta p_y &\geqq \hbar, \\ \Delta z\,\Delta p_z &\geqq \hbar\end{aligned} \quad \text{(Heisenbergův princip neurčitosti).} \tag{39.20}$$

Zde např. Δx a Δp_x jsou neurčitosti pro měření x-ových složek ***r*** a ***p***. I s těmi nejlepšími měřicími zařízeními, která nám může poskytnout moderní technika, bude každý součin neurčitosti polohy a neurčitosti hybnosti v rov. (39.20) větší než $\hbar$; *nikdy* nemůže být menší.

Částice, jejíž hustota pravděpodobnosti je znázorněna na obr. 39.12, je volná částice. To znamená, že na ni nepůsobí žádná síla, takže její hybnost $\boldsymbol{p}$ musí být konstantní. Přitom jsme předpokládali, aniž jsme to výslovně řekli, že $\boldsymbol{p}$ můžeme určit absolutně přesně. Tím jsme ovšem předpokládali, že v rov. (39.20) je $\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = 0$. Tento předpoklad však vyžaduje, aby $\Delta x \to \infty$, $\Delta y \to \infty$ a $\Delta z \to \infty$. S touto nekonečně velkou neurčitostí je pak nemožné určit polohu částice, jak to také ukazuje obr. 39.12.

Nemůžeme si tedy myslet, že částice *má ve skutečnosti* nějakou přesně určenou polohu, která je před námi z nějakého důvodu skryta. Jestliže je hybnost částice určena s absolutní přesností, slova jako „poloha částice“ jednoduše ztrácejí jakýkoli smysl. Částice z obr. 39.12 může být nalezena se stejnou pravděpodobností kdekoli podél osy x.

PŘÍKLAD 39.6

Snadno ukážeme, že elektron s kinetickou energií 12,0 eV má rychlost $2{,}05{\cdot}10^6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Předpokládejme, že se elektron pohybuje ve směru osy x a že můžeme měřit jeho rychlost s přesností 0,50 %. Jaká je nejmenší neurčitost (podle Heisenbergova principu neurčitosti), se kterou můžeme současně měřit polohu elektronu podél osy x?

ŘEŠENÍ: Rychlost elektronu je mnohem menší než rychlost světla, a proto můžeme jeho hybnost určit z nerelativistického vztahu jako

$$p = p_x = mv = (9{,}11{\cdot}10^{-31}\ \mathrm{kg})(2{,}05{\cdot}10^6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = \\ = 1{,}87{\cdot}10^{-24}\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}.$$

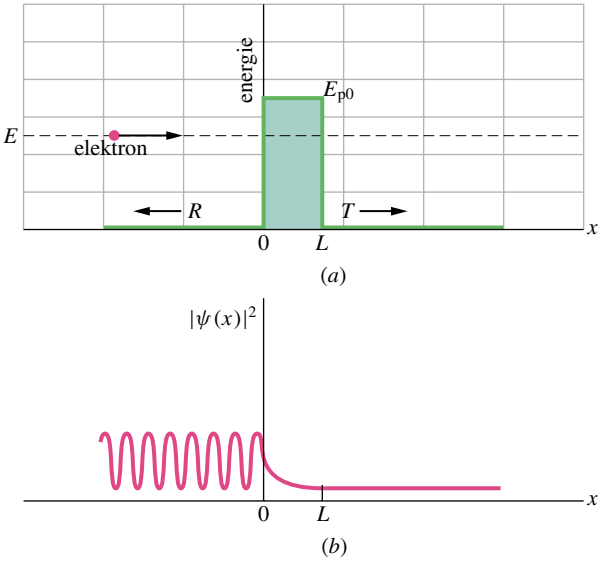
Neurčitost Δp_x při měření hybnosti je 0,50 % této hodnoty, tedy $9{,}35{\cdot}10^{-27}\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Podle Heisenbergova principu neurčitosti (rov. (39.20)) je minimální neurčitost pro měření polohy

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{(6{,}63{\cdot}10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s})/2\pi}{(9{,}35{\cdot}10^{-27}\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})} = \\ = 1{,}13{\cdot}10^{-8}\ \mathrm{m} \doteq 11\ \mathrm{nm}, \qquad \text{(Odpověď)}$$

to je asi 100 průměrů atomu. S danou neurčitostí měření hybnosti nemá smysl snažit se určit polohu elektronu s větší přesností.

39.9 TUNELOVÁNÍ

Představte si, že házíte lentilky po stole, na kterém někde v jejich dráze leží kniha. Byli byste velice překvapeni, kdyby lentilka prošla knihou místo toho, aby se od ní odrazila. Něco takového od lentilek očekávat nemůžeme. Ale pro elektrony a jiné částice s malou hmotností takový jev, kterému se říká tunelování bariérou nebo prostě jen **tunelování,** nastat může.



Obr. 39.13 (a) Průběh závislosti energie v prostoru vytváří potenciálovou bariéru o výšce E_{p0} a tloušťce L. Elektron o celkové energii E se přibližuje k bariéře zleva. (b) Hustota pravděpodobnosti $|\psi|^2$ de Broglieho vlny reprezentující elektron ukazuje tunelování elektronu bariérou. Vlevo od bariéry dostaneme stojatou vlnu v důsledku superpozice dopadající a odražené de Broglieho vlny.

Obr. 39.13a ukazuje elektron o energii E, který se pohybuje ve směru osy x. Působí na něj takové síly, že jeho potenciální energie E_p je nulová všude kromě oblasti $0 < x < L$, kde má hodnotu E_{p0}. Takové oblasti říkáme **bariéra potenciální energie** (nebo volněji **potenciálová bariéra**) o výšce E_{p0} a tloušťce L.

Protože $E < E_{p0}$, měl by se podle klasické fyziky elektron, který se k bariéře přibližuje zleva, od bariéry odrazit a pohybovat se zpět proti původnímu směru pohybu. V kvantové fyzice je však v tomto případě elektron de Broglieho vlnou, a proto existuje jistá nenulová pravděpodobnost, že tato vlna „prosákne“ bariérou a ocitne se na druhé straně. To znamená, že existuje konečně velká pravděpodobnost, že se elektron ocitne na vzdálené straně bariéry a bude pokračovat v pohybu vpravo.

Vlnová funkce $\psi(x)$, která popisuje elektron, se najde řešením Schrödingerovy rovnice (39.15) samostatně pro tři oblasti znázorněné na obr. 39.13a: (1) vlevo od bariéry, (2) uvnitř bariéry a (3) vpravo od bariéry. Konstanty, které se v řešení objeví, určíme tak, aby funkce $\psi(x)$ byla hladká

(tzn. spojitá i se svou derivací) i v bodech $x = 0$ a $x = L$. Čtverec absolutní hodnoty $\psi(x)$ pak udává hustotu pravděpodobnosti.

Obr. 39.13b ukazuje výsledky graficky. Oscilující křivka vlevo od bariéry z obr. 39.13a (pro $x < 0$) je kombinací dopadající a odražené de Broglieho vlny. Odražená vlna má menší amplitudu než dopadající vlna a interferencí se vytvoří stojatá vlna.

Uvnitř bariéry (pro $0 < x < L$) klesá hustota pravděpodobnosti exponenciálně v závislosti na x. Předpokládáme-li však, že L je malé, není hustota pravděpodobnosti v $x = L$ zanedbatelná.

Vpravo od bariéry z obr. 39.13a (pro $x > L$) popisuje hustota pravděpodobnosti prošlou vlnu s malou, ale konstantní amplitudou. To znamená, že elektron se v této oblasti může nacházet se stejnou relativně malou pravděpodobností kdekoli podél osy x, pokud se mu podaří protunelovat bariérou. (Srovnejte tuto část obrázku s obr. 39.12 pro volnou částici.)

Definujeme *koeficient průchodu* T pro dopadající vlnu a bariéru z obr. 39.13a, který určuje pravděpodobnost, že dopadající elektron projde bariérou, tedy pravděpodobnost, že se uskuteční tunelování. Například pro $T = 0{,}02$ z každých 1 000 elektronů vystřelených do bariéry jich průměrně 20 protuneluje a 980 se odrazí.

Koeficient průchodu T bariérou výšky E_{p0} je přibližně

$$T \approx e^{-2\varkappa L}, \tag{39.21}$$

kde

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2m(E_{p0} - E)}{\hbar^2}}. \tag{39.22}$$

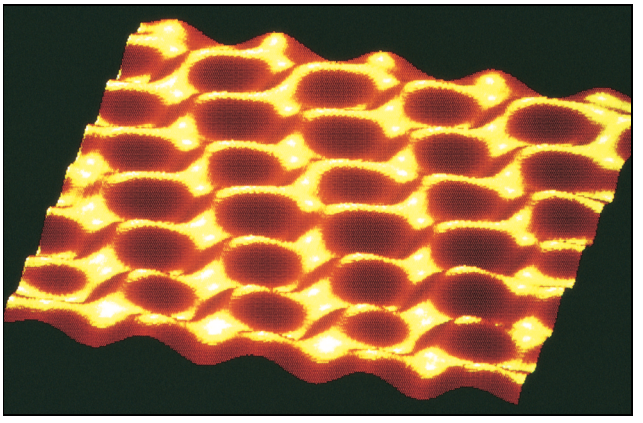
Závislost T v rov. (39.21) je exponenciální, a proto je T velice citlivá na hodnotu všech tří proměnných, na kterých závisí: na hmotnosti částice m, tloušťce bariéry L a rozdílu energie $E_{p0} - E$.

Tunelování má mnoho praktických aplikací, jako je například *tunelová dioda*, ve které můžeme rychle zapnout a vypnout proud tunelujících elektronů tím, že změníme výšku bariéry. Tuto změnu můžeme provádět velmi rychle (do 5 ps), a proto tunelovou diodu můžeme použít tam, kde vyžadujeme velmi rychlou odezvu. Nobelovu cenu za fyziku v roce 1973 dostali tři „tuneláři“, Leo Esaki za tunelování v polovodičích, Ivar Giaever za tunelování v supravodičích a Brian Josephson za objev *Josephsonova jevu* (rychlého kvantového přepínače založeného na tunelování). Nobelova cena za fyziku v roce 1986 byla udělena Gerdu Binningovi a Heinrichu Rohrerovi za to, že vyvinuli další užitečné zařízení založené na tunelování, a to rastrovací tunelový mikroskop.

KONTROLA 5: Je vlnová délka prošlé vlny v obr. 39.13b větší, menší, nebo stejná jako vlnová délka dopadající vlny?

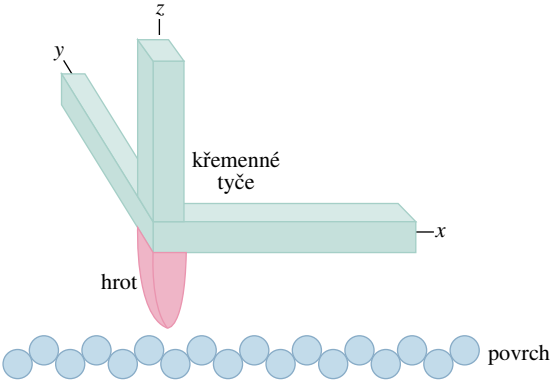
Rastrovací tunelový mikroskop (STM)

Na tunelování je založen rastrovací tunelový mikroskop STM (z angl. scanning tunneling microscope), který dovoluje vytvářet podrobné zobrazení povrchů a ukázat detaily s atomovými rozměry, tedy s rozlišením mnohem lepším než u optického mikroskopu. Obr. 39.14 ukazuje jeden takový příklad, na kterém můžeme vidět jednotlivé atomy.



Obr. 39.14 Kontury povrchu grafitu zobrazené v rastrovacím tunelovém mikroskopu. Zřetelně vidíme atomy uhlíku tvořící šestiúhelníkovou strukturu.

Obr. 39.15 ukazuje princip rastrovacího tunelového mikroskopu. Ostrý kovový hrot, upevněný v průsečíku tří vzájemně kolmých křemenných tyčí, je umístěn do blízkosti



Obr. 39.15 Princip rastrovacího tunelového mikroskopu (STM). Tři křemenné tyče vedou ostrý vodivý hrot těsně nad studovaným povrchem tak, že při rastrování udržují konstantní vzdálenost mezi hrotem a povrchem. Hrot tedy sleduje konturu povrchu. Záznam jeho pohybu vytvoří zobrazení jako je obr. 39.14.

studovaného povrchu. Mezi hrotem a povrchem vzorku se udržuje malé napětí, někdy jen 10 mV.

Krystal křemene vykazuje zajímavou vlastnost zvanou *piezoelektrický jev*: vlivem elektrického napětí, přiloženého na křemenný krystal, se nepatrně změní jeho rozměry. Tato vlastnost se dá využít pro plynulou změnu délky každé ze tří tyčí z obr. 39.15 o velmi malé hodnoty, takže hrotem můžeme nejen rastrovat podél povrchu (ve směrech x a y), ale také jím můžeme pohybovat kolmo k povrchu vzorku ve směru z.

Vzdálenost mezi povrchem a hrotem vytváří bariéru potenciální energie podobně jako na obr. 39.13a. Je-li hrot dostatečně blízko u povrchu, elektrony ze vzorku mohou touto bariérou tunelovat do hrotu a vytvářet tak tunelový proud.

Při praktickém provozu se používá zpětná vazba pro nastavení svislé vzdálenosti hrotu tak, aby se při rastrování nad povrchem udržoval tunelový proud konstantní. To znamená, že i vzdálenost hrotu od vzorku zůstává při rastrování konstantní. Na výstupu — jako je obr. 39.14 — pak můžeme na monitoru zobrazit proměnnou svislou polohu hrotu a tedy obrys povrchu jako závislost na poloze hrotu v rovině xy.

Rastrovací tunelové mikroskopy se dají běžně zakoupit a používají se v řadě laboratoří.

PŘÍKLAD 39.7

Předpokládejme, že v obr. 39.13a máme elektron o celkové energii 5,1 eV dopadající na bariéru o výšce $E_{p0} = 6{,}8\,\text{eV}$ a šířce $L = 750\,\text{pm}$.

(a) Jak je přibližně velký koeficient průchodu T pro tyto elektrony?

ŘEŠENÍ: Pro výpočet T z rov. (39.21) nejprve určíme z rov. (39.22)

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2m(E_{p0} - E)}{\hbar^2}}.$$

Čitatel zlomku pod odmocninou je

$$2(9{,}11\cdot10^{-31}\,\text{kg})(6{,}8\,\text{eV} - 5{,}1\,\text{eV})\cdot \\ \cdot(1{,}60\cdot10^{-19}\,\text{J/eV}) = 4{,}955\cdot10^{-49}\,\text{J·kg}.$$

Tedy

$$\varkappa = \sqrt{\frac{(4{,}955\cdot10^{-49}\,\text{J·kg})}{(1{,}054\cdot10^{-34}\,\text{J·s})^2}} = 6{,}67\cdot10^{9}\,\text{m}^{-1}.$$

Bezrozměrová veličina $2\varkappa L$ je potom

$$2\varkappa L = 2(6{,}67\cdot10^{9}\,\text{m}^{-1})(750\cdot10^{-12}\,\text{m}) = 10{,}0$$

a z rov. (39.21) dostaneme koeficient propustnosti

$$T \approx \text{e}^{-2\varkappa L} = \text{e}^{-10{,}0} = 45\cdot10^{-6}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Z každého milionu elektronů, které dopadnou na bariéru, jich přibližně 45 protuneluje.

(b) Jak velký by byl koeficient propustnosti pro protony?

ŘEŠENÍ: Zopakujeme-li tento výpočet znovu pro hmotnost protonu ($1{,}67\cdot10^{-27}$ kg) místo hmotnosti elektronu, dostaneme $T \approx 10^{-186}$. Koeficient průchodu se nesmírně snižuje pro hmotnější částice. *Představte si, jak malý by pak musel být pro lentilky!*

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Fotony

Při interakci světla s hmotou se energie a hybnost přenášejí v daném místě v diskrétních množstvích, „kvantech“ energie nazývaných **fotony**. Energie a hybnost fotonu jsou

$$E = hf \quad \text{(energie fotonu)}, \tag{39.2}$$

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad \text{(hybnost fotonu)}, \tag{39.7}$$

kde f a λ jsou frekvence a vlnová délka příslušné světelné vlny.

Fotoelektrický jev

Při dopadu světla o dostatečně vysoké frekvenci na čistý kovový povrch jsou emitovány elektrony v důsledku interakce fotonu s elektrony v kovu. Platí rovnice

$$hf = E_{k,max} + \Phi, \tag{39.5}$$

kde hf je energie fotonu, $E_{k,max}$ je maximální kinetická energie emitovaných elektronů a Φ je *výstupní práce* materiálu terče, tedy minimální energie, kterou musí elektron získat, aby mohl opustit povrch terče. Je-li hf menší než Φ, fotoelektrický jev nenastane.

Comptonův posuv

Při rozptylu rentgenového záření na volně vázaných elektronech v terči má část rozptýleného rentgenového záření delší vlnovou délku než záření dopadající. *Comptonův posuv* (změna vlnové délky) pro rozptyl rentgenového záření do úhlu φ je

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi). \tag{39.11}$$

Světelné vlny a fotony

Při interakci světla s hmotou se energie a hybnost přenášejí

fotony. Při šíření světla však interpretujeme světelnou vlnu jako *vlnu pravděpodobnosti*, ve které je pravděpodobnost (za jednotku času), že foton bude detegován, úměrná E_m^2, kde E_m je amplituda kmitajícího elektrického pole příslušné světelné vlny v místě detektoru.

Vlnové vlastnosti hmoty

Pohybující se částice, jako je elektron nebo proton, může být popsána jako de Broglieho vlna. Její vlnová délka, nazývaná *de Broglieho vlnová délka*, je rovna $\lambda = h/p$, kde p je hybnost částice.

Vlnová funkce

Šíření de Broglieho vlny je popsáno její vlnovou funkcí $\Psi(x, y, z, t)$, kterou zpravidla můžeme rozdělit na prostorově závislou část $\psi(x, y, z)$ a na časově závislou část $e^{-i\omega t}$. Pro částici o hmotnosti m pohybující se podél osy x s konstantní celkovou energií E v oblasti, kde je její potenciální energie $E_p(x)$, můžeme $\psi(x)$ nalézt řešením *Schrödingerovy rovnice*

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - E_p(x)]\psi = 0. \qquad (39.15)$$

De Broglieho vlna je stejně jako světelná vlna vlnou pravděpodobnosti v tomto smyslu: když do této vlny vložíme detektor, je pravděpodobnost, že detektor zaregistruje částici v libovolně zvoleném časovém intervalu, úměrná *hustotě pravděpodobnosti* $|\psi|^2$.

Pro volnou částici, tedy pro částici, pro kterou je $E_p(x) = 0$, pohybující se v kladném (nebo záporném) směru osy x, má $|\psi|^2$ konstantní hodnotu pro libovolnou polohu podél osy x.

Heisenbergův princip neurčitosti

Pravděpodobnostní podstata kvantové fyziky klade zásadní omezení na detekci polohy a hybnosti částice. Nemůžeme měřit polohu $\boldsymbol{r}$ a hybnost $\boldsymbol{p}$ částice současně s neomezenou přesností. Neurčitost složek těchto veličin je dána vztahy

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\geqq \hbar, \\ \Delta y \Delta p_y &\geqq \hbar, \\ \Delta z \Delta p_z &\geqq \hbar. \end{aligned} \qquad (39.20)$$

Tunelování

Podle klasické fyziky se dopadající částice s energií E vždy odrazí od bariéry potenciální energie o výšce $E_{p0} > E$. V kvantové fyzice má vlna pravděpodobnosti příslušná dané částici konečnou pravděpodobnost, že částice takovou bariérou protuneluje.

Pravděpodobnost, že daná částice o hmotnosti m a energii E protuneluje bariérou o výšce E_{p0} a tloušťce L, je určena koeficientem průchodu T

$$T \approx e^{-2\varkappa L}, \qquad (39.21)$$

kde

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2m(E_{p0} - E)}{\hbar^2}}. \qquad (39.22)$$

OTÁZKY

1. Mikrovlnná trouba i lékařský rentgen vytvářejí elektromagnetické vlny. Které z nich mají větší (a) vlnovou délku, (b) frekvenci a (c) energii fotonů?

2. Které z následujících tvrzení o fotoelektrickém jevu platí a které neplatí? (a) Čím větší je frekvence dopadajícího světla, tím větší je brzdný potenciál. (b) Čím větší je intenzita dopadajícího světla, tím větší je prahová frekvence. (c) Čím větší je výstupní práce materiálu terče, tím větší je brzdný potenciál. (d) Čím větší je výstupní práce materiálu terče, tím větší je prahová frekvence. (e) Čím větší je frekvence dopadajícího světla, tím větší je maximální kinetická energie emitovaných elektronů. (f) Čím větší je energie fotonů, tím menší je brzdný potenciál.

3. Určete z obrázku v kontrole 2, zda je pro danou frekvenci dopadajícího světla větší maximální kinetická energie emitovaných elektronů pro terč vyrobený ze sodíku, nebo z draslíku.

4. Která z následujících veličin u fotoelektrického jevu (pro daný terč a danou frekvenci dopadajícího světla), pokud vůbec nějaká, závisí na intenzitě dopadajícího světla: (a) maximální kinetická energie emitovaných elektronů, (b) maximální proud fotoelektronů, (c) brzdný potenciál, (d) prahová frekvence?

5. Svítíte-li ultrafialovým světlem na izolovanou kovovou destičku, destička po krátkou dobu emituje elektrony. Proč tato emise po nějaké době přestane?

6. Kovová destička je osvětlována světlem s danou frekvencí. Co určuje, zda jsou elektrony emitovány nebo ne: (a) intenzita světla, (b) délka doby osvětlení, (c) tepelná vodivost destičky, (d) plocha destičky, (e) materiál destičky?

7. V pokusu s Comptonovým posuvem je foton rozptýlen dopředu, takže podle obr. 39.3 je $\varphi = 0$. Jakou energii získá při rozptylu elektron?

8. Podle vztahu (39.11) je Comptonův posuv stejný pro rentgenové záření i pro viditelné světlo. Proč můžeme snadno měřit Comptonův posuv pro rentgenové záření a nemůžeme jej měřit pro viditelné světlo?

9. Foton A má dvojnásobnou energii než foton B. (a) Je hybnost fotonu A menší, stejná, nebo větší než u fotonu B? (b) Je vlnová délka fotonu A menší, stejná, nebo větší než u fotonu B?

10. Porovnejte fotony z lékařského rentgenu (foton A) a z mikrovlnné trouby (foton B). Který má větší (a) vlnovou délku, (b) energii, (c) frekvenci, (d) hybnost?

11. Data z obr. 39.4 byla měřena na uhlíkovém terči. Jakým

zásadním způsobem by se výsledky lišily, kdyby terč byl ze síry místo z uhlíku?

12. Elektron a proton mají stejnou kinetickou energii. Který z nich má větší de Broglieho vlnovou délku?

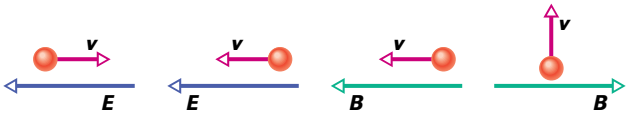
13. (a) Zdvojnásobíme-li kinetickou energii nerelativistické částice, jak se změní její de Broglieho vlnová délka? (b) Jak se změní vlnová délka, zdvojnásobíme-li rychlost částice?

14. Následující nerelativistické částice mají stejnou kinetickou energii. Seřaďte je podle jejich de Broglieho vlnové délky od největší: elektron, α-částice, neutron.

15. Je de Broglieho vlnová délka vystřelené kulky velmi malá, nebo velmi velká?

16. Srovnejte Comptonovu vlnovou délku elektronu a jeho de Broglieho vlnovou délku. Která trzení platí? (a) Comptonova vlnová délka je vždy větší. (b) Comptonova vlnová délka je vždy menší. (c) Obě vlnové délky jsou vždy stejné. (d) Obě vlnové délky jsou navzájem nezávislé.

17. Obr. 39.16 ukazuje čtyři možné případy pohybu elektronu v poli. Pohybuje se (a) proti směru elektrického pole, (b) ve směru elektrického pole, (c) ve směru magnetického pole, (d) kolmo ke směru magnetického pole. Určete pro každý případ, jestli se de Broglieho vlnová délka zvětšuje, zmenšuje, nebo zůstává stejná.



(a) (b) (c) (d)

Obr. 39.16 Otázka 17

18. Proton a deuteron, každý o stejné kinetické energii 3 MeV, dopadají na bariéru o výšce $E_{p0} = 10\,\text{MeV}$. Která částice má větší pravděpodobnost protunelovat bariérou? (Deuteron má dvakrát větší hmotnost než proton.)

19. Co má větší vliv na koeficient průchodu T potenciálovou bariérou: (a) zvětšení výšky bariéry E_{p0} o 1 %, nebo (b) snížení kinetické energie dopadajícího elektronu o 1 %?

20. Proč jsou minima hodnot pravděpodobnosti $|\psi|^2$ v levé části obr. 39.13b větší než nula?

21. Předpokládejte, že výška potenciálové bariéry na obr. 39.13a je nekonečná. (a) Jakou hodnotu má koeficient průchodu pro elektron přibližující se k bariéře? (b) Předpovídá rov. (39.21) očekávaný výsledek?

22. Tabulka popisuje tři případy při pokusu s tunelováním z obr. 39.13. Seřaďte je sestupně podle pravděpodobnosti, že elektrony protunelují bariérou.

	ENERGIE ELEKTRONŮ	VÝŠKA BARIÉRY	TLOUŠŤKA BARIÉRY
(a)	E	$5E$	L
(b)	E	$17E$	$L/2$
(c)	E	$2E$	$2L$

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 39.2 Světelné vlny a fotony

1C. Ukažte, že energie E fotonu v eV a jeho vlnová délka λ v nm jsou číselně svázány vztahem $E = 1\,240/\lambda$.

2C. Oranžové světlo dálniční výbojky má vlnovou délku 589 nm. Jaká je příslušná energie fotonů tohoto světla?

3C. Vyjádřete Planckovu konstantu v jednotkách eV·fs (elektronvolt·femtosekunda).

4C. Monochromatické světlo dopadá na fotografický film. Jednotlivý foton se zaznamená, pokud má energii alespoň 0,6 eV, aby disocioval molekulu AgBr ve filmu. Jaká je největší vlnová délka světla, kterou můžeme zaznamenat? V jaké oblasti spektra se tato hodnota nachází?

5C. Spektrální emisní čára, která je velmi důležitá v astronomii, má vlnovou délku 21 cm. Jaká je příslušná energie fotonu?

6C. Jak rychle se musí pohybovat elektrony, aby měly stejnou energii jako fotony sodíkového světla ($\lambda = 590\,\text{nm}$)?

7C. S jakou četností emituje Slunce fotony? Pro jednoduchost předpokládejte, že světlo Slunce je monochromatické s $\lambda = 550\,\text{nm}$. Slunce vyzařuje světlo s výkonem $3{,}9\cdot10^{26}\,\text{W}$.

8C. Helium-neonový laser vyzařuje svazek červeného světla ($\lambda = 633\,\text{nm}$) o průměru přibližně 3,5 mm. Je-li výkon laseru 5,0 mW, kolik fotonů dopadá na detektor v dráze svazku? Předpokládejte, že detektor absorbuje celý svazek.

9C. Donedávna byl metr definován jako 1 650 763,73násobek vlnové délky oranžového světla emitovaného světelným zdrojem obsahujícím atomy kryptonu-86. Jaká je energie fotonu tohoto záření?

10Ú. Za ideálních podmínek vnímá lidské oko světlo o vlnové délce 550 nm, je-li četnost dopadajícího světla jen kolem 100 fotonů za sekundu. Jakému výkonu to odpovídá?

11Ú. Ultrafialová výbojka, vyzařující světlo o vlnové délce 400 nm, a infračervená žárovka, vyzařující světlo o vlnové délce 700 nm, mají obě výkon 400 W. (a) Který zdroj světla vytváří víc fotonů a (b) jaká je jejich četnost?

12Ú. Družice na dráze kolem Země používá solární panely o ploše $2{,}60\,\text{m}^2$ kolmé na směr slunečních paprsků. Sluneční energie má intenzitu $1{,}39\,\text{kW/m}^2$. (a) S jakou četností dopadají fotony ze Slunce na panel? (b) S jakou četností jsou fotony pohlcovány panelem? Předpokládejte, že sluneční světlo je monochromatické, má vlnovou délku 550 nm a všechno záření dopadající na panel se pohltí. (c) Za jak dlouho dopadne na panel jeden mol fotonů?

13Ú. Speciální zdroj vyzařuje monochromatické světlo o vlnové délce 630 nm. Jeho příkon je 60 W a účinnost převodu elektrické energie na světlo je 93 %. Kolik fotonů vyzáří zdroj za svou dobu života 730 h?

14Ú. Argonový laser ($\lambda = 515$ nm) o výkonu 1,5 W má průměr svazku $d = 3{,}0$ mm. Svazek je zaostřen systémem čoček s ohniskovou vzdáleností $f = 2{,}5$ mm. Zfokusovaný svazek dopadá na dokonale pohlcující stínítko, kde vytváří kruhový difrakční obrazec, jehož centrální kroužek má poloměr R daný vztahem $1{,}22 f\lambda/d$. Lze dokázat, že 84 % dopadající energie je soustředěno v centrálním kroužku a zbytek světla je v soustředných difrakčních kroužcích, které obklopují tento kroužek. S jakou četností jsou fotony absorbovány stínítkem v centrálním kroužku difrakčního obrazce?

15Ú. Sodíková výbojka ($\lambda = 589$ nm) s výkonem 100 W vyzařuje rovnoměrně do všech směrů. (a) S jakou četností se ve výbojce vytvářejí fotony? (b) V jaké vzdálenosti od výbojky bude absorbující stínítko přijímat fotony s četností 1,00 fotonu/(cm^2·s)? (c) Jaký je tok fotonů (počet fotonů na jednotku plochy za jednotku času) na malém stínítku 2,00 m od výbojky?

ODST. 39.3 Fotoelektrický jev

16C. Výstupní práce draslíku a cesia jsou 2,25 eV a 2,14 eV. (a) Uskuteční se fotoelektrický jev pro některý z těchto prvků pro dopadající světlo o vlnové délce 565 nm? (b) Uskuteční se pro světlo o vlnové délce 518 nm?

17C. Hledáte látku pro fotočlánek, který bude pracovat na principu fotoelektrického jevu s viditelným světlem. Který materiál bude vyhovovat (výstupní práce je uvedena v závorce): tantal (4,2 eV), wolfram (4,5 eV), hliník (4,2 eV), baryum (2,5 eV), lithium (2,3 eV)?

18C. (a) Energie potřebná pro emisi elektronu z kovového sodíku je 2,28 eV. Vykazuje sodík fotoefekt pro červené světlo s $\lambda = 680$ nm? (b) Jaká je prahová vlnová délka pro emisi fotoelektronů ze sodíku? Jaké barvě světla odpovídá?

19C. Nalezněte nejvyšší kinetickou energii elektronů emitovaných z materiálu o výstupní práci 2,3 eV pro frekvenci dopadajícího záření $3{,}0\cdot10^{15}$ Hz.

20C. Světlo dopadá na povrch sodíku a způsobuje fotoemisi. Brzdný potenciál je pro emitované elektrony 5,0 V a výstupní práce sodíku je 2,2 eV. Jaká je vlnová délka dopadajícího světla?

21C. Výstupní práce wolframu je 4,50 eV. Spočtěte největší rychlost elektronů emitovaných při dopadu světla o energii 5,80 eV na povrch wolframu.

22Ú. Ultrafialové záření o vlnové délce 200 nm dopadá na povrch hliníku. Hliník má výstupní práci 4,2 eV. Jaká je kinetická energie (a) nejrychlejšího a (b) nejpomalejšího emitovaného elektronu? (c) Jaký je v tomto případě brzdný potenciál? (d) Jaká je prahová vlnová délka pro hliník?

23Ú. (a) Je-li výstupní práce daného kovu 1,8 eV, jaký je brzdný potenciál pro světlo o vlnové délce 400 nm? (b) Jaká je největší rychlost fotoelektronů při opuštění povrchu kovu?

24Ú. Vlnová délka světla příslušná prahové frekvenci je pro stříbro 325 nm. Najděte největší kinetickou energii elektronů emitovaných z povrchu stříbra ultrafialovým světlem o vlnové délce 254 nm.

25Ú. Družice na oběžné dráze se může nabíjet v důsledku fotoefektu, protože světlo Slunce vyráží elektrony z jejího vnějšího povrchu. Družice se musí navrhovat tak, aby se toto nabíjení minimalizovalo. Předpokládejme, že povrch družice pokryjeme platinou, kovem o velmi vysoké výstupní práci ($\Phi = 5{,}32$ eV). Najděte nejdelší vlnovou délku dopadajícího slunečního světla, které může vyrazit elektrony z platiny.

26Ú. Brzdný potenciál pro elektrony emitované z povrchu ozářeného světlem o vlnové délce 491 nm je 0,710 V. Když změníme vlnovou délku na novou hodnotu, brzdný potenciál se změní na 1,43 V. (a) Jaká je tato nová vlnová délka? (b) Jaká je výstupní práce pro daný povrch?

27Ú. Při fotoelektrickém pokusu na sodíkovém povrchu najdeme brzdný potenciál 1,85 V pro vlnovou délku 300 nm a brzdný potenciál 0,820 V pro vlnovou délku 400 nm. Pomocí těchto hodnot určete (a) hodnotu Planckovy konstanty, (b) výstupní práci Φ pro sodík, (c) prahovou vlnovou délku λ_0 (vlnovou délku odpovídající prahové frekvenci) pro sodík.

28Ú. Kolem roku 1916 našel R. A. Millikan při fotoelektrickém pokusu na lithiu následující hodnoty pro brzdný potenciál:

Vlnová délka (nm)	433,9	404,7	365,0	312,5	253,5
Brzdný potenciál (V)	0,55	0,73	1,09	1,67	2,57

Z těchto dat vykreslete graf jako na obr. 39.2 (který je pro sodík) a použijte tento graf pro nalezení (a) Planckovy konstanty a (b) výstupní práce pro lithium.

29Ú. Předpokládejte, že relativní účinost povrchu cesia (o výstupní práci 1,80 eV) je $1{,}0\cdot10^{-16}$; v průměru je tedy emitován jeden elektron na 10^{16} fotonů, které dopadají na povrch. Jaký změříte proud elektronů emitovaných tímto povrchem, když jej ozáříme laserem o vlnové délce 600 nm a výkonu 2,00 mW, pokud měříme všechny emitované elektrony?

30Ú. Rentgenové záření o vlnové délce 71 pm vyráží ze zlaté fólie elektrony z vnitřních hladin atomů zlata. Emitované elektrony se pohybují po kruhových drahách o poloměru r v oblasti homogenního magnetického pole $\boldsymbol{B}$ tak, že hodnota součinu $Br = 1{,}88\cdot10^{-4}$ T·m. Určete (a) maximální kinetickou energii emitovaných elektronů a (b) práci potřebnou pro jejich emisi z atomů zlata.

ODST. 39.4 Fotony mají hybnost

31C. Rentgenové záření má vlnovou délku 35,0 pm. (a) Jaká je odpovídající frekvence záření? Určete příslušné hodnoty (b) energie fotonu a (c) hybnosti fotonu.

32C. (a) Jaká je hybnost fotonu, jehož energie se rovná klidové energii elektronu? Jaká je (b) vlnová délka a (c) frekvence příslušného záření?

33C. Záření o vlnové délce 2,4 pm dopadá na terč obsahující volné elektrony. (a) Najděte vlnovou délku světla rozptýleného

do úhlu 30° vůči směru dopadajícího záření. (b) Opakujte pro úhel rozptylu 120°.

34Ú. Záření γ o energii fotonu 0,511 MeV dopadá na volné elektrony v hliníkovém terči a rozptyluje se do různých směrů. (a) Jaká je vlnová délka dopadajícího záření γ? (b) Jaká je vlnová délka paprsků rozptýlených do úhlu 90,0° vůči dopadajícímu svazku? (c) Jaká je energie fotonů rozptýlených do tohoto směru?

35Ú. Analyzujte srážku mezi fotonem a volným elektronem a ukažte (při použití relativistické mechaniky), že není možné, aby foton předal celou svou energii volnému elektronu.

36Ú. Rentgenové záření o vlnové délce 0,01 nm dopadá na terč obsahující volné elektrony. Uvažujte rentgenové záření rozptýlené do úhlu 180°. Určete (a) změnu vlnové délky rozptýleného rentgenového záření, (b) změnu energie fotonu v dopadajícím a rozptýleném svazku, (c) kinetickou energii předanou elektronu a (d) směr pohybu elektronu.

37Ú. Určete Comptonovu vlnovou délku (a) elektronu a (b) protonu. Jaká je energie fotonu, jehož vlnová délka je rovna Comptonově vlnové délce (c) elektronu a (d) protonu?

38Ú. Určete procentuální změnu energie fotonu při srážce jako na obr. 39.5 pro $\varphi = 90°$ pro záření (a) v oblasti mikrovln s $\lambda = 3{,}0\,\text{cm}$, (b) ve viditelném světle s $\lambda = 500\,\text{nm}$, (c) pro rentgenové záření s $\lambda = 25\,\text{pm}$ a (d) pro γ-záření o energii fotonu 1,0 MeV. (e) Jaké jsou možnosti detekce Comptonova posuvu v uvedených oblastech elektromagnetického spektra, použijeme-li jako základní kritérium ztrátu energie při jednotlivé srážce fotonu s elektronem?

39Ú. Jaká procentuální změna vlnové délky vede ke ztrátě 75 % energie fotonu při srážce fotonu s volným elektronem?

40Ú. Jaký je maximální posuv vlnové délky pro Comptonův rozptyl fotonu na volném protonu?

41Ú. Elektron o hmotnosti m a rychlosti v se čelně srazí s fotonem γ-záření o energii hf_0 a foton se odrazí proti původnímu směru dopadu. Dokažte, že energie odraženého fotonu, měřená v laboratorním systému, je

$$E = hf_0\left(1 + \frac{2hf_0}{mc^2}\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}\right)^{-1}.$$

42Ú. Jakou hodnotu bude mít (a) Comptonův posuv, (b) relativní hodnota Comptonova posuvu a (c) změna energie fotonu pro světlo o vlnové délce 590 nm při rozptylu na volném elektronu v klidu pro rozptyl do úhlu 90° vůči dopadajícímu svazku? (d) Spočtěte tytéž veličiny pro rentgenové záření s energií fotonu 50,0 keV.

43Ú. Uvažujte srážku mezi rentgenovým fotonem s počáteční energií 50,0 keV a elektronem v klidu, při které se foton odrazil zpět a elektron dopředu. (a) Jaká je energie zpětně odraženého fotonu? (b) Jaká je kinetická energie elektronu?

44Ú. Ukažte, že relativní ztráta energie fotonu $\Delta E/E$ při srážce s částicí o hmotnosti m je dána vztahem

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{hf'}{mc^2}(1 - \cos\varphi),$$

kde E je energie dopadajícího fotonu, f' je frekvence rozptýleného fotonu a úhel φ je definován na obr. 39.5.

45Ú. Do jakého úhlu se musí rozptýlit foton o energii 200 keV na volném elektronu, aby ztratil 10 % své energie?

46Ú. Ukažte, že při rozptylu fotonu o energii E na volném elektronu je maximální kinetická energie předaná elektronu dána vztahem

$$E_{k,\max} = \frac{E^2}{E + mc^2/2}.$$

47Ú. Jaká je maximální kinetická energie elektronů vyražených z tenké měděné fólie dopadajícím svazkem rentgenového záření o energii 17,5 keV?

48Ú. Odvoďte rov. (39.11) pro Comptonův posuv z rov. (39.8), (39.9) a (39.10) vyloučením v a θ.

ODST. 39.6 Elektrony a de Broglieho vlny

49C. Projektil o hmotnosti 40 g má rychlost $1\,000\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Jakou vlnovou délku můžete projektilu přiřadit? (b) Proč nelze vlnový charakter projektilu demonstrovat pomocí difrakčních jevů?

50C. Použitím klasického vztahu mezi hybností a kinetickou energií ukažte, že de Broglieho vlnová délka elektronu (v nm) může být určena jako $\lambda = 1{,}226/\sqrt{E_k}$, kde E_k je kinetická energie elektronu v eV.

51C. V obvyklých televizních přístrojích jsou elektrony urychlovány napětím 25,0 kV. Jaká je vlnová délka těchto elektronů? (Nezapočítávejte relativistické jevy.)

52C. Určete vlnovou délku (a) 1,00 keV elektronu, (b) 1,00 keV fotonu a (c) 1,00 keV neutronu.

53Ú. Vlnová délka žluté spektrální emisní čáry sodíku je 590 nm. Pro jakou kinetickou energii má elektron stejnou de Broglieho vlnovou délku?

54Ú. Elektron a foton mají každý vlnovou délku 0,20 nm. Určete (a) jejich hybnost a (b) jejich energii.

55Ú. Neutrony v tepelné rovnováze s látkou mají střední kinetickou energii $\frac{3}{2}kT$, kde k je Boltzmannova konstanta a T je teplota okolí, kterou bereme pro pokojovou teplotu jako 300 K. (a) Jaká je střední kinetická energie těchto neutronů? (b) Jaká je odpovídající de Broglieho vlnová délka?

56Ú. Je-li vlnová délka protonu 100 fm, (a) jaká je rychlost protonu a (b) jakým elektrickým potenciálem musíme proton urychlit, aby získal tuto rychlost?

57Ú. Uvažujte balon plněný plynným heliem při pokojové teplotě a atmosférickém tlaku. (a) Určete průměrnou de Broglieho vlnovou délku atomů helia a průměrnou vzdálenost mezi atomy helia za těchto podmínek. Střední kinetická energie atomu je rovna $\frac{3}{2}kT$, kde k je Boltzmannova konstanta. (b) Můžeme atomy považovat za těchto podmínek za částice?

58Ú. (a) Foton má energii 1,00 eV a elektron má kinetickou energii o téže velikosti. Jaké jsou jejich vlnové délky? (b) Zopakujte výpočet i pro energii 1,00 GeV.

59Ú. (a) Foton a elektron mají stejné vlnové délky 1,00 nm. Určete energii fotonu a kinetickou energii elektronu. (b) Určete tyto hodnoty pro vlnovou délku 1,00 fm.

60Ú. Jedenkrát nabité ionty sodíku jsou urychleny napětím 300 V. (a) Jakou hybnost získá takový iont? (b) Jakou má de Broglieho vlnovou délku?

61Ú. Velký elektronový urychlovač na Stanfordské univerzitě poskytuje elektrony s kinetickou energií 50 GeV. Elektrony s touto energií mají malou vlnovou délku, vhodnou pro studium jemných detailů jaderné struktury. Jaká je de Broglieho vlnová délka pro energii elektronu 50 GeV? Porovnejte tuto vlnovou délku s poloměrem typického jádra (kolem 5,0 fm). (Pro tuto energii stačí použít ultrarelativistický vztah mezi hybností a energií, a to $p = E/c$. To je stejný vztah, jaký používáme pro světlo, a platí pro kinetickou energii mnohem větší, než je klidová energie, což je v tomto případě splněno.)

62Ú. Existenci atomového jádra objevil v roce 1911 Ernest Rutherford, který správně interpretoval pokusy, při kterých se α-částice rozptylovaly na kovových fóliích z atomů jako je zlato. (a) Používané α-částice měly energii 7,5 MeV; jaká je jejich de Broglieho vlnová délka? (b) Měl být vlnový charakter dopadajících α-částic použit při interpretaci těchto pokusů? Hmotnost α-částic je 4,00 u (u je atomová hmotnostní jednotka) a nejkratší vzdálenost částic od jádra v těchto pokusech byla kolem 30 fm. (Vlnový charakter hmoty nebyl znám ještě nejméně deset let poté, kdy se tyto pokusy prováděly.)

63Ú. Nerelativistická částice se pohybuje třikrát rychleji než elektron. Podíl de Broglieho vlnové délky částice a vlnové délky elektronu je $1{,}813\cdot10^{-4}$. Určete hmotnost částice a tím i to, o jakou částici se jedná.

64Ú. Dosažitelná rozlišovací schopnost mikroskopu je dána pouze používanou vlnovou délkou; to znamená, že nejmenší detail, který můžeme rozlišit, má velikost přibližně rovnou vlnové délce. Předpokládejte, že chceme „vidět“ dovnitř atomu. Má-li atom průměr kolem 100 pm, znamená to, že musíme rozlišit detaily o vzdálenosti kolem 10 pm. (a) Použijeme-li elektronový mikroskop, jakou nejmenší energii elektronů potřebujeme? (b) Použijeme-li světelný mikroskop, jakou potřebujeme nejmenší energii fotonů? (c) Který mikroskop se dá prakticky lépe použít a proč?

65Ú. Jaké urychlovací napětí elektronů je třeba, aby elektronový mikroskop měl stejnou mezní rozlišovací schopnost, jakou můžeme získat pomocí γ-záření o energii 100 keV (úloha 64)?

ODST. 39.7 Schrödingerova rovnice

66C. (a) Mějme komplexní číslo $n = a + ib$, kde a a b jsou reálná (kladná nebo záporná) čísla. Ukažte, že součin nn^* je vždy kladné reálné číslo. (b) Mějme jiné komplexní číslo $m = c + id$. Ukažte, že $|nm| = |n|\,|m|$.

67C. Dosazením $\psi(x)$ a její druhé derivace do rov. (39.16) ukažte, že rov. (39.17) je řešením rov. (39.16).

68Ú. (a) Napište vlnovou funkci $\psi(x)$ v rov. (39.19) ve tvaru $\psi(x) = a + ib$, kde a a b jsou reálné veličiny. (Předpokládejte, že ψ_0 je reálné.) (b) Určete časově závislou vlnovou funkci $\Psi(x, t)$, která odpovídá $\psi(x)$.

69Ú. Ukažte, že vlnové číslo k pro volnou částici o hmotnosti m může být určeno vztahem

$$k = \frac{\sqrt{2mE_\mathrm{k}}}{\hbar},$$

kde E_k je kinetická energie částice.

70Ú. Funkce $\psi(x)$ z rov. (39.19) popisuje volnou částici, pro kterou ve Schrödingerově rovnici (39.15) předpokládáme, že $E_\mathrm{p}(x) = 0$. Předpokládejte nyní, že $E_\mathrm{p}(x) = E_{\mathrm{p}0}$ je konstantní. Ukažte, že rov. (39.19) je stále řešením Schrödingerovy rovnice s vlnovým číslem k částice daným nyní vztahem

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E - E_{\mathrm{p}0})}.$$

71Ú. Ukažte, že $|\psi|^2 = |\Psi|^2$, kde ψ a Ψ jsou definovány v rov. (39.14). Dokažte tak, že hustota pravděpodobnosti nezávisí na čase.

72Ú. V rov. (39.17) položme $A = 0$ a označme B jako ψ_0. Co potom výsledná vlnová funkce popisuje? Jak, pokud vůbec, se změní obr. 39.12?

73Ú. V rov. (39.18) ponecháme oba členy a položíme $A = B = \psi_0$. Rovnice pak popisuje superpozici dvou de Broglieho vln o stejné amplitudě, které se pohybují v opačných směrech. (Připomeňme si, že toto je podmínka pro vznik stojaté vlny.) (a) Ukažte, že $|\Psi(x, t)|^2$ je pak dáno vztahem

$$|\Psi(x, t)|^2 = 2\psi_0^2(1 + \cos 2kx).$$

(b) Vyneste tuto funkci do grafu a ukažte, že vyjadřuje čtverec amplitudy stojaté de Broglieho vlny. (c) Ukažte, že uzly této stojaté vlny se nacházejí v místech o souřadnicích

$$x = (2n + 1)(\tfrac{1}{4}\lambda), \quad \text{kde } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

a λ je de Broglieho vlnová délka částice. (d) Napište výraz pro nejpravděpodobnější polohy pro nalezení částice.

ODST. 39.8 Heisenbergův princip neurčitosti

74C. Obr. 39.12 ukazuje, že kvůli platnosti Heisenbergova principu neurčitosti nemůžeme určit souřadnici x polohy elektronu. Můžete určit souřadnici y a z? (*Tip*: Hybnost elektronu nemá y a z složky.)

75C. Neurčitost polohy elektronu je dána jako 50 pm, což je zhruba rovno poloměru atomu vodíku. Jaká je nejmenší neurčitost při současném měření hybnosti tohoto elektronu?

76C. Představte si, že hrajete fotbal ve vesmíru (ne v našem!), kde má Planckova konstanta hodnotu 0,60 J·s. S jakou neurčitostí polohy by se pohyboval míč o hmotnosti 0,5 kg s rychlostí 20 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, je-li neurčitost rychlosti 1,0 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$?

77C. Obr. 39.12 ukazuje případ, ve kterém je složka hybnosti p_x částice přesně určena, takže $\Delta p_x = 0$; potom podle Heisenbergova principu neurčitosti (rov. (39.20)) je poloha x částice zcela neznámá. Z téhož principu plyne, že také platí opačné tvrzení: je-li poloha částice přesně určena ($\Delta x = 0$), je neurčitost hybnosti nekonečně velká.

Uvažujte případ, kdy měříme polohu částice ne s absolutní přesností, ale s neurčitostí $\lambda/(2\pi)$, kde λ je de Broglieho vlnová délka částice. Ukažte, že neurčitost při současném měření hybnosti je rovna velikosti hybnosti, tedy že $\Delta p_x = p$. Bylo by za těchto okolností překvapivé, kdybyste naměřili nulovou hodnotu hybnosti? Jak by to bylo v případě, když změříte hybnost $0{,}5p$? A v případě $2p$? A co v případě, když změříte $12p$?

78Ú. V kap. 40 se dozvíte, že si už nepředstavujeme, že elektrony se pohybují po přesných drahách v atomu jako planety ve slunečním systému. Abychom to pochopili, pokusme se „pozorovat" takovýto elektron ve světelném mikroskopu, ve kterém se snažíme změřit jeho předpokládanou polohu s přesností např. 10 pm (typický atom má poloměr kolem 100 pm). Vlnová délka světla použitá v mikroskopu musí být kolem 10 pm. (a) Jaká by musela být energie fotonu pro toto světlo? (b) Kolik energie by takový foton předal elektronu při čelní srážce? (c) Co nám tyto výsledky říkají o možnosti „pozorovat" elektron v atomu ve dvou a více bodech podél jeho předpokládané dráhy? (*Tip*: Vnější elektrony jsou v atomu vázány s energií jen několika eV.)

ODST. 39.9 Tunelování

79Ú. Proton a deuteron (má stejný náboj, ale dvojnásobnou hmotnost) dopadnou na bariéru o tloušťce 10 fm a výšce 10 MeV. Obě částice mají před dopadem kinetickou energii 3,0 MeV. (a) Jaký je koeficient průchodu každé z částic? (b) Jaké jsou jejich kinetické energie po průchodu bariérou, pokud bariérou projdou? (c) Jaké jsou jejich kinetické energie, když se na bariéře odrazí?

80Ú. Uvažujte bariéru potenciální energie jako na obr. 39.13a o výšce $E_{p0} = 6{,}0\,\text{eV}$ a tloušťce $L = 0{,}70\,\text{nm}$. Jaká je energie dopadajícího elektronu, jehož pravděpodobnost průchodu je 0,001 0?

81Ú. (a) Uvažujte svazek protonů o energii 5,0 eV dopadajících na bariéru o výšce 6,0 eV a tloušťce 0,70 nm s četností odpovídající proudu 1 000 A. Jak dlouho musíte v průměru čekat, než jediný proton projde? (b) Jak dlouhá by byla tato doba pro elektrony místo protonů?

82Ú. Uvažujte tunelování bariérou z př. 39.7. O kolik procent se změní koeficient průchodu T, změní-li se o 1,0 % (a) výška bariéry, (b) tloušťka bariéry a (c) kinetická energie dopadajícího elektronu?

83Ú. Automobil o hmotnosti 1 500 kg se rychlostí $20\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ blíží ke kopci, který je 24 m vysoký a 30 m dlouhý. Jaká je pravděpodobnost, že automobil protuneluje kvantově mechanicky tímto kopcem a objeví se na druhé straně — neboli jaký je koeficient průchodu kopcem pro automobil? (*Tip*: Potenciální energie je v tomto případě dána gravitací.)

84Ú. Částice o hybnosti p dopadá na bariéru z obr. 39.13a zleva. V oblasti vlevo od bariéry je $E_p = 0$ a Schrödingerova rovnice má tvar (39.16). (a) Ukažte, že v této oblasti je funkce

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

řešením Schrödingerovy rovnice. A a B jsou libovolné reálné konstanty a $k = p/\hbar$. (b) Ukažte dále, že

$$|\psi|^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos 2kx.$$

(c) Ukažte, že $|\psi|^2$ osciluje mezi $(A+B)^2$ a $(A-B)^2$. Všimněte si, že pro $A \neq B$ je $|\psi|^2$ vždy kladné a nikdy nemá nulovou hodnotu. Porovnejte tyto výsledky s grafem $|\psi|^2$ z obr. 39.13b.

85Ú. Částice o energii E dopadá zleva na bariéru z obr. 39.13a. Uvnitř bariéry je $E < E_{p0}$. Ukažte, že v této oblasti má řešení Schrödingerovy rovnice tvar

$$\psi(x) = Ce^{-\varkappa x} + De^{\varkappa x},$$

kde

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2m(E_{p0} - E)}{\hbar^2}}$$

a C a D jsou konstanty.

PROBLÉM

86. *Schrödingerova rovnice a zákon zachování mechanické energie.*

Uvažujme vlnovou funkci volné částice pohybující se v kladném směru osy x (rov. (39.19))

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\omega t}, \quad \text{kde } \psi(x) = Ae^{ikx}.$$

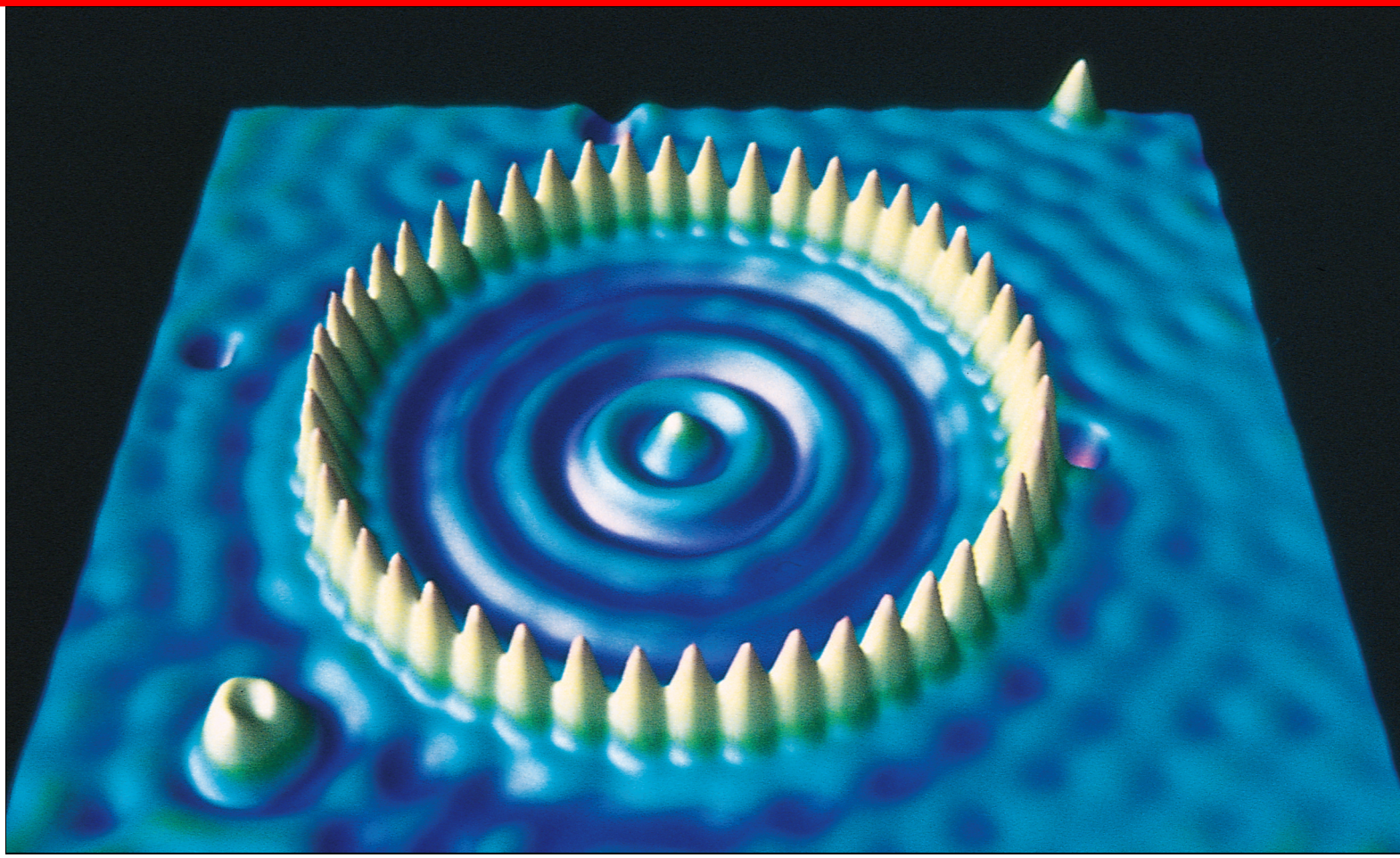
(a) Zderivujte $\psi(x)$ podle x. (b) Vyjádřete z de Broglieho vztahu k pomocí hybnosti p a ukažte, že $p\psi = -i\hbar\, d\psi/dx$.

Zapišme zákon zachování mechanické energie jako $E = E_k + E_p$. Vynásobme tuto rovnici funkcí ψ:

$$E\psi = (E_k + E_p)\psi = \left[\frac{1}{2m}p\cdot p + E_p\right]\psi.$$

(c) Dosaďte do této rovnice za p podle (b) příkaz k derivování $-i\hbar\, d/dx$ (jeho opakování povede ke druhé derivaci) a ukažte, že získaná diferenciální rovnice je ekvivalentní Schrödingerově rovnici (39.15).

40
Více o de Broglieho vlnách



Tento pozoruhodný počítačový obraz byl pořízený v roce 1993 ve výzkumném středisku firmy IBM v Almadenu v Kalifornii. Každý ze 48 píků na obvodu kruhu představuje polohu jednotlivých atomů železa na speciálně připraveném povrchu tvořeném atomy mědi. Tento kruh o průměru přibližně 14 nm se nazývá ***kvantová hradba****. Jak byly tyto atomy uspořádány do kruhu? Co znamenají vlnky viditelné uvnitř hradby?*

40.1 STAVBA ATOMU

Na počátku dvacátého století nikdo nevěděl, jak jsou uspořádány elektrony v atomech, jak se pohybují, jakými mechanismy atomy emitují a absorbují světlo a proč jsou přesto stabilní. Bez těchto znalostí nelze ale pochopit, jak a proč se atomy slučují a vytvářejí molekuly nebo jak se skládají při vzniku pevné látky. Proto také byly základy chemie — včetně biochemie, vysvětlující povahu samotného života — více či méně obestřeny tajemstvím.

V roce 1926 byly tyto a mnohé další otázky zodpovězeny v rámci vývoje kvantové fyziky a její základní části — **kvantové mechaniky**. K jejím hlavním předpokladům patří představa, že pohybující se elektrony, protony a ostatní částice lze nejlépe popsat pomocí de Broglieho vln, které splňují Schrödingerovu rovnici. Ačkoli kvantová teorie platí i pro velké objekty, nemá smysl popisovat chování fotbalových míčů, automobilů, planet a obdobných objektů pomocí kvantové mechaniky. Pro tyto velké, pomalu se pohybující objekty nám totiž newtonovská mechanika dá stejné odpovědi jako kvantová mechanika.

Dříve než použijeme kvantovou mechaniku k řešení problému atomové struktury, pokusíme se lépe pochopit její základní myšlenky na řešení několika jednodušších případů. Tyto „cvičné problémy“ mohou vypadat nepřirozeně, ale uvidíme, že nám poskytnou pevný základ k pochopení reálného problému struktury atomu vodíku, který budeme řešit v čl. 40.7.

40.2 VLNY NA STRUNÁCH A DE BROGLIEHO VLNY

V kap. 17 jsme viděli, že na napnuté struně můžeme vytvořit dva typy vln. Je-li struna dlouhá tak, že ji můžeme považovat za nekonečně dlouhou, můžeme na ní vytvořit *postupnou vlnu* v podstatě libovolné délky a tím i libovolné frekvence. Má-li napnutá struna jen konečnou délku, protože je upnuta na obou koncích, můžeme vytvořit pouze *stojaté vlny*; navíc tyto stojaté vlny mohou mít jenom jisté *diskrétní* frekvence. Jinak řečeno, omezení vlny na konečnou část prostoru vede ke *kvantování pohybu* — k existenci pouze *diskrétních stavů*, kdy každý z těchto jejích stavů je charakterizován ostře definovanou hodnotou frekvence.

Toto pozorování se týká vln všech druhů, včetně vln přiřazených částicím — *de Broglieho vln*. Pro ně je vhodnější pracovat s energií E částice než s frekvencí f vlny. V následujícím se soustředíme na de Broglieho vlnu pohybujícího se elektronu, který jsme si vybrali jako modelový objekt studia.

Uvažujme vlnu, přiřazenou elektronu pohybujícímu se ve směru osy x, na který nepůsobí žádná síla; jedná se tedy o *volnou částici*. Energie takového elektronu může nabývat libovolné rozumné hodnoty stejně, jako vlna pohybující se na nekonečné struně může mít libovolnou rozumnou frekvenci.

Uvažujme dále de Broglieho vlnu přiřazenou elektronu v atomu, například některému z *valenčních* elektronů (ty jsou nejslaběji vázány) atomu sodíku. Takový elektron je přitahován ke kladně nabitému jádru coulombovskou silou a *není* volnou částicí. Může tedy existovat jen v některém z diskrétních stavů, které mají diskrétní hodnoty energie E. To je obdobné diskrétním stavům vlny na napnuté struně konečné délky s možnými kvantovanými hodnotami frekvencí. Pro de Broglieho vlny (stejně jako pro všechny ostatní druhy vln) můžeme vyslovit následující **omezovací princip**:

Prostorové omezení vlny vede ke kvantování, tj. k povolení jen vybraných diskrétních stavů s diskrétními hodnotami energie.

40.3 ZACHYCENÍ ELEKTRONU

Jednorozměrné pasti

Nyní prozkoumáme de Broglieho vlnu elektronu, který se nachází v omezené části prostoru. Využijeme přitom analogie se stojatou vlnou na struně konečné délky napnuté podél osy x a upevněné na obou koncích. Protože jsou konce pevné, stávají se oba krajní body uzly, tj. body, ve kterých je struna stále v klidu. Uzlů může samozřejmě na struně existovat víc, ale tyto dva jsou přítomny vždy, jak ukazuje obr. 17.17.

Stavy, tedy stojaté vlny, ve kterých struna může kmitat, jsou takové, pro které se na její délku L vejde celočíselný počet půlvln. To znamená, že struna se může nacházet jen ve stavech, pro které platí

$$L = \frac{n\lambda}{2} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{40.1}$$

Každá hodnota n popisuje stav kmitající struny; použijeme-li jazyk kvantové mechaniky, řekneme, že n je *kvantové číslo*.

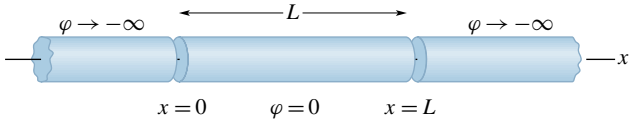
Pro každý stav struny, určený rov. (40.1), je příčná výchylka jejího elementu v různých bodech x rovna

$$y_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots , \tag{40.2}$$

kde kvantovým číslem n rozlišujeme jednotlivé vlastní kmity a amplituda A závisí na čase, ve kterém strunu sledujeme. (Rov. (40.2) je zkrácenou verzí rov. (17.51).) Vidíme,

že pro všechny hodnoty n existují body (uzly), v nichž je výchylka stále rovna nule; jsou to body $x = 0$ a $x = L$.

Nyní se vraťme k de Broglieho vlnám. Náš první problém bude přimět elektron, aby se pohyboval jen po jistém úseku osy x. (Stavy popisující elektron, jehož výskyt je prostorově omezen, nazýváme **vázané stavy**.) Na obr. 40.1 je znázorněna taková možná „elektronová past“. Skládá se ze dvou polonekonečných válců, z nichž každý má elektrický potenciál blížící se $-\infty$. Mezi nimi je umístěn dutý válec délky L, který má nulový potenciál. Abychom zachytili jeden elektron, umístíme jej do tohoto centrálního válce.



Obr. 40.1 Části idealizované „pasti“ určené k lokalizaci elektronu ve středním válci. Nekonečně dlouhé krajní válce jsou na velmi vysokém záporném potenciálu, střední válec je na potenciálu nulovém.

Past na obr. 40.1 je sice jednoduchá pro výpočty, ale nelze ji jednoduše vyrobit. Jednotlivý elektron však opravdu *můžeme* zachytit v pastích, které jsou sice složitější, ale pracují na podobném principu. Například na Washingtonské univerzitě byl jediný elektron v takové pasti vězněný po měsíce a bylo proto možné provést velmi přesná měření jeho vlastností.

Nalezení kvantované energie

Obr. 40.2 znázorňuje potenciální energii elektronu v závislosti na jeho poloze na ose x v idealizované elektronové pasti z obr. 40.1. Nachází-li se elektron v centrální části pasti, je jeho potenciální energie $E_p = -e\varphi$ nulová, poněvadž v této části je potenciál φ roven nule. Pokud by se elektron nacházel mimo tuto oblast, byla by jeho potenciální energie kladná a nekonečně veliká, poněvadž zde je $\varphi \to -\infty$. Průběh potenciální energie z obr. 40.2 nazýváme **nekonečně hlubokou potenciálovou jámou** nebo zkráceně *nekonečnou potenciálovou jámou*. Mluvíme o „jámě“, protože elektron, umístěný ve středním válci na obr. 40.1, nemůže z této oblasti uniknout. Jakmile totiž elektron při svém pohybu narazí na konec válce, zapůsobí na něj v podstatě nekonečná síla, která ho obrátí zpět.

Stejně jako tomu bylo v případě stojaté vlny na napnuté struně, musí mít i vlna popisující tento uvězněný elektron v bodech $x = 0$ a $x = L$ uzly. Rov. (40.1) platí i pro tuto vlnu, interpretujeme-li λ v této rovnici jako de Broglieho vlnovou délku pohybujícího se elektronu.

De Broglieho vlnová délka λ je definována rov. (39.13) jako $\lambda = h/p$, kde p je velikost hybnosti elektronu; ta



Obr. 40.2 Elektrická potenciální energie $E_p(x)$ elektronu, který je „uvězněn“ ve středním válci ideální pasti z obr. 40.1. Vidíme, že $E_p = 0$ pro $0 < x < L$ a $E_p \to \infty$ pro $x < 0$ a $x > L$.

souvisí s kinetickou energií E_k vztahem $p = \sqrt{2mE_k}$, kde m je hmotnost elektronu.

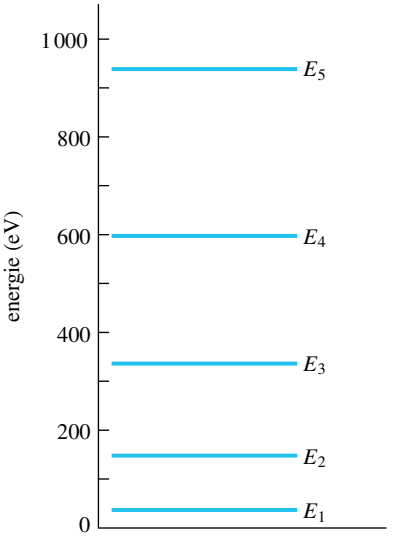
Celková energie E elektronu pohybujícího se ve středním válci, ve kterém je $E_p = 0$, je rovna jeho kinetické energii E_k. De Broglieho vlnovou délku takového elektronu můžeme tedy vyjádřit ve tvaru

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}. \qquad (40.3)$$

Po dosazení rov. (40.3) do rov. (40.1) a vyjádření energie E dostaneme

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) n^2 \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (40.4)$$

Protože je elektron vázaný, může jeho energie nabývat pouze hodnot daných rov. (40.4). Číslo n určuje kvantový stav elektronu a nazývá se kvantové číslo. Na obr. 40.3



Obr. 40.3 Některé z dovolených energií daných rov. (40.4) pro elektron „uvězněný“ v nekonečně hluboké jámě z obr. 40.2 o šířce $L = 100$ pm. Tento graf se nazývá energiové spektrum.

jsou znázorněny některé diskrétní hodnoty energie (*energiové hladiny*) elektronu, uvězněného v nekonečně hluboké potenciálové jámě s $L = 100\,\text{pm}$, vypočtené z rov. (40.4). (Takto zvolená hodnota L přibližně odpovídá rozměrům atomu.)

Kvantový stav vázaného elektronu s nejnižší možnou energií se nazývá **základní stav**; na obr. 40.3 je tímto stavem stav s energií E_1. Kvantové stavy o vyšší energii se nazývají **excitované**. Na obr. 40.3 energie E_2 odpovídá prvnímu excitovanému stavu, stav s energií E_3 je druhý excitovaný stav atd.

Změny energie

Nejnižší energii má elektron v základním stavu; pokud v něm není, snaží se do něj přejít. Do excitovaného stavu (ve kterém má energii vyšší) se může dostat pouze tehdy, dodá-li mu vnější zdroj energii rovnou rozdílu energií základního a excitovaného stavu. O elektronu, který získá takovéto množství energie, říkáme, že učinil *kvantový skok* (nebo též *přechod*) do excitovaného stavu.

Jednou z možností, jak může elektron získat energii potřebnou ke kvantovému skoku na vyšší energiovou hladinu, je absorpce (neboli pohlcení) fotonu. Tato absorpce a kvantový přechod mohou nastat pouze za této podmínky:

Vázaný elektron může absorbovat jen takový foton, jehož energie hf se rovná rozdílu energií elektronu v počátečním a v koncovém stavu (s vyšší energií).

Elektron v excitovaném stavu dlouho nevydrží, ale rychle *deexcituje*, tj. přejde do stavu s nižší energií. Může např. emitovat neboli vyzářit foton, a to za následující podmínky:

Vázaný elektron může vyzářit jen takový foton, jehož energie hf se rovná rozdílu energie elektronu v počátečním a koncovém stavu (s nižší energií).

PŘÍKLAD 40.1

Elektron je vázán v nekonečně hluboké potenciálové jámě o šířce $L = 100\,\text{pm}$.

(a) Jaký je energiový rozdíl mezi sousedními hladinami s kvantovými čísly n a $n+1$? Jaký je tento rozdíl pro $n = 1$?

ŘEŠENÍ: Z rov. (40.4) obdržíme

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_{n+1} - E_n = \\ &= \frac{h^2}{8mL^2}\left((n+1)^2 - n^2\right) = \\ &= \frac{h^2}{8mL^2}(2n+1) = \qquad (40.5)\\ &= \frac{(6{,}63\cdot10^{-34}\,\text{J·s})^2}{8(9{,}11\cdot10^{-31}\,\text{kg})(100\cdot10^{-12}\,\text{m})^2}(2n+1) = \\ &= (6{,}03\cdot10^{-18}\,\text{J})\frac{(1\,\text{eV})}{(1{,}6\cdot10^{-19}\,\text{J})}(2n+1) = \\ &= (37{,}7\,\text{eV})(2n+1). \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

Energiový rozdíl mezi dvěma sousedními hladinami v tomto případě roste se zvětšujícím se kvantovým číslem.

Po dosazení za $n = 1$ do předchozí rovnice vyjde energiový rozdíl mezi kvantovými stavy s $n = 1$ a s $n = 2$ roven

$$\Delta E = (37{,}7\,\text{eV})(3) = 113\,\text{eV}, \qquad \text{(Odpověď)}$$

což je v souladu s obr. 40.3.

(b) Jaký je energiový rozdíl mezi sousedními energiovými hladinami elektronu vázaného v evakuované trubici o délce $L = 3{,}0\,\text{m}$?

ŘEŠENÍ: Postupujeme úplně stejně jako v případě (a), pouze místo $L = 100\,\text{pm}$ dosadíme hodnotu $L = 3{,}0\,\text{m}$. Výsledek je pak

$$\Delta E = (4{,}19\cdot10^{-20}\,\text{eV})(2n+1). \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pro hodnotu $n = 1$ obdržíme $\Delta E = 1{,}3\cdot10^{-19}\,\text{eV}$. Tato hodnota je tak malá, že nemáme žádnou možnost, jak ji změřit. Je přibližně rovna energii, kterou by vyžadovalo posunutí elektronu o dva nanometry nahoru v gravitačním poli Země. Je-li elektron „uvězněn“ v tak velké části prostoru, jsou hladiny energií jeho dovolených stavů tak blízko u sebe, že nemohou být experimentálně odlišeny jako stavy diskrétní. V tomto případě nemůžeme kvantování energie a existenci diskrétních stavů zjistit.

PŘÍKLAD 40.2

Elektron je v počátečním stavu $n_\text{i} = 3$ v nekonečně hluboké potenciálové jámě šířky $L = 100\,\text{pm}$. Jakou energii hf a vlnovou délku λ musí mít foton, aby jeho pohlcením přešel elektron do stavu $n_\text{f} = 6$?

ŘEŠENÍ: Elektron má přejít z kvantového stavu s energií E_3 a kvantovým číslem $n_\text{i} = 3$ na energiovou hladinu E_6 s kvantovým číslem $n_\text{f} = 6$; k tomu mu musíme dodat energii,

např. absorpcí fotonu. Z rov. (40.4) vyplývá, že změna jeho energie ΔE je:

$$\Delta E = E_6 - E_3 = \frac{h^2}{8mL^2}n_f^2 - \frac{h^2}{8mL^2}n_i^2 = \\ = \frac{h^2}{8mL^2}(n_f^2 - n_i^2). \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z rovnosti $hf = \Delta E$ dostaneme se zadanými hodnotami

$$hf = \frac{h^2}{8mL^2}(n_f^2 - n_i^2) = \\ = \frac{(6{,}63\cdot10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{8(9{,}11\cdot10^{-31}\ \text{kg})(100\cdot10^{-12}\ \text{m})^2}(6^2 - 3^2) = \\ = 1{,}628\cdot10^{-16}\ \text{J} \doteq 1{,}63\cdot10^{-16}\ \text{J}, \qquad \text{(Odpověď)}$$

to je asi 1 keV. Vlnovou délku λ určíme dosazením $f = c/\lambda$. Tím dostaneme

$$h\frac{c}{\lambda} = 1{,}628\cdot10^{-16}\ \text{J}$$

a po úpravě a dosazení

$$\lambda = \frac{(6{,}63\cdot10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3{,}00\cdot10^{8}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})}{(1{,}628\cdot10^{-16}\ \text{J})} = \\ = 1{,}22\cdot10^{-9}\ \text{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato vlnová délka spadá do intervalu vlnových délek rentgenového záření.

KONTROLA 1: Seřaďte následující dvojice kvantových stavů elektronu uvězněného v nekonečně hluboké potenciálové jámě sestupně podle velikosti rozdílu odpovídajících energií: (a) $n = 3$ a $n = 1$, (b) $n = 5$ a $n = 4$, (c) $n = 4$ a $n = 3$.

Nalezení vlnových funkcí

Řešíme-li Schrödingerovu rovnici pro elektron zachycený v nekonečně hluboké potenciálové jámě o šířce L, zjistíme, že jeho vlnová funkce má tvar:

$$\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (40.6)$$

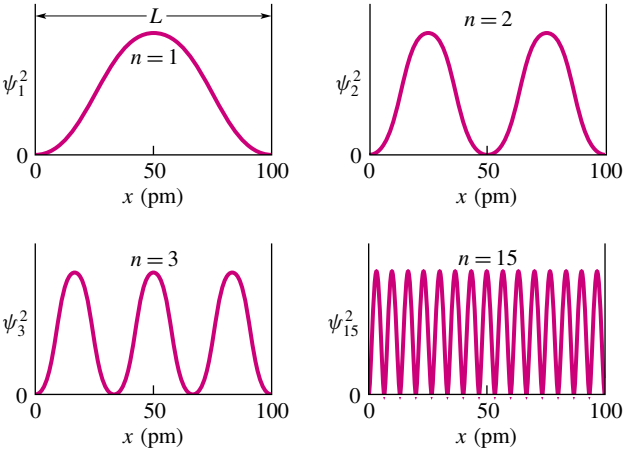
pro hodnoty x z intervalu $0 \leqq x \leqq L$, mimo tento interval je ψ rovno nule. V rov. (40.6) je A zatím libovolná konstanta; zanedlouho uvidíme, jak ji lze určit.

Současně nalezneme, že těmto stavům odpovídají energie dané rov. (40.4), kterou jsme odvodili na základě analogie se stojatou vlnou na napnuté struně. Vlnové funkce $\psi_n(x)$ mají stejný tvar jako funkce popisující výchylku $y_n(x)$ stojaté vlny na struně upevněné na obou koncích (rov. (40.2)).

Více než $\psi_n(x)$ nás ovšem zajímá *hustota pravděpodobnosti* $\psi_n^2(x)$, protože tato veličina má fyzikální smysl. (Ačkoli vlnové funkce jsou obecně komplexní, v rov. (40.6) je vlnová funkce reálná, takže se nemusíme znepokojovat stanovením její absolutní hodnoty před umocněním.) Připomeňme si čl. 39.7, podle něhož $\psi_n^2(x)$ v každém bodě x udává pravděpodobnost, že se elektron nachází v okolí tohoto bodu. Přesněji řečeno pravděpodobnost, že se elektron bude nacházet mezi body x a $x + \mathrm{d}x$ v nekonečně hluboké potenciálové jámě, je rovna $\psi_n^2(x)\,\mathrm{d}x$. Výraz $\psi_n^2(x)$ je tedy pravděpodobnost vztažená na jednotku délky. Z rov. (40.6) vidíme, že pro elektron v nekonečně hluboké potenciálové jámě je rovna

$$\psi_n^2(x) = A^2\sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (40.7)$$

pro interval $0 \leqq x \leqq L$. Mimo tento interval je hustota pravděpodobnosti výskytu elektronu nulová. Na obr. 40.4 je znázorněna $\psi_n^2(x)$ pro $n = 1, 2, 3$ a 15 pro elektron v nekonečně hluboké jámě šířky $L = 100$ pm.



Obr. 40.4 Hustota pravděpodobnosti $\psi_n^2(x)$ pro čtyři stavy elektronu uvězněného v nekonečně hluboké potenciálové jámě; jejich kvantová čísla jsou: $n = 1, 2, 3$ a 15. Elektron se bude s největší pravděpodobností nacházet v místech, kde hodnota funkce $\psi_n^2(x)$ je vysoká a s nejmenší pravděpodobností v místech, kde je tato hodnota malá.

Pokud by platila klasická fyzika, očekávali bychom, že uvězněný elektron bude detegován se stejnou pravděpodobností kdekoli v jámě. Na obr. 40.4 vidíme, že tomu tak není. Jeho podrobnější studium nebo rov. (40.7) ukazují, že ve stavu s $n = 2$ se elektron nachází s největší pravděpodobností kolem bodů $x = 25$ pm a $x = 75$ pm. Na-

opak, elektron se téměř jistě nenachází kolem bodů $x = 0$, $x = 50\,\text{pm}$ a $x = 100\,\text{pm}$.

Hustota pravděpodobnosti pro případ $n = 15$ uvedená na obr. 40.4 však naznačuje, že pro n rostoucí se zvyšuje pravděpodobnost, že elektron najdeme se stejnou pravděpodobností kdekoli v jámě. Tento výsledek je projevem obecného principu, nazývaného **princip korespondence**:

> Pro dostatečně velké hodnoty kvantových čísel se kvantové výsledky blíží výsledkům určeným pomocí klasické mechaniky.

Tento princip poprvé zformuloval dánský fyzik Niels Bohr a platí pro všechny předpovědi kvantové fyziky. Jistě nám připomene podobný princip z teorie relativity — pro dostatečně nízké rychlosti se výsledky speciální teorie relativity blíží výsledkům klasické mechaniky.

KONTROLA 2: Na obrázku jsou tři nekonečně hluboké potenciálové jámy se šířkami L, $2L$ a $3L$; každá obsahuje elektron ve stavu s $n = 10$. Seřaďte jednotlivé jámy sestupně podle (a) počtu maxim v hustotě pravděpodobnosti výskytu elektronu, (b) hodnoty energie elektronu.



Normování

Součin $\psi_n^2(x)\,dx$ udává pravděpodobnost, že se elektron v nekonečně hluboké jámě bude nacházet na ose x mezi body x a $x + dx$. Víme, že elektron někde v jámě být musí, takže musí platit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x)\,dx = 1 \quad \text{(normovací rovnice)}, \quad (40.8)$$

neboť jistotě odpovídá pravděpodobnost rovná jedné. Ačkoli meze integrálu zahrnují celou osu x, přispívá k výpočtu pravděpodobnosti pouze oblast od $x = 0$ do $x = L$. Graficky představuje integrál v rov. (40.8) plochu pod každou z křivek na obr. 40.4.

Při řešení př. 40.3 uvidíme, že po dosazení rov. (40.7) do rov. (40.8) lze přiřadit dosud libovolné konstantě A, která se v rov. (40.7) objevuje, hodnotu $A = \sqrt{2/L}$. Tomuto způsobu výpočtu amplitudy vlnové funkce pomocí normovací podmínky rov. (40.8) se říká **normování** vlnové funkce a týká se *všech* jednorozměrných vlnových funkcí.

Energie základního stavu

V nekonečně hluboké jámě určuje kvantové číslo $n = 1$ v rov. (40.4) stav elektronu s nejnižší energií. Tento stav se nazývá základní. V něm se bude vázaný elektron nacházet do té doby, dokud mu nebude dodána energie, která by mu umožnila přejít do stavu excitovaného.

Proč nemůžeme zahrnout do výčtu možných n v rovnici (40.4) i možnost $n = 0$? Dosazení za $n = 0$ do této rovnice by opravdu vedlo k nulové hodnotě energie základního stavu. Avšak z rov. (40.7) je vidět, že by platilo $\psi_n^2(x)\,dx = 0$ pro všechna x, což bychom mohli interpretovat pouze tak, že v potenciálové jámě žádný elektron není. Protože však elektron v jámě je, nevyhovuje $n = 0$ jako kvantové číslo.

To je velmi důležitý výsledek kvantové mechaniky: vázané systémy nemohou existovat ve stavech s nulovou energií. Mají vždy určitou minimální nenulovou energii nazývanou **energie základního stavu**.

Hodnotu této energie můžeme podle rov. (40.4) libovolně zmenšovat tím, že zvětšíme hodnotu L pro $n = 1$. V limitě $L \to \infty$ se energie základního stavu E_1 blíží opravdu k nule. Pak se ale nekonečně hluboká jáma stává rovněž nekonečně širokou, takže elektron se stává volnou částicí. A poněvadž energie volné částice není kvantována, může nabývat libovolných hodnot, včetně hodnoty nulové. Pouze vázaná částice musí mít energii základního stavu různou od nuly a nemůže být nikdy „v klidu“.

KONTROLA 3: Každá z následujících částic je vázána v nekonečně hluboké jámě: (a) elektron, (b) proton, (c) deuteron a (d) α-částice. Seřaďte sestupně hodnoty jejich energií základního stavu.

PŘÍKLAD 40.3

Použijte rov. (40.8) k určení normovací konstanty A ve vlnové funkci z rovnice (40.6) pro nekonečně hlubokou potenciálovou jámu mezi $x = 0$ a $x = L$.

ŘEŠENÍ: Dosazením rov. (40.7) do rov. (40.8) a po vytknutí konstanty A před integrál obdržíme

$$A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 1. \quad (40.9)$$

Změnili jsme meze integrálu z hodnot $-\infty$ a $+\infty$ na hodnoty 0 a L, poněvadž vlnová funkce nabývá nulových hodnot mimo interval těchto nových integračních mezí (takže není nutno integrovat mimo tyto meze).

Rovnici můžeme dále zjednodušit tím, že přejdeme od proměnné x k bezrozměrové proměnné y vztahem

$$y = \left(\frac{n\pi}{L}\right)x, \quad (40.10)$$

odkud

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{L}{n\pi}\right)\mathrm{d}y.$$

Transformujeme-li proměnnou, musíme rovněž změnit integrační meze. Rov. (40.10) nám říká, že pro $x = 0$ je $y = 0$ a pro $x = L$ je $y = n\pi$. Nové hodnoty integračních mezí jsou tedy 0 a $n\pi$. Po všech těchto substitucích vypadá rov. (40.9) takto:

$$A^2\frac{L}{n\pi}\int_0^{n\pi}\sin^2 y\,\mathrm{d}y = 1.$$

Po integraci dostaneme

$$\frac{A^2L}{n\pi}\left[\frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4}\right]_0^{n\pi} = 1.$$

Dosazením za integrační meze pak obdržíme

$$\frac{A^2L}{n\pi}\frac{n\pi}{2} = 1,$$

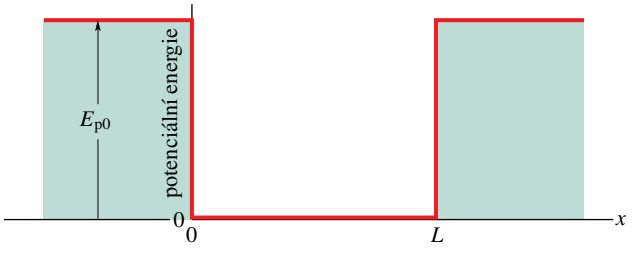
odkud

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (40.11)$$

Tento výsledek nám říká, že A^2, a tedy i $\psi_n^2(x)$, má rozměr převrácené délky. To souhlasí s tím, že hustota pravděpodobnosti je pravděpodobnost *vztažená na jednotku délky.* (Všimněte si, že v tomto případě normovací konstanta nezávisí na n.)

40.4 ELEKTRON V JÁMĚ KONEČNÉ HLOUBKY

Nekonečně hluboká potenciálová jáma je jednoduchá, ale nereálná. Realističtější jáma je znázorněna na obr. 40.5; potenciální energie elektronu mimo oblast jámy není již nekonečně veliká, ale nabývá konečné kladné hodnoty E_{p0}, nazývané **hloubka jámy**. Jednoduchá analogie mezi vlnami na napnuté struně a de Broglieho vlnami v případě takové jámy selhává, neboť si již nemůžeme být jisti tím, že se v bodech $x = 0$ a $x = L$ nacházejí uzly. (A jak v dalším uvidíme, také tam nejsou.)

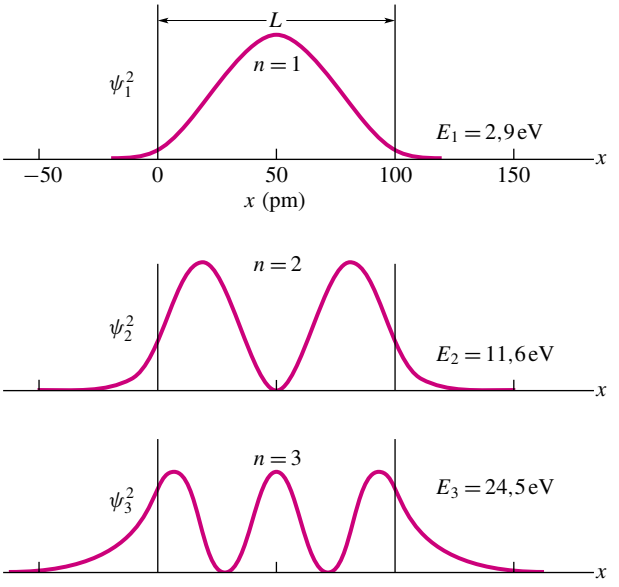


Obr. 40.5 Jáma *konečné* hloubky. Hloubka jámy je E_{p0} a její šířka je L. Podobně jako v případě nekonečně hluboké jámy na obr. 40.2 se elektron pohybuje jen podél osy x.

Abychom našli vlnové funkce popisující stavy elektronu v potenciálové jámě konečné hloubky z obr. 40.5 a příslušné hodnoty energie, musíme sáhnout k základní rovnici kvantové mechaniky — Schrödingerově rovnici. Z čl. 39.7 víme, že pro pohyb v jednom rozměru můžeme Schrödingerovu rovnici napsat ve tvaru (39.15):

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - E_{\mathrm{p}}(x)]\psi = 0. \qquad (40.12)$$

Nebudeme se pouštět do řešení této rovnice, pouze si zde uvedeme řešení pro určité číselné hodnoty E_{p0} a L. V obr. 40.6 jsou vyneseny hodnoty $\psi_n^2(x)$ (hustoty pravděpodobnosti) pro $E_{\mathrm{p0}} = 30\,\mathrm{eV}$ a $L = 100\,\mathrm{pm}$.



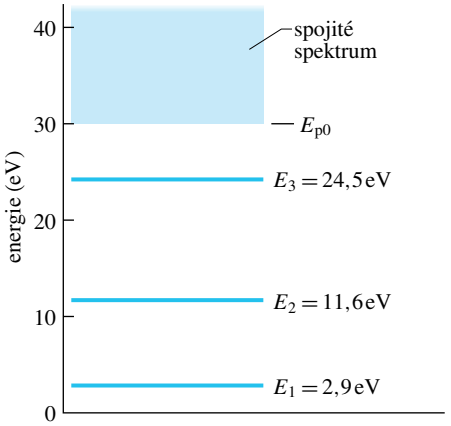
Obr. 40.6 Hustoty pravděpodobnosti $\psi_n^2(x)$ výskytu elektronu uvězněného v potenciálové jámě konečné hloubky z obr. 40.5 pro stavy s $n = 1$, 2 a 3. Hloubka jámy je $E_{\mathrm{p0}} = 30\,\mathrm{eV}$ a její šířka je $L = 100\,\mathrm{pm}$. Jiné vázané stavy pro elektron v této jámě neexistují.

Hustota pravděpodobnosti $\psi_n^2(x)$ pro každou funkci z obr. 40.6 splňuje normovací podmínku (40.8). To znamená, že plochy pod všemi třemi křivkami jsou rovny jedné.

Porovnáním obr. 40.6 (jáma konečné hloubky) s obrázkem 40.4 (nekonečně hluboká jáma) uvidíme jeden nápadný rozdíl: v případě jámy konečné hloubky existuje nenulová pravděpodobnost, že de Broglieho vlna elektronu může proniknout stěnami jámy i do oblasti, ve které se podle newtonovské mechaniky vyskytovat nemůže. Tato možnost by ale neměla být tak překvapivá, protože jsme v čl. 39.9 viděli, že elektron může tunelovat potenciálovou

bariérou. „Prosakování“ stěnami jámy konečné hloubky je jevem podobným.

I když to není z obr. 40.6 zřejmé, existují jenom tři stavy s hodnotami energie menšími, než je hloubka jámy — v našem konkrétním případě se jedná o 30 eV. Elektrony s energií $E > 30\,\text{eV}$ nejsou vázány a jejich energie nejsou kvantované. Na obr. 40.7 jsou znázorněny energiové hladiny elektronu zachyceného v jámě.



Obr. 40.7 Energiové spektrum elektronu vázaného v jámě konečné hloubky 30 eV a šířky 100 pm. Má-li elektron energii menší než 30 eV, může se nacházet pouze v jednom ze tří diskrétních stavů. Stavy s energiemi $E > 30\,\text{eV}$ nejsou kvantované, tvoří spojitou část spektra.

V nekonečně hluboké jámě bylo nekonečně mnoho diskrétních stavů. V jámě konečné hloubky je diskrétních stavů konečný počet, a to tím menší, čím je jáma mělčí. Ve velmi mělké jámě dokonce nemusí existovat ani jeden vázaný stav.

PŘÍKLAD 40.4

Předpokládejme, že v konečně hluboké jámě s $E_{p0} = 30\,\text{eV}$ a $L = 100\,\text{pm}$ je uvězněn elektron v základním stavu.

(a) Elektron se může dostat do vyššího vázaného stavu, ozáříme-li jámu světlem odpovídající vlnové délky. Jakou vlnovou délku musí mít světlo, aby ho elektron absorboval? V jaké oblasti spektra budou ležet tyto vlnové délky (nazývané absorpční spektrální čáry)?

ŘEŠENÍ: Energie předaná elektronu dopadajícím světlem může nabudit elektron z jeho základního stavu $n = 1$ do stavu s $n = 2$, případně $n = 3$. Jiné diskrétní stavy nejsou v této jámě možné. Rozdíl energií (v případě menšího z obou energiových skoků) je $\Delta E = E_2 - E_1$. Tento rozdíl musí být roven energii, kterou elektron získá absorpcí fotonu, tj. energii $hf = hc/\lambda$. Porovnáme-li oba výrazy, obdržíme rovnici

$$E_2 - E_1 = \frac{hc}{\lambda}.$$

Vyjádříme-li odtud λ a dosadíme-li za hodnoty energií z obr. 40.7, získáme

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{(6{,}63\cdot10^{-34}\,\text{J·s})(3{,}00\cdot10^{8}\,\text{m·s}^{-1})}{(11{,}6\,\text{eV} - 2{,}9\,\text{eV})(1{,}60\cdot10^{-19}\,\text{J/eV})} = 1{,}43\cdot10^{-7}\,\text{m} = 143\,\text{nm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato vlnová délka se nachází v ultrafialové oblasti spektra.

Přechod ze základního stavu elektronu do stavu s $n = 3$ vyžaduje získat energii

$$\Delta E = E_3 - E_1 = 24{,}5\,\text{eV} - 2{,}9\,\text{eV} = 21{,}6\,\text{eV}.$$

Podobně jako dříve dostaneme

$$\lambda = 57{,}6\,\text{nm}, \qquad \text{(Odpověď)}$$

což odpovídá opět ultrafialové oblasti spektra.

Pokud je elektron podle předpokladu na počátku v základním stavu, neobjeví se žádné jiné diskrétní spektrální čáry, protože podle obr. 40.7 se elektron v této jámě může nacházet jen v některém z uvedených tří stavů.

(b) Může elektron v základním stavu absorbovat foton o vlnové délce $\lambda = 100\,\text{nm}$?

ŘEŠENÍ: Tato vlnová délka leží mezi vlnovou délkou 143 nm (potřebnou ke skoku na hladinu odpovídající prvnímu excitovanému stavu) a vlnovou délkou 57,6 nm (potřebnou pro druhý excitovaný stav). Absorpce fotonu o vlnové délce 100 nm by vynesla elektron kamsi mezi první a druhou hladinu, ale tam žádný stav není! Proto elektron nemůže absorbovat foton o této vlnové délce (ani žádné jiné z intervalu mezi 57,6 nm a 143 nm).

(c) Jakou vlnovou délku musí mít foton, aby se jeho pohlcením elektron v základním stavu stal volným elektronem?

ŘEŠENÍ: Aby se elektron, původně vázaný v potenciálové jámě, stal volným, musí přejít do spojité oblasti spektra na obr. 40.7. Musí tedy mít alespoň energii $E_{p0} = 30\,\text{eV}$. Podobně jako v případě (a) můžeme psát

$$E_{p0} - E_1 = \frac{hc}{\lambda},$$

odkud odvodíme

$$\lambda = \frac{hc}{E_{p0} - E_1} = \frac{(6{,}63\cdot10^{-34}\,\text{J·s})(3{,}00\cdot10^{8}\,\text{m·s}^{-1})}{(30{,}0\,\text{eV} - 2{,}9\,\text{eV})(1{,}60\cdot10^{-19}\,\text{J/eV})} = 4{,}59\cdot10^{-8}\,\text{m} = 45{,}9\,\text{nm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Může elektron v základním stavu absorbovat foton s vlnovou délkou 20,2 nm? Pokud ano, v jakém stavu se elektron po absorpci bude nacházet?

ŘEŠENÍ: Energie fotonu s touto vlnovou délkou je:

$$hf = h\frac{c}{\lambda} = \frac{(6{,}63\cdot10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s})(3{,}00\cdot10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})}{(20{,}2\cdot10^{-9}\ \mathrm{m})} = \\ = 9{,}847\cdot10^{-18}\ \mathrm{J} = 61{,}5\ \mathrm{eV}, \qquad \text{(Odpověď)}$$

což je více, než je hloubka potenciálové jámy 30 eV. To znamená, že elektron může absorbovat foton o této energii — jeho absorpce umožní elektronu uniknout z jámy. Stane se volnou částicí o kinetické energii

$$E_k = hf - (E_{p0} - E_1) = 61{,}5\ \mathrm{eV} - (30\ \mathrm{eV} - 2{,}9\ \mathrm{eV}) = \\ = 34{,}4\ \mathrm{eV}$$

a jeho stav již nebude kvantovaný.

KONTROLA 4: Na obr. 40.6 jsou znázorněny kvantové stavy elektronu uvězněného v potenciálové jámě konečné hloubky 30 eV. (a) V jakém stavu je elektron, který se s největší pravděpodobností nachází v blízkosti středu jámy? (b) Seřaďte tyto tři kvantové stavy sestupně podle velikosti pravděpodobnosti, že se elektron nachází mimo oblast jámy.

40.5 DALŠÍ ELEKTRONOVÉ PASTI

V této části probereme tři různé typy uměle vytvořených elektronových pastí.

Nanokrystaly

Nejsnadnější způsob, jak v laboratoři vytvořit potenciálovou jámu, je připravit vzorek z polovodičového materiálu ve formě prášku, jehož zrna jsou malá — řádově nanometrová — a mají stejnou velikost. Každé takové zrno, nanokrystal, působí jako potenciálová jáma pro elektrony, které jsou v ní zachycené.

Z rov. (40.4) vyplývá, že nejnižší možnou energii elektronu vázaného v nekonečně hluboké potenciálové jámě můžeme zvýšit zmenšením její šířky L. Toto platí i pro jámy, tvořené jednotlivými nanokrystaly — čím menší je nanokrystal, tím vyšší je prahová energie fotonu, který může být absorbován.

Ozáříme-li prášek složený z nanokrystalů světlem, mohou tyto krystalky pohlcovat všechny fotony o energii vyšší, než je určitá prahová energie $E_t = hf_t$ (angl. threshold – práh). To znamená, že mohou absorbovat světlo vlnových délek *menších* než určitá prahová hodnota λ_t, pro kterou platí

$$\lambda_t = \frac{c}{f_t} = \frac{hc}{E_t}. \qquad (40.13)$$

Nepohlcené světlo bude odraženo, a proto bude náš nanokrystalický práškový vzorek odrážet světlo všech vlnových délek větších než λ_t.

Díváme-li se na vzorek, vidíme světlo od něj odražené. Velikost krystalků tedy určuje vlnovou délku světla odraženého vzorkem, a tedy i barvu vzorku.

Na obr. 40.8 jsou dva vzorky polovodiče — selenidu kademnatého CdSe; v každém vzorku mají nanokrystaly stejné rozměry. Horní vzorek odráží světlo z červené oblasti spektra. Spodní vzorek se od horního liší *pouze* tím, že je složen z menších nanokrystalů. Z tohoto důvodu je jeho prahová energie E_t vyšší a podle rov. (40.13) je jeho prahová vlnová délka λ_t menší. Tento vzorek má tedy barvu odpovídající menším vlnovým délkám — v tomto případě žlutou.

Nápadný barevný kontrast mezi oběma vzorky je přesvědčivým důkazem kvantování energií vázaných elektronů a závislosti těchto energií na velikosti elektronové pasti. Zdůrazněme ještě jednou, že oba vzorky na obr. 40.8 jsou chemicky identické; liší se pouze velikostí zrn nanokrystalů, z nichž jsou složeny.



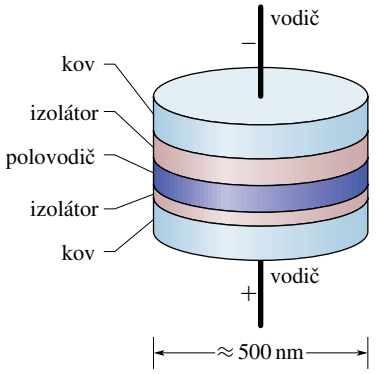
Obr. 40.8 Dva vzorky práškového polovodiče selenidu kademnatého se liší pouze velikostí zrn. Každé zrno se chová jako potenciálová jáma, ve které je vázán elektron. Horní vzorek má zrna větší, takže povolené hladiny energie jsou sobě blíž a prahová energie fotonu, který může být vázaným elektronem absorbován, je menší. Nepohlcené světlo je odráženo, takže se horní vzorek jeví jako červený. Spodní vzorek má zrna menší, povolené hladiny jsou od sebe dál a prahová energie absorbovaného fotonu je vyšší; vzorek se proto jeví jako žlutý.

Kvantové tečky

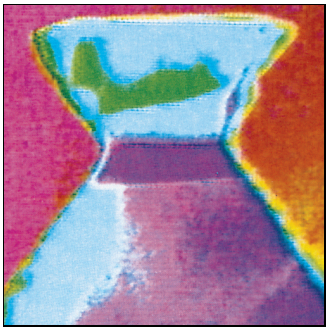
K výrobě potenciálových jam, které se v mnoha ohledech chovají jako umělé atomy, můžeme použít moderní techno-

logie pro výrobu počítačových čipů. Tyto **kvantové tečky**, jak se jim zpravidla říká, mají slibné aplikace v elektronové optice a počítačové technice.

Jedna taková struktura vypadá jako „sendvič“ tvořený vrstvou polovodiče, znázorněnou fialově na obr. 40.9a, deponovanou mezi dvěma nevodivými vrstvami, z nichž jedna je mnohem tenčí než druhá. K oběma koncům jsou připojeny kovové vrstvy s vodivými kontakty. Materiály jsou voleny tak, aby potenciální energie elektronu ve střední části struktury byla nižší než v sousedních dvou nevodivých vrstvách; tak je zajištěno, že střední část se chová jako potenciálová jáma. Obr. 40.9b představuje fotografii skutečné kvantové tečky; jámě, ve které mohou být jednotlivé elektrony vázány, odpovídá oblast fialové barvy.



(*a*)



(*b*)

Obr. 40.9 Kvantová tečka neboli „umělý atom“. (a) Střední polovodivá vrstva tvoří potenciálovou jámu, ve které jsou vázány elektrony. Spodní nevodivá vrstva je dostatečně tenká, aby umožnila elektronům touto vrstvou tunelovat do centrální části, případně ven, v závislosti na přiloženém napětí mezi oběma vodiči. (b) Fotografie skutečné kvantové tečky. Střední fialový pás odpovídá oblasti, ve které jsou vázány elektrony.

Spodní (nikoli však horní) nevodivá vrstva je tak tenká, aby tudy mohly tunelovat elektrony, je-li mezi oběma vodiči odpovídající napětí. Tímto způsobem můžeme řídit počet elektronů, uvězněných v jámě. Toto uspořádání se vskutku chová jako umělý atom, u kterého dokážeme nastavit, kolik obsahuje elektronů. Kvantové tečky můžeme uspořádat do dvojrozměrných struktur, které mohou tvořit základ pro výpočetní systémy o velké rychlosti a kapacitě paměti.

Kvantové hradby

Při měření rastrovacím tunelovým mikroskopem (popsaným v čl. 39.9 na obr. 39.15) působí jeho hrot malou silou na jednotlivé atomy, nacházející se na jinak velmi hladkém povrchu. Přesným ovládáním polohy hrotu mohou být jednotlivé atomy „vláčeny“ po povrchu a umístěny na jiném místě. V Almadenském výzkumném středisku IBM užitím této techniky posunovali atomy železa po pečlivě připraveném povrchu tvořeném atomy mědi tak, že atomy železa vytvořily kruh, který pojmenovali **kvantová hradba**. Výsledek je znázorněn na fotografii na začátku této kapitoly. Každý atom železa je umístěn do důlku mezi třemi atomy mědi. Hradba byla vytvořena za nízké teploty (okolo 4 K), aby se atomy železa nemohly náhodně pohybovat po povrchu díky tepelné energii.

Vlnky uvnitř hradby jsou způsobeny de Broglieho vlnami elektronů, které se mohou pohybovat podél měděného povrchu, ale jsou zachyceny v potenciálové jámě, tvořené hradbou. Rozměry vlnek jsou ve výborné shodě s výsledky získanými v rámci kvantové teorie.

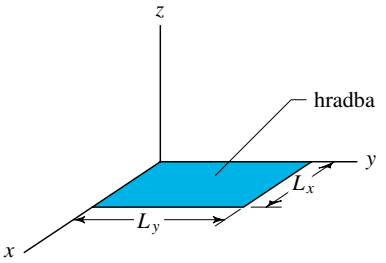
40.6 ELEKTRONOVÉ PASTI VE DVOU A TŘECH ROZMĚRECH

V příštím článku se budeme zabývat atomem vodíku, který pro elektron představuje trojrozměrnou potenciálovou jámu. Abychom se trochu připravili, rozšíříme naši diskusi o nekonečných jámách do dvou, případně tří rozměrů.

Pravoúhlá kvantová hradba

Na obr. 40.10 je znázorněna pravoúhlá plocha, na níž můžeme zachytit elektron v dvojrozměrné verzi jámy z obr. 40.2, dvojrozměrná nekonečně hluboká potenciálová jáma o rozměrech L_x a L_y. Takovou jámu nazýváme *pravoúhlá kvantová hradba*. Tato hradba může být na povrchu tělesa, který zabraňuje pohybu elektronu ve směru osy z, a ten pak nemůže tento povrch opustit. Musíme si představit, že funkce popisující potenciální energii (obdobně jako $E_p(x)$ v obr. 40.2) nabývá nekonečných hodnot podél každé ze stran hradby a zachycuje tak elektron uvnitř hradby.

Řešení Schrödingerovy rovnice pro kvantovou hradbu na obr. 40.10 ukazuje, že pokud má být elektron uvnitř hradby zachycen, musí být jeho vlnová funkce přizpůsobena každé z obou šířek zvlášť, a to stejně jako v případě



Obr. 40.10 Pravoúhlá kvantová hradba o rozměrech L_x a L_y je dvojrozměrnou verzí jednorozměrné jámy z obr. 40.2.

de Broglieho vlny elektronu zachyceného v jednorozměrné jámě. To znamená, že musíme uvažovat kvantování nezávisle jak vzhledem k šířce L_x, tak vzhledem k šířce L_y. Nechť n_x je kvantové číslo, které popisuje de Broglieho vlnu elektronu odpovídající šířce L_x a n_y kvantové číslo popisující de Broglieho vlnovu elektronu odpovídající šířce L_y. Stejně jako v případě jednorozměrné potenciálové jámy mohou být kvantová čísla pouze kladná celá čísla.

Energie elektronu závisí na obou kvantových číslech a je rovna součtu energie, kterou by elektron měl, kdyby byl zachycen pouze ve směru osy x, a energie, kterou by měl, kdyby byl zachycen pouze ve směru osy y. Pomocí rov. (40.4) lze tento součet napsat ve tvaru

$$E_{n_x,n_y} = \left(\frac{h^2}{8mL_x^2}\right) n_x^2 + \left(\frac{h^2}{8mL_y^2}\right) n_y^2 = \\ = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right). \qquad (40.14)$$

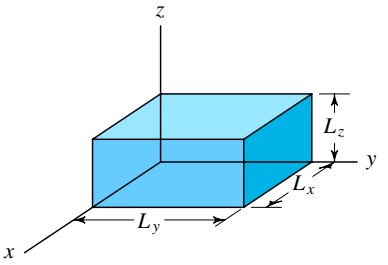
Excitace elektronu absorpcí fotonu a deexcitace elektronu emisí fotonu se řídí stejnými požadavky jako v případě jednorozměrné jámy. Jediný významný rozdíl pro dvojrozměrnou hradbu spočívá v tom, že energie daného kvantového stavu závisí na dvou kvantových číslech (n_x a n_y) místo pouze jediného (n). Obecně mají různé stavy (s různými dvojicemi hodnot n_x a n_y) různé energie. Může ale nastat situace (např. pro $L_x = L_y$), kdy různé stavy mají stejnou energii. Tyto stavy (a jejich energiové hladiny) pak nazýváme *degenerované*. Degenerované stavy se nemohou vyskytovat v jednorozměrné jámě.

Pravoúhlá krabice

Elektron může být rovněž zachycen ve trojrozměrné nekonečně hluboké potenciálové jámě — v *krabici.* Pokud je krabice pravoúhlá, jako je tomu v případě znázorněném na obr. 40.11, pak řešení Schrödingerovy rovnice dává energii elektronu ve tvaru

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right), \qquad (40.15)$$

kde n_z představuje třetí kvantové číslo de Broglieho vlny odpovídající šířce L_z.



Obr. 40.11 Pravoúhlá krabice o rozměrech L_x, L_y a L_z je trojrozměrnou verzí jednorozměrné jámy z obr. 40.2.

KONTROLA 5: Použijeme-li stejné značení jako v rovnici (40.14), odpovídají energie $E_{0,0}$, $E_{1,0}$, $E_{0,1}$ a $E_{1,1}$ energii základního stavu elektronu v pravoúhlé hradbě?

PŘÍKLAD 40.5

Elektron je zachycen ve čtvercové dvojrozměrné nekonečně hluboké potenciálové jámě (hradba z obr. 40.10) o rozměrech $L_x = L_y$.

(a) Určete hodnoty energie pěti nejnižších energiových hladin elektronu a sestrojte energiový diagram.

ŘEŠENÍ: Základní myšlenka řešení spočívá v tom, že energie elektronu uvězněného ve dvojrozměrné pravoúhlé jámě závisí na dvou kvantových číslech n_x a n_y podle rov. (40.14). Poněvadž jáma je čtvercová, položíme $L_x = L_y = L$. Pak se rov. (40.14) zjednoduší na tvar

$$E_{n_x,n_y} = \frac{h^2}{8mL^2}(n_x^2 + n_y^2), \qquad (40.16)$$

kde n_x a n_y jsou přirozená čísla 1, 2, ... Stavy s nejnižší energií odpovídají stavům s nejmenšími hodnotami kvantových čísel. Dosadíme-li za n_x a n_y do rov. (40.16) od nejnižší možné hodnoty 1, získáme hodnoty uvedené v tab. 40.1.

Tabulka 40.1 **Energiové hladiny**

n_x	n_y	ENERGIE[a]	n_x	n_y	ENERGIE[a]
1	3	10	2	4	20
3	1	10	4	2	20
2	2	8	3	3	18
1	2	5	1	4	17
2	1	5	4	1	17
1	1	2	2	3	13
			3	2	13

[a] v násobcích $h^2/(8mL^2)$

Z nich je zřejmé, že některé dvojice kvantových čísel (n_x, n_y) odpovídají stejné energii. Například stavy (1, 2) a (2, 1) mají

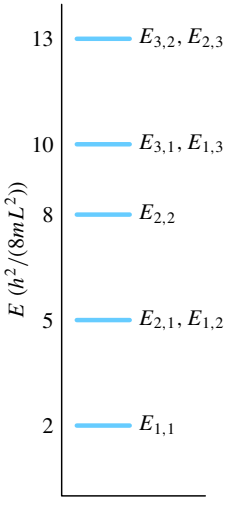
stejnou energii $5h^2/(8mL^2)$. Každá taková dvojice odpovídá degenerované energiové hladině. Povšimněme si rovněž, že stavy (1, 4) a (4, 1) mají poněkud překvapivě menší energii než stav (3, 3).

Z tab. 40.1 při započtení degenerovaných hladin energie můžeme vytvořit energiový diagram z obr. 40.12.

(b) Vyjádřete energiový rozdíl mezi základním stavem a třetím excitovaným stavem (v násobcích $h^2/(8mL^2)$).

ŘEŠENÍ: Z obr. 40.12 vyplývá, že základní stav je popsán dvojicí kvantových čísel (1, 1) a odpovídá energii $2h^2/(8mL^2)$. Vyplývá z něj i to, že třetí excitovaný stav (třetí hladina nad základní hladinou v energiovém diagramu) odpovídá stavům s (1, 3) a (3, 1) s energií $10h^2/(8mL^2)$. Energiový rozdíl ΔE mezi těmito dvěma stavy je tedy roven

$$\Delta E = 10\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) - 2\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) = \\ = 8\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right). \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 40.12 Příklad 40.5. Energiový diagram.

40.7 ATOM VODÍKU

Přejděme nyní od umělých atomů k reálným; jako příklad použijeme nejjednodušší atom — atom vodíku. Tento atom se skládá z jednoho elektronu (náboj $-e$) vázaného k jádru tvořenému jedním protonem (náboj $+e$); mezi nimi působí přitažlivá Coulombova síla. Atom vodíku je, jako ostatně všechny atomy, elektronovou pastí; váže svůj elektron na určitou oblast prostoru. Z omezovacího principu pak vyplývá, že elektron v atomu může existovat pouze v jednom z diskrétních kvantových stavů; každý stav má dobře definovanou energii. Chceme určit tyto energie a vlnové funkce těchto stavů.

Energie kvantových stavů atomu vodíku

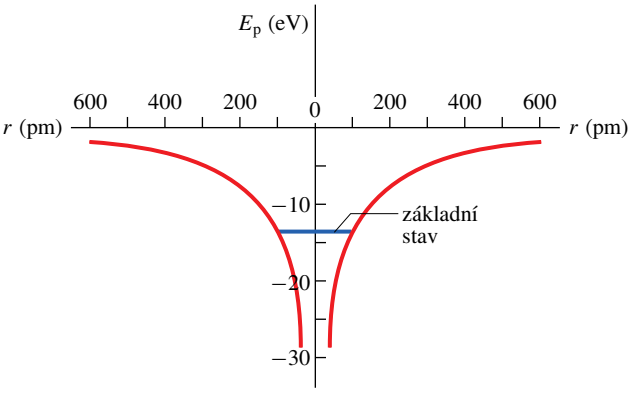
V kap. 25 jsme odvodili rov. (25.43) pro potenciální energii dvoučásticového systému, složeného ze dvou nábojů Q_1 a Q_2:

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r},$$

kde r je vzdálenost mezi oběma částicemi. Pro dvoučásticový systém, vodíkový atom, vyjádříme potenciální energii ve tvaru

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(e)(-e)}{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}. \qquad (40.17)$$

Obr. 40.13 naznačuje trojrozměrnou potenciálovou jámu, ve které je zachycen elektron atomu vodíku. Tato jáma se od jámy konečné hloubky (obr. 40.5) liší tím, že pro atom vodíku je E_p záporné pro všechny hodnoty r proto, že jsme si zvolili nulovou hladinu potenciální energie elektronu pro $r \to \infty$. Pro jámu konečné hloubky na obr. 40.5 jsme však zvolili (stejně libovolně), že nulovou hodnotu potenciální energie přiřadíme oblasti uvnitř jámy.



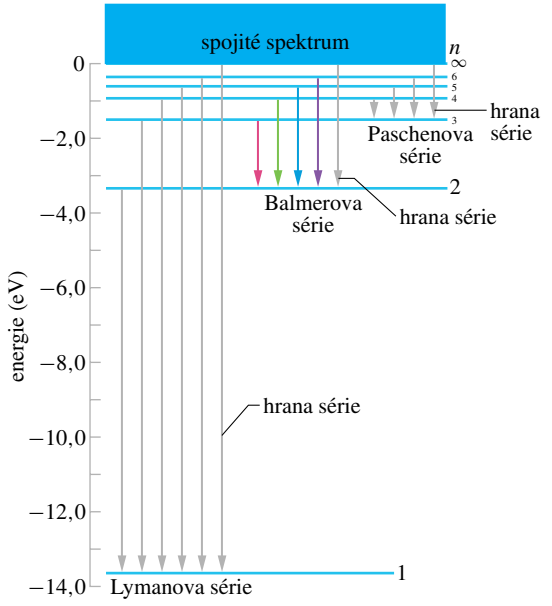
Obr. 40.13 Závislost potenciální energie E_p atomu vodíku na vzdálenosti r mezi elektronem a jádrem umístěným v počátku souřadnic. Závislost je vynesena napravo i nalevo, aby byla naznačena trojrozměrná sféricky symetrická jáma, ve které je elektron „uvězněn“.

Abychom našli vlnové funkce a energie kvantových stavů vodíkového atomu, musíme řešit Schrödingerovu rovnici, do které dosadíme za E_p z rov. (40.17). Protože se však elektron v atomu vodíku nachází v trojrozměrném poli, musíme použít trojrozměrný tvar Schrödingerovy rovnice.

Řešením této rovnice najdeme, že energie kvantových stavů elektronu jsou dány vztahem

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{13{,}6\,\text{eV}}{n^2} \\ \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (40.18)$$

kde n je kvantové číslo a m je hmotnost elektronu. Nejnižší energie odpovídá základnímu stavu s $n = 1$ a je znázorněna na obr. 40.13. Obr. 40.14 ukazuje energiové hladiny základního a pěti excitovaných stavů, určených odpovídajícími kvantovými čísly n. Je na něm znázorněna rovněž energiová hladina pro nejvyšší možnou hodnotu $n = \infty$, pro niž je $E_n = 0$. Pro jakoukoli větší energii již není elektron vázán k protonu (netvoří již spolu atom) a odpovídající oblast energií v obr. 40.14 je stejně jako u potenciálové jámy konečné hloubky na obr. 40.7 oblastí spojitých (nekvantovaných) energií.



Obr. 40.14 Energiové hladiny atomu vodíku (rov. (40.18)) a přechody z vyšších do nižších energiových hladin, při kterých atom emituje světlo. Přechody jsou sdruženy do sérií, které jsou pojmenovány po vědci, který se studiem příslušné série zabýval.

Kvantované hodnoty energií dané rov. (40.18) jsou také energiemi vodíkového atomu, tj. systému *elektron+proton.* Zpravidla ale přisuzujeme tuto energii pouze elektronu samému, poněvadž jeho hmotnost je daleko menší, než hmotnost protonu. (Obdobně můžeme přiřadit energii systému *míč + Země* pouze samotnému míči.) Můžeme tedy říci, že pokud je elektron vázán v atomu vodíku, mohou energie tohoto *elektronu* nabývat hodnot daných rov. (40.18).

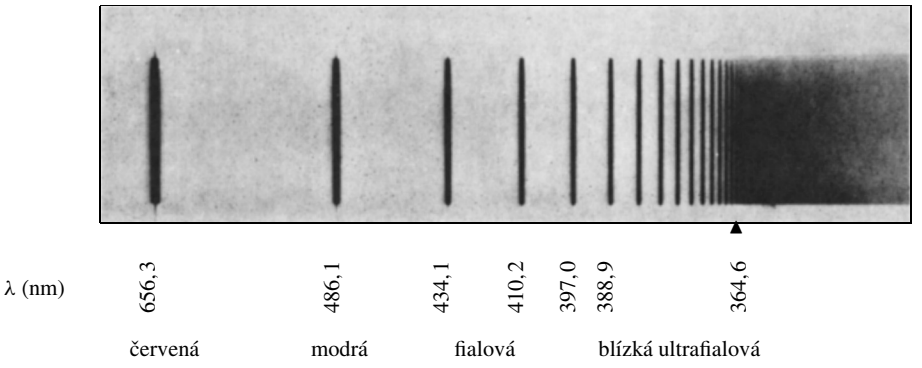
Jak jsme již viděli u elektronu v jiných potenciálových jámách, i elektron v atomu vodíku má tendenci být na nejnižší hladině energie — to znamená v základním stavu. Získá-li však odpovídající množství energie, může přeskočit do stavu excitovaného. Jednou z možností, jak může elektron získat energii k přechodu na vyšší energiové hladiny, je absorpce fotonu. Energie hf fotonu pak musí být rovna rozdílu energií mezi počáteční a koncovou hladinou energie elektronu. Jakmile je elektron „excitován" na vyšší energiovou hladinu, nezůstává na ní, ale rychle přejde na nižší energiovou hladinu — je „deexcitován". Jednou z možností, jak může elektron snížit svou energii, je vyzáření fotonu. V tomto případě bude energie fotonu hf rovna rozdílu energií mezi počáteční vyšší hladinou a koncovou nižší hladinou energie.

Všechny možné kvantové skoky řadíme do *sérií*. Každou z těchto sérií určuje specifická hladina, z níž vycházejí přechody na vyšší úrovně energií, nebo na které končí přechody z hladin vyšších. Na obr. 40.14 jsou znázorněny možné přechody z vyšších energiových hladin pro tři série. Například absorpční a emisní čáry pro všechny možné přechody, které začínají na hladině s $n = 1$ nebo na hladině s $n = 1$ končí, tvoří *Lymanovu sérii*. Každá série je rovněž omezena tzv. *hranou série*, odpovídající přechodu mezi specifickou hladinou série a hladinou s $n = \infty$. Jedná se o největší možný skok mezi kvantovanými energiovými hladinami a odpovídá největší možné změně energie atomu pro danou hladinu energie.

Na obr. 40.15 je spektrografem pořízené spektrum emisních čar *Balmerovy série* atomu vodíku. (Spektrální čáry jsou podobné jako v obr. 37.23 a 37.24.) Balmerova série, již určuje specifická hladina s $n = 2$, má čtyři spektrální čáry ve viditelné oblasti spektra, jak je vyznačeno na obr. 40.15 a rovněž barevně na obr. 40.14. Malý trojúhelník u hodnoty $\lambda = 364{,}6\,\text{nm}$ na obr. 40.15 vyznačuje hranu série.

Bohrova teorie atomu vodíku

V roce 1913, necelých 13 let před formulací Schrödingerovy rovnice, navrhl Bohr model atomu vodíku, založený na důmyslné kombinaci klasické a raně kvantové koncepce. Jeho základní předpoklad — atomy se nacházejí v diskrétních kvantových stavech s odpovídajícími diskrétními hodnotami energie — byl odvážným porušením klasických představ; až do dnešních dní představuje jeden z nepostradatelných pilířů moderní kvantové fyziky. Tímto předpokladem Bohr dovedně využil principu korespondence (čl. 40.3) nejen k odvození rov. (40.18) pro energie kvantových stavů atomu vodíku, ale také k vyjádření číselné hodnoty efektivního poloměru tohoto atomu (tzv. *Bohrův poloměr*). I přes nesporné úspěchy byl Bohrův model atomu vodíku, založený na představě, že elektron obíhá kolem jádra po orbitách (připomínajících pohyb planet kolem Slunce), v rozporu s principem neurčitosti a byl později nahrazen moderním pravděpodobnostním modelem. Za své vynikající úspěchy v poznávání atomové struktury, které výrazně stimulovaly vývoj fyziky směrem k mo-



Obr. 40.15 Spektrální čáry Balmerovy série atomu vodíku. Zatímco v obr. 40.14 jsou znázorněny čtyři přechody v rámci této série spolu s hranou série, zde je vidět asi tucet čar série; povšimněte si, že spektrální čáry jsou si tím bližší, čím více se blíží k hraně série, označené trojúhelníkem.

derní kvantové teorii, získal Bohr v roce 1922 Nobelovu cenu.

Kvantová čísla atomu vodíku

Ačkoli energie odpovídající kvantovým stavům atomu vodíku může být charakterizována jediným kvantovým číslem n, jsou vlnové funkce popisující tyto stavy určeny třemi kvantovými čísly, která odpovídají pohybu elektronu v trojrozměrném prostoru. Tato tři kvantová čísla, současně s jejich názvy a možnými hodnotami, jsou uvedena v tab. 40.2.

Tabulka 40.2 **Kvantová čísla atomu vodíku**

SYMBOL	NÁZEV	POVOLENÉ HODNOTY
n	hlavní kvantové číslo	$1, 2, 3, \ldots$
l	orbitální kvantové číslo	$0, 1, 2, \ldots, n-1$
m_l	orbitální magnetické kvantové číslo	$-l, -(l-1), \ldots, +(l-1), +l$

Každý soubor kvantových čísel (n, l, m_l) určuje vlnovou funkci kvantového stavu. Kvantové číslo n, nazývané **hlavní kvantové číslo**, se objevuje v rov. (40.18) pro energii stavu. Uvedeme bez dalšího důkazu, že **orbitální kvantové číslo** l (dříve též zvané **vedlejší**) určuje velikost momentu hybnosti příslušného kvantového stavu. **Magnetické kvantové číslo** m_l (někdy pro zdůraznění zvané orbitální magnetické kvantové číslo) souvisí s orientací vektoru momentu hybnosti v prostoru. Omezení kladená na výběr hodnot kvantových čísel (uvedená v tab. 40.2), nejsou zvolena libovolně, nýbrž přirozeně vyplynou při řešení Schrödingerovy rovnice. Pro základní stav $n = 1$ tato omezení vyžadují, aby $l = 0$ a $m_l = 0$. To znamená, že atom vodíku v základním stavu má nulový moment hybnosti.

KONTROLA 6: Uvažujme kvantové stavy atomu vodíku pro $n = 5$. (a) Kolika hodnot může nabývat orbitální kvantové číslo l? (b) Je-li $n = 5$ a $l = 3$, kolika možných hodnot může nabývat magnetické kvantové číslo m_l?

Vlnová funkce základního stavu atomu vodíku

Normovaná vlnová funkce základního stavu atomu vodíku, získaná řešením trojrozměrné Schrödingerovy rovnice, má tvar

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}} e^{-r/a}, \qquad (40.19)$$

kde a je konstanta, tzv. *Bohrův poloměr*, s rozměrem *délky*; může sloužit jako „efektivní“ poloměr atomu vodíku. Ukazuje se, že je rovněž vhodnou jednotkou délky i v jiných případech ve světě atomů. Jeho hodnota je

$$a = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2} = 5{,}29\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m} = 52{,}9\ \mathrm{pm}. \qquad (40.20)$$

Podobně jako je tomu i u ostatních vlnových funkcí, nemá funkce $\psi(r)$ v rov. (40.19) zřejmý fyzikální význam; funkce $\psi^2(r)$ jej již má. Výraz $\psi^2(r)\,\mathrm{d}V$ odpovídá pravděpodobnosti, že se elektron bude nacházet v daném infinitezimálním objemovém elementu $\mathrm{d}V$. Poněvadž $\psi^2(r)$ závisí pouze na r, má smysl zvolit za element $\mathrm{d}V$ objem mezi dvěma soustřednými kulovými plochami, jejichž poloměry jsou r a $r + \mathrm{d}r$. Objemový element lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathrm{d}V = (4\pi r^2)\,\mathrm{d}r, \qquad (40.21)$$

kde $4\pi r^2$ je obsah vnitřní kulové plochy a $\mathrm{d}r$ je radiální vzdálenost mezi oběma plochami. Pak

$$\psi^2(r)\,\mathrm{d}V = \frac{4}{a^3} e^{-2r/a} r^2\,\mathrm{d}r. \qquad (40.22)$$

Nyní definujme **radiální hustotu pravděpodobnosti** $P(r)$ tak, aby výraz $P(r)\,\mathrm{d}r$ udával pravděpodobnost, že se elektron nachází v objemovém elementu, definovaném rov. (40.21). Jinými slovy, definujeme $P(r)$ tak, aby $P(r)\,\mathrm{d}r = \psi^2(r)\,\mathrm{d}V$. Pak z rov. (40.22) dostaneme

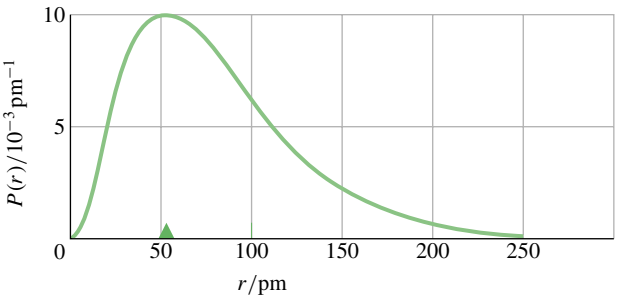
$$P(r) = \frac{4}{a^3} r^2 e^{-2r/a} \quad \text{(radiální hustota pravděpodobnosti pro základní stav atomu vodíku).} \qquad (40.23)$$

Obr. 40.16 ukazuje závislost danou rov. (40.23). Plocha pod křivkou je jednotková, tedy

$$\int_0^{+\infty} P(r)\,\mathrm{d}r = 1. \qquad (40.24)$$

Tato rovnice jednoduše vyjadřuje fakt, že ve vodíkovém atomu se elektron *někde* v prostoru kolem jádra nacházet *musí*.

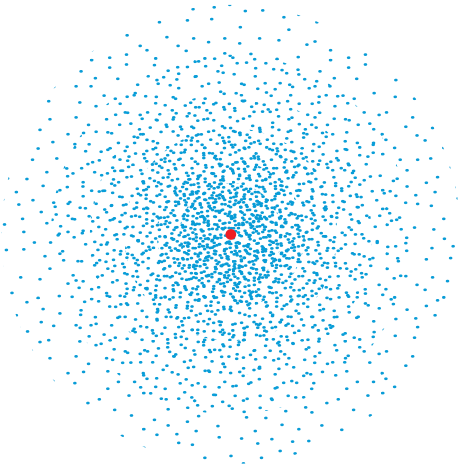
Trojúhelníková značka na vodorovné ose v obr. 40.16 je umístěna ve vzdálenosti jednoho Bohrova poloměru od počátku. Graf ukazuje, že v základním stavu atomu vodíku se elektron nachází s největší pravděpodobností ve vzdálenosti (od středu atomu) odpovídající Bohrově poloměru.



Obr. 40.16 Závislost radiální hustoty pravděpodobnosti $P(r)$ základního stavu atomu vodíku na vzdálenosti r od jádra. Trojúhelníková značka je umístěna ve vzdálenosti jednoho Bohrova poloměru od počátku, který odpovídá středu atomu.

Obr. 40.16 je v ostrém rozporu s populární představou elektronů obíhajících v atomech po definovaných drahách obdobně, jako tomu je v případě planet obíhajících kolem Slunce. *Tento rozšířený názor, jakkoli důvěrně známý, je nesprávný*. Obr. 40.16 ukazuje všechno, co se můžeme dozvědět o elektronu v základním stavu atomu vodíku. Přiměřená otázka nezní „Kdy se bude nacházet elektron v tom a v tom bodě?“, ale „Jaká je pravděpodobnost, že se elektron bude nacházet v malém objemu kolem tohoto bodu?“. Obr. 40.17, nazývaný též *bodový graf*, naznačuje pravděpodobnostní povahu vlnové funkce a poskytuje užitečný myšlenkový model atomu vodíku v základním stavu. Atom v tomto stavu lze pokládat za rozmazanou kouli bez ostře definované hranice a bez náznaku orbit.

Pro začátečníka není vůbec jednoduché přestavit si subatomární částice tímto pravděpodobnostním způsobem. Problém spočívá v našem přirozeném nutkání vidět elektron jako nějakou malinkou kuličku, nacházející se v určitém místě v určitý čas a pohybující se po dobře definované dráze. Jenomže elektrony a ostatní subatomární částice prostě takové *nejsou*.



Obr. 40.17 „Bodový graf“ znázorňující hustotu pravděpodobnosti $\psi^2(r)$ — nikoli *radiální* hustotu pravděpodobnosti $P(r)$ — základního stavu atomu vodíku. Hustota teček klesá exponenciálně se zvyšující se vzdáleností od jádra. Takovýto bodový graf poskytuje myšlenkový obraz „elektronového oblaku“ atomu.

Energie základního stavu, získaná po dosazení $n = 1$ do rov. (40.18), je $E_1 = -13{,}6\,\mathrm{eV}$. Vlnovou funkci danou rov. (40.19) získáme řešením Schrödingerovy rovnice pro tuto hodnotu energie. Ve skutečnosti můžeme tuto rovnici vyřešit pro *jakoukoli* hodnotu energie, řekněme $E = -11{,}6\,\mathrm{eV}$ nebo $-14{,}3\,\mathrm{eV}$. To by mohlo naznačovat, že stavy atomu vodíku nejsou kvantované. My ale víme, že kvantované jsou.

Záhada se vyjasní, uvědomíme-li si, že taková řešení Schrödingerovy rovnice nejsou fyzikálně přijatelná – rostou do nekonečna pro $r \to \infty$. Pravděpodobnost výskytu elektronu by tedy také pro $r \to \infty$ prudce rostla, a to nedává smysl. Těchto nežádoucích řešení se zbavíme zavedením vhodné *okrajové podmínky* — budeme požadovat, aby fyzikálně přijatelná řešení Schrödingerovy rovnice splňovala podmínku $\psi(r) \to 0$ pro $r \to \infty$. Jinými slovy, chceme se zabývat pouze *vázanými* elektrony. Toto omezení vybere ze všech možných řešení Schrödingerovy rovnice pouze některá; jejich energie jsou dány rov. (40.18).

PŘÍKLAD 40.6

(a) Jaká je vlnová délka fotonu s nejmenší možnou energií, emitovaného v rámci přechodů uvnitř Lymanovy série pro spektrální čáry atomu vodíku?

ŘEŠENÍ: Pro všechny série platí, že přechodu, jehož důsledkem je emise (absorpce) fotonu s nejmenší možnou energií, odpovídá přechod mezi specifickou energiovou hladinou série a hladinou, nacházející se těsně nad ní. Z obr. 40.14 je patrno, že pro Lymanovu sérii tomuto přechodu odpovídá přechod z hladiny s $n = 2$ na hladinu s $n = 1$. Z rov. (40.18)

je odpovídající hodnota rozdílu energií rovna

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \\ = -(13{,}6\,\mathrm{eV})\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right) = \\ = 10{,}2\,\mathrm{eV}.$$

Odpovídající vlnovou délku lze získat z rov. (39.2) $E = hf$ ve tvaru

$$\Delta E = hf = \frac{hc}{\lambda},$$

kde hf je energie emitovaného fotonu. Řešením této rovnice pro neznámou λ dostáváme

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{(6{,}63\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})(3{,}00\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})}{(10{,}2\,\mathrm{eV})(1{,}60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J/eV})} = \\ = 1{,}22\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 122\,\mathrm{nm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Světlo s touto vlnovou délkou se nachází v ultrafialové oblasti elektromagnetického spektra.

(b) Jaká vlnová délka odpovídá hraně Lymanovy série?

ŘEŠENÍ: Z obr. 40.14 je patrno, že hraně série odpovídá přechod z hladiny s $n = \infty$ na hladinu s $n = 1$, což je specifická hladina energie pro tuto sérii. Podle rov. (40.18) je pak energiový rozdíl odpovídající tomuto přechodu roven

$$\Delta E = E_\infty - E_1 = \\ = -(13{,}6\,\mathrm{eV})\left(\frac{1}{\infty^2} - \frac{1}{1^2}\right) = \\ = -(13{,}6\,\mathrm{eV})(0-1) = 13{,}6\,\mathrm{eV}.$$

Odpovídající vlnovou délku lze určit podobně jako v (a):

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{(6{,}63\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})(3{,}00\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})}{(13{,}6\,\mathrm{eV})(1{,}60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J/eV})} = \\ = 9{,}14\cdot 10^{-8}\,\mathrm{m} = 91{,}4\,\mathrm{nm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Světlo s touto vlnovou délkou se rovněž nachází v ultrafialové oblasti elektromagnetického spektra.

PŘÍKLAD 40.7

Ukažte, že radiální hustota pravděpodobnosti základního stavu atomu vodíku dosahuje svého maxima pro $r = a$.

ŘEŠENÍ: Požadovaná radiální hustota pravděpodobnosti je podle rov. (40.23)

$$P(r) = \frac{4}{a^3} r^2 \mathrm{e}^{-2r/a}.$$

Abychom nalezli maximum funkce, musíme ji zderivovat a položit tuto její první derivaci rovnu nule. Použijeme-li pravidla pro derivaci součinu funkcí, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = \frac{4}{a^3} r^2 \left(\frac{-2}{a}\right)\mathrm{e}^{-2r/a} + \frac{4}{a^3} 2r\mathrm{e}^{-2r/a} = \\ = \frac{8r}{a^3}\mathrm{e}^{-2r/a} - \frac{8r^2}{a^4}\mathrm{e}^{-2r/a} = \\ = \frac{8}{a^4} r(a-r)\mathrm{e}^{-2r/a}.$$

Položíme-li pravou stranu rovnu nule, je výsledná rovnice splněna pro $r = a$. Jinými slovy, pro $r = a$ je $\mathrm{d}P/\mathrm{d}r = 0$. (Všimněte si, že $\mathrm{d}P/\mathrm{d}r$ je rovno nule i pro $r = 0$ a $r = \infty$. Avšak tyto podmínky odpovídají *minimu*, nikoli námi požadovanému maximu, jak lze snadno zjistit z obr. 40.16.)

PŘÍKLAD 40.8

Pravděpodobnost, že se elektron v základním stavu atomu vodíku bude nalézat uvnitř kulové plochy o poloměru r, je rovna

$$p(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2x}(1 + 2x + 2x^2),$$

kde x je bezrozměrová veličina rovná podílu r/a. Najděte r pro $p(x) = 0{,}90$.

ŘEŠENÍ: Hledáme poloměr koule, pro kterou $p(x) = 0{,}90$. Dosadíme-li tuto hodnotu do vztahu pro $p(x)$, obdržíme

$$0{,}90 = 1 - \mathrm{e}^{-2x}(1 + 2x + 2x^2)$$

neboli

$$10\mathrm{e}^{-2x}(1 + 2x + 2x^2) = 1.$$

Musíme tedy určit hodnotu x, splňující tuto rovnici. Není možné ji vyřešit explicitně, ale po několika pokusech na kapesní kalkulačce (nebo si můžete napsat krátký program) lze obdržet hodnotu $x \doteq 2{,}67$. To tedy znamená, že poloměr koule, ve které se elektron bude 90 % svého času nacházet, je $r = xa \doteq 2{,}67a$. Vyznačte tuto hodnotu na vodorovnou osu na obr. 40.16 a sami si odpovězte, zda je to hodnota rozumná.

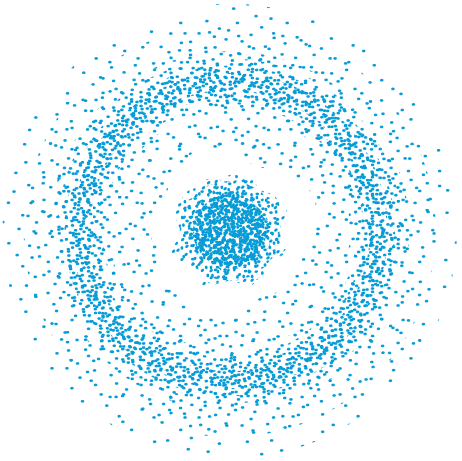
Stavy atomu vodíku s $n = 2$

Podle pravidel uvedených v tab. 40.2 existují čtyři kvantové stavy atomu vodíku s $n = 2$; jejich kvantová čísla jsou vypsána v tab. 40.3. Předpokládejme nejprve stav s $n = 2$ a $l = m_l = 0$; jeho hustota pravděpodobnosti je znázorněna bodovým grafem na obr. 40.18. Všimněte si, že tento graf, podobně jako graf základního stavu v obr. 40.17, je sféricky symetrický. To znamená, že hustota pravděpodobnosti je pouze funkcí radiální souřadnice r a nezávisí na úhlových proměnných θ a φ z obr. 40.19.

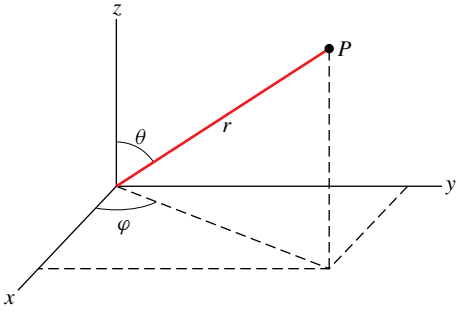
Tabulka 40.3 **Kvantová čísla stavů vodíkového atomu s $n = 2$**

n	l	m_l
2	0	0
2	1	+1
2	1	0
2	1	−1

Ukazuje se, že všechny stavy s $l = 0$ mají sféricky symetrické vlnové funkce. To je pochopitelné, neboť kvantové číslo l je mírou momentu hybnosti daného stavu. Je-li $l = 0$, je moment hybnosti rovněž nulový, což vyžaduje, aby hustota pravděpodobnosti neměla žádný privilegovaný směr symetrie.



Obr. 40.18 Bodový graf znázorňující hustotu pravděpodobnosti $\psi^2(r)$ výskytu elektronu v atomu vodíku, který je ve stavu s $n = 2$, $l = 0$ a $m_l = 0$. Graf je sféricky symetrický kolem jádra, které se nachází ve středu atomu. Pokles hustoty teček odpovídá místům na povrchu koule, na kterých je $\psi^2(r) = 0$.

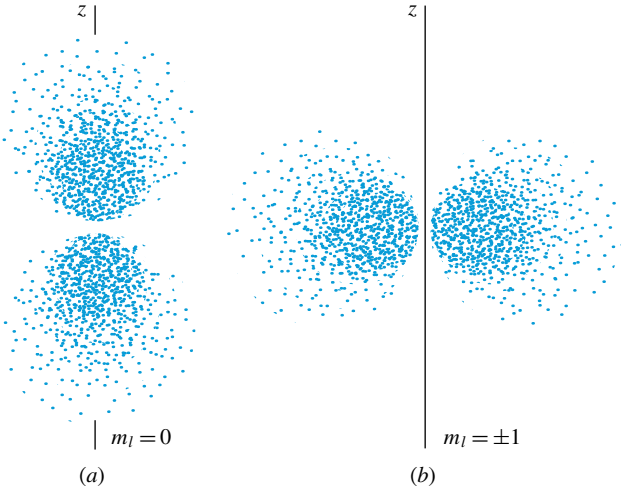


Obr. 40.19 Znázornění vzájemného vztahu kartézských souřadnic (x, y, z) a souřadnic sférických (r, θ, φ). Sférické souřadnice jsou obzvlášť vhodné k popisu sféricky symetrických problémů, jako je např. atom vodíku.

Bodový graf funkce $\psi^2(r)$ odpovídající stavům s $n = 2$ a $l = 1$ je zobrazen na obr. 40.20. Stavy s $m_l = +1$ a $m_l = -1$ jsou shodné. Ačkoli jsou tyto grafy symetrické vzhledem k ose z, *nejsou* sféricky symetrické. To znamená, že hustoty pravděpodobností těchto tří stavů jsou závislé jak na r, tak na úhlové proměnné θ.

Je tu jedna záhada: Co u atomu vodíku určuje osu symetrie tak, jak je patrno z obr. 40.20? Odpověď zní: *Vůbec nic*.

Na řešení této hádanky přijdeme, uvědomíme-li si, že všechny tři stavy, zobrazené na obr. 40.20, mají stejnou energii. Vzpomeňme si, že energie kvantového stavu daná rov. (40.18) závisí pouze na hlavním kvantovém čísle n a nezávisí na kvantových číslech l a m_l. Vskutku, tyto tři stavy *izolovaného* atomu vodíku, znázorněné na obr. 40.20, nelze od sebe experimentálně odlišit.



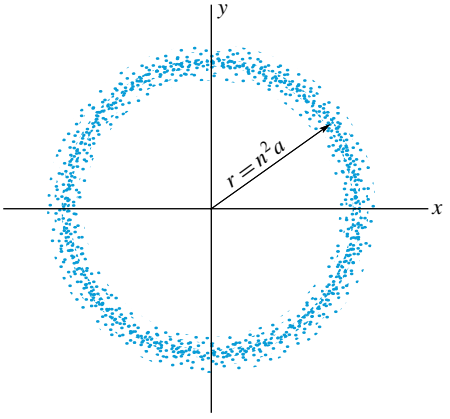
Obr. 40.20 Bodový graf hustoty pravděpodobnosti $\psi^2(r, \theta)$ atomu vodíku ve stavech s $n = 2$ a $l = 1$. (a) Graf pro $m_l = 0$. (b) Graf pro $m_l = +1$ a $m_l = -1$. Z obou grafů vyplývá, že hustota pravděpodobnosti je symetrická kolem osy z.

Sečteme-li hustoty pravděpodobností těchto tří stavů, stane se výsledná hustota pravděpodobnosti sféricky symetrickou, bez přednostní osy symetrie. Tak si můžeme představit, že elektron tráví jednu třetinu svého času v každém ze tří možných stavů z obr. 40.20, případně, že vážený součet tří nezávislých vlnových funkcí určí sféricky symetrickou **podslupku**, charakterizovanou kvantovými čísly $n = 2$, $l = 1$. Jednotlivé stavy od sebe vzájemně odlišíme pouze v případě, když atom vodíku umístíme do vnějšího elektrického nebo magnetického pole. Tři kvantové stavy podslupky s $n = 2$, $l = 1$ pak budou mít různé energie a směr vnějšího pole určí potřebnou osu symetrie.

Stav s $n = 2$, $l = 0$, jehož hustota pravděpodobnosti je vynesena na obr. 40.18, má *rovněž* stejnou energii jako

zmíněné tři stavy z obr. 40.20. Můžeme tedy pohlížet na všechny čtyři kvantové stavy uvedené v tab. 40.3 jako na stavy, které tvoří sféricky symetrickou **slupku** určenou jediným kvantovým číslem n. Důležitost zavedení pojmů slupky a podslupky bude zřejmá v kap. 41, ve které se budeme zabývat atomy s více než jedním elektronem.

Abychom dokončili náš popis atomu vodíku, znázornili jsme v obr. 40.21 bodový graf hustoty pravděpodobnosti atomu vodíku s relativně vysokým hlavním kvantovým číslem ($n = 45$) a nejvyšším možným orbitálním kvantovým číslem podle tab. 40.2 ($l = n - 1 = 44$). Hustota pravděpodobnosti vytváří prstenec, který je symetrický kolem osy z a leží v těsné blízkosti roviny xy. Střední poloměr tohoto prstence je n^2a, kde a je Bohrův poloměr. Tento střední poloměr je více než 2 000krát větší než efektivní poloměr atomu vodíku v základním stavu.



Obr. 40.21 Bodový graf radiální hustoty pravděpodobnosti $P(r)$ vodíkového atomu v kvantovém stavu s relativně vysokou hodnotou hlavního kvantového čísla, a to $n = 45$, a orbitálním kvantovým číslem $l = n - 1 = 44$. Tečky se rozprostírají v blízkosti roviny xy v prstenci, který připomíná orbitu elektronu podle klasické představy.

Obr. 40.21 připomíná orbitu elektronu známou z klasické fyziky. Tak jsme opět ilustrovali Bohrův princip korespondence, že totiž pro velké hodnoty kvantových čísel se výsledky získané pomocí kvantové mechaniky blíží k výsledkům získaným pomocí klasické fyziky. Představte si, jak by bodový graf z obr. 40.21 vypadal v případě *opravdu* velkých hodnot kvantových čísel n a l, řekněme $n = 1\,000$ a $l = 999$.

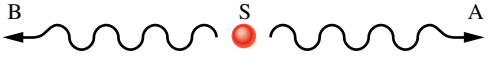
40.8 PŘÍKLAD PODIVNOSTI KVANTOVÉ FYZIKY

Bohr říkával, že pokud nejste z kvantové teorie zmateni, pak ji asi úplně nechápete. Proto se, dříve než ukončíme svou rozpravu o kvantových jevech, zmíníme o předpovědích kvantové fyziky, které sice vypadají zvláštně, ale jsou nade vší pochybnost potvrzeny experimentálními výsledky.

V roce 1935 se Einstein a jeho spolupracovníci Boris Podolsky a Nathan Rosen zabývali kvantovou mechanikou dvoučásticových systémů. Navrhli „myšlenkový experiment“ (nyní nazývaný *EPR experiment* podle jejich iniciál), který předpověděl výsledky tak podivné, že je Einstein zavrhl s tím, že poukazují na značnou trhlinu v logické výstavbě kvantové mechaniky.

Experiment EPR byl uskutečněn v osmdesátých letech a podivné předpovědi kvantové mechaniky byly skutečně pozorovány. Načrtneme si zde pouze hrubé rysy tohoto EPR experimentu, který pak budeme ilustrovat na základě vhodné analogie.

Zdroj S na obr. 40.22 emituje současně a do opačných směrů dva fotony, označené jako A a B. Každý z fotonů má určitou vlastnost, řekněme X, která může nabývat dvou hodnot, například X_1 a X_2. (Touto vlastností je ve skutečnosti směr polarizace vlny spojené s fotonem, ale tento detail nás nemusí zajímat.) Vzhledem ke způsobu, jakým byly oba fotony vytvořeny (současně, synchronní emisí), vždy platí, že pokud foton A má hodnotu X_1, pak foton B má hodnotu X_2 a naopak. Na tom ale zatím není nic divného.



Obr. 40.22 Zdroj S emituje současně dva fotony do vzájemně opačných směrů. Pozorovatel si může libovolně zvolit, kterou ze dvou možných vlastností fotonu A bude měřit. Obdobně i druhý pozorovatel si může libovolně zvolit, kterou ze dvou stejných možných vlastností fotonu B bude měřit on. Avšak v okamžiku, kdy jeden pozorovatel provede měření, je výsledek měření druhého pozorovatele již zcela předvídatelný, ačkoli jsou oba fotony od sebe velmi vzdáleny a oba pozorovatelé se o svých výsledcích vzájemně neinformují.

Tyto dva fotony společně vytvářejí jediný kvantový systém. Ten může existovat ve dvou stavech, které označíme (AX_1, BX_2) a (AX_2, BX_1). Kvantová mechanika předpovídá, že předtím, než dojde k jakémukoli měření, je *skutečný* stav tohoto dvoufotonového systému dokonalou směsí *obou* stavů, které jsou v ní rovným dílem zastoupeny. Pro názornost si můžete představit, jako kdyby dvoučásticový systém osciloval mezi těmito dvěma stavy a v každém z nich by setrvával stejnou dobu.

Pokud provádíme měření na fotonu A, pozorovatel si může zvolit, zda bude ověřovat, má-li vlastnost X fotonu hodnotu X_1, nebo X_2. Řekněme, že změří hodnotu X_1. Z toho ovšem vyplývá, že náš dvoučásticový systém

již není ve stavu daném směsí stejně zastoupených stavů (AX_1, BX_2) a (AX_2, BX_1). Akt měření způsobil, že se systém „zhroutil“ (zkolaboval) do jediného stavu (AX_1, BX_2). Proto měřením uskutečněným na fotonu B můžeme získat pouze hodnotu X_2. Krátce řečeno, pokud uskutečníme měření na fotonu A (s možností zvolit pro měření libovolnou hodnotu), automaticky tím odejmeme možnost volby stavu, v jakém se může nalézat foton B. Kvantová mechanika předpovídá platnost tohoto tvrzení i v případě velmi vzdálených fotonů (dokonce i pro kilometry vzdálené fotony), když je prováděno první měření. Žádný div, že Einstein nazval tuto předpověď „strašidelné působení na dálku“. Přesto experimenty provedené v osmdesátých létech prokázaly platnost tohoto myšlenkového pokusu. Většina fyziků přijala výsledky těchto experimentů jako další podporu platnosti kvantové mechaniky.

Nyní si uveďme volnou analogii tohoto pokusu. Předpokládejme, že máme lentilky, které mohou mít dva stavy, buď jsou červené, nebo zelené. Uvažujme například, že se Mařenka a Jeníček potkali v Brně. Mařenka se pak vydala do Prahy a měla dvě lentilky, od každé barvy jednu. Jeníček se vypravil do Ostravy, a v kapse měl také dvě lentilky různých barev. Mařenka se v jednom okamžiku rozhodne jednu ze svých lentilek sníst, aniž by o tom řekla Jeníčkovi, a zjistí, že si vzala červenou lentilku. Když si pak Jeníček kdykoli poté vytáhne z kapsy lentilku, *vždy zjistí, že je zelená*. Mimoto, Mařenčina zelená a Jeníčkova červená lentilka prostě zmizí: systém lentilek zkolaboval do stavu Mařenka–červená, Jeníček–zelená.

V případě, že by si Mařenka tehdy vzala zelenou lentilku, pak by dvojčásticový systém lentilek zkolaboval do stavu Mařenka–zelená, Jeníček–červená a zbývající dvě lentilky by prostě zmizely. V naší analogii tedy Mařenčina svobodná volba v Praze určí barvu lentilky, kterou Jeníček vytáhne z kapsy v Ostravě. Opravdu strašidelné!

Pokud se ale pokusíte experiment Mařenka + Jeníček sami uskutečnit, tak se vám samozřejmě nepovede jej provést tak, jak jsme jej právě popsali — náš příběh je pouhou analogií. Abychom tuto analogii zpřesnili, museli bychom Mařence i Jeníčkovi dát každému jedinou „kvantovou lentilku“, každou zároveň červenou i zelenou, které by velmi rychle korelovaně přecházely mezi dvěma stavy tak, že pokud by Mařenčina lentilka měla jednu barvu, pak Jeníčkova lentilka by měla barvu druhou. Takové kvantově mechanické chování je zanedbatelné pro objekty tak velké, jako jsou lentilky, takže je beznadějné snažit se toto chování zjistit. Avšak na kvantové úrovni se tyto jevy opravdu stávají. Může se to zdát podivné, ale takový už náš svět prostě je!

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Omezovací princip

Omezovací princip se týká všech typů vln, včetně vln na struně a de Broglieho vln v kvantové mechanice. Vyjadřuje skutečnost, že omezení vlny vede ke kvantování neboli k existenci kvantových stavů s diskrétními hodnotami energie.

Elektron v potenciálové jámě nekonečné hloubky

Nekonečně hluboká jáma představuje zařízení, ve kterém lze zachytit elektron. Z omezovacího principu pak vyplývá, že de Broglieho vlna tohoto zachyceného elektronu bude moci existovat pouze v některém z diskrétních stavů. Hodnoty energií těchto stavů jsou dány vztahem

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) n^2 \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{40.4}$$

ve kterém L je šířka jámy a n je *kvantové číslo*. *Vlnové funkce* odpovídající těmto stavům jsou

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{40.6}$$

Hustota pravděpodobnosti $\psi_n^2(x)$ možného stavu má ten fyzikální význam, že $\psi_n^2(x)\,\mathrm{d}x$ vyjadřuje pravděpodobnost, že se elektron bude nacházet v intervalu mezi x a $x + \mathrm{d}x$. Hustoty pravděpodobnosti pro elektron v nekonečně hluboké potenciálové jámě jsou

$$\psi_n^2(x) = A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{40.7}$$

Se zvyšující se hodnotou kvantového čísla n se elektron přibližuje svým chováním elektronu klasickému, zajímá libovolnou polohu uvnitř jámy se stejnou pravděpodobností. To odpovídá *principu korespondence*: kvantové výsledky přecházejí pro velká kvantová čísla na výsledky, známé z klasické fyziky.

Normování

Konstantu A^2 v rov. (40.7) můžeme určit pomocí *normovací rovnice*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x)\,\mathrm{d}x = 1, \tag{40.8}$$

která je matematickým vyjádřením toho, že se elektron *někde* v jámě s jistotou nachází, neboť jistotě odpovídá pravděpodobnost rovna 1.

Energie základního stavu

Z rov. (40.4) vidíme, že nejnižší možná energie elektronu není nulová, nýbrž odpovídá hodnotě $n = 1$. Tato nejnižší hodnota

energie se nazývá *energie základního stavu* elektronu v potenciálové jámě.

Elektron v potenciálové jámě konečné hloubky

Potenciální energie elektronu uvnitř jámy konečné hloubky je o konečnou hodnotu E_{p0} nižší, než je potenciální energie elektronu vně jámy. V jámě konečné hloubky je jen konečně mnoho vázaných stavů. Přípustná vlnová funkce přesahuje i do oblasti vně jámy.

Elektronové pasti ve dvou a třech rozměrech

Kvantované energie elektronu zachyceného ve dvojrozměrné nekonečné potenciálové jámě, která tvoří pravoúhlou hradbu, jsou

$$E_{n_x,n_y} = \left(\frac{h^2}{8mL_x^2}\right) n_x^2 + \left(\frac{h^2}{8mL_y^2}\right) n_y^2 = \\ = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right), \qquad (40.14)$$

kde n_x je kvantové číslo, pro něž je vlnová funkce elektronu přizpůsobena šířce L_x, a n_y je kvantové číslo, pro něž je vlnová funkce elektronu přizpůsobena šířce L_y. Podobně energie elektronu ve trojrozměrné jámě, která tvoří pravoúhlou krabici, jsou

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right). \qquad (40.15)$$

V tomto výrazu představuje n_z třetí kvantové číslo, pro něž je vlnová funkce přizpůsobena šířce L_z jámy.

Atom vodíku

Potenciální energie atomu vodíku má tvar

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}. \qquad (40.17)$$

Energie odpovídajících kvantových stavů atomu vodíku jsou určeny řešením trojrozměrné Schrödingerovy rovnice a mají tvar

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{13{,}6\,\text{eV}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (40.18)$$

kde n je *hlavní kvantové číslo*. K úplnému popisu stavu atomu vodíku jsou potřeba tři kvantová čísla; jejich názvy a možné hodnoty jsou uvedeny v tab. 40.2.

Radiální hustota pravděpodobnosti $P(r)$ je pro atom vodíku definovaná tak, že $P(r)\,dr$ udává pravděpodobnost, že se elektron nachází mezi dvěma soustřednými kulovými plochami se středem v jádru, jejichž poloměry jsou r a $r + dr$. Pro atom vodíku v základním stavu platí

$$P(r) = \frac{4}{a^3}r^2 e^{-2r/a}, \qquad (40.23)$$

kde a je *Bohrův poloměr*, který má rozměr délky a velikost 52,9 pm. Na obr. 40.16 je vynesen graf $P(r)$ základního stavu.

Obr. 40.18 a 40.20 zobrazují hustoty pravděpodobnosti (nikoli *radiální* hustoty pravděpodobnosti) čtyř kvantových stavů atomu vodíku s $n = 2$. Graf na obr. 40.18 ($n = 2$, $l = 0$, $m_l = 0$) je sféricky symetrický. Grafy na obr. 40.20 ($n = 2$, $l = 1$, $m_l = 0, +1, -1$) jsou symetrické vzhledem k ose z, ale jejich součet je opět sféricky symetrický.

Všechny čtyři stavy s $n = 2$ mají stejnou energii a je vhodné na ně pohlížet jako na *slupku*, označenou jako slupka $n = 2$. Tři stavy z obr. 40.20 mohou být společně označeny jako *podslupka* $n = 2, l = 1$. Experimentálně nelze tyto čtyři stavy atomu vodíku od sebe odlišit, pokud se vodík nenachází v elektrickém nebo magnetickém poli, kde můžeme definovanovat osu symetrie.

Podivnost kvantové fyziky

U dvojčásticového kvantového systému libovolná volba typu měření, kterou provádí první pozorovatel na jedné z částic, úplně určí výsledek měření u druhé částice. To znamená, že první pozorovatel naměří některou z možných hodnot a neví předem kterou. Druhý pozorovatel pak ani nemusí měřit — je již určeno, co by zjistil.

OTÁZKY

1. Původní šířku nekonečně hluboké potenciálové jámy zdvojnásobíme. (a) Bude poměr energie nového základního stavu uvězněného elektronu k původní 4, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, nebo jiné číslo? (b) Budou energie vyšších energiových stavů násobeny stejným číslem, nebo nějakým jiným, závislým na kvantovém čísle tohoto stavu?

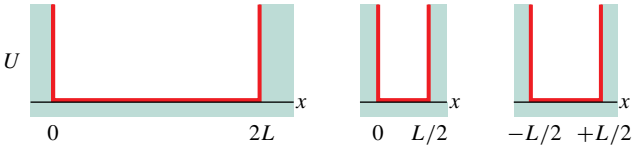
2. Tři elektrony jsou uvězněny ve třech různých nekonečných potenciálových jámách šířek (a) 50 pm, (b) 200 pm a (c) 100 pm. Seřaďte sestupně elektrony podle velikosti energie jejich základního stavu.

3. Budete-li chtít uvěznit v ideální pasti na obr. 40.1 namísto elektronu pozitron, musíte změnit: (a) geometrii pasti, (b) elektrický potenciál na středním válci, (c) elektrický potenciál na krajních polonekonečných válcích? (Pozitron má stejnou hmotnost jako elektron, ale má kladný náboj.)

4. Elektron je uvězněn v nekonečně hluboké jámě a je ve stavu s $n = 17$. Kolik (a) uzlů, (b) maxim má jeho de Broglieho vlna?

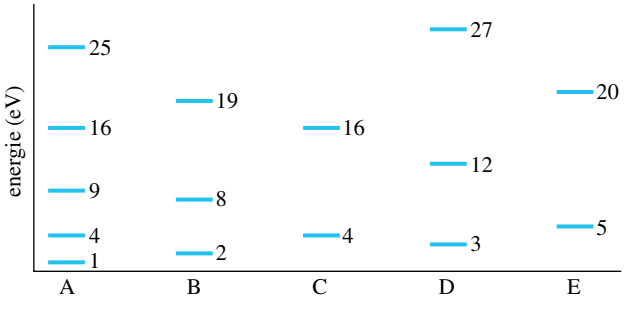
5. Na obr. 40.23 jsou znázorněny tři nekonečné potenciálové jámy podél osy x. Bez písemných výpočtů určete vlnové funkce

$\psi(x)$ základního stavu elektronu, který je v každé z nich uvězněn.



Obr. 40.23 Otázka 5

6. Na obr. 40.24 jsou znázorněny nejnižší energiové hladiny (v elektronvoltech) odpovídající pěti situacím, kdy je elektron uvězněn v nekonečné potenciálové jámě. V jámách B, C, D a E je elektron v základním stavu. Elektron v jámě A budeme excitovat do jeho čtvrtého excitovaného stavu (hodnota energie 25 eV). Elektron pak může deexcitovat zpět do základního stavu za současné emise buď jednoho, nebo více fotonů, což by odpovídalo buď jednomu „dlouhému" skoku, nebo více „kratším" skokům. Jaké hodnoty energií *emitovaných* fotonů při těchto deexcitacích jsou stejné jako energie fotonů *absorbovaných* elektronem v základním stavu v ostatních jámách? Určete odpovídající kvantová čísla.



Obr. 40.24 Otázka 6

7. Je hodnota energie základního stavu protonu uvězněného v nekonečné potenciálové jámě větší, menší, nebo rovna energii základního stavu elektronu uvězněného ve stejné potenciálové jámě?

8. Proton a elektron jsou uvězněny ve dvou identických nekonečných potenciálových jámách; obě částice jsou ve svých základních stavech. Je hustota pravděpodobnosti výskytu protonu ve středu potenciálové jámy větší, menší, nebo rovna hustotě pravděpodobnosti výskytu elektronu v tomtéž bodě?

9. Chcete modifikovat potenciálovou jámu konečné hloubky na obr. 40.5 tak, aby v ní uvězněný elektron mohl existovat ve více než třech kvantových stavech. Měli byste tuto jámu udělat (a) širší, nebo užší, (b) hlubší, nebo mělčí?

10. Elektron je uvězněn v potenciálové jámě takové hloubky, že může existovat v kvantovém stavu s $n = 4$. Kolik (a) uzlů, (b) maxim bude mít uvnitř jámy jeho vlnová funkce?

11. Bez počítání seřaďte kvantová čísla tří stavů v jámě z obr. 40.6 sestupně podle vlnové délky de Broglieho vln elektronu.

12. Pro jámu z obr. 40.6 seřaďte sestupně tři kvantová čísla podle velikosti pravděpodobnosti, že se elektron bude nacházet mimo interval $0 < x < L$.

13. Elektron uvězněný v potenciálové jámě konečné hloubky na obr. 40.5 je ve stavu s nejnižší energií. Je jeho energie větší, menší, nebo rovna hodnotě v případě, kdyby se nacházel v nekonečně hluboké jámě z obr. 40.2?

14. V tabulce jsou uvedena kvantová čísla pro pět stavů atomu vodíku. Která z nich nejsou možná?

	n	l	m_l
(a)	3	2	0
(b)	2	3	1
(c)	4	3	−4
(d)	5	5	0
(e)	5	3	−2

15. V roce 1996 se fyzikům pracujícím v laboratoři s urychlovačem částic podařilo vytvořit atom antivodíku. Ten se skládá z pozitronu, pohybujícího se v elektrickém poli antiprotonu. Pozitron má stejnou hmotnost jako elektron, ale nese opačný náboj. Antiproton má stejnou hmotnost, ale opačný náboj než proton. Bude spektrum tohoto antivodíku stejné jako spektrum normálního vodíku, nebo bude jiné?

16. (a) Z energiového diagramu atomu vodíku z obr. 40.14 vyplývá, že energie fotonu druhé spektrální čáry v Lymanově sérii je rovna součtu energií dvou jiných čar. Které to jsou? (b) Energie fotonu druhé spektrální čáry v Lymanově sérii je rovněž rovna rozdílu energií dvou dalších čar. Které to jsou?

17. Vodíkový atom je ve svém třetím excitovaném stavu. Do jakého stavu (určete jeho kvantové číslo n) by měl skočit, aby (a) emitoval světlo s nejdelší možnou vlnovou délkou, (b) emitoval světlo s nejkratší možnou vlnovou délkou a (c) absorboval světlo s nejdelší možnou vlnovou délkou?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 40.3 Zachycení elektronu

1C. Chcete zmenšit na polovinu hodnotu základní energie elektronu uvězněného v nekonečně hluboké potenciálové jámě. Kolikrát musíte změnit šířku potenciálové jámy?

2C. Jaká je hodnota energie základního stavu (a) elektronu, (b) protonu uvězněného v 100 pm široké nekonečné potenciálové jámě?

3C. Jaká musí být šířka nekonečné potenciálové jámy, má-li mít elektron v ní uvězněný ve stavu s $n = 3$ hodnotu energie 4,7 eV?

4C. Předpokládejme, že jádro atomu je ekvivalentní nekonečně hluboké potenciálové jámě o šířce $L = 1{,}4 \cdot 10^{-14}$ m, což odpo-

vídá typickému rozměru jádra. Jaká by byla energie základního stavu elektronu v takovéto potenciálové jámě? (*Poznámka*: Jádra neobsahují elektrony.)

5C. Hodnota energie základního stavu elektronu v nekonečně hluboké potenciálové jámě je 2,6 eV. Jaká by tato hodnota byla, kdyby se šířka potenciálové jámy zdvojnásobila?

6C. Elektron v nekonečné jámě šířky 250 pm je v základním stavu. Jak velkou energii musí absorbovat, aby se dostal do stavu s $n = 4$?

7C. Jaká je jednotka SI pro hustotu pravděpodobnosti výskytu elektronu v nekonečně hluboké potenciálové jámě?

8C. Proton je vázán v nekonečně hluboké potenciálové jámě šířky 100 pm. Jaká je hodnota energie jeho základního stavu?

9C. Ukažte, že podíl $\Delta E/E$ pro elektron v nekonečné potenciálové jámě se pro velká n blíží k hodnotě $2/n$, kde ΔE je definováno rov. (40.5). (Všimněte si, že i když se ΔE se zvyšujícím n neblíží k nule, výraz $\Delta E/E$ ano — v souhlase s principem korespondence.)

10Ú. Elektron je uvězněn v nekonečně hluboké potenciálové jámě. (a) Má nějaká dvojice sousedních hladin třikrát větší energiový rozdíl, než je rozdíl mezi hladinami s $n = 3$ a $n = 4$? (b) Jaká dvojice (existuje-li) bude dosahovat dvojnásobku tohoto rozdílu?

11Ú. Elektron je uvězněn v nekonečně hluboké potenciálové jámě. Ukažte, že rozdíl energií ΔE mezi hladinami s kvantovým číslem n a $n + 2$ je roven $h^2(n + 1)/(2mL^2)$.

12Ú. Elektron je uvězněn v nekonečné potenciálové jámě. Existuje taková dvojice sousedních energiových hladin, která by měla energiový rozdíl roven energii elektronu ve stavu s (a) $n = 5$, nebo (b) $n = 6$?

13Ú. Elektron je uvězněn v nekonečně hluboké potenciálové jámě šířky 100 pm a nachází se v základním stavu. Jaká je pravděpodobnost toho, že elektron bude detegován v intervalu šířky $\Delta x = 5{,}0$ pm kolem bodu x o souřadnici (a) 25 pm, (b) 50 pm a (c) 90 pm? (*Tip*: Zvolený interval je tak úzký, že v něm můžete hustotu pravděpodobnosti považovat za konstantní.)

14Ú. V př. 40.1b se popisuje elektron, který se pohybuje rovnoběžně s osou evakuovaného válce dlouhého 3,0 m. (a) Pro jakou hodnotu kvantového čísla n bude energiový rozdíl mezi sousedními hladinami roven 1 eV, tj. dobře měřitelné hodnotě? (b) Jaká by byla energie elektronu s tímto n? (c) Je tato energie v relativistické oblasti?

15Ú. Částice je vázána v nekonečně hluboké potenciálové jámě šířky L. Je-li částice v základním stavu, jaká je pravděpodobnost, že se nalézá mezi body (a) $x = 0$ a $x = L/3$, (b) $x = L/3$ a $x = 2L/3$, (c) $x = 2L/3$ a $x = L$?

ODST. 40.4 Elektron v jámě konečné hloubky

16C. Na obr. 40.7 jsou znázorněny energiové hladiny elektronu vázaného v jámě konečné hloubky 30 eV. Může být elektron vázán ve stavu s $n = 4$?

17C. Elektron ve stavu s $n = 2$ v jámě konečné hloubky z obr. 40.5 absorbuje z vnějšího zdroje energii 31,7 eV. Jakou má kinetickou energii po této absorpci, předpokládáme-li, že po absorpci je elektron mimo jámu?

18C. (a) Ukažte, že každý člen Schrödingerovy rovnice (40.12) má stejný fyzikální rozměr. (b) Jaká jednotka SI mu odpovídá?

19Ú. Jak napovídá obr. 40.6, klesá hustota pravděpodobnosti v oblastech mimo jámu (tj. pro $x > L$) exponenciálně, podle vztahu

$$\psi^2(x) = Ce^{-2\varkappa x},$$

kde C je konstanta. (a) Ukažte, že příslušná vlnová funkce $\psi(x)$ splňuje Schrödingerovu rovnici v jednom rozměru. (b) Jaká musí být hodnota $\varkappa$, aby to platilo?

20Ú. Ukažte, že pro $x > L$ v konečně hluboké potenciálové jámě z obr. 40.5 je funkce $\psi(x) = De^{2\varkappa x}$ řešení Schrödingerovy rovnice v jednom rozměru, kde D je konstanta. Proč je toto řešení fyzikálně nepřijatelné?

21Ú. Jak napovídá obr. 40.6, hustota pravděpodobnosti výskytu elektronu uvnitř konečně hluboké potenciálové jámy (tj. pro $0 < x < L$) má sinusový tvar, daný vztahem

$$\psi^2(x) = B\sin^2 kx,$$

kde B je konstanta. (a) Ukažte, že vlnová funkce $\psi(x)$ z tohoto vztahu splňuje Schrödingerovu rovnici v jednom rozměru. (b) Jaká musí být hodnota k, aby to platilo?

ODST. 40.6 Elektronové pasti ve dvou a třech rozměrech

22C. Elektron je zachycen v pravoúhlé hradbě z obr. 40.10 s rozměry $L_x = 800$ pm a $L_y = 1\,600$ pm. Jaká je energie základního stavu (v eV)?

23C. Elektron je zachycen v pravoúhlé krabici z obr. 40.11 s rozměry $L_x = 800$ pm, $L_y = 1\,600$ pm a $L_z = 400$ pm. Jaká je energie základního stavu (v eV)?

24Ú. Elektron je zachycen v pravoúhlé hradbě o rozměrech $L_x = L$, $L_y = 2L$. Jakou hodnotu (v násobcích $h^2/(8mL^2)$, kde m je hmotnost elektronu), má (a) energie základního stavu elektronu, (b) energie prvního excitovaného stavu, (c) energie degenerovaného stavu s nejnižší energií a (d) rozdíl energií druhého a třetího excitovaného stavu?

25Ú. Pro zadání úlohy 24 určete frekvenci světla, které může být absorbováno nebo emitováno při přechodu elektronu mezi pěti nejnižšími energiovými hladinami. Řešení uveďte v násobcích $h^2/(8mL^2)$.

26Ú. Elektron je zachycen v krychlové krabici s rozměry $L_x = L_y = L_z = L$. Jakou hodnotu (v násobcích $h^2/(8mL^2)$, kde m je hmotnost elektronu), má (a) energie základního stavu elektronu, (b) energie jeho druhého excitovaného stavu a (c) rozdíl mezi energiemi jeho druhého a třetího excitovaného stavu? Kolik degenerovaných stavů má energii (d) prvního excitovaného stavu a (e) pátého excitovaného stavu?

27Ú. Pro zadání úlohy 26 určete frekvenci, pro kterou může být světlo absorbováno nebo emitováno při přechodu mezi pěti nejnižšími hladinami energie. Odpověď uveďte v násobcích $h^2/(8mL^2)$.

ODST. 40.7 Atom vodíku

28C. Ověřte, že hodnota konstanty v rov. (40.18) je 13,6 eV.

29C. Atom (nikoli vodíkový) absorbuje foton, jehož frekvence je $6{,}2\cdot10^{14}$ Hz. O jakou hodnotu se zvýší energie atomu?

30C. Atom (nikoli vodíkový) absorbuje foton, jehož vlnová délka je 375 nm, a ihned emituje foton o vlnové délce 580 nm. Jakou energii atom absorboval?

31C. Opakujte př. 40.6 pro Balmerovu sérii vodíkového atomu.

32C. (a) Jaká je energie elektronu vodíkového atomu, jehož hustotu pravděpodobnosti ukazuje bodový graf na obr. 40.18? (b) Jaká je minimální energie nutná k odtržení tohoto elektronu od atomu?

33C. Jaká je (a) energie, (b) hybnost a (c) vlnová délka fotonu emitovaného při přechodu vodíkového atomu ze stavu s $n = 3$ do stavu $n = 1$?

34C. Jaký je poměr nejkratší vlnové délky z Balmerovy série a nejkratší vlnové délky z Lymanovy série?

35C. Neutron o kinetické energii 6,0 eV se srazí s vodíkovým atomem v základním stavu v klidu. Vysvětlete, proč tato srážka musí být elastická, tedy proč se musí kinetická energie zachovat. (*Tip*: Ukažte, že atom vodíku se v důsledku této srážky nemůže nabudit do vyšších kvantových stavů.)

36C. Vodíkový atom je nabuzen ze základního stavu do stavu s $n = 4$. (a) Jak velkou energii musí atom absorbovat? (b) Vypočtěte a znázorněte v energiovém diagramu různé hodnoty energie fotonů, které mohou být emitovány, když se atom vrací zpět do základního stavu.

37C. Vypočtěte radiální hustotu pravděpodobnosti $P(r)$ pro atom vodíku v základním stavu ve vzdálenosti (a) $r = 0$, (b) $r = a$ a (c) $r = 2a$, kde a je Bohrův poloměr.

38C. Pro atom vodíku v základním stavu vypočtěte (a) hustotu pravděpodobnosti $\psi^2(r)$ a (b) radiální hustotu pravděpodobnosti $P(r)$ pro $r = a$, kde a je Bohrův poloměr.

39Ú. Jak velkou práci musíme vykonat pro odtržení elektronu od protonu v atomu vodíku, nachází-li se atom v (a) základním stavu, (b) ve stavu s $n = 2$?

40Ú. Jak velký je interval vlnových délek (a) Lymanovy a (b) Balmerovy série? (Interval začíná nejdelší vlnovou délkou a končí vlnovou délkou odpovídající hraně série.) (c) Jak velké jsou odpovídající intervaly frekvence? Vyjádřete frekvenci v terahertzech (1 THz = 10^{12} Hz).

41Ú. Celková energie elektronu v atomu vodíku v základním stavu je −13,6 eV. Jakou by měl elektron (a) kinetickou energii a (b) potenciální energii, pokud bychom jej považovali za klasickou částici obíhající kolem jádra ve vzdálenosti jednoho Bohrova poloměru od jádra?

42Ú. Vodíkový atom se nachází v klidu v kvantovém stavu s $n = 4$ a přejde do základního stavu za současné emise fotonu. Jakou rychlost získá vodíkový atom při emisi fotonu?

43Ú. Vodíkový atom emituje světlo o vlnové délce 486,1 nm. (a) Jaký přechod v atomu vodíku vyvolal tuto emisi? (b) K jaké sérii přísluší tato vlnová délka?

44Ú. (a) Pomocí energiového diagramu z obr. 40.14 určete kvantová čísla odpovídající přechodu, při kterém atom vodíku emituje světlo o vlnové délce 121,6 nm. (b) Do jaké série náleží tento přechod?

45Ú. Vodíkový atom přejde ze stavu, ve kterém je hodnota jeho *vazební energie* (tj. energie potřebná k úplnému odtržení elektronu) rovna 0,85 eV, do stavu, v němž je hodnota jeho *excitační energie* (tj. energiový rozdíl mezi energií příslušného stavu a základním stavem) rovna 10,2 eV. (a) Jaká je energie fotonu, který je při tomto přechodu emitován? (b) Pomocí energiového diagramu z obr. 40.14 tento přechod určete.

46Ú. Ověřte vlnové délky dané v obr. 40.15 pro viditelné čáry z Balmerovy série.

47Ú. Vodíkový atom emituje světlo o vlnové délce 102,6 nm. Mezi jakými hladinami (n_i, n_f) přechod proběhl?

48Ú. Jaká je pravděpodobnost, že se elektron ve vodíkovém atomu v základním stavu bude nalézat ve vzdálenosti větší, než je Bohrův poloměr? (*Tip*: Příklad 40.8.)

49Ú. Vypočtěte pravděpodobnost, že se elektron ve vodíkovém atomu v základním stavu bude nalézat mezi kulovými plochami, jejichž poloměry jsou a a $2a$, kde a je Bohrův poloměr. (*Tip*: Příklad 40.8.)

50Ú. Schrödingerova rovnice pro kvantové stavy vodíkového atomu s orbitálním kvantovým číslem $l = 0$ má tvar

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{d\psi}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_\mathrm{p})\psi = 0.$$

Ověřte, že vlnová funkce (40.19), popisující základní stav atomu vodíku, tuto rovnici splňuje.

51Ú. Ověřte, že radiální hustota pravděpodobnosti (40.23) vodíkového atomu v základním stavu je normovaná a splňuje podmínku

$$\int_0^\infty P(r)\,\mathrm{d}r = 1.$$

52Ú. (a) Kolika možných hodnot může nabývat (pro dané n) orbitální kvantové číslo l? (b) Kolika možných hodnot může nabývat (pro dané l) orbitální magnetické kvantové číslo m_l? (c) Kolik hodnot m_l je možných pro dané n?

53Ú. Pro jaké n by se elektron v atomu vodíku nacházel nejpravděpodobněji 1,0 mm od jádra? Předpokládejme, že l dosahuje své maximální hodnoty $l = n - 1$. (*Tip*: Vezměte si příklad z obr. 40.21.)

54Ú. Jaká je pravděpodobnost, že se elektron ve vodíkovém atomu v základním stavu bude nacházet mezi dvěma kulovými

plochami, jejichž poloměry jsou r a $r + \Delta r$, je-li (a) $r = 0{,}500a$ a $\Delta r = 0{,}010a$ a (b) $r = 1{,}00a$ a $\Delta r = 0{,}01a$, kde a je Bohrův poloměr? (*Tip*: Δr je dostatečně malé, takže lze považovat radiální hustotu pravděpodobnosti mezi r a $r + \Delta r$ za konstantní.)

55Ú⋆. V př. 40.7 jsme pro základní stav atomu vodíku ukázali, že radiální hustota pravděpodobnosti dosahuje maxima, je-li $r = a$, kde a je Bohrův poloměr. Ukažte, že *střední* hodnota $\overline{r}$, definovaná vztahem

$$\overline{r} = \int_0^\infty P(r) r \, \mathrm{d}r,$$

má velikost $\overline{r} = 1{,}5a$. Ve shora uvedeném vztahu pro $\overline{r}$ je každá hodnota $P(r)$ vážena vzdáleností r, ve které se tato radiální hustota určuje. Všimněte si, že střední hodnota $\overline{r}$ je vyšší než hodnota r, ve které dosahuje funkce $P(r)$ svého maxima.

56Ú⋆. Vlnová funkce vodíkového atomu v kvantovém stavu s $n = 2$ a $l = m_l = 0$, uvedeném na obr. 40.18, je dána vztahem

$$\psi_{2,0,0}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} a^{-3/2} \left(2 - \frac{r}{a}\right) \mathrm{e}^{-r/2a},$$

ve kterém a je Bohrův poloměr a spodní indexy funkce $\psi(r)$ odpovídají hodnotám kvantových čísel n, l, m_l. (a) Vyneste závislost $\psi^2_{2,0,0}(r)$ na r a ukažte, že je v souladu s bodovým grafem na obr. 40.18. (b) Analyticky dokažte, že vlnová funkce $\psi^2_{2,0,0}(r)$ má maximum v $r = 4a$. (c) Najděte radiální hustotu pravděpodobnosti $P_{2,0,0}(r)$ tohoto stavu. (d) Ukažte, že platí

$$\int_0^\infty P_{2,0,0}(r) \, \mathrm{d}r = 1,$$

a proto je vlnová funkce $\psi_{2,0,0}(r)$ normovaná.

57Ú. Vlnové funkce tří kvantových stavů atomu vodíku zobrazené na obr. 40.20 mají kvantová čísla $n = 2$, $l = 1$ a $m_l = 0$, $+1$, -1 a jsou dány výrazy

$$\psi_{2,1,0}(r, \theta) = \frac{a^{-3/2}}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{r}{a}\right) \mathrm{e}^{-r/2a} \cos\theta,$$

$$\psi_{2,1,+1}(r, \theta) = \frac{a^{-3/2}}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{r}{a}\right) \mathrm{e}^{-r/2a} (\sin\theta) \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi},$$

$$\psi_{2,1,-1}(r, \theta) = \frac{a^{-3/2}}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{r}{a}\right) \mathrm{e}^{-r/2a} (\sin\theta) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi},$$

kde spodní indexy funkcí $\psi(r, \theta)$ odpovídají hodnotám kvantových čísel n, l, m_l a úhly θ a φ jsou definovány na obr. 40.19. Všimněte si, že první vlnová funkce je reálná, ale zbývající dvě, obsahující imaginární jednotku i, jsou komplexní. (a) Nalezněte hustotu pravděpodobnosti pro každou z uvedených vlnových funkcí a ukažte, že jsou v souladu s bodovými grafy na obr. 40.20. (b) Sečtěte všechny tři hustoty pravděpodobností odvozené v (a) a ukažte, že jejich součet je sféricky symetrický a závisí pouze na radiální proměnné r.

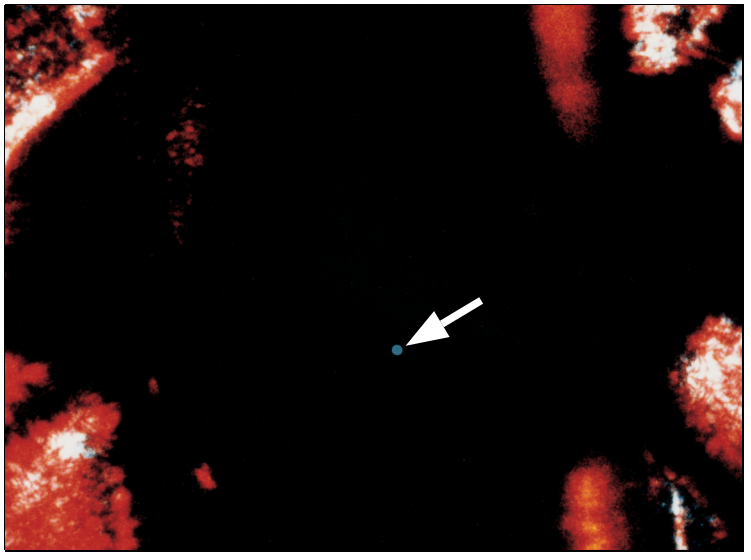
41
Vše o atomech



Lasery začaly sloužit jako nové zdroje světla v mnoha výzkumných laboratořích na celém světě krátce poté, co byly v šedesátých létech objeveny. Dnes jsou ale lasery doslova všudypřítomné, používáme je jak pro přenos hlasu a dat, tak pro vyměřování, svařování, ale i čtení čárových kódů v obchodech. Na fotografii je zachycena operace prováděná světlem z laseru vyvedeným optickými vlákny. Světlo z laseru, podobně jako světlo z většiny jiných zdrojů, má svůj původ v emisi světla atomy. Čím je tedy světlo z laserů tak zvláštní?

41.1 ATOMY A SVĚT KOLEM NÁS

Na začátku dvacátého století ještě řada předních vědců pochybovala o existenci atomů. Dnes již každý dobře informovaný člověk věří, že atomy existují a jsou základními stavebními kameny hmotného světa. Dnes dokonce můžeme uchopit jednotlivé atomy a posunovat s nimi. Tímto způsobem byla vytvořena kvantová hradba z úvodu kap. 40. Můžeme v ní spočítat všech 48 atomů železa, které na tomto obrázku vytvářejí pravidelný kruh. Můžeme dokonce vyfotografovat jednotlivé atomy emitující světlo. Například slabá modrá tečka uprostřed obr. 41.1 pochází od světla emitovaného jediným atomem barya (přesněji jeho iontem) uvězněným v „pasti“.



Obr. 41.1 Modrý bod na fotografii odpovídá světlu emitovanému jediným atomem barya (přesněji jeho iontem) uvězněným v „pasti“ (University of Washington, USA). Zachycený iont je nucen opakovaně emitovat světlo při kvantovém přechodu mezi stejnou dvojicí energiových hladin. Tečka pak představuje akumulovanou emisi mnoha fotonů.

41.2 NĚKTERÉ VLASTNOSTI ATOMŮ

Zdálo by se, že podrobnosti atomové fyziky jsou na hony vzdáleny našemu každodennímu životu. Avšak uvažme, nakolik následující vlastnosti atomů — tak základní, že o nich přemýšlíme jen málokdy — ovlivňují náš způsob života.

Atomy jsou stabilní. V podstatě všechny atomy, které vytvářejí náš hmatatelný svět, existovaly beze změny miliardy let. Jak by svět vypadal, kdyby se všechny atomy měnily, například po několika týdnech či měsících?

Atomy se sdružují. Atomy se slučují do stabilních molekul. Mohou se také seskupovat a vytvářet pevné látky. V atomu převládá převážně prázdný prostor, přesto můžeme stát na podlaze — tvořené atomy — aniž bychom jí propadli.

Tyto základní vlastnosti atomů mohou být vysvětleny pomocí kvantové fyziky stejně jako tři další méně známé vlastnosti, které vysvětlíme v následujících odstavcích.

Atomy lze seřadit systematicky

Obr. 41.2 ukazuje příklad opakující se vlastnosti prvků v závislosti na poloze prvku v periodické tabulce (dodatek G). Jedná se o graf **ionizační energie** prvků: zobrazuje energii nutnou k odejmutí nejslaběji vázaného elektronu z neutrálního atomu v závislosti na zařazení příslušného prvku v periodické tabulce. Pozoruhodná podobnost chemických a fyzikálních vlastností prvků, nacházejících se ve stejných sloupcích periodické tabulky, dostatečně dokazuje, že atomy jsou sestaveny na základě systematických pravidel.

Prvky jsou v periodické tabulce uspořádány do šesti vodorovných **period**; kromě první začíná každá z period nalevo vysoce reaktivním alkalickým kovem (lithium, sodík, draslík atd.) a končí napravo chemicky inertním vzácným plynem (neon, argon, krypton atd.). Chemické vlastnosti prvků objasňuje kvantová fyzika. Počty prvků v jednotlivých šesti periodách jsou následující:

$$2,\ 8,\ 8,\ 18,\ 18,\ 32.$$

Tyto hodnoty kvantová fyzika rovněž předpovídá.

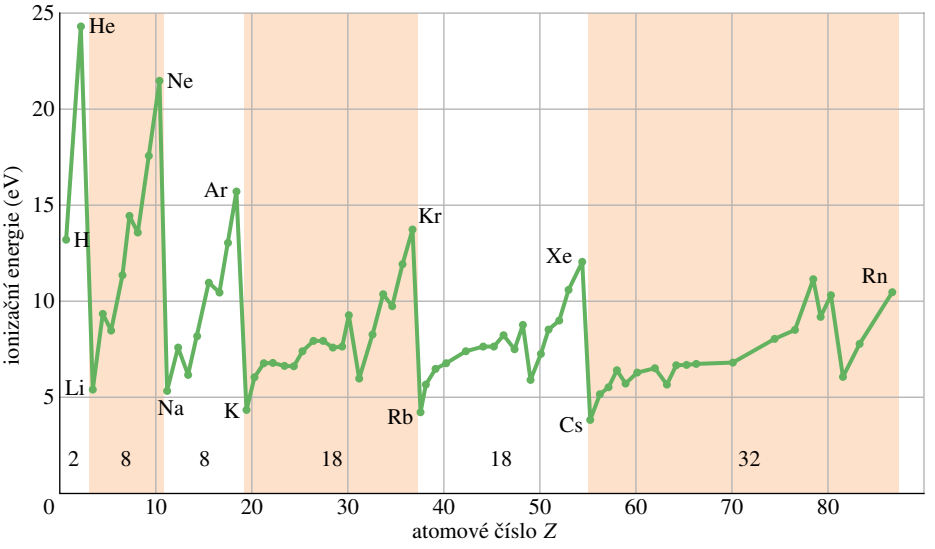
Atomy emitují a absorbují světlo

Již jsme poznali, že atomy mohou existovat pouze v diskrétních kvantových stavech, kterým pak přísluší určitá energie. Atom může přejít z jednoho stavu do druhého za současné emise světla (při přechodu na nižší energiovou hladinu), nebo absorpce světla (při přechodu na vyšší hladinu). Frekvence světla f je dána tzv. **Bohrovou frekvenční podmínkou**, postulovanou Bohrem ještě před příchodem moderní kvantové fyziky:

$$hf = E_{\mathrm{v}} - E_{\mathrm{n}} \quad \text{(Bohrova frekvenční podmínka).} \quad (41.1)$$

Zde E_{v} je energie vyššího kvantového stavu, E_{n} je energie nižšího kvantového stavu pro daný přechod, hf je energie fotonu emitovaného nebo absorbovaného světla.

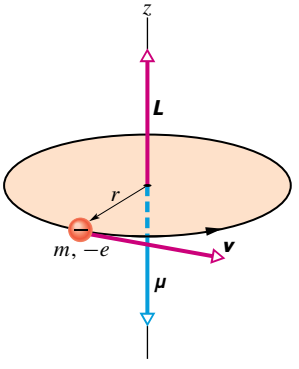
Problém určení frekvence světla vyzářeného nebo pohlceného atomem se tak redukuje na problém nalezení energie kvantových stavů atomu. Kvantová fyzika nám, alespoň v principu, umožňuje tyto energie vypočítat.



Obr. 41.2 Závislost ionizačních energií prvků na jejich atomových číslech ukazuje, že vlastnosti prvků se pravidelně opakují v šesti vodorovných řádcích periodické tabulky prvků. V grafu jsou rovněž uvedeny počty prvků v jednotlivých řádcích periodické soustavy.

Atomy mají moment hybnosti a vlastní magnetismus

Na obr. 41.3 je znázorněna záporně nabitá částice (elektron) obíhající po kruhové dráze kolem nehybného středu (jádra atomu). Ze čl. 32.4 víme, že obíhající částice má jak moment hybnosti $\boldsymbol{L}$, tak magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$ (protože je ekvivalentní malé proudové smyčce). Jak ukazuje obr. 41.3, jsou oba vektory $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{\mu}$ kolmé na rovinu dráhy, ale vzhledem k zápornému znaménku náboje mají opačný směr.



Obr. 41.3 Klasický model atomu znázorňuje částici o hmotnosti m a s nábojem $-e$ pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}$ po kružnici o poloměru r. Pohybující se částice má moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ daný vztahem $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, kde $\boldsymbol{p}$ je její hybnost $m\boldsymbol{v}$. Pohyb nabité částice po uzavřené kruhové dráze je ekvivalentní proudové smyčce, se kterou je spojen magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$, mířící do opačného směru než $\boldsymbol{L}$.

Model z obr. 41.3 je čistě klasický a nevyjadřuje přesně chování elektronu v atomu. V kvantové fyzice byl tento model pevné dráhy nahrazen pravděpodobnostním modelem, nejlépe znázorněným pomocí bodového grafu z čl. 40.7. I v kvantové fyzice však stále obecně platí, že každý kvantový stav elektronu v atomu má určitý moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ a magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$, které jsou opačně orientovány. Tyto vektorové veličiny jsou spolu *svázány*.

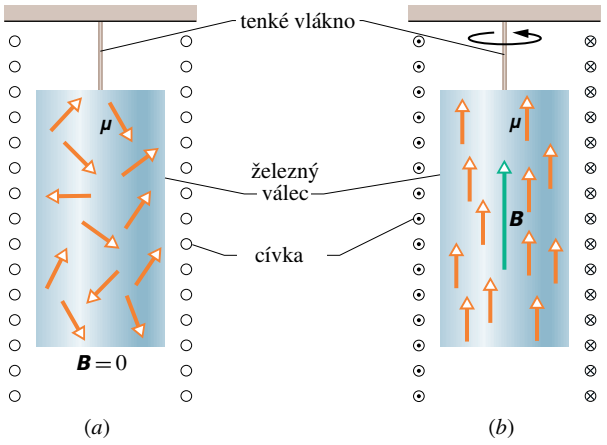
Einsteinův-de Haasův pokus

V roce 1915, mnohem dříve než byla objevena kvantová fyzika, Albert Einstein a holandský fyzik W. J. de Haas uskutečnili chytrý pokus navržený tak, aby potvrdil existenci vzájemné vazby mezi momentem hybnosti a magnetickým dipólovým momentem jednotlivých atomů.

Einstein a de Haas zavěsili železný válec na tenké vlákno, jak ukazuje obr. 41.4a. Kolem válce pak umístili solenoid, který se však válce nedotýkal. Zpočátku míří magnetické dipóly $\boldsymbol{\mu}$ atomů ve válci náhodně do všech směrů, takže se jejich magnetický účinek navenek vyruší (obr. 41.4a). Jakmile ovšem začne solenoidem protékat proud (obr. 41.4b) a vytvoří se tak magnetické pole $\boldsymbol{B}$ orientované rovnoběžně s osou válce, zorientují se magnetické dipóly atomů železa tak, aby zaujaly směr daný polem $\boldsymbol{B}$. Pokud je moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ opravdu svázán s magnetickým dipólovým momentem $\boldsymbol{\mu}$, pak toto natočení magnetických dipólů ve směru vnějšího magnetického pole $\boldsymbol{B}$ musí mít za následek natočení momentů hybnosti jednotlivých atomů železa v opačném směru, než je směr tohoto pole.

Na válec na počátku nepůsobí momenty vnějších sil; moment hybnosti válce si musí zachovat svou počáteční nulovou hodnotu. Zapneme-li však pole $\boldsymbol{B}$, natočí se vůči němu momenty hybnosti atomů nesouhlasně a tím udělují válci jako celku jistý výsledný nenulový moment hybnosti (orientovaný dolů na obr. 41.4b). Aby ovšem celkový

moment hybnosti zůstal zachován (a byl roven původní, tedy nulové hodnotě), začne se válec otáčet kolem své osy tak, aby měl moment hybnosti opačného směru (tj. nahoru v obr. 41.4b).



Obr. 41.4 Uspořádání Einsteinova-de Haasova pokusu. (a) Na počátku je magnetické pole v železném válci nulové a vektory magnetického dipólového momentu $\boldsymbol{\mu}$ jednotlivých atomů jsou náhodně orientovány. Momenty hybnosti atomů (nejsou zakresleny) mají opačný směr než vektory magnetických dipólů jednotlivých atomů, a jsou tedy rovněž orientovány náhodně. (b) Po zapnutí magnetického pole $\boldsymbol{B}$ ve směru osy válce se jednotlivé magnetické dipólové momenty uspořádají paralelně s $\boldsymbol{B}$, což znamená, že momenty hybnosti se uspořádají ve směru opačném k $\boldsymbol{B}$. Protože na válec na počátku nepůsobí vnější moment sil, zachovává se jeho celkový moment hybnosti a válec jako celek se musí začít otáčet kolem své osy směrem, který je na obrázku vyznačen.

Kdyby nebylo vlákna, otáčel by se válec tak dlouho, dokud by bylo přítomno magnetické pole. Kroucením vlákna se však brzy vytvoří kroutivý moment. Ten zanedlouho otáčení válce zastaví a začne válcem otáčet v opačném směru; přitom se vlákno narovnává. Vlákno se bude kroutit a narovnávat, jak se válec bude otáčet kolem své rovnovážné polohy v harmonickém pohybu jako torzní kyvadlo.

Pozorování rotace válce prokázala, že moment hybnosti a magnetický dipólový moment atomu jsou opačně orientované. Navíc prokázala, že moment hybnosti spojený s mikroskopickými atomárními systémy může mít za následek viditelnou rotaci objektu běžné velikosti.

41.3 SPIN ELEKTRONU

Jak jsme se již zmiňovali v čl. 32.4, má elektron, ať uvězněný v atomu nebo volný, svůj vnitřní **spinový moment hybnosti** $\boldsymbol{S}$, často nazývaný jednoduše **spin**. (Připomeňme si, že *vnitřní* zde znamená, že $\boldsymbol{S}$ je základní charakteristika elektronu, stejně jako jeho hmotnost a elektrický náboj.) Jak ukážeme v dalším odstavci, je velikost $\boldsymbol{S}$ kvantována a závisí na **spinovém kvantovém čísle** s, které je pro elektrony rovno vždy $\frac{1}{2}$ (a stejně tak pro protony a neutrony). Navíc i složka spinu měřená podél libovolně zvolené osy je kvantována a závisí na hodnotě **kvantového spinového magnetického čísla** m_s, která může být pouze $+\frac{1}{2}$, nebo $-\frac{1}{2}$.

Existenci spinu elektronu postulovali dva holandští doktorandi Georg Uhlenbeck a Samuel Goudsmit na základě studia spekter atomů. Kvantově mechanické základy spinu elektronu položil až o několik let později anglický fyzik P. A. M. Dirac, který v roce 1929 vytvořil relativistickou kvantovou teorii elektronu.

Je velmi lákavé představovat si elektron jako malou kuličku a spin jako projev její rotace kolem vlastní osy. Tato klasická představa však neodpovídá skutečnosti, stejně jako nelze brát doslovně klasický model orbit elektronu. V kvantové fyzice je asi nejlepší považovat spinový moment hybnosti za měřitelnou vnitřní vlastnost elektronu; spin prostě nelze spojovat s nějakým mechanickým modelem.

Tab. 41.1 uvádí čtyři kvantová čísla n, l, m_l a m_s, která určují kvantové stavy elektronu ve vodíkovém atomu. Stejná kvantová čísla rovněž charakterizují dovolené stavy elektronu i ve víceelektronových atomech.

Tabulka 41.1 **Stavy elektronu v atomu**

KVANTOVÉ ČÍSLO	SYMBOL	DOVOLENÉ HODNOTY	VYJADŘUJE
hlavní	n	$1, 2, 3, \ldots$	vzdálenost od jádra
orbitální	l	$0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$	orbitální moment hybnosti (velikost)
magnetické orbitální	m_l	$0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l$	orbitální moment hybnosti (z-ová složka)
magnetické spinové	m_s	$\pm 1/2$	spinový moment hybnosti (z-ová složka)

Všechny stavy se stejnou hodnotou n tvoří **slupku**.
Ve slupce je $2n^2$ stavů.
Všechny stavy se stejnou hodnotou n a l tvoří **podslupku**.
Všechny stavy v jedné podslupce mají stejnou energii.
V podslupce je $2(2l+1)$ stavů.

41.4 MOMENTY HYBNOSTI A MAGNETICKÉ DIPÓLOVÉ MOMENTY

S každým kvantovým stavem elektronu v atomu je spojen orbitální moment hybnosti a jemu odpovídající orbitální magnetický dipólový moment. Každý elektron, ať už vázaný nebo volný, má spinový moment hybnosti a odpovídající spinový magnetický dipólový moment. Nejdříve probereme každou z těchto veličin odděleně a poté jejich možné kombinace.

Orbitální moment hybnosti a orbitální magnetický dipólový moment

Velikost L **orbitálního momentu hybnosti** $\boldsymbol{L}$ elektronu v atomu je kvantována; to znamená, že může nabývat pouze hodnoty z určitého diskrétního souboru. Tyto hodnoty jsou

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \tag{41.2}$$

kde l je orbitální (nebo také vedlejší) kvantové číslo. Podle tab. 41.1 musí být l buď nula, nebo kladné celé číslo nejvýše rovné $n-1$. Například pro stav s $n=3$ jsou pro l dovoleny pouze hodnoty $l=2$, $l=1$ a $l=0$.

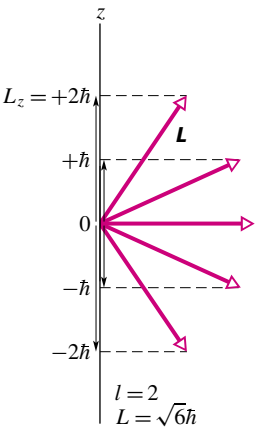
Zvolme v prostoru libovolný směr a označme jej jako osu z. Ukazuje se, že průmět orbitálního momentu hybnosti do osy z je kvantován: složka L_z může nabývat pouze hodnot daných vztahem (32.9)

$$L_z = m_l\hbar, \tag{41.3}$$

kde m_l je magnetické kvantové číslo z tab. 41.1. Na obr. 41.5 je znázorněno pět možných hodnot složek L_z orbitálního momentu hybnosti elektronu s $l=2$ a také příslušné orientace momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$. (Obrázek je poněkud zavádějící — jakmile jsme určili složku vektoru $\boldsymbol{L}$ ve zvoleném směru, jsou jeho složky v jiných směrech neurčené.) Pro danou hodnotu l existuje $2l+1$ různých možných hodnot m_l. Omezení kladené kvantovou fyzikou na velikosti složky L_z se nazývá **prostorové kvantování**.

Jak víme z čl. 32.4, je s orbitálním momentem hybnosti spojen orbitální magnetický dipólový moment. Oba momenty jsou svázány rov. (32.8). Je-li tedy kvantován orbitální moment hybnosti, musí být kvantován rovněž orbitální magnetický dipólový moment. Speciálně pro jeho z-ovou složku platí (rov. (32.11))

$$\mu_{\mathrm{orb},z} = -m_l\mu_{\mathrm{B}}. \tag{41.4}$$



Obr. 41.5 Dovolené hodnoty L_z elektronu v kvantovém stavu s $l=2$. Ke každému orbitálnímu momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ na obrázku existuje vektor směřující do opačného směru, který představuje orbitální magnetický dipólový moment.

V tomto vztahu je m_l magnetické orbitální kvantové číslo z tab. 41.1 a μ_{B} je *Bohrův magneton* (rov. (32.5))

$$\mu_{\mathrm{B}} = \frac{eh}{4\pi m} = \frac{e\hbar}{2m} = 9{,}274\cdot10^{-24}\ \mathrm{J/T}$$

(Bohrův magneton), (41.5)

kde m je hmotnost elektronu a e je velikost jeho náboje.

Všimněme si, že L_z a $\mu_{\mathrm{orb},z}$ z rov. (41.3) a (41.4) mají opačná znaménka. Orbitální moment hybnosti a orbitální magnetický dipólový moment elektronu v atomu mají totiž opačný směr. Je to proto, že náboj *elektronu* je záporný.

Pokud atom vložíme do magnetického pole $\boldsymbol{B}$, bude směr tohoto pole pro atom zvláště významný. Zvolíme proto v tomto směru osu z a k ní budeme vztahovat orientaci jak magnetického dipólového momentu, tak i s ním spojeného momentu hybnosti (odtud také název magnetické kvantové číslo pro m_l).

Spinový moment hybnosti a spinový magnetický dipólový moment

Velikost S spinového momentu hybnosti $\boldsymbol{S}$ libovolného elektronu, ať volného či vázaného, má jedinou hodnotu; je dána vztahem

$$S = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \\ = \hbar\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+1\right)} = 0{,}866\hbar, \tag{41.6}$$

kde $s = \frac{1}{2}$ je spinové kvantové číslo elektronu. Stejně jako v případě orbitálního momentu hybnosti lze i pro spinový moment hybnosti určit pouze jednu jeho složku, a ta je kvantována. Může nabývat pouze dvou hodnot podle vztahu (rov. (32.3))

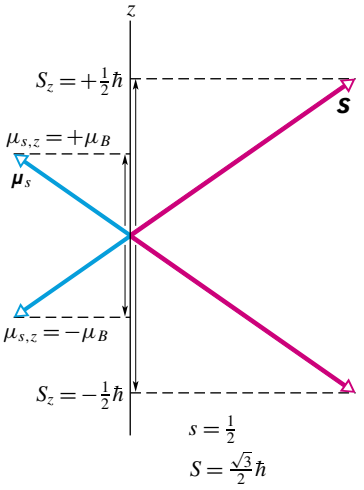
$$S_z = m_s\hbar, \tag{41.7}$$

kde m_s, spinové magnetické kvantové číslo v tab. 41.1; je rovno $+\frac{1}{2}$, nebo $-\frac{1}{2}$.

Podobně jako v případě orbitálních momentů jsou i spinové momenty svázány, a to rov. (32.2). Proto i z-ová složka spinového magnetického dipólového momentu je kvantována a nabývá dvou hodnot podle vztahu (rov. (32.4))

$$\mu_{s,z} = -2m_s\mu_B. \qquad (41.8)$$

Na obr. 41.6 jsou znázorněny dva možné průměty spinového momentu hybnosti a průměty spinového magnetického dipólového momentu hybnosti do osy z.



Obr. 41.6 Dovolené hodnoty S_z a μ_z elektronu.

Povšimněme si, že rov. (41.8) popisující spinový magnetický dipólový moment se od rov. (41.4) popisující orbitální magnetický dipólový moment liší faktorem 2.*

KONTROLA 1: Elektron se nachází v kvantovém stavu, ve kterém velikost jeho orbitálního momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ je $2\hbar\sqrt{3}$. Kolik je dovolených projekcí orbitálního magnetického dipólového momentu?

Skládání orbitálních a spinových momentů hybnosti

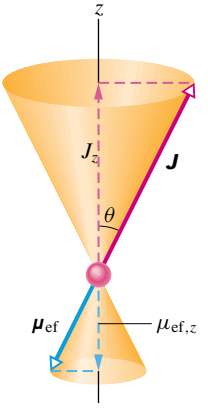
V atomu, který obsahuje více než jeden elektron, definujeme celkový moment hybnosti $\boldsymbol{J}$ jako součet momentů hybnosti jednotlivých elektronů, a to momentů jak orbitálních, tak spinových. Počet elektronů (a počet protonů) v neutrálním atomu je roven **atomovému číslu** (zvanému též **nábojové číslo**) Z. Pro atom platí

$$\boldsymbol{J} = (\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_3 + \ldots + \boldsymbol{L}_Z) + (\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_3 + \ldots + \boldsymbol{S}_Z). \qquad (41.9)$$

Obdobně i celkový magnetický dipólový moment mnohaelektronového atomu obdržíme jako vektorový součet jednotlivých magnetických dipólových momentů všech elektronů (jak orbitálních, tak spinových). Vzhledem k faktoru 2 v rov. (41.8) však nebude výsledný magnetický dipólový moment atomu směřovat ve směru vektoru $-\boldsymbol{J}$, ale bude s ním svírat jistý úhel. Průmět součtu magnetických dipólových momentů elektronů do směru vektoru $-\boldsymbol{J}$ nazýváme efektivní magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_{ef}$ atomu.

Jak uvidíme v následujícím odstavci, v typických atomech je vektorový součet orbitálních momentů hybnosti a spinových momentů hybnosti většiny elektronů nulový. Pak $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{\mu}_{ef}$ u takových atomů jsou způsobeny poměrně malým počtem elektronů — často jediným valenčním elektronem.

Obr. 41.7 zobrazuje klasický model, který nám pomůže představit si prostorové kvantování vektorů celkového momentu hybnosti $\boldsymbol{J}$ a efektivního magnetického dipólového momentu $\boldsymbol{\mu}_{ef}$. Oba navzájem svázané vektory rotují kolem osy z tak, že opisují plášť kužele; tento pohyb se nazývá *precese*. Průmět vektorů $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{\mu}_{ef}$ do osy z se však při tomto precesním pohybu nemění.



Obr. 41.7 Klasický model znázorňuje vektor celkového momentu hybnosti $\boldsymbol{J}$ a vektor efektivního magnetického momentu $\boldsymbol{\mu}_{ef}$ vykonávající precesní pohyby kolem osy z, určené slabým vnějším magnetickým polem. Oba vektory stále svírají s osou z úhel θ, takže průměty $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{\mu}_{ef}$ do osy z zůstávají konstantní po celou dobu precese.

Precese a princip neurčitosti

Heisenbergův princip neurčitosti přináší omezení klasického modelu z obr. 41.7. V polárních souřadnicích platí

$$\Delta J_z \Delta\varphi \approx \hbar, \qquad (41.10)$$

* Pokročilejší formulace kvantové mechaniky, **kvantová elektrodynamika**, předpovídá, že faktor „2" v rov. (41.8) je ve skutečnosti roven 2,002 319 304 76. Tato hodnota byla rovněž experimentálně naměřena. V rámci přesnosti měření souhlasí získaná hodnota s teoretickou předpovědí.

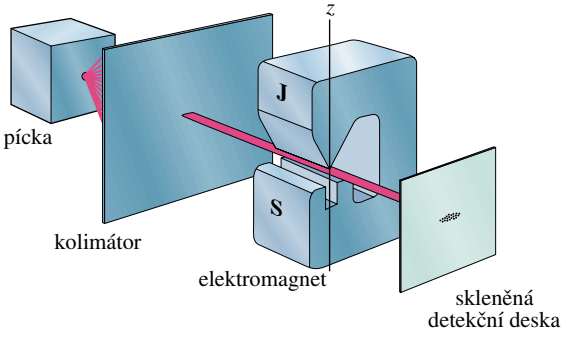
kde φ je úhel rotace kolem osy z na obr. 41.7. To, že složka J_z zůstává po celou dobu pohybu konstantní, znamená, že $\Delta J_z = 0$. Z rov. (41.10) pak vyplývá, že by $\Delta\varphi$ muselo růst nad všechny meze. To znamená, že i když je součet $J_x^2 + J_y^2$ konstantní, nemůžeme jednotlivé složky J_x a J_y změřit. Můžeme shrnout:

Měřitelné jsou jen *průměty* vektorů $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{\mu}_{\text{ef}}$ do směru vnějšího magnetického pole.

41.5 STERNŮV-GERLACHŮV POKUS

V roce 1922 Otto Stern a Walter Gerlach z univerzity v Hamburku experimentálně ověřili prostorové kvantování. Tehdy ještě nebyla kvantová mechanika rozvinutá a pojem spinu elektronu nebyl zaveden. Bylo ale již známo, že atomy mnoha prvků mají vlastní moment hybnosti a magnetický dipólový moment; rovněž byla vyslovena hypotéza prostorového kvantování.

Na obr. 41.8 je schematicky znázorněno uspořádání Sternova-Gerlachova pokusu. V elektrické pícce se vypařuje stříbro; jednotlivé atomy stříbra vycházejí úzkou štěrbinou ve stěně pícky do evakuovaného prostoru. Některé z atomů (které jsou elektricky neutrální, ale mají vlastní magnetický moment) procházejí úzkou štěrbinou v dalším stínítku (nazývaném *kolimátor*) a vytvářejí úzký svazek. Ten prochází mezi pólovými nástavci elektromagnetu a nanáší vrstvu stříbra na skleněné detekční desce.



Obr. 41.8 Zařízení, na kterém Stern a Gerlach v roce 1922 prokázali prostorové kvantování. Celý přístroj se nachází ve vakuové aparatuře.

Magnetický dipól v nehomogenním magnetickém poli

Trochu odbočíme a pokusíme se zjistit, jaké síly působí na atomy stříbra v místě pólových nástavců, které mají takový tvar, aby vytvářely *silně nehomogenní* magnetické pole.

Na obr. 41.9a je zobrazen magnetický dipól $\boldsymbol{\mu}$ svírající úhel θ s *homogenním* magnetickým polem. Můžeme si představit, že dipól má severní a jižní pól a jeho magnetický dipólový moment směřuje (podle konvence) od jižního k severnímu pólu. V případě homogenního magnetického pole je výsledná síla působící na dipól rovna nule. Síly $\boldsymbol{F}_{\text{S}}$ a $\boldsymbol{F}_{\text{J}}$ z obr. 41.9a, které působí na severní a jižní pól magnetu, mají opačný směr a stejnou velikost a vzájemně se vyruší bez ohledu na orientaci magnetického dipólu. (Obě síly působí na dipól silovým momentem, to však není pro další výklad podstatné.)

Obr. 41.9b, c znázorňují situaci v případě nehomogenního pole. Zde již síly $\boldsymbol{F}_{\text{S}}$ a $\boldsymbol{F}_{\text{J}}$ *nemají* stejnou velikost, protože oba póly dipólu se nacházejí v místech s různou velikostí pole. V tomto případě tedy na dipól působí nenulová výsledná síla $\boldsymbol{F}_{\text{v}}$, jejíž velikost závisí na orientaci dipólu vzhledem k magnetickému poli, tedy na úhlu θ. V obr. 41.9b míří výslednice vzhůru a v obr. 41.9c míří dolů. To nám říká, že atomy stříbra ve svazku na obr. 41.8 budou při průletu mezi pólovými nástavci elektromagnetu vychýleny. Směr a velikost vychýlení svazku budou záviset na orientaci magnetických dipólových momentů stříbra.

Určeme nyní vychylující sílu, tj. sílu, působící ve směru $\boldsymbol{B}$, který jsme zvolili za směr osy z. Nejdříve si připomeňme, že podle rov. (29.36) lze vyjádřit potenciální energii magnetického dipólu v poli $\boldsymbol{B}$ jako

$$E_{\text{p}} = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B} = -(\mu\cos\theta)B, \qquad (41.11)$$

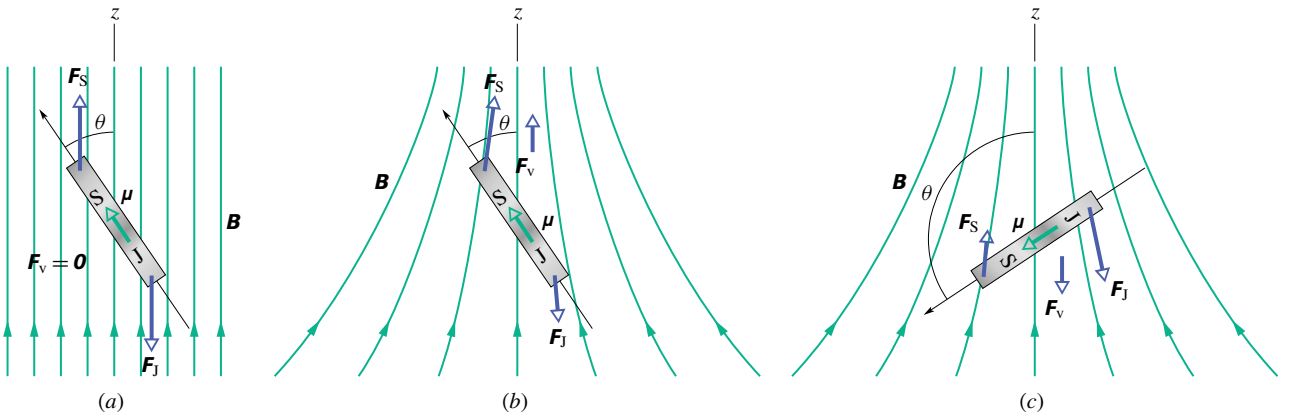
kde θ je úhel, který svírají vektory $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{B}$, jak ukazuje obr. 41.9. Z rov. (8.19) pak vyplývá, že složka výsledné síly působící na atom je $F_z = -\mathrm{d}E_{\text{p}}/\mathrm{d}z$; z rov. (41.11) tedy plyne

$$F_z = -\frac{\mathrm{d}E_{\text{p}}}{\mathrm{d}z} = (\mu\cos\theta)\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}. \qquad (41.12)$$

Na obr. 41.9b, c roste B pro rostoucí z, tedy výraz $\mathrm{d}B/\mathrm{d}z$, *gradient* magnetického pole, je kladný. Znaménko vychylující síly je dáno úhlem θ. Je-li $\theta < 90^\circ$ (jako je tomu na obr. 41.9b), bude atom vychýlen nahoru; je-li $\theta > 90^\circ$ (obr. 41.9c), bude vychýlen dolů. Rov. (41.12) rovněž vysvětluje, proč je magnetické pole ve Sternově-Gerlachově pokusu silně nehomogenní; vychylující síla je totiž přímo úměrná nikoli B, ale $\mathrm{d}B/\mathrm{d}z$.

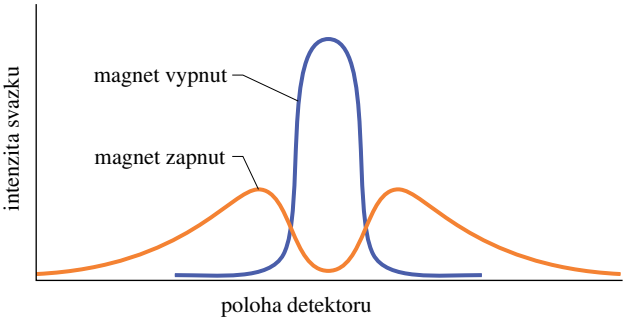
Výsledky pokusu

Po prozkoumání nanesené vrstvy stříbra zjistili Stern s Gerlachem toto: je-li elektromagnet vypnut, prochází svazek ke skleněné desce bez vychýlení; zapneme-li elektromagnet, svazek atomů stříbra se působením magnetického pole rozdělí na dva a každý z nich odpovídá jiné orientaci magnetického momentu atomů stříbra. My nyní víme (ale tehdy



Obr. 41.9 Magnetický dipól, znázorněný jako tyčový magnet se dvěma póly (a) v homogenním magnetickém poli a (b, c) v nehomogenním magnetickém poli. Výsledná síla $\boldsymbol{F}_v$ působící na magnet je nulová v případě (a), orientovaná vzhůru v případě (b) a dolů v případě (c).

to známo nebylo), že se všechny spinové a orbitální magnetické momenty elektronů v atomu stříbra navzájem vyruší s výjimkou spinového magnetického dipólového momentu jediného valenčního elektronu. Z rov. (41.8) a obr. 41.6 vyplývá existence právě dvou svazků, a to je v přesné shodě s tímto pokusem. Stern s Gerlachem zakončili svou tehdejší publikaci slovy: „V těchto výsledcích spatřujeme přímý experimentální důkaz existence prostorového kvantování v magnetickém poli.“ A fyzikové s nimi souhlasili.



Obr. 41.10 Výsledky moderního opakování Sternova-Gerlachova pokusu. Pokud je elektromagnet vypnut, detegujeme pouze jeden svazek; je-li zapnut, původní svazek se rozdělí na dva. Tyto svazky odpovídají souhlasné a nesouhlasné orientaci magnetických momentů atomů cesia vůči vnějšímu magnetickému poli.

Obr. 41.10 ukazuje graf závislosti intenzity svazku na poloze detektoru při nedávném opakování Sternova-Gerlachova pokusu. Experimentátoři použili místo atomů stříbra atomy cesia a detekční část byla rovněž jiná; jinak bylo uspořádání stejné jako na obr. 41.8. Rozdělení původního svazku na dva svazky po zapnutí magnetického pole je zde zvláště zřetelné.

PŘÍKLAD 41.1

Magnet použitý ve Sternově-Gerlachově pokusu vytváří magnetické pole o gradientu $\mathrm{d}B/\mathrm{d}z = 1{,}4\,\mathrm{T/mm}$. Dráha l, kterou svazek v magnetu urazí, je 3,5 cm. Teplota ve vypařovací pícce je zvolena tak, aby velikost nejpravděpodobnější rychlosti v pro atomy ve svazku byla 750 m/s. Určete vzdálenost d mezi svazky v okamžiku, kdy opouštějí magnet. (Hmotnost m_{Ag} atomu stříbra je $1{,}8\cdot10^{-25}$ kg a jeho efektivní magnetický moment je roven Bohrovu magnetonu, tedy $9{,}27\cdot10^{-24}\,\mathrm{J/T}$.)

ŘEŠENÍ: Z druhého Newtonova pohybového zákona a rov. (41.12) určíme zrychlení, se kterým se pohybuje atom stříbra mezi pólovými nástavci magnetu:

$$a_z = \frac{F_z}{m_{\mathrm{Ag}}} = \frac{(\mu\cos\theta)(\mathrm{d}B/\mathrm{d}z)}{m_{\mathrm{Ag}}}.$$

Pohybuje-li se atom vodorovně s rychlostí o velikosti v, stráví mezi nástavci magnetu dobu $t = l/v$. Svislé vychýlení, s jakým opustí každý atom magnet, je tedy

$$d = \frac{1}{2}a_z t^2 = \frac{1}{2}\frac{(\mu\cos\theta)(\mathrm{d}B/\mathrm{d}z)}{m_{\mathrm{Ag}}}\left(\frac{l}{v}\right)^2.$$

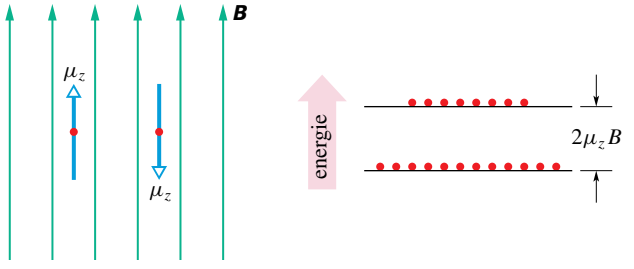
Zajímá-li nás maximální hodnota vychýlení svazku, zvolíme $\theta = 0^\circ$ a po dosazení získáme

$$d = \frac{(\mu\cos\theta)(\mathrm{d}B/\mathrm{d}z)l^2}{2m_{\mathrm{Ag}}v^2} =$$
$$= (9{,}27\cdot10^{-24}\,\mathrm{J\cdot T^{-1}})(1)(1{,}4\cdot10^{3}\,\mathrm{T\cdot m^{-1}})\cdot$$
$$\cdot\frac{(3{,}5\cdot10^{-2}\,\mathrm{m})^2}{2(1{,}8\cdot10^{-25}\,\mathrm{kg})(750\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2} =$$
$$= 7{,}85\cdot10^{-5}\,\mathrm{m} \doteq 0{,}08\,\mathrm{mm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vzdálenost mezi oběma svazky je pak dvojnásobek této hodnoty, tedy 0,16 mm. Oddělení obou svazků sice není velké, ale můžeme je snadno změřit.

41.6 JADERNÁ MAGNETICKÁ REZONANCE

V čl. 32.4 jsme se zmínili, že proton má vlastní spinový moment hybnosti $\boldsymbol{S}$. S ním je spojen spinový magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$, který má stejný směr jako vektor $\boldsymbol{S}$, protože proton je kladně nabitá částice. Je-li proton v magnetickém poli $\boldsymbol{B}$ orientovaném podél osy z, může průmět spinového magnetického dipólového momentu do osy z mít pouze dvě kvantované orientace: souhlasnou, nebo nesouhlasnou se směrem $\boldsymbol{B}$ (obr. 41.11a). Z rov. (29.37) víme, že se energie pro tyto dvě orientace liší o $2\mu_z B$, což je energie potřebná k převrácení magnetického dipólu v homogenním magnetickém poli. Stav s nižší energií má $\boldsymbol{\mu}_z$ ve směru pole $\boldsymbol{B}$, stav s vyšší energií má $\boldsymbol{\mu}_z$ opačné.



Obr. 41.11 (a) Průmět spinu protonu do směru vnějšího magnetického pole má velikost $\frac{1}{2}\hbar$ a může ve vnějším magnetickém poli mít jednu ze dvou kvantovaných orientací. Je-li splněna podmínka vyjádřená v rov. (41.13), může ve zkoumaném vzorku docházet k překlápění spinu protonů z jedné orientace do druhé. (b) Obvykle bývá více protonů ve stavu s nižší energií než ve vyšším energiovém stavu.

Dáme-li do homogenního magnetického pole $\boldsymbol{B}$ kapku vody, mají protony atomů vodíků $\boldsymbol{\mu}_z$ orientovány buď souhlasně, nebo nesouhlasně vůči magnetickému poli $\boldsymbol{B}$. Působíme-li nyní na kapku střídavým elektromagnetickým polem o vhodné frekvenci f, mohou protony ve stavech s nižší energií přejít do stavů s vyšší energií obrácením orientace $\boldsymbol{\mu}_z$. Tento proces se nazývá **překlopení spinu** (angl. *spin flipping*), protože změna orientace magnetického dipólového momentu protonu vyžaduje převrácení orientace jeho spinu. Frekvence f potřebná k překlopení spinu je dána vztahem

$$hf = 2\mu_z B, \tag{41.13}$$

který je podmínkou vzniku **jaderné magnetické rezonance** (často se užívá zkratka NMR z angl. *nuclear magnetic resonance*). To znamená, že pokud střídavé elektromagnetické pole má způsobovat překlápění spinů protonů v magnetickém poli, musí být energie hf fotonů tohoto pole rovna rozdílu $2\mu_z B$ energií pro dvě možné orientace $\boldsymbol{\mu}_z$ (a tedy i spinu protonu) v tomto poli.

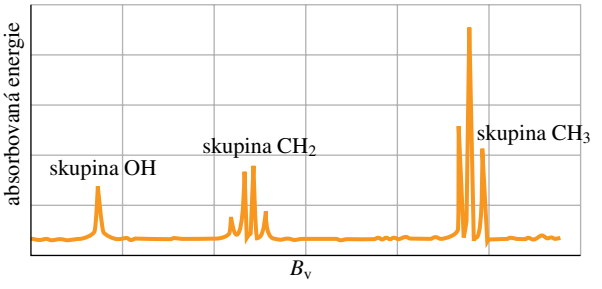
Jakmile spin protonu přejde do stavu s vyšší energií, může se vrátit do stavu s nižší energií vyzářením fotonu o stejné energii hf, dané rov. (41.13). Obvykle bývá více protonů v nižším než ve vyšším energiovém stavu, jak to naznačuje obr. 41.11b. To znamená, že můžeme měřit *absorpci* energie z přiloženého střídavého elektromagnetického pole.

Stálé pole $\boldsymbol{B}$ v rov. (41.13) ve skutečnosti *není* rovno vnějšímu magnetickému poli $\boldsymbol{B}_\mathrm{v}$, ve kterém je vodní kapka umístěna; k tomuto poli je nutno přidat malé lokální pole $\boldsymbol{B}_\mathrm{l}$, způsobené magnetickými momenty atomů a jader v blízkosti daného protonu. Rov. (41.13) můžeme tedy přepsat do tvaru

$$hf = 2\mu_z(B_\mathrm{v} + B_\mathrm{l}). \tag{41.14}$$

Při měření absorpčních NMR spekter je obvykle frekvence f proměnného elektromagnetického pole pevně nastavena a měníme velikost B_v. Když je splněna rov. (41.14), zaznamenáme absorpční pík.

Jaderná magnetická rezonance tvoří základ cenné analytické metody obzvláště vhodné k určování neznámých organických sloučenin. Na obr. 41.12 je znázorněno **spektrum jaderné magnetické rezonance** pro ethanol, který má chemický vzorec CH_3-CH_2-OH. Jednotlivé rezonanční píky odpovídají překlápění spinů protonů. Ty se vyskytují pro různé hodnoty B_v, neboť bezprostřední okolí šesti protonů v molekule ethanolu je pro každý proton různé. Spektrum na obr. 41.12 je pro ethanol specifické.



Obr. 41.12 Spektrum jaderné magnetické rezonance pro ethanol. Spektrální čáry představují absorpci energie potřebné pro překlápění spinů protonů. Tři vyznačené skupiny čar odpovídají protonům ve skupinách OH, CH_2 a CH_3 v molekule ethanolu. Poznamenejme, že dva protony ve skupině CH_2 se nacházejí ve čtyřech různých lokálních prostředích. Rozsah vodorovné osy je menší než 10^{-4} T.

Na principu NMR je založena i zobrazovací technika zvaná NMR tomografie (někdy též MRI z anglického *magnetic resonance imaging*), která se velmi úspěšně používá

v lékařské diagnostice. Protony v lidských tkáních jsou obklopeny různým lokálním magnetickým prostředím. Je-li tělo nebo jeho část umístěno do silného vnějšího magnetického pole, mohou být tyto lokální rozdíly při zpracování počítačem zobrazeny podobně jako v rentgenové tomografii. Na obr. 41.13 je touto technikou zobrazen příčný řez lidskou hlavou.



Obr. 41.13 Příčný řez lidskou hlavou vytvořený technikou MRI. Některé ze zobrazených detailů není možné získat ani při použití nejmodernějšího rentgenového tomografu CT (z anglického *computerized tomography*).

PŘÍKLAD 41.2

Kapka vody je vložena do stálého magnetického pole $\boldsymbol{B}$ o velikosti 1,80 T a střídavého elektromagnetického pole takové frekvence, aby došlo k překlápění spinů protonů. Složka μ_z magnetického dipólového momentu protonu ve směru vektoru $\boldsymbol{B}$ má velikost $1{,}41\cdot10^{-26}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}}$. Předpokládejme, že lokální magnetické pole můžeme proti $\boldsymbol{B}$ zanedbat. Jaká musí být frekvence f a vlnová délka λ střídavého magnetického pole?

ŘEŠENÍ: Z rov. (41.13) plyne

$$f = \frac{2\mu_z B}{h} = \frac{2(1{,}41\cdot10^{-26}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}})(1{,}80\ \mathrm{T})}{(6{,}63\cdot10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s})} =$$
$$= 7{,}66\cdot10^{7}\ \mathrm{Hz} = 76{,}6\ \mathrm{MHz}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Odpovídající vlnová délka je

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{(3{,}00\cdot10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})}{(7{,}66\cdot10^{7}\ \mathrm{Hz})} = 3{,}92\ \mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tyto hodnoty frekvence a vlnové délky leží v krátkovlnné rádiové oblasti elektromagnetického spektra.

41.7 PAULIHO VYLUČOVACÍ PRINCIP

V kap. 40 jsme uvažovali řadu elektronových pastí od modelových jednorozměrných pastí až po atom vodíku, reálnou past ve třech rozměrech. Ve všech těchto případech jsme zachycovali pouze jeden elektron. Než se ale pustíme do pastí obsahujících dva a více elektronů, jak tomu bude v dalších dvou částech, uvedeme princip, kterým se řídí každá částice, jejíž spinové kvantové číslo s není nula nebo není celočíselné. Tento princip platí nejen pro elektrony, ale také pro protony a neutrony, které všechny mají $s = \frac{1}{2}$. Nazývá se **Pauliho vylučovací princip** a formuloval ho Wolfgang Pauli v roce 1925. Pro elektrony stanovuje:

Žádné dva elektrony zachycené v téže pasti nemohou mít stejný soubor hodnot kvantových čísel.

Jak uvidíme v kap. 41.9, tento princip znamená, že žádné dva elektrony v atomu nemohou mít stejné čtyři hodnoty kvantových čísel n, l, m_l a m_s. Jinak řečeno: kvantová čísla každé dvojice elektronů v atomu se musí lišit aspoň v jednom kvantovém čísle. Pokud by to tak nebylo, atom by zkolaboval, a nemohli bychom existovat ani my, ani svět, jak jej známe.

41.8 PRAVOÚHLÉ PASTI S VÍCE ELEKTRONY

Abychom se připravili na popis chování více elektronů v atomu, budeme se zabývat dvěma elektrony zachycenými v pravoúhlých pastích popsaných v kap. 40. Opět použijeme kvantová čísla, která odpovídala jednotlivým pastím v případě zachycení pouze jednoho elektronu. Nyní ale budeme uvažovat i spin elektronů. Podle rov. (41.7) může mít elektron spin orientován nahoru s $m_s = \frac{1}{2}$, nebo dolů s $m_s = -\frac{1}{2}$.

Protože zachycujeme dva elektrony v jedné jámě, musíme uvažovat Pauliho vylučovací princip. Z něj plyne, že elektrony nemohou mít stejný soubor kvantových čísel.

1. ***Jednorozměrná jáma.*** Aby se elektron mohl nacházet v jednorozměrné jámě z obr. 40.2, musí být jeho vlnová funkce přizpůsobena šířce L jámy, a to vyžaduje jedno kvantové číslo n. Proto každý elektron uvězněný v jámě musí mít určitou hodnotu čísla n a jeho kvantové číslo m_s může být buď $+\frac{1}{2}$, nebo $-\frac{1}{2}$. Dva elektrony mohou mít různé hodnoty n, nebo mohou mít n stejné, pokud jeden z nich má svůj spin orientován nahoru a druhý dolů.
2. ***Pravoúhlá hradba.*** Aby se elektron mohl nacházet ve dvojrozměrné hradbě z obr. 40.10, musí být jeho vlnová funkce přizpůsobena rozměrům L_x a L_y hradby, a to vyžaduje dvě kvantová čísla n_x a n_y. Proto každý elektron

zachycený v hradbě musí mít určité hodnoty těchto dvou kvantových čísel n_x a n_y a jeho kvantové číslo m_s může být buď $+\frac{1}{2}$, nebo $-\frac{1}{2}$; má tedy celkem tři kvantová čísla. Podle Pauliho vylučovacího principu musí mít dva elektrony zachycené v pasti alespoň jedno z těchto tří kvantových čísel odlišné.

3. ***Pravoúhlá krabice.*** Aby se elektron mohl nacházet v potenciálové krabici z obr. 40.11, musí být jeho vlnová délka přizpůsobena rozměrům L_x, L_y a L_z krabice, a to vyžaduje tři kvantová čísla n_x, n_y a n_z. Proto každý elektron zachycený v krabici musí mít určité hodnoty těchto tří kvantových čísel n_x, n_y a n_z a jeho kvantové číslo m_s může být buď $+\frac{1}{2}$, nebo $-\frac{1}{2}$; má tedy nyní celkem čtyři kvantová čísla. Podle Pauliho vylučovacího principu musí mít dva elektrony zachycené v pasti alespoň jedno z těchto čtyř kvantových čísel odlišné.

Předpokládejme, že do uvedených pravoúhlých pastí umísťujeme více než dva elektrony, vždy postupně jeden po druhém. První elektrony přirozeně zaujmou stavy s nejnižší možnou energií — říkáme, že tuto energiovou hladinu **obsazují**. Pauliho vylučovací princip ale znemožňuje, aby nejnižší energiovou hladinu obsazovalo mnoho elektronů, další elektrony musí zaujmout vyšší energiové hladiny. Jakmile již energiová hladina nemůže být v důsledku Pauliho vylučovacího principu zaplněna více elektrony, říkáme o ní, že je **plná** nebo též **zcela zaplněná.** Naopak energiová hladina, která neobsahuje žádný elektron, je **prázdná** nebo též **neobsazená.** Mezi těmito krajními případy se nacházejí **částečně zaplněné** hladiny. *Elektronová konfigurace* systému zachycených elektronů je výčet nebo nákres energiových hladin, na kterých se tyto elektrony nacházejí, nebo soubor hodnot kvantových čísel všech elektronů.

Nalezení celkové energie

Dále chceme určit celkovou energii *systému* dvou či více elektronů zachycených v pravoúhlé pasti. To znamená, že chceme určit celkovou energii pro každou konfiguraci zachycených elektronů.

Pro jednoduchost předpokládejme, že elektrony spolu neinteragují; jinými slovy, zanedbáme vzájemnou elektrostatickou potenciální energii elektronů. Potom můžeme určit celkovou energii pro libovolnou elektronovou konfiguraci tak, že nejprve určíme energii každého elektronu, jak jsme to udělali v kap. 40, a pak tyto energie sečteme. (V př. 41.3 to uděláme při výpočtu pro případ sedmi elektronů zachycených v pravoúhlé hradbě.)

Vhodný způsob jak uspořádat energiové hladiny daného systému elektronů je energiový diagram *systému* podobně jako v případě jednoho elektronu v pastích v kap. 40. Nejnižší hladina o energii E_0 odpovídá základnímu stavu systému. Nejbližší vyšší hladina s energií E_1 odpovídá prvnímu excitovanému stavu systému. Další vyšší hladina E_2 odpovídá druhému excitovanému stavu atd.

PŘÍKLAD 41.3

Sedm elektronů je zachyceno ve čtvercové kvantové hradbě z př. 40.5. Tvoří ji dvojrozměrná nekonečně hluboká jáma o rozměrech $L_x = L_y = L$ (obr. 40.10). Předpokládejme, že elektrony spolu vzájemně elektricky neinteragují.

(a) Jaká je elektronová konfigurace základního stavu systému sedmi elektronů?

ŘEŠENÍ: Elektronovou konfiguraci systému lze určit tak, že všech sedm elektronů budeme přidávat do systému jeden po druhém. Základní myšlenka řešení spočívá v tom, že při zanedbání vzájemné elektrické interakce elektronů lze použít energiový diagram jednoho zachyceného elektronu k tomu, abychom určili, jak v hradbě umístíme sedm elektronů. Takový *energiový diagram pro jeden elektron* je na obr. 40.12 a je zde částečně zopakován v obr. 41.14a. Všimněme si, že stavy jsou označeny pomocí s nimi spojené energie E_{n_x,n_y}. Například nejnižší hladina je $E_{1,1}$, pro kterou je kvantové číslo $n_x = 1$ a kvantové číslo $n_y = 1$.

Druhá základní myšlenka řešení spočívá v tom, že zachycené elektrony musí splňovat Pauliho vylučovací princip; to znamená, že dva elektrony nemohou mít stejný soubor hodnot svých kvantových čísel n_x, n_y a m_s.

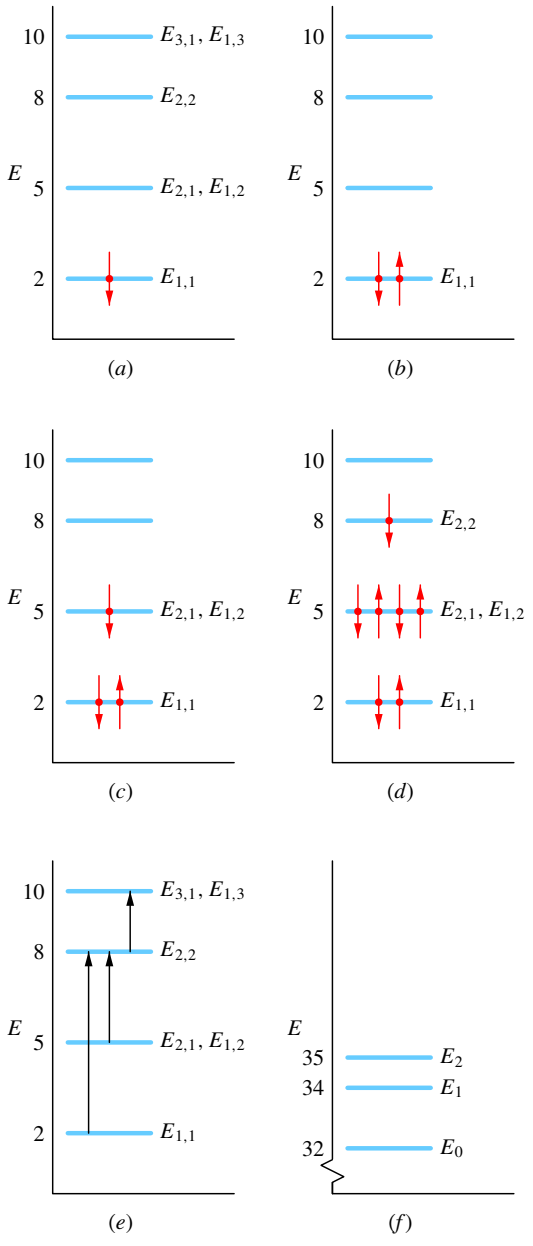
První elektron přijde na energiovou hladinu $E_{1,1}$ a může mít $m_s = \frac{1}{2}$, nebo $m_s = -\frac{1}{2}$. Zvolme si (libovolně) druhou možnost a nakresleme šipku směrem dolů (odpovídá spinu orientovanému dolů) na energiové hladině $E_{1,1}$ na obr. 41.14a. Druhý elektron na hladině $E_{1,1}$ musí už mít $m_s = +\frac{1}{2}$, aby se jedno z jeho kvantových čísel lišilo od kvantových čísel prvního elektronu. Druhý elektron bude znázorněn šipkou orientovanou nahoru (pro spin nahoru) na hladině $E_{1,1}$ na obr. 41.14b.

Další základní myšlenka, kterou použijeme, je: energiová hladina $E_{1,1}$ je zcela zaplněná, proto třetí elektron nemůže mít stejnou energii. Přijde tedy na další, vyšší hladinu, která odpovídá hodnotám $E_{2,1} = E_{1,2}$ (hladina je degenerovaná). Tento elektron může mít kvantová čísla $n_x = 1, n_y = 2$, nebo $n_x = 2, n_y = 1$. Může mít hodnotu m_s rovnu buď $m_s = +\frac{1}{2}$, nebo $m_s = -\frac{1}{2}$. Zvolme si (opět libovolně) kvantová čísla $n_x = 2, n_y = 1$ a $m_s = -\frac{1}{2}$. Tato volba odpovídá šipce dolů na energiové hladině $E_{1,2}$ a $E_{2,1}$ na obr. 41.14c.

Můžeme nyní ukázat, že i další tři elektrony mohou přijít rovněž na hladinu odpovídající energii $E_{1,2}$ a $E_{2,1}$ tak, že žádný soubor kvantových čísel se neopakuje. Tato hladina pak může obsahovat čtyři elektrony s kvantovými čísly (n_x, n_y, m_s) rovnými

$$(2, 1, -\tfrac{1}{2}),\ (2, 1, +\tfrac{1}{2}),\ (1, 2, -\tfrac{1}{2}),\ (1, 2, +\tfrac{1}{2}).$$

Tím je hladina zcela zaplněná. To znamená, že sedmý elektron přijde na další energiovou hladinu, kterou je hladina $E_{2,2}$. Zvolme si (libovolně) orientaci jeho spinu dolů s $m_s = -\frac{1}{2}$.



Obr. 41.14 (a) Energiový diagram jednoho elektronu ve čtvercové hradbě šířky L. (Energie je vyjádřena v násobcích $h^2/(8mL^2)$.) Elektron se spinem dolů se nachází na nejnižší hladině. (b) Dva elektrony (jeden se spinem nahoru, druhý dolů) se nacházejí na nejnižší hladině jednoelektronového energiového diagramu. (c) Třetí elektron se nachází na další energiové hladině. (d) Elektronová konfigurace základního stavu systému všech sedmi elektronů. (e) Tři přechody, z nichž jeden vede k nabuzení systému sedmi elektronů do prvního excitovaného stavu. (f) Energiový diagram systému se třemi nejnižšími celkovými energiemi systému (v násobcích $h^2/(8mL^2)$).

Na obr. 41.14d je znázorněno všech sedm elektronů v jednoelektronovém energiovém diagramu. V hradbě máme sedm elektronů v konfiguraci, které odpovídá nejmenší energie a která splňuje Pauliho vylučovací princip. Elektronová konfigurace základního stavu systému je znázorněna na obr. 41.14d a je vypsána v tab. 41.2.

Tabulka 41.2 **Konfigurace základního stavu**

n_x	n_y	m_s	ENERGIE[a]
2	2	$-\frac{1}{2}$	8
2	1	$+\frac{1}{2}$	5
2	1	$-\frac{1}{2}$	5
1	2	$+\frac{1}{2}$	5
1	2	$-\frac{1}{2}$	5
1	1	$+\frac{1}{2}$	2
1	1	$-\frac{1}{2}$	2
		Celkem	32

[a] v násobcích $h^2/(8mL^2)$

(b) Jaká je celková energie systému sedmi elektronů v základním stavu (v násobcích $h^2/(8mL^2)$)?

ŘEŠENÍ: Základní myšlenka řešení je v tom, že celková energie E_0 systému v základním stavu je dána součtem energií jednotlivých elektronů v konfiguraci základního stavu systému. Energii každého elektronu lze získat z tab. 40.1, která je částečně přepsána do tab. 41.2, nebo z obr. 41.14d. Na první (nejnižší) energiové hladině se nacházejí dva elektrony, na druhé hladině čtyři a na třetí hladině jeden. Můžeme tedy psát

$$E_0 = 2\left(2\frac{h^2}{8mL^2}\right) + 4\left(5\frac{h^2}{8mL^2}\right) + 1\left(8\frac{h^2}{8mL^2}\right) = \\ = 32\frac{h^2}{8mL^2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jakou energii musíme do systému dodat, aby byl vybuzen do prvního excitovaného stavu, a jaká je energie tohoto stavu?

ŘEŠENÍ: Základní myšlenky řešení jsou:

1. Má-li být systém vybuzen, musí jeden z jeho sedmi elektronů z obr. 41.14d přeskočit do vyššího stavu.

2. Pokud k takovému skoku dojde, změna energie elektronu (a tedy i systému) musí být $\Delta E = E_v - E_n$ (rov. (41.1)), kde E_n je energie nižší hladiny, na které přeskok začíná, a E_v je energie vyšší hladiny, na které přeskok končí.

3. Musí platit Pauliho vylučovací princip; to znamená, že elektron *nemůže* přeskočit na hladinu, která je již zcela zaplněná.

Uvažujme tři přeskoky znázorněné na obr. 41.14e; všechny jsou Pauliho vylučovacím principem dovoleny, poněvadž se jedná o přeskoky na prázdné nebo jen částečně zaplněné hladiny. V jednom z těchto přeskoků přejde elektron z hladiny $E_{1,1}$ na částečně zaplněnou hladinu $E_{2,2}$. Změna jeho energie je

$$\Delta E = E_{2,2} - E_{1,1} = 8\frac{h^2}{8mL^2} - 2\frac{h^2}{8mL^2} = 6\frac{h^2}{8mL^2}.$$

(Předpokládáme, že orientace spinu přecházejícího elektronu je taková, jak je potřeba.)

Další z možných skoků na obr. 41.14e odpovídá přeskoku elektronu z degenerované hladiny $E_{2,1}$ a $E_{1,2}$ na částečně zaplněnou hladinu $E_{2,2}$. Změna jeho energie je

$$\Delta E = E_{2,2} - E_{2,1} = 8\frac{h^2}{8mL^2} - 5\frac{h^2}{8mL^2} = 3\frac{h^2}{8mL^2}.$$

Při třetím z možných přeskoků na obr. 41.14e přechází elektron z hladiny $E_{2,2}$ na neobsazenou, degenerovanou energiovou hladinu $E_{1,3} = E_{3,1}$. Změna jeho energie je

$$\Delta E = E_{1,3} - E_{2,2} = 10\frac{h^2}{8mL^2} - 8\frac{h^2}{8mL^2} = 2\frac{h^2}{8mL^2}.$$

Ze všech tří zmíněných přeskoků odpovídá posledně uvedený nejmenší možné změně energie ΔE. Můžeme uvažovat ještě další přechody, ale žádný by nevyžadoval méně energie. Aby systém přešel ze svého základního stavu do prvního excitovaného stavu, musí elektron z hladiny $E_{2,2}$ přejít na prázdnou degenerovanou hladinu $E_{1,3} = E_{3,1}$ a potřebná energie je

$$\Delta E = 2\frac{h^2}{8mL^2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Energie prvního excitovaného stavu systému E_1 je pak

$$E_1 = E_0 + \Delta E = 32\frac{h^2}{8mL^2} + 2\frac{h^2}{8mL^2} = \\ = 34\frac{h^2}{8mL^2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tuto energii E_1 a energii základního stavu systému E_0 můžeme znázornit v energiovém diagramu *celého systému*, jako je tomu na obr. 41.14f.

41.9 STRUKTURA PERIODICKÉ SOUSTAVY PRVKŮ

Čtyři kvantová čísla uvedená v tab. 41.1 zcela určují kvantové stavy jednotlivých elektronů ve víceelektronovém atomu. Vlnové funkce těchto stavů se však liší od vlnových funkcí odpovídajících stavů elektronu ve vodíkovém atomu, poněvadž potenciální energie daného elektronu ve víceelektronovém atomu je určena nejen nábojem a polohou jádra atomu, ale i náboji a polohou ostatních elektronů v tomto atomu. Schrödingerovu rovnici v případě víceelektronových atomů lze řešit numericky — přinejmenším v principu — pomocí počítače.

Jak jsme již uvedli v čl. 40.7, tvoří všechny stavy se stejnými hodnotami kvantových čísel n a l podslupku. Pro danou hodnotu l existuje $2l+1$ možných hodnot magnetického kvantového čísla m_l a pro každé m_l pak existují dvě možné hodnoty spinového kvantového čísla m_s. V dané podslupce je tedy $2(2l+1)$ možných stavů. Ukazuje se, že *všechny stavy v dané podslupce mají stejnou energii*, jejíž hodnota je určována především hodnotou n a v menší míře hodnotou l.

K označení podslupek často nahrazujeme hodnoty l písmeny:

$$\begin{array}{cccccccc} l = 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ s & p & d & f & g & h \ldots \end{array}$$

V tomto značení bude podslupka s $n = 3, l = 2$ označena jako $3d$.

Přiřazujeme-li možné kvantové stavy elektronům ve víceelektronových atomech, musíme se řídit Pauliho vylučovacím principem z čl. 41.7, který požaduje, aby žádné dva elektrony v atomu neměly stejný soubor kvantových čísel n, l, m_l a m_s. Pokud by tento důležitý princip neplatil, mohly by *všechny* elektrony v atomu přeskočit do stavu atomu s nejnižší energií, a to by znemožnilo jakékoli chemické pochody u atomů a molekul, a tedy i všechny biochemické pochody. Na příkladu atomů několika prvků si vyzkoušíme, jak se Pauliho vylučovací princip uplatňuje při vytváření periodické soustavy prvků (dodatek G).

Neon

Atom neonu má 10 elektronů. Pouze dva z nich jsou na nejnižší energiové hladině — v podslupce $1s$. Oba tyto elektrony mají $n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$, ale jeden z nich má $m_s = \frac{1}{2}$ a druhý $m_s = -\frac{1}{2}$. Podslupka $1s$ má podle tab. 41.1 celkem $2(2l+1) = 2$ stavy. Protože tato podslupka obsahuje všechny elektrony dovolené Pauliho vylučovacím principem, říkáme o ní, že je **uzavřená**.

Dva ze zbývajících osmi elektronů jsou v podslupce s další nejnižší energií — tj. v podslupce $2s$. Posledních šest elektronů pak právě zaplní podslupku $2p$, která pro $l = 1$ má celkem $2(2l+1) = 6$ stavů.

V uzavřené podslupce lze najít všechny dovolené průměty orbitálního momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ do osy z. Jak se můžeme přesvědčit na obr. 41.5, tyto průměty se pro podslupku jako celek vyruší. Ke každému průmětu do kladného směru osy z existuje odpovídající průmět stejné velikosti do záporného směru osy z. Podobně se vyruší průměty spinových momentů hybnosti do osy z. Uzavřená podslupka tedy má nulový moment hybnosti i magnetický moment. Neon se svými třemi uzavřenými podslupkami ($1s$, $2s$, $2p$) nemá žádné *slabě vázané elektrony*, které by vytvářely chemickou vazbu s ostatními atomy. Neon, podobně jako ostatní

vzácné plyny ležící v pravém sloupci periodické soustavy prvků, je chemicky netečný (inertní).

Sodík

Hned za neonem najdeme v periodické soustavě sodík s 11 elektrony. Deset z nich tvoří uzavřené „jádro" podobné neonu, které, jak jsme již poznali, má celkový moment hybnosti nulový. Zbývající elektron je daleko od tohoto inertního jádra v nejbližší nezaplněné podslupce $3s$. Tento **valenční elektron** je ve stavu $l = 0$ (tj. v s stavu), proto je výsledný moment hybnosti a magnetický dipólový moment sodíkového atomu zcela určen spinem tohoto jediného elektronu.

Sodík snadno reaguje s atomy, které mají vhodný neobsazený stav („díru"), a tu může zaplnit slabě vázaný valenční elektron sodíku. Sodík, podobně jako ostatní **alkalické kovy** nacházející se v levém sloupci periodické soustavy prvků, je chemicky aktivní.

Chlor

Atom chloru má 17 elektronů, 10 z nich tvoří uzavřené neonu podobné jádro a 7 elektronů je navíc. Dva z nich zaplňují podslupku $3s$ a zbylých pět patří do podslupky $3p$, která je v pořadí další s nejmenší energií. Tato podslupka s $l = 1$ může obsahovat až $2(2l + 1) = 6$ elektronů. K jejímu zaplnění chybí jeden elektron, takže je v ní volné místo, „díra".

Chlor velmi snadno interaguje s atomy, které mají valenční elektron, který by mohl tuto díru zaplnit. Například chlorid sodný (NaCl) je velmi stabilní sloučenina. Chlor, podobně jako ostatní **halogeny** nacházející se ve sloupci 17 periodické soustavy prvků, je chemicky aktivní.

Železo

Uspořádání 26 elektronů v atomu železa může být vyjádřeno v tomto tvaru

$$\underbrace{1s^2 \quad 2s^2\,2p^6 \quad 3s^2\,3p^6}_{\text{18 elektronů}}\ 3d^6 \quad 4s^2.$$

Podslupky jsou vyjmenovávány podle číselného pořadí a počet elektronů v odpovídající slupce je zvykem psát jako horní index. Z tab. 41.1 víme, že podslupka s může maximálně obsahovat 2 elektrony, p podslupka 6 elektronů a podslupka d 10 elektronů. To znamená, že prvních 18 vyznačených elektronů v atomu železa tvoří pět uzavřených podslupek. Ze zbývajících 8 elektronů je šest v podslupce $3d$ a dva jsou v podslupce $4s$.

Poslední dva elektrony tedy nejsou v podslupce $3d$, která může obsahovat až 10 elektronů, protože atom s elektronovou konfigurací $3d^6\,4s^2$ má celkovou energii nižší, než by tomu bylo v případě konfigurace $3d^8$. Kdyby měl atom železa 8 elektronů v podslupce $3d$ (místo 6), rychle by přešel do stavu s konfigurací $3d^6\,4s^2$ za současné emise elektromagnetického záření. Tento příklad ukazuje, že kromě nejjednodušších prvků se jednotlivé elektronové stavy v atomech *nezaplňují* v pořadí, které by nám připadalo nejpřirozenější.

PŘÍKLAD 41.4

Určete počet prvků v šesti vodorovných řádcích periodické soustavy prvků pomocí maximálního možného počtu elektronů v jednotlivých podslupkách.

ŘEŠENÍ: Počty prvků v prvních šesti řádcích periodické soustavy prvků jsou 2, 8, 8, 18, 18 a 32. Zaplnění podslupek závisí pouze na hodnotě kvantového čísla l a je rovno $2(2l + 1)$. Z toho plyne

ORBITÁLNÍ KVANTOVÉ ČÍSLO l	POČET STAVŮ V PODSLUPCE $2(2l + 1)$
0	2
1	6
2	10
3	14

Pro každý z řádků můžeme zaplnění podslupek vyjádřit takto:

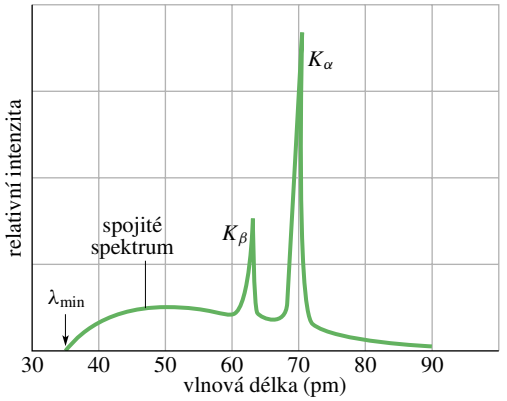
ČÍSLO PERIODY	POČET PRVKŮ V PERIODĚ	CELKOVÝ POČET MOŽNÝCH STAVŮ V PODSLUPCE
1	2	2
2, 3	8	$2+6=8$
4, 5	18	$2+6+10=18$
6	32	$2+6+10+14=32$

41.10 RENTGENOVÉ ZÁŘENÍ A ZAŘAZENÍ PRVKŮ

Je-li terč z pevné látky, například z mědi nebo wolframu, bombardován svazkem elektronů o kinetické energii řádově tisíců elektronvoltů, emituje elektromagnetické záření zvané rentgenové záření (anglicky X-rays). Toto záření — jehož využití v lékařství i průmyslu je dobře známé a velmi rozšířené — nám může také mnoho říci o atomech, které je emitují nebo absorbují.

Na obr. 41.15 je spektrum závislosti intenzity rentgenového záření na jeho vlnové délce pro molybdenový terč

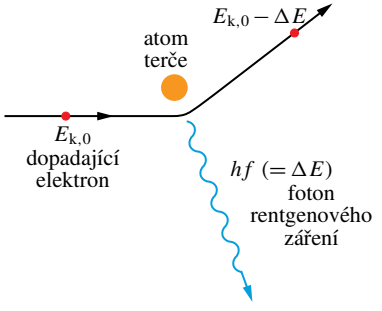
bombardovaný elektrony o energii 35 keV. Vidíme, že ze širokého pásu spojitého spektra vyčnívají dva úzké píky pro dvě ostře definované hodnoty vlnových délek. Spojité spektrum a píky vznikají odlišným způsobem, a proto je probereme odděleně.



Obr. 41.15 Závislost intenzity rentgenového záření na vlnové délce při dopadu elektronů o energii 35 keV na molybdenový terč. Spojité spektrum a ostré píky vznikají různými mechanismy.

Spojité rentgenové spektrum (brzdné záření)

Budeme se nejdříve věnovat spojitému spektru na obrázku 41.15 a nebudeme si zatím všímat obou nápadných píků, které z něj vyčnívají. Předpokládejme, že se elektron o počáteční kinetické energii $E_{k,0}$ srazí (interaguje) s jedním z atomů terče, jak je naznačeno na obr. 41.16. Elektron může ztratit část své energie ΔE a ta se může přeměnit ve foton, který je vyzářen z místa srážky. (Energii, kterou při srážce převezme atom, můžeme zanedbat; je malá, protože atom má relativně velkou hmotnost.)



Obr. 41.16 Elektron o kinetické energii $E_{k,0}$ procházející v blízkosti atomu terče může vytvořit foton rentgenového záření a přitom ztratit část své původní energie. Tímto způsobem vzniká spojité spektrum (brzdné záření).

Rozptýlený elektron na obr. 41.16 má nyní energii menší než $E_{k,0}$; může se znovu srazit s dalším atomem terče a vytvořit druhý foton, jehož energie se může lišit od hodnoty energie prvního fotonu, který vznikl v průběhu první srážky. Tyto elektronové srážky mohou pokračovat, dokud se elektron nezabrzdí. Všechny fotony vznikající při těchto srážkách vytvářejí spojitou část rentgenového spektra, v české a německé literatuře často nazývanou **brzdné záření**.

Významným rysem spektra z obr. 41.15 je existence ostře definované hodnoty **prahové vlnové délky** λ_{min}. Kratší vlnové délky, než je tato hodnota, nejsou ve spojitém spektru zastoupeny. Tato minimální hodnota vlnové délky odpovídá jediné srážce elektronu s atomem terče, při které elektron ztratí *veškerou* svou počáteční energii $E_{k,0}$. Všechna tato energie se přemění v energii jediného fotonu, jehož vlnová délka — minimální možná vlnová délka vznikajícího rentgenového záření — je určena vztahem

$$E_{k,0} = hf = \frac{hc}{\lambda_{min}},$$

odkud plyne

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{E_{k,0}} \quad \text{(prahová vlnová délka).} \qquad (41.15)$$

Hodnota prahové vlnové délky vůbec nezávisí na materiálu terče. Použijeme-li místo molybdenového terče měděný, změní se všechny rysy spektra rentgenového záření z obr. 41.15 *kromě* hodnoty prahové vlnové délky.

KONTROLA 2: Bude se hodnota prahové vlnové délky rentgenového záření λ_{min} zvyšovat, snižovat, nebo zůstane stejná, když (a) zvýšíme kinetickou energii elektronů dopadajících na terč, (b) elektrony budou namísto masivního terče dopadat na tenkou folii stejného materiálu, (c) zaměníme terč za jiný, složený z atomů s vyšším atomovým číslem?

PŘÍKLAD 41.5

Svazek elektronů o energii 35,0 keV dopadá na molybdenový terč a vytváří tak rentgenové záření, jehož spektrum je znázorněno na obr. 41.15.

(a) Jaká je prahová vlnová délka?

ŘEŠENÍ: Z rov. (41.15) plyne

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{E_{k,0}} = \frac{(4{,}14\cdot10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3{,}00\cdot10^{8}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})}{(35{,}0\cdot10^{3}\ \text{eV})} =$$

$$= 3{,}55\cdot10^{-11}\ \text{m} = 35{,}5\ \text{pm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Předpokládejte, že jeden z dopadajících elektronů postupně ztratí část své energie, takže namísto 35,0 keV má energii 20,0 keV. Jaká je hodnota vlnové délky λ fotonu, který vznikne při jediné přímé srážce tohoto elektronu s atomem terče, při níž elektron ztratí celou zbývající energii?

ŘEŠENÍ: Počítáme jako v případě (a), pouze dosadíme místo 35,0 keV hodnotu 20,0 keV. Dostaneme

$$\lambda_{\text{min}} = 62{,}1\ \text{pm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Hodnota této vlnové délky je větší než minimální vlnová délka spočtená v případě (a), neboť energie elektronu je menší.

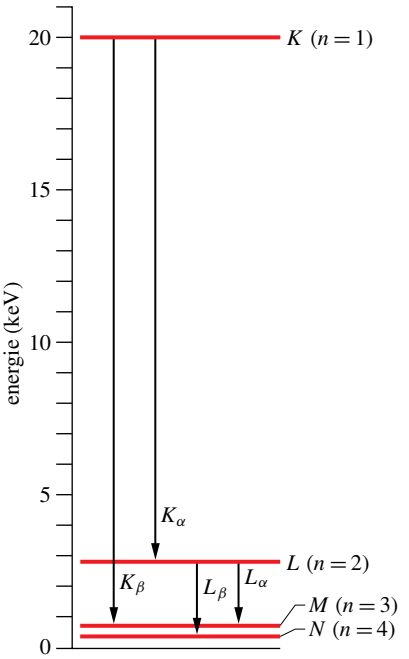
Charakteristické rentgenové záření

Obraťme pozornost ke dvěma píkům na obr. 41.15, označeným jako K_α a K_β. Tyto dva píky a další, které jsou už mimo oblast vlnových délek na obr. 41.15, tvoří tzv. **charakteristické rentgenové spektrum** materiálu terče.

Píky vznikají procesem složeným ze dvou částí. (1) Elektron s vysokou energií narazí do atomu terče a při srážce vyrazí jeden z vnitřních elektronů atomu terče (s nízkou hodnotou n). Je-li tento vnitřní elektron ze slupky s $n = 1$ (historicky nazývaná K-slupka), vznikne v této slupce *díra*. (2) Elektron z jedné ze slupek vzdálenějších od jádra přejde na K-slupku a tuto díru zaplní. Při tomto přechodu atom emituje foton charakteristického rentgenového záření. Přechází-li elektron ze slupky s $n = 2$ (nazývané L-slupka), aby zaplnil díru v K-slupce, emitované záření je čára K_α na obr. 41.15; přechází-li ze slupky s $n = 3$ (M-slupka), vytváří čáry K_β atd. Díry ve slupkách L nebo M budou zaplněny elektrony z ještě vzdálenějších slupek.

Při studiu rentgenového záření bývá zpravidla výhodnější sledovat díru, vytvořenou v hloubce „elektronového oblaku" atomu, než zaznamenávat změny v kvantových stavech elektronů, které ji vyplní. Na obr. 41.17 je tato situace znázorněna; jedná se o energiový diagram molybdenu, jehož spektrum bylo na obr. 41.15. Energie $E = 0$ představuje neutrální atom v základním stavu. Hladina označená K (pro $E = 20\,\text{keV}$) představuje energii atomu molybdenu s dírou v K-slupce. Obdobně hladina označená L (s energií $E = 2{,}7\,\text{keV}$) představuje molybdenový atom s dírou v L-slupce atd.

Dva píky označené na obr. 41.15 jsou způsobeny přechody označenými K_α a K_β na obr. 41.17. Například spektrální čára K_α vzniká, když elektron z L-slupky zaplní díru v K-slupce. Na obr. 41.17 tomuto procesu odpovídá přechod díry z vyšší energiové hladiny K na nižší hladinu L.



Obr. 41.17 Zjednodušený diagram hladin energie atomu molybdenu znázorňuje přechody (děr, nikoli elektronů), odpovídající vzniku některé z charakteristických čar rentgenového spektra tohoto atomu. Každá z vodorovných čar odpovídá energii atomu s dírou (tj. scházejícím elektronem) v označené slupce.

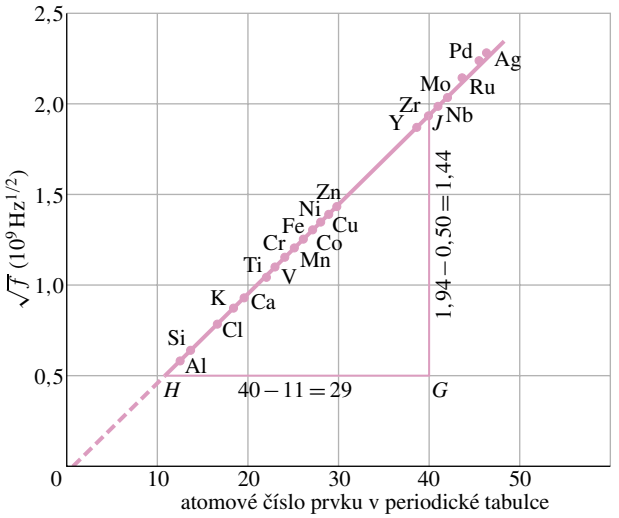
Zařazení prvků

V roce 1913 studoval anglický fyzik H. G. J. Moseley charakteristické rentgenové záření tolika prvků, kolik jich mohl najít — a našel jich 38 — tak, že terče z těchto prvků bombardoval elektrony ve vakuovém zařízení, které sám navrhl. Jednotlivé terče Moseley umístil na vozíčku taženém na hedvábném vlasci a postupně je vystavil elektronovému svazku. Vlnovou délku vzniklého rentgenového záření měřil difrakcí na krystalu, popsanou v čl. 37.9.

Moseley pak hledal (a nalezl) pravidelnosti v takto získaných spektrech jednotlivých prvků periodické tabulky. Vynesl pro danou spektrální čáru, například K_α, závislost druhé odmocniny z frekvence f této čáry na poloze prvku v periodické tabulce a dostal přímku. Část z rozsáhlého souboru experimentálních dat je uvedena na obr. 41.18. Moseley učinil následující závěr:

> Máme zde důkaz, že v atomu existuje základní veličina, která narůstá o stejnou hodnotu, přecházíme-li od jednoho prvku k následujícímu. Touto veličinou může být pouze náboj jádra.

Díky Moseleyho pracím se charakteristické rentgenové spektrum stalo všeobecně uznávanou charakteristikou prvku, umožňující vyřešit mnohé ze záhad v periodické tabulce. Do roku 1913 byla poloha prvku v periodické tabulce



Obr. 41.18 Moseleyho graf spektrálních čar K_α charakteristického rentgenového záření 21 prvků. Frekvence je vypočtena z měřené vlnové délky. Měření vyznačená v trojúhelníku HGJ jsou použita v př. 41.7 k výpočtu směrnice této lineární závislosti.

určena jeho atomovou *hmotností*, přestože existovalo několik dvojic, kdy muselo dojít k záměně pořadí prvků, aby to odpovídalo jejich chemickým vlastnostem. Moseley prokázal, že náboj jádra (tj. *atomové číslo* Z) určuje správné pořadí prvků v periodické tabulce.

V roce 1913 bylo v periodické tabulce několik prázdných míst a byl znám překvapující počet kandidátů na nové prvky, které je měly zaplnit. Spektra rentgenového záření však umožnila rozhodující test těchto kandidátů. *Lanthanoidy*, prvky vzácných zemin, byly vzhledem ke svým velmi podobným chemickým vlastnostem řazeny velmi nepřesně. Jakmile byla Moseleyho práce publikována, bylo možno tyto prvky náležitě zařadit. Později mohly být také jednoznačně zařazeny prvky za atomem uranu, pokud byly získány v dostatečném množství pro studium jejich rentgenových spekter.

Není těžké pochopit, proč charakteristické rentgenové spektrum vykazuje pro každý prvek takové pozoruhodné pravidelnosti, zatímco například optické spektrum nikoli: klíč k určování prvku spočívá ve stanovení náboje jeho jádra. Například zlato je zlatem proto, že jeho atomy mají jádra o náboji $+79e$ (to znamená $Z = 79$). O jeden elementární náboj v jádře více má rtuť; o jeden méně má platina. K-elektrony, které se významnou měrou podílejí na vzniku rentgenového spektra, jsou velmi blízko jádra a jsou tak velmi citlivé na jeho náboj. Na druhé straně optické spektrum je způsobeno přechody vnějších elektronů, které jsou od jádra odstíněny zbývajícími elektrony atomu, a proto *nejsou* citlivé na náboj jádra.

Objasnění Moseleyho grafu

Moseleyho experimentální data, jejichž část je uvedena v obr. 41.18, mohou být přímo použita k zařazení jednotlivých prvků na jejich správná místa v periodické tabulce. To šlo dokonce i tehdy, když nebylo známé teoretické vysvětlení Moseleyho grafu. My je však máme.

Podle rov. (40.18) je energie vodíkového atomu

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{13{,}6\,\text{eV}}{n^2} \qquad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{41.16}$$

Vezměme nyní jeden ze dvou vnitřních elektronů v K-slupce nějakého víceelektronového atomu. Vzhledem k přítomnosti druhého K-elektronu náš první elektron „vidí“ efektivní náboj jádra, který je přibližně $(Z-1)e$, kde e je velikost elementárního náboje a Z je atomové číslo prvku. Člen e^4 v rov. (41.16) je dán součinem e^2 (čtverce náboje jádra) a $(-e)^2$ (čtverce náboje elektronu). Proto pro víceelektronový atom můžeme nahradit člen e^4 v rov. (41.16) členem $(Z-1)^2 e^2 \cdot (-e)^2$ neboli $e^4(Z-1)^2$. Obdržíme

$$E_n = -\frac{(13{,}6\,\text{eV})(Z-1)^2}{n^2}. \tag{41.17}$$

Viděli jsme, že foton K_α rentgenového záření (o energii hf) vznikne, přejde-li elektron ze slupky L ($n = 2$ a energie E_2) do slupky K ($n = 1$ a energie E_1). Z rov. (41.17) tedy pro energii emitovaného fotonu dostaneme

$$\begin{aligned} hf &= E_2 - E_1 = \\ &= \frac{-(13{,}6\,\text{eV})(Z-1)^2}{2^2} - \frac{-(13{,}6\,\text{eV})(Z-1)^2}{1^2} = \\ &= (10{,}2\,\text{eV})(Z-1)^2. \end{aligned}$$

Frekvence f fotonu K_α čáry je

$$\begin{aligned} f = \frac{E_2 - E_1}{h} &= \frac{(10{,}2\,\text{eV})(Z-1)^2}{(4{,}14\cdot 10^{-15}\,\text{eV}\cdot\text{s})} = \\ &= (2{,}46\cdot 10^{15}\,\text{Hz})(Z-1)^2. \end{aligned} \tag{41.18}$$

Odmocníme-li obě strany rovnice, dostaneme

$$\sqrt{f} = CZ - C, \tag{41.19}$$

kde C je konstanta. Rov. (41.19) je rovnice přímky. Říká nám, že vynášíme-li druhou odmocninu frekvence fotonu spektrální čáry K_α v závislosti na atomovém čísle Z, měli bychom získat přímku. Jak ukazuje graf v obr. 41.18, je to přesně ta závislost, kterou objevil Moseley.

KONTROLA 3: Čára K_α rentgenového záření z kobaltového terče ($Z = 27$) má vlnovou délku 179 pm. Je vlnová délka rentgenového záření K_α čáry niklu ($Z = 28$) delší, nebo kratší?

PŘÍKLAD 41.6

Kobaltový terč bombardovaný elektrony vyzařuje rentgenové záření, jehož charakteristické spektrum měříme. Lze v něm rozeznat ještě jedno slabší spektrum, pocházející od nečistoty. Odpovídající vlnové délky jsou 178,9 pm (kobalt) a 143,5 pm (nečistota). O jakou nečistotu se jedná?

ŘEŠENÍ: K výpočtu použijme rov. (41.19) jednak pro kobalt (Co) a jednak pro nečistotu (X). Dosazením $f = c/\lambda$ dostaneme

$$\sqrt{\frac{c}{\lambda_{Co}}} = CZ_{Co} - C \quad \text{a} \quad \sqrt{\frac{c}{\lambda_X}} = CZ_X - C.$$

Dělení druhé rovnice první rovnicí dává

$$\sqrt{\frac{\lambda_{Co}}{\lambda_X}} = \frac{Z_X - 1}{Z_{Co} - 1}.$$

Dosazením známých dat a hodnoty $Z_{Co} = 27$ obdržíme

$$\sqrt{\frac{178{,}9\,\text{pm}}{143{,}5\,\text{pm}}} = \frac{Z_X - 1}{27 - 1}.$$

Neznámá je pak rovna

$$Z_X = 30{,}0. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Nahlédnutím do periodické tabulky určíme, že nečistotou je zinek.

PŘÍKLAD 41.7

(a) Stanovte hodnotu konstanty C v rov. (41.19).

ŘEŠENÍ: Porovnáním rov. (41.18) a (41.19) zjistíme, že

$$C = \sqrt{(2{,}46{\cdot}10^{15}\,\text{Hz})} = 4{,}96{\cdot}10^{7}\,\text{Hz}^{1/2}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Pomocí Moseleyho grafu z obr. 41.18 ověřte, že C odpovídá změřené směrnici přímky.

ŘEŠENÍ: Změříme-li úsečky $|HG|$ a $|GJ|$ v obr. 41.18, dostaneme

$$C = \frac{|GJ|}{|HG|} = \frac{(1{,}94 - 0{,}50){\cdot}10^{9}\,\text{Hz}^{1/2}}{40 - 11} =$$
$$= 4{,}96{\cdot}10^{7}\,\text{Hz}^{1/2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tyto dva výsledky plně souhlasí. Souhlas pro jiné čáry než K_α už není tak dobrý; pro ně musíme lépe započítat vliv okolních elektronů.

41.11 LASERY A JEJICH SVĚTLO

Na sklonku čtyřicátých let a na začátku šedesátých let obohatila kvantová mechanika moderní techniku dvěma mimořádnými příspěvky: **tranzistorem**, který umožnil počítačovou revoluci, a **laserem**. Laserové světlo je obdobně jako světlo obyčejné žárovky emitováno tehdy, přechází-li atom z kvantového stavu s vyšší energií do kvantového stavu s nižší energií. V laserech však — na rozdíl od jiných zdrojů světla — atomy vyzařují společně a vytvářejí tak světlo neobyčejných vlastností:

1. ***Laserové světlo je vysoce monochromatické.*** Světlo obyčejné žárovky pokrývá spojitou oblast vlnových délek a jistě není monochromatické. Spektrální čáry z neonové zářivky *jsou* monochromatické v poměru $1 : 10^6$. Avšak v případě laserů je ostrost čáry mnohonásobně vyšší — může dosahovat hodnot až $1 : 10^{15}$.

2. ***Laserové světlo je vysoce koherentní.*** Jednotlivé vlny (vlnová klubka) laserového světla mohou být několik stovek kilometrů dlouhé. Pokud dva rozdělené svazky, které prošly po oddělených dráhách takové vzdálenosti, se opět spojí, „pamatují si“ vše o svém společném původu a mohou vytvářet interferenční proužky. Odpovídající *koherenční délka* vlnových klubek obyčejné žárovky je zpravidla menší než jeden metr.

3. ***Laserové světlo je vysoce směrové.*** Laserový svazek má malou rozbíhavost; odchyluje se od přesné rovnoběžnosti pouze v důsledku difrakce na výstupní cloně laseru. Například laserový pulz pro měření vzdálenosti Země–Měsíc vytváří na povrchu Měsíce stopu, jejíž průměr je pouhá jedna miliontina průměru Měsíce. Světlo z obyčejné žárovky může rovněž pomocí čoček vytvořit téměř rovnoběžný svazek, ale jeho rozbíhavost je mnohem větší než svazku z laseru. Každý bod vlákna žárovky totiž vyzařuje svůj vlastní, oddělený svazek a úhlová rozbíhavost takto složeného celkového světelného svazku je dána geometrickými rozměry vlákna.

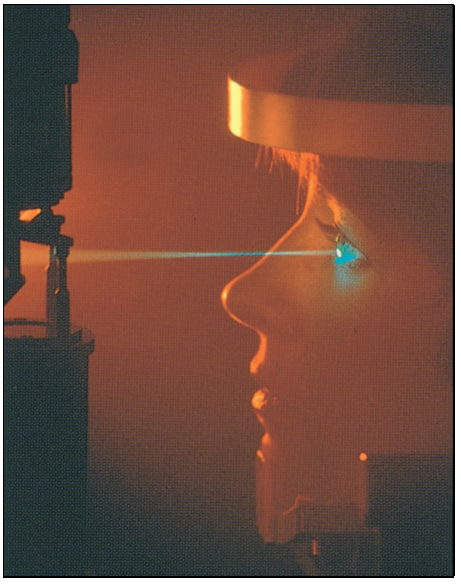
4. ***Laserové světlo lze ostře zfokusovat.*** Pokud dva světelné paprsky přenášejí stejné množství energie, pak ten z nich, který může být zaostřen do menší stopy, bude mít v této stopě větší intenzitu. Laserový svazek může být fokusován do stopy tak malé, že v ní lze snadno dosáhnout intenzitu $10^{17}\,\text{W/cm}^2$. Naproti tomu kyslíko-acetylenový plamen pro svařování dosahuje intenzit jen kolem $10^3\,\text{W/cm}^2$.

Mnohostranné využití laserů

Nejmenší lasery, používané k přenosu hlasu a dat optickými vlákny, mají jako aktivní prvek krystal polovodiče rozměru špendlíkové hlavičky. Ačkoli jsou malé, přesto generují

světlo o výkonu kolem 200 mW. Největší lasery, používané při výzkumech jaderné fúze, v astronomii a ve vojenských aplikacích, zaplňují velké budovy. Největší z nich generuje krátký pulz laserového světla o výkonu 10^{14} W. To je o dva řády více, než je celková kapacita výroby elektřiny v USA. Aby nedošlo v průběhu pulzu k výpadku elektrického proudu v celé zemi, je energie potřebná k jeho uskutečnění akumulována po delší dobu mezi jednotlivými pulzy.

Lasery se používají například při čtení čárových kódů v obchodech, při výrobě a čtení kompaktních disků, při různých operacích (fotografie v úvodu k této kapitole a na obr. 41.19), k vyměřování, pro stříhání látek v oděvním průmyslu (vrstva několika stovek látek současně), při svařování karoserií aut nebo při výrobě hologramů.



Obr. 41.19 Laserový paprsek je vyslán do oka pacientky s cukrovkou, aby uzavřel cévky na její sítnici.

41.12 JAK PRACUJÍ LASERY

Slovo „laser“ je zkratka pro „light amplification by the stimulated emission of radiation“ (zesilování světla stimulovanou emisí záření), takže bychom neměli být překvapeni tím, že klíčem k činnosti laseru je **stimulovaná emise**. Einstein tento pojem zavedl již v roce 1917. I když si svět musel počkat až do roku 1960, kdy byl první laser uveden do provozu, základní práce na jeho vývoji se datují o několik desetiletí dříve.

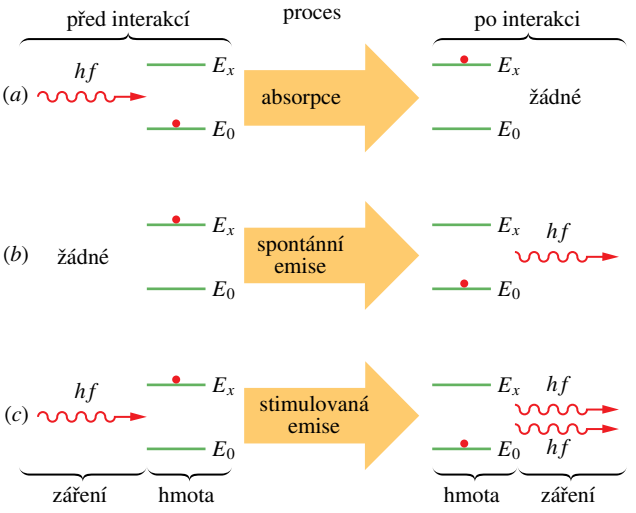
Předpokládejme, že se izolovaný atom může nacházet buď ve stavu s nejnižší energií E_0 (jeho základní stav), nebo ve stavu s vyšší energií E_x. Uveďme si tři možné způsoby, jakými se atom může dostat z jednoho z těchto stavů do stavu druhého:

1. ***Absorpce.*** Obr. 41.20a ukazuje atom v základním stavu. Je-li tento atom umístěn do vnějšího elektromagnetického pole o frekvenci f, může z tohoto pole absorbovat určité množství energie hf a dostat se do vyššího energiového stavu. Ze zákona zachování energie plyne

$$hf = E_x - E_0. \tag{41.20}$$

Tento proces nazýváme **absorpce.**

2. ***Spontánní emise.*** Na obr. 41.20b je atom v excitovaném stavu a vnější pole je nulové. Po nějaké době atom *samovolně* přejde do svého základního stavu za současné emise fotonu o energii hf. Tento proces nazýváme **spontánní emise** — *spontánní* proto, že tato událost není spouštěna žádným vnějším vlivem. Tímto způsobem se například vytváří světlo v obyčejné žárovce.



Obr. 41.20 Interakce záření s hmotou v procesu (a) absorpce, (b) spontánní emise a (c) stimulované emise. Atom (tj. hmota) je znázorněn jako červená tečka; atom se nachází buď ve svém nižším kvantovém stavu s energií E_0, nebo ve vyšším stavu s energií E_x. V případě (a) atom absorbuje foton o energii hf od okolní světelné vlny. V případě (b) emituje světelnou vlnu o energii hf. V případě (c) způsobí procházející vlna, jejíž foton má energii hf, že atom emituje foton o téže energii, a tím zvýší energii světelné vlny.

Střední doba života atomu v excitovaném stavu, tedy doba, než se uskuteční spontánní emise, je obvykle kolem 10^{-8} s. Pro některé excitované stavy však tato střední doba může být až 10^5krát delší. Tyto stavy s dlouhou dobou života nazýváme **metastabilní**; ty pak hrají důležitou roli při činnosti laseru.

3. ***Stimulovaná emise.*** Na obr. 41.20c je atom opět v excitovaném stavu, ale tentokrát je ozářen světlem o frekvenci dané rov. (41.20). Foton o energii hf může stimulovat atom, aby přešel do svého základního stavu. V tomto procesu atom emituje další foton, jehož energie je rovněž hf. Tento proces nazýváme **stimulovaná emise** — *stimulovaná* proto, že tato událost je spouštěna vnějším fotonem.

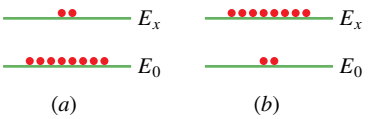
Emitovaný foton z obr. 41.20c je v každém ohledu identický se stimulujícím fotonem. Vlna spojená s tímto fotonem má stejnou energii, fázi, polarizaci a směr šíření. Za vhodných podmínek lze spustit řetězovou reakci podobných stimulujících procesů jediným počátečním fotonem o správné frekvenci. Právě tímto způsobem je vytvářeno laserové světlo.

Poznamenejme, že fotony ve svazku laserového světla jsou všechny ve stejném kvantovém stavu. Fotony se na rozdíl od elektronů *neřídí* Pauliho vylučovacím principem. Fotony se „rády“ hromadí ve stejném kvantovém stavu; elektronům je to zakázáno.

Obr. 41.20c ukazuje stimulovanou emisi jednoho atomu. Předpokládejme nyní, že vzorek obsahuje velký počet atomů v termodynamické rovnováze při teplotě T. Dříve, než je jakékoli záření na vzorek nasměrováno, existuje v tomto vzorku N_0 atomů ve svém základním stavu a N_x atomů ve stavu s vyšší energií E_x. Ludwig Boltzmann ukázal, že počet N_x lze pomocí N_0 vyjádřit ve tvaru

$$N_x = N_0 e^{-(E_x - E_0)/kT}, \qquad (41.21)$$

kde k je Boltzmannova konstanta. Tato rovnice se snadno zdůvodní. Veličina kT odpovídá střední kinetické energii atomu o teplotě T. Čím vyšší je teplota, tím více atomů bude tepelně vybuzeno (srážkami s ostatními atomy) do stavů s vyššími energiemi. Poněvadž $E_x > E_0$, pak z rov. (41.21) vyplývá, že $N_x < N_0$. To znamená, že atomů v excitovaném stavu bude vždy méně, než v základním stavu. Nastane to, co lze očekávat, když jsou atomy buzeny pouze srážkami při tepelném pohybu. Tato situace je znázorněna na obr. 41.21a.



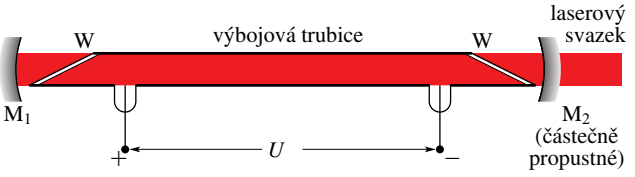
Obr. 41.21 (a) Rovnovážné rozdělení atomů v základním stavu E_0 a excitovaném stavu E_x způsobené pouze srážkami při tepelném pohybu. (b) Inverze populace, získaná speciálními metodami; tato inverze populace je pro činnost laseru důležitá.

Zaplavíme-li nyní atomy na obr. 41.21a fotony o energii $E_x - E_0$, budou tyto fotony zanikat, když je absorbují atomy v základním stavu. Nové fotony budou převážně vznikat stimulovanou emisí při přechodu atomů z excitovaného do základního stavu. Einstein ukázal, že pravděpodobnosti obou procesů jsou shodné. Vzhledem k tomu, že se více atomů nachází v základním stavu, bude převažovat absorpce fotonů.

Abychom vytvořili laserové světlo, musí být více fotonů emitováno než absorbováno; to znamená, že musíme mít situaci, kdy stimulovaná emise převažuje. Proto musíme začít s více atomy v excitovaném stavu jako na obr. 41.21b. Poněvadž se však toto **převrácení (inverze) populace** neslučuje s obvyklou termodynamickou rovnováhou, musíme vymyslet způsob, jak toto převrácení populace dosáhnout a jak je i udržet.

Helium-neonový plynový laser

Na obr. 41.22 je znázorněn typ laseru, který dnes běžně najdeme i ve studentských laboratořích. V roce 1961 ho vyvinul Ali Javan se svými spolupracovníky. Skleněná výbojka je naplněna směsí helia a neonu (v poměru 20 : 80). Plynný neon je aktivní médium, které emituje laserové světlo.

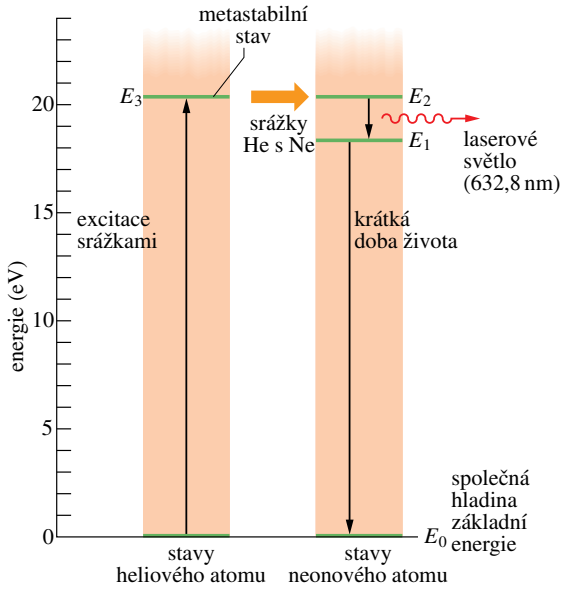


Obr. 41.22 Části helium-neonového laseru. Přiložené stejnosměrné napětí U způsobí, že výbojkou, která je naplněna plynnou směsí helia a neonu, protéká proud elektronů. Elektrony se srážejí s atomy helia, ty se srážejí s atomy neonu a atomy neonu emitují světlo ve směru osy trubice. Světlo prochází průhlednými okénky W na koncích trubice a odráží se zrcadly M_1 a M_2 zpět do trubice; tak se neustále zvyšuje počet emitujících atomů neonu. Zrcadlo M_2 je částečně propustné, takže malá část dopadajícího světla jím prochází a vytváří tak laserový svazek.

Obr. 41.23 ukazuje zjednodušený energiový diagram obou atomů. K nabuzení co nejvíce atomů He do metastabilního stavu E_3 se využívají srážky atomů helia s proudem elektronů, který protéká trubicí.

Energie stavu E_3 (20,61 eV) atomu helia je velmi blízká hodnotě energie stavu E_2 (20,66 eV) atomu neonu. Srazí-li se tedy atom helia v metastabilním stavu (E_3) s atomem neonu v základním stavu (E_0), bude často excitační energie heliového atomu předána atomu neonu, který tak přejde do stavu s energií E_2. Tímto způsobem lze dosáhnout toho, že energiová hladina E_2 atomu neonu na obr. 41.23 bude obsazena více, než hladina E_1.

Inverzi populace poměrně snadno získáme a udržíme proto, že (1) na počátku nejsou v podstatě žádné atomy neonu ve stavu s energií E_1, (2) metastabilita energiové



Obr. 41.23 Čtyři podstatné energiové hladiny helium-neonového plynového laseru. K emisi laserového fotonu dojde při přechodu mezi hladinami E_2 a E_1 atomu neonu, když je více atomů neonu ve stavu s energií E_2 než ve stavu s E_1.

hladiny E_3 atomů helia zajišťuje dostatečný počet atomů neonu ve stavu s energií E_2 a (3) atomy neonu z energiové hladiny E_1 rychle přecházejí (přes nevyznačené přechodové hladiny) do základního stavu neonu s energií E_0.

Předpokládejme, že dojde ke spontánní emisi jediného fotonu při přechodu atomu neonu ze stavu s energií E_2 do stavu o energii E_1. Tento foton může spustit stimulovanou emisí další foton a ten spustí opět novou emisi fotonu. Vlivem takto spuštěné řetězové reakce se velmi rychle vytvoří koherentní svazek červeného laserového světla, pohybujícího se rovnoběžně s osou trubice. Toto světlo o vlnové délce 632,8 nm se může šířit mnohokrát tam a zpět trubicí tak, že se odráží od zrcadel M_1 a M_2 podle obr. 41.22 a získává stimulovanou emisí další a další fotony při každém průchodu trubicí.

Zrcadlo M_1 je pokryto vrstvou, která odráží světlo této vlnové délky téměř dokonale. Zrcadlo M_2 je vyrobeno tak, že při každém odrazu malou část laserového světla propouští, a odtud pak vystupuje použitelný svazek laserového světla.

KONTROLA 4: Vlnová délka světla z laseru A (helium-neonový plynový laser) je 632,8 nm, vlnová délka světla z CO_2 plynového laseru B je 10,6 μm. Laser C (gallium arsenidový polovodičový laser) vytváří světlo o vlnové délce 840 nm. Seřaďte sestupně tyto lasery podle velikosti rozdílu energií kvantových stavů umožňujících činnost laseru.

PŘÍKLAD 41.8

V helium-neonovém laseru z obr. 41.22 dojde k vyzáření laserového světla při přechodu mezi dvěma excitovanými energiovými hladinami atomu neonu. V mnoha laserech však dochází k emisi při přechodu mezi hladinou excitovanou a hladinou základní energie, jak je naznačeno na obr. 41.21.

(a) Uvažujte takový laser, který emituje na vlnové délce $\lambda = 550$ nm. Kdybychom nevytvořili inverzi populace, jaký by byl poměr počtu atomů s energií E_x k počtu atomů s energií E_0?

ŘEŠENÍ: Z rov. (41.21) je tento poměr roven

$$N_x/N_0 = e^{-(E_x-E_0)/(kT)}. \qquad (41.22)$$

Rozdíl mezi oběma energiovými hladinami je

$$E_x - E_0 = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6{,}63\cdot10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s})(3{,}00\cdot10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})}{(550\cdot10^{-9}\ \mathrm{m})(1{,}60\cdot10^{-19}\ \mathrm{J/eV})} = 2{,}26\ \mathrm{eV}.$$

Střední kinetická energie kT tepelného pohybu při pokojové teplotě (300 K) je rovna

$$kT = (8{,}62\cdot10^{-5}\ \mathrm{eV/K})(300\ \mathrm{K}) = 0{,}025\,9\ \mathrm{eV}.$$

Dosazením obou výsledků do rov. (41.22) získáme

$$N_x/N_0 = e^{-(2{,}26\ \mathrm{eV})/(0{,}025\,9\ \mathrm{eV})} = e^{-87{,}26} \doteq 1{,}3\cdot10^{-38}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

To je velmi malé číslo. Není ale nerozumné, protože atom, jehož střední energie tepelného pohybu je pouze 0,025 9 eV, nebude příliš často při srážce udělovat energii 2,26 eV jinému atomu.

(b) Pro podmínky stejné jako v případě (a) určete, při jaké teplotě by byl poměr N_x/N_0 roven 1/2?

ŘEŠENÍ: Po dosazení do rov. (41.22) a logaritmování obou stran získáme rovnici pro T

$$T = \frac{E_x - E_0}{k(\ln 2)} = \frac{(2{,}26\ \mathrm{eV})}{(8{,}62\cdot10^{-5}\ \mathrm{eV/K})(\ln 2)} = 38\,000\ \mathrm{K}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

To je teplota mnohem vyšší než na povrchu Slunce. Je však jasné, že pokud chceme invertovat populaci těchto dvou hladin, potřebujeme k tomu použít jiný mechanismus, neboť teplota, jakkoli vysoká, nemůže převrácení populace způsobit.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Některé vlastnosti atomů

Energie atomů jsou kvantovány, tj. atomy mají jen určité hodnoty energií, které přísluší různým kvantovým stavům. Atom může přecházet mezi různými kvantovými stavy při emisi nebo absorpci fotonu. Frekvence f tohoto fotonu je dána *Bohrovou frekvenční podmínkou*:

$$hf = E_\mathrm{v} - E_\mathrm{n}, \tag{41.1}$$

kde E_v je vyšší a E_n nižší energie ze dvou kvantových stavů, mezi nimiž dojde k přechodu. Atomy mají rovněž kvantovány momenty hybnosti a magnetické dipólové momenty.

Momenty hybnosti a magnetické dipólové momenty

Elektron vázaný v atomu má *orbitální moment hybnosti* $\boldsymbol{L}$ a s ním spojený *orbitální magnetický dipólový moment* $\boldsymbol{\mu}_\mathrm{orb}$. Jsou rovnoběžné a mají opačné směry. Velikost $\boldsymbol{L}$ je kvantována a její hodnoty jsou

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \tag{41.2}$$

kde l je *orbitální kvantové číslo* (které může nabývat hodnot daných v tab. 41.1). Složka L_z je kvantována a měřitelná a nabývá hodnot

$$L_z = m_l\hbar, \tag{41.3}$$

kde m_l je *orbitální magnetické kvantové číslo* (které může nabývat hodnot daných v tab. 41.1).

Složka orbitálního magnetického dipólového momentu $\mu_{\mathrm{orb},z}$ je kvantována a měřitelná a nabývá hodnot

$$\mu_{\mathrm{orb},z} = -m_l\mu_\mathrm{B}, \tag{41.4}$$

kde m_l je *orbitální magnetické kvantové číslo* a μ_B je *Bohrův magneton*

$$\mu_\mathrm{B} = \frac{e\hbar}{2m} = 9{,}274{\cdot}10^{-24}\ \mathrm{J{\cdot}T^{-1}}. \tag{41.5}$$

Elektron, vázaný nebo volný, má svůj vlastní *spinový moment hybnosti* (neboli *spin*) $\boldsymbol{S}$ a svůj vlastní *spinový magnetický dipólový moment* $\boldsymbol{\mu}_s$. Jsou rovnoběžné, ale mají opačný směr. Velikost $\boldsymbol{S}$ je dána

$$S = \hbar\sqrt{s(s+1)}, \tag{41.6}$$

kde s je *spinové kvantové číslo* elektronu. Je vždy rovno $\frac{1}{2}$. Složka S_z spinu je kvantována a měřitelná a nabývá hodnot

$$S_z = m_s\hbar, \tag{41.7}$$

kde m_s je *spinové magnetické kvantové číslo* elektronu, které může být rovno $+\frac{1}{2}$, nebo $-\frac{1}{2}$. Složka $\mu_{s,z}$ je kvantována a měřitelná a může nabývat hodnot

$$\mu_{s,z} = -2m_s\mu_\mathrm{B}. \tag{41.8}$$

Jaderná magnetická rezonance

Proton má svůj vlastní spinový moment hybnosti $\boldsymbol{S}$ a s ním spojený spinový magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$ *stejného* směru jako $\boldsymbol{S}$. Umístíme-li proton do vnějšího magnetického pole $\boldsymbol{B}$, pak průmět $\boldsymbol{\mu}_z$ do směru osy z definované směrem pole $\boldsymbol{B}$ může nabývat dvou kvantovaných orientací: souhlasně, nebo nesouhlasně rovnoběžné s $\boldsymbol{B}$. Příslušný energiový rozdíl mezi oběma orientacemi je roven $2\mu_z B$. Energie fotonu potřebná k *překlopení* spinu protonu mezi oběma orientacemi je

$$hf = 2\mu_z(B_\mathrm{v} + B_\mathrm{l}), \tag{41.14}$$

kde B_v představuje vnější pole a B_l pole lokální, určené atomy a jádry, které obklopují proton. Měřením těchto spinových překlopení získáme *spektrum jaderné magnetické rezonance*, pomocí kterého můžeme identifikovat různé chemické látky.

Pauliho vylučovací princip

Elektrony v atomech a jiných pastích se při obsazování kvantových stavů řídí *Pauliho vylučovacím principem*, který stanoví, že *žádné dva elektrony v atomu nebo v jiných pastích nemohou mít stejný soubor kvantových čísel n, l, m_l a m_s.*

Struktura periodické soustavy prvků

Prvky jsou v periodické tabulce zařazeny podle vzrůstající velikosti atomového čísla Z; náboj jádra je roven Ze, kde Z je počet protonů v jádře (a také počet elektronů v obalu neutrálního atomu).

Stavy se stejnou hodnotou hlavního kvantového čísla n tvoří *slupku*, stavy se stejnými hodnotami n a l *podslupku*. V *zaplněných* slupkách a podslupkách (což jsou ty, které obsahují nejvyšší možný počet elektronů) je součet momentů hybnosti a součet magnetických momentů všech elektronů roven nule.

Rentgenové záření a zařazení prvků

Spojité spektrum rentgenového záření vzniká tehdy, jestliže elektrony o vysoké kinetické energii ztratí část své energie při srážkách s atomy v pevné látce. *Prahovou vlnovou délku* λ_min má záření tehdy, ztratí-li elektron *veškerou* svou počáteční energii v jediné srážce s atomem. Její velikost je dána vztahem

$$\lambda_\mathrm{min} = \frac{hc}{E_{\mathrm{k},0}}, \tag{41.15}$$

kde $E_{\mathrm{k},0}$ je počáteční kinetická energie elektronů dopadajících na terč.

Charakteristické spektrum rentgenového záření vzniká tehdy, jestliže elektrony s vysokou energií vyrazí vnitřní elektrony atomu; zaplní-li takto vzniklou „díru“ elektron, který se nachází dále od jádra, vznikne foton charakteristického rentgenového spektra.

V roce 1913 britský fyzik H. G. J. Moseley měřil frekvence charakteristického rentgenového záření řady prvků. Zpozoroval, že závislost druhé odmocniny této frekvence na pořadí příslušného prvku v periodické tabulce tvoří přímku, jak je znázorněno v *Moseleyho grafu* na obr. 41.18. Toto zjištění umožnilo Moseleymu ukázat, že vlastnost atomu, která určuje polohu prvku v periodické soustavě, není jeho atomová hmotnost, ale *atomové číslo* Z, tj. počet protonů v jeho jádře.

Lasery a jejich světlo

Laserové světlo vzniká *stimulovanou emisí*. Pod vlivem záření o frekvenci f dané vztahem

$$hf = E_x - E_0, \tag{41.20}$$

může atom přejít ze stavu s vyšší energií do stavu s nižší energií za současné emise fotonu o frekvenci f. Stimulující a emitovaný foton mají identické fyzikální vlastnosti a dohromady spolu vytvářejí laserové světlo.

K tomu, aby převládl proces emise, je nutné dosáhnout *převrácení (inverze) populace*, tj. musí existovat více atomů ve stavu s vyšší energií než ve stavu s energií nižší.

OTÁZKY

1. Elektron v atomu zlata je ve stavu s $n = 4$. Které z uvedených hodnot může l nabývat: -3, 0, 2, 3, 4, 5?

2. Atom stříbra má zcela zaplněny podslupky $3d$ a $4d$. Obsahují stejný počet elektronů? Pokud ne, která z nich jich má více?

3. Atom uranu má zcela zaplněny podslupky $6p$ a $7s$. Která z nich obsahuje více elektronů?

4. Elektron v atomu rtuti je v podslupce $3d$. Které z uvedených hodnot může nabývat m_l: -3, -1, 0, 1, 2?

5. (a) Kolik podslupek a kolik elektronových stavů obsahuje slupka $n = 2$? (b) Jak je tomu pro $n = 5$?

6. Pro který z následujících atomů můžeme snadněji odstranit elektron? (a) Krypton, nebo brom? (b) Rubidium, nebo cer? (c) Helium, nebo vodík?

7. Na jakých kvantových číslech závisí energie elektronu (a) v atomu vodíku, (b) v atomu vanadu?

8. Určete, zda jsou následující tvrzení pravdivá, nebo nepravdivá: (a) Právě jedna (tj. jedna a pouze jedna) z následujících podslupek neexistuje: $2p, 4f, 3d, 1p$. (b) Počet možných hodnot m_l závisí pouze na l a nezávisí na n. (c) Existují čtyři podslupky s $n = 4$. (d) Nejmenší možná hodnota n, která může patřit k danému l, je $l + 1$. (e) Všechny stavy s $l = 0$ mají rovněž $m_l = 0$. (f) Pro každou hodnotu n existuje n podslupek.

9. Která z následujících tvrzení týkajících se Einsteinova-de Haasova pokusu jsou pravdivá: (a) Atomy mají moment hybnosti. (b) Moment hybnosti atomů je kvantován. (c) Atomy mají magnetické momenty. (d) Magnetické momenty atomů jsou kvantovány. (e) Moment hybnosti atomu je silně svázán s jeho magnetickým momentem. (f) Experiment je založen na zákonu zachování momentu hybnosti.

10. Uvažujte atomy kryptonu a rubidia. (a) Který z nich je vhodnější k provedení Sternova-Gerlachova pokusu popsaného na obr. 41.8? (b) Který z obou atomů by se k provedení tohoto experimentu vůbec nehodil?

11. Rentgenové spektrum z obr. 41.15 bylo vytvořeno elektrony s energií 35,0 keV dopadajícími na terč z molybdenu ($Z = 42$). Nahradíme jej terčem ze stříbra ($Z = 47$). Vzroste, sníží se, nebo zůstane beze změny (a) λ_{min}, (b) vlnová délka čáry K_α, (c) vlnová délka čáry K_β?

12. Čára K_α vznikne při přechodu mezi K-slupkou ($n = 1$) a L-slupkou ($n = 2$). Na obr. 41.15 má tato čára (pro molybdenový terč) jedinou vlnovou délkou. Použijeme-li však vyšší rozlišení, rozdělí se tato čára na několik čar, poněvadž L-slupka nemá pouze jedinou energii. (a) Z kolika složek se ve skutečnosti čára K_α skládá? (b) Z kolika složek se skládá čára K_β?

13. Které z následujících podmínek musí být splněny, aby mohlo dojít mezi dvěma energiovými hladinami v atomu k laserovému efektu: (a) Ve stavu s vyšší energií se nachází více atomů než ve stavu s nižší energií. (b) Stav odpovídající horní energiové hladině je metastabilní. (c) Stav odpovídající dolní energiové hladině je metastabilní. (d) Stav odpovídající dolní energiové hladině je základní stav atomu. (e) Aktivním médiem je plyn.

14. Obr. 41.23 ukazuje část energiového diagramu atomů helia a neonu, které se účastní vytváření laserového světla. Víme, že atom helia ve stavu s energií E_3 může srážkou vybudit atom neonu z jeho základního stavu do stavu s energií E_2. Energie E_3 (20,61 eV) atomu helia je blízká, ale ne přesně rovna energii E_2 (20,66 eV) atomu neonu. Jak může dojít k předání energie, jestliže si tyto energie nejsou *přesně* rovny?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 41.4 Momenty hybnosti a magnetické dipólové momenty

1C. Ukažte, že $\hbar = h/2\pi = 1{,}06{\cdot}10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s} = 6{,}59{\cdot}10^{-16}\ \mathrm{eV{\cdot}s}$.

2C. Kolik elektronových stavů se nachází v následujících podslupkách: (a) $n = 4, l = 3$; (b) $n = 3, l = 1$; (c) $n = 4, l = 1$; (d) $n = 2, l = 0$?

3C. Kolik elektronových stavů se nachází v následujících slupkách: (a) $n = 4$, (b) $n = 1$, (c) $n = 3$, (d) $n = 2$?

4C. (a) Jaká je velikost orbitálního momentu hybnosti elektronu ve stavu s $l = 3$? (b) Jaká je největší hodnota jeho průmětu do osy z?

5C. (a) Kolika možných hodnot může nabývat l pro $n = 3$? (b) Kolika možných hodnot může nabývat m_l pro $l = 1$?

6C. Elektron v atomu vodíku je ve stavu s $l = 5$. Jaký je nejmenší možný úhel mezi $\boldsymbol{L}$ a osou z?

7C. Napište všechna kvantová čísla stavů v podslupce s $n = 4$ a $l = 3$.

8C. Elektron ve víceelektronovém atomu je ve stavu s $l = 3$. Jaké jsou možné hodnoty kvantových čísel n, m_l a m_s?

9C. Elektron ve víceelektronovém atomu má nejvyšší hodnotu kvantového čísla m_l rovnu $+4$. Co můžete říci o jeho zbývajících kvantových číslech?

10C. Kolik kvantových stavů elektronu se nachází ve slupce s $n = 5$?

11C. Elektron je ve stavu s $n = 3$. Jaký je počet možných hodnot (a) l, (b) m_l, (c) m_s, (d) počet stavů ve slupce s $n = 3$ a (e) počet podslupek ve slupce s $n = 3$?

12Ú. Elektron je ve stavu s $l = 3$. Vypočítejte a sestavte do tabulky možné hodnoty L_z, μ_z a θ, kde θ je úhel mezi příslušným vektorem a kladným směrem osy z. Určete rovněž velikosti vektorů $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{\mu}$.

13Ú. (Problém související s korespondenčním principem.) Odhadněte (a) hodnotu kvantového čísla l pro kruhový pohyb Země kolem Slunce a (b) počet přípustných orientací roviny dráhy Země v souladu s pravidly o prostorovém kvantování. (c) Nalezněte θ_{min}, polovinu vrcholového úhlu nejmenšího kužele, opsaného normálou k rovině dráhy Země při oběhu Země kolem Slunce.

14Ú. Změříme-li průmět $\boldsymbol{L}$ do osy z, ukažte, že o zbývajících dvou složkách vektoru $\boldsymbol{L}$ můžeme pouze říci, že

$$(L_x^2 + L_y^2)^{1/2} = \left(l(l+1) - m_l^2\right)^{1/2}\hbar.$$

ODST. 41.5 Sternův-Gerlachův pokus

15C. Vypočtěte dva možné úhly mezi vektory spinu a magnetického pole z př. 41.1. Mějte na paměti, že orbitální moment hybnosti valenčního elektronu v atomu stříbra je roven nule.

16C. S jakým zrychlením se pohybuje atom stříbra při průchodu vychylujícím magnetem při Sternově-Gerlachově pokusu v př. 41.1?

17C. Předpokládejte, že ve Sternově-Gerlachově pokusu prováděném s neutrálními atomy stříbra má magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ velikost 0,50 T. (a) Jaký je energiový rozdíl opačných orientací atomů stříbra v obou svazcích? (b) Jaká frekvence záření by vedla k přechodu mezi oběma stavy? (c) Jaká je odpovídající vlnová délka tohoto záření a do jaké části spektra patří? Magnetický moment neutrálního atomu stříbra je $1\mu_{\mathrm{B}}$.

18Ú. Předpokládejte, že se atom vodíku v základním stavu pohybuje v úseku délky 80 cm kolmo k magnetickému poli s gradientem $\mathrm{d}B/\mathrm{d}z = 1{,}6{\cdot}10^2\ \mathrm{T{\cdot}m^{-1}}$. (a) Jak velkou silou působí toto pole na atom v důsledku spinového magnetického momentu jeho elektronu, který má velikost μ_{B}? (b) Jaká je výchylka atomu ve směru z, proletí-li polem úsek délky 80 cm rychlostí $1{,}2{\cdot}10^5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

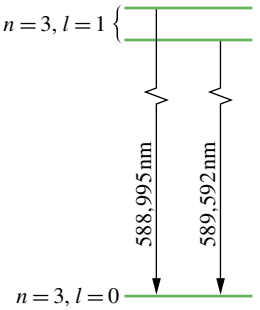
ODST. 41.6 Jaderná magnetická rezonance

19C. Jaká je vlnová délka fotonu, který způsobí překlopení spinu elektronu z polohy souhlasně orientované do polohy nesouhlasně orientované s magnetickým polem o velikosti 0,200 T? Předpokládejte $l = 0$.

20C. Proton i elektron mají spinové kvantové číslo s rovno $\frac{1}{2}$. V atomu vodíku v základním stavu ($n = 1$ a $l = 0$) existují dvě energiové hladiny a jejich hodnoty závisejí na tom, zda jsou spiny protonu a elektronu orientovány souhlasně či nesouhlasně. Pokud atom přejde ze stavu s vyšší energií do stavu s energií nižší překlopením spinu, emituje foton o vlnové délce 21 cm. Radioastronomové zaznamenávají záření o této vlnové délce přicházející z hlubokého vesmíru. Jaké je efektivní magnetické pole (v důsledku magnetického dipólového momentu protonu) působící na elektron, který emituje toto záření?

21C. Vnější střídavé magnetického pole o frekvenci 34 MHz působí na vzorek obsahující vodíkové atomy. Magnetickou rezonanci pozorujeme, je-li velikost indukce vnějšího magnetického pole 0,78 T. Vypočtěte velikost indukce lokálního magnetického pole vytvořeného atomy sousedícími s protony, jejichž spiny se překlopily, za předpokladu, že vnější a lokální pole jsou rovnoběžná.

22C. Excitovaný sodíkový atom vyzařuje dvě blízké spektrální čáry (sodíkový dublet — obr. 41.24) o vlnových délkách 588,995 a 589,592 nm. (a) Jaký je rozdíl energií mezi těmito dvěma horními energiovými hladinami? (b) Tento energiový rozdíl je způsoben tím, že spin elektronu může být orientován buď souhlasně, nebo nesouhlasně s vnitřním magnetickým polem daným orbitálním (magnetickým) momentem elektronu. Použijte výsledků (a) a najděte velikost tohoto vnitřního magnetického pole.



Obr. 41.24 Cvičení 22

ODST. 41.8 Pravoúhlé pasti s více elektrony

23C. Sedm elektronů je zachyceno v jednorozměrné nekonečné potenciálové jámě o šířce L. Jaká je energie základního stavu systému elektronů v násobcích $h^2/(8mL^2)$? Předpokládejte, že elektrony spolu neinteragují, ale uvažujte spin elektronu.

24C. Pravoúhlá hradba o šířkách $L_x = L$ a $L_y = L$ obsahuje sedm elektronů. Jaká je energie základního stavu systému sedmi elektronů v násobcích $h^2/(8mL^2)$? Předpokládejte, že elektrony spolu neinteragují, ale uvažujte spin elektronu.

25Ú. Pro zadání ze cvičení 23 určete, v násobcích $h^2/(8mL^2)$, energie (a) prvního excitovaného stavu, (b) druhého excitovaného stavu a (c) třetího excitovaného stavu systému sedmi elektronů. (d) Vytvořte energiový diagram pro čtyři nejnižší hladiny systému.

26Ú. Pro zadání ze cvičení 24 určete, v násobcích $h^2/(8mL^2)$, energie (a) prvního excitovaného stavu, (b) druhého excitovaného stavu a (c) třetího excitovaného stavu systému sedmi elektronů. (d) Vytvořte energiový diagram pro čtyři nejnižší hladiny systému.

27Ú. Krychlová krabice o hraně L obsahuje osm elektronů. V násobcích $h^2/(8mL^2)$ určete, jaká je energie základního stavu systému osmi elektronů. Předpokládejte, že elektrony spolu neinteragují, ale uvažujte spin elektronu.

28Ú. Pro zadání z úlohy 27 určete, v násobcích $h^2/(8mL^2)$, energii (a) prvního excitovaného stavu, (b) druhého excitovaného stavu a (c) třetího excitovaného stavu systému osmi elektronů. (d) Vytvořte energiový diagram pro čtyři nejnižší hladiny systému.

ODST. 41.9 Struktura periodické soustavy prvků

29Ú. Ukažte, že pokud by 63 elektronů v atomu europia bylo popsáno podle „logické“ řady kvantových čísel, mělo by europium chemické vlastnosti podobné sodíku.

30Ú. Uvažujte prvky selen ($Z = 34$), brom ($Z = 35$) a krypton ($Z = 36$). V jejich části periodické tabulky jsou podslupky zaplňovány v pořadí

$$1s \quad 2s \;\; 2p \quad 3s \;\; 3p \;\; 3d \quad 4s \;\; 4p \quad \ldots .$$

Pro každý prvek určete nejvyšší zaplněnou podslupku a uveďte počty elektronů, které se v ní nalézají.

31Ú. Předpokládejte, že elektron nemá spin, ale že Pauliho vylučovací princip stále platí. Který ze vzácných plynů by pak zůstal vzácným plynem?

32Ú. Jaká jsou čtyři kvantová čísla obou elektronů v atomu helia v jeho základním stavu?

33Ú. Dva elektrony v atomu lithia ($Z = 3$) mají kvantová čísla $n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$ a $m_s = \pm\frac{1}{2}$. Jaké hodnoty kvantových čísel může mít třetí elektron, je-li atom (a) v základním stavu a (b) v prvním excitovaném stavu?

34Ú. Předpokládejte, že v jistém atomu jsou dva elektrony s $n = 2$ a $l = 1$. (a) Pokud by neplatil Pauliho vylučovací princip, kolik kombinací stavů by bylo možno uskutečnit? (b) Kolik stavů by vylučovací princip nedovolil? Jaké jsou to stavy?

35Ú. Ukažte, že počet stavů se stejným kvantovým číslem n je roven $2n^2$.

ODST. 41.10 Rentgenové záření a zařazení prvků

36C. Ukažte, že prahová vlnová délka (v pm) spojitého rentgenového záření je pro libovolný terč číselně dána výrazem $\lambda_{min} = 1\,240/U$, kde U je napětí (v kilovoltech), kterým jsou elektrony před dopadem na terč urychlovány.

37C. Víte-li, že prahová vlnová délka spojitého rentgenového záření vzniklého dopadem elektronů o energii 40,0 keV na terč je rovna 31,1 pm, určete hodnotu Planckovy konstanty h.

38C. Jaké minimální napětí musíme použít v rentgence, aby vzniklé rentgenové záření mělo vlnovou délku 0,100 nm?

39Ú. Elektron o energii 20 keV ztratí dvěma po sobě jdoucími srážkami s jádry atomů (obr. 41.16) veškerou svou původní energii a předá ji dvěma vzniklým fotonům. Vlnová délka druhého fotonu je o 130 pm delší než vlnová délka prvního fotonu. (a) Určete kinetickou energii elektronu po jeho první srážce. (b) Jaké jsou odpovídající vlnové délky a energie obou fotonů?

40Ú. Rentgenové záření vzniká na terči v rentgence při napětí 50,0 kV. Elektron prodělá tři srážky předtím, než se zastaví. Při prvních dvou srážkách ztratí vždy polovinu své kinetické energie. Určete vlnové délky vzniklých fotonů. (Zanedbejte zpětný odraz těžkých atomů terče.)

41Ú. Ukažte, že pohybující se elektron ve volném prostoru nemůže spontánně vyzářit foton. Musí být přítomno další těleso, atom nebo jádro. Proč? (*Tip*: Prověřte zákon zachování energie a hybnosti.)

42C. Bombardují-li elektrony molybdenový terč, vzniká jak spojité, tak charakteristické rentgenové záření podle obr. 41.15. V tomto obrázku je energie dopadajících elektronů rovna 35,0 keV. Zvýšíme-li urychlovací napětí elektronu na 50,0 kV, jaké dostaneme hodnoty (a) λ_{min}, (b) vlnové délky čáry K_α a (c) vlnové délky čáry K_β?

43C. Obr. 41.15 ukazuje rentgenové spektrum při bombardování molybdenového terče ($Z = 42$) elektrony o energii 35,0 keV. Uvažujme stejnou hodnotu urychlujícího napětí, ale terč ze stříbra ($Z = 47$). Jaké budou hodnoty (a) λ_{min}, (b) vlnové délky čáry K_α a (c) vlnové délky čáry K_β? Rentgenové hladiny

K, L a M atomu stříbra jsou 25,51 keV, 3,56 keV a 0,53 keV (obr. 41.17).

44C. Vlnová délka čáry K_α železa je 193 pm. Jaký je rozdíl energie mezi dvěma hladinami atomu železa pro tento přechod?

45Ú. Pomocí obr. 41.15 vypočtěte přibližnou hodnotu rozdílu energií $E_L - E_M$ pro molybden. Porovnejte tuto hodnotu s hodnotou, kterou můžeme získat z obr. 41.17.

46C. Vypočtěte poměr vlnových délek čáry K_α niobu Nb a gallia Ga. Potřebná data jsou uvedena v tabulce v dodatku G.

47Ú. V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty vlnových délek (v pm) čar K_α několika prvků:

Ti	275	Co	179
V	250	Ni	166
Cr	229	Cu	154
Mn	210	Zn	143
Fe	193	Ga	134

Z těchto údajů nakreslete Moseleyho graf jako na obr. 41.18 a ověřte, zda hodnota směrnice získané přímky odpovídá hodnotě vypočtené v př. 41.7.

48Ú. Elektrony v rentgence bombardují terč z wolframu ($Z = 74$). (a) Jaké musí být minimální urychlující napětí, aby mohly vzniknout charakteristické čáry K_α a K_β wolframu? (b) Určete λ_{min} pro tuto hodnotu urychlovacího napětí. (c) Jaké vlnové délky mají čáry K_α a K_β? Hladiny K, L a M (obr. 41.17) mají energie 69,5 keV, 11,3 keV a 2,30 keV.

49Ú. Molybdenový terč ($Z = 42$) bombardujeme elektrony o energii 35,0 keV. Vzniklé rentgenové spektrum je na obrázku 41.15. Vlnové délky čar K_α a K_β jsou 63,0 pm a 71,0 pm. (a) Jakou energii mají odpovídající fotony? (b) Chceme-li odfiltrovat z tohoto záření čáru K_β, necháme jej procházet materiálem, který bude záření této vlnové délky absorbovat silněji než čáru K_α. Jaký materiál byste použili? Ionizační energie K-hladin pro molybden a jeho čtyři sousední prvky jsou:

	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru
Z	40	41	42	43	44
E_K (keV)	18,00	18,99	20,00	21,04	22,12

(*Tip*: Látka absorbuje dané rentgenové záření silněji než jiné, pokud fotony odpovídající jedné vlnové délce mají dostatečnou energii k odtržení K-elektronu z atomu, zatímco druhé fotony nikoli.)

50Ú. Vazební energie elektronů ve slupkách K a L mědi je rovna 8,979 keV a 0,951 keV. Rentgenové záření K_α mědi dopadá na krystal NaCl a vychází po Braggově odrazu 1. řádu pod úhlem 74,1° k rovině rovnoběžné s rovinami sodíku v krystalu. Jaká je vzdálenost mezi těmito rovnoběžnými rovinami?

51Ú. (a) Pomocí rov. (41.18) odhadněte vzájemný poměr energií fotonů vzniklých K_α přechodem ve dvou různých atomech, jejichž atomová čísla jsou Z a Z'. (b) Jaký je tento poměr pro uran a hliník? (c) Pro uran a lithium?

52Ú. Určete, jak blízko teoretické hodnoty energie rentgenového fotonu K_α z rov. (41.19) se nacházejí měřené hodnoty energií pro lehké prvky, od lithia po hořčík, uvedené v tabulce. K tomu je zapotřebí (a) určit hodnotu konstanty C v rov. (41.19) na pět platných míst z rov. (41.16). (b) Dále vypočtěte relativní odchylky teoretických a naměřených hodnot. (c) Na závěr vyneste a diskutujte závislost vypočtených odchylek na atomovém čísle. Měřené hodnoty energie fotonů K_α pro tyto prvky (v eV) jsou

Li	54,3	O	524,9
Be	108,5	F	676,8
B	183,3	Ne	848,6
C	277,0	Na	1 041,0
N	392,4	Mg	1 254,0

(Energiová hladina L je rozštěpená, takže existuje více čar K_α, ale tento jev je pro uvedené prvky zanedbatelný.)

ODST. 41.11 Lasery a jejich světlo

53C. Lasery lze použít k vytváření světelných pulzů, jejichž délka trvání je kratší než 10 fs. Kolik vlnových délek světla ($\lambda = 500$ nm) má takový pulz?

54C. Pro podmínky v př. 41.8 určete, jak velké množství (v mol) aktivního laserového média je nutné k vybuzení 10 atomů do excitovaného stavu s energií E_x.

55C. Měřením doby, která uplyne od vyslání laserového pulzu z pozemské observatoře na odražeče na povrchu Měsíce a zpět, můžeme určit vzdálenost mezi oběma tělesy. (a) Jaká je předpokládaná hodnota této doby? (b) Vzdálenost Země–Měsíc můžeme určit s přesností 15 cm. Jaké nepřesnosti v určení času to odpovídá? (c) Laserový svazek vytváří na povrchu Měsíce stopu o průměru 3 km. Jaká je úhlová divergence svazku?

56C. Hypotetický atom má energiové hladiny rovnoměrně vzdáleny o 1,2 eV. Jaký je poměr počtu atomů ve třináctém a v jedenáctém excitovaném stavu pro teplotu $T = 2\,000$ K?

57C. Hypotetický atom má pouze dvě hladiny energie vzdálené od sebe o 3,2 eV. V atmosféře hvězdy se v každém krychlovém centimetru nachází $6{,}1 \cdot 10^{13}$ těchto atomů ve stavu s vyšší energií a $2{,}5 \cdot 10^{15}$ ve stavu s nižší energií. Jaká je teplota atmosféry hvězdy?

58C. Inverzi populace dvou energiových hladin lze popsat tak, že systému přiřadíme *zápornou absolutní teplotu*. Jaká absolutní záporná teplota (v K) by popisovala systém složený z atomů, u kterých je počet atomů na horní energiové hladině o 10 % vyšší než na hladině dolní? Rozdíl energií mezi oběma hladinami je 2,1 eV.

59C. Helium-neonový laser emituje světlo na vlnové délce 632,8 nm o výkonu 2,3 mW. Kolik fotonů za sekundu emituje?

60C. Pulzní laser emituje světlo na vlnové délce 694,4 nm. Trvání pulzu je 12 ps a energie v jednom pulzu je 0,150 J. (a) Jaká je délka pulzu? (b) Kolik fotonů je emitováno v jednom pulzu?

61C. Objem aktivní části polovodičového GaAlAs laseru je pouhých 200 μm^3 (menší než zrnko písku) a přesto může laser dodávat v kontinuálním režimu výkon 5,0 mW na vlnové délce 0,80 μm. Kolik fotonů za sekundu laser emituje?

62C. Předpokládejte, že máme lasery, které mohou být přesně „naladěny“ na libovolnou vlnovou délku ve viditelné oblasti, tj. v intervalu $450\,\text{nm} < \lambda < 650\,\text{nm}$. Pokud každý televizní kanál potřebuje pásmo frekvencí o šířce 10 MHz, kolik kanálů by bylo možné v tomto rozsahu vlnových délek zřídit?

63C. Laserový svazek ($\lambda = 600\,\text{nm}$) s průměrem 12 cm je namířen na Měsíc vzdálený $3{,}8{\cdot}10^5$ km. K rozšíření svazku dochází pouze vlivem difrakce. Úhlová poloha okraje centrálního difrakčního kroužku (rov. (37.12)) je dána vztahem

$$\sin\theta = \frac{1{,}22\lambda}{d},$$

kde d je průměr apertury svazku. Jaký je průměr středního difrakčního kroužku na povrchu Měsíce?

64C. Aktivní médium rubínového laseru, který generuje laserové světlo o vlnové délce 694 nm, se nachází ve válci 6,0 cm dlouhém o průměru 1 cm. (a) Považujte toto médium za optickou rezonanční dutinu podobnou uzavřené varhanní píšťale. Kolik uzlů stojatého vlnění je v dutině na ose laseru? (b) O jakou frekvenci Δf by se musela stávající frekvence změnit, aby se počet uzlů zvýšil o jeden? (c) Ukažte, že Δf se rovná převrácené hodnotě doby, za kterou svazek vykoná jednu cestu tam a zpět podél osy laseru. (d) Jaká je odpovídající hodnota relativního posuvu frekvence $\Delta f/f$? Index lomu rubínu je 1,75.

65Ú. Zrcadla laseru na obr. 41.22, vzdálená od sebe 8 cm, vytvářejí optický rezonátor, ve kterém může být vytvořeno stojaté vlnění laserového světla. O kolik se liší vlnové délky stojatých vln pro $\lambda \doteq 533\,\text{nm}$?

66Ú. Hypotetický atom má dvě energiové hladiny a vyzařuje na vlnové délce 580 nm. V daném vzorku při 300 K je $4{,}0{\cdot}10^{20}$ atomů ve stavu s nižší energií. (a) Kolik atomů se nachází ve stavu s vyšší energií, je-li systém v termodynamické rovnováze? (b) Představme si, že $3{,}0{\cdot}10^{20}$ těchto atomů je vnějším procesem „napumpováno“ do stavu s vyšší energií a $1{,}0{\cdot}10^{20}$ atomů zůstane na nižší energiové hladině. Jakou maximální energii mohou uvolnit atomy v jediném laserovém pulzu, jestliže v každém atomu dojde k jednomu přechodu mezi oběma stavy (ať už absorpcí, nebo stimulovanou emisí)?

67Ú. Svazek světla o průměru $d = 3{,}00\,\text{mm}$ z argonového laseru má na vlnové délce 515 nm spojitý výkon 5,00 W. Svazek je zaostřen na stínítko čočkou o ohniskové délce $f = 3{,}50\,\text{cm}$ a vytvoří difrakční obrazec podobně jako na obr. 37.9 s poloměrem středního difrakčního kroužku

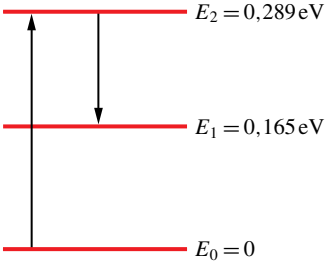
$$R = \frac{1{,}22 f\lambda}{d}$$

(srovnej s rov. (37.12) a př. 37.3). Střední kroužek obsahuje 84 % z celkového výkonu. (a) Jaký má střední kroužek poloměr? (b) Jaká je průměrná hustota toku energie dopadajícího svazku? (c) Jaká je průměrná hustota toku energie ve středním kroužku?

68Ú. Může být mezikontinentální balistická střela zničena intenzívním laserovým svazkem? Svazek o intenzitě $10^8\,\text{W}{\cdot}\text{m}^{-2}$ se může propálit do vytvrzeného povrchu nerotující střely za 1 s. (a) Pokud by laser měl výkon 5,0 MW, vlnovou délku 3,0 μm a svazek o průměru 4 m (vskutku velmi výkonný laser), zničil by střelu vzdálenou 3 000 km? (b) Pokud by se vlnová délka laseru změnila, jaká maximální hodnota by ještě ke zničení střely stačila? Použijte rovnici pro výpočet centrálního difrakčního kroužku ze cvičení 63.

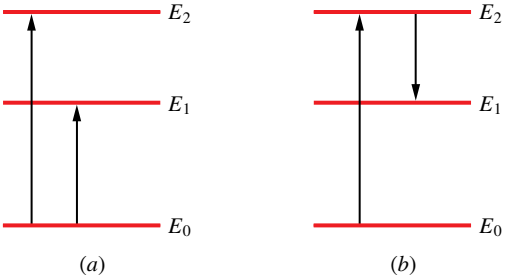
PROBLÉMY

69. CO_2 *laser na Marsu.* Prochází-li sluneční světlo atmosférou Marsu, nastává ve výšce 75 km u molekul kysličníku uhličitého přirozený laserový efekt. Energiové hladiny zapojené do tohoto procesu jsou znázorněny na obr. 41.25; k inverzi populace dochází mezi hladinami E_2 a E_1. (a) Jaká vlnová délka slunečního světla vybuzuje molekuly k laserovému efektu? (b) Pro jakou vlnovou délku dojde k vyzařování laserového světla? (c) V jaké oblasti elektromagnetického spektra leží excitační a laserem vyzářená vlnová délka?



Obr. 41.25 Úloha 69

70. *Stimulovaná emise na kometě.* Jak se kometa přibližuje ke Slunci, Slunce ji více zahřívá a voda odpařená ze zmrzlého ledu na povrchu jádra komety vytváří kolem ní řídkou atmosféru z vodní páry. Sluneční záření pak může disociovat molekuly vodních par na H a OH. Toto záření může rovněž vybudit molekuly OH do stavů s vyšší energií, znázorněných na obr. 41.26.



Obr. 41.26 Úloha 70

Pokud je kometa relativně daleko od Slunce, může sluneční světlo způsobit stejnoměrné nabuzení stavů s energiemi E_2 a E_1 (obr. 41.26a). Inverze populace na těchto hladinách tedy nevzniká. Při dalším přibližování komety ke Slunci však excitace na hladinu E_1 klesá a dochází k inverzi populace. Způsobuje to jedna z mnoha vlnových délek tzv. *Fraunhoferových čar*; to jsou (temné) čáry, které chybí ve spektru slunečního světla, poněvadž jsou absorbovány při průchodu světla sluneční atmosférou.

Jak se kometa přibližuje ke Slunci, posouvají se vlnové délky Fraunhoferových čar vlivem Dopplerova jevu v důsledku relativního pohybu komety vůči Slunci, takže se jedna z Fraunhoferových čar překryje s vlnovou délkou potřebnou pro excitaci molekuly OH do stavu s energií E_1. Nastane inverze populace a molekuly mohou vyzařovat stimulovanou emisí (obr. 41.26b). Když se například kometa Kohoutek přibližovala v prosinci 1973 a lednu 1974 ke Slunci, vysílala v polovině ledna stimulovanou emisí záření na frekvenci přibližně 1 666 MHz. (a) Jaký je energiový rozdíl $E_2 - E_1$ pro toto záření? (b) V jaké oblasti elektromagnetického spektra se toto záření nachází?

42
Vedení elektřiny v pevných látkách



Skupina pracovníků továrny v Rio Rancho v Novém Mexiku. Továrna představuje investici ve výši 2,5 miliardy US dolarů a má rozlohu jako dva tucty fotbalových hřišť. Podle New York Times je tato továrna „na vysoké náhorní plošině v poušti v Novém Mexiku pravděpodobně nejproduktivnější továrnou na světě co se týká hodnoty zboží, které vyrábí“. Ale co tito pracovníci vlastně vyrábějí? Proč jsou oblečeni jako kosmonauti? A proč je podlaha, na které stojí, děrovaná?

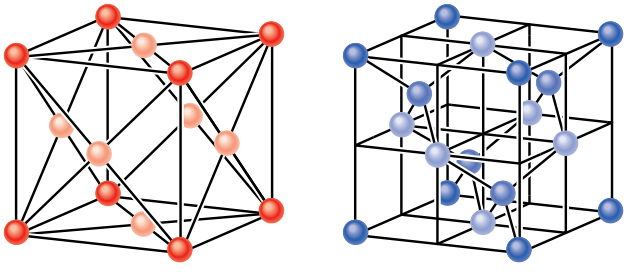
42.1 PEVNÉ LÁTKY

Viděli jsme, jak dobře funguje kvantová fyzika, když ji použijeme na otázky týkající se jednotlivých atomů. Snad se nám v této kapitole podaří ukázat na jedné obsáhlejší problematice, že tato teorie platí stejně tak dobře, když ji použijeme i na seskupení atomů tvořících pevné látky.

Každá pevná látka má velkou řadu vlastností, které můžeme zkoumat. Je průhledná? Můžeme ji roztepat na tenký plát? Jakou rychlostí se v ní pohybují zvukové vlny? Je magnetická? Vede dobře teplo? … A v takovém výčtu bychom mohli pokračovat. My jsme se však rozhodli zaměřit celou kapitolu na jednu jedinou otázku: *Co způsobuje, že pevná látka vede nebo nevede elektrický proud?* Jak uvidíte, tuto otázku nám zodpoví kvantová fyzika.

42.2 ELEKTRICKÉ VLASTNOSTI PEVNÝCH LÁTEK

Budeme zkoumat pouze **krystalické pevné látky**, tedy pevné látky, jejichž atomy jsou uspořádány do pravidelně se opakující trojrozměrné struktury zvané krystalová **mřížka**. Nebudeme se zabývat takovými pevnými látkami jako jsou dřevo, plastické hmoty, sklo nebo guma, jejichž atomy nejsou uspořádány pravidelně. Obr. 42.1 ukazuje základní stavební jednotky **(elementární buňky)** krystalové struktury mědi, typického představitele kovů, a křemíku a diamantu jako typických představitelů polovodičů nebo izolátorů.



(*a*) (*b*)

Obr. 42.1 (a) Elementární buňka mědi je krychle. Obsahuje jeden atom mědi v každém vrcholu krychle (tmavší kuličky) a jeden atom mědi uprostřed každé stěny krychle (světlejší kuličky). Uspořádání se nazývá *kubické plošně centrované*. (b) Elementární buňka křemíku a diamantu je rovněž krychle s atomy uspořádanými do *diamantové mřížky*. V každém vrcholu krychle je jeden atom (tmavší kuličky) a jeden atom se nachází ve středu každé stěny krychle (nejsvětlejší kuličky). Kromě toho jsou uvnitř krychle umístěny čtyři atomy (kuličky o středním odstínu). Každý atom je vázán ke svým čtyřem nejbližším sousedům dvojelektronovou kovalentní vazbou (pouze čtyři atomy uvnitř krychle mají zobrazeny všechny čtyři *nejbližší* sousedy).

Pevné látky můžeme klasifikovat z hlediska elektrických vlastností pomocí tří základních parametrů:

1. **Rezistivita** ϱ za pokojové teploty. Byla definována v čl. 27.4, její jednotkou v soustavě SI je $\Omega\cdot$m.

2. **Teplotní součinitel rezistivity** α, definovaný jako $\alpha = (1/\varrho)(\mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}T)$, s jednotkou K^{-1} (reciproký Kelvin). Můžeme ho určit pro kteroukoli pevnou látku měřením teplotní závislosti ϱ.

3. **Koncentrace nosičů elektrického náboje** n. Tato veličina, počet nosičů elektrického náboje v jednotce objemu, může být nalezena měřením Hallova napětí, jak bylo uvedeno v čl. 29.4, a řadou dalších metod. Odpovídající jednotkou v SI je reciproký kubický metr, m^{-3}.

Měřením rezistivity při pokojové teplotě zjistíme, že existují materiály, nazývané **izolátory**, které prakticky nevedou elektrický proud. Jsou to materiály s vysokou rezistivitou. Diamant, výborný příklad izolátoru, má rezistivitu 10^{24}krát vyšší než měď. Tímto způsobem můžeme okamžitě rozdělit krystalické pevné látky na izolátory a vodivé látky.

Pomocí měření ϱ, α a n lze dále rozdělit většinu vodičů, alespoň při nízkých teplotách, na dvě hlavní kategorie: **kovy** a **polovodiče**.

Polovodiče mají značně větší rezistivitu ϱ než kovy.

Polovodiče mají teplotní součinitel rezistivity α velký a záporný. To znamená, že rezistivita polovodiče *klesá* s teplotou, zatímco u kovu *roste*.

Polovodiče mají značně nižší koncentraci nosičů elektrického náboje n než kovy.

V tab. 42.1 jsou uvedeny hodnoty těchto veličin pro měď (typický kov) a pro křemík (typický polovodič).

Tabulka 42.1 **Některé elektrické vlastnosti dvou materiálů**[a]

	JEDNOTKA	MĚĎ	KŘEMÍK
Typ vodiče		kov	polovodič
Koncentrace nosičů náboje, n	m^{-3}	$9\cdot10^{28}$	$1\cdot10^{16}$
Rezistivita, ϱ	$\Omega\cdot$m	$2\cdot10^{-8}$	$3\cdot10^{3}$
Teplotní součinitel rezistivity, α	K^{-1}	$+4\cdot10^{-3}$	$-70\cdot10^{-3}$

[a] hodnoty za pokojové teploty

Měřením ϱ, α a n získáme podklady pro upřesnění naší základní otázky o vedení elektrického proudu v pevných látkách: *Co způsobuje, že diamant je izolátor, měď vodič a křemík polovodič*? Odpověď na tuto otázku nám opět poskytne kvantová fyzika.

42.3 ENERGIOVÉ HLADINY KRYSTALICKÝCH PEVNÝCH LÁTEK

Vzdálenost mezi sousedními atomy mědi v pevné látce je 260 pm. Obr. 42.2a ukazuje dva izolované atomy mědi, jejichž vzdálenost r je mnohem větší než výše uvedená vzdálenost. Jak ukazuje obr. 42.2b, každý z těchto izolovaných neutrálních atomů má uspořádáno svých 29 elektronů do jednotlivých podslupek takto:

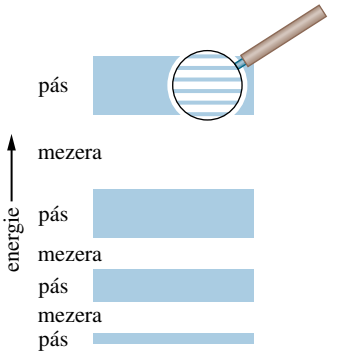
$$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^1.$$

Pro identifikaci podslupek jsme použili zkrácené označení, se kterým jsme se seznámili v čl. 41.9. Připomeňme, že např. podslupka s hlavním kvantovým číslem $n = 3$ a orbitálním kvantovým číslem $l = 1$ se označuje $3p$. Může obsahovat až $2(2l + 1) = 6$ elektronů. Počet elektronů, který skutečně obsahuje, udává horní index za názvem podslupky. Prvních 6 podslupek mědi je zaplněno, ale vnější podslupka $4s$, která může mít 2 elektrony, obsahuje jen jeden elektron.

Jestliže přiblížíme atomy z obr. 42.2a, začnou, volně řečeno, vzájemně pociťovat svou přítomnost. Vyjádřeno jazykem kvantové fyziky, jejich vlnové funkce se začnou vzájemně překrývat; nejdříve se budou překrývat vlnové funkce vnějších elektronů.

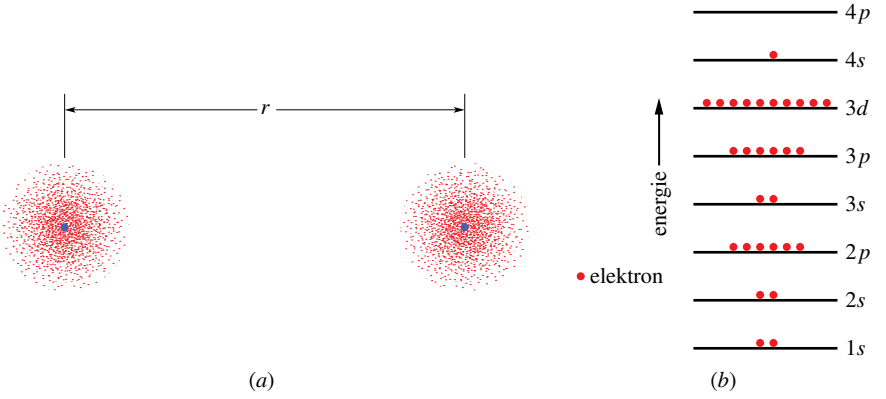
V případě, že se vlnové funkce překrývají, nehovoříme již o dvou nezávislých atomech, ale o jednoduchém dvouatomovém systému, který obsahuje $2 \cdot 29 = 58$ elektronů. Pro tento větší systém platí rovněž Pauliho vylučovací princip, to znamená, že každý z 58 elektronů musí být v jiném kvantovém stavu. Ve skutečnosti ale máme k dispozici 58 kvantových stavů, protože každá energiová hladina izolovaného atomu se v případě dvouatomového systému rozdělí na *dvě* hladiny.

Přidáváním dalších atomů složíme postupně mřížku krystalické mědi. Jestliže naše mřížka obsahuje N atomů, pak se každá hladina příslušná izolovanému atomu mědi musí rozdělit v pevné látce na N hladin. Jednotlivé energiové hladiny pevné látky pak vytvářejí **energiové pásy**; sousední pásy odděluje **energiová mezera**, která představuje interval energií, které nemůže nabývat žádný elektron v pevné látce. (Tuto mezeru proto nazýváme **pás zakázaných energií** nebo zkráceně **zakázaný pás**.) Typický pás má šířku pouze několik elektronvoltů. Protože N může být řádu 10^{24}, vidíme, že jednotlivé energie uvnitř pásu jsou opravdu velmi těsně blízko sebe a že je v něm obrovský počet hladin.



Obr. 42.3 Pásová struktura pevné látky.Jak naznačuje zvětšený pohled, každý pás se skládá z velmi velkého počtu velmi blízkých hladin energie. (U některých pevných látek se mohou sousedící pásy překrývat; z důvodu větší názornosti tento případ neukazujeme.)

Obr. 42.3 naznačuje pásovou strukturu energiových hladin v obecné krystalické pevné látce. Pásy s nižší energií jsou užší než pásy s vyšší energií. To je dáno tím, že elek-

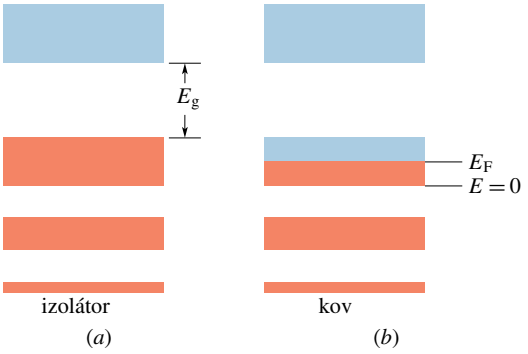


Obr. 42.2 (a) Dva atomy mědi se nacházejí ve velké vzdálenosti. Prostorové rozdělení jejich elektronů je znázorněno tečkami. (b) Každý atom mědi má 29 elektronů rozdělených do řady podslupek. U neutrálního atomu v základním stavu jsou zaplněny všechny podslupky až po hladinu $3d$, podslupka $4s$ obsahuje jeden elektron (může obsahovat dva) a vyšší podslupky jsou prázdné. Pro jednoduchost jsou zakresleny mezi podslupkami stejné energiové vzdálenosti.

trony z nižších energiových hladin stráví většinu času hluboko v elektronovém oblaku atomu. Vlnové funkce vnitřních elektronů se nepřekrývají tolik jako vlnové funkce vnějších elektronů. Rozštěpení vnitřních hladin proto není tak velké jako u vyšších energiových hladin, které jsou obsazeny vnějšími elektrony.

42.4 IZOLÁTORY

Pevná látka se nazývá izolátor, jestliže po přiložení elektrického napětí nevede elektrický proud. Má-li vést proud, musí se některé elektrony v pevné látce přesunout do vyšších energiových hladin. Jak ale ukazuje obr. 42.4a, u izolátoru je nejvyšší pás obsahující elektrony plně obsazen a Pauliho vylučovací princip brání elektronům v přesunu do obsazených hladin.



Obr. 42.4 (a) Schematické znázornění pásové struktury izolátoru. Zaplněné hladiny jsou zobrazeny červeně. Nejvyšší zaplněná hladina leží na vrcholu pásu a další vyšší prázdná hladina je od ní oddělena relativně velkou energiovou mezerou — zakázaným pásem E_g. (b) Pásová struktura kovu. Nejvyšší zaplněná hladina, nazývaná Fermiho hladina E_F, leží blízko středu pásu. Protože prázdné hladiny jsou k dispozici uvnitř téhož pásu, elektrony v pásu mohou snadno měnit hladiny a tak může docházet k vedení elektrického proudu.

Elektrony z plně obsazeného pásu nemají volné místo, kam by se mohly přesunout; jsou tak blokovány. Je to stejné, jako když se dítě snaží vylézt na žebřík, na jehož každé příčce už stojí jiné dítě. Nejsou-li žádné příčky volné, nikdo se nemůže pohnout.

V energiovém pásu nad zaplněným pásem na obr. 42.4a je mnoho prázdných hladin. Aby však elektron obsadil jednu z těchto hladin, musí získat dostatečnou energii na překonání širokého pásu zakázaných energií, který odděluje oba uvedené pásy. U diamantu je tento zakázaný pás tak široký, že jej v podstatě žádný elektron nepřeskočí (energie potřebná na jeho překonání je 5,5 eV, což je asi 140krát víc, než je střední kinetická energie volné částice při pokojové teplotě). Diamant je tedy izolátor, a to velice dobrý.

PŘÍKLAD 42.1

V kap. 41 jsme použili rov. (41.21)

$$\frac{N_x}{N_0} = e^{-(E_x - E_0)/kT}, \qquad (42.1)$$

abychom získali poměr počtu atomů N_x na energiové hladině E_x k počtu atomů N_0 na hladině E_0 pro případ, že atomy jsou částí systému o teplotě T (v Kelvinech). Konstanta k je Boltzmannova konstanta ($8{,}62 \cdot 10^{-5}$ eV/K).

Stejnou rovnici můžeme použít k výpočtu pravděpodobnosti, že nějaký elektron v izolátoru přeskočí pás zakázaných energií E_g ukázaný na obr. 42.4a. Položíme-li $E_x - E_0 = E_g$, pak N_x/N_0 je poměr počtu elektronů bezprostředně nad zakázaným pásem k počtu elektronů bezprostředně pod tímto pásem.

Jaká je pravděpodobnost, že při pokojové teplotě (300 K) elektron na nejvyšší hladině valenčního pásu v diamantu přeskočí zakázaný pás E_g, který je pro diamant 5,5 eV?

ŘEŠENÍ: U diamantu je exponent v rov. (42.1)

$$-\frac{E_g}{kT} = -\frac{(5{,}5\,\text{eV})}{(8{,}62 \cdot 10^{-5}\,\text{eV/K})(300\,\text{K})} = -213.$$

Hledaná pravděpodobnost je pak

$$\frac{N_x}{N_0} = e^{-(E_g/kT)} = e^{-213} \doteq 3 \cdot 10^{-93}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Není divu, že diamant je tak dobrý izolátor. Dokonce i pro diamant tak velký jako Země by byla šance, že jeden jediný elektron přeskočí při teplotě 300 K pás zakázaných energií, zanedbatelně malá.

42.5 KOVY

Jak ukazuje obr. 42.4b, je pro kovy charakteristické, že se nejvyšší obsazená hladina energie nachází blízko středu energiového pásu. Jestliže na kovový vzorek přiložíme napětí, může vzorkem protékat proud, protože je v něm velmi mnoho prázdných hladin o vyšších energiích, na které mohou elektrony přecházet. Kov tedy může vést elektřinu, protože elektrony v nejvyšším obsazeném pásu se mohou snadno přesunovat na vyšší energiové hladiny téhož pásu.

V čl. 27.6 jsme zavedli pro kov **model volných elektronů**, podle kterého se mohou vodivostní elektrony volně pohybovat v objemu vzorku podobně jako molekuly plynu v uzavřené nádobě. Tento model jsme použili k odvození vztahu pro rezistivitu kovu za předpokladu, že se elektrony chovají podle zákonů klasické newtonovské mechaniky. V této kapitole použijeme stejný model pro objasnění chování elektronů, zvaných **vodivostní elektrony**, v částečně

zaplněném pásu naznačeném na obr. 42.4b. Podle zákonů kvantové fyziky však budeme předpokládat, že energie těchto elektronů jsou kvantovány a že platí Pauliho vylučovací princip.

Předpokládáme rovněž, že potenciální energie vodivostního elektronu má stejnou konstantní hodnotu ve všech bodech uvnitř mřížky. Pokud si tuto hladinu potenciální energie zvolíme za nulovou (což můžeme), pak je celková energie E vodivostních elektronů rovna kinetické energii.

Nejnižší hladina částečně zaplněného pásu na obrázku 42.4b odpovídá energii $E = 0$. Nejvyšší obsazená hladina v tomto pásu (při absolutní nule, $T = 0\,\mathrm{K}$) se nazývá **Fermiho hladina** a odpovídající energie pak **Fermiho energie** E_F. Pro měď je $E_\mathrm{F} = 7{,}0\,\mathrm{eV}$.

Rychlost elektronů odpovídající Fermiho energii se nazývá **Fermiho rychlost** v_F. U mědi je Fermiho rychlost rovna $1{,}6{\cdot}10^6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Tento fakt by měl stačit, aby vyvrátil mylnou představu, že při absolutní nule ustává veškerý pohyb; při této teplotě, a to pouze v důsledku Pauliho vylučovacího principu, jsou vodivostní elektrony „naskládány“ v částečně zaplněném pásu z obr. 42.4b s energiemi od nuly až po Fermiho energii.

Vodivost při $T > 0$

Ve skutečnosti nás zajímá vedení elektrického proudu v kovech při teplotách vyšších než absolutní nula. Jak se změní rozdělení elektronů uvedené na obr. 42.4b při těchto vyšších teplotách? Jak dále uvidíme, změní se překvapivě málo.

Z elektronů v částečně zaplněném pásu na obr. 42.4b mohou jenom ty, které jsou blízko Fermiho hladiny, najít volné hladiny o vyšší energii, a jenom tyto elektrony mohou přejít na vyšší hladiny tepelným vybuzením. Dokonce při $T = 1\,000\,\mathrm{K}$, což je teplota, při které by měď jasně zářila v zatemněné místnosti, se rozdělení elektronů na dostupných hladinách příliš neliší od rozdělení pro $T = 0\,\mathrm{K}$.

Vysvětleme si, proč to tak je. Veličina kT, kde k je Boltzmannova konstanta, je vhodnou mírou energie, která může být předána elektronům vlivem náhodného tepelného pohybu atomů mřížky. Při teplotě $T = 1\,000\,\mathrm{K}$ dostáváme $kT = 0{,}086\,\mathrm{eV}$. Není tedy reálné, že by elektron pouze vlivem tepelného vybuzení změnil svou energii víc než o několikanásobek této relativně malé hodnoty energie. V nejlepším případě tedy pouze malá část elektronů, jejichž energie jsou blízko Fermiho energie, může přejít do vyšších energiových hladin vlivem tepelného vybuzení. Vyjádřeno poeticky, tepelné vybuzení způsobuje pouze drobné vlnky na hladině moře Fermiho elektronů; obrovské hlubiny tohoto moře však zůstávají nerušeny.

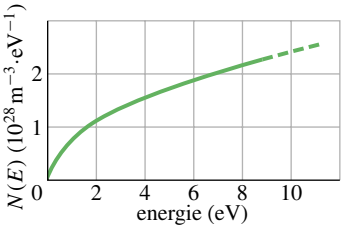
Kolik existuje kvantových stavů?

Schopnost kovů vést elektrický proud závisí na tom, kolik kvantových stavů mohou elektrony obsadit a jaké jsou energie těchto stavů. Z toho vyplývá otázka: Jaké jsou energie jednotlivých stavů v částečně zaplněných pásech na obr. 42.4b? Zodpovědět tuto otázku je těžké, protože nemůžeme vůbec vypsat jednotlivé energie takového velkého množství stavů. Namísto toho se zeptáme: Kolik stavů má energii v intervalu E až $E + \mathrm{d}E$? Tento počet můžeme psát jako $N(E)\,\mathrm{d}E$, kde $N(E)$ se nazývá **hustota stavů** pro energii E. Jednotkou pro $N(E)\,\mathrm{d}E$ je počet stavů na kubický metr (stavy/$\mathrm{m^3}$ nebo jednoduše $\mathrm{m^{-3}}$); obvykle užívanou jednotkou pro $N(E)$ je počet stavů na kubický metr a na elektronvolt ($\mathrm{m^{-3}{\cdot}eV^{-1}}$).

Výraz pro hustotu stavů můžeme určit z počtu stojatých vln elektronů, které lze vměstnat do krabice o rozměrech studovaného kovového vzorku. Tento postup je analogický stanovení počtu stojatých zvukových vln, které mohou vzniknout v uzavřené píšťale varhan. Rozdíly spočívají v tom, že náš problém je trojrozměrný (problém varhanní píšťaly je jednorozměrný) a vlny jsou de Broglieho vlny (vlny ve varhanní píšťale jsou zvukové vlny). Lze ukázat, že výsledkem tohoto výpočtu je

$$N(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2} \quad \text{(hustota stavů)}, \quad (42.2)$$

kde m je hmotnost elektronů a E je energie, pro kterou má být $N(E)$ určena. Všimněme si, že vztah pro $N(E)$ neobsahuje žádnou informaci o tvaru vzorku, jeho teplotě nebo o materiálu, ze kterého se vzorek skládá. Na obr. 42.5 je nakreslena polovina paraboly, která je grafickým vyjádřením rov. (42.2). Z obrázku lze například vyčíst, že v energiovém intervalu o šířce 1 eV kolem energie 8 eV leží v jednom kubickém metru přibližně $2{\cdot}10^{28}$ stavů.



Obr. 42.5 Hustota stavů $N(E)$, tedy počet energiových hladin elektronů v jednotkovém intervalu energií a jednotkovém objemu, zobrazená jako funkce energie elektronů. Hustota stavů pouze vyjadřuje počet stavů, které jsou k dispozici. Neříká nic o tom, zda stavy jsou, nebo nejsou obsazeny elektrony.

KONTROLA 1: (a) Je vzdálenost mezi sousedními energiovými hladinami mědi při $E = 4\,\mathrm{eV}$ větší, stejná,

nebo menší než tato vzdálenost při $E = 6\,\text{eV}$? (b) Je vzdálenost mezi sousedními energiovými hladinami mědi při $E = 4\,\text{eV}$ větší, stejná, nebo menší než tato vzdálenost pro stejný objem hliníku a pro $E = 4\,\text{eV}$?

Pravděpodobnost obsazení $P(E)$

Schopnost kovů vést elektrický proud závisí na pravděpodobnosti, že dostupné prázdné hladiny budou skutečně obsazeny. Tím se dostáváme k další otázce: Jestliže se v látce nachází stav o energii E, jaká je pravděpodobnost $P(E)$, že bude skutečně obsazen elektronem? Víme, že při teplotě $T = 0\,\text{K}$ je $P(E) = 1$ pro všechny stavy s energiemi nižšími než je Fermiho energie, což odpovídá jistotě, že odpovídající stavy jsou obsazeny. Víme také, že pro $T = 0\,\text{K}$ je $P(E) = 0$ pro všechny stavy s energiemi vyššími než je Fermiho energie, což naopak odpovídá jistotě, že odpovídající stavy *nejsou* obsazeny. Tato situace je ilustrována na obr. 42.6a.

Abychom našli $P(E)$ pro teploty vyšší než absolutní nula, musíme použít soubor pravidel kvantové fyziky pro výpočet pravděpodobnosti obsazení nazývaných **Fermiho-Diracova statistika**, pojmenovaných podle fyziků, kteří je zavedli. Použitím těchto pravidel lze ukázat, že **pravděpodobnost obsazení** $P(E)$ je

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad \text{(pravděpodobnost obsazení)}, \tag{42.3}$$

kde E_F je Fermiho energie. Všimněme si, že $P(E)$ nezávisí na hodnotě energie E, ale na velikosti rozdílu $E - E_F$, který může být kladný, nebo záporný.

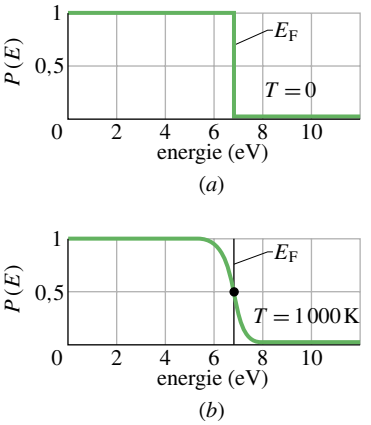
Abychom se přesvědčili, že rov. (42.3) popisuje křivku uvedenou na obr. 42.6a, dosadíme $T = 0\,\text{K}$. Potom:

pro $E < E_F$ je exponenciální člen v rov. (42.3) roven $e^{-\infty}$, tedy nule, a tak ve shodě s obr. 42.6a je $P(E) = 1$;

pro $E > E_F$ je exponenciální člen roven $e^{+\infty}$, a tedy ve shodě s obr. 42.6a je $P(E) = 0$.

Na obr. 42.6b je graf závislosti $P(E)$ pro $T = 1\,000\,\text{K}$. Graf ukazuje, jak jsme se zmínili dříve, že změny v rozdělení elektronů probíhají pouze mezi stavy, jejichž energie je blízká Fermiho energii E_F. Všimněme si, že pro $E = E_F$ je (nezávisle na teplotě) exponenciální člen v rov. (42.3) roven $e^0 = 1$, a tedy $P(E) = 0{,}5$. To nás přivádí k užitečnější definici Fermiho energie:

Fermiho energie daného materiálu je energie kvantového stavu, který má pravděpodobnost 0,5, že bude zaplněn elektronem.



Obr. 42.6 Pravděpodobnost obsazení $P(E)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že energiová hladina E bude obsazena elektronem. (a) Pro $T = 0\,\text{K}$ je $P(E)$ rovno jedné pro hladiny s energií až do Fermiho energie a nule pro energie vyšší. (b) Při teplotě $T = 1\,000\,\text{K}$ malá část elektronů, jejichž energie byla mírně nižší než Fermiho energie při $T = 0\,\text{K}$, přešla do stavů s energiemi mírně vyššími než Fermiho energie. Bod na křivce ukazuje, že pro $E = E_F$ je $P(E) = 0{,}5$.

V daném vzorku přitom vůbec nemusí existovat dovolený kvantový stav příslušný této energii.

Kolik existuje *obsazených* stavů?

Rov. (42.2) a obr. 42.5 nám říkají, jaké je rozložení stavů ve vzorku podle energie. Rov. (42.3) určuje pravděpodobnost, s jakou bude daný stav obsazen elektronem. Abychom našli hustotu *obsazených* stavů $N_o(E)$, musíme vynásobit hustotu stavů odpovídající pravděpodobností obsazení; tedy

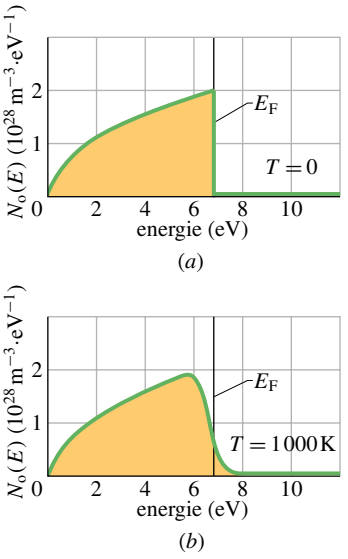
$$N_o(E) = N(E)P(E) \quad \text{(hustota obsazených stavů)}. \tag{42.4}$$

Na obr. 42.7a je grafické vyjádření rov. (42.4) pro měď pro $T = 0\,\text{K}$. Bylo získáno násobením hodnot funkce hustoty stavů (obr. 42.5) pro každou energii odpovídajícími hodnotami pravděpodobnosti obsazení pro absolutní nulu (obr. 42.6a). Obdobně získaný obr. 42.7b ukazuje hustotu obsazených stavů pro měď pro teplotu $T = 1\,000\,\text{K}$.

Výpočet Fermiho energie

Předpokládejme, že sečteme (zintegrujeme) počet obsazených stavů na obr. 42.7a pro $T = 0$ pro všechny energie mezi $E = 0$ a $E = E_F$. Výsledek se musí rovnat n, tj. počtu vodivostních elektronů v jednotkovém objemu kovu. Matematický zápis této úvahy je

$$n = \int_0^{E_F} N_o(E)\,dE. \tag{42.5}$$



Obr. 42.7 (a) Hustota obsazených stavů $N_o(E)$ pro měď pro $T = 0\,K$. Plocha pod křivkou odpovídá číselně koncentraci elektronů n. Všimněme si, že všechny stavy s energií až do Fermiho energie jsou obsazeny a všechny stavy s energiemi nad Fermiho energií jsou prázdné. (b) Stejná situace pro měď a $T = 1\,000\,K$. Pouze elektrony s energií blízkou Fermiho energii jsou ovlivněny tepelným vybuzením a přerozděleny.

(Integrál udává obsah plochy pod rozdělovací křivkou na obr. 42.7a.) Protože $P(E) = 1$ pro všechny energie menší než Fermiho energie, můžeme v rov. (42.5) dosadit $N(E)$ místo $N_o(E)$ a potom použít tuto rovnici pro nalezení Fermiho energie E_F. Dosadíme-li rov. (42.2) do rov. (42.5), dostáváme

$$n = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3}\int_0^{E_F} E^{1/2}\,dE = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3}\frac{2E_F^{3/2}}{3}.$$

Vyjádřením E_F z této rovnice určíme

$$E_F = \left(\frac{3}{16\sqrt{2}\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m}n^{2/3} \doteq \frac{0{,}121h^2}{m}n^{2/3}. \qquad (42.6)$$

Pokud známe koncentraci vodivostních elektronů n, můžeme nalézt Fermiho energii pro kov.

PŘÍKLAD 42.2

Krychle mědi má hranu o délce 1 cm. Jaký je počet kvantových stavů N v částečně zaplněném pásu na obr. 42.4b v energiovém intervalu od $E = 5{,}000\,eV$ do $E = 5{,}010\,eV$? (Tyto hodnoty energie jsou tak blízké, že můžeme považovat hustotu stavů $N(E)$ v tomto intervalu za konstantní.)

ŘEŠENÍ: Počet stavů můžeme nalézt ze vztahu

$$\begin{pmatrix}\text{počet stavů}\\ \text{ve vzorku}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{hustota stavů,}\\ m^{-3}\,eV^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{energiový}\\ \text{rozsah, eV}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{objem}\\ \text{vzorku, } m^3\end{pmatrix}$$

neboli

$$N = N(E)\cdot\Delta E\cdot V, \qquad (42.7)$$

kde $\Delta E = 0{,}010\,eV$ a $V = 1\,cm^3$ je objem vzorku. Z rov. (42.2) pro energii $E = 5{,}000\,eV$ dostáváme

$$N(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3}E^{1/2} = (8\sqrt{2}\pi)(9{,}11\cdot10^{-31}\,kg)^{3/2}\cdot\frac{(5{,}000\,eV)^{1/2}(1{,}60\cdot10^{-19}\,J/eV)^{1/2}}{(6{,}63\cdot10^{-34}\,J\cdot s)^3} = 9{,}48\cdot10^{46}\,m^{-3}\,J^{-1} = 1{,}52\cdot10^{28}\,m^{-3}\,eV^{-1}.$$

Z rov. (42.7) vypočteme

$$N = N(E)\Delta E a^3 = (1{,}52\cdot10^{28}\,m^{-3}\,eV^{-1})(0{,}010\,eV)(1\cdot10^{-2}\,m)^3 = 1{,}52\cdot10^{20}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Je to ohromné množství stavů, ale to jsme také očekávali. Přestože všechny tyto stavy spadají do úzkého energiového intervalu o pouhé šířce 0,01 eV, velký počet stavů vyplývá z ohromného množství atomů, které tvoří vzorek.

PŘÍKLAD 42.3

(a) Jaká je pravděpodobnost obsazení kvantového stavu o energii 0,10 eV nad Fermiho energií? Předpokládejte teplotu vzorku 800 K.

ŘEŠENÍ: $P(E)$ můžeme vypočítat z rov. (42.3). Spočítáme však nejprve (bezrozměrový) exponent v tomto vztahu:

$$\frac{E - E_F}{kT} = \frac{(0{,}10\,eV)}{(8{,}62\cdot10^{-5}\,eV/K)(800\,K)} = 1{,}45.$$

Dosazením této hodnoty do rov. (42.3) dostaneme

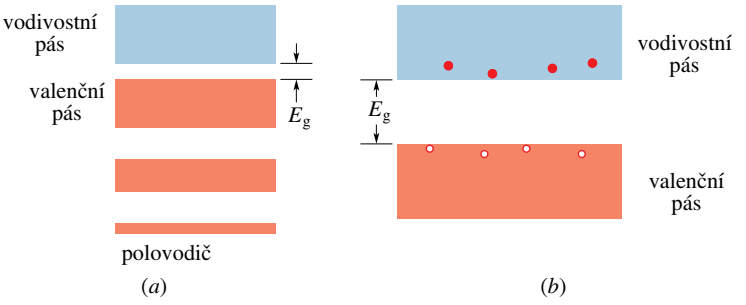
$$P(E) = \frac{1}{e^{1{,}45}+1} = 0{,}19 \text{ neboli } 19\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je pravděpodobnost obsazení kvantového stavu 0,10 eV *pod* Fermiho energií?

ŘEŠENÍ: Exponent v rov. (42.3) má stejnou absolutní hodnotu jako v části (a), avšak je záporný. Z toho pak vyplývá

$$P(E) = \frac{1}{e^{-1{,}45}+1} = 0{,}81 \text{ neboli } 81\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V případě stavů pod Fermiho energií nás častěji zajímá pravděpodobnost, že tento stav *není* obsazen. Tato pravděpodobnost je jednoduše rovna $1 - P(E)$, tedy v našem případě 19 %. Povšimněte si, že uvedená pravděpodobnost je číselně stejná jako pravděpodobnost obsazení v (a).



Obr. 42.8 (a) Pásová struktura polovodičů připomíná strukturu izolátorů (obr. 42.4a) až na to, že pás zakázaných energií E_g je mnohem užší. Elektrony tak mají reálnou šanci ho přeskočit působením tepelné aktivace. (b) Vlivem tepelné aktivace přeskočilo několik elektronů z valenčního pásu do vodivostního pásu a tím vznikl ve valenčním pásu stejný počet děr.

42.6 POLOVODIČE

Porovnáním obr. 42.8a a 42.4a vidíme, že pásová struktura polovodičů je podobná pásové struktuře izolátorů. Hlavní rozdíl je v tom, že polovodič má mnohem užší pás zakázaných energií E_g mezi vrcholem nejvyššího zaplněného pásu (nazývaného **valenční pás**) a dnem prázdného pásu nad ním (nazývaného **vodivostní pás**). Z tohoto pohledu je nepochybné, že křemík ($E_g = 1{,}1\,\text{eV}$) je polovodič a diamant ($E_g = 5{,}5\,\text{eV}$) je izolátor. V křemíku, na rozdíl od diamantu, může při pokojové teplotě reálně docházet vlivem tepelné aktivace k přeskokům elektronů z valenčního pásu do pásu vodivostního.

V tab. 42.1 jsou porovnány tři základní elektrické vlastnosti mědi, typického kovu, a křemíku, typického polovodiče. Podívejme se ještě jednou do tabulky, abychom zjistili, jak se liší polovodič od kovu.

Koncentrace nosičů náboje n

V druhém řádku tab. 42.1 vidíme, že měď má mnohem vyšší koncentraci nosičů náboje než křemík, zhruba 10^{13}krát. U mědi přispívá každý atom jedním elektronem k procesu vedení proudu, tento elektron je zároveň jeho jediný valenční elektron. Nosiče náboje v křemíku vznikají při termodynamické rovnováze pouze v důsledku tepelné aktivace, která vyvolává přeskoky jistého (velmi malého) množství elektronů z valenčního do vodivostního pásu. Tyto přeskoky zároveň vedou ke vzniku stejného množství neobsazených energiových stavů ve valenčním pásu, které nazýváme **díry**. Obr. 42.8b ukazuje tento proces.

Jak elektrony ve vodivostním pásu, tak díry ve valenčním pásu slouží jako nosiče náboje. Díry jsou nosiče náboje proto, že umožňují jistou volnost pohybu elektronům ve valenčním pásu; bez přítomnosti děr by byly elektrony zablokovány. Jestliže vytvoříme v polovodiči elektrické pole $\boldsymbol{E}$, mají záporně nabité elektrony ve valenčním pásu tendenci pohybovat se ve směru opačném k $\boldsymbol{E}$. Tím jsou místa, kde se nacházejí díry, unášena (*driftují*) ve směru $\boldsymbol{E}$. Pohyb děr se nám jeví jako pohyb kladných částic s nábojem $+e$.

Chování děr můžeme pochopit na příkladu s řadou aut zaparkovaných těsně za sebou u závory, kdy přední auto je vzdáleno od závory na délku jednoho auta. Jestliže se přední auto přemístí k závoře, ponechá za sebou volný prostor o délce jednoho auta. Druhé auto se poté může přemístit do tohoto prostoru a to umožní pohyb třetímu autu atd. Pohyb velkého množství aut vzhledem k závoře může být jednoduše popsán jako drift jedné „díry“ (parkovacího místa) směrem od závory.

U polovodičů je vodivost způsobená pohybem děr stejně důležitá jako elektronová vodivost. Když uvažujeme o děrové vodivosti, je vhodné si představit, že všechny neobsazené stavy ve valenčním pásu jsou vlastně obsazeny částicemi o náboji $+e$, a že všechny elektrony ve valenčním pásu byly odstraněny. Nosiče kladných nábojů se tak mohou pohybovat volně napříč pásem.

Rezistivita ϱ

Připomeňme si z kap. 27, že rezistivita ϱ materiálů je dána vztahem $m/(e^2 n\tau)$, kde m je hmotnost elektronu, e je elementární náboj, n je koncentrace nosičů náboje a τ je střední doba, která uběhne mezi srážkami nosičů náboje. Z tab. 42.1 je zřejmé, že měrný odpor křemíku je při pokojové teplotě 10^{11}krát vyšší než měrný odpor mědi. Tento obrovský rozdíl lze přisoudit ohromnému rozdílu v n. Jiné vlivy se zde rovněž uplatňují, ale ty jsou tímto obrovským rozdílem v n zcela překryty.

Teplotní součinitel rezistivity α

Připomeňme si, že α (rov. (27.17)) je relativní změna rezistivity na jednotkovou změnu teploty:

$$\alpha = \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}T}. \qquad (42.8)$$

Rezistivita mědi se *zvyšuje* s teplotou (tj. $\mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}T > 0$), protože srážky nosičů náboje nastávají v mědi častěji při vyšších teplotách. Koeficient α je tedy pro měď *kladný*.

Srážková frekvence se zvyšuje s teplotou i v případě křemíku. Odpor křemíku se však ve skutečnosti *snižuje*

s teplotou ($d\varrho/dT < 0$), protože počet nosičů náboje (elektronů ve vodivostním pásu a děr ve valenčním pásu) se s teplotou zvyšuje rychleji. (Více elektronů přeskakuje z valenčního do vodivostního pásu.) Koeficient α je proto pro křemík *záporný*.

KONTROLA 2: Výzkumná laboratoř velké společnosti vyvinula tři nové materiály; jejich elektrické vlastnosti jsou v tabulce. Protože chce tyto materiály patentovat, opatřila je krycími názvy. Klasifikujte každý materiál jako kov, izolátor, polovodič, nebo jako žádný z těchto typů:

MATERIÁL (KRYCÍ NÁZEV)	n m^{-3}	ϱ $\Omega\cdot m$	α K^{-1}
Cleveland	10^{29}	10^{-8}	$+10^{-3}$
Troy	10^{28}	10^{-9}	-10^{-3}
Seattle	10^{15}	10^{3}	-10^{-2}

42.7 DOTOVANÉ POLOVODIČE

Užitečnost polovodičů pro technologické účely se může významně zvýšit zavedením malého množství vhodných příměsových atomů (nepatřičně nazývaných nečistotami) do polovodičové mřížky. Tento proces se nazývá **dotování**. Obvykle je nahrazen příměsovým atomem pouze jeden atom z 10^7 křemíkových atomů. Všechny moderní polovodičové součástky jsou založeny na dotovaných materiálech. Existují dva typy těchto materiálů — **typ** n a **typ** p. Budeme je diskutovat jeden po druhém.

Polovodiče typu n

Elektrony atomu křemíku jsou uspořádány do podslupek podle schématu

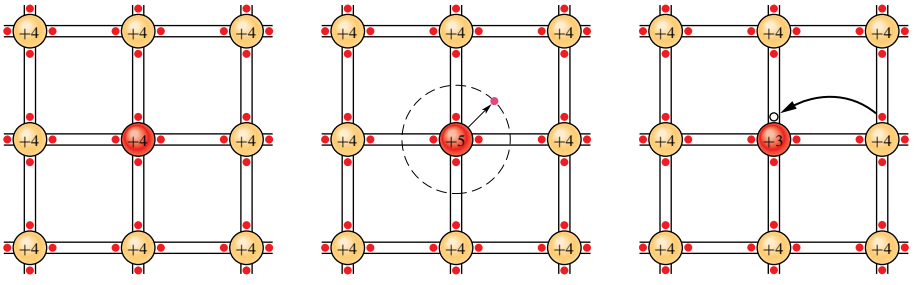
$$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^2,$$

kde jako obvykle horní indexy (jejich součet dává 14, tj. atomové číslo křemíku) představují počet elektronů v příslušných podslupkách.

Na obr. 42.9a je uvedeno rovinné zobrazení části mřížky čistého křemíku do roviny; porovnejme tento obrázek s obr. 42.1b, který ukazuje elementární buňku ve třech rozměrech. Každý atom křemíku přispívá dvojicí $3s$ elektronů a dvojicí $3p$ elektronů k vytvoření pevné dvouelektronové kovalentní vazby s každým ze svých čtyř nejbližších sousedů. (V kovalentní vazbě dva atomy sdílejí dvojici elektronů.) Čtyři atomy, které leží uvnitř elementární buňky na obr. 42.1b, mají tyto vazby vyznačeny.

Elektrony z kovalentních vazeb mezi atomy křemíku tvoří valenční pás křemíku. Jestliže se elektron odtrhne z nějaké vazby a stane se volným a může putovat uvnitř mřížky, říkáme, že elektron byl vybuzen z valenčního do vodivostního pásu. Minimální energie nutná pro uskutečnění tohoto jevu je rovna šířce zakázaného pásu E_g.

Protože se čtyři elektrony atomu křemíku podílejí na tvorbě vazeb, je každý „atom“ křemíku ve skutečnosti iont s elektronovým oblakem podobným elektronovému uspořádání inertního atomu neonu (obsahujícímu 10 elektronů). Oblak elektronů obklopuje jádro s nábojem $+14e$, kde číslo 14 odpovídá atomovému číslu křemíku. Výsledný náboj iontu je tak $+4e$ a říkáme, že iont má *valenční číslo* 4 (je čtyřmocný).



(*a*) (*b*) (*c*)

Obr. 42.9 (a) Rovinné zobrazení krystalové mřížky čistého křemíku. Každý křemíkový iont je vázán ke svým čtyřem sousedům dvouelektronovými kovalentními vazbami (znázorněnými dvojicí červených teček mezi dvěma rovnoběžnými černými úsečkami). Elektrony přísluší vazbě, nikoli jednotlivým atomům, a tvoří valenční pás vzorku. (b) Jeden atom křemíku je nahrazen atomem fosforu (5 valenčních elektronů). „Nadbytečný“ elektron je pouze slabě vázán ke svému jádru, a proto může být lehce vybuzen do vodivostního pásu a volně se pohybovat mřížkou. (c) Jeden atom křemíku je nahrazen atomem hliníku (3 valenční elektrony). V jedné kovalentní vazbě, a tedy i ve valenčním pásu vzorku, je nyní díra. Ta se může snadno pohybovat mřížkou proto, že do ní přeskočí elektron ze sousední vazby a tak ji zaplní. V případě skoku naznačeného na obrázku se díra přesunuje vpravo.

Na obr. 42.9b je centrální iont křemíku nahrazen atomem fosforu s pěti valenčními elektrony. Čtyři valenční elektrony atomu fosforu vytvářejí vazbu se čtyřmi sousedními ionty křemíku. Pátý („nadbytečný“) elektron je pouze slabě vázán k iontu fosforu. Popisujeme-li energii v pásové struktuře, říkáme, že tento elektron zaujímá lokalizovaný stav, který leží v pásu zakázaných energií ve vzdálenosti E_d pod dnem vodivostního pásu (obr. 42.10a). Protože $E_d \ll E_g$, je energie potřebná pro excitaci (tj. vybuzení) elektronů z *těchto* hladin do vodivostního pásu mnohem menší než energie nutná pro excitaci valenčních elektronů křemíku do vodivostního pásu.

Atom fosforu se nazývá **donor** (tj. dárce), protože snadno *daruje* elektron do vodivostního pásu. Při pokojové teplotě jsou proto prakticky *všechny* elektrony dodané atomy donorů ve vodivostním pásu. Přidáním atomů donorů tedy můžeme podstatně zvýšit počet elektronů ve vodivostním pásu, a to nesrovnatelně více, než naznačuje obr. 42.10a.

Polovodiče dotované atomy donorů se nazývají **polovodiče typu** n. Písmeno „n“ znamená „negativní“, abychom vyjádřili skutečnost, že počet nosičů záporného náboje, dodaných do vodivostního pásu, vysoce převyšuje počet nosičů kladného náboje, což jsou díry ve valenčním pásu. V polovodiči typu n jsou elektrony **majoritními** (tj. většinovými) **nosiči**, kdežto díry jsou **minoritními** (tj. menšinovými) **nosiči**.

Polovodiče typu p

Nyní uvažujme situaci na obr. 42.9c, kde je jeden atom křemíku (čtyři valenční elektrony) nahrazen atomem hliníku se třemi valenčními elektrony. Atom hliníku se může vázat pomocí kovalentních vazeb pouze ke třem atomům křemíku, takže v jedné vazbě mezi atomem hliníku a křemíku je jeden „chybějící“ elektron, tedy díra. Dodáním jen malého množství energie může být jeden elektron vytržen ze sousední vazby mezi atomy křemíku, aby zaplnil tuto díru, a tak vytváří díru v *této* druhé vazbě. Podobně elektron z nějaké jiné vazby může přeskočit, aby zaplnil tuto druhou díru. Tímto způsobem se díra přemísťuje mřížkou.

Atom hliníku se nazývá **akceptor** (příjemce), protože snadno *přijímá* elektron ze sousední vazby, tedy z valenčního pásu křemíku. Z obr. 42.10b je zřejmé, že tento elektron se nachází v lokalizovaném stavu, který leží v pásu zakázaných energií ve vzdálenosti E_a nad vrcholem valenčního pásu. Přidáním atomů akceptorů můžeme výrazně zvýšit počet děr ve valenčním pásu, a to nesrovnatelně více, než naznačuje obr. 42.10b. V křemíku za pokojové teploty jsou prakticky *všechny* akceptorové hladiny obsazeny elektrony.

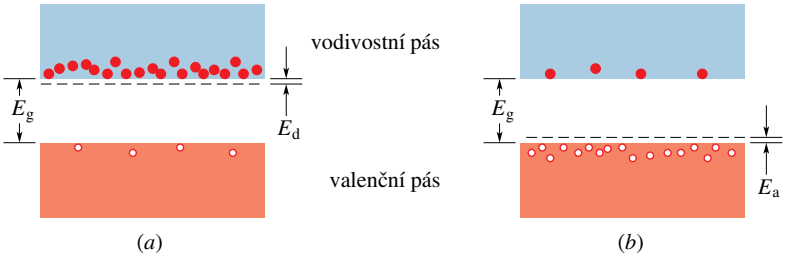
Polovodiče dotované atomy akceptorů se nazývají **polovodiče typu** p. Písmeno „p“ znamená „pozitivní“, abychom vyjádřili skutečnost, že počet děr vytvořených ve valenčním pásu, které se chovají jako nosiče kladného náboje, vysoce převyšuje počet elektronů ve vodivostním pásu. V polovodiči typu p jsou díry majoritními nosiči, kdežto elektrony jsou minoritními nosiči.

V tab. 42.2 jsou shrnuty vlastnosti typického polovodiče typu n a polovodiče typu p. Zdůrazněme, že iontová jádra donorů a akceptorů, třebaže obsahují náboj, nejsou *nosiči* náboje, neboť za pokojové teploty jsou pevně vázána v krystalové mřížce.

PŘÍKLAD 42.4

Koncentrace vodivostních elektronů n_0 v čistém křemíku při pokojové teplotě je 10^{16} m^{-3}. Předpokládejme, že dotováním křemíkové mřížky fosforem chceme zvýšit tuto koncentraci milionkrát. Jakou část křemíkových atomů musíme nahradit atomy fosforu? (Připomeňme si, že při pokojové teplotě téměř každý atom fosforu daruje svůj „nadbytečný“ elektron vodivostnímu pásu.)

ŘEŠENÍ: Koncentrace vodivostních elektronů dodaných



Obr. 42.10 (a) V dotovaném polovodiči typu n leží energiové hladiny donorů v malé vzdálenosti E_d pod dnem vodivostního pásu. Protože elektrony z této hladiny mohou být snadno vybuzeny do vodivostního pásu, obsahuje vodivostní pás mnohem více elektronů. Valenční pás obsahuje stejně malý počet děr jako dřív. (b) V dotovaném polovodiči typu p leží energiové hladiny akceptorů v malé vzdálenosti E_a nad vrcholem valenčního pásu. Ve valenčním pásu tak vzniká mnohem více děr. Vodivostní pás obsahuje stejně malý počet elektronů jako před dotováním. Podíl majoritních a minoritních nosičů náboje jak v (a), tak v (b) je nesrovnatelně větší, než znázorňují tyto obrázky.

Tabulka 42.2 **Vlastnosti dvou dotovaných polovodičů**

	TYP POLOVODIČE	
VLASTNOST	*n*	*p*
Materiál mřížky	křemík	křemík
Náboj jader mřížky	$+14e$	$+14e$
Pás zakázaných energií mřížky	1,2 eV	1,2 eV
Příměs	fosfor	hliník
Typ příměsi	donor	akceptor
Majoritní nosiče	elektrony	díry
Minoritní nosiče	díry	elektrony
Energiový pás příměsí	0,045 eV	0,067 eV
Počet valenčních elektronů příměsi	5	3
Náboj jader příměsí	$+15e$	$+13e$
Výsledný náboj příměsi	$+e$	$-e$

dotováním bude rovna koncentraci atomů fosforu v křemíku n_P. Chceme, aby celková koncentrace elektronů ve vodivostním pásu po dotování, tedy součet koncentrace původních a přidaných elektronů, byla rovna $10^6 n_0$, takže

$$10^6 n_0 = n_0 + n_P.$$

Potom

$$n_P = 10^6 n_0 - n_0 \doteq 10^6 n_0 = \\ = (10^6)(10^{16}\ \mathrm{m^{-3}}) = 10^{22}\ \mathrm{m^{-3}}.$$

Z výsledku plyne, že na jeden kubický metr křemíku musíme přidat 10^{22} atomů fosforu.

Koncentraci atomů křemíku v krystalové mřížce čistého křemíku lze vypočítat ze vztahu

$$n_{Si} = \frac{N_A \varrho}{A},$$

kde N_A je Avogadrovo číslo ($6{,}02{\cdot}10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$), ϱ je hustota křemíku ($2\,330\ \mathrm{kg/m^3}$) a A je molární hmotnost křemíku (28,1 g/mol). Dosazením dostaneme

$$n_{Si} = \frac{(6{,}02{\cdot}10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}})(2\,330\ \mathrm{kg/m^3})}{(0{,}0281\ \mathrm{kg/mol})} = \\ = 5{\cdot}10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}.$$

Relativní množství atomů fosforu v mřížce je rovno

$$\frac{n_P}{n_{Si}} = \frac{(10^{22}\ \mathrm{m^{-3}})}{(5{\cdot}10^{28}\ \mathrm{m^{-3}})} = \frac{1}{5{\cdot}10^6}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pokud nahradíme atomem fosforu pouze *jediný atom křemíku z pěti milionů*, počet elektronů ve vodivostním pásu se zvýší milionkrát.

Jak může mít tak malá příměs fosforu tento zdánlivě velký vliv? I když se jedná o výraznou změnu, vliv není rozhodně tak „velký“. Koncentrace vodivostních elektronů před dotováním byla $10^{16}\ \mathrm{m^{-3}}$, po dotování $10^{22}\ \mathrm{m^{-3}}$. U mědi je však koncentrace vodivostních elektronů (uvedená v tab. 42.1) přibližně $10^{29}\ \mathrm{m^{-3}}$. Takže i po dotování zůstává koncentrace vodivostních elektronů v křemíku 10^7krát menší než je koncentrace vodivostních elektronů v kovu.

42.8 PŘECHOD *p-n*

Přechod *p-n*, jak ukazuje obr. 42.11a, tvoří monokrystal polovodiče, který je selektivně dotován tak, že v jedné části je materiál typu *n* a v sousedící druhé části je materiál typu *p*. Takové přechody *p-n* jsou základní stavební prvky prakticky všech polovodičových součástek.

Pro jednoduchost předpokládejme, že přechod je vytvořen mechanicky, přitlačením tyče polovodiče typu *n* na tyč polovodiče typu *p* a že rozhranní mezi jednou a druhou oblastí je perfektně ostré a leží v jediné **rovině přechodu**.

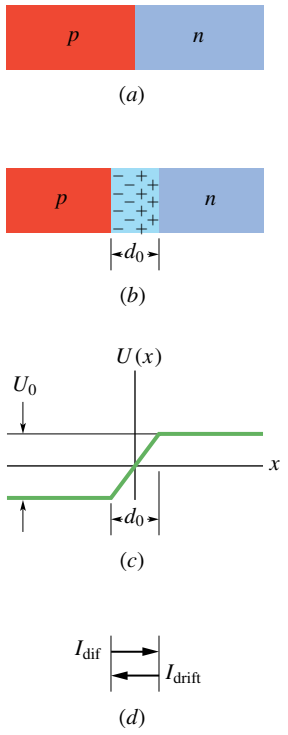
Popišme pohyby elektronů a děr bezprostředně poté, kdy k sobě přitlačíme tyč typu *n* a tyč typu *p*, obě elektricky neutrální; tak vytvoříme přechod. Nejdřív budeme zkoumat majoritní nosiče, kterými jsou elektrony v materiálu typu *n* a díry v materiálu typu *p*.

Pohyby majoritních nosičů

Když praskne heliem naplněný balonek, heliové atomy difundují (neuspořádaně se rozšiřují) směrem ven do okolního vzduchu. K tomu dojde proto, že v normálním vzduchu je velmi málo atomů helia. Přesněji řečeno, na rozhraní helium-vzduch existuje totiž *gradient koncentrace* atomů helia. Ty se proto pohybují tak, že snižují tento gradient.

Stejně se chovají elektrony z části *n* na obr. 42.11a, které jsou blízko roviny přechodu: difundují přes tuto rovinu (na obrázku zprava doleva) do části *p*, kde je velmi málo volných elektronů. Podobně díry na straně *p*, které jsou blízko roviny přechodu, difundují přes tuto rovinu (zleva doprava) do části *n*, kde je velmi málo děr. Pohyby jak elektronů, tak i děr vytvářejí **difuzní proud** I_{dif}, který podle konvence směřuje zleva doprava, jak ukazuje obr. 42.11d.

Připomeňme si, že část *n* je celá vyplněna kladně nabitými ionty donorů, vázanými pevně v mřížce. Obvykle je přebytečný elektrický náboj každého iontu kompenzován jedním elektronem z vodivostního pásu. Když však elektron z části *n* difunduje přes rovinu přechodu, „odkryje“ se jeden z těchto donorových iontů, a tak vznikne vázaný



Obr. 42.11 (a) Vzorek typu n a vzorek typu p tvoří přechod p-n. (b) Pohyb majoritních nosičů náboje přes rovinu přechodu vede ke vzniku prostorového náboje v důsledku nevykompenzovaných iontů donorů (vpravo) a iontů akceptorů (vlevo). Tato ochuzená zóna neobsahuje žádné volné nosiče náboje; ionty donorů a akceptorů jsou vázány v mřížce. (c) S vytvořením prostorového náboje souvisí i vznik kontaktního napětí U_0, které omezuje tok majoritních nosičů. (d) Difuze majoritních nosičů (jak elektronů, tak děr) přes rovinu přechodu vytváří difuzní proud I_{dif}; u izolovaného přechodu p-n je tento proud v rovnováze s driftovým proudem I_{drift} tvořeným minoritními nosiči, takže výsledný proud přes rovinu přechodu je nulový. (U reálného přechodu p-n nejsou hranice ochuzené zóny tak ostré, jak ukazuje obrázek, a křivka kontaktního potenciálu (c) je hladká.)

kladný náboj blízko roviny přechodu na straně n. Když difundující elektron pronikne na stranu p, rychle se spojí (rekombinuje) s akceptorovým iontem (kterému chybí jeden elektron) a tak vznikne vázaný záporný náboj blízko roviny přechodu na straně p.

Difuze elektronů přes rovinu přechodu (zprava doleva podle obr. 42.11a) tak vede ke vzniku **prostorového náboje** na každé straně roviny přechodu, jak ukazuje obr. 42.11b. Difuze děr přes rovinu přechodu ve směru zleva doprava má přesně stejný efekt. (Věnujte tomu chvilku, abyste se o tom sami přesvědčili.) Pohyby obou typů majoritních nosičů, elektronů a děr, přispívají k vytvoření dvou oblastí prostorového náboje, jedné kladné a druhé záporné. Tyto oblasti tvoří **ochuzenou zónu**, nazvanou tak proto, že v ní téměř nejsou *pohyblivé* nosiče náboje; její šířka d_0 je vyznačena na obr. 42.11b.

Prostorový náboj vytváří **kontaktní napětí** U_0 napříč ochuzenou zónou, jak ukazuje obr. 42.11c. Toto napětí pak zamezuje další difuzi elektronů a děr přes rovinu přechodu. Záporné náboje se vyhýbají oblastem s nižším potenciálem. Elektron, který se přibližuje zprava k rovině přechodu na obr. 42.11b, se pohybuje směrem k oblasti nižšího potenciálu, a proto se obrátí zpět na stranu n. Podobně díra (kladný náboj), která se přibližuje k rovině přechodu zleva, se pohybuje směrem do oblasti vyššího potenciálu, a proto se obrátí zpět na stranu p.

Pohyby minoritních nosičů

Obr. 42.10a ukazuje, že i když majoritními nosiči náboje u materiálu typu n jsou elektrony, určitý počet děr je tu vždy přítomen. Podobně u materiálu typu p (obr. 42.10b) se setkáme vedle děr jako majoritních nosičů i s menším počtem elektronů. Tyto díry a elektrony jsou tedy minoritními nosiči náboje v příslušných materiálech.

Zatímco kontaktní napětí U_0 na obr. 42.11c působí jako bariéra pro pohyb majoritních nosičů, pro minoritní nosiče, tedy elektrony na straně p a díry na straně n, je situace opačná. Kladné náboje (díry) se snaží dostat do oblasti nižšího potenciálu, záporné náboje (elektrony) naopak do oblasti vyššího potenciálu. Oba druhy nosičů jsou tak „unášeny“ kontaktním napětím přes rovinu přechodu a vytvářejí ve směru zprava doleva **driftový proud** I_{drift}, jak ukazuje obr. 42.11d.

Izolovaný p-n přechod (bez přiloženého vnějšího napětí) se proto nachází v rovnovážném stavu, ve kterém se na jeho koncích vytvoří kontaktní napětí U_0. V rovnováze je průměrná hodnota difuzního proudu I_{dif}, který protéká rovinou přechodu z části p do části n, rovna průměrné hodnotě driftového proudu I_{drift}, který teče opačným směrem. Oba proudy se tak vyruší, protože celkový proud rovinou přechodu musí být roven nule; jinak by docházelo k neomezenému přenosu náboje z jednoho konce přechodu na druhý.

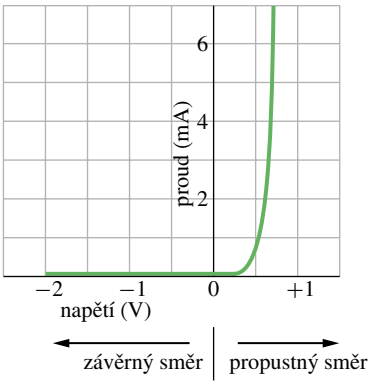
KONTROLA 3: Který z následujících pěti proudů přes rovinu přechodu z obr. 42.11a musí být roven nule?

(a) Výsledný proud děr zahrnující jak majoritní, tak minoritní nosiče,
(b) výsledný proud elektronů zahrnující jak majoritní, tak minoritní nosiče,
(c) výsledný proud děr a elektronů zahrnující jak majoritní, tak minoritní nosiče,
(d) výsledný proud majoritních nosičů zahrnující jak díry, tak elektrony,

(e) výsledný proud minoritních nosičů zahrnující jak díry, tak elektrony.

42.9 DIODOVÝ USMĚRŇOVAČ

Podívejme se nejdřív na obr. 42.12. Po přiložení elektrického napětí na přechod *p-n* v jednom směru (zde označeném jako + a „propustný směr“) přes přechod poteče elektrický proud. Pokud však obrátíme polaritu napětí, přechodem nepoteče téměř žádný proud.

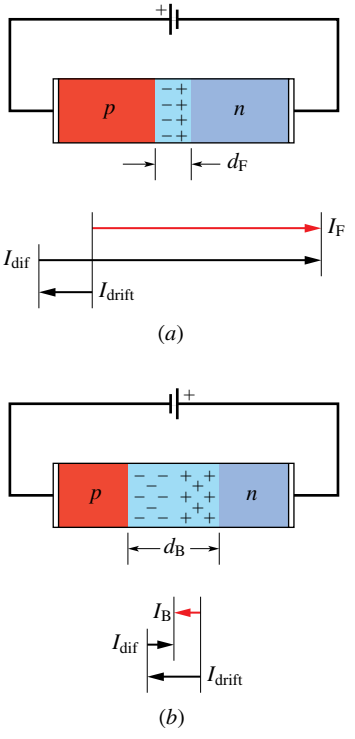


Obr. 42.12 Závislost proudu na napětí pro *p-n* přechod ukazuje, že přechod dobře vede proud v propustném směru a prakticky nevede v závěrném.

Tuto vlastnost *p-n* přechodu využívá **diodový usměrňovač**. Jeho symbolická značka je na obr. 42.13b: šipka směřuje ke konci tvořenému *p* typem a ukazuje propustný směr elektrického proudu. Vstupní střídavé napětí se sinusovou závislostí (obr. 42.13a) se tímto prvkem přemění na výstupní napětí obsahující pouze kladné půlvlny vstupního napětí (obr. 42.13c). Usměrňovač tedy působí jako sepnutý spínač (nulový odpor) pro jednu polaritu vstupního signálu a rozepnutý spínač (nekonečný odpor) pro polaritu opačnou.

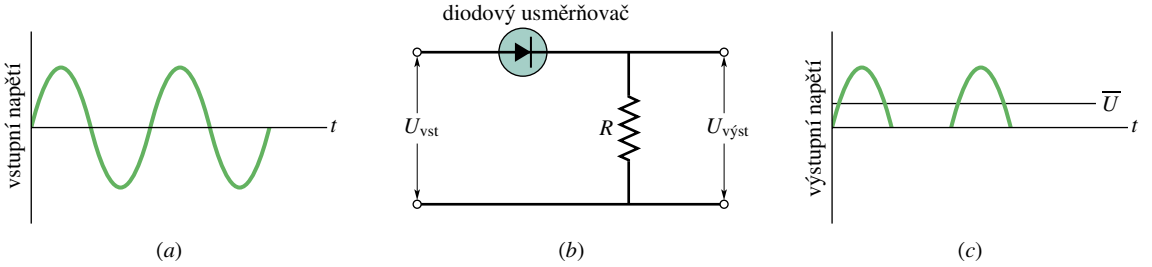
Střední hodnota vstupního napětí na obr. 42.13a je nula; to ale neplatí pro výstupní napětí. Usměrňovač můžeme použít jako měnič střídavého napětí na stejnosměrné napětí, tedy jako součást napájecího zdroje.

Obr. 42.14 ukazuje, proč *p-n* přechod pracuje jako usměrňovač. Na obr. 42.14a je baterie připojena kladným pólem k části *p*. V tomto zapojení v **propustném směru** se část *p* stává kladnější než před připojením napětí a část *n* zápornější. Tím se *sníží* výška potenciálové bariéry U_0 z obr. 42.11c. Sníženou bariéru může překonávat více majoritních nosičů a difuzní proud I_{dif} se proto výrazně zvýší.



Obr. 42.14 (a) Zapojení *p-n* přechodu v propustném směru ukazuje zúženou ochuzenou zónu a velký propustný proud I_F. (b) Zapojení v závěrném směru ukazuje rozšířenou ochuzenou zónu a malý závěrný proud I_B.

Minoritní nosiče, které tvoří driftový proud I_{drift}, nejsou ovlivněny bariérou, a tedy driftový proud I_{drift} není ovlivněn ani připojením vnější baterie. Přesná rovnováha proudů, která existovala při nulovém vnějším napětí (obr. 42.11d), je tedy porušena a, jak ukazuje obr. 42.14a, obvodem začne protékat velký propustný proud I_F (z angl. forward current).



Obr. 42.13 Přechod *p-n* zapojený jako diodový usměrňovač. Funkcí obvodu (b) je propustit „kladnou polovinu“ vstupního střídavého napětí (a) a potlačit zápornou. Střední hodnota vstupního napětí je nula; střední hodnota výstupního napětí (c) je kladná a rovna $\overline{U}$.

Další důsledek vnějšího napětí v propustném směru je, že se zúží ochuzená zóna, jak vidíme porovnáním obr. 42.11b s 42.14a. Ochuzená zóna se zúží, protože snížení potenciálové bariéry vlivem napětí v propustném směru musí snižovat prostorový náboj. Protože ionty, vytvářející prostorový náboj, jsou pevně umístěny v mřížce, může se jejich počet snížit pouze zúžením ochuzené zóny.

Protože ochuzená zóna obvykle obsahuje velmi málo nosičů náboje, má zpravidla velký elektrický odpor. Když se však její šířka podstatně zmenší přiložením napětí v propustném směru, její odpor se také výrazně sníží a to vede ke vzniku velkého propustného proudu.

Obr. 42.14b ukazuje zapojení v **závěrném směru**, kdy záporný pól baterie je přiložen na p část p-n přechodu. Přiložené elektromotorické napětí v tomto případě *zvyšuje* kontaktní napětí, difuzní proud se výrazně *snižuje*, zatímco driftový proud se nemění. Výsledkem je relativně *malý* proud v nepropustném směru, **závěrný proud** I_B (z anglického „back current“). Ochuzená zóna se *rozšiřuje* a její velký odpor má za následek *malý* závěrný proud I_B.

42.10 LED DIODA

V dnešní době se stále setkáváme s barevnými „elektronickými“ čísly, která září u pokladen obchodů, u mikrovlnných trub a budíků. Sotva se také obejdeme bez neviditelných infračervených paprsků, které řídí dveře výtahů a dálkově ovládají televizní přijímače. Téměř ve všech případech je toto světlo emitováno přechodem p-n v **LED** diodě (z angl. light-emitting diode, tedy **dioda emitující světlo**). Jak může p-n přechod vytvářet světlo?

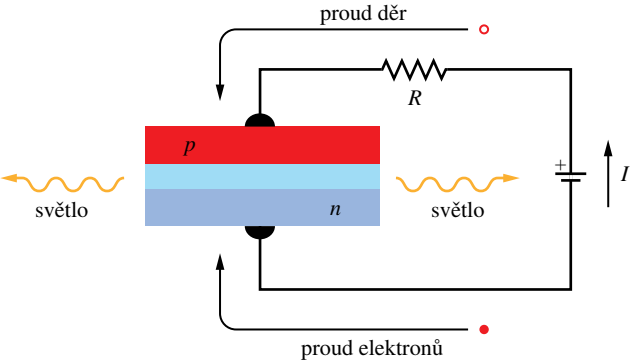
Vezměme nejdříve jednoduchý polovodič. Když elektron ze dna vodivostního pásu „spadne“ do díry u vrcholu vodivostního pásu, uvolní se energie E_g rovná šířce zakázaného pásu. V křemíku, germaniu a mnoha dalších polovodičích se tato energie většinou přemění na energii kmitů mřížky. Žádné světlo potom není emitováno.

V některých polovodičích, např. v arsenidu gallitém, může být tato energie uvolněna ve formě fotonu o energii hf a vlnové délce

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c}{E_g/h} = \frac{hc}{E_g}. \qquad (42.9)$$

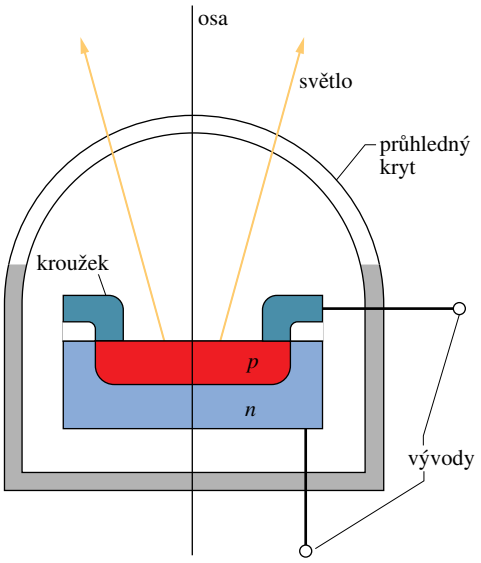
Aby LED dioda emitovala dostatečně intenzívní světlo, musí v materiálu docházet k přiměřeně velkému počtu přechodů mezi elektrony a děrami. Tato podmínka *není* splněna u čistých polovodičů, neboť při pokojové teplotě prostě nemají dostatečné množství párů *elektron-díra*. Jak vyplývá z obr. 42.10, dotování polovodiče příměsovými atomy také nepomůže. V dotovaném polovodiči typu n se sice výrazně zvýší počet vodivostních elektronů, avšak není tu dostatečné množství děr, se kterými by elektrony mohly rekombinovat. Stejně tak v dotovaných polovodičích typu p je velké množství děr, avšak nedostatek elektronů pro rekombinaci. Proto ani čistý, ani dotovaný polovodič nemůže zabezpečit dostatek přechodů mezi elektrony a děrami, aby fungoval jako praktická dioda LED.

Potřebujeme tedy polovodičový materiál s velmi vysokým počtem elektronů ve vodivostním pásu a *současně* s odpovídajícím množstvím děr ve valenčním pásu. Tato situace nastane, když přiložíme velké napětí v propustném směru na vysoce dotovaný přechod p-n, jako na obr. 42.15. V tomto uspořádání zabezpečuje proud I procházející součástkou přísun elektronů do materiálu typu n a přísun děr do materiálu typu p. Jestliže je dotování dostatečně vysoké a proud dostatečně velký, je ochuzená zóna velmi úzká, třeba jen několik mikrometrů. Výsledkem je, že velké množství elektronů v materiálu typu n je odděleno od obdobně velkého množství děr v materiálu typu p pouze úzkou ochuzenou zónou. Protože je blízko sebe tolik elektronů a děr, dochází k velkému počtu jejich rekombinací a to způsobuje emisi světla z této zóny. Obr. 42.16 ukazuje konstrukci skutečné diody LED.



Obr. 42.15 Přechod p-n zapojený v propustném směru umožňuje přísun elektronů do materiálu typu n a děr do materiálu typu p (díry jako kladné náboje se podle konvence pohybují ve směru proudu I, elektrony pak v opačném směru). Světlo je emitováno z úzké ochuzené zóny pokaždé, když elektron a díra v této zóně rekombinují.

Komerční diody LED navržené pro viditelné světlo používají většinou gallium vhodně dotované arsenem a fosforem. Když je 60 % příměsových míst v mřížce obsazeno arsenovými ionty a 40 % ionty fosforu, má polovodič šířku zakázaného pásu E_g kolem 1,8 eV, tomu odpovídá emise červeného světla. Jinou volbou dotování a uspořádáním hladin, mezi kterými probíhají přechody, můžeme vyrobit diody LED, které vyzařují světlo v podstatě v jakékoli požadované oblasti viditelného a blízkého infračerveného spektra.



Obr. 42.16 Příčný řez diodou LED (součástka má rotační symetrii kolem vyznačené osy). Materiál typu p má tvar kruhového disku a je dostatečně tenký, aby propouštěl světlo. Kontakt s ním je zabezpečen kovovým kroužkem, který se dotýká disku po jeho obvodu. Ochuzená zóna mezi materiály typu n a p není na obrázku vyznačena.

Fotodioda

Průchodem proudu přes vhodně uspořádaný p-n přechod se může vytvářet světlo. Je však také možný opačný proces: osvětlením vhodně uspořádaného p-n přechodu se vytvářejí náboje, proto obvodem s tímto přechodem začne téci proud. To je základní princip fotodiody.

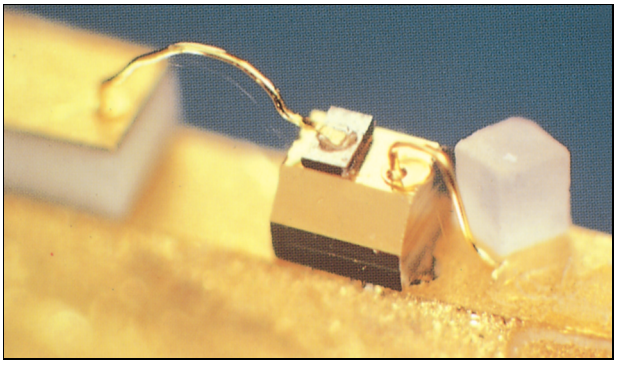
Kdykoli zmáčkneme dálkové ovládání v televizoru, vyšle dioda LED v ovladači kódovaný sled pulzů infračerveného světla. Přijímací součástka v televizoru je zdokonalená fotodioda, která nejen přijímá infračervené signály, ale také je zesiluje a mění na elektrické signály, které pak například přepínají kanály nebo nastavují hlasitost.

Laserová dioda

V uspořádání na obr. 42.15 se nachází mnoho elektronů ve vodivostním pásu materiálu typu n a mnoho děr ve valenčním pásu materiálu typu p. Dochází tam tedy k **inverzi populace** pro elektrony: více elektronů se nachází na hladinách s vyšší energií než na hladinách s nižší energií. Jak jsme se zmínili v čl. 41.12, je toto obvykle nutná, ale ne postačující podmínka pro činnost laseru.

Když elektron přeskočí z vodivostního pásu do valenčního pásu, může uvolnit svou energii ve formě fotonu. Tento foton může stimulovat přechod dalšího elektronu do valenčního pásu a tak vytvořit druhý foton stimulovanou emisí. Je-li proud přechodem dostatečně velký, může dojít k řetězové reakci v procesu stimulované emise a tím k vytvoření laserového světla. Pro udržení tohoto děje musí být protilehlé roviny krystalu s přechodem p-n rovinné a rovnoběžné, aby se světlo uvnitř krystalu mohlo mnohonásobně odrážet. (V helium-neonovém laseru na obr. 41.22 k tomuto účelu sloužila dvojice zrcadel.) Přechod p-n tedy může fungovat jako **laserová dioda**, jejíž výstupní světlo je vysoce koherentní s vlnovou délkou v mnohem užším intervalu, než je tomu u světla z diody LED.

Laserové diody jsou zabudovány do přehrávačů kompaktních disků. Laserový svazek se odráží od rotujícího disku s mikroskopickými prohloubeninami, ve kterých je zakódována informace o zvuku. Často se také používají v optických komunikačních systémech s optickými vlákny. Obr. 42.17 ukazuje, jak nepatrné rozměry mají. Jsou obvykle navrženy tak, aby pracovaly v infračervené oblasti elektromagnetického spektra, protože optická vlákna mají v této oblasti dvě „okna“ (pro $\lambda = 1{,}31\,\mu\text{m}$ a $1{,}55\,\mu\text{m}$), kde má vlákno minimální absorpci signálu.



Obr. 42.17 Laserová dioda vyvinutá v Bellových laboratořích firmy AT&T. Krychlička vpravo je zrnko soli.

PŘÍKLAD 42.5

Dioda LED je založena na přechodu p-n vytvořeném v polovodičovém materiálu Ga-As-P, jehož pás zakázaných energií má šířku 1,9 eV. Jaká je vlnová délka emitovaného světla?

ŘEŠENÍ: Když předpokládáme, že k přechodům dochází mezi dnem vodivostního pásu a vrcholem valenčního pásu, můžeme pro výpočet použít rov. (42.9). Z tohoto vztahu

$$\lambda = \frac{hc}{E_g} = \frac{(6{,}63\cdot10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3{,}00\cdot10^{8}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})}{(1{,}9\,\text{eV})(1{,}60\cdot10^{-19}\,\text{J/eV})} =$$

$$= 6{,}5\cdot10^{-7}\,\text{m} = 650\,\text{nm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Světlo této vlnové délky má červenou barvu.

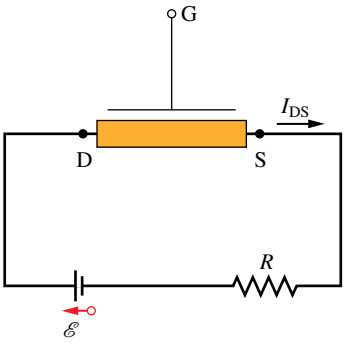
KONTROLA 4: V př. 42.5 jsme vypočítali, že vlnová délka světla emitovaná diodou LED je 650 nm. Je toto (a) jediná možná vlnová délka, která může být emitována, (b) maximální emitovaná vlnová délka, (c) minimální emitovaná vlnová délka, nebo (d) střední emitovaná vlnová délka?

42.11 TRANZISTOR

Tranzistor je polovodičová součástka se třemi vývody, která se používá k zesilování vstupních signálů. Obr. 42.18 schematicky ukazuje zobecněný tranzistor řízený polem, známý pod zkratkou FET (z angl. field-effect transistor). V tomto tranzistoru závisí tok elektronů z vývodu S (z angl. source, česky **emitor**) k vývodu D (z angl. drain, česky **kolektor**) na velikosti elektrického pole uvnitř součástky (odtud *řízení polem*); velikost pole ovládáme vhodným napětím na vývodu G (z angl. gate, česky **hradlo**). Používá se mnoho typů tranzistorů; my se budeme zabývat jenom jedním typem, nazývaným **MOSFET** (z angl. metal-oxide-semiconductor-field-effect-transistor, tedy tranzistor řízený polem se strukturou kov-oxid-polovodič). O MOSFETu se mluví jako o „tahounu“ moderního elektronického průmyslu.

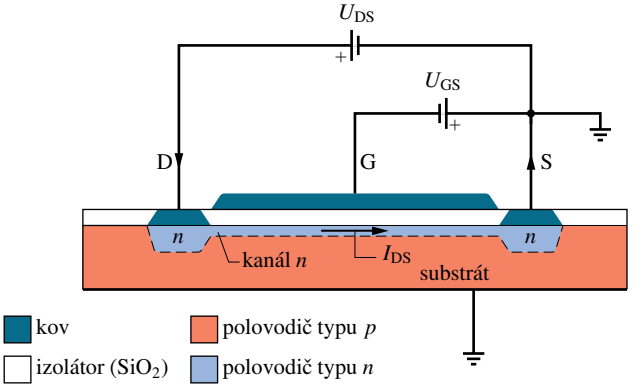
Často se MOSFET používá pouze ve dvou stavech, kdy mezi kolektorem a emitorem prochází proud I_{DS} (hradlo otevřeno), nebo neprochází (hradlo uzavřeno). První případ může představovat v binární aritmetice, na které je založena digitální logika, stav „1“, druhý pak stav „0“. To je základ využití MOSFETu v digitálních logických obvodech. Přepínaní mezi zapnutým a vypnutým stavem může probíhat velmi rychle, takže binární data mohou obvody s těmito tranzistory zpracovávat s vysokou frekvencí. Běžně se vyrábějí tranzistory typu MOSFET o rozměrech kolem 500 nm (to odpovídá přibližně vlnové délce žlutého světla); používají se v elektronických zařízeních všeho druhu.

Obr. 42.19 ukazuje strukturu MOSFET. Monokrystal křemíku nebo jiného polovodiče je lehce dotován a vytváří materiál typu p. Do substrátu jsou zabudovány dva „ostrůvky“ materiálu typu n, které vytvářejí kolektor D a emitor S. Tyto ostrůvky jsou vytvořeny silným „předotováním“ uvedených oblastí donory typu n. Kolektor a emitor jsou spojeny tenkým kanálkem z materiálu typu n, nazývaným **kanál** n. Na krystal je nanesena tenká izolační vrstva oxidu křemíku (odtud „O“ v názvu MOSFET), a tou prochází v místě D a S dva kovové přívody (odtud „M“ pro kov); tak můžeme vytvořit elektrický kontakt s kolektorem a s emitorem. Naproti kanálu n je nanesena tenká kovová vrstva — hradlo G; hradlo nemá elektrický kontakt s vlastním tranzistorem, protože je odděluje izolační oxidová vrstva.



Obr. 42.18 Tranzistor řízený polem, ve kterém se elektrony pohybují součástkou od emitoru (vývod S) ke kolektoru (vývod D). (Podle konvence má proud I_{DS} opačný směr.) Velikost proudu I_{DS} je řízena elektrickým polem, které v součástce vytváří napětí na hradle (vývod G).

Nejprve uvažujme, že emitor a substrát typu p jsou uzemněny (tj. na nulovém potenciálu) a že hradlo je „plovoucí“, tedy že není připojeno k vnějšímu zdroji elektromotorického napětí. Přiložme napětí U_{DS} mezi kolektor a emitor tak, aby kolektor byl kladný. Elektrony pak potečou přes kanál n od emitoru ke kolektoru a podle konvence poteče od kolektoru k emitoru proud I_{DS}, jak ukazuje obr. 42.19.



Obr. 42.19 Tranzistor řízený polem — MOSFET. Velikost proudu kanálem n mezi kolektorem a emitorem je řízena napětím U_{GS} mezi emitorem S a hradlem G. Ochuzená zóna mezi materiálem typu n a p není znázorněna.

Přiložme nyní na hradlo napětí U_{GS} tak, aby bylo záporné vzhledem k emitoru. Záporné napětí na hradle vytváří v součástce elektrické pole (odtud „řízení polem“), které odpuzuje elektrony z kanálu n do substrátu. Tento pohyb elektronů zvětšuje šířku (přirozeně existující) ochuzené zóny mezi kanálem n a substrátem, a to na úkor kanálu n. Zmenšená šířka kanálu n spolu se snížením počtu nosičů

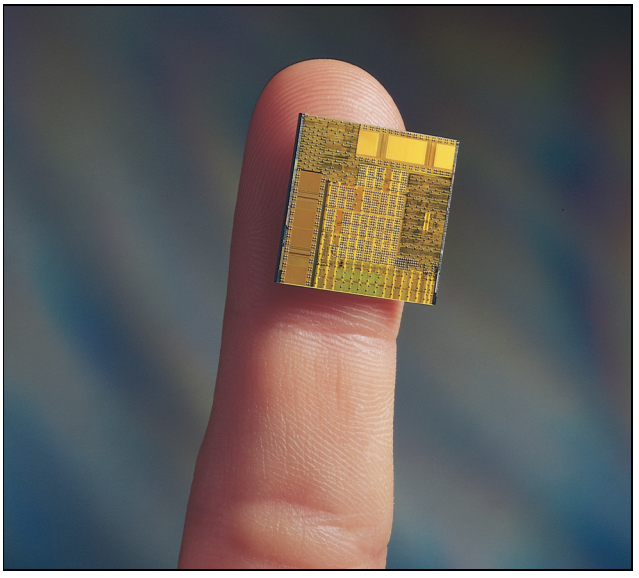
náboje v tomto kanálu zvyšuje odpor kanálu, a tedy snižuje proud I_{DS}. Vhodnou volbou U_{GS} můžeme tento proud úplně vypnout. Změnou U_{GS} můžeme MOSFET přepínat mezi módy *zapnuto* a *vypnuto*.

Nosiče náboje netečou *substrátem*, protože substrát je pouze lehce dotován, není dobrým vodičem a navíc je oddělen od kanálu *n* a obou ostrůvků typu *n* izolující ochuzenou zónou, která na obr. 42.19 není vyznačena. Tato ochuzená zóna se vždy vytvoří na hranici mezi materiálem typu *n* a *p*, jak ukazuje obr. 42.11b.

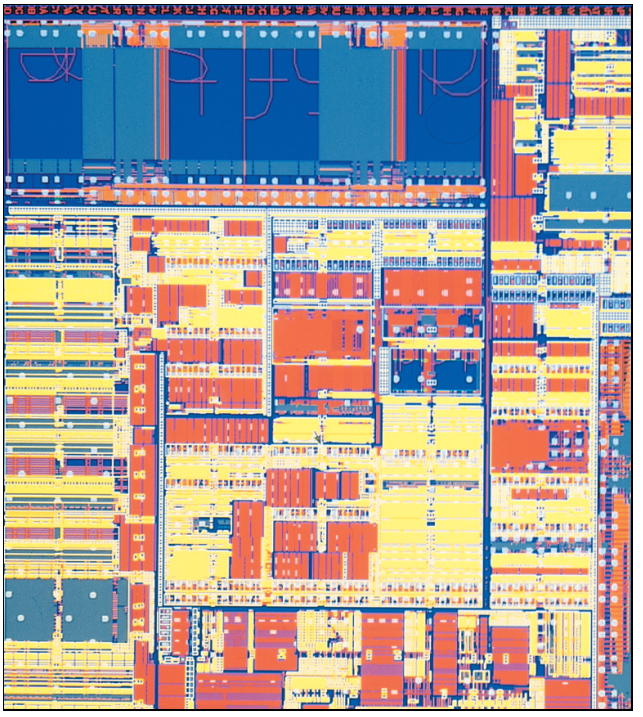
Integrované obvody

Počítače a jiná elektronická zařízení používají tisíce (nebo spíš miliony) tranzistorů a jiných elektronických součástek, jako jsou kondenzátory a odpory. Ty se v nich nezapojují jako jednotlivé prvky, ale jsou vytvořeny, integrovány, na jediném polovodičovém **čipu**, kde vytvářejí **integrovaný obvod**.

Obr. 42.20 ukazuje čip mikroprocesoru Power PC 620 firmy Motorola. Obsahuje téměř sedm milionů tranzistorů spolu s dalšími elektronickými součástkami. Obr. 42.21 poskytuje značně zvětšený pohled na část tohoto čipu; různé barvy znázorňují různé vrstvy čipu.



Obr. 42.20 Integrovaný obvod čipu Power PC 620 firmy Motorola, používaný hlavně v počítačových stanicích a serverech. Pro použití bude uzavřen do keramického pouzdra.



Obr. 42.21 Zvětšená fotografie uspořádání čipu z obr. 42.20.

V závodě Rio Rancho společnosti Intel se čipy vyrábějí na křemíkových deskách o průměru 20 cm procesem, sestávajícím ze 140 kroků. Každá deska přitom obsahuje asi 300 čipů. Jednotlivé elektronické součástky čipu jsou tak malé, že i to nejmenší smítko prachu může čip zničit. Proto se udržuje ve speciálně vybudovaných čistých prostorách závodu bezprašné ovzduší, které je tisíckrát čistší než ovzduší operačních sálů nemocnic. To je také důvod, proč pracovníci musí nosit ochranné oděvy (jak ukazuje úvodní fotografie této kapitoly). Jako součást čisticího procesu prochází filtrovaný vzduch přes děrovanou podlahu rychlostí 30 metrů za minutu. Používají se rovněž vzdušné sprchy a čisticí stanice, kde si pracovníci odstraňují kosmetické přípravky.

KONTROLA 5: V tranzistoru MOSFET z obr. 42.19 zvyšujeme napětí hradla U_{GS}, až se kanál *n* zablokuje a proud I_{DS} klesne na nulu. Začíná zablokování (a) blízko emitorového konce kanálu *n* a šíří se podél kanálu, (b) blízko kolektorového konce kanálu a šíří se podél kanálu, nebo (c) vzniká současně ve všech bodech podél kanálu?

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Kovy, polovodiče a izolátory

Tři elektrické vlastnosti, které můžeme použít pro rozlišení krystalických pevných látek, jsou *rezistivita* ϱ, *teplotní součinitel rezistivity* α a *koncentrace nosičů náboje* n. Pevné látky můžeme obecně rozdělit na *vodiče* (s malým ϱ) a *izolátory* (s velkým ϱ). Vodiče můžeme dále rozdělit na *kovy* (s malým ϱ, kladným α a velkým n) a *polovodiče* (s větším ϱ, záporným α a menším n).

Energiové pásy a mezery v pevné látce

Izolovaný atom může mít pouze diskrétní energiové hladiny. Když se atomy přibližují, aby vytvořily pevnou látku, sdružují se jejich hladiny a vytvářejí energiové *pásy* pevné látky. Tyto energiové pásy jsou vzájemně odděleny energiovými *mezerami*, nazývanými pásy zakázaných energií. Ty odpovídají intervalu energií, které nemůže nabývat žádný elektron.

Každý energiový pás je vytvořen obrovským počtem velice blízkých hladin. Podle Pauliho vylučovacího principu může být každý stav patřící těmto hladinám obsazen nanejvýš jedním elektronem.

Izolátory

V *izolátoru* je nejvyšší pás obsahující elektrony zcela zaplněn a je oddělen od neobsazeného pásu tak velkým zakázaným pásem, že elektrony obecně nemohou být dostatečně tepelně aktivovány, aby ho přeskočily.

Kovy

V *kovu* je nejvyšší pás, který obsahuje elektrony, zaplněn jenom částečně. Energie nejvyšší zaplněné hladiny při teplotě 0 K se nazývá *Fermiho energie* E_F; pro měď je $E_F = 7{,}0\,\mathrm{eV}$.

Hustota stavů $N(E)$ je počet dostupných energiových stavů na jednotkový objem vzorku a na jednotkový interval energie. Je dána vztahem

$$N(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2} \quad \text{(hustota stavů)}. \tag{42.2}$$

Pravděpodobnost obsazení $P(E)$ (pravděpodobnost, že stav s energií E bude obsazen elektronem) je dána vztahem

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad \text{(pravděpodobnost obsazení)}. \tag{42.3}$$

Hustota obsazených stavů $N_o(E)$ je dána součinem obou uvedených veličin

$$N_o(E) = N(E)P(E) \quad \text{(hustota obsazených stavů)}. \tag{42.4}$$

Fermiho energii pro kov můžeme nalézt integrováním $N_o(E)$ pro $T = 0$ od $E = 0$ do $E = E_F$. Výsledkem je

$$E_F = \left(\frac{3}{16\sqrt{2}\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m} n^{2/3} \doteq \frac{0{,}121h^2}{m} n^{2/3}. \tag{42.6}$$

Polovodiče

Pásová struktura *polovodiče* je podobná struktuře izolátoru s tím rozdílem, že šířka zakázaného pásu E_g polovodiče je mnohem menší. U křemíku (polovodič) je při pokojové teplotě vybuzena vlivem tepelné aktivace malá část elektronů do *vodivostního pásu*, a tím vznikne ve *valenčním pásu* stejný počet *děr*. Jak elektrony, tak díry jsou nosiče náboje.

Počet elektronů ve vodivostním pásu křemíku se může podstatně zvýšit dotováním malým množstvím fosforu; tím vznikne *materiál typu n*. Počet děr ve valenčním pásu se může značně zvýšit dotováním hliníkem; tím se vytvoří *materiál typu p*.

Přechod p-n

Přechod p-n je monokrystal polovodiče, jehož jedna část je dotována tak, aby tvořila materiál typu p, a druhá část je dotována tak, aby tvořila materiál typu n; oba typy materiálů se setkávají v *rovině přechodu*. V tepelné rovnováze na této rovině dojde k následujícím dějům:

Majoritní nosiče (elektrony na straně n a díry na straně p) difundují přes rovinu přechodu a vytvářejí *difuzní proud* I_{dif}.

Minoritní nosiče (díry na straně n a elektrony na straně p) jsou unášeny spádem elektrického potenciálu přes rovinu přechodu a vytvářejí *driftový proud* I_{drift}. Oba proudy mají stejnou velikost, takže výsledný proud je nulový.

V oblasti roviny přechodu vznikne *ochuzená zóna*, sestávající převážně z donorových a akceptorových iontů.

Napříč ochuzenou zónou se vytvoří *kontaktní napětí* o velikosti U_0.

Použití přechodu p-n

Přiložíme-li na přechod p-n napětí, prochází jím elektrický proud snadněji pro jednu polaritu napětí než pro druhou. Přechod p-n může tedy sloužit jako *diodový usměrňovač*.

Je-li přechod p-n zapojen v propustném směru, může emitovat světlo, a může tedy sloužit jako *světelná dioda* (LED). Vlnová délka emitovaného světla je dána vztahem:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E_g}, \tag{42.9}$$

kde E_g je šířka zakázaného pásu. Přechod p-n s dostatečně velkým napětím v propustném směru, který má rovnoběžné protilehlé čelní stěny, může fungovat jako *laserová dioda* emitující světlo ve velmi úzkém intervalu vlnových délek.

MOSFET

U tranzistoru se třemi vývody typu MOSFET ovládá napětí přiložené na *hradlo* G vnitřní tok elektronů od *emitoru* S ke *kolektoru* D. MOSFET se obvykle používá pouze v módu „zapnuto“, nebo „vypnuto“, kdy buď vede, nebo nevede proud. Tisíce a miliony těchto tranzistorů se umísťují na křemíkových deskách (*čipech*) a vytvářejí integrované obvody; tranzistory MOSFET tak představují základ pro hardware počítačů.

OTÁZKY

1. Obr. 42.1a ukazuje 14 atomů elementární buňky mědi. Protože však každý z těchto atomů patří dvěma nebo více sousedním buňkám, jenom určitý zlomek každého atomu patří elementární buňce ukázané na obrázku. Kolik atomů přísluší elementární buňce mědi? (*Tip*: Sečtěte zlomky atomů, které patří elementární buňce.)

2. Obr. 42.1b ukazuje 18 atomů v elementární buňce křemíku. Z nich je však 14 sdíleno dvěma nebo více elementárními buňkami. Kolik atomů připadá na elementární buňku křemíku (otázka 1)?

3. Závisí vzdálenost mezi sousedními energiovými hladinami v kovech v nejvyšším pásu obsazeném elektrony (a) na materiálu, ze kterého je vzorek vyroben, (b) na velikosti vzorku, (c) na poloze hladiny v pásu, (d) na teplotě vzorku, nebo (e) na Fermiho energii kovu?

4. Porovnejte driftovou rychlost v_d vodivostních elektronů v měděném vodiči s Fermiho rychlostí v_F pro měď. Je v_d (a) zhruba rovna v_F, (b) mnohem větší než v_F, nebo (c) mnohem menší než v_F?

5. Ve které části mřížky křemíku byste hledali (a) vodivostní elektron, (b) valenční elektron, (c) elektron z podslupky $2p$ atomu křemíku?

6. Který z následujících výroků je pravdivý? (a) Za dostatečně nízkých teplot se křemík chová jako izolátor. (b) Za dostatečně vysokých teplot se křemík stává dobrým vodičem. (c) Za dostatečně vysokých teplot se křemík chová jako kov.

7. Šířka pásu zakázaných energií E_g je pro křemík 1,12 eV a pro germanium 0,67 eV. Který z následujících výroků je pravdivý? (a) Obě látky mají stejnou koncentraci nosičů náboje za pokojové teploty. (b) Za pokojové teploty má germanium vyšší koncentraci nosičů náboje než křemík. (c) Obě látky mají vyšší koncentraci vodivostních elektronů než děr. (d) U každé látky se koncentrace elektronů rovná koncentraci děr.

8. Izolovaný atom germania má 32 elektronů uspořádaných v podslupkách takto:

$$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^2\ 4p^2.$$

Tento prvek má stejnou krystalovou strukturu jako křemík a je rovněž polovodič. Které elektrony tvoří valenční pás krystalického germania?

9. Germanium ($Z = 32$) má stejnou krystalovou strukturu a stejný typ vazeb jako křemík. Je výsledný náboj na iontu germania v mřížce $+e$, $+2e$, $+4e$, $+28e$, nebo $+32e$?

10. (a) Který z prvků arsen, indium, cín, gallium, antimon a bor vytvoří materiál typu n, když se použije na dotování křemíku? (b) Který z nich vytvoří materiál typu p? (c) Který není vhodný k dotování? (*Tip*: Prostudujte periodickou tabulku v dodatku G.)

11. Vzorek křemíku je dotován fosforem. Který z následujících výroků je pravdivý? (a) Počet děr ve vzorku se mírně zvýší. (b) Rezistivita se zvýší. (c) Vzorek se nabije kladně. (d) Vzorek se nabije záporně. (e) Pás zakázaných energií mezi valenčním a vodivostním pásem se mírně zmenší.

12. K výrobě polovodiče typu n byste použili (a) křemík dotovaný arsenem, nebo (b) germanium dotované indiem? (*Tip*: Podívejte se do periodické tabulky.)

13. V p-n přechodech s přiloženým vnějším napětím, které jsou na obr. 42.14, je na obou ochuzených zónách elektrické pole intenzity $\boldsymbol{E}$ v důsledku napětí, které se vytváří na této zóně. (a) Je $\boldsymbol{E}$ orientováno zleva doprava, nebo zprava doleva? (b) Je jeho velikost větší pro propustný, nebo pro závěrný směr?

14. Na daném p-n přechodu vzniká na ochuzené zóně kontaktní napětí $U_0 = 0{,}78$ V. Voltmetr je připojen k přechodu tak, že kladný pól voltmetru je připojen k části p přechodu. Bude voltmetr ukazovat (a) $+0{,}78$ V, (b) $-0{,}78$ V, (c) 0, nebo (d) něco jiného? (*Tip*: Kontaktní napětí se vyskytuje i ve spojích mezi p-n přechodem a přívody voltmetru.)

15. Pro který z následujících materiálů platí Ohmův zákon: (a) tyč čistého křemíku, (b) tyč křemíku typu n, (c) tyč křemíku typu p, (d) přechod p-n?

16. LED dioda, krystal polovodiče tvořený galliem, arsenem a fosforem, emituje červené světlo. Když se podíváte přes tento krystal na bílý povrch, budete vidět povrch zbarvený (a) červeně, (b) modře, (c) nevidíte nic, protože krystal je neprůhledný, nebo (d) povrch zůstane bílý?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 42.5 Kovy

1C. Měď je jednomocný kov s molární hmotností 63,5 g/mol a hustotou 8,96 g/cm^3. Ukažte, že koncentrace vodivostních elektronů je $8{,}43\cdot10^{28}$ m^{-3}.

2C. Jak velký by měl být tlak ideálního plynu (v atm), aby koncentrace molekul plynu byla rovna koncentraci vodivostních elektronů v mědi (pro $T = 300$ K)?

3C. Ověřte číselný faktor 0,121 v rov. (42.6).

4C. Jaká je koncentrace vodivostních elektronů u zlata, které je jednomocný kov? Použijte molární hmotnost a hustotu uvedenou v dodatku F.

5C. Vypočítejte $\mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}T$ za pokojové teploty pro (a) měď a (b) křemík s použitím údajů v tab. 42.1.

6C. Použijte rov. (42.6) k ověření, že Fermiho energie mědi je 7,0 eV.

7C. Fermiho energie mědi je 7,0 eV. Dokažte, že odpovídající Fermiho rychlost je 1 600 km/s.

8C. (a) Ukažte, že rov. (42.2) můžeme psát jako $N(E) = CE^{1/2}$, kde $C = 6{,}78\cdot10^{27}$ m$^{-3}\cdot$eV$^{-3/2}$. (b) Vypočtěte $N(E)$ pro $E = 5{,}00$ eV.

9C. Jaká je pravděpodobnost, že stav 0,062 eV nad Fermiho energií bude obsazen při (a) $T = 0$ K a (b) $T = 320$ K?

10C. Vypočtěte hustotu stavů $N(E)$ v kovu pro energii $E = 8{,}0$ eV a ukažte, že výsledek souhlasí s hodnotou danou křivkou z obr. 42.5.

11C. Ukažte, že rov. (42.6) můžeme psát jako $E_\mathrm{F} = An^{2/3}$, kde konstanta A má hodnotu $3{,}65\cdot10^{-19}$ m$^2\cdot$eV.

12C. Hustota zlata je 19,3 g/cm^3 a každý atom zlata přispívá do vodivostního pásu jedním elektronem. Použijte výsledek cvič. 4 k výpočtu Fermiho energie zlata.

13C. Stav s energií 63 meV nad Fermiho hladinou má pravděpodobnost obsazení 0,090. Jaká je pravděpodobnost obsazení pro stav 63 meV *pod* Fermiho hladinou?

14Ú. Fermiho energie pro měď je 7,0 eV. Pro teplotu 1 000 K (a) nalezněte energii hladiny, pro kterou je pravděpodobnost obsazení elektronem 0,90. Určete pro tuto energii (b) hustotu stavů a (c) hustotu obsazených stavů.

15Ú. Hustota kovového sodíku je 971 kg/m^3 a jeho molární hmotnost je 23,0 g/mol; poloměr iontu Na^+ je 98 pm. (a) Jaké procento objemu kovového sodíku připadá na jeho vodivostní elektrony? (b) Zopakujte tento výpočet pro měď, která má hustotu 8 960 kg/m^3, molární hmotnost 63,5 g/mol a poloměr iontu 135 pm. (c) Pro který z těchto kovů se vodivostní elektrony chovají více jako plyn volných elektronů?

16Ú. Ukažte, že pravděpodobnost obsazení $P(E)$ v rov. (42.3) je symetrická kolem hodnoty Fermiho energie. Dokažte, že:

$$P(E_\mathrm{F} + \Delta E) + P(E_\mathrm{F} - \Delta E) = 1.$$

17Ú. V rov. (42.3) uvažujte $E - E_\mathrm{F} = \Delta E = 1{,}00$ eV. (a) Pro jakou teplotu se výsledek daný touto rovnicí liší o 1 % od výsledku z klasického Boltzmannova vztahu $P(E) = \mathrm{e}^{-\Delta E/kT}$? (b) Pro jakou teplotu se tyto výsledky liší o 10 %?

18Ú. Jaká je pravděpodobnost, že jeden elektron přeskočí z valenčního pásu do vodivostního pásu pro diamant, jehož hmotnost je rovna hmotnosti Země? Použijte výsledky př. 42.1 a molární hmotnost uhlíku z dodatku F; předpokládejte, že u diamantu připadá jeden valenční elektron na jeden atom uhlíku.

19Ú. Vypočtěte koncentraci (a) molekul kyslíku při 0 °C a tlaku 1,0 atm a (b) vodivostních elektronů v mědi. (c) Jaký je podíl koncentrace vodivostních elektronů v mědi ke koncentraci molekul kyslíku? (d) Jaká je v obou případech střední vzdálenost mezi částicemi? Předpokládejte, že tato vzdálenost je rovna délce hrany krychle, jejíž objem se rovná objemu připadajícímu na jednu částici.

20Ú. Vypočtěte hustotu obsazených stavů $N_\mathrm{o}(E)$ pro měď při teplotě $T = 1\,000$ K pro energie $E = 4{,}00$ eV, 6,75 eV, 7,00 eV, 7,25 eV a 9,00 eV. Porovnejte své výsledky s grafem na obr. 42.7b. Fermiho energie pro měď je 7,00 eV.

21Ú. Fermiho energie pro stříbro je 5,5 eV. (a) Jaká je pravděpodobnost pro $T = 0$ °C, že stavy s energiemi 4,4 eV, 5,4 eV, 5,5 eV, 5,6 eV a 6,4 eV budou obsazeny? (b) Při jaké teplotě je pravděpodobnost, že stav s energií $E = 5{,}6$ eV bude obsazen, rovna hodnotě 0,16?

22Ú. Fermiho energie hliníku je 11,6 eV. Jeho hustota je 2,70 g/cm^3 a molární hmotnost je 27,0 g/mol. Na základě těchto údajů určete počet volných elektronů na atom.

23Ú. Ukažte, že pravděpodobnost $P_\mathrm{d}(E)$ výskytu díry na energiové hladině E (to znamená, že hladina s energií E není obsazena elektronem) je

$$P_\mathrm{d}(E) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\Delta E/kT} + 1},$$

kde $\Delta E = E - E_\mathrm{F}$.

24Ú. Zinek je dvojmocný kov. Vypočtěte (a) koncentraci vodivostních elektronů, (b) Fermiho energii, (c) Fermiho rychlost a (d) de Broglieho vlnovou délku odpovídající této rychlosti elektronu. Použijte data z dodatku F.

25Ú. Stříbro je jednomocný kov. Vypočtěte (a) koncentraci vodivostních elektronů, (b) Fermiho energii, (c) Fermiho rychlost a (d) de Broglieho vlnovou délku odpovídající této elektronové rychlosti. Použijte data z dodatku F.

26Ú. Jak blízko Fermiho energie najdeme při $T = 300$ K stav, pro který je pravděpodobnost obsazení vodivostními elektrony rovna 0,10?

27Ú. (a) Ukažte, že hustota stavů na Fermiho energii je dána

vztahem

$$N(E_F) = \frac{4(3^{1/3})(\pi^{2/3})mn^{1/3}}{h^2} = \\ = (4{,}11\cdot 10^{18}\,\mathrm{m^{-2}\cdot eV^{-1}})n^{1/3},$$

kde n je koncentrace vodivostních elektronů. (b) Vypočtěte $N(E_F)$ pro měď s použitím výsledků cvič. 1 a ověřte svůj výpočet porovnáním s křivkou na obr. 42.5; pro měď je hodnota $E_F = 7{,}0\,\mathrm{eV}$.

28Ú. (a) Ukažte, že směrnice $\mathrm{d}P/\mathrm{d}E$ v rov. (42.3) je pro $E = E_F$ rovna $-\frac{1}{4}kT$. (b) Dokažte, že tečna ke křivce na obr. 42.6b v bodě se souřadnicí $E = E_F$ protíná vodorovnou osu v souřadnici $E = E_F + 2kT$.

29Ú. Ukažte, že při $T = 0\,\mathrm{K}$ je v kovu střední energie $\overline{E}$ vodivostních elektronů rovna $\frac{3}{5}E_F$. (*Tip*: Použijte definici pro střední energii $\overline{E} = (1/n)\int E N_o(E)\,\mathrm{d}E$, kde n je koncentrace nosičů náboje.)

30Ú. Použijte výsledek úlohy 29 k výpočtu celkové energie vodivostních elektronů v $1{,}0\,\mathrm{cm^3}$ mědi při $T = 0\,\mathrm{K}$.

31Ú. (a) Z výsledku úlohy 29 odhadněte, kolik energie by uvolnily vodivostní elektrony v jedné penci, kdyby náhle přestal platit Pauliho vylučovací princip (předpokládejme, že mince je celá z mědi a váží 3,1 g). (b) Jak dlouho by mohlo toto množství energie zabezpečit napájení jedné 100 W žárovky? (*Poznámka*: Žádný způsob, jak „vypnout" Pauliho vylučovací princip, samozřejmě neexistuje.)

32Ú. Při teplotě $T = 1\,000\,\mathrm{K}$ je relativní podíl vodivostních elektronů v kovu, které mají energie vyšší než je Fermiho energie, roven obsahu plochy pod částí křivky z obr. 42.7b nad energií E_F dělené obsahem plochy pod celou křivkou. Je obtížné najít tyto plochy přímou integrací. Avšak vhodným přiblížením tohoto podílu p pro jakoukoli rozumnou teplotu T je

$$p = \frac{3kT}{2E_F}.$$

Všimněte si, že pro $T = 0\,\mathrm{K}$ je $p = 0$, jak bychom očekávali. Jaké hodnoty dosahuje tento podíl pro měď při (a) 300 K a (b) 1 000 K? Pro měď je $E_F = 7{,}0\,\mathrm{eV}$. (c) Zkontrolujte výsledek numerickou integrací rov. (42.4).

33Ú. Při jaké teplotě má 1,3 % celkového množství vodivostních elektronů v kovovém lithiu energie vyšší než je Fermiho energie $E_F = 4{,}7\,\mathrm{eV}$ (úloha 32)?

34Ú. Stříbro se taví při 961 °C. Jaký podíl vodivostních elektronů je při této teplotě ve stavech s energiemi vyššími než je Fermiho energie $E_F = 5{,}5\,\mathrm{eV}$ (úloha 32)?

ODST. 42.6 Polovodiče

35Ú. (a) Najděte úhel θ mezi nejbližšími sousedními vazbami v mřížce křemíku. Zvažte, že každý atom křemíku je vázán ke čtyřem nejbližším sousedům, a ty jsou ve vrcholech pravidelného čtyřstěnu, jehož všechny stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. (b) Najděte délku vazby z údaje, že atomy ve vrcholech čtyřstěnu jsou od sebe vzdáleny 388 pm.

36Ú. Arsenid gallitý (GaAs) je běžně používaný typ polovodiče s pásem zakázaných energií $E_g = 1{,}43\,\mathrm{eV}$. Jeho krystalová struktura je podobná struktuře křemíku, kde polovina křemíkových atomů je nahrazena atomy gallia a polovina atomy arsenu. Načrtněte rovinné zobrazení mřížky GaAs podle vzoru na obr. 42.9a. (a) Jaké jsou výsledné náboje iontů gallia a arsenu? (b) Kolik elektronů připadá na jednu vazbu? (*Tip*: Použijte periodickou tabulku z dodatku G.)

37Ú. (a) Jaká je maximální vlnová délka světla, které vybudí elektron z valenčního pásu diamantu do vodivostního pásu? Pás zakázaných energií je 5,5 eV. (b) V jaké části elektromagnetického spektra tato vlnová délka leží?

38Ú. Rov. (42.3) vyjadřující pravděpodobnost obsazení se může používat jak pro polovodiče, tak pro kovy. U polovodičů je Fermiho energie blízko středu pásu zakázaných energií mezi valenčním a vodivostním pásem (úloha 39). Pro germanium je šířka tohoto pásu 0,67 eV. Jaká je pravděpodobnost, že při $T = 290\,\mathrm{K}$ (a) je stav na spodní hladině vodivostního pásu obsazen a (b) není stav na horní hladině valenčního pásu obsazen? (*Poznámka*: Obr. 42.4b ukazuje, že u kovů se Fermiho energie nachází symetricky mezi vodivostními elektrony a děrami. Když chceme tento postup použít pro polovodiče, musí být Fermiho energie blízko středu pásu zakázaných energií. V místě Fermiho energie však nemusí existovat žádný stav.)

39Ú. Ve zjednodušeném modelu nedotovaného polovodiče můžeme skutečné rozdělení energiových stavů nahradit takovým rozdělením, kde je ve valenčním pásu N_v stavů, všechny se stejnou energií E_v, a ve vodivostním pásu je N_c stavů, všechny se stejnou energií E_c. Počet elektronů ve vodivostním pásu se rovná počtu děr ve valenčním pásu. (a) Dokažte, že tato poslední podmínka vede ke vztahu

$$\frac{N_c}{\exp(\Delta E_c/kT)+1} = \frac{N_v}{\exp(\Delta E_v/kT)+1},$$

kde

$$\Delta E_c = E_c - E_F \text{ a } \Delta E_v = -(E_v - E_F).$$

(*Tip*: Úloha 23.) (b) Jestliže se Fermiho hladina nachází v pásu zakázaných energií a je daleko od obou pásů v porovnání s velikostí kT, potom ve jmenovatelích převládají exponenciály. Za těchto podmínek dokažte, že

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{kT\ln(N_v/N_c)}{2}$$

a že pro $N_v \approx N_c$ je Fermiho hladina pro nedotované polovodiče blízko středu pásu zakázaných energií, jak je uvedeno v úloze 38.

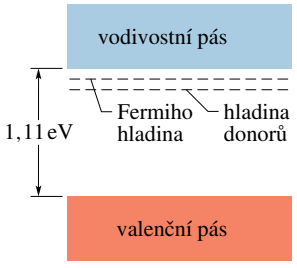
ODST. 42.7 Dotované polovodiče

40Ú. Čistý křemík má za pokojové teploty koncentraci elektronů ve vodivostním pásu $5\cdot 10^{15}\,\mathrm{m^{-3}}$ a stejnou koncentraci děr ve valenčním pásu. Předpokládejte, že jeden atom z každých 10^7

atomů křemíku je nahrazen atomem fosforu. (a) Jaký typ bude mít tento dotovaný polovodič, *n* nebo *p*? (b) Jakou koncentraci nosičů náboje přidá fosfor? (c) Jaký je podíl koncentrace nosičů náboje (elektronů ve vodivostním pásu a děr ve valenčním pásu) v dotovaném křemíku a v čistém křemíku?

41Ú. Jaká je hmotnost fosforu potřebná pro dotování 1,0 g křemíku v rozsahu uvedeném v př. 42.4?

42Ú. Dotování mění Fermiho energii polovodiče. Uvažujte křemík se šířkou pásu zakázaných energií 1,11 eV mezi vrcholem valenčního pásu a dnem vodivostního pásu. Při 300 K je Fermiho hladina čistého materiálu blízko středu tohoto pásu. Předpokládejte, že křemík je dotovaný atomy donorů, z nichž každý má stav 0,15 eV pod dnem vodivostního pásu, a dále že dotování zvýší Fermiho hladinu tak, že leží 0,11 eV pod dnem toho pásu (obr. 42.22). (a) Vypočtěte pro čistý i dotovaný křemík pravděpodobnost, že stav na dně vodivostního pásu je obsazen. (b) Vypočtěte pravděpodobnost, že donorový stav je v dotovaném materiálu obsazen.



Obr. 42.22 Úloha 42

43Ú. Vzorek křemíku je dotovaný atomy s donorovým stavem 0,110 eV pod dnem vodivostního pásu (pás zakázaných energií křemíku je 1,11 eV). (a) Jestliže každý z těchto stavů je při $T = 300\,\mathrm{K}$ obsazen s pravděpodobností $5{,}00\cdot10^{-5}$, kde se nachází Fermiho hladina vzhledem k vrcholu valenčního pásu? (b) Jaká je pravděpodobnost, že stav na dně vodivostního pásu je obsazen?

ODST. 42.9 Diodový usměrňovač

44Ú. Dopadne-li foton do ochuzené zóny *p-n* přechodu, mohou se vytvořit páry elektron-díra tak, že elektrony absorbují část energie fotonu a přejdou z valenčního do vodivostního pásu. Tyto *p-n* přechody se často používají jako detektory fotonů, především v rentgenové oblasti elektromagnetického spektra a pro γ-záření. Je-li energie 662 keV fotonu γ-záření úplně absorbována polovodičem se šířkou zakázaného pásu 1,1 eV, jaký je průměrný počet vytvořených párů elektron-díra?

45Ú. Pro ideální diodový usměrňovač na bázi *p-n* přechodu s ostrým přechodem mezi oběma polovodivými částmi platí, že závislost proudu I na napětí U na usměrňovači je dána vztahem

$$I = I_0\left(\mathrm{e}^{eU/kT} - 1\right),$$

kde I_0 závisí na materiálu, ale ne na proudu nebo napětí na usměrňovači, a nazývá se *nasycený proud v závěrném směru*. Napětí U je kladné v propustném směru a záporné v závěrném směru. (a) Ověřte nakreslením grafu $I(U)$ v rozsahu od $-0{,}12$ V do $+0{,}12$ V, že tento výraz předpovídá chování usměrňovače; zvolte $T = 300$ K a $I_0 = 5{,}0$ nA. (b) Pro teplotu 300 K vypočtěte podíl proudů pro napětí 0,50 V v propustném a závěrném směru.

ODST. 42.10 LED dioda

46Ú. (a) V daném krystalu je nejvyšší obsazený pás zaplněn. Krystal propouští světlo o vlnových délkách větších než 295 nm, pro kratší vlnové délky je neprůhledný. Vypočtěte šířku zakázaného pásu pro tento materiál (v eV).

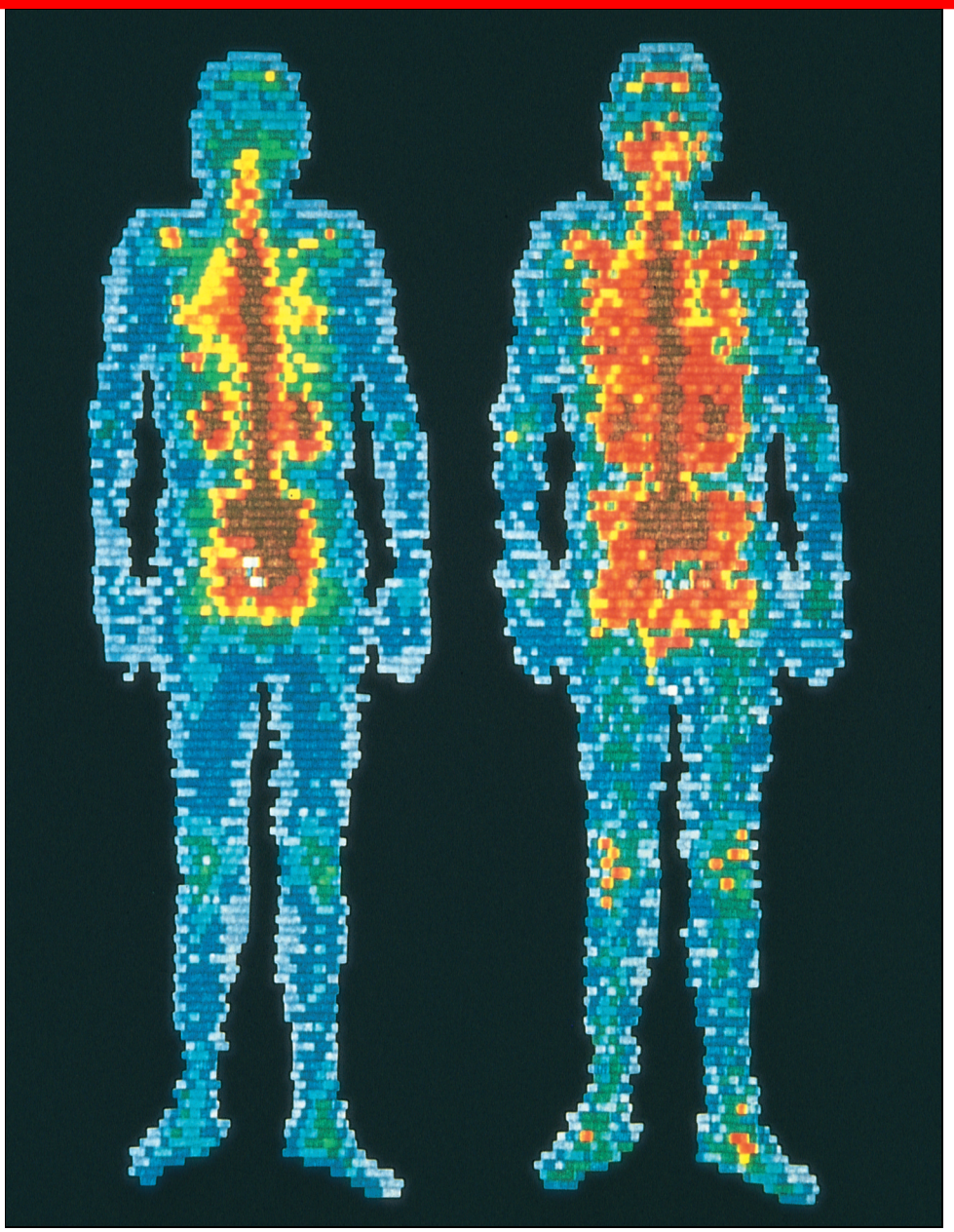
47Ú. Krystal chloridu draselného (KCl) má šířku zakázaného pásu 7,6 eV. Je tento krystal průhledný, nebo neprůhledný pro světlo o vlnové délce 140 nm?

ODST. 42.11 Tranzistor

48Ú. Čip procesoru Pentium, který je velký asi jako poštovní známka (25,4 mm × 22,2 mm), obsahuje přibližně 3,5 milionu tranzistorů. Jestliže by měly tranzistory čtvercový tvar, jaká by byla jejich *maximální* velikost? (*Poznámka*: Na čipu jsou ovšem i jiné součástky a také musí zbýt místo pro propojení mezi prvky obvodu. Běžně se vyrábějí tranzistory o rozměrech kolem 0,7 μm.)

49Ú. MOSFET vyrobený z křemíku má čtvercové hradlo o délce hrany 0,50 μm. Izolační vrstva z oxidů křemíku, která jej odděluje od substrátu typu *p*, má tloušťku 0,20 μm a relativní permitivitu 4,5. (a) Jaká je ekvivalentní kapacita systému hradlo+substrát? (b) Kolik se nahromadí v hradlu elementárních nábojů *e* při napětí 1,0 V mezi hradlem a emitorem?

43
Jaderná fyzika



Radioaktivní jádra podaná pacientovi v injekci se shromažďují na určitých místech těla, rozpadají se a vysílají fotony záření γ. Ty jsou zaznamenány detektorem a po zpracování počítačem můžeme na monitoru pozorovat barevně kódovaný obraz pacientova těla. Na uvedených obrazech (levý představuje pohled zepředu a pravý pohled zezadu) je po zakódování hnědou a oranžovou barvou zřetelně vidět, jak se radioaktivní jádra shromáždila v páteři, pánvi a žebrech. Co se děje s jádrem při radioaktivním rozpadu a co přesně slovo „rozpad“ označuje?

43.1 OBJEVENÍ JÁDRA

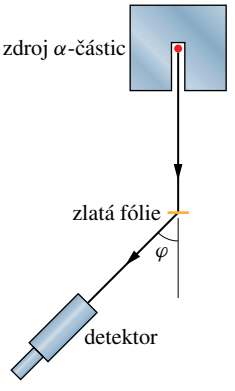
V prvních letech dvacátého století se o struktuře atomů nevědělo o mnoho víc, než že obsahují elektrony. Ani hmotnost elektronu objeveného v roce 1897 J. J. Thomsonem nebyla tehdy ještě známa a nevědělo se ani, kolik vlastně atom těchto záporně nabitých částic obsahuje. Atom jako celek je elektricky neutrální a musí tedy obsahovat i kladný náboj, ale o tom, jakou formu takový kompenzující náboj má, nebylo v té době také nic známo.

V roce 1911 Ernest Rutherford navrhl model, ve kterém je kladný náboj atomu zhuštěn kolem jeho středu, takže vytváří **jádro** atomu, v němž je většina hmotnosti atomu. Rutherfordův model nebyl pouhou hypotézou, ale byl podložen výsledky experimentu, který sám navrhl a který úspěšně provedli jeho spolupracovníci Hans Geiger (ten je slavný díky Geigerovu čítači) a Ernest Marsden, dvacetiletý student, který ještě neměl ani bakalářský diplom.

V Rutherfordově době bylo známo, že se některé prvky, nazývané **radioaktivní**, samovolně přeměňují na jiné a emitují přitom nějaké částice. Jeden z těchto prvků je radon, který emituje α-částice s energií asi 5,5 MeV. Dnes víme, že tyto užitečné částice jsou jádra heliových atomů.

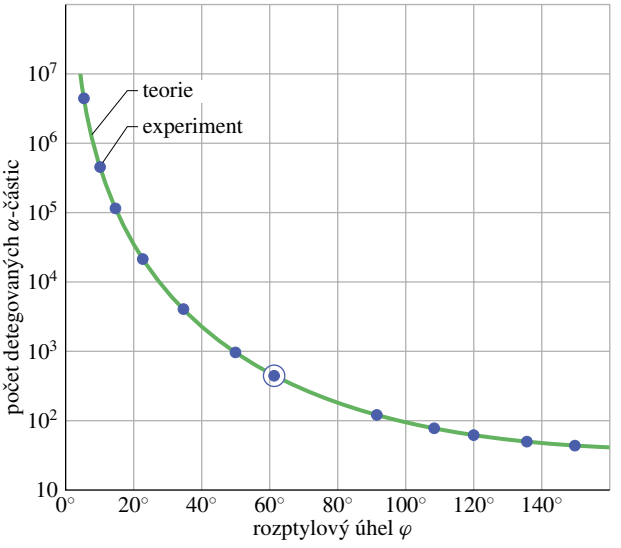
Rutherford navrhl, aby se svazkem α-částic s dostatečně velkou energií ostřeloval terčík ve tvaru tenké fólie a měřila se velikost úhlové odchylky α-částic od původního směru po průchodu terčíkem. Částice α mají hmotnost přibližně 7 300krát větší než hmotnost elektronu a kladný náboj $+2e$.

Na obr. 43.1 je uspořádání Geigerova a Marsdenova pokusu. Zdrojem α-částic byla tenkostěnná skleněná trubice naplněná plynným radonem. V pokusu se zjišťoval počet α-částic odchýlených do různých rozptylových úhlů φ.



Obr. 43.1 Pohled shora na experimentální zařízení užívané v letech 1911–1913 v Rutherfordově laboratoři ke studiu rozptylu α-částic tenkými kovovými fóliemi. Detektor se může otáčet do různých úhlů rozptylu φ. Zdrojem α-částic byl plynný radon, který vzniká při rozpadu radia. Tímto jednoduchým „stolním“ experimentálním zařízením bylo objeveno jádro.

Obr. 43.2 ukazuje výsledky pokusu. Povšimněme si, že svislá stupnice je logaritmická. Vidíme, že většina částic se rozptyluje pod malými úhly, ale — a to bylo velice překvapivé — malinká část částic se rozptyluje do velkých úhlů, až do 180°. Řečeno Rutherfordovými slovy: „Byla to nejneuvěřitelnější událost, jakou jsem v životě zažil. Bylo to stejně neuvěřitelné, jako kdybyste vypálili patnáctipalcovou střelu proti kusu jemného papíru, a ona se vrátila zpět a zasáhla vás.“



Obr. 43.2 Tečky udávají experimentální hodnoty pro rozptyl α-částic zlatou fólií, které získali Geiger a Marsden na zařízení z obr. 43.1. Plná křivka je teoretická předpověď, založená na předpokladu, že atom má malé, hmotné a kladně nabité jádro. Povšimněme si, že svislá stupnice je logaritmická a pokrývá šest řádů. Experimentální hodnoty jsou normovány tak, aby se ztotožnila teoretická křivka a experimentálně získaná hodnota v bodě vyznačeném kroužkem.

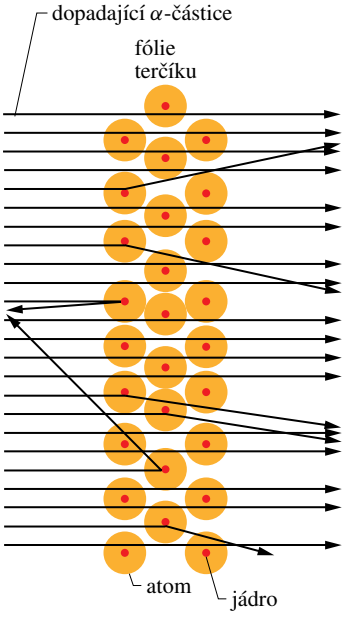
Proč vlastně byl Rutherford tak překvapen? V době, kdy se experimenty prováděly, většina fyziků přijímala platnost modelu „švestkového pudinku“, který rozvinul J. J. Thomson. Podle tohoto modelu byl kladný náboj rozprostřen v celém objemu atomu. Předpokládalo se, že elektrony („švestky“) kmitají kolem pevných bodů uvnitř koule vyplněné kladným nábojem („pudink“).

Největší možná velikost síly vychylující α-částici z původního směru při průchodu velkou koulí kladného náboje by byla příliš malá dokonce i na vychýlení α-částice o 1°. (Očekávané hodnoty vychýlení bylo možno přirovnat k tomu, co by se dělo při průchodu vystřelené kulky pytlem plným sněhových koulí.) Elektrony atomu také nemohou mít podstatný vliv na pohyb α-částic o velké hmotnosti a energii. Naopak elektrony samy by se měly silně odchýlit, jako když se roj komárů rozežene letícím kamenem.

Rutherfordovi bylo jasné, že pro odchýlení α-částice do zpětného směru je potřebná velká síla; tato síla by se mohla projevit, kdyby kladný náboj atomu nebyl rozptýlen

po jeho objemu, ale byl zcela soustředěn v jeho středu. Potom se α-částice může přiblížit velmi těsně ke kladně nabitému bodovému jádru, kterým ale nemůže projít; právě tato situace vede k velkým hodnotám síly.

Na obr. 43.3 jsou nakresleny typické dráhy α-částic při průchodu atomy terče ve tvaru tenké fólie. Jak vidíme, většina částic se buď nevychýlí vůbec, nebo jen slabě, ale malá část z nich (ty, které přicházejí po dráze, která se náhodně dostane do těsné blízkosti jádra) je vychýlena do velkých úhlů. Analýzou experimentálních dat došel Rutherford k závěru, že poloměr jádra je desettisíckrát menší než poloměr atomu. Jinými slovy, atom je v podstatě prázdný prostor!



Obr. 43.3 Úhel, do kterého jsou rozptýleny α-částice, závisí na tom, jak blízko se dráhy dopadajících α-částic dostanou k atomovému jádru. Větší výchylky nastanou pouze při velmi těsném přiblížení.

PŘÍKLAD 43.1

Náhodou dojde k tomu, že α-částice s energií 5,30 MeV dopadá čelně na jádro atomu zlata ($Z = 79$). Jak blízko ke středu jádra je α-částice v okamžiku, kdy se zastaví a obrací směr pohybu? Zanedbejte zpětný ráz relativně velmi hmotného jádra.

ŘEŠENÍ: Na počátku je celková mechanická energie těchto dvou interagujících těles rovna počáteční kinetické energii α-částice $E_{k,\alpha} = 5{,}30\,\text{MeV}$. V okamžiku, kdy se α-částice zastaví, je celková energie rovna elektrické potenciální energii α-částice a jádra atomu zlata. Protože se energie zachovává, musí být velikosti těchto dvou energií stejné, takže z rov. (25.43) plyne

$$E_{k,\alpha} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_\alpha Q_{Au}}{d},$$

kde $Q_\alpha = 2e$ je náboj α-částice, $Q_{Au} = 79e$ je náboj jádra atomu zlata a d je vzdálenost mezi středy těchto těles. Dosazením za náboje a řešením rovnice vzhledem k d dostaneme

$$d = \frac{(2e)(79e)}{4\pi\varepsilon_0 E_{k,\alpha}} =$$
$$= \frac{(2\cdot 79)(1{,}60\cdot 10^{-19}\,\text{C})^2}{4\pi(8{,}85\cdot 10^{-12}\,\text{F/m})(5{,}30\,\text{MeV})}\cdot\left(\frac{1\,\text{MeV}}{1{,}60\cdot 10^{-13}\,\text{J}}\right) =$$
$$= 4{,}29\cdot 10^{-14}\,\text{m} = 42{,}9\,\text{fm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V atomovém měřítku je to velmi malá vzdálenost, nikoli však v jaderném měřítku. Například tato vzdálenost je podstatně větší než je součet poloměrů α-částice a jádra atomu zlata. Částice α se po zastavení začne pohybovat zpět, aniž se ve skutečnosti „dotkla“ jádra atomu zlata.

43.2 NĚKTERÉ VLASTNOSTI ATOMOVÝCH JADER

V tab. 43.1 jsou uvedeny některé vlastnosti několika atomových jader. Pokud se o jádra atomů zajímáme jen z hlediska různých jaderných vlastností, nikoli jako o části atomů, nazýváme je obecně **nuklidy**.

Něco jaderné terminologie

Jádro se skládá z protonů a neutronů. Počet protonů v jádře (**atomové číslo** nebo také **protonové číslo** jádra) je označováno symbolem Z; počet neutronů (**neutronové číslo**) symbolem N. Celkovému počtu neutronů a protonů v jádře říkáme **hmotnostní číslo** A, takže

$$A = Z + N. \qquad (43.1)$$

Máme-li na mysli jak neutrony, tak protony, používáme společného pojmenování **nukleony**.

Způsob značení nuklidů je vidět z prvního sloupce tab. 43.1. Vezměme například ^{197}Au. Levý horní index (197) udává hmotnostní číslo A. Chemická značka nám říká, že jde o zlato, jehož atomové číslo je 79. Z rov. (43.1) vidíme, že neutronové číslo tohoto nuklidu je $197 - 79 = 118$.

Nuklidy se stejným atomovým číslem Z, ale rozdílným neutronovým číslem N se nazývají **izotopy** prvku. Zlato má 32 izotopů v rozmezí od ^{173}Au do ^{204}Au. Pouze jeden z nich (^{197}Au) je stabilní, zbývajících 31 je radioaktivních. U těchto **radionuklidů** dochází k **rozpadu**, při kterém je emitována nějaká částice a původní nuklid se změní na jiný.

Tabulka 43.1 **Vlastnosti vybraných nuklidů**

NUKLID	Z	N	A	STABILITA[a]	HMOTNOST[b] (u)	SPIN[c]	VAZEBNÍ ENERGIE (MeV/NUKLEON)
^{1}H	1	0	1	99,985 %	1,007 825	$\frac{1}{2}$	—
^{7}Li	3	4	7	92,5 %	7,016 003	$\frac{3}{2}$	5,60
^{31}P	15	16	31	100 %	30,973 762	$\frac{1}{2}$	8,48
^{84}Kr	36	48	84	57,0 %	83,911 507	0	8,72
^{120}Sn	50	70	120	32,4 %	119,902 199	0	8,51
^{157}Gd	64	93	157	15,7 %	156,923 956	$\frac{3}{2}$	8,21
^{197}Au	79	118	197	100 %	196,966 543	$\frac{3}{2}$	7,91
^{227}Ac	89	138	227	21,8 y	227,027 750	$\frac{3}{2}$	7,65
^{239}Pu	94	145	239	24 100 y	239,052 158	$\frac{1}{2}$	7,56

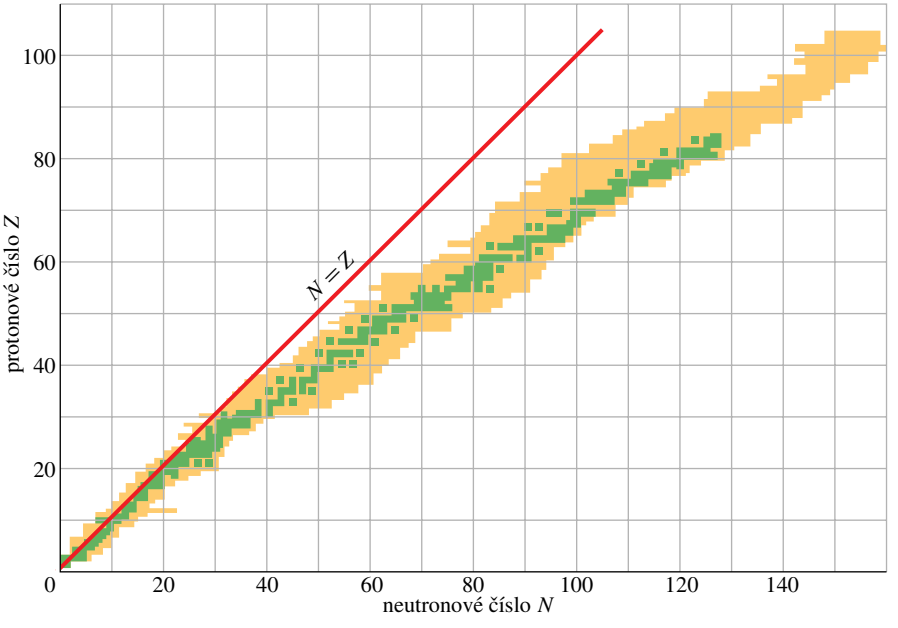
[a] Pro stabilní nuklidy je uveden *výskyt izotopu*; je to podíl počtu atomů tohoto typu v typickém vzorku daného prvku. Pro radioaktivní nuklidy je uveden *poločas rozpadu*.
[b] Standardně se uvádí hmotnost neutrálního atomu a ne hmotnost jádra.
[c] Spin v jednotkách $\hbar$.

Klasifikace nuklidů

Neutrální atomy všech izotopů téhož prvku (všechny mají stejné Z) mají stejný počet elektronů a stejné chemické vlastnosti, všechny je možno umístnit do jediného políčka periodické tabulky prvků. *Jaderné* vlastnosti různých izotopů téhož prvku jsou však velmi rozdílné. Periodická tabulka prvků má pro jaderného fyzika, jaderného chemika nebo jaderného inženýra jen omezené použití.

Nuklidy klasifikujeme pomocí **nuklidového diagramu**, jak znázorňuje obr. 43.4, kde na vodorovné ose je neutronové číslo a na svislé ose protonové číslo nuklidu. Stabilní izotopy jsou na tomto obrázku zakresleny zelenou, radionuklidy béžovou barvou. Jak je z obrázku vidět, radionuklidy se nacházejí po obou stranách dobře definovaného pásu stability a také nad jeho koncem. Všimněme si také, že lehké stabilní nuklidy leží blízko přímky $N = Z$, což znamená, že mají stejný počet protonů a neutronů. Naopak těžší nuklidy mají mnohem více neutronů než protonů. Například pro zlato ^{197}Au jsme již viděli, že má 118 neutronů a pouze 79 protonů, *neutronový nadbytek* činí v tomto případě 39.

Nuklidové diagramy jsou dostupné jako velké nástěnné mapy, kde každé políčko diagramu je vyplněno charakteristikami příslušného nuklidu. Na obr. 43.5 je výřez diagramu se středem u ^{197}Au. Pro stabilní nuklidy se udávají rela-

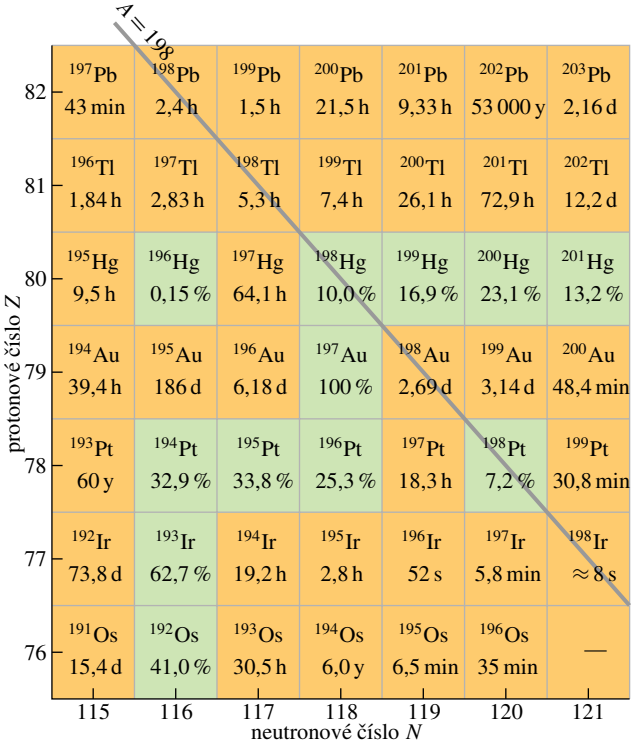


Obr. 43.4 Graf známých nuklidů. Zelené vybarvení označuje pás stabilních nuklidů, béžové vybarvení oblast radionuklidů. Stabilní nuklidy s malou hmotností mají v podstatě stejný počet neutronů a protonů, ale s narůstající hmotností nuklidů vzrůstá nadbytek neutronů. Obrázek ukazuje, že pro $Z > 83$ (bismut) již neexistují stabilní nuklidy.

tivní četnosti výskytu, pro radionuklidy poločasy rozpadu (míra rychlosti rozpadu). Nakloněná přímka představuje **izobaru** — nuklidy na této přímce mají stejné hmotnostní číslo, v tomto případě $A = 198$.

Do roku 2000 byly nalezeny nuklidy s atomovým číslem až $Z = 114$. Nuklidy s tak velkou hodnotou Z jsou velmi nestabilní a na jejich přítomnost se obvykle usuzuje až z produktů jejich radioaktivního rozpadu. Tyto nuklidy vytváříme v laboratořích na urychlovači jádro po jádru; v jednom experimentu se to stávalo tak zřídka, že si v laboratoři pořídili gong a zvonili pokaždé, když se vytvořilo nové jádro nuklidu! V roce 1999 Lawrence Berkeley Laboratory oznámila vytvoření (tří!) nuklidů prvku 118, které se během milisekundy přeměnily α-rozpadem na nuklidy 116 a pak 114.

KONTROLA 1: Vyjděte z obr. 43.4 a rozhodněte, které z následujících nuklidů nebudou pravděpodobně nalezeny: ^{52}Fe ($Z = 26$), ^{90}As ($Z = 33$), ^{158}Nd ($Z = 60$), ^{175}Lu ($Z = 71$), ^{208}Pb ($Z = 82$)?



Obr. 43.5 Zvětšený výřez z nuklidového diagramu na obr. 43.4 se středem u ^{197}Au. Zelené čtverce označují stabilní nuklidy s údajem o relativní četnosti výskytu. Béžové čtverce označují radionuklidy s hodnotou poločasu rozpadu. Nakloněná přímka představuje izobarickou čáru nuklidů o stejném hmotnostním čísle, v tomto případě $A = 198$.

Jaderné poloměry

Vhodnou jednotkou pro měření vzdáleností v jaderném měřítku je **femtometr**. Této jednotce se často říká *fermi*; oba názvy mají stejnou zkratku. Tedy

$$1 \text{ femtometr} = 1 \text{ fermi} = 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}. \quad (43.2)$$

Informace o velikosti a struktuře jádra můžeme získat ostřelováním elektrony o vysoké energii a pozorováním, jak jádra odchylují dopadající elektrony. Energie elektronů musí být tak velká (nejméně 200 MeV), aby jejich de Broglieho vlnová délka byla menší než detaily jaderné struktury, které chceme studovat.

Stejně jako atom není ani jádro tuhé těleso s dobře definovaným povrchem. Navíc některé nuklidy mají tvar elipsoidu, ačkoli většina nuklidů je sférická. Přesto nám experimenty s rozptylem elektronů (stejně jako další experimenty) dovolují připsat každému nuklidu efektivní poloměr vztahem

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad (43.3)$$

kde A je hmotnostní číslo a $R_0 \approx 1{,}2$ fm. Vidíme, že objem jádra, který je úměrný R^3, je přímo úměrný hmotnostnímu číslu A a nezávisí na samotných hodnotách Z a N.

Jaderné hmotnosti

Hmotnosti atomů lze měřit s velkou přesností pomocí moderních hmotnostních spektrometrů a z jaderných reakcí. Připomeňme si z čl. 1.6, že tyto hmotnosti udáváme pomocí jednotky atomové hmotnosti u, která je zvolena tak, že hmotnost atomu ^{12}C (nikoli hmotnost jádra) je přesně 12 u. Vztah této jednotky k jednotce hmotnosti SI je přibližně

$$1 \text{ u} \doteq 1{,}661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}. \quad (43.4)$$

Veličině A říkáme hmotnostní číslo nuklidu, neboť vyjadřuje hmotnost nuklidu v jednotkách atomové hmotnosti zaokrouhlenou na nejbližší celé číslo. Například atomová hmotnost ^{197}Au je 196,966 573 u, což zaokrouhlujeme na 197 u.

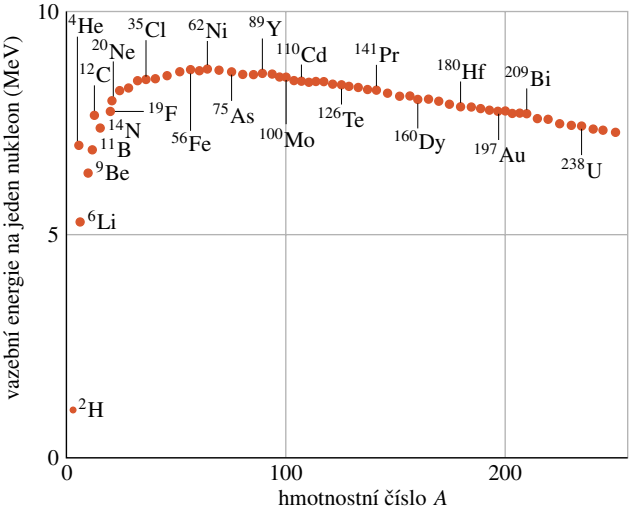
Při popisu jaderných reakcí je běžným a nepostradatelným nástrojem Einsteinův vztah mezi hmotností a energií (rov. (8.39)). Při popisu jaderných reakcí jej obvykle vyjadřujeme ve tvaru $Q = \Delta m c^2$ (srov. rov. (8.40)), kde Q je energie, která se uvolní nebo pohltí, když se změní hmotnost uzavřené soustavy interagujících částic o Δm. Znaménko je věcí dohody. Veličina Δm je obvykle definována tak, že při výpočtu vazební energie odečítáme hmotnost vázané soustavy od součtu hmotností oddělených částic; při výpočtu energie rozpadu naopak odečítáme součet hmotností

vzniklých produktů od hmotnosti před rozpadem vázané soustavy.

Energie odpovídající hmotnosti 1 u je 931,5 MeV. Můžeme tedy psát c^2 jako 931,5 MeV/u a užívat tuto hodnotu vždy, když potřebujeme najít energii (v milionech elektronvoltů) ekvivalentní libovolné hmotnosti (nebo rozdílu hmotností).

Jaderná vazební energie

Celkovou energii potřebnou k roztrhání jádra až na jednotlivé protony a neutrony můžeme vypočítat ze vztahu $Q = \Delta mc^2$; nazýváme ji **vazební energie jádra**. Vydělíme-li vazební energii jádra jeho hmotnostním číslem, dostaneme *vazební energii na jeden nukleon*. Na obr. 43.6 je zobrazena tato veličina v závislosti na hmotnostním čísle. „Povadnutí“ křivky vazebních energií na obou koncích, tj. pokles pro velmi nízká i velmi vysoká hmotností čísla, má neobyčejně významné praktické důsledky.



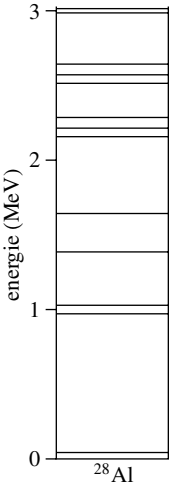
Obr. 43.6 Vazební energie na jeden nukleon pro některé typické nuklidy. Nuklid ^{62}Ni má největší hodnotu vazební energie na jeden nukleon ze všech stabilních nuklidů (8,794 60 ± ±0,000 03 MeV/nukleon). Všimněme si také, že α-částice (^{4}He) má výrazně větší vazební energii na jeden nukleon než její sousedé v periodické tabulce, a je tedy obzvlášť stabilní.

Pokles křivky vazebních energií pro velká hmotnostní čísla říká, že nukleony budou pevněji vázány ve dvou středně hmotných nuklidech než v jednom nuklidu s velkým hmotnostním číslem. Jinak řečeno, energie se může uvolnit při **jaderném štěpení** (rozdělení jednoho hmotného nuklidu na menší fragmenty).

Pokles křivky vazebních energií pro malá hmotnostní čísla naopak říká, že k uvolnění energie může dojít i při sloučení dvou nuklidů s malým hmotnostním číslem do jednoho středně hmotného. Tento proces, opak jaderného štěpení, se nazývá **jaderná fúze**. Probíhá uvnitř Slunce a dalších hvězd a také při termojaderném výbuchu. V současnosti se věnuje velká pozornost řízené termojaderné fúzi jako prakticky použitelnému zdroji energie.

Jaderné energiové hladiny

Hodnoty energie jádra jsou podobně jako hodnoty energie atomu kvantovány. To znamená, že se jádro může nacházet pouze v diskrétních kvantových stavech, které mají určitou energii. Na obr. 43.7 jsou zakresleny energiové hladiny pro ^{28}Al, který představuje typický málo hmotný nuklid. Energie na svislé ose je v milionech elektronvoltů (místo elektronvoltů v případě energiových hladin elektronů v atomu). Když jádra přecházejí z vyšší energiové hladiny na nižší, je emitovaný foton v oblasti γ-záření elektromagnetického spektra.



Obr. 43.7 Hladiny energie pro nuklid ^{28}Al. Hodnoty jsou získány z experimentů s jadernými reakcemi.

Jaderný spin a magnetismus

Mnoho nuklidů má vnitřní *jaderný moment hybnosti* neboli spin a s ním spojený vlastní, vnitřní *jaderný magnetický moment*. Ačkoli jsou jaderné momenty hybnosti velikostí zhruba srovnatelné s momenty hybnosti elektronů v atomu, jsou jaderné magnetické momenty mnohem menší (řádově 1 000krát) než typické atomové magnetické momenty.

Jaderná síla

Síla, která určuje pohyb elektronů v atomu, je známá elektromagnetická síla. Pro udržení jádra pohromadě však musí působit přitažlivá jaderná síla zcela jiného charakteru. Musí být dostatečně silná, aby překonala odpudivou elektrickou sílu působící mezi (kladně nabitými) protony, a zároveň musí udržet jak protony, tak neutrony v nepatrném objemu

jádra. Jaderná síla musí být také silou krátkého dosahu, protože její působení nesahá příliš daleko za hranice „povrchu“ jádra.

Podle současných představ nepatří jaderná síla, která váže protony a neutrony v jádře, mezi fundamentální fyzikální síly, ale jedná se až o druhotný (vedlejší) projev **silné síly**, která váže kvarky do neutronů a protonů (čl. 2.9 a 45.8). Je to velmi podobné vzniku přitažlivé van der Waalsovy síly mezi neutrálními molekulami, která je vlastně vedlejší projev Coulombovy elektrické síly svazující atomy v molekule.

PŘÍKLAD 43.2

Nuklidy si můžeme představit jako *jadernou hmotu* tvořenou směsí neutronů a protonů. Jaká je její hustota?

ŘEŠENÍ: Víme, že tato hustota je značně vysoká, protože téměř všechna hmotnost atomu je soustředěna v malém jádře. Objem jádra (předpokládejme, že je sférické) s hmotnostním číslem A a poloměrem R je

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{4}{3}\pi\left(R_0 A^{1/3}\right)^3 = \tfrac{4}{3}\pi R_0^3 A,$$

kde jsme užili rov. (43.3) při výpočtu třetího výrazu. Jádro obsahuje A nukleonů, takže číselná hustota nukleonů n (počet nukleonů na jednotkový objem) je rovna

$$n = \frac{A}{V} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} = \frac{3}{4\pi(1{,}2\,\mathrm{fm})^3} = 0{,}138\,\mathrm{fm}^{-3}.$$

V tomto vztahu se vykrátilo A. Můžeme proto uvažovat, že jaderná hmota má pro všechny nuklidy konstantní hustotu. Hmotnost nukleonu (neutronu *nebo* protonu) je přibližně $1{,}67{\cdot}10^{-27}$ kg. Hustota jaderné hmoty v jednotkách SI je potom

$$\varrho = (0{,}138\,\mathrm{fm}^{-3})(1{,}67{\cdot}10^{-27}\,\mathrm{kg})\left(10^{15}\,\frac{\mathrm{fm}}{\mathrm{m}}\right)^3 \doteq$$
$$\doteq 2{\cdot}10^{17}\,\mathrm{kg/m}^3. \qquad \text{(Odpověď)}$$

To je hustota zhruba $2{\cdot}10^{14}$krát větší než hustota vody.

PŘÍKLAD 43.3

(a) Kolik energie je třeba k oddělení všech nukleonů, které tvoří typické středně hmotné jádro ^{120}Sn?

ŘEŠENÍ: Energii spočteme ze vztahu $Q = \Delta mc^2$. Podle standardního postupu budeme uvažovat hmotnosti neutrálních atomů a ne hmotnosti holých jader. Podle tab. 43.1 má atom ^{120}Sn (jádro plus 50 elektronů) hmotnost 119,902 199 u. Tento atom rozdělíme na 50 vodíkových atomů (50 protonů, každý s jedním z 50 elektronů) a 70 neutronů. Každý vodíkový atom má hmotnost 1,007 825 u a každý neutron hmotnost 1,008 665 u. Celková hmotnost částic tvořících atom ^{120}Sn je tedy

$$m = 50 \cdot 1{,}007\,825\,\mathrm{u} + 70 \cdot 1{,}008\,665\,\mathrm{u} =$$
$$= 120{,}997\,80\,\mathrm{u}.$$

To je hodnota přesahující hmotnost ^{120}Sn o

$$\Delta m = 120{,}997\,80\,\mathrm{u} - 119{,}902\,199\,\mathrm{u} =$$
$$= 1{,}095\,601\,\mathrm{u} \doteq 1{,}096\,\mathrm{u}.$$

Vzhledem k tomu, že se hmotnosti 50 elektronů přičetly i odečetly, je tento výsledek pro rozdíl hmotnosti platný i pro případ, kdy je (holé) jádro ^{120}Sn rozděleno na 50 (holých) protonů a 70 neutronů. Rozdíl hmotností vyjádřený jako energie je

$$Q = \Delta mc^2 = (1{,}096\,\mathrm{u})(931{,}5\,\mathrm{MeV/u}) =$$
$$= 1\,021\,\mathrm{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je hodnota vazební energie na jeden nukleon v tomto nuklidu?

ŘEŠENÍ: Celková vazební energie Q je celková energie potřebná pro úplné rozebrání jádra. Vazební energie na jeden nukleon je pak

$$E_\mathrm{n} = \frac{Q}{A} = \frac{(1\,021\,\mathrm{MeV})}{(120)} = 8{,}51\,\mathrm{MeV}, \text{ (Odpověď)}$$

v souladu s hodnotou z tab. 43.1.

43.3 RADIOAKTIVNÍ ROZPAD

Jak je vidět z obr. 43.4, je většina známých nuklidů radioaktivní. Radioaktivní nuklid samovolně emituje nějakou částici a přeměňuje se na jiný nuklid, který zaujímá odlišné políčko na diagramu nuklidů.

Radioaktivní rozpad poskytl první důkaz toho, že zákony řídící subatomový svět mají statistický charakter. Vezměme například jako vzorek 1 mg kovového uranu. Ten obsahuje $2{,}5{\cdot}10^{18}$ atomů ^{238}U s velmi dlouhou dobou života. Jádra těchto atomů existovala bez rozpadu od doby, kdy vznikla — dlouho před utvářením naší sluneční soustavy. Během každé sekundy se v našem vzorku rozpadne pouhých 12 jader. Při rozpadu emituje jádro α-částice a přeměňuje se na ^{234}Th.

Neexistuje vůbec žádný způsob, jak předpovědět, jestli určité jádro ze vzorku bude mezi jedním z malého počtu jader, která se rozpadnou v následující sekundě. U všech jader je pravděpodobnost rozpadu stejná.

Statistickou podstatu procesu rozpadu můžeme vyjádřit tvrzením, že pro vzorek s N radioaktivními jádry je rychlost rozpadu $-\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ úměrná N:

$$-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N, \qquad (43.5)$$

kde **konstanta rozpadu** λ má charakteristickou hodnotu pro každý radionuklid. Její jednotkou v soustavě SI je převrácená sekunda (s^{-1}). Rov. (43.5) lze integrovat na tvar

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \text{(radioaktivní rozpad)}, \qquad (43.6)$$

kde N_0 je počet radioaktivních jader ve vzorku v čase $t = 0$ a N je počet zbylých jader v libovolném následujícím okamžiku t. Všimněme si, že třeba žárovky (pro příklad) se při zkouškách životnosti v žádném případě nechovají podle zákona exponenciálního rozpadu. Vezmeme-li vzorek 1 000 žárovek, očekáváme, že k jejich „rozpadu“ (přepálení vlákna) dojde u všech přibližně po stejné době. Rozpady radionuklidů se řídí zcela rozdílnými zákony.

Často nás více zajímá rychlost rozpadu $R = -\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ než samotné N. Derivováním rov. (43.6) dostaneme

$$R = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

neboli

$$R = R_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \text{(radioaktivní rozpad)}, \qquad (43.7)$$

což je jiná forma zákona radioaktivního rozpadu (rovnice (43.6)). Zde $R_0 = \lambda N_0$ je rychlost rozpadu v čase $t = 0$ a R je rychlost rozpadu v libovolném následujícím čase t.

Celková rychlost rozpadu R vzorku radionuklidu se nazývá **aktivita** vzorku. Jednotkou aktivity v soustavě SI je **becquerel**, podle objevitele radioaktivity Henriho Becquerela:

$$1 \text{ becquerel} = 1 \text{ Bq} = 1 \text{ rozpad za sekundu}.$$

Starší jednotkou, která se stále často používá, je **curie**:

$$1 \text{ curie} = 1 \text{ Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}.$$

Příklad na užití těchto jednotek je následující věta: „Aktivita vyhořelé palivové tyče číslo 5 658 dne 15. ledna 1997 činila $3{,}5 \cdot 10^{15}$ Bq $= 9{,}5 \cdot 10^{4}$ Ci.“ Zmíněného dne se tedy v palivové tyči rozpadlo každou sekundu $3{,}5 \cdot 10^{15}$ radioaktivních jader. Pro takto zavedenou míru aktivity vzorku není podstatné, jaké je složení radionuklidů, jaké jsou hodnoty rozpadových konstant ani jaké částice jsou při rozpadu emitovány.

Často je radioaktivní vzorek umístěn blízko detektoru, který nedokáže, ať už kvůli geometrii uspořádání nebo kvůli nedostatečné účinnosti detektoru, zaznamenat všechny rozpady ve vzorku. Údaje detektoru jsou v takovém případě úměrné aktivitě a jsou menší, než je skutečná aktivita vzorku. Výsledky měření se pak neuvádějí v becquerelech, ale prostě jako počet impulzů za jednotku času.

Velmi důležitou veličinou je **poločas rozpadu** τ definovaný jako doba, po které jak N, tak R poklesnou na polovinu své původní hodnoty. Když v rov. (43.7) položíme $R = R_0/2$ a dosadíme $t = \tau$, dostaneme

$$\tfrac{1}{2} R_0 = R_0 \mathrm{e}^{-\lambda \tau}.$$

Řešení pro τ dává vztah mezi poločasem rozpadu τ a konstantou rozpadu λ

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}. \qquad (43.8)$$

KONTROLA 2: Nuklid ^{131}I je radioaktivní s poločasem rozpadu 8,04 dne. V poledne 1. ledna byla aktivita daného vzorku 600 Bq. Na základě definice poločasu rozpadu určete bez počítání, zda aktivita vzorku bude 24. ledna o něco menší než 200 Bq, o něco větší než 200 Bq, o něco menší než 75 Bq, nebo o něco větší než 75 Bq.

PŘÍKLAD 43.4

Následující tabulka udává některá měření rychlosti rozpadu vzorku ^{128}I. Tento radionuklid se často používá v lékařství pro měření rychlosti usazování jodu ve štítné žláze.

ČAS (min)	R (IMPULZŮ/s)	ČAS (min)	R (IMPULZŮ/s)
4	392,2	132	10,9
36	161,4	164	4,56
68	65,5	196	1,86
100	26,8	218	1,00

Najděte rozpadovou konstantu a poločas rozpadu uvedeného radionuklidu.

ŘEŠENÍ: Jestliže vezmeme přirozený logaritmus obou stran rov. (43.7), máme

$$\ln R = \ln R_0 - \lambda t.$$

Vyneseme-li tedy $\ln R$ v závislosti na t, musíme dostat přímku se směrnicí $-\lambda$. To je provedeno na obr. 43.8, ze kterého

dostaneme

$$-\lambda = -\frac{(6{,}2 - 0)}{(225\,\text{min} - 0\,\text{min})}$$

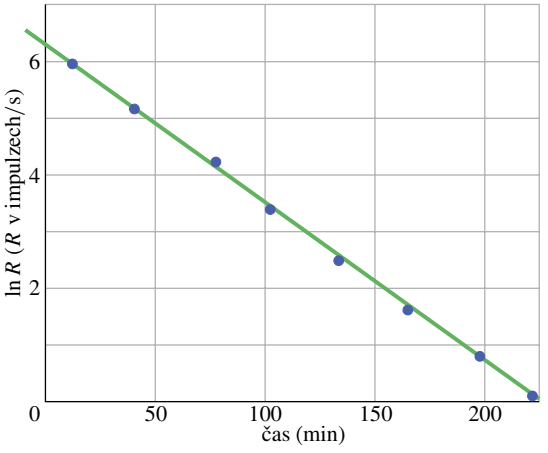
neboli

$$\lambda = 0{,}027\,5\,\text{min}^{-1} \doteq 1{,}7\,\text{h}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Poločas rozpadu najdeme snadno z rov. (43.8):

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0{,}002\,75\,\text{min}^{-1}} \doteq 25\,\text{min}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Aktivita daného vzorku ^{128}I poklesne na polovinu počáteční hodnoty za 25 min bez ohledu na to, jaká byla počáteční aktivita. Stejně tak poklesne za 25 min na polovinu počáteční hodnoty počet jader ^{128}I ve vzorku, bez ohledu na to, kolik jader ^{128}I vzorek na počátku obsahoval.



Obr. 43.8 Příklad 43.4. Semilogaritmické zobrazení dat z tabulky měření rozpadu vzorku ^{128}I. Poločas rozpadu uvedeného radionuklidu (25 min) lze získat ze směrnice přímky.

PŘÍKLAD 43.5

Vzorek KCl o hmotnosti 2,71 g je radioaktivní a rozpadá se s konstantní aktivitou 4 490 Bq. Ukazuje se, že se rozpadá draslík, přesněji jeho izotop ^{40}K, který tvoří 1,17 % normálního složení draslíku. Vypočtěte poločas rozpadu tohoto nuklidu.

ŘEŠENÍ: Poločas rozpadu určíme podle rov. (43.8). Poněvadž aktivita je téměř konstantní, musí být poločas rozpadu velmi dlouhý a nemůžeme pro jeho určení použít metodu z př. 43.4. Musíme proto dosadit hodnoty N a $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ do rov. (43.5).

V dodatku F najdeme pro molární hmotnost KCl hodnotu 74,6 g·mol^{-1}, takže počet draslíkových atomů ve vzorku je

$$N_{\text{K}} = \frac{(6{,}02{\cdot}10^{23}\,\text{mol}^{-1})(2{,}71\,\text{g})}{(74{,}6\,\text{g}{\cdot}\text{mol}^{-1})} = 2{,}187{\cdot}10^{22}.$$

Z tohoto počtu je počet atomů ^{40}K

$$N_{40} = (2{,}187{\cdot}10^{22})(0{,}011\,7) = 2{,}559{\cdot}10^{20}.$$

Z rov. (43.5) plyne

$$\lambda = -\frac{\mathrm{d}N/\mathrm{d}t}{N} = \frac{R_{40}}{N_{40}} = \frac{(4\,490\,\text{s}^{-1})}{(2{,}559{\cdot}10^{20})} = 1{,}755{\cdot}10^{-17}\,\text{s}^{-1}.$$

Podle rov. (43.8) je poločas rozpadu

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{(\ln 2)(1\,\text{y}/3{,}16{\cdot}10^{7}\,\text{s})}{(1{,}755{\cdot}10^{-17}\,\text{s}^{-1})} =$$
$$= 1{,}25{\cdot}10^{9}\,\text{y}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

To je srovnatelné se stářím vesmíru! Není divu, že poločas rozpadu tohoto radionuklidu nemůžeme měřit z poklesu jeho aktivity. Je zajímavé, že i draslík v našem těle obsahuje obvyklý podíl radionuklidu; jsme tedy všichni trochu radioaktivní.

43.4 ROZPAD α

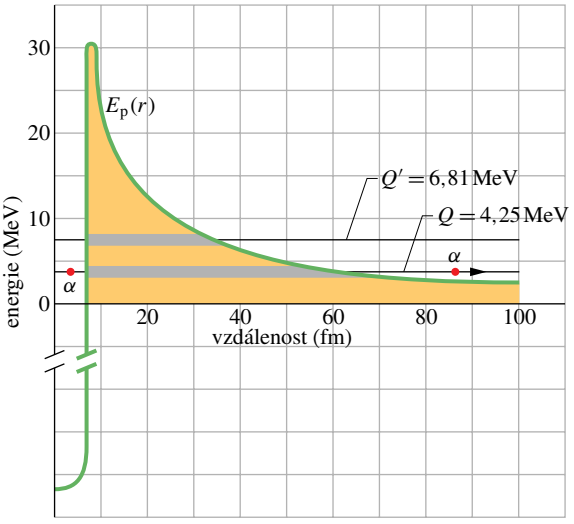
Radionuklid ^{238}U se rozpadá tak, že emituje α-částici (jádro atomu helia) podle vzorce

$$^{238}\text{U} \rightarrow {}^{234}\text{Th} + {}^{4}\text{He}, \quad Q = 4{,}25\,\text{MeV}. \qquad (43.9)$$

Th je symbol pro prvek thorium $Z = 90$; jeho poločas rozpadu je $4{,}47{\cdot}10^{9}$ y. Q je energie reakce (v tomto případě rozpadu), tedy množství energie uvolněné při jednom rozpadu. Můžeme se oprávněně ptát: uvolní-li se při každém rozpadu energie, proč se jádra ^{238}U nerozpadla již krátce potom, co vznikla? Proč tak dlouho vyčkávají? Odpověď najdeme až při hlubším pohledu na mechanismus α-rozpadu.

Zvolíme si model, ve kterém se α-částice vytvoří uvnitř jádra již předtím, než z jádra unikne. Na obr. 43.9 je znázorněn přibližný průběh potenciální energie $E_{\text{p}}(r)$ soustavy α-částice a zbytkového jádra ^{234}Th v závislosti na jejich vzdálenosti r. Tento průběh je dán součtem (1) potenciálové jámy dané (přitažlivou) silnou jadernou silou působící uvnitř jádra a (2) Coulombova potenciálu odpudivé elektrické síly, která působí mezi dvěma částicemi před rozpadem i po něm.

Vodorovná černá přímka označená $Q = 4{,}25\,\text{MeV}$ ukazuje energii rozpadu. Jestliže předpokládáme, že tato energie představuje celkovou energii α-částice při rozpadu, potom část křivky $E_{\text{p}}(r)$ nad touto přímkou představuje potenciálovou bariéru, podobně jako na obr. 39.13. Přes tuto bariéru nelze přelézt. Kdyby se α-částice vyskytla v oblasti



Obr. 43.9 Potenciální energie při emisi α-částice jádrem ^{238}U. Vodorovná černá přímka označená $Q = 4{,}25$ MeV ukazuje energii rozpadu. Tlustá šedá část této přímky ukazuje vzdálenosti r, které jsou pro α-částici klasicky zakázané. Částice α je znázorněna jako bod, jak uvnitř potenciálové jámy (nalevo), tak vně (napravo) poté, co protunelovala. Vodorovná černá přímka označená $Q' = 6{,}81$ MeV ukazuje energii rozpadu pro α-rozpad ^{228}U. (Oba izotopy mají stejnou křivku potenciální energie, protože mají stejný náboj jádra.)

bariéry, byla by její potenciální energie E_p větší než celková energie E. To by znamenalo, že její kinetická energie E_k (která je rovna $E - E_p$) by byla záporná. Podle klasické fyziky je tedy oblast bariéry pro částici nedostupná.

Nyní už vidíme, proč nedochází k okamžité emisi α-částice z jádra ^{238}U! Jádro je obklopeno výraznou potenciálovou bariérou, která zaujímá — uvažováno ve třech rozměrech — objem mezi dvěma kulovými slupkami (o poloměrech 8 fm a 60 fm). Tento argument je tak přesvědčivý, že nyní obrátíme otázku a budeme se ptát: Jak je možné, že α-částice, trvale uvězněná uvnitř jádra ^{238}U potenciálovou bariérou, *alespoň někdy* toto jádro opustí? Odpověď známe z čl. 39.9, odkud víme, že existuje konečná pravděpodobnost tunelování částice potenciálovou bariérou, kterou by klasicky překonat nešlo. Rozpad α je tedy ve skutečnosti výsledkem tunelování potenciálovou bariérou.

Poněvadž poločas rozpadu ^{238}U je velmi dlouhý, nemůže být potenciálová bariéra příliš „prostupná“. Částice α, která poskakuje sem a tam uvnitř jádra, musí narazit na vnitřní stěnu bariéry zhruba 10^{38}krát, než se jí podaří uniknout tunelováním. Toto číslo odpovídá 10^{21} nárazům za sekundu po dobu $4{\cdot}10^9$ let. My ovšem čekáme na vnější straně a můžeme zaznamenat jen ty α-částice, kterým se *podařilo* uniknout.

Naše vysvětlení mechanismu α-rozpadu můžeme ověřit na dalších případech. Abychom uvažovali výrazně odlišný případ, vezměme α-rozpad jiného izotopu uranu ^{228}U, který má energii reakce $Q' = 6{,}81$ MeV, zhruba o 60 % vyšší než ^{238}U. (Hodnota Q' je také vyznačena jako vodorovná černá přímka na obr. 43.9). Vzpomeňme si na výsledky z čl. 39.9, které ukazují velmi silnou závislost koeficientu průchodu potenciálovou bariérou na celkové energii pronikající částice. Očekáváme tedy, že α-rozpad bude mnohem snadnější pro tento nuklid než pro ^{238}U. A skutečně tomu tak je. Podle tab. 43.2 je jeho poločas rozpadu pouhých 9,1 minut! Vzrůst hodnoty Q na 1,6 násobek vede k poklesu poločasu rozpadu (tj. účinnosti bariéry) $3{\cdot}10^{14}$krát. To už je opravdu silná závislost.

Tabulka 43.2 **Srovnání dvou zdrojů α-částic**

RADIONUKLID	Q	POLOČAS ROZPADU
^{238}U	4,25 MeV	$4{,}5{\cdot}10^9$ y
^{228}U	6,81 MeV	9,1 min

PŘÍKLAD 43.6

Máme dány následující hodnoty hmotností atomů:

^{238}U	238,050 79 u	^{4}He	4,002 60 u
^{234}Th	234,043 63 u	^{1}H	1,007 83 u
^{237}Pa	237,051 21 u		

Symbol Pa označuje prvek protaktinium, $Z = 91$.

(a) Spočtěte energii uvolněnou při α-rozpadu ^{238}U. Rozpadová reakce je

$$^{238}\text{U} \rightarrow {}^{234}\text{Th} + {}^{4}\text{He}.$$

Povšimněme si, jak se v tomto vztahu projevuje zachování jaderného náboje: atomová čísla thoria (90) a helia (2) dávají v součtu atomové číslo uranu (92). Zachovává se i počet nukleonů: $238 = 234 + 4$.

ŘEŠENÍ: Celková hmotnost atomů vzniklých po rozpadu (234,043 63 u + 4,002 60 u) je menší než hmotnost atomu uranu ^{238}U o $\Delta m = 0{,}004\,56$ u. Energiový ekvivalent hmotnostního rozdílu je

$$Q = \Delta m c^2 = (0{,}004\,56\text{ u})(931{,}5\text{ MeV/u}) = \\ = 4{,}25\text{ MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato energie rozpadu se projeví jako kinetická energie vyletující α-částice a odraženého atomu ^{234}Th.

Ještě jednou uvádíme, že pracujeme podle zavedených zvyklostí s hmotnostmi neutrálních atomů a nikoli s hmotnostmi holých jader. Při výpočtu Δm se hmotnosti elektronů vyruší.

(b) Ukažte, že ^{238}U se nemůže spontánně rozpadnout tak, aby emitoval proton.

ŘEŠENÍ: Kdyby k rozpadu s emisí protonu mohlo dojít, měl by tvar

$$^{238}\mathrm{U} \rightarrow {}^{237}\mathrm{Pa} + {}^{1}\mathrm{H}.$$

(Můžeme se přesvědčit, že se i v této reakci zachovává jak jaderný náboj, tak počet nukleonů.) Hmotnost obou atomů po rozpadu (237,051 21 u + 1,007 83 u) je ale větší než hmotnost atomu uranu ^{238}U, $\Delta m = -0{,}008\,25$ u a energie rozpadu je $Q = -7{,}68$ MeV. Znaménko minus ukazuje, že je potřeba dodat jádru ^{238}U energii 7,68 MeV k tomu, aby mohlo emitovat protony; určitě k tomu nedojde spontánně.

43.5 ROZPAD β

Říkáme, že jádro prodělává spontánní **β-rozpad**, když emituje elektron nebo pozitron (pozitron je antičástice k elektronu; má tedy stejnou hmotnost, ale kladný náboj). Podobně jako α-rozpad probíraný v předchozím článku, je i β-rozpad spontánní proces charakterizovaný energií rozpadu a poločasem rozpadu. Stejně jako α-rozpad je i β-rozpad statistický jev s časovým průběhem popsaným rov. (43.6) a (43.7). Jako dva příklady vezměme

$$^{32}\mathrm{P} \rightarrow {}^{32}\mathrm{S} + \mathrm{e}^{-} + \nu \quad (\tau = 14{,}3\,\mathrm{d}) \qquad (43.10)$$

a

$$^{64}\mathrm{Cu} \rightarrow {}^{64}\mathrm{Ni} + \mathrm{e}^{+} + \nu \quad (\tau = 12{,}7\,\mathrm{h}). \qquad (43.11)$$

Symbol ν představuje neutrino, neutrální částici s téměř (pokud ne přesně) nulovou hmotností, kterou během rozpadu emituje jádro zároveň s elektronem nebo pozitronem. Neutrina interagují s hmotou jen velmi slabě a z tohoto důvodu se dají neobyčejně obtížně zachytit, takže zůstávala po dlouhou dobu nepovšimnuta.*

V obou popsaných reakcích se zachovává náboj a nukleonové číslo. Například při rozpadu podle rov. (43.10) můžeme zachování náboje zapsat jako

$$(+15e) = (+16e) + (-1e) + (0e)$$

a zachování počtu nukleonů jako

$$(32) = (32) + (0) + (0),$$

kde jsme vzali v úvahu, že ani elektron, ani neutrino nepatří mezi nukleony a že neutrino má nulový elektrický náboj.

* Mezi jevy β-rozpadu patří také záchyt elektronu, při kterém se při rozpadu jádra pohltí jeden z elektronů jeho atomu a emituje se neutrino. Tímto případem se nebudeme zabývat. Poznamenejme ještě, že neutrální částice emitovaná při rozpadu podle rov. (43.10) je ve skutečnosti antineutrino, tohoto rozdílu si však v této úvodní části nebudeme všímat.

Může se zdát podivné, že jádro emituje elektrony, pozitrony a neutrina, poněvadž jsme tvrdili, že se jádro skládá pouze z neutronů a protonů. Viděli jsme však již dříve, že atomy emitují fotony, a určitě neuvažujeme o tom, že atomy „obsahují" fotony. Fotony prostě vznikají v průběhu procesu emise.

Podobně je to s elektrony, pozitrony a neutriny emitovanými jádry při β-rozpadu: vznikají v průběhu emise. Uvnitř jádra se neutron změní na proton podle vztahu

$$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^{-} + \nu, \qquad (43.12)$$

nebo proton na neutron podle vztahu

$$\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \mathrm{e}^{+} + \nu. \qquad (43.13)$$

Oba typy β-rozpadu podávají důkaz toho, že — jak už jsme se zmínili — neutrony a protony nejsou skutečné fundamentální částice. Všimněme si (v rov. (43.10) a (43.11)), že se při β-rozpadu nemění hmotnostní číslo A nuklidu; pouze jeden z nukleonů jádra změní svůj charakter podle rov. (43.12), nebo rov. (43.13), ale celkový počet nukleonů zůstává stejný.

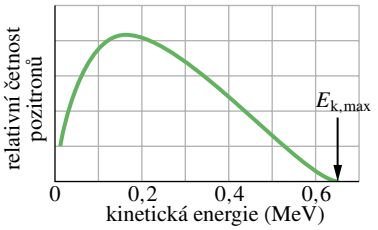
Při každém rozpadu α i β se uvolní množství energie charakteristické pro danou reakci. Při α-rozpadu daného radionuklidu má každá emitovaná α-částice přesně definovanou kinetickou energii. (Někdy může radionuklid emitovat několik skupin α-částic, pak má každá skupina přesně definovanou kinetickou energii.) Při β-rozpadu podle rov. (43.12), která popisuje rozpad s emisí elektronu, je však energie rozpadu Q rozdělena mezi elektron a neutrino, a to v různých poměrech. Někdy získá téměř všechnu energii elektron, jindy neutrino. Vždy však dává součet energie elektronu a neutrina stejnou hodnotu Q. Takové sdílení energie, kdy součet dává vždy stejnou hodnotu, nastává i v případě β-rozpadu podle rov. (43.13), která popisuje rozpad s emisí pozitronu.

Při β-rozpadu může tedy energie emitovaného elektronu nebo pozitronu nabývat hodnot od nuly do nějaké maximální hodnoty $E_{\mathrm{k,max}}$. Na obr. 43.10 je rozdělení energií pozitronů emitovaných při β-rozpadu ^{64}Cu (rov. (43.11)). Maximální hodnota energie pozitronů $E_{\mathrm{k,max}}$ musí být rovna energii rozpadu Q, když neutrino neodnáší žádnou energii a pozitron odnáší celou energii $E_{\mathrm{k,max}}$. Platí tedy

$$Q = E_{\mathrm{k,max}}. \qquad (43.14)$$

Neutrino

Jako první předpokládal existenci neutrina Wolfgang Pauli v roce 1930. Jeho neutrinová hypotéza nejen umožnila



Obr. 43.10 Rozdělení kinetických energií pozitronů emitovaných při β-rozpadu ^{64}Cu. Maximální hodnota kinetické energie v tomto rozdělení ($E_{k,max}$) je 0,653 MeV. V obecném případě rozpadu jádra ^{64}Cu je tato energie rozdělena mezi pozitron a neutrino. Nejpravděpodobnější energie emitovaného pozitronu je 0,15 MeV.

porozumět energiovému rozdělení elektronů nebo pozitronů při β-rozpadu, ale vyřešila také jinou dřívější záhadu β-rozpadu, totiž „chybějící“ moment hybnosti.

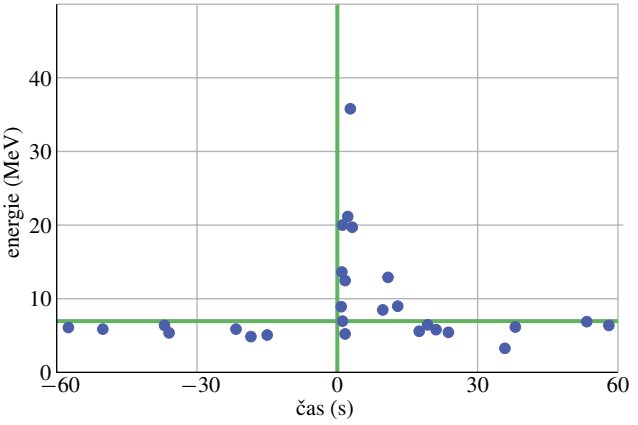
Neutrino je vskutku nepolapitelná částice; vypočítaná střední volná dráha neutrina s vysokou energií je několik tisíc světelných let. Přitom neutrina zbylá po Velkém třesku, který asi označuje stvoření vesmíru, jsou nejpočetnější částice ve fyzice. Miliardy jich procházejí každou sekundu našimi těly, aniž by zanechaly jedinou stopu.

Bez ohledu na jejich nepolapitelnost byla nakonec neutrina v laboratořích detegována. Poprvé to dokázali v roce 1953 F. Reines a C. L. Cowan se svazkem neutrin vytvořených v jaderném reaktoru o velkém výkonu. (V roce 1995 obdržel za tuto práci Reines Nobelovu cenu, Cowan v té době již nebyl naživu.) Přes velké obtíže s detekcí je dnes experimentální neutrinová fyzika značně rozvinutá oblast experimentální fyziky, s nadšenými badateli v několika laboratořích po celém světě.

Slunce emituje neutrina velmi hojně z jaderné pece ve svém nitru, a to i v noci, kdy k nám přicházejí tito poslové ze středu Slunce zdola, neboť Země je pro ně téměř zcela průhledná. V únoru 1987 k nám dorazilo světlo z hvězdného výbuchu ve Velkém Magellanově mračnu (blízká galaxie) po cestě trvající 170 000 let. Při výbuchu vzniklo také obrovské množství neutrin a asi 10 z nich bylo zachyceno velmi citlivým detektorem v Japonsku; záznam tohoto průchodu neutrin je na obr. 43.11.

Radioaktivita a nuklidový diagram

Zkoumání rozpadu α i β nám umožňuje získat nový pohled na nuklidový diagram z obr. 43.4. Přidejme k diagramu třetí rozměr, a nanášejme na osu kolmou k rovině NZ **hmotnostní nadbytek** příslušného nuklidu. Hmotnostní nadbytek nuklidu je (nehledě na název) energie, která je přibližně rovna *celkové* vazební energii nuklidu. Je definován jako $(m - A)c^2$, kde m je atomová hmotnost nuklidu a A je jeho



Obr. 43.11 Sprška neutrin ze supernovy SN 1987A, zaznamenaná v (relativním) čase 0, výrazně činí nad obvyklými případy detekce neutrin. (Pro neutrina je 10 už „pořádná sprška“!) Částice byly detegovány velmi komplikovaným detektorem v hlubokém podzemním dole v Japonsku. Supernova byla viditelná pouze na jižní polokouli, takže neutrina musela před vstupem do detektoru projít napříč Zemí (ta je pro ně jen nepatrnou překážkou).

hmotnostní číslo, obě veličiny uvádíme v jednotkách atomové hmotnosti u, a c^2 vyjádříme ve tvaru 931,5 MeV/u.

Takto vytvořená plocha vytváří grafickou představu o stabilitě jádra. Jak je vidět na obr. 43.12 (pro málo hmotné nuklidy), tato plocha popisuje „údolí nuklidů“, kde pás stability z obr. 43.4 běží po jeho dnu. Nuklidy na stěně bohaté na protony se do údolí rozpadají emisí pozitronů, nuklidy na stěně bohaté na neutrony tak činí emisí elektronů.

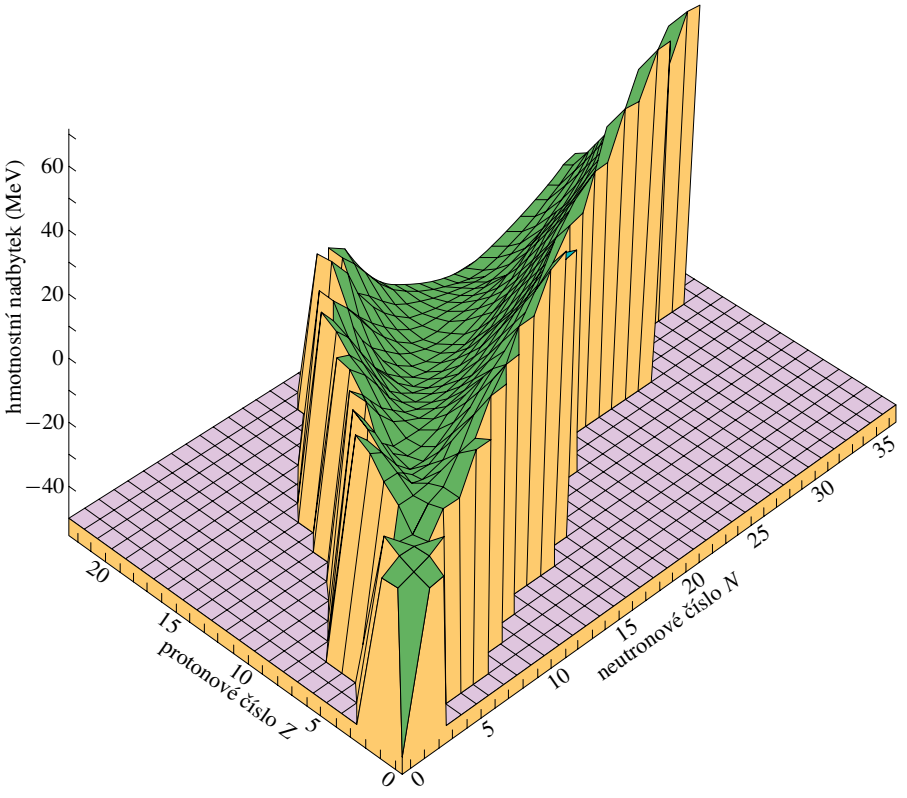
KONTROLA 3: ^{238}U se rozpadá na ^{234}Th emisí α-částice. Pak následuje celý řetězec radioaktivních rozpadů, a to jak α, tak β. Nakonec řada dojde ke stabilnímu nuklidu a potom již k žádnému radioaktivnímu rozpadu nemůže dojít. Který z následujících stabilních nuklidů je na konci rozpadové řady ^{238}U: ^{206}Pb, ^{207}Pb, ^{208}Pb, nebo ^{209}Pb? (*Tip*: Řešení najdete, uvážíte-li, o kolik se při rozpadu α i β mění hmotnostní číslo A.)

PŘÍKLAD 43.7

Spočtěte energii Q při β-rozpadu ^{32}P, který je zapsán v rov. (43.10). Potřebné atomové hmotnosti jsou 31,973 91 u pro ^{32}P a 31,972 07 u pro ^{32}S.

ŘEŠENÍ: Poněvadž je při rozpadu emitován elektron, musíme pečlivě rozlišovat jaderné a atomové hmotnosti. Označme tučným písmem $\boldsymbol{m}_P$ a $\boldsymbol{m}_S$ jaderné hmotnosti ^{32}P a ^{32}S a kurzívou m_P a m_S příslušné atomové hmotnosti. Energie rozpadu Q je Δmc^2, kde pro rozpad podle rov. (43.10):

$$\Delta m = \boldsymbol{m}_P - (\boldsymbol{m}_S + m_e),$$



Obr. 43.12 Část údolí nuklidů zahrnující pouze málo hmotné nuklidy. Deuterium, tritium a helium leží v nejbližším rohu grafu, helium je z nich nejvyšší. Údolí se táhne směrem od nás až ke konci grafu kolem hodnot $Z = 22$ a $N = 35$. Nuklidy s velkou hodnotou A, které by v grafu ležely daleko mimo údolí, se mohou přemístit do údolí opakovanými α-rozpady nebo štěpením (rozdělením nuklidu).

kde m_e je hmotnost elektronu. Jestliže na pravé straně přičteme a odečteme $15m_e$, dostaneme

$$\Delta m = (\boldsymbol{m}_P + 15m_e) - (\boldsymbol{m}_S + 16m_e).$$

Veličiny v závorkách jsou atomové hmotnosti ^{32}P a ^{32}S, takže

$$\Delta m = m_P - m_S.$$

Vidíme tedy, že odečítáme-li atomové hmotnosti, bereme automaticky v úvahu hmotnost emitovaného elektronu. (Tento postup tedy neplatí při emisi pozitronu.)

Energie uvolněná při β-rozpadu ^{32}P je tedy

$$\begin{aligned} Q = \Delta mc^2 &= \\ &= (31{,}973\,91\text{ u} - 31{,}972\,07\text{ u})(931{,}5\text{ MeV/u}) = \\ &= 1{,}71\text{ MeV}. \end{aligned}$$

(Odpověď)

Vypočtená hodnota Q by podle rov. (43.14) měla být rovna maximální energii emitovaných elektronů $E_{k,max}$, což je skutečně experimentálně potvrzeno. Ačkoli je při každém rozpadu ^{32}P uvolněna energie 1,71 MeV, elektrony odnášejí jen její část. Zbývající část získávají neutrina a nepozorovatelně ji odnášejí pryč z laboratoře.

43.6 RADIOAKTIVNÍ DATOVÁNÍ

Známe-li poločas rozpadu určitého radionuklidu, můžeme v principu použít takový rozpad jako hodiny pro měření časových intervalů. Rozpad nuklidu s velmi dlouhým poločasem rozpadu může sloužit pro měření stáří hornin, tedy doby, která uplynula od jejich vzniku. Měření hornin ze Země, Měsíce a také meteoritů dávají konsistentně maximální hodnotu stáří těchto těles zhruba $4{,}5\cdot10^9$ y.

Radionuklid draslíku ^{40}K se například rozpadá na stabilní izotop vzácného plynu argonu ^{40}Ar s poločasem rozpadu $1{,}25\cdot10^9$ y. Měřením poměru ^{40}K a ^{40}Ar v dané hornině je možno vypočítat její stáří. Ověřit výsledek lze pak užitím jiného dlouho žijícího nuklidu, například uranu ^{235}U, který se po řadě mezistavů přemění na stabilní izotop olova ^{207}Pb.

Pro měření kratších časových intervalů, zajímavých třeba z historických důvodů, je neocenitelný nástroj radiouhlíkové datování. Radionuklid ^{14}C (s $\tau = 5\,730$ y) je s konstantní rychlostí produkován v horních vrstvách atmosféry při ostřelování atmosférického dusíku částicemi kosmického záření. Tento radiouhlík se mísí s uhlíkem normálně přítomným v atmosféře (jako CO_2), takže se vyskytuje jeden atom ^{14}C na každých 10^{13} atomů běžného stabil-

ního ^{12}C. Při biologických procesech, jako je fotosyntéza nebo dýchání, dochází k náhodné výměně atomů atmosférického uhlíku s atomy uhlíku v živých organismech, jako je brokolice, houby, tučňáci nebo lidé. Po jisté době je dosaženo rovnováhy, při které uhlíkové atomy každého žijícího organismu obsahují jistou malou část radioaktivního nuklidu ^{14}C.

Výměna uhlíkových atomů trvá, jen dokud je organismus naživu. Po smrti se výměna s atmosférou zastaví a radiouhlík uvězněný v organismu se z něj vytrácí s poločasem 5 730 let. Měřením obsahu radiouhlíku v jednotce hmotnosti organické látky lze určit dobu, která uplynula od smrti organismu. Dřevěné uhlí z dávných ohnišť, Kumránské svitky a mnoho dalších prehistorických artefaktů bylo datováno tímto způsobem.

PŘÍKLAD 43.8

Měření vzorku horniny z Měsíce na hmotnostním spektrometru ukázala, že poměr počtu přítomných (stabilních) atomů argonu ^{40}Ar k počtu (radioaktivních) atomů draslíku ^{40}K je 10,3. Předpokládejme, že všechny argonové atomy vznikly rozpadem draslíku s poločasem rozpadu $\tau = 1{,}25{\cdot}10^9$ y. Jaké je stáří horniny?

ŘEŠENÍ: Jestliže hornina obsahovala N_0 atomů draslíku v čase, kdy se tvořila tuhnutím z roztavené látky, bude v čase analýzy počet draslíkových atomů dán rov. (43.6)

$$N_K = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{43.15}$$

kde t je stáří horniny. Každý rozpadlý atom draslíku vytvořil atom argonu. V čase analýzy je tedy počet argonových atomů

$$N_{Ar} = N_0 - N_K. \tag{43.16}$$

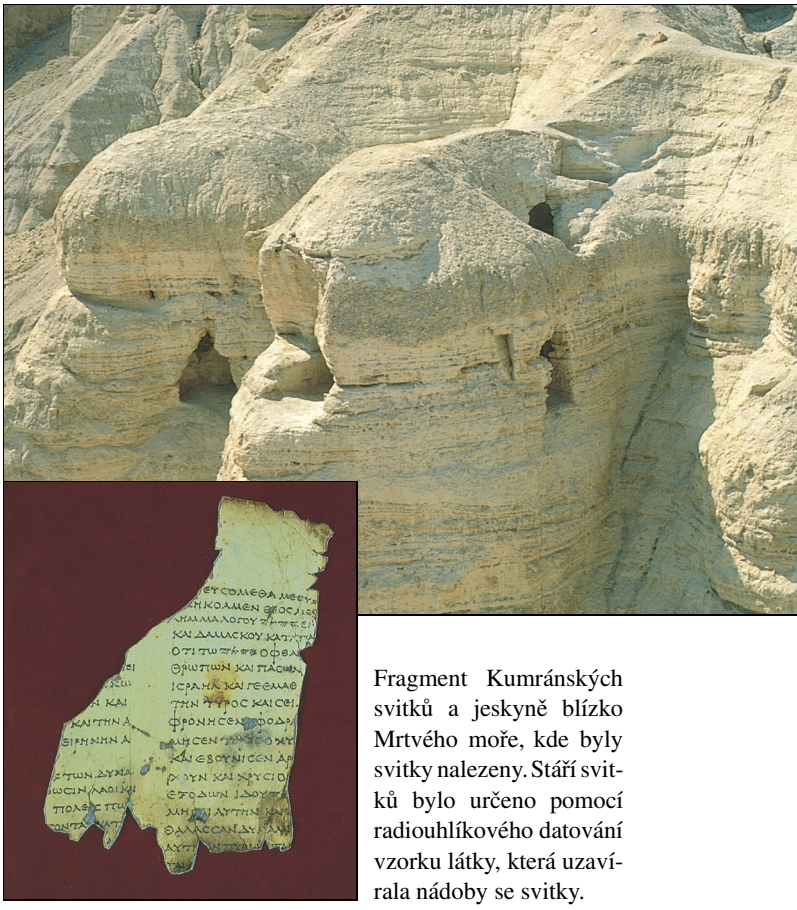
Hodnotu N_0 nemůžeme měřit; vyloučíme ji proto z rovnic (43.15) a (43.16). Po úpravách tak dostaneme rovnici

$$\lambda t = \ln\left(1 + \frac{N_{Ar}}{N_K}\right), \tag{43.17}$$

ve které *je možné* poměr N_{Ar}/N_K měřit. Vyjádříme t z rov. (43.17) a použijeme rov. (43.8) pro nahrazení λ. Máme tedy

$$t = \frac{\tau \ln(1 + N_{Ar}/N_K)}{\ln 2} = \frac{(1{,}25{\cdot}10^9\ \text{y})[\ln(1 + 10{,}3)]}{\ln 2} = 4{,}37{\cdot}10^9\ \text{y}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

U měsíčních nebo pozemských vzorků bylo zjištěno i menší stáří, ale nikdy podstatně větší. Podle toho můžeme říci, že sluneční soustava je stará asi 4 miliardy let.



Fragment Kumránských svitků a jeskyně blízko Mrtvého moře, kde byly svitky nalezeny. Stáří svitků bylo určeno pomocí radiouhlíkového datování vzorku látky, která uzavírala nádoby se svitky.

43.7 MĚŘENÍ RADIAČNÍ DÁVKY

Působení různých druhů záření, jako je γ-záření, elektrony nebo α-částice, na živé tkáně (zejména na naše vlastní) je věcí veřejného zájmu. Zmíněné druhy záření můžeme nalézt i v přírodě: přicházejí jako kosmické záření nebo vznikají rozpadem radioaktivních prvků v zemské kůře. K tomu přispívá i záření vznikající lidskou činností, jako je užití rentgenového záření nebo radionuklidů v medicíně nebo průmyslu. Odstraňování radioaktivního odpadu a stanovení pravděpodobnosti nehod při provozu jaderných zařízení je předmětem značné pozornosti v národním i mezinárodním měřítku.

Naším úkolem zde nebude studovat různé zdroje záření, ale prostě jen popsat jednotky, kterými můžeme vyjádřit vlastnosti a účinky záření. Již dříve jsme zmínili *aktivitu* radioaktivního zdroje. Ještě zbývají dvě důležité veličiny.

1. ***Pohlcená dávka.*** Je to míra radiační dávky (energie na jednotku hmotnosti) skutečně pohlcené určitým objektem, například pacientovou rukou nebo hrudníkem. Jednotkou v soustavě SI je **gray** (Gy). Stále se však užívá i starší jednotky **rad** (radiation absorbed dose — pohlcená radiační dávka). Jednotky jsou definovány jako

$$1\ \text{Gy} = 1\ \text{J/kg} = 100\ \text{rad}.$$

Typický výrok pak vypadá takto: „Celotělová, krátkodobá

dávka gama záření 3 Gy (300 rad) zapříčiní smrt 50 % populace, která jí byla vystavena.“ Pro jisté uklidnění uveďme, že dnešní střední roční absorbovaná dávka záření ze zdrojů přírodních i vytvořených lidskou činností je asi 2 mGy = 0,2 rad.

2. ***Ekvivalentní dávka.*** Ačkoli různé druhy záření (například záření gama a neutrony) mohou tělu dodat stejné množství energie, nemusí mít stejný biologický účinek. Ekvivalentní dávka nám umožňuje určit biologický účinek záření tak, že vynásobíme pohlcenou dávku (udanou v jednotkách gray nebo rad) číselným **RBE** faktorem relativní biologické účinnosti (relative biological effectiveness). Pro rentgenové záření a elektrony je RBE = 1, pro pomalé neutrony RBE = 5, pro α-částice RBE = 10 atd. Běžné osobní měřicí pomůcky registrují právě ekvivalentní dávku.

Jednotkou pro ekvivalentní dávku v soustavě SI je **sievert** (Sv). Užívá se i starší jednotky **rem**. Platí

$$1\,\mathrm{Sv} = 100\,\mathrm{rem}.$$

Příklad správného použití těchto jednotek je ve větě: „Národní úřad pro ochranu před zářením doporučuje, aby nikdo vystavený působení záření (kromě osob pracujících se zářením) neobdržel v žádném roce ekvivalentní dávku větší než 5 mSv = 0,5 rem.“ To se týká všech druhů záření: přirozeně musíme pro každý druh záření použít příslušný RBE faktor.

PŘÍKLAD 43.9

Uvedli jsme, že dávka γ-záření 3 Gy pohlcená v těle je smrtelná pro polovinu zasažených osob. Jestliže by byla energie obsažená v této dávce pohlcena ve formě tepla, o kolik by se zvýšila teplota těla?

ŘEŠENÍ: Pohlcená dávka 3 Gy odpovídá energii na jednotku hmotnosti $3\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$. Předpokládejme, že měrná tepelná kapacita c lidského těla je stejná jako vody, tj. $c = 4\,180\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. Z rov. (19.15) spočteme přírůstek teploty

$$\Delta T = \frac{Q/m}{c} = \frac{(3\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}})}{(4\,180\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}})} = 7{,}2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{K} \doteq 700\,\mu\mathrm{K}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Je zřejmé, že poškození způsobené ionizujícím zářením nemá nic společného s tepelným ohřevem. Škodlivé účinky jsou důsledkem toho, že záření poruší molekulární vazby a naruší tak normální funkci tkání, kterými bylo pohlceno.

43.8 JADERNÉ MODELY

Jádra jsou složitější než atomy. Pro atomy má základní síla (Coulombova síla) velmi jednoduchý tvar a v atomu pro ni existuje přirozený střed, nabité jádro. Pro jádra není popis silového působení jednoduchý a nelze jej ani v úplnosti explicitně vypsat. Navíc v jádře, které je směsicí protonů a neutronů, nemá síla žádný přirozený středový bod, který by usnadňoval výpočty.

Nemáme-li k dispozici úplnou jadernou *teorii*, obracíme se k budování jaderných *modelů*. Jaderný model je jednoduše způsob pohledu na jádro, který nám dovoluje popsat pokud možno nejširší třídu vlastností jader. Užitečnost modelu testujeme podle schopnosti dávat předpovědi, které můžeme experimentálně ověřit v laboratoři.

Dva jaderné modely se ukázaly jako velmi užitečné. Ačkoli jsou založeny na předpokladech, které se naprosto vzájemně vylučují, každý z nich velmi dobře popisuje určitou třídu jaderných vlastností. Nejdřív popíšeme každý model zvlášť, a potom ukážeme, jak je můžeme kombinovat tak, abychom získali jediný nerozporný popis atomového jádra.

Kolektivní model

V *kolektivním modelu*, který zformuloval Niels Bohr, se nukleony pohybují chaoticky a silně spolu interagují, podobně jako molekuly v kapce tekutiny. Každý nukleon se uvnitř jádra velmi často sráží s dalšími nukleony; jeho střední volná dráha je podstatně kratší než činí průměr jádra. Toto stálé „poskakování“ nám připomíná tepelný pohyb molekul v kapce tekutiny.

Kolektivní model nám umožňuje dát do souvislosti řadu poznatků o jaderných hmotnostech a vazebních energiích; pomůže nám také vysvětlit (jak uvidíme později) jaderné štěpení. Umožňuje nám také pochopit velkou třídu jaderných reakcí.

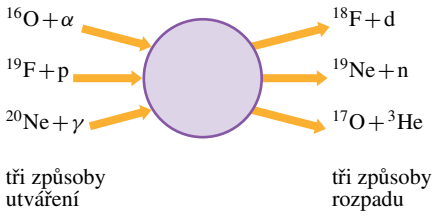
Vezměme například obecnou reakci typu

$$X + a \rightarrow C \rightarrow Y + b. \qquad (43.18)$$

Reakce může představovat jev, kdy částice a vytvoří s jádrem terče X **složené jádro** C, kterému přitom předá jisté množství energie. Částice a ostřelujícího svazku, například neutron, je naráz polapena náhodně se pohybujícími nukleony uvnitř jádra. Rychle ztratí svou identitu — obrazně řečeno — a jí přinesená excitační energie se tedy rychle rozloží mezi všechny nukleony jádra C.

Kvazistabilní stav označený v rov. (43.18) jako C se může udržet po dobu až 10^{-16} s, než se rozpadne na Y a b. V jaderném měřítku je to doba velmi dlouhá, neboť je

například milionkrát delší než doba, kterou potřebuje nukleon s energií několika milionů elektronvoltů k cestě napříč jádrem. V kolektivním modelu jádra předpokládáme, že vznik jádra a jeho případný rozpad jsou zcela nezávislé jevy. V době, kdy se jádro rozpadá, již „zapomnělo“ na to, jak bylo vytvořeno. Způsob, kterým se jádro rozpadá, nezávisí na způsobu, jak se utvářelo. Jako příklad jsou na obr. 43.13 ukázány tři způsoby vzniku složeného jádra neonu ^{20}Ne a tři způsoby jeho rozpadu. Každý ze tří způsobů vzniku může vést k libovolnému ze tří způsobů rozpadu.



Obr. 43.13 Způsoby vzniku a rozpadu složeného jádra neonu ^{20}Ne.

Model nezávislých částic

V kolektivním modelu jsme předpokládali, že se nukleony pohybují náhodně a že dochází k jejich častým vzájemným srážkám. *Model nezávislých částic* je založen na opačném předpokladu, totiž že každý nukleon uvnitř jádra zaujímá nějaký dobře definovaný kvantový stav a že se jen velmi zřídka srazí s jiným nukleonem! Na rozdíl od atomu nemá jádro pevný střed, kde by byl usazen náboj; v modelu se předpokládá, že se každý nukleon pohybuje v potenciálové jámě, která je určena časově středovanou polohou všech ostatních pohybujících se nukleonů.

Nukleonu v jádře přísluší podobně jako elektronu v atomu soubor kvantových čísel, který definuje jeho pohybový stav. Nukleony se stejně jako elektrony řídí Pauliho vylučovacím principem. To znamená, že se v jednom stavu nemohou současně nacházet dva nukleony. V tomto ohledu jsou neutrony a protony chápány jako různé druhy částic, každý s vlastní množinou možných kvantových stavů.

Skutečnost, že se nukleony řídí Pauliho vylučovacím principem, nám umožňuje pochopit příčinu relativní stability jejich stavů. Když se uvnitř jádra srazí dva nukleony, musí energie každého z nich po srážce odpovídat energii *neobsazeného stavu*. Kdyby tyto stavy již byly obsazeny nukleony stejného typu, nemůže prostě k uvažované srážce dojít. Každý nukleon, procházející řadou „pokažených příležitostí ke srážce“, tak zůstává v původním pohybovém stavu po dostatečně dlouhou dobu, abychom ho mohli pokládat za částici v kvantovém stavu s určitou energií.

Ve světě atomů je opakování fyzikálních a chemických vlastností, které nacházíme v periodické tabulce prvků, spojeno s chováním elektronů v atomu, přesněji řečeno s jejich ukládáním do slupek. Ty jsou pak velmi stabilní, pokud jsou zcela zaplněny. Atomová čísla vzácných plynů

$$2,\ 10,\ 18,\ 36,\ 54,\ 86,\ \ldots$$

můžeme považovat za *magická elektronová* čísla, která označují úplnost (nebo také uzavření) takových slupek.

I jádra mají něco jako „uzavřené slupky“a **magická nukleonová čísla** jsou

$$2,\ 8,\ 20,\ 28,\ 50,\ 82,\ 126,\ \ldots.$$

Každý nuklid, jehož protonové číslo Z nebo neutronové číslo N má jednu z těchto hodnot, vykazuje výraznou stabilitu, která se může projevit rozmanitým způsobem.

Příklady „magických“ nuklidů jsou ^{18}O ($Z = 8$), ^{40}Ca ($Z = 20$, $N = 20$), ^{92}Mo ($N = 50$) a ^{208}Pb ($Z = 82$, $N = 126$). Nuklidy ^{40}Ca a ^{208}Pb jsou „dvojnásobně magické“, protože mají uzavřenou neutronovou slupku a *zároveň* uzavřenou protonovou slupku.

Magické číslo 2 se projevuje ve výjimečné stabilitě α-částice (^{4}He), která je se $Z = N = 2$ dvojnásobně magická. Například na křivce vazební energie na jeden nukleon z obr. 43.6 vyčnívá tento nuklid hodně nad své sousedy z periodické tabulky vodík, lithium a beryllium. Částice α je ve skutečnosti tak pevně vázána, že je nemožné přidat k ní jinou částici; stabilní nuklid s $A = 5$ neexistuje.

Ústřední myšlenkou modelu uzavřené slupky je to, že lze relativně snadno odejmout jádru jednotlivou částici vně uzavřené slupky, ale pro odejmutí částice z vlastní slupky je potřeba podstatně více energie. Například atom sodíku má jeden (valenční) elektron vně uzavřené elektronové slupky. Na odejmutí tohoto valenčního elektronu ze sodíkového atomu postačuje 5 eV; odejmutí *druhého* elektronu (ten už musí být vytažen z uzavřené slupky) však vyžaduje celých 22 eV. V jaderném modelu vezměme příklad ^{121}Sb ($Z = 51$), který obsahuje jediný proton vně uzavřené slupky 50 protonů. Odejmutí tohoto jediného protonu vyžaduje energii 5,8 MeV; odejmutí *druhého* protonu však vyžaduje 11 MeV. Existuje ještě mnoho dalších experimentálních poznatků, které potvrzují představu ukládání nukleonů do uzavřených slupek a toho, že takové slupky jsou stabilní.

Viděli jsme, že kvantová teorie dokáže překrásně objasnit existenci magických elektronových čísel, tj. vysvětlit obsazování dílčích slupek elektrony v atomu. Ukazuje se, že za jistých předpokladů dokáže kvantová teorie stejně dobře objasnit i existenci magických nukleonových čísel! V roce 1963 získali Nobelovu cenu Marie Mayerová a Hans Jensen právě za „objev struktury jaderných slupek“.

Kombinovaný model

Uvažujme jádro, ve kterém je jen malý počet neutronů (nebo protonů) vně vnitřního jádra tvořeného uzavřenými slupkami s magickými počty neutronů (nebo protonů). Vnější nukleony zaujímají kvantové stavy v potenciálové jámě vytvářené vnitřním jádrem, takže platí základní představy modelu nezávislých částic. Vnější nukleony ale působí na vnitřní jádro, deformují je a způsobují uvnitř „přílivové vlny“ rotačního nebo vibračního charakteru. Tyto kolektivní pohyby nukleonů vnitřního jádra zase odpovídají představě kolektivního modelu. Takto vznikl kombinovaný model jaderné struktury, který spojuje zdánlivě nesmiřitelné základní představy kolektivního modelu a modelu nezávislých částic. A přitom je pozoruhodně úspěšný.

PŘÍKLAD 43.10

Uvažujme reakci záchytu neutronu

$$^{109}\mathrm{Ag} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{110}\mathrm{Ag} \rightarrow {}^{110}\mathrm{Ag} + \gamma, \qquad (43.19)$$

při které vzniká složené jádro (^{110}Ag). Obr. 43.14 udává relativní četnost této reakce v závislosti na energii dopadajícího neutronu. Určete střední dobu života složeného jádra podle relace neurčitosti zapsané ve tvaru

$$\Delta E \, \Delta t \approx \hbar. \qquad (43.20)$$

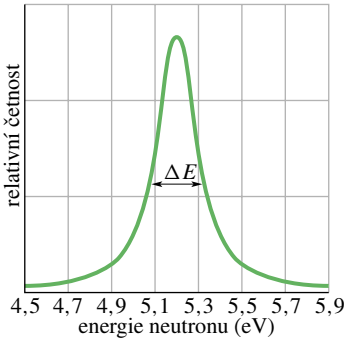
V tomto vztahu je ΔE mírou neurčitosti stanovení energie atomového nebo jaderného stavu. Veličina Δt je doba, která je k dispozici pro měření energie. V našem případě je toto Δt právě rovno střední době života $\bar{t}$ složeného jádra od vytvoření k rozpadu.

ŘEŠENÍ: Z obrázku je vidět, že relativní četnost má výrazné maximum při energii neutronu 5,2 eV. Z toho můžeme usuzovat na existenci jediné excitované hladiny složeného jádra ^{110}Ag. Když je použitá energie právě rovna rozdílu energie této excitované hladiny a energie základního stavu ^{110}Ag, dochází k „rezonanci“ a reakce podle rov. (43.19) opravdu proběhne.

Rezonanční pík však není nekonečně úzký. Přibližná hodnota jeho položířky (ΔE v obr. 43.14) je 0,20 eV. Tuto skutečnost popisujeme tak, že energie excitované hladiny není určena přesně, ale s neurčitostí ΔE asi 0,20 eV. Můžeme tedy psát

$$\Delta t = \bar{t} = \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{(4{,}14\cdot 10^{-15}\ \mathrm{eV\cdot s})/2\pi}{(0{,}20\ \mathrm{eV})} \doteq$$
$$\doteq 3\cdot 10^{-15}\ \mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

To je doba několiksetkrát větší než čas, který potřebuje neutron s energií 5,2 eV k překonání průměru jádra ^{109}Ag. Můžeme tedy říci, že po dobu $3\cdot 10^{-15}$ s bude neutron *částí* jádra.



Obr. 43.14 Příklad 43.10. Křivka relativní četnosti reakce popsané rov. (43.19) v závislosti na energii dopadajícího neutronu. Položířka ΔE rezonančního vrcholu je přibližně 0,20 eV.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Nuklidy

Je známo asi 2 000 *nuklidů*. Nuklid je charakterizován *atomovým číslem* Z (počet protonů), *neutronovým číslem* N a *hmotnostním číslem* A (celkový počet *nukleonů* — protonů a neutronů). Je tedy $A = Z + N$. Nuklidy se stejným atomovým číslem, ale s různým neutronovým číslem se nazývají *izotopy* daného prvku. Střední poloměr jádra R je dán vztahem

$$R = R_0 A^{1/3}, \qquad (43.3)$$

kde $R_0 \approx 1{,}2$ fm.

Jaderné hmotnosti a vazební energie

Křivka vazební energie ukazuje, že nejstabilnější jsou středně hmotné nuklidy a že je možné uvolnit energii jak při štěpení velmi hmotných nuklidů, tak při fúzi nuklidů s malou hmotností. Energiový ekvivalent atomové hmotnostní jednotky (u) je 931,5 MeV.

Jaderná síla

Jádra jsou vázána přitažlivou silou mezi nukleony. Předpokládá se, že se jedná o druhotný projev *silné síly*, kterou na sebe působí kvarky, z nichž jsou nukleony složeny. Jádra se mohou nacházet v mnoha stavech s diskrétními hodnotami energie a s charakteristickým vnitřním momentem hybnosti a magnetickým momentem.

Radioaktivní rozpad

Většina známých nuklidů je radioaktivní; nuklidy se samovolně

rozpadají s rychlostí $R = -\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$, která je úměrná počtu radioaktivních atomů N. Konstanta úměrnosti je *rozpadová konstanta* λ. To vede k zákonu exponenciálního rozpadu

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}, \tag{43.6}$$

$$R = \lambda N = R_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \text{(radioaktivní rozpad)}. \tag{43.7}$$

Poločas rozpadu $\tau = (\ln 2)/\lambda$ radionuklidu je čas potřebný k tomu, aby se rychlost rozpadu R (a též počet jader N) ve vzorku snížila na polovinu.

Rozpad α

Některé nuklidy se rozpadají tak, že emitují α-částice. Tyto rozpady jsou ztíženy potenciálovou bariérou, která nemůže být překonána podle klasické fyziky, ale může být překonána tunelováním podle kvantové fyziky. Propustnost bariéry a tím i poločas α-rozpadu jsou velmi citlivě závislé na energii α-částice.

Rozpad β

Při β-rozpadu emituje jádro buď elektron, nebo pozitron a spolu s ním také neutrino. Emitované částice se dělí o uvolněnou energii rozpadu. Elektrony a pozitrony emitované při β-rozpadu mají spojité spektrum energií od nuly do maximální hodnoty rovné energii rozpadu $Q = \Delta mc^2$.

Radioaktivní datování

Přirozeně radioaktivní nuklidy umožňují přibližné datování historických a prehistorických událostí. Například stáří organických látek můžeme často určit pomocí měření obsahu ^{14}C, stáří hornin pomocí radioaktivního izotopu ^{40}K.

Radiační dávka

Pro popis působení ionizačního záření se používají tři jednotky. *Becquerel* (1 Bq = 1 rozpad za jednu sekundu) měří *aktivitu* vzorku. Množství skutečně pohlcené energie měří *gray*, přitom 1 Gy odpovídá 1 J/kg. Odhad biologického účinku pohlcené energie se měří v jednotkách *sievert*; ekvivalentní dávka 1 Sv způsobuje stejné biologické účinky bez ohledu na druh působícího záření.

Jaderné modely

Kolektivní model jaderné struktury předpokládá neustálé srážky nukleonů a také utváření dlouho žijících *složených jader* při záchytu částic ostřelujících jádra terče. Vznik složených jader a jejich případný rozpad jsou zcela nezávislé jevy.

Model *nezávislých částic* pro jadernou strukturu předpokládá, že se jednotlivé nukleony pohybují uvnitř jádra (v podstatě bez srážek) a jejich stavy jsou kvantovány. Model předpovídá jaderné hladiny a *magická čísla* (2, 8, 20, 28, 50, 82 a 126), která odpovídají uzavřeným nukleonovým slupkám; nuklidy, které mají takový počet neutronů nebo protonů, jsou velmi stabilní.

V *kombinovaném* modelu obsazují přebývající nukleony kvantové stavy vně vnitřního jádra tvořeného nukleony v uzavřených slupkách. Je velmi úspěšný při předpovídání mnoha jaderných vlastností.

OTÁZKY

1. Uvažujme případ, kdy α-částici v př. 43.1 nahradíme protonem o stejné počáteční kinetické energii, který se také čelně sráží s jádrem atomu zlata. Bude vzdálenost od středu jádra, na které se proton zastaví, větší, menší, nebo stejná jako vzdálenost, na které se zastaví α-částice?

2. Je v lidském těle více protonů než neutronů, více neutronů než protonů, nebo přibližně stejný počet obou částic?

3. Nuklid ^{244}Pu ($Z = 94$) emituje α-částice. Na který z uvedených nuklidů se rozpadá: ^{240}Np ($Z = 93$), ^{240}U ($Z = 92$), ^{248}Cm ($Z = 96$), nebo ^{244}Am ($Z = 95$)?

4. Určitý nuklid je považován za velmi stabilní. Leží jeho vazební energie na jeden nukleon mírně nad, nebo mírně pod křivkou vazební energie na obr. 43.6?

5. Je hmotnostní nadbytek α-částice (užijte úsečku z obr. 43.12) větší, nebo menší než celková vazební energie této částice? (Užijte vazební energii na jeden nukleon z obr. 43.6.)

6. Radionuklid ^{196}Ir emituje při rozpadu elektrony. (a) Do kterého čtverečku na obr. 43.5 přejde? (b) Dojde pak ještě k dalším rozpadům?

7. Nuklid olova obsahuje 82 protonů. (a) Kdyby obsahoval také 82 neutronů, kde by byl zobrazen na obr. 43.4? (b) Kdyby bylo takové jádro utvořeno, emitovalo by pozitrony, nebo elektrony, anebo by bylo stabilní? (c) Kolik očekáváte podle obr. 43.4 neutronů ve stabilním nuklidu olova?

8. Nuklid ^{238}U ($Z = 92$) se může štěpit na dvě části o stejných atomových a hmotnostních číslech. (a) Leží nuklid ^{238}U v obr. 43.4 nad, nebo pod přímkou $N = Z$? (b) Leží oba fragmenty štěpení nad, nebo pod touto přímkou? (c) Jsou tyto fragmenty stabilní, nebo radioaktivní?

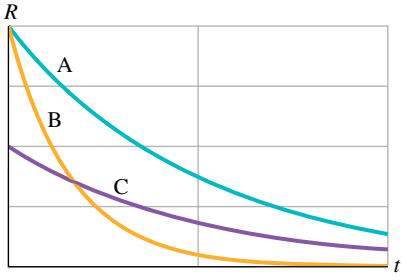
9. Radionuklidy se rozpadají podle exponenciální závislosti v rov. (43.7). Baterie, hvězdy a dokonce i studenti se také rozpadají, když pojem „rozpad“ chápeme jako „vyčerpat se“. Jde i v těchto případech o exponenciální rozpad?

10. V čase $t = 0$ má vzorek radionuklidu A stejnou rychlost rozpadu jako radionuklid B v čase $t = 30$ min. Rozpadové konstanty jsou λ_A a λ_B, přitom $\lambda_A < \lambda_B$. Budou mít oba vzorky v nějakém okamžiku stejnou rychlost rozpadu? (*Tip*: Nakreslete graf časové závislosti aktivity vzorků.)

11. V čase $t = 0$ má vzorek radionuklidu A dvojnásobnou rychlost rozpadu než radionuklid B. Rozpadové konstanty jsou λ_A a λ_B, přitom $\lambda_A > \lambda_B$. Budou mít oba vzorky v nějakém okamžiku stejnou rychlost rozpadu?

12. Na obr. 43.15 jsou zakresleny aktivity tří radioaktivních

vzorků v závislosti na čase. Seřaďte vzorky sestupně podle jejich (a) poločasu rozpadu a (b) rozpadové konstanty. (*Tip*: Pro (a) použijte v grafu pravítko.)



Obr. 43.15 Otázka 12

13. Jestliže zdvojnásobíme hmotnost radioaktivního vzorku, zvětší se, zmenší se, nebo zůstane stejná (a) aktivita vzorku a (b) rozpadová konstanta vzorku?

14. V čase $t = 0$ začneme pozorovat dvě identická radioaktivní jádra s poločasem rozpadu 5 min. V čase $t = 1$ min se jedno z nich rozpadne. Zvětší, nebo zmenší tato událost pravděpodobnost, že se v následujících 4 min rozpadne i druhé jádro, nebo nemá tato událost na druhé jádro žádný vliv?

15. Radionuklid ^{49}Sc má poločas rozpadu 57,0 min. Četnost impulzů zaznamenaná u vzorku tohoto nuklidu v čase $t = 0$ je 6 000 impulzů za min nad hodnotou pozadí, která je 30 impulzů za min. Aniž budete provádět výpočet, určete, klesne-li četnost impulzů na úroveň pozadí během asi 3 h, 7 h, 10 h, nebo po době mnohem delší než 10 h.

16. Radionuklidy ^{209}At a ^{209}Po emitují α-částice s energií 5,65 MeV a 4,88 MeV. Který z nuklidů má delší poločas rozpadu?

17. Magická čísla uvedená pro jádra v čl. 43.8 jsou 2, 8, 20, 28, 50, 82 a 126. Jsou nuklidy magické (tj. obzvlášť stabilní) tehdy, když (a) pouze hmotnostní číslo A, (b) pouze atomové číslo Z, (c) pouze neutronové číslo N, nebo (d) buď Z, nebo N se rovnají jednomu z těchto čísel? Vyberte správná tvrzení.

18. (a) Které z následujících nuklidů jsou magické: (a) ^{122}Sn, (b) ^{132}Sn, (c) ^{98}Cd, (d) ^{198}Au, (e) ^{208}Pb? (b) Který z nuklidů, pokud vůbec nějaký, je dvojnásobně magický?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 43.1 Objevení jádra

1C. Spočtěte nejmenší vzdálenost, na kterou se při čelní srážce může přiblížit α-částice s energií 5,30 MeV k jádru atomu mědi.

2C. Předpokládejte, že jádro atomu zlata má poloměr 6,23 fm a α-částice má poloměr 1,80 fm. Jakou minimální energii musí mít α-částice, aby pronikla do jádra atomu zlata?

3Ú. Při pružném rozptylu α-částice na jádře dojde u jádra ke zpětnému odrazu. Uvažujme čelní srážku α-částice s energií 5,00 MeV s jádrem zlata, které je na počátku v klidu. Vypočtěte kinetickou energii (a) zpětného odrazu jádra a (b) odražené α-částice.

ODST. 43.2 Některé vlastnosti atomových jader

4C. Neutronová hvězda je hvězda, jejíž hustota je přibližně stejná jako hustota jaderné hmoty, která byla vypočtena v př. 43.2. Předpokládejme, že by došlo ke zhroucení Slunce, při kterém by se stalo neutronovou hvězdou, a přitom si zachovalo svou nynější hmotnost. Jaký by byl jeho poloměr?

5C. Kolik obsahuje nuklid ^{14}C (a) protonů a (b) neutronů?

6C. Poloměr jádra určený z rozptylu elektronů je 3,6 fm. Jaké je přibližně hmotnostní číslo jádra?

7C. Najděte nuklidy z tab. 43.1 na nuklidovém diagramu na obr. 43.4. Ověřte, že leží v pásu stability.

8C. Pomocí nuklidového diagramu vypište symboly (a) všech stabilních izotopů s $Z = 60$, (b) všech radioaktivních nuklidů s $N = 60$ a (c) všech nuklidů s $A = 60$.

9C. Elektrická potenciální energie koule o poloměru R s rovnoměrně rozloženým nábojem Q je

$$E_p = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}.$$

(a) Spočtěte elektrickou potenciální energii nuklidu ^{239}Pu za předpokladu, že je to koule o poloměru 6,64 fm. (b) Porovnejte pro tento nuklid elektrickou potenciální energii na jeden nukleon a také na jeden proton s vazební energií 7,56 MeV na jeden nukleon. (c) Jaký závěr můžete z tohoto srovnání učinit?

10C. Silný nadbytek neutronů v jádrech s vysokou hmotností lze ukázat na tom, že při štěpení nejhmotnějších nuklidů na dvě stabilní jádra vždycky přebývají neutrony. Uvažme například spontánní štěpení jádra ^{235}U na dvě stabilní dceřiná jádra s atomovými čísly 39 a 53. S pomocí obr. 43.4 určete, o které dceřiné nuklidy se jedná a jaký počet neutronů přitom zbude.

11C. Uspořádejte 25 nuklidů $^{118-122}$Te, $^{117-121}$Sb, $^{116-120}$Sn, $^{115-119}$In a $^{114-118}$Cd do políček nuklidového diagramu podobně jako na obr. 43.5. Nakreslete a označte (a) všechny izobarické (konstantní A) přímky a (b) všechny přímky s konstantní hodnotou nadbytku neutronů, definovaného jako $N - Z$.

12C. Spočtěte a porovnejte (a) jadernou hustotu hmotnosti ϱ_m a (b) jadernou hustotu náboje ϱ_q pro poměrně málo hmotný nuklid ^{55}Mn a nuklid s poměrně vysokou hmotností ^{209}Bi. (c) Jsou rozdíly takové, jaké jste očekávali? Vysvětlete.

13C. Ověřte hodnotu vazební energie 7,56 MeV na jeden nukleon uvedenou v tab. 43.1 pro ^{239}Pu. Potřebné atomové hmotnosti jsou 239,052 16 u (^{239}Pu), 1,007 83 u (^{1}H) a 1,008 67 u (neutron).

14C. (a) Ukažte, že přibližný vztah pro hmotnost atomu je $M = Am_p$, kde A je hmotnostní číslo a m_p je hmotnost protonu. (b) Jaké chyby (v procentech) se dopustíme při výpočtu hmotností atomů z tab. 43.1 podle tohoto vztahu? Hmotnost holého protonu je 1,007 276 u. (c) Je tento vztah dostatečně přesný pro výpočet jaderné vazební energie?

15C. *Charakteristický jaderný čas* je užitečná, ale jen volně definovaná veličina, rovná času, který potřebuje nukleon s energií několik milionů elektronvoltů k překonání vzdálenosti rovné průměru středně hmotného jádra. Jaká je řádově tato veličina? Při výpočtu uvažujte neutron s energií 5 MeV překonávající průměr jádra ^{197}Au; užijte rov. (43.3).

16C. Jaderné poloměry lze měřit pomocí rozptylu elektronů s vysokou energií na jádrech. (a) Jaká je de Broglieho vlnová délka 200 MeV elektronů? (b) Jsou tyto elektrony vhodné pro daný účel?

17C. Pokud je nukleon vázán v jádře, můžeme vzít jako neurčitost jeho polohy jaderný poloměr R. Jakou hodnotu dává princip neurčitosti pro kinetickou energii nukleonu například v jádře o hmotnostním čísle $A = 100$? (*Tip*: Předpokládejte, že skutečná hybnost p je rovna vypočtené neurčitosti hybnosti Δp.)

18C. Atomové hmotnosti ^{1}H, ^{12}C a ^{238}U jsou 1,007 825 u, 12,000 000 u (přesně, neboť tak je definována jednotka atomové hmotnosti u) a 238,050 785 u. (a) Jaké by byly číselné hodnoty hmotností, kdyby atomová jednotka hmotnosti byla definována tak, že hmotnost ^{1}H je přesně 1,000 000 u? (b) Použijte výsledku k úvaze, proč asi nebyla tato zřejmá definice jednotky atomové hmotnosti zvolena.

19Ú. (a) Ukažte, že energie uložená v jaderných vazbách (silná jaderná síla) je úměrná hmotnostnímu číslu A jádra. (b) Ukažte, že energie elektrické vazby protonů (Coulombova síla) je úměrná $Z(Z-1)$. (c) Ukažte, že směrem ke stále větším jádrům (obr. 43.4) roste význam Coulombovy síly rychleji než význam silné jaderné síly.

20Ú. V periodické tabulce vypadá políčko hořčíku takto:

12
Mg
24,312

Existují tři izotopy:

^{24}Mg, atomová hmotnost = 23,985 04 u,
^{25}Mg, atomová hmotnost = 24,985 84 u,
^{26}Mg, atomová hmotnost = 25,982 59 u.

Výskyt ^{24}Mg je 78,99 % (váhových). Vypočtěte výskyt zbývajících dvou izotopů.

21Ú. Máte rozebrat α-částici (^{4}He) na nukleony tak, že se postupně oddělí proton, neutron a proton. Spočtěte (a) práci potřebnou v každém kroku, (b) celkovou vazební energii α-částice a (c) vazební energii na jeden nukleon. Potřebné atomové hmotnosti jsou

^{4}He	4,002 60 u	^{2}H	2,014 10 u
^{3}H	3,016 05 u	^{1}H	1,007 83 u
n	1,008 67 u.		

22Ú. Protože neutron nemá náboj, musí být jeho hmotnost určena jinak než pomocí hmotnostního spektrometru. Když se setká neutron s protonem (předpokládáme, že oba jsou téměř v klidu), spojí se a utvoří deuteron, přitom dojde k emisi fotonu γ-záření o energii 2,223 3 MeV. Hmotnosti protonu a deuteronu jsou 1,007 825 035 u a 2,014 101 9 u. Vypočtěte z těchto údajů hmotnost neutronu na tolik desetinných míst, kolik uvedená data umožňují. (Přesnější hodnota převodního faktoru hmotnost — energie je 931,502 MeV/u.)

23Ú. Mince váží 3,0 g. Spočtěte jadernou energii potřebnou k oddělení všech neutronů a protonů obsažených v minci. Zanedbejte vazební energii elektronů a pro jednoduchost považujte minci za čistou měď ^{63}Cu (hmotnost 62,929 60 u). Hmotnosti protonu a neutronu jsou 1,007 83 u a 1,008 67 u.

24Ú. Pro zjednodušení výpočtů jsou atomové hmotnosti někdy uváděny ne jako skutečné atomové hmotnosti m, ale jako $(m - A)c^2$, kde A je hmotnostní číslo vyjádřené v atomových jednotkách hmotnosti. Této hodnotě, běžně udávané v milionech elektronvoltů, říkáme *hmotnostní nadbytek* a označujeme ji Δ. S údaji z př. 43.3 spočtěte hmotnostní nadbytek pro (a) ^{1}H, (b) neutron a (c) ^{120}Sn.

25Ú. (Viz úlohu 24.) Ukažte, že celková vazební energie nuklidu může být vyjádřena jako

$$E = Z\Delta_H + N\Delta_n - \Delta,$$

kde Δ_H, Δ_n a Δ jsou příslušné hmotnostní nadbytky. Spočtěte podle tohoto vztahu vazební energii na jeden nukleon pro ^{197}Au. Porovnejte výsledek s hodnotou uvedenou v tab. 43.1. Potřebné hmotnostní nadbytky, zaokrouhlené na tři platná čísla, jsou $\Delta_H = +7{,}29$ MeV, $\Delta_n = +8{,}07$ MeV a $\Delta_{197} = -31{,}2$ MeV. Všimněte si, že se s hmotnostními nadbytky počítá pohodlněji, než se samotnými hmotnostmi.

ODST. 43.3 Radioaktivní rozpad

26C. Poločas rozpadu určitého radioaktivního izotopu je 6,5 h. Je-li na počátku $48 \cdot 10^{19}$ atomů tohoto izotopu, kolik jich zůstane po 26 h?

27C. Poločas rozpadu radioaktivního izotopu je 140 d. Po kolika dnech klesne rychlost rozpadu vzorku tohoto izotopu na jednu čtvrtinu původní hodnoty?

28C. Radioaktivní nuklid má poločas rozpadu 30 y. Jaká část z původně čistého vzorku tohoto nuklidu se nerozpadne po (a) 60 y a (b) 90 y?

29C. Uvažujte původně čistý 3,4 g vzorek izotopu ^{67}Ga s poločasem rozpadu 78 h. (a) Jaká je počáteční rychlost rozpadu? (b) Jaká bude rychlost rozpadu o 48 h později?

30C. Radioaktivní izotop rtuti ^{197}Hg se rozpadá na zlato ^{197}Au s rozpadovou konstantou 0,010 8 rozpadů za h. (a) Spočtěte jeho poločas rozpadu. Jaká část rtuti zůstane ve vzorku (b) po době rovné třem poločasům rozpadu a (c) po 10,0 d?

31C. Z údajů na začátku čl. 43.3 odvoďte (a) rozpadovou konstantu λ a (b) poločas rozpadu ^{238}U.

32C. Izotop ^{239}Pu vzniká jako vedlejší produkt v jaderném reaktoru a hromadí se jako zátěž životního prostředí. Izotop je radioaktivní, prodělává α-rozpad s poločasem rozpadu $2{,}41\cdot10^4$ y. (a) Kolik jader obsahuje smrtelné množství plutonia (2 mg)? (b) Jaká je rychlost rozpadu tohoto množství?

33C. Rakovinné buňky jsou citlivější na rentgenové a γ-záření než zdravé buňky. V minulosti byl standardním zdrojem pro radiační terapii radioaktivní ^{60}Co, který se nejprve rozpadá do vybuzeného stavu jádra ^{60}Ni, a ten okamžitě přechází do základního stavu a emituje přitom dva fotony γ-záření, každý s energií přibližně 1,2 MeV. Tento β-rozpad kobaltu má poločas rozpadu 5,27 y. Kolik radioaktivních jader ^{60}Co bylo ve zdroji s aktivitou 6 000 Ci užívaném v nemocnicích? (Nyní se v radiační terapii užívají částice urychlené na vysokou energii v lineárním urychlovači.)

34Ú. Po dlouhém úsilí se v roce 1902 podařilo Marii a Pierrovi Curieovým separovat z uranové rudy významnější množství radia, jednu desetinu gramu čistého $RaCl_2$. Radium bylo zastoupeno izotopem ^{226}Ra, který má poločas rozpadu 1 600 y. (a) Kolik jader radia Curieovi izolovali? (b) Jaká byla rychlost rozpadu jejich vzorku (v rozpadech za sekundu)?

35Ú. Radionuklid ^{64}Cu má poločas rozpadu 12,7 h. Jaké množství ze vzorku 5,50 g původně čistého ^{64}Cu se rozpadne během 2,00 h počínajících o 14,0 h později?

36Ú. Radionuklid ^{32}P ($\tau = 14{,}28$ d) se často používá jako značený izotop pro sledování průběhu biochemických reakcí, kterých se účastní fosfor. (a) Je-li v určitém uspořádání experimentu četnost na počátku 3 500 pulzů/s, po jaké době poklesne na hodnotu 170 pulzů/s? (b) Roztok obsahující ^{32}P přivedeme ke kořenovému systému pokusné rostliny rajčete. O 3,48 dne později změříme aktivitu ^{32}P v listu rostliny. Kolikrát je třeba vynásobit změřenou hodnotu, aby se správně započítaly rozpady, ke kterým došlo od začátku pokusu?

37Ú. Zdroj obsahuje dva radionuklidy fosforu ^{32}P ($\tau = 14{,}3$ d) a ^{33}P ($\tau = 25{,}3$ d). Na počátku pochází 10,0 % rozpadů od ^{33}P. Jak dlouho musíme počkat, aby jich bylo 90 %?

38Ú. Vzorek 1,00 g samaria emituje 120 α-částic za sekundu. Je to důsledkem rozpadu izotopu ^{147}Sm, jehož přirozený výskyt v samariu je 15,0 %. Spočtěte poločas rozpadu.

39Ú. Poločas α-rozpadu izotopu plutonia ^{239}Pu je 24 100 let. Kolik gramů helia vznikne ze vzorku 12,0 g čistého ^{239}Pu po 20 000 letech? (Uvažujte pouze helium, které vzniká přímo při rozpadu plutonia, nikoli při rozpadu vedlejších produktů reakce.)

40Ú. Spočtěte hmotnost vzorku (na počátku čistého) ^{40}K s počáteční rychlostí rozpadu $1{,}70\cdot10^5$ částic·s^{-1}. Izotop má poločas rozpadu $1{,}28\cdot10^9$ y.

41Ú. Jedním z nebezpečí po výbuchu atomové bomby je radioaktivní spad ^{90}Sr, jehož poločas rozpadu je 29 let. Protože chemické vlastnosti stroncia jsou velmi podobné vápníku, může se například, pokud se dostane do potravy krav, hromadit v kravském mléce. Část ^{90}Sr se pak hromadí v kostech lidí, kteří takové mléko pijí. Elektrony o vysoké energii, které vznikají při β-rozpadu ^{90}Sr, poškozují kostní dřeň a tak narušují tvorbu červených krvinek. Výbuch bomby o mohutnosti 1 megatuny produkuje asi 400 g ^{90}Sr. Jestliže se spad rozdělí rovnoměrně po ploše 2 000 km^2, jak velká plocha v této oblasti bude obsahovat radioaktivitu rovnou povolené hodnotě zátěže pro kosti jedné osoby, stanovené na 74 000 impulzů/s?

42Ú. Po krátkém ozařování stříbra neutrony budou přítomny dva izotopy: ^{108}Ag ($\tau = 2{,}42$ min) s počáteční rychlostí rozpadu $3{,}1\cdot10^5$ s^{-1} a ^{110}Ag ($\tau = 24{,}6$ s) s počáteční rychlostí rozpadu $4{,}1\cdot10^6$ s^{-1}. Nakreslete semilogaritmický graf celkové rychlosti rozpadu obou izotopů v závislosti na čase v intervalu od $t = 0$ do $t = 10$ min jako na obr. 43.8. Obr. 43.8 jsme použili pro stanovení poločasu rozpadu jednoduchých rozpadů (s jediným izotopem). Budete-li mít k dispozici pouze svůj graf, navrhněte způsob, jak jeho analýzou získat poločasy rozpadu obou izotopů.

43Ú. Určitý radionuklid je vytvářen (např. v cyklotronu) s konstantní rychlostí R. Nuklid se také rozpadá s rozpadovou konstantou λ. Předpokládejme, že produkce izotopu probíhá po dobu velmi dlouhou ve srovnání s poločasem rozpadu radionuklidu. Ukažte, že počet radioaktivních jader je po této době konstantní a roven $N = R/\lambda$. Ukažte, že tento výsledek nezávisí na počátečním počtu radioaktivních jader. O nuklidu říkáme, že je v *sekulární rovnováze* se svým zdrojem; v tomto stavu je rychlost rozpadu právě rovna rychlosti produkce.

44Ú. (Viz úlohu 43.) Radionuklid ^{56}Mn má poločas rozpadu 2,58 h a je vytvářen v cyklotronu ostřelováním manganového terčíku deuterony. Terčík obsahuje pouze stabilní izotop manganu ^{55}Mn a reakce vytvářející ^{56}Mn je

$$^{55}\mathrm{Mn} + \mathrm{d} \rightarrow {}^{56}\mathrm{Mn} + \mathrm{p}.$$

Po ostřelování mnohem delším než 2,58 h je aktivita terče způsobená ^{56}Mn rovna $8{,}8\cdot10^{10}$ s^{-1}. (a) Jakou konstantní rychlostí R se při ostřelování v cyklotronu vytvářejí jádra ^{56}Mn? (b) Jakou rychlostí se rozpadají (také při ostřelování)? (c) Kolik jader ^{56}Mn obsahuje terč na konci ostřelování? (d) Jaká je jejich celková hmotnost?

45Ú. (Viz úlohy 43 a 44.) Zdroj radia obsahuje 1,00 mg ^{226}Ra, které se s poločasem rozpadu 1 600 y přeměňuje na vzácný plyn ^{222}Rn. Tento izotop radonu pak prochází α-rozpadem s poločasem rozpadu 3,82 d. (a) Jaká je rychlost rozpadu ^{226}Ra ve zdroji? (b) Jak dlouho trvá, než se radon dostane do sekulární rovnováhy se svým radiovým rodičem? (c) S jakou rychlostí se pak radon rozpadá? (d) Kolik radonu je v rovnováze se svým radiovým rodičem?

ODST. 43.4 Rozpad α

46C. Považujte jádro ^{238}U za složené z α-částice (^{4}He) a zbytkového jádra (^{234}Th). Nakreslete závislost elektrostatické po-

tenciální energie $E_p(r)$ na vzdálenosti r mezi těmito částicemi. Zvolte přibližně interval 10 fm $< r <$ 100 fm a porovnejte svůj graf s obr. 43.9.

47C. Obecně se hmotnější nuklidy rozpadají snadněji při α-rozpadu. Například nejstabilnější izotop ^{238}U má poločas α-rozpadu $4{,}5{\cdot}10^9$ y. Nejstabilnější izotop plutonia ^{244}Pu má poločas rozpadu $8{,}0{\cdot}10^7$ y a pro curium ^{248}Cm je to $3{,}4{\cdot}10^5$ y. Když se rozpadne polovina původního vzorku ^{238}U, jaké části původních vzorků se zmíněnými izotopy plutonia a curia ještě zbyly?

48Ú. Jádro ^{238}U emituje α-částice s energií 4,196 MeV. Spočtěte energii rozpadu tohoto procesu, započtete-li i energii zpětného rázu zbytkového jádra ^{234}Th.

49Ú. Jádro ^{238}U emituje (a) α-částici, nebo (b) postupně neutron, proton, neutron, proton. Vypočtěte v obou případech uvolněnou energii. (c) Přesvědčte se jak rozvahou, tak přímým výpočtem, že rozdíl v obou hodnotách je právě roven vazební energii α-částice. Najděte tuto energii. Potřebné hmotnosti atomů a částic jsou:

^{238}U	238,050 79 u	^{234}Th	234,043 63 u
^{237}U	237,048 73 u	^{4}He	4,002 60 u
^{236}Pa	236,048 91 u	^{1}H	1,007 83 u
^{235}Pa	235,045 44 u	n	1,008 67 u

50Ú. Za určitých podmínek může jádro emitovat částici hmotnější než α-částice. Takové rozpady jsou velmi řídké a byly pozorovány teprve nedávno. Uvažujte rozpady

$$^{223}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{209}\mathrm{Pb} + {}^{14}\mathrm{C}$$

a

$$^{223}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{219}\mathrm{Rn} + {}^{4}\mathrm{He}.$$

(a) Vypočtěte hodnoty Q pro tyto rozpady a ověřte, že jsou oba z energiového hlediska skutečně možné. (b) Výška Coulombovy bariéry pro α-částice při daném rozpadu je 30,0 MeV. Jaká je výška bariéry pro rozpad ^{14}C? Potřebné atomové hmotnosti jsou

^{223}Ra	223,018 50 u	^{14}C	14,003 24 u
^{209}Pb	208,981 07 u	^{4}He	4,002 60 u
^{219}Rn	219,009 48 u		

51Ú. Těžké radionuklidy emitují α-částice a nikoli jiné kombinace nukleonů, poněvadž α-částice má velmi stabilní, pevně vázanou strukturu. Ověřte toto tvrzení porovnáním energie rozpadu několika hypotetických reakcí a diskutujte smysl nalezeného výsledku:

$$^{235}\mathrm{U} \rightarrow {}^{232}\mathrm{Th} + {}^{3}\mathrm{He}, \quad Q_3;$$
$$^{235}\mathrm{U} \rightarrow {}^{231}\mathrm{Th} + {}^{4}\mathrm{He}, \quad Q_4;$$
$$^{235}\mathrm{U} \rightarrow {}^{230}\mathrm{Th} + {}^{5}\mathrm{He}, \quad Q_5.$$

Potřebné atomové hmotnosti jsou:

^{232}Th	232,038 1 u	^{3}He	3,016 0 u
^{231}Th	231,036 3 u	^{4}He	4,002 6 u
^{230}Th	230,033 1 u	^{5}He	5,012 2 u
^{235}U	235,043 9 u		

ODST. 43.5 Rozpad β

52C. Stabilní nuklid pohltil neutron a poté emitoval elektron. Nový nuklid se spontánně rozpadl na dvě α-částice. Určete, o jaký nuklid se jedná.

53C. Izotop cesia ^{137}Cs je obsažen ve spadu po nadzemních výbuších jaderných bomb. Představuje hrozbu pro životní prostředí, protože se jen pomalu rozpadá (poločas rozpadu 30,2 y) na ^{137}Ba a uvolňuje přitom značné množství energie. Atomové hmotnosti Cs a Ba jsou 136,907 1 u a 136,905 8 u; spočtěte celkovou energii uvolněnou při uvedeném rozpadu.

54C. Radioaktivní nuklidy o velké hmotnosti, které procházejí rozpadem α nebo β, patří do jedné ze čtyř rozpadových řad podle toho, má-li jejich hmotnostní číslo tvar $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, kde n je přirozené číslo. (a) Zdůvodněte toto tvrzení a ukažte, že pokud nuklid patří do nějaké rozpadové řady, patří do ní i všechny produkty rozpadu. (b) Určete, do které rozpadové řady patří nuklidy: ^{235}U, ^{236}U, ^{238}U, ^{239}Pu, ^{240}Pu, ^{245}Cm, ^{246}Cm, ^{249}Cf a ^{253}Fm.

55C. Rozpad volného neutronu popisuje rov. (43.12). Jaká je maximální hodnota kinetické energie $E_{k,max}$ v energiovém spektru elektronů, je-li rozdíl hmotností neutronu a vodíkového atomu 840 μu.

56C. Elektron je emitován středně hmotným nuklidem (například s $A = 150$) s kinetickou energií 1,0 MeV. (a) Jaká je de Broglieho vlnová délka elektronu? (b) Spočtěte poloměr nuklidu. (c) Může být elektron zachycen jako stojatá vlna v „krabici“ takového rozměru? (d) Můžete použít získané číselné výsledky k vyvrácení představy (dávno opuštěné), že elektrony skutečně v jádře existovaly?

57Ú. Některé nuklidy se rozpadají při záchytu elektronu z vlastního atomu, například elektronu K-slupky. Příklad je

$$^{49}\mathrm{V} + \mathrm{e}^- \rightarrow {}^{49}\mathrm{Ti} + \nu, \quad \tau = 331\ \mathrm{d}.$$

Ukažte, že energie reakce Q je dána vztahem

$$Q = (m_\mathrm{V} - m_\mathrm{Ti})c^2 - E_\mathrm{K},$$

kde m_V a m_Ti jsou atomové hmotnosti ^{49}V a ^{49}Ti a E_K je vazební energie K-elektronu vanadu. (*Tip*: Použijte příslušné jaderné hmotnosti $\boldsymbol{m}_\mathrm{V}$ a $\boldsymbol{m}_\mathrm{Ti}$ a postupujte stejně jako v př. 43.7.)

58Ú. Spočtěte energii rozpadu Q pro záchyt K-elektronu vanadu ^{49}V, který je popsán v úloze 57. Potřebné hodnoty jsou $m_\mathrm{V} = 48{,}948\,52$ u, $m_\mathrm{Ti} = 48{,}947\,87$ u a $E_\mathrm{K} = 5{,}47$ keV.

59Ú. Radionuklid ^{11}C se rozpadá podle schématu

$$^{11}\mathrm{C} \rightarrow {}^{11}\mathrm{B} + \mathrm{e}^{+} + \nu, \ \tau = 20{,}3\,\mathrm{min}.$$

Maximální energie emitovaných pozitronů je 0,969 MeV.

(a) Ukažte, že energie rozpadu u této reakce je

$$Q = (m_{\mathrm{C}} - m_{\mathrm{B}} - 2m_{\mathrm{e}})c^2,$$

kde m_{C} a m_{B} jsou atomové hmotnosti ^{11}C a ^{11}B a m_{e} je hmotnost pozitronu. (b) Vypočtěte Q a porovnejte výsledek s výše uvedenou hodnotou maximální energie emitovaného pozitronu. Potřebné hodnoty jsou $m_{\mathrm{C}} = 11{,}011\,434$ u, $m_{\mathrm{B}} = 11{,}009\,305$ u a $m_{\mathrm{e}} = 0{,}000\,548\,6$ u. (*Tip*: Užívejte jaderné hmotnosti $\boldsymbol{m}_{\mathrm{C}}$ a $\boldsymbol{m}_{\mathrm{B}}$ a postupujte jako v př. 43.7 pro β-rozpad. Povšimněte si, že rozpad s emisí pozitronu je výjimkou z pravidla, že při dosazení atomových hmotností se při výpočtech jaderných rozpadů elektronové hmotnosti automaticky vyruší; proč?)

60Ú. Radioaktivní ^{238}U a ^{232}Th nestabilní vzhledem k α-rozpadu a ^{40}K nestabilní vzhledem k β-rozpadu jsou natolik hojně zastoupeny v žule, že mohou energií uvolněnou při rozpadech významně přispět k zahřívání Země. Izotopy procházející α-rozpadem mají rozpadové řady ukončeny stabilními izotopy olova. Izotop ^{40}K prochází jediným β-rozpadem. Potřebné informace jsou v následující tabulce:

Rodič	Rozpad	Poločas rozpadu (y)	Konec řady	Q (MeV)	f (10^{-6})
^{238}U	α	$4{,}47{\cdot}10^{9}$	^{206}Pb	51,7	4
^{232}Th	α	$1{,}41{\cdot}10^{10}$	^{208}Pb	42,7	13
^{40}K	β	$1{,}28{\cdot}10^{9}$	^{40}Ca	1,31	4

V tabulce uvedená hodnota Q je celková energie uvolněná při rozpadu jednoho rodičovského jádra na stabilní izotop na konci rozpadové řady a f je výskyt izotopu v kilogramech na jeden kilogram žuly. (a) Ukažte, že energie uvolněná uvedenými izotopy představuje tepelný výkon $1{,}0{\cdot}10^{-9}$ W z každého kilogramu žuly. (b) Za předpokladu, že ve 20 km silné kulové slupce na povrchu Země je $2{,}7{\cdot}10^{22}$ kg žuly, odhadněte celkový výkon těchto rozpadových reakcí. Srovnejte výsledek s celkovým výkonem $1{,}7{\cdot}10^{17}$ W, který přijímá Země ze Slunce.

61Ú*. Radionuklid ^{32}P se rozpadá na ^{32}S podle rov. (43.10). V daném rozpadu je emitován elektron s maximální možnou hodnotou energie 1,71 MeV. Jaká je přitom kinetická energie zpětného rázu atomu ^{32}S? (*Tip*: Pro elektron je třeba použít relativistické vyjádření kinetické energie a hybnosti. Pro pomalý atom ^{32}S stačí naopak použít výrazy Newtonovy mechaniky.)

ODST. 43.6 Radioaktivní datování

62C. ^{238}U se rozpadá na ^{206}Pb s poločasem rozpadu $4{,}47{\cdot}10^{9}$ y. Ačkoli rozpad probíhá v mnoha krocích, první krok má zdaleka nejdelší poločas rozpadu; proto můžeme zjednodušit popis jako přímý rozpad uranu na olovo, tedy

$$^{238}\mathrm{U} \rightarrow {}^{206}\mathrm{Pb} + \text{různé produkty rozpadu}.$$

Při analýze vzorku horniny bylo zjištěno, že obsahuje 4,20 mg ^{238}U a 2,135 mg ^{206}Pb. Předpokládejme, že při utváření neobsahovala hornina žádné olovo, takže všechno přítomné olovo pochází z rozpadu uranu. (a) Kolik atomů ^{238}U a ^{206}Pb vzorek nyní obsahuje? (b) Kolik atomů ^{238}U obsahoval vzorek v době, kdy se hornina utvářela? (c) Jaké je stáří vzorku?

63C. 5,00 g dřevěného uhlí z dávného ohniště má aktivitu ^{14}C 63,0 rozpadů za minutu. Živý strom má aktivitu ^{14}C 15,3 rozpadů za minutu z 1,00 gramu. Poločas rozpadu ^{14}C je 5 730 let. Jak starý je vzorek dřevěného uhlí?

64Ú. Stáří určité horniny se předpokládá 260 milionů let. Jestliže vzorek obsahuje 3,70 mg ^{238}U, kolik by měl obsahovat ^{206}Pb? Viz cvič. 62.

65Ú. Vzorek horniny získaný hluboko pod zemí obsahuje 0,86 mg ^{238}U, 0,15 mg ^{206}Pb a 1,6 mg ^{40}Ar. Kolik bude pravděpodobně obsahovat ^{40}K? Potřebné poločasy rozpadu jsou uvedeny v úloze 60.

ODST. 43.7 Měření radiační dávky

66C. Geigerův čítač zaznamenal 8 700 pulzů za minutu. Spočtěte aktivitu zdroje v jednotkách becquerel a curie za předpokladu, že čítač zaznamenal všechny rozpady.

67C. Při léčbě rakoviny se užívá nuklid ^{198}Au s poločasem rozpadu 2,70 d. Jaká celková hmotnost tohoto nuklidu je potřeba k dosažení aktivity 250 Ci?

68C. Pilot dopravního letadla stráví v průměru 20 h týdně ve výšce 11 km, kde kosmické záření je ekvivalentní dávce 7,0 μSv/h. Jaká je roční (52 týdnů) ekvivalentní dávka z tohoto zdroje? Poznamenejme, že maximální přípustná roční ekvivalentní dávka (ze všech možných zdrojů) je pro obyvatelstvo 5 mSv, pro pracující s radiací pak 50 mSv.

69C. Osoba vážící 75 kg je ozářena po celém těle radiační dávkou $2{,}4{\cdot}10^{-4}$ Gy způsobenou α-částicemi, jejichž RBE faktor je 12. Spočtěte (a) pohlcenou energii v joulech a (b) ekvivalentní dávku v jednotkách sievert a rem.

70Ú. Typická ekvivalentní dávka při rentgenovém vyšetření hrudníku je 250 μSv, přitom rentgenové záření má RBE faktor 0,85. Za předpokladu, že zasažená tkáň je polovina z váhy 88 kg pacienta, spočtěte pohlcenou energii v joulech.

71Ú. Pracovník u rychlého reaktoru vážící 85 kg náhodně polkne 2,5 mg prachu ^{239}Pu. ^{239}Pu prochází α-rozpadem a má poločas rozpadu 24 100 y. Energie emitovaných α-částic je 5,2 MeV a RBE faktor je 13. Předpokládejme, že plutonium se nachází v pracovníkově těle po 12 h a že 95 % emitovaných α-částic je v jeho těle pohlceno. Vypočtěte (a) počet polknutých atomů plutonia, (b) počet atomů, které se rozpadnou během 12 h, (c) energii pohlcenou v těle, (d) výslednou pohlcenou dávku (v jednotce gray) a (e) ekvivalentní dávku (v jednotce sievert).

ODST. 43.8 Jaderné modely

72C. Přechodně vytvořené jádro se při jisté jaderné reakci rozpadá po 10^{-22} s. (a) Jaká je neurčitost ΔE v našem popisu tohoto

přechodného stavu? (b) Můžeme tento stav nazvat složeným jádrem? (Př. 43.10.)

73C. Typická hodnota kinetické energie nukleonu ve středně hmotném jádře je 5,00 MeV. Jaké efektivní jaderné teplotě to odpovídá v kolektivním modelu jaderné struktury?

74C. V následujícím seznamu nuklidů najděte (a) nuklidy se zaplněnými nukleonovými slupkami, (b) nuklidy s jedním nukleonem vně zaplněné slupky a (c) nuklidy s jedním volným místem v jinak zaplněné slupce: ^{13}C, ^{18}O, ^{40}K, ^{49}Ti, ^{60}Ni, ^{91}Zr, ^{92}Mo, ^{121}Sb, ^{143}Nd, ^{144}Sm, ^{205}Tl a ^{207}Pb.

75Ú. Uvažujte tři způsoby vytváření složeného jádra ^{20}Ne z obr. 43.13. Jakou energii musí mít (a) α-částice, (b) proton a (c) foton γ-záření, aby se zajistila excitační energie 25 MeV potřebná pro složené jádro? Potřebné hmotnosti atomů a částic jsou:

^{20}Ne	19,992 44 u	α	4,002 60 u
^{19}F	18,998 40 u	p	1,007 83 u
^{16}O	15,994 91 u		

76Ú. Uvažujte tři způsoby rozpadu složeného jádra ^{20}Ne z obr. 43.13. Jestliže je složené jádro na počátku v klidu a má excitační energii 25,0 MeV, jakou kinetickou energii naměříme u (a) deuteronu, (b) neutronu a (c) nuklidu ^{3}He po rozpadu jádra? Potřebné hmotnosti atomů a částic jsou:

^{20}Ne	19,992 44 u	d	2,014 10 u
^{19}Ne	19,001 88 u	n	1,008 67 u
^{18}F	18,000 94 u	^{3}He	3,016 03 u
^{17}O	16,999 13 u		

77Ú. Nuklid ^{208}Pb je dvojnásobně magický, protože jak protonové číslo $Z = 82$, tak neutronové číslo $N = 126$ odpovídá zaplněným nukleonovým slupkám. Přidání dalšího protonu vede k ^{209}Bi, přidání dalšího neutronu k ^{209}Pb. Tyto dodatečné nukleony je možno oddělit snadněji než proton či neutron z uzavřených slupek ^{208}Pb. (a) Vypočtěte energii potřebnou k oddělení protonu z ^{209}Bi a srovnejte výsledek s energií potřebnou pro oddělení protonu ze zaplněné slupky ^{208}Pb. (b) Vypočtěte energii potřebnou k oddělení neutronu z ^{209}Pb a srovnejte výsledek s energií potřebnou pro oddělení neutronu ze zaplněné slupky ^{208}Pb. Souhlasí získané výsledky s očekáváním? Při výpočtu užijte následující hodnoty:

NUKLID	Z	N	ATOMOVÁ HMOTNOST (u)
^{209}Bi	82 + 1	126	208,980 4
^{208}Pb	82	126	207,976 7
^{207}Tl	82 − 1	126	206,977 4
^{209}Pb	82	126 + 1	208,981 1
^{207}Pb	82	126 − 1	206,975 9

Hmotnost protonu je 1,007 83 u a hmotnost neutronu 1,008 67 u.

78Ú. Jádro ^{91}Zr ($Z = 40$, $N = 51$) má jediný neutron vně zaplněného vnitřního jádra s 50 neutrony. Protože 50 je magické číslo, měl by být tento neutron vázán v jádře jen velmi volně. (a) Jakou má vazební energii? (b) Jakou má vazební energii další neutron, který musí být oddělen ze zaplněné slupky? (c) Jaká je vazební energie na jeden nukleon pro celé jádro? Porovnejte tyto tři hodnoty a objasněte výsledek. Potřebné atomové hmotnosti a hmotnosti částic jsou:

^{91}Zr	90,905 64 u	n	1,008 67 u
^{90}Zr	89,904 71 u	p	1,007 83 u
^{89}Zr	88,908 90 u		

79Ú. Vypočtěte (a) energii potřebnou pro oddělení protonu z jádra ^{121}Sb a (b) energii potřebnou pro oddělení protonu ze vzniklého jádra ^{120}Sn. Potřebné atomové hmotnosti jsou:

^{121}Sb	120,903 8 u
^{120}Sn	119,902 2 u
^{119}In	118,905 8 u

PROBLÉM

80. Po skončení 2. světové války uvěznily nizozemské úřady holandského umělce Hanse van Meegerena za velezradu, protože během války prodal mistrovské malířské dílo nechvalně známému nacistovi Hermanu Göringovi. Obraz *Kristus a jeho učedníci v Emauzích* od holandského mistra Jana Vermeera (1632–1675) objevil van Meegeren v roce 1937, po téměř 300 letech. Brzy po objevu prohlásila řada expertů *Emauzy* za možná nejlepší Vermeerovo dílo vůbec. Prodej tohoto holandského národního pokladu nepříteli byl nemyslitelný zločin.

Brzo po svém uvěznění však van Meegeren prohlásil, že autorem obrazu není Vermeer, ale on sám. Tvrdil, že pečlivě napodobil Vermeerův styl, použil 300 let staré plátno a Vermeerův výběr barev; potom přidělal na obraz Vermeerovu signaturu a obraz vypékal tak, aby získal autentický vzhled starého díla.

Lhal van Meegeren proto, aby se vyhnul odsouzení za velezradu a byl potrestán jen za menší zločin — podvod? Pro odborníky vypadaly *Emauzy* jako pravý Vermeer, ale v době soudu s van Meegerenem v roce 1947 neexistoval vědecky exaktní způsob, jak tuto otázku zodpovědět. V roce 1968 byl ale schopen Bernard Keisch z Carnegie-Mellon University najít odpověď pomocí nově vyvinutých metod radioaktivní analýzy.

Keisch analyzoval malý vzorek bílé barvy z *Emauz* obsahující olovo. Pigment se získává z olovnaté rudy, ve které se olovo vytváří dlouhou řadou radioaktivních rozpadů, která začíná nestabilním izotopem ^{238}U a končí stabilním izotopem ^{206}Pb. Abychom sledovali hlavní myšlenku Keischovy analýzy, soustřeďme se na následující zkrácenou část rozpadové řady

$$^{230}\text{Th} \xrightarrow[75\,400\text{ y}]{} {}^{226}\text{Ra} \xrightarrow[1\,600\text{ y}]{} {}^{210}\text{Pb} \xrightarrow[22{,}6\text{ y}]{} {}^{206}\text{Pb},$$

ve které jsou vynechány mezistupně tvořené krátce žijícími radionuklidy. Jsou uvedeny všechny důležité dlouhé poločasy

rozpadu. (a) Ukažte, že v jednotkovém vzorku olověné rudy je rychlost, se kterou se mění počet jader ^{210}Pb, dána vztahem

$$\frac{dN_{210}}{dt} = \lambda_{226} N_{226} - \lambda_{210} N_{210},$$

kde N_{210} a N_{226} jsou počty jader ^{210}Pb a ^{226}Ra v jednotkovém vzorku a λ_{210} a λ_{226} odpovídající rozpadové konstanty.

Protože rozpadová řada probíhá po miliardy let a protože poločas rozpadu ^{210}Pb je mnohem kratší než poločas rozpadu ^{226}Ra, jsou nuklidy ^{226}Ra a ^{210}Pb v *rovnováze*; tj. jejich počty (koncentrace) ve vzorku se nemění. (b) Jaký je podíl aktivit R_{226}/R_{210} těchto nuklidů v jednotkovém vzorku olověné rudy? (c) Jaký je poměr počtu jader N_{226}/N_{210}?

Když se z rudy získává olověná barva, odstraní se většina ^{226}Ra. Předpokládejme, že zůstane jen 1,00 % původního množství. Jaké jsou hodnoty podílů (d) R_{226}/R_{210} a (e) N_{226}/N_{210} hned poté, co byla barva vyrobena?

Keisch si uvědomil, že v průběhu času se bude podíl R_{226}/R_{210} postupně měnit z hodnoty, která odpovídá čerstvě vyrobené olověné barvě, zpět na hodnotu, která odpovídá olověné rudě, až se v barvě opět ustaví rovnováha mezi ^{210}Pb a zbytkovým ^{226}Ra. Jestliže *Emauzy* namaloval Vermeer, byl vzorek barvy studovaný v roce 1968 starý 300 let a poměr bude blízký odpovědi (b). Jestliže *Emauzy* namaloval van Meegeren ve třicátých letech a vzorek byl tedy starý pouhých 30 let, bude poměr blízký odpovědi (d). Keisch zjistil hodnotu $R_{226}/R_{210} = 0{,}09$. (f) Jsou *Emauzy* Vermeerovým dílem?

44
Energie z jádra



Obraz, který ohromil svět po 2. světové válce. Robert Oppenheimer vedl vědecký tým, který vyvinul atomovou bombu; když byl svědkem prvního jaderného výbuchu, citoval posvátný hinduistický text: „Nyní jsem se stal Smrtí, ničitelem světů.“ Jaká fyzika se skrývá za tímto obrazem, který tak děsí svět?

44.1 ATOM A JEHO JÁDRO

Když získáváme energii z uhlí spalováním v peci (tedy chemickou reakcí), zacházíme s atomy uhlíku a kyslíku tak, že uspořádáváme jejich *vnější elektrony* do stabilnějších kombinací. Když získáváme energii z uranu v jaderném reaktoru, jde opět o hoření paliva, ale tentokrát zacházíme s jeho *jádry* tak, že uspořádáváme jejich nukleony do stabilnějších kombinací.

Elektrony jsou vázány v atomech elektromagnetickou coulombovskou silou a pro jejich odtržení je třeba pouze několik elektronvoltů. Nukleony jsou ale v jádře vázány silnou jadernou silou a pro jejich odtržení je třeba několik *milionů* elektronvoltů. To se projevuje v tom, že z 1 kg uranu můžeme získat zhruba milionkrát více energie než z 1 kg uhlí.

Jak při atomovém, tak při jaderném spalování je uvolnění energie provázeno poklesem hmotnosti podle Einsteinovy rovnice $Q = \Delta mc^2$. Hlavní rozdíl mezi spalováním uranu a spalováním uhlí je, že v prvním případě je spotřebována podstatně větší část hmoty, která je k dispozici, opět s násobkem rovným několika milionům.

Různé procesy, které můžeme použít při atomovém nebo jaderném spalování vedou k rozdílným dosažitelným hodnotám výkonu, tedy rychlosti, s jakou získáváme energii. V případě jádra můžeme spálit kilogram uranu jediným výbuchem bomby nebo pomalu v reaktoru elektrárny. V případě atomu můžeme odpálit dynamitovou nálož nebo si pochutnat na koblize. (Překvapivě je celková uvolněná energie v druhém případě větší než v prvním!)

Tab. 44.1 udává, kolik energie můžeme získat nejrůznějšími způsoby z 1 kg hmoty. Namísto toho, aby uváděla přímo energii, ukazuje tabulka dobu, po kterou by mohla získaná energie napájet 100 W žárovku. V praxi byly využity pouze procesy uvedené na prvních třech řádcích; zbývající tři představují teoretické mezní hodnoty, které nemusíme získat při praktické realizaci. Spodní řádek, popisující úplnou anihilaci hmoty a antihmoty, je pak krajní mez při získávání energie. Když jsme přeměnili veškerou hmotu, nemůžeme už nic víc udělat.

Tabulka 44.1 **Energie uvolněná z 1 kg hmoty**

FORMA HMOTY	JEV	DOBA[a]
Voda	50 m vysoký vodopád	5 s
Uhlí	spalování	8 h
Obohacený UO_2	štěpení v reaktoru	690 y
^{235}U	úplné štěpení	$3{\cdot}10^4$ y
Horké plynné deuterium	úplná fúze	$3{\cdot}10^4$ y
Hmota a antihmota	úplná anihilace	$3{\cdot}10^7$ y

[a] Tento sloupec udává dobu, po kterou může vytvořená energie napájet 100 W žárovku.

Musíme si uvědomit, že tab. 44.1 porovnává pouze jednotkovou hmotnost. Srovnáváme-li kilogram uranu s kilogramem uhlí nebo vody, získáme několikamilionkrát více energie z uranu než z uhlí nebo padající vody. Na druhou stranu, v zemské kůře je uloženo velké množství uhlí a vodu snadno zadržíme ve velkém množství za přehradní zdí.

44.2 JADERNÉ ŠTĚPENÍ: ZÁKLADNÍ PROCES

V roce 1932 objevil anglický fyzik James Chadwick neutron. O několik let později zjistil v Římě Enrico Fermi se spolupracovníky, že při ostřelování různých prvků neutrony vznikají nové radioaktivní prvky. Fermi předpověděl, že nenabitý neutron bude vhodný jaderný projektil; na rozdíl od protonu nebo α-částice na něj nepůsobí při přibližování k povrchu jádra žádná odpudivá síla. Dokonce *tepelné neutrony*, což jsou pomalu se pohybující neutrony v tepelné rovnováze s okolím o pokojové teplotě, se střední kinetickou energií zhruba 0,04 eV, jsou velmi užitečnými projektily pro jaderný výzkum.

V pozdních třicátých letech ostřelovali takovými tepelnými neutrony roztoky uranových solí fyzička Lise Meitnerová a chemici Otto Hahn a Fritz Strassmann; pracovali v Berlíně a pokračovali po cestě ukázané Fermim a spolupracovníky. Zjistili, že po ostřelování vzniklo mnoho nových radioaktivních nuklidů. V roce 1939 (poté, co Meitnerová uprchla do neutrálního Švédska) byl při opakovaných pokusech jeden z těchto radioaktivních nuklidů bezpečně identifikován jako baryum. Hahnovi a Strassmannovi se zdálo divné, jak je možné, že při ostřelování uranu ($Z = 92$) neutrony může vzniknout tento prvek se středně velkou hmotností ($Z = 56$).

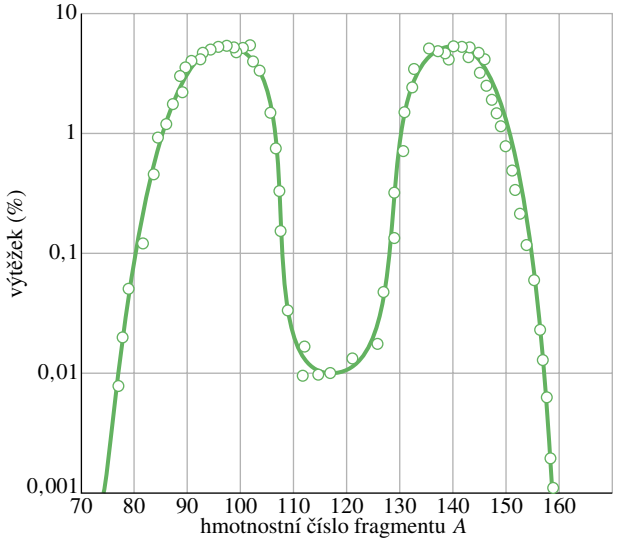
Záhadu vyřešila během několika týdnů Meitnerová a její synovec Otto Frisch. Navrhli model, podle kterého se může jádro uranu po absorpci tepelného neutronu rozdělit na dvě přibližně stejné části a přitom uvolnit energii; jedna z těch částí může být docela dobře baryum. Frisch pojmenoval tento jev **štěpení**.

Ústřední role Meitnerové při objevu štěpení, kterou ukázaly nedávné historické výzkumy, nebyla dostatečně uznána. Nepodílela se na Nobelově ceně za chemii, kterou získal Otto Hahn v roce 1944. Nakonec ale jak Hahn, tak Meitnerová byli poctěni tím, že jejich jména nesou chemické prvky hahnium (symbol Ha, $Z = 105$) a meitnerium (symbol Mt, $Z = 109$.)

Hlubší pohled na štěpení

Na obr. 44.1 je vynesen výtěžek fragmentů produkovaných při ostřelování ^{235}U tepelnými neutrony v závislosti

na hmotnostním čísle. Nejvíce pravděpodobná hmotnostní čísla fragmentů dosahují přibližně 7 %; jsou soustředěna kolem $A \approx 95$ a $A \approx 140$. Je to s podivem, ale ani dnes ještě neumíme vysvětlit „dvouhrbý“ tvar křivky na obr. 44.1.



Obr. 44.1 Závislost výtěžku fragmentů na jejich hmotnostním čísle, získaná po analýze mnoha případů štěpení ^{235}U. Všimněme si, že svislá stupnice je logaritmická.

Při typickém štěpení ^{235}U absorbuje jádro ^{235}U tepelný neutron a vytvoří složené jádro ^{236}U ve vysoce nabuzeném stavu. Ve skutečnosti je to *toto* jádro, které se štěpí a vytváří dva fragmenty. Tyto fragmenty velmi rychle emitují dva neutrony, takže jako produkty štěpení vzniknou v typickém případě ^{140}Xe ($Z = 54$) a ^{94}Sr ($Z = 38$). Celkový popis štěpné reakce je v tomto případě

$$^{235}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{236}\mathrm{U} \rightarrow {}^{140}\mathrm{Xe} + {}^{94}\mathrm{Sr} + 2\mathrm{n}. \quad (44.1)$$

Všimněme si, že při vytváření i štěpení složeného jádra se zachovává počet protonů i počet neutronů (a tedy jejich celkový počet a celkový náboj).

V rov. (44.1) jsou oba fragmenty ^{140}Xe a ^{94}Sr vysoce nestabilní, takže prodělají řadu β-rozpadů (s přeměnou neutronu na proton a emisí elektronu a neutrina), až se přemění na stabilní konečný produkt. Pro xenon nastává tato rozpadová řada:

$$^{140}\mathrm{Xe} \rightarrow {}^{140}\mathrm{Cs} \rightarrow {}^{140}\mathrm{Ba} \rightarrow {}^{140}\mathrm{La} \rightarrow {}^{140}\mathrm{Ce}$$

τ	14 s	64 s	13 d	40 h	stabilní
Z	54	55	56	57	58

(44.2)

Pro stroncium pak nastává rozpadová řada:

$$^{94}\mathrm{Sr} \rightarrow {}^{94}\mathrm{Y} \rightarrow {}^{94}\mathrm{Zr}$$

τ	75 s	19 min	stabilní
Z	38	39	40

(44.3)

Jak už jsme očekávali podle čl. 43.5, hmotnostní čísla fragmentů (140 a 94) se při β-rozpadu nemění, zato atomová čísla (na začátku 54 a 38) vzrostou o jedničku při každém kroku rozpadové řady.

Pohled na pás stability v přehledu nuklidů na obr. 43.4 nám vysvětluje, proč jsou fragmenty štěpení tak nestabilní. Nuklid ^{236}U, jádro štěpící se v reakci popsané rov. (44.1), má 92 protonů a 236 − 92, tedy 144 neutronů, což dává podíl neutronů/protonů přibližně 1,6. Primární fragmenty vzniklé bezprostředně po štěpení mají také přibližně tento podíl neutronů k protonům. Stabilní nuklidy v oblasti středních hmotnostních čísel však mají tento poměr v intervalu 1,3 až 1,4. Primární produkty jsou proto *bohaté na neutrony* (mají jich příliš mnoho) a budou proto mít tendenci „odpařit“ několik neutronů, například dva neutrony v reakci podle rov. (44.1). I tak jsou fragmenty štěpení příliš bohaté na neutrony, aby byly stabilní. Rozpad β nabízí způsob, jak se přebytku neutronů zbavit tím, že se uvnitř samotného jádra přemění na protony.

Pro odhad energie uvolněné při štěpení můžeme použít křivku vazební energie z obr. 43.6. Z této křivky je vidět, že pro nuklidy s vysokým hmotnostním číslem ($A \approx 240$) je hodnota vazební energie na nukleon přibližně 7,6 MeV. Pro nuklidy se středně velkým hmotnostním číslem ($A \approx \approx 120$) je to přibližně 8,5 MeV. Rozdíl v celkové vazební energii jednoho velkého jádra ($A \approx 240$) a obou fragmentů (předpokládejme stejný počet nukleonů), na které se může rozdělit, je potom

$$Q = 2(8{,}5\,\mathrm{MeV})(120) - (7{,}6\,\mathrm{MeV})(240) \doteq$$
$$\doteq 200\,\mathrm{MeV}. \quad (44.4)$$

Pečlivější výpočet v př. 44.1 souhlasí pozoruhodně dobře s tímto hrubým odhadem.

KONTROLA 1: Charakteristická štěpná reakce je

$$^{235}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow \mathrm{X} + \mathrm{Y} + 2\mathrm{n}.$$

Která z následujících dvojic *nemůže* představovat X a Y: (a) ^{141}Xe a ^{93}Sr; (b) ^{139}Cs a ^{95}Rb; (c) ^{156}Nd a ^{79}Ge; (d) ^{121}In a ^{113}Rb?

PŘÍKLAD 44.1

Spočtěte energii Q reakce pro štěpení podle rov. (44.1) a pro rozpad fragmentů podle rov. (44.2) a (44.3).

ŘEŠENÍ: Energii reakce spočteme ze vztahu $Q = \Delta mc^2$. Budeme potřebovat následující hmotnosti atomů a částic:

^{235}U	235,043 9 u	^{140}Ce	139,905 4 u
n	1,008 67 u	^{94}Zr	93,906 3 u

Spojením rov. (44.1) se vztahy (44.2) a (44.3) dostáváme pro celkovou reakci

$$^{235}\mathrm{U} \rightarrow {}^{140}\mathrm{Ce} + {}^{94}\mathrm{Zr} + \mathrm{n}. \qquad (44.5)$$

V tomto vztahu se vyskytuje pouze jeden neutron, protože počáteční neutron na levé straně rov. (44.1) vyruší jeden ze dvou neutronů na pravé straně tohoto vztahu. Rozdíl v hmotnostech pro reakci z rov. (44.5) je tedy

$$\begin{aligned}\Delta m &= (235{,}043\,9\,\mathrm{u}) - \\ &\quad - (139{,}905\,4\,\mathrm{u} + 93{,}906\,3\,\mathrm{u} + 1{,}008\,67\,\mathrm{u}) = \\ &= 0{,}223\,53\,\mathrm{u}\end{aligned}$$

a odpovídající energie reakce je

$$\begin{aligned}Q = \Delta m c^2 &= (0{,}223\,53\,\mathrm{u})(931{,}5\,\mathrm{MeV/u}) = \\ &= 208\,\mathrm{MeV}, \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

tedy v dobrém souhlasu s naším odhadem v rov. (44.4).

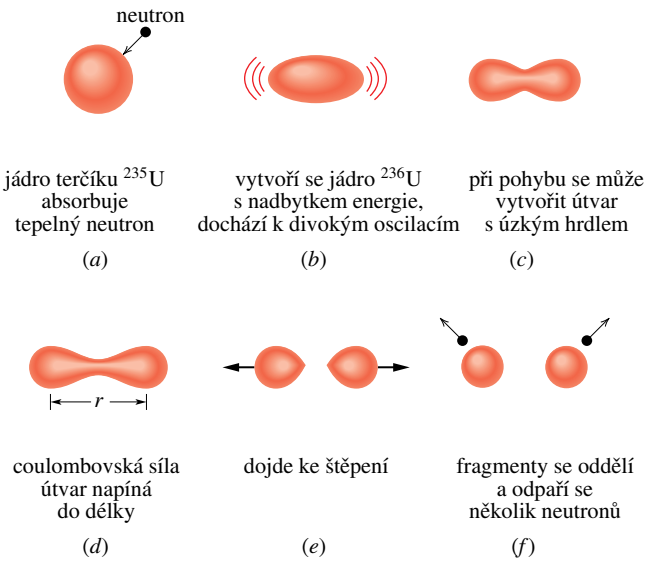
Odehrává-li se štěpení v pevné látce, projeví se většina energie reakce ve vzrůstu vnitřní energie tělesa, pozorovaném jako vzrůst teploty. Zhruba pět až šest procent energie reakce je však vázáno na neutrina emitovaná při β-rozpadu primárních fragmentů. Tato energie je odnášena mimo soustavu a je „ztracena“.

44.3 MODEL JADERNÉHO ŠTĚPENÍ

Brzy po objevu štěpení použili Niels Bohr a John Wheeler kolektivní model jádra založený na analogii jádra a kapky nabité tekutiny pro vysvětlení jeho základních vlastností. Obr. 44.2 znázorňuje, jak štěpení probíhá podle tohoto modelu. Když těžké jádro (například ^{235}U) absorbuje pomalý (tepelný) neutron jako na obr. 44.2a, padne neutron do potenciálové jámy vytvořené silnou jadernou silou, která působí uvnitř jádra. Potenciální energie neutronu se pak přemění na vnitřní excitační energii jádra, jak znázorňuje obr. 44.2b. Množství excitační energie, které přináší neutron jádru, je rovné práci potřebné pro oddělení neutronu od jádra, tedy vazební energii E_n neutronu.

Obr. 44.2c, d ukazují, jak se u jádra, které se chová jako výrazně kmitající kapka nabité tekutiny, vytvoří krátké „hrdlo“ a začnou se oddělovat dvě nabité „kapky“. Je-li elektrické odpuzování obou kapek tak silné, že se hrdlo přetrhne, oba vzniklé fragmenty od sebe odletí a každý si odnese část zbylé excitační energie (obr. 44.2e, f). Došlo ke štěpení.

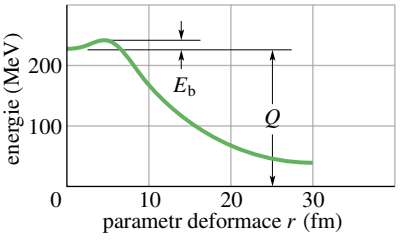
Až sem dává tento model dobrý kvalitativní popis štěpné reakce. Teď ale musíme zjistit, zda je schopen odpovědět na velmi těžkou otázku: Proč se některé těžké nuklidy



Obr. 44.2 Vývoj jednotlivých stadií typického procesu štěpení podle kolektivního (kapkového) modelu, který navrhli Bohr a Wheeler.

(například ^{235}U a ^{239}Pu) dají snadno štěpit tepelnými neutrony a proč jiné, stejně hmotné nuklidy (například ^{238}U a ^{243}Am) nikoli?

Bohr a Wheeler byli schopni tuto otázku zodpovědět. Na obr. 44.3 je graf potenciální energie v různých stadiích štěpení jádra, odvozený z jejich modelu štěpné reakce. Energie je vynášena v závislosti na *parametru deformace* r,



Obr. 44.3 Potenciální energie v různých vývojových stadiích procesu štěpení podle kolektivního modelu, navrženého Bohrem a Wheelerem. Jsou vyznačeny energie Q reakce (přibližně 200 MeV) a výška potenciálové bariéry E_b.

který je zhruba mírou toho, jak moc se kmitající jádro odchýlilo od kulového tvaru. Na obr. 44.2d je naznačeno, jak je parametr r definován těsně před rozštěpením. Po oddělení fragmentů je jednoduše roven vzdálenosti mezi jejich středy.

Na obr. 44.3 je vyznačen rozdíl energie počátečního a konečného stavu štěpícího se jádra, tj. energie Q reakce. Podstatné na grafu je však to, že křivka potenciální energie má v jisté vzdálenosti r maximum. Existuje tedy potenciálová bariéra o výšce E_b, která musí být překonána (přímo

nebo tunelováním) dříve, než může dojít ke štěpení. To nám připomíná α-rozpad (obr. 43.9), jehož vznik také omezuje potenciálová bariéra.

Z toho vidíme, že ke štěpení může dojít pouze tehdy, dodá-li absorbovaný neutron excitační energii E_n dostatečnou k překonání bariéry. Tato energie E_n nemusí *přesahovat* výšku potenciálové bariéry E_b vzhledem k možnosti tunelování v kvantové fyzice.

Tab. 44.2 obsahuje srovnání podmínek pro štěpení tepelnými neutrony pro čtyři nuklidy s velkými hmotnostními čísly, vybranými z desítek možných kandidátů. Pro každý nuklid obsahuje tabulka jak výšku potenciálové bariéry E_b, tak excitační energii E_n. První hodnota byla spočtena podle Bohrova a Wheelerova modelu; druhá porovnáním známých hmotností ze vztahu $Q = \Delta mc^2$.

Tabulka 44.2 **Schopnost štěpení u čtyř nuklidů**

NUKLID TERČE	ŠTĚPENÝ NUKLID	E_n (MeV)	E_b (MeV)	ŠTĚPENÍ TEPELNÝMI NEUTRONY?
^{235}U	^{236}U	6,5	5,2	ano
^{238}U	^{239}U	4,8	5,7	ne
^{239}Pu	^{240}Pu	6,4	4,8	ano
^{243}Am	^{244}Am	5,5	5,8	ne

Vidíme, že pro ^{235}U a ^{239}Pu je $E_n > E_b$. To znamená, že pro tyto nuklidy můžeme předpokládat štěpení absorpcí tepelných neutronů. Pro další dva nuklidy (^{238}U a ^{243}Am) máme $E_n < E_b$; v tomto případě nedodá tepelný neutron jádru dostatek energie na překonání bariéry nebo dostatečně účinné tunelování potenciálovou bariérou. Proto místo štěpení jádro uvolní excitační energii emisí fotonu γ-záření.

^{238}U a ^{243}Am však *lze* přimět ke štěpení, pokud absorbují neutron s energií podstatně větší, než mají tepelné neutrony. Například pro ^{238}U musí mít absorbovaný neutron energii nejméně 1,3 MeV, aby nastala slušná pravděpodobnost reakce nazývané *rychlé štěpení*.

44.4 JADERNÝ REAKTOR

Abychom mohli využít jaderné štěpení pro uvolnění energie ve velkém množství, musí jedno štěpení nuklidu spouštět další tak, aby se reakce šířila v jaderném palivu, jako když plamen prohořívá polenem. Skutečnost, že se při štěpení vytváří více neutronů, než je pohlcených, zvyšuje pravděpodobnost **řetězové reakce**: každý vytvořený neutron má možnost spustit další štěpení. Tato reakce může být buď rychlá (jako v jaderné bombě), nebo řízená (jako v jaderném reaktoru).

Pokusme se teď navrhnout jaderný reaktor založený na štěpení ^{235}U tepelnými neutrony. Přírodní uran obsahuje 0,7 % tohoto izotopu, zbývajících 99,3 % tvoří izotop ^{238}U, který se nemůže štěpit tepelnými neutrony. Zlepšeme si výchozí situaci tím, že budeme používat uměle obohacený uran s přibližně 3 % ^{235}U. I tak stojí na cestě k fungujícímu reaktoru tři překážky.

1. ***Problém úniku neutronů.*** Některé neutrony vytvořené při štěpení uniknou z reaktoru a nezúčastní se tedy řetězové reakce. Únik neutronů je povrchový jev, jeho velikost je úměrná druhé mocnině typického rozměru reaktoru (plocha povrchu krychle s hranou délky a je $6a^2$). Neutrony vznikají v celém objemu paliva a jejich počet je proto úměrný třetí mocnině typického rozměru (objem krychle je a^3). Podle potřeby můžeme získat libovolně malý podíl unikajících neutronů prostě tím, že zvětšováním jádra reaktoru se zmenšuje poměr jeho povrchu k objemu (pro krychli jako $6/a$).

2. ***Problém energie neutronů.*** Neutrony vznikající při štěpení jsou rychlé, s kinetickou energií okolo 2 MeV. Štěpení je ale vyvoláno s největší účinností tepelnými neutrony. Rychlé neutrony mohou být v reaktoru zpomaleny tím, že smícháme uranové palivo s látkou — nazývá se **moderátor** — která má dvě vlastnosti: účinně zpomaluje neutrony při pružných srážkách a nezmenšuje počet neutronů v jádře reaktoru pohlcováním neutronů jinými reakcemi. Většina reaktorů v USA stejně jako reaktory v Dukovanech a v Temelíně užívá jako moderátor vodu; účinnou složkou ve vodě jsou jádra vodíkových atomů (protony). Viděli jsme v kap. 10, že při čelní srážce předá pohybující se částice *všechnu* svou kinetickou energii stojící částici, mají-li obě částice stejnou hmotnost. Protony jsou tedy velmi účinný moderátor, protože mají hmotnost v podstatě stejnou jako hmotnost neutronů, jejichž rychlost chceme snížit.

3. ***Problém záchytu neutronů.*** Když jsou rychlé (2 MeV) neutrony vytvářené při štěpení zpomalovány v moderátoru na tepelné energie (přibližně 0,04 eV), procházejí kritickým intervalem energií (od 1 eV do 100 eV), ve kterém je velká pravděpodobnost toho, že budou zachyceny jádry ^{238}U. Tento *rezonanční záchyt*, který vede k emisi fotonu γ-záření, vyřazuje neutron z řetězové reakce. Aby byla pravděpodobnost tohoto záchytu co nejmenší, nejsou v reaktoru palivo a moderátor zcela promíchány, ale jsou „rozmístěny“ tak, že zaujímají rozdílné oblasti v objemu reaktoru.

V typickém reaktoru je uranové palivo ve tvaru tablet oxidu uranu, naskládaných na sebe do dlouhých dutých kovových trubek. Svazky těchto **palivových tyčí** jsou obklopeny tekutým moderátorem a tvoří jádro reaktoru. Tato geometrie zvyšuje pravděpodobnost, že rychlý neutron vytvořený v palivové tyči se bude nacházet při pohybu s energiemi z kritického intervalu v oblasti moderátoru. I když

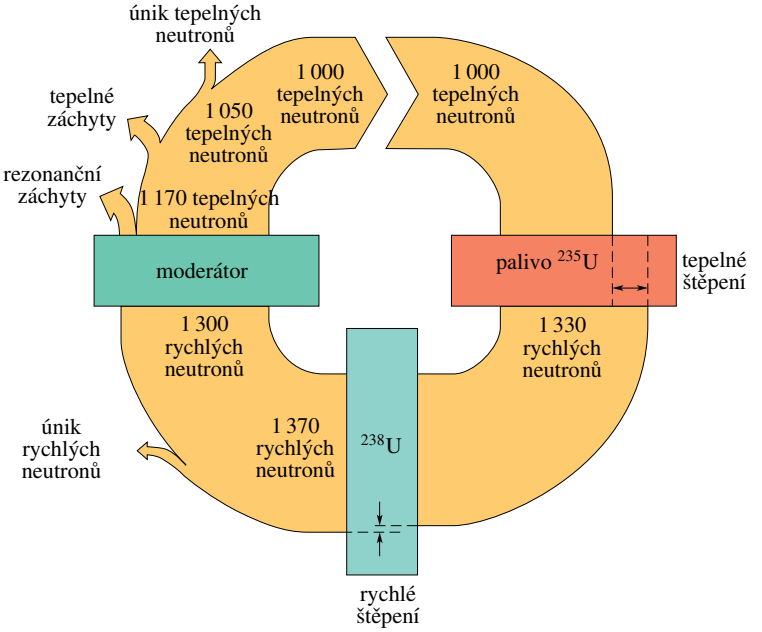
je neutron zpomalen na tepelnou energii, může být pohlcen při reakcích, které nevedou ke štěpení (*tepelný záchyt*). Je však daleko pravděpodobnější, že se tepelný neutron dostane zpět do palivové tyče a vyvolá nové štěpení.

Obr. 44.4 ukazuje rovnováhu neutronů v typickém reaktoru, který pracuje při konstantním výkonu. Sledujme vzorek 1 000 tepelných neutronů procházejících jedním úplným cyklem (žijících jednu *generaci*) v jádře reaktoru. Tyto neutrony vytvářejí 1 330 neutronů štěpením jader ^{235}U a 40 neutronů rychlým štěpením jader ^{238}U, dohromady o 370 více neutronů než původních 1 000; všechny neutrony jsou teď rychlé. Pracuje-li reaktor při konstantním výkonu, je pak přesně stejný počet neutronů (370) ztracen únikem z jádra reaktoru a záchyty, které nevedou ke štěpení. Zbývajících 1 000 tepelných neutronů pokračuje v řetězové reakci. Přirozeně každý z 370 neutronů, které byly v tomto cyklu vytvořeny štěpením jader a nepokračují v řetězové reakci, představuje přírůstek energie v jádře reaktoru, který vede k zahřívání jádra.

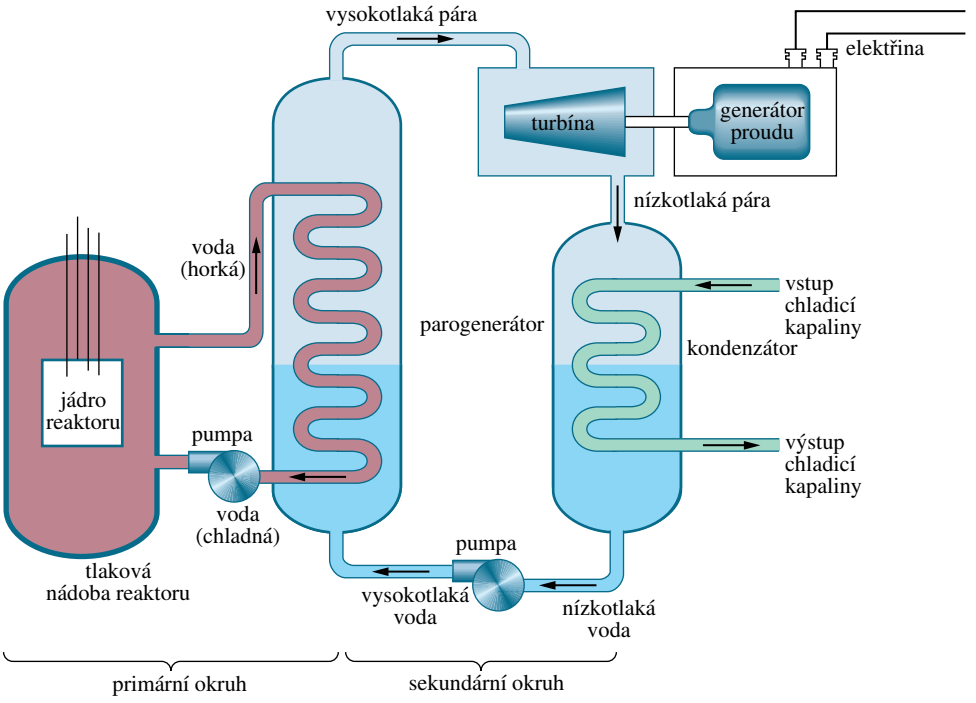
Násobicí faktor k — důležitý parametr reaktoru — je poměr počtu neutronů přítomných na začátku určité generace k počtu neutronů na začátku předchozí generace. V obr. 44.4 je násobicí faktor 1 000/1 000 neboli přesně jedna. Při $k = 1$ mluvíme o přesně *kritickém* režimu práce reaktoru; takový režim je potřebný pro práci s konstantním výkonem. Ve skutečnosti jsou reaktory navrhovány tak, že bez dalšího zásahu jsou v *nadkritickém* režimu ($k > 1$); násobicí faktor je pak nastaven na kritickou hodnotu ($k = 1$) vkládáním **řídicích tyčí** do jádra reaktoru. Tyto tyče obsahují látky jako kadmium, které snadno pohlcují neutrony. Řídicí tyče zasouváme do reaktoru, aby se snížila hladina výkonu, a vysouváme, aby se hladinu výkonu zvýšila nebo aby se kompenzoval chod reaktoru v *podkritickém* režimu, když se v něm při dlouhodobém provozu hromadí produkty štěpení pohlcující neutrony.

Jestliže vyjmeme velmi rychle jednu z řídicích tyčí, jak rychle vzroste výkon reaktoru? Tato *odezva* je ovlivněna fascinující okolností, že malá část neutronů vznikající při štěpení neuniká okamžitě z nově vytvořených štěpných fragmentů, ale o něco později, když procházejí fragmenty β-rozpadem. Například z 370 „nových“ neutronů vytvořených při cyklu na obr. 44.4 je 16 zpožděno, protože jsou emitovány z fragmentů po β-rozpadech s poločasy rozpadu v intervalu od 0,2 s do 55 s. Těchto zpožděných neutronů je sice málo, ale způsobují takové zpomalení odezvy reaktoru, že je srovnatelná s prakticky dosažitelnými dobami mechanických operací.

Na obr. 44.5 je blokové schéma elektrárny pracující s tlakovodním reaktorem (PWR), který se často používá v USA a je použit i v elektrárnách v České republice. V tomto typu reaktoru se voda používá jako moderátor i jako médium přenášející teplo. V *primárním okruhu* protéká nádobou reaktoru voda o vysoké teplotě i tlaku (třeba 600 K a 150 atm) a přenáší energii od horkého jádra reaktoru k parogenerátoru, který je součástí *sekundárního okruhu*. V parogenerátoru vzniká vypařováním vysokotlaká pára, poháněj ící turbínu generátoru elektrického proudu. Sekundární okruh je zakončen kondenzátorem, kde se ochlazuje pára o nízkém tlaku a jako voda se vhání pumpou zpět do parogenerátoru. Pro lepší představu uvedeme



Obr. 44.4 Bilance počtu neutronů v reaktoru. Generace 1 000 neutronů interaguje s palivem ^{235}U rozptýleným v ^{238}U a s moderátorem. Vytváří 1 370 neutronů při jaderném štěpení; 370 z nich unikne nebo je ztraceno jiným záchytem než štěpením; zbývá tak 1 000 neutronů patřících další generaci. Obrázek odpovídá reaktoru, který pracuje s konstantním výkonem.



Obr. 44.5 Zjednodušené schéma elektrárny pracující s tlakovodním reaktorem. Je vynecháno množství dalších prvků — mezi nimi zařízení pro chlazení jádra reaktoru v případě havárie.

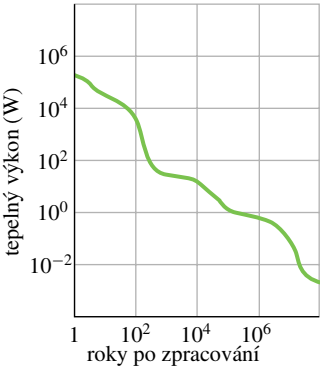
typické rozměry: nádoba reaktoru pro elektrárnu dodávající 1 000 MW (elektrického) výkonu je zhruba 12 m vysoká a váží 450 tun. Voda protéká primárním okruhem v množství asi 1 000 m^3/min.



Takto to vypadalo ze vzdálenosti 20 m od čtvrtého reaktoru Černobylské elektrárny (blízko Kyjeva) po explozi v dubnu 1986. Téměř všechny nestabilní radionuklidy z reaktoru unikly do atmosféry.

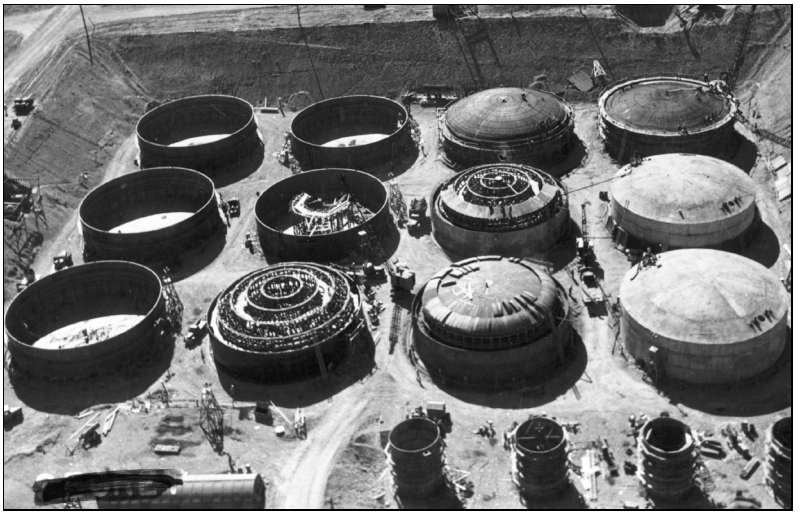
Nevyhnutelným průvodním jevem provozu reaktoru je nahromadění radioaktivního odpadu, který tvoří jak produkty štěpení, tak těžké *transuranové* nuklidy jako plutonium a americium. Možnou mírou jejich radioaktivity je rychlost, s jakou uvolňují energii ve formě tepla. Obr. 44.6 ukazuje tepelný výkon produkovaný radioaktivními odpady po jednoročním provozu typické velké jaderné elektrárny. Všimněme si, že obě stupnice jsou logaritmické. Většina „spotřebovaných" palivových tyčí z provozu jaderných reaktorů se skladuje v blízkosti elektrárny ponořena ve vodě; trvalá bezpečná úložiště se teprve musí vybudovat.

Obr. 44.6 Tepelný výkon uvolňovaný radioaktivními odpady po jednoročním provozu typické velké jaderné elektrárny v závislosti na čase. Křivka vznikla jako souhrn jevů při rozpadu mnoha radionuklidů s širokým spektrem poločasu rozpadu. Obě stupnice jsou logaritmické.



Většina radioaktivního odpadu ze zbraní, který se nahromadil během 2. světové války a v letech po ní, je také uložena v místních skladištích. Například obr. 44.7 ukazuje výstavbu soustavy podzemních cisteren v Hanford Site ve státě Washington; každá z velkých cisteren pojme 1 000 m^3 vysoce radioaktivního tekutého odpadu. Ve skla-

dišti je nyní 152 takových cisteren. Navíc je množství pevného odpadu jak s nízkou radioaktivitou (například kontaminované oděvy), tak s vysokou radioaktivitou (například jádra reaktorů z vyřazených jaderných ponorek) zakopáno v jámách.



Obr. 44.7 Fotografie výstavby podzemního úložiště cisteren v Hanford Site ve státě Washington během 2. světové války. Všimněte si nákladních aut a dělníků. Každá z velkých cisteren pojme téměř 1 000 m^3 vysoce radioaktivního tekutého odpadu.

PŘÍKLAD 44.2

Velká elektrárna pracuje s tlakovodním jaderným reaktorem. Tepelný výkon v jádře reaktoru je 3 400 MW a elektrický výkon je 1 100 MW. Palivo tvoří 86 000 kg uranu ve 110 tunách oxidu uranu, rozložených do 57 000 palivových tyčí. Uran je obohacen na 3,0 % ^{235}U.

(a) Jaká je účinnost elektrárny?

ŘEŠENÍ: Z definice účinnosti (rov. (21.5)) máme

$$\text{účinnost} = \frac{\text{užitečný výstup}}{\text{vstupující energie}} = \frac{(1\,100\,\text{MW})(\text{elektřina})}{(3\,400\,\text{MW})(\text{teplo})} = 0{,}32 \quad \text{neboli } 32\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pro všechny elektrárny ať už na fosilní, nebo jaderné palivo se účinnost podřizuje druhému zákonu termodynamiky. Při provozu této elektrárny se tedy do okolí musí rozptýlit tepelná energie o výkonu 3 400 MW − 1 100 MW, tedy 2 300 MW.

(b) Kolik rozpadů R probíhá v reaktoru za jednotku času?

ŘEŠENÍ: Jestliže $P = 3\,400$ MW je tepelný výkon v jádře reaktoru a $Q = 200$ MeV je průměrná energie uvolněná při jednom štěpení, pak

$$R = \frac{P}{Q} = \frac{(3{,}4\cdot10^9\ \text{W})}{(200\ \text{MeV})}\left(\frac{1\ \text{MeV}}{1{,}60\cdot10^{-13}\ \text{J}}\right)\left(\frac{1\ \text{J}\cdot\text{s}^{-1}}{1\ \text{W}}\right) = 1{,}06\cdot10^{20}\ \text{s}^{-1} \doteq 1{,}1\cdot10^{20}\ \text{s}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) S jakou rychlostí se spotřebovává ^{235}U v palivu? Předpokládejte stav na počátku provozu.

ŘEŠENÍ: ^{235}U se spotřebovává štěpením s rychlostí spočtenou v (b). Dále je spotřebováván s rychlostí asi čtvrtinovou neutronovými záchyty, které nevedou ke štěpení. Celková spotřeba ^{235}U je tedy

$$(1{,}25)(1{,}06\cdot10^{20}\ \text{s}^{-1}) = 1{,}33\cdot10^{20}\ \text{s}^{-1}.$$

Výsledek vyjádříme jako časový úbytek hmotnosti M použitím hodnoty molární hmotnosti 0,235 kg·mol^{-1} a Avogadrovy konstanty:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = (1{,}33\cdot10^{20}\ \text{s}^{-1})\left(\frac{0{,}235\ \text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}}{6{,}02\cdot10^{23}\ \text{mol}^{-1}}\right) = 5{,}19\cdot10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 4{,}5\ \text{kg}\cdot\text{d}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jak dlouho vydrží zásoba paliva při této rychlosti spotřeby?

ŘEŠENÍ: Ze zadaných hodnot můžeme vypočítat, že na počátku máme přibližně $(0{,}030)(86\,000\ \text{kg}) = 2\,580$ kg ^{235}U. Tedy poněkud zjednodušená odpověď je

$$T = \frac{(2\,580\ \text{kg})}{(4{,}5\ \text{kg}\cdot\text{d}^{-1})} \doteq 570\ \text{d}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V praxi ovšem musí být palivové tyče (zpravidla po svazcích) vyměňňovány dříve, než je všechen obsažený ^{235}U zcela spotřebován.

(e) Jakou rychostí se v jádře reaktoru „uvolňuje atomová energie“ (tj. mění se vazební energie jader na jiné formy energie) v přepočtu na odpovídající hmotnost?

ŘEŠENÍ: Podle Einsteinova vztahu $E = mc^2$ můžeme psát

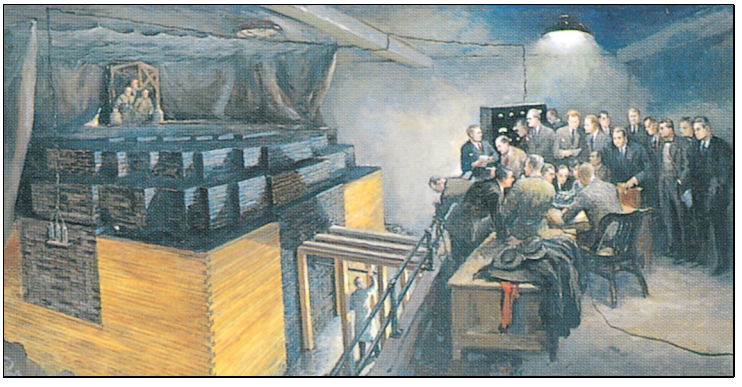
$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E/\mathrm{d}t}{c^2} = \frac{P}{c^2} = \frac{(3{,}4\cdot10^9\ \text{W})}{(3{,}00\cdot10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2} = 3{,}8\cdot10^{-8}\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 3{,}5\ \text{g}\cdot\text{d}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vidíme, že tato rychlost odpovídá každodennímu úbytku hmotnosti malé mince! Rychlost, s jakou se proměňuje hmotnost na jiné formy energie, je veličina naprosto odlišná od rychlosti spotřeby paliva (ztráty ^{235}U) spočtené v (c).

KONTROLA 2: V př. 44.2 jsme viděli, že elektrický výkon jaderné elektrárny ($P_e = 1\,100$ MW) byl menší než výkon rozptýlený do okolí ($P_r = 2\,300$ MW). Co říká druhá věta termodynamická: (a) Vyžaduje, aby P_e bylo vždy menší než P_r? (b) Dovoluje, aby P_e bylo větší než P_r? (c) Dovoluje, aby při optimálním návrhu reaktoru bylo P_r rovno nule?

44.5 PŘÍRODNÍ JADERNÝ REAKTOR

Druhého prosince 1942, když Enrico Fermi a jeho spolupracovníci poprvé spustili reaktor tak, že začal pracovat v kritickém režimu (obr. 44.8), měli fyzikové plné právo domnívat se, že uvedli do provozu první jaderný reaktor v historii této planety. O 30 let později se však zjistilo, že pokud si to tehdy mysleli, neměli pravdu.



Obr. 44.8 Obraz prvního jaderného reaktoru, který postavila během 2. světové války na hřišti pro squash University of Chicago skupina, vedená Enrico Fermim. Tento reaktor začal pracovat v kritickém režimu 2. prosince 1942; byl sestaven z uranových hrudek zabudovaných do grafitových cihel. Posloužil jako prototyp pro konstrukci dalších reaktorů, které měly vyrábět plutonium pro jaderné zbraně.

Před zhruba dvěma miliardami let v uranových usazeninách v africkém Gabunu, kde se nyní těží uran, došlo pravděpodobně k zažehnutí přírodního jaderného reaktoru a ten pak pracoval do vyhasnutí po dobu několika stovek tisíců let. Můžeme analyzovat tuto hypotézu uvážením dvou otázek:

1. ***Byl tam dostatek paliva?*** Palivo pro reaktor založený na štěpení uranu musí být snadno štěpitelný izotop ^{235}U, který představuje pouze 0,72 % přírodního uranu. Tento izotopický poměr byl měřen pro pozemské vzorky, kameny z Měsíce a v meteoritech; ve všech případech je hodnota stejná. Klíčem k objevu v západní Africe bylo zjištění, že uran v tomto nalezišti má menší podíl ^{235}U, některé vzorky méně než 0,44 %. Úbytek izotopu ^{235}U mohl být vysvětlen tak, že tento izotop byl někdy v minulosti spotřebován při provozu přírodního jaderného reaktoru.

Vážným problémem je, že při tak nízké koncentraci 0,72 % izotopu ^{235}U musí být reaktor (jak také zjistili Fermi se spolupracovníky) navržen velmi důmyslně a s přísnými požadavky na dodržení i detailů návrhu. Není tedy možné, aby se jaderný reaktor dostal do kritického režimu „přírodní cestou“.

V dávné minulosti však vše vypadalo jinak. Oba izotopy ^{235}U a ^{238}U jsou radioaktivní s poločasy rozpadu $7{,}04\cdot10^8$ y a $44{,}7\cdot10^8$ y. Poločas rozpadu u snadněji štěpitelného ^{235}U je tedy asi 6,5krát kratší než u ^{238}U. Protože se ^{235}U rozpadá rychleji, bylo ho v minulosti vzhledem k ^{238}U více. Před dvěma miliardami let tvořil jeho podíl nikoli současných 0,72 %, ale téměř 3,8 %. Tato koncentrace je přibližně taková, na jakou uměle obohacujeme přírodní uran pro dnešní reaktory.

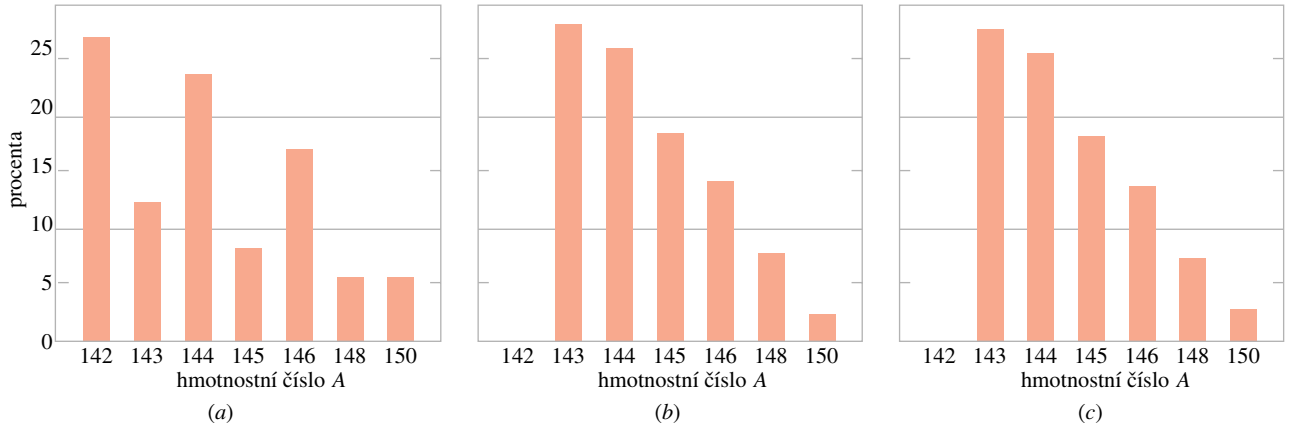
S takovým dostatkem snadno štěpitelného paliva nás již existence přírodního reaktoru (jsou-li splněny určité další podmínky) tolik nepřekvapí. Palivo zde tedy bylo. Mimochodem, před dvěma miliardami let tvořily nejvyšší dosaženou formu života zelené řasy.

2. ***Jaké máme důkazy?*** Samotný úbytek ^{235}U v rudném nalezišti ještě nedokazuje existenci přírodního štěpného reaktoru. Potřebujeme přesvědčivější důkazy.

Pokud zde pracoval reaktor, musíme najít i produkty štěpení. Musí zůstat alespoň některé ze zhruba 30 prvků, jejichž stabilní izotopy vznikají při štěpení. Studium četnosti výskytu izotopů může přinést potřebný přesvědčivý důkaz.

Z několika zkoumaných prvků je neobyčejně přesvědčivý případ neodymu. Obr. 44.9a ukazuje normální výskyt sedmi stabilních izotopů neodymu v přírodě. Na obr. 44.9b je jejich výskyt v konečných produktech štěpení ^{235}U. Výrazný rozdíl ve výskytu izotopů není překvapivý vzhledem k zcela odlišným podmínkám vzniku obou souborů. Všimněme si především izotopu ^{142}Nd, který převažuje v přírodním neodymu a zcela chybí v neodymu vzniklém štěpením.

Základní otázka teď je: Jakému rozdělení výskytu izotopů neodymu se podobá rozdělení v uranové rudě ze západní Afriky? Pokud zde pracoval přírodní reaktor, musíme očekávat, že najdeme rozdělení z *obou* případů (to znamená jak přírodní izotopy, tak izotopy ze štěpení). Obr. 44.9c ukazuje výsledky po provedení opravy na tuto skutečnost a po několika dalších úpravách dat. Srovnání obr. 44.9b, c naznačuje, že zde skutečně pracoval přírodní štěpný reaktor.



Obr. 44.9 Četnost výskytu v závislosti na hmotnostním čísle izotopů neodymu (a) pro přírodní pozemská naleziště rud obsahujících tento prvek a (b) pro vyhořelé palivo jaderného reaktoru. (c) Četnost výskytu (po několika opravách) pro neodym z uranového dolu v západoafrickém Gabunu. Všimněte si, že grafy (b) a (c) jsou téměř totožné a že se zcela odlišují od grafu (a).

Důležitou skutečností je to, že produkty štěpení probíhajícího v přírodním reaktoru v západní Africe před dvěma miliardami let se nerozšířily mimo místo, kde byly vytvořeny. Z toho můžeme učinit závěr, že není nerozumné uvažovat o dlouhodobém skladování radioaktivního odpadu v místech s vhodnými geologickými podmínkami.

PŘÍKLAD 44.3

Podíl ^{235}U a ^{238}U v přírodních nalezištích je dnes 0,007 2. Jaký byl tento podíl před $2{,}0\cdot10^9$ y? Poločasy rozpadu dvou uvažovaných izotopů jsou $7{,}04\cdot10^8$ y a $44{,}7\cdot10^8$ y.

ŘEŠENÍ: Uvažujme dva vzorky, které v čase $t = 0$ v minulosti obsahovaly $N_5(0)$ atomů ^{235}U a $N_8(0)$ atomů ^{238}U. Počet atomů v současném čase t je

$$N_5(t) = N_5(0)e^{-\lambda_5 t} \quad \text{a} \quad N_8(t) = N_8(0)e^{-\lambda_8 t},$$

kde λ_5 a λ_8 jsou odpovídající konstanty rozpadu. Vydělením výrazů

$$\frac{N_5(t)}{N_8(t)} = \frac{N_5(0)}{N_8(0)}e^{-(\lambda_5-\lambda_8)t}.$$

Pomocí izotopického poměru $r = N_5/N_8$ dostáváme

$$r(0) = r(t)e^{(\lambda_5-\lambda_8)t}.$$

Konstanty rozpadu jsou vyjádřeny pomocí poločasů rozpadu v rov. (43.8), což dává

$$\lambda_5 = \frac{\ln 2}{\tau_5} = \frac{\ln 2}{(7{,}04\cdot10^8\ \text{y})} = 9{,}85\cdot10^{-10}\ \text{y}^{-1}$$

a

$$\lambda_8 = \frac{\ln 2}{\tau_8} = \frac{\ln 2}{(44{,}7\cdot10^8\ \text{y})} = 1{,}55\cdot10^{-10}\ \text{y}^{-1}.$$

Exponent ve výrazu pro $r(0)$ je

$$(\lambda_5 - \lambda_8)t = ((9{,}85 - 1{,}55)\cdot10^{-10}\ \text{y}^{-1})(2\cdot10^9\ \text{y}) = 1{,}66.$$

Izotopický poměr je pak

$$r(0) = r(t)e^{(\lambda_5-\lambda_8)t} = (0{,}007\,2)(e^{1{,}66}) =$$
$$= 0{,}037\,9 \doteq 3{,}8\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Před dvěma miliardami let byl podíl ^{235}U k ^{238}U v přírodních nalezištích uranu mnohem vyšší než dnes. Měli byste být schopni ukázat, že v době, kdy se Země utvářela (před 4,5 miliardami let) byl tento podíl 30 %.

44.6 TERMOJADERNÁ FÚZE: ZÁKLADNÍ REAKCE

Křivka vazební energie na obr. 43.6 ukazuje, že při sloučení dvou lehkých jader do jednoho těžšího se může uvolnit energie. Této reakci říkáme jaderná **fúze**. Slučování je ztíženo působením odpudivé coulombovské síly, která zabraňuje dvěma kladně nabitým částicím přiblížit se natolik, aby se začaly projevovat přitažlivé jaderné síly a napomohly „fúzování“. Výška *Coulombovy potenciálové bariéry* závisí na nábojích a poloměrech obou interagujících jader. V př. 44.4 uvidíme, že pro dva protony ($Z = 1$) je výška bariéry 400 keV. Pro částice s větším nábojem je přirozeně výška bariéry vyšší.

Pro dosažení užitečně velkého výkonu je třeba, aby jaderná fúze probíhala v jistém objemu hmoty. Nejnadějnější cestou je takové zvýšení teploty látky, že částice mají už díky svému tepelnému pohybu dostatečnou energii pro překonání Coulombovy bariéry. Takovou reakci nazýváme **termojaderná fúze**.

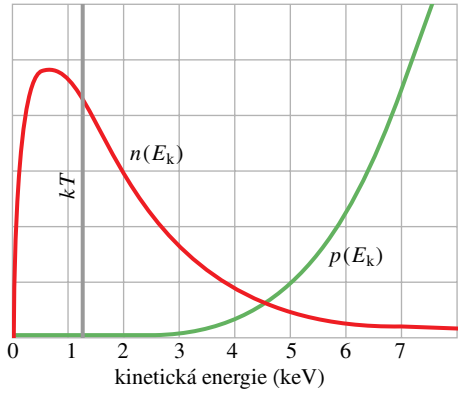
Při termojaderném výzkumu je zvykem udávat teploty pomocí kinetické energie E_k interagujících částic ze vztahu

$$E_k = kT, \qquad (44.6)$$

kde E_k je kinetická energie odpovídající *nejpravděpodobnější rychlosti* interagujících částic, k je Boltzmannova konstanta a T je teplota v kelvinech. Místo tvrzení „teplota ve středu Slunce je $1{,}5{\cdot}10^7$ K“ je proto obvyklejší říci „teplota ve středu Slunce je 1,3 keV.“

Pokojové teplotě odpovídá $E_k \approx 0{,}03$ eV; částice s takovou energií ovšem nemá nejmenší naději na překonání bariéry výšky například 400 keV. Dokonce ani ve středu Slunce, kde $kT = 1{,}3$ keV, nevypadá na první pohled možnost termojaderné fúze nadějně. Přesto ale víme, že k termojaderné fúzi v nitru Slunce nejenom dochází, ale že fúze je dominantní vlastností našeho Slunce i všech dalších hvězd.

Tuto záhadu objasníme, vezmeme-li do úvahy dvě skutečnosti: (1) Energie určená z rov. (44.6) je energie částic s *nejpravděpodobnější rychlostí*, definovanou v čl. 20.7; existuje ale protáhlý chvost částic s mnohem většími rychlostmi a tedy mnohem většími energiemi. (2) Výšky potenciálové bariéry, které uvažujeme, jsou spočteny z hodnoty *maxima* odpovídající křivky. K tunelování bariérou může však docházet i při energiích podstatně nižších, než jsou tato maxima, jak jsme viděli v případě α-rozpadu v čl. 43.4.



Obr. 44.10 Křivka označená $n(E_k)$ udává koncentraci protonů na jednotku energie ve středu Slunce. Křivka označená $p(E_k)$ udává pravděpodobnost průchodu bariérou u proton–protonových srážek při teplotě středu Slunce. Svislou čárou je vyznačena hodnota kT při této teplotě. Všimněte si, že obě křivky jsou vykresleny v grafu s neurčenou (pro každou křivku jinou) stupnicí na svislé ose.

Na obr. 44.10 jsou tyto úvahy znázorněny graficky. Křivka označená jako $n(E_k)$ je křivka Maxwellova rozdělení pro protony v nitru Slunce, odpovídající teplotě ve středu Slunce. Tato křivka se odlišuje od křivky Maxwellova rozdělení na obr. 20.7 v tom, že nezávisle proměnnou je energie, nikoli rychlost. Pro určitou kinetickou energii E_k je výraz $n(E_k)\,\mathrm{d}E_k$ úměrný pravděpodobnosti, že proton bude mít kinetickou energii mezi E_k a $E_k + \mathrm{d}E_k$. Hodnota kT v nitru Slunce je na obrázku vyznačena svislou čárou; všimněte si, že mnoho protonů v nitru Slunce má energii větší, než je tato hodnota.

Křivka označená na obr. 44.10 jako $p(E_k)$ je pravděpodobnost překonání bariéry při srážce dvou protonů. Tvar dvou křivek vykreslených na obr. 44.10 naznačuje, že bude existovat určitá energie protonu, při které se bude proton–protonová fúze uskutečňovat nejčastěji. Při energiích mnohem vyšších než tato hodnota je sice potenciálová bariéra snadněji prostupná, ale protonů s touto energií je příliš málo. Naopak při mnohem nižších energiích než tato hodnota má tyto energie spousta protonů, ale bariéra je příliš neprostupná.

KONTROLA 3: Které z následujících možných reakcí jaderné fúze *nebudou* uvolňovat energii: (a) $^6\mathrm{Li} + {}^6\mathrm{Li}$, (b) $^4\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He}$, (c) $^{12}\mathrm{C} + {}^{12}\mathrm{C}$, (d) $^{20}\mathrm{Ne} + {}^{20}\mathrm{Ne}$, (e) $^{35}\mathrm{Cl} + {}^{35}\mathrm{Cl}$, (f) $^{14}\mathrm{N} + {}^{35}\mathrm{Cl}$. (*Tip*: Využijte křivku vazebních energií na obr. 43.6.)

PŘÍKLAD 44.4

Považujme proton za kouli o poloměru $R \approx 1$ fm. Dva protony jsou proti sobě vystřeleny se stejnou kinetickou energií E_k.

(a) Jakou hodnotu musí mít E_k, aby se částice vlivem odpuzování coulombovskou silou zastavily právě v okamžiku, kdy se vzájemně „dotknou“? Tuto hodnotu E_k můžeme považovat za vhodnou míru výšky Coulombovy potenciálové bariéry.

ŘEŠENÍ: Protože v okamžiku dotyku jsou oba protony v klidu, přeměnila se celá jejich kinetická energie na elektrickou potenciální energii. Středy protonů jsou vzdáleny $2R$ a podle rov. (25.43) máme

$$2E_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2R}.$$

Se známými hodnotami dostaneme

$$E_k = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 R} = \frac{(1{,}60{\cdot}10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{16\pi(8{,}85{\cdot}10^{-12}\ \mathrm{F{\cdot}m^{-1}})(1{\cdot}10^{-15}\ \mathrm{m})} =$$
$$= 5{,}75{\cdot}10^{-14}\ \mathrm{J} = 360\ \mathrm{keV} \doteq 400\ \mathrm{keV}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Při jaké teplotě bude mít proton v protonovém plynu střední kinetickou energii rovnu hodnotě spočtené v (a), tedy bude mít energii rovnou výšce Coulombovy bariéry?

ŘEŠENÍ: Považujeme-li protonový plyn za ideální, můžeme jako střední kinetickou energii vzít $\overline{E}_k = \frac{3}{2}kT$ podle rov. (20.20), kde k je Boltzmannova konstanta. Vyjádříme-li T a dosadíme za $\overline{E}_k$ z (a), dostaneme

$$T = \frac{2\overline{E}_k}{3k} = \frac{2(5{,}75{\cdot}10^{-14}\ \mathrm{J})}{3(1{,}38{\cdot}10^{-23}\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}})} \doteq 3{\cdot}10^9\ \mathrm{K}.$$

Teplota středu Slunce je asi $1{,}5\cdot10^7$ K, takže je jasné, že slučování v nitru Slunce se musí účastnit protony, jejichž energie je daleko větší než tato střední energie.

44.7 TERMOJADERNÁ FÚZE VE SLUNCI A DALŠÍCH HVĚZDÁCH

Slunce vyzařuje energii s výkonem $3{,}9\cdot10^{26}$ W a činí tak již několik miliard let. Odkud se bere všechna ta energie? Chemické hoření můžeme vyloučit; kdyby se Slunce skládalo z uhlí a kyslíku — ve vhodném poměru pro spalování — vydrželo by pouze nějakých 1 000 let. Jiná možnost je, že se Slunce pomalu smršťuje vlivem vlastních gravitačních sil. Přeměnou gravitační potenciální energie na tepelnou energii by si Slunce mohlo udržovat svou teplotu a přitom stále zářit. Výpočet ale ukazuje, že ani tento mechanismus nevyhovuje; vedl by také k příliš krátké době života Slunce, nejméně 500krát. Takže zůstává pouze termojaderná fúze. Jak uvidíme, Slunce spaluje nikoli uhlí, ale vodík, a to v jaderné peci, nikoli atomové neboli chemické.

Jaderná fúze ve Slunci je vícestupňový proces, ve kterém je spálen vodík na helium; vodík je tedy „palivo“ a helium „popel“. Obr. 44.11 ukazuje **proton–protonový** (p–p) **řetězec**, kterým se tento proces uskutečňuje.

Řetězec p–p začíná srážkou dvou protonů ($^1\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H}$), které vytvoří deuteron ($^2\mathrm{H}$) a zároveň pozitron (e^+) a neutrino (ν). Pozitron velmi rychle potká volný elektron (e^-) ve Slunci a obě částice anihilují (čl. 22.6), energie ekvivalentní jejich hmotnostem se objeví jako dva fotony záření γ.

Dvojice takových událostí je popsána v horním řádku v obr. 44.11. Tyto události jsou ve skutečnosti velmi řídké. Pouze v jedné z 10^{26} proton–protonových srážek se vytvoří deuteron; v obrovské většině se protony od sebe prostě pružně odrazí. Je to právě pomalost tohoto jevu, jakési „úzké hrdlo“, které řídí rychlost produkce energie a chrání Slunce před explozí. Bez ohledu na tuto pomalost je ve velkém a hustém nitru Slunce tak obrovský počet protonů, že deuterium ve Slunci vzniká právě popsaným způsobem v množství 10^{12} kg/s.

Jakmile však jednou deuteron vznikne, rychle se srazí s jiným protonem a vytvoří jádro ^{3}He, jak ukazuje střední řádek v obr. 44.11. Dvě taková jádra ^{3}He se případně mohou sejít (během 10^5 let, ale času máme spoustu) a vytvořit α-částici (^{4}He) a dva protony, jak ukazuje spodní řádek obrázku.

Jak vidíme z obr. 44.11, celkově spočívá p–p řetězec v kombinaci čtyř protonů a dvou elektronů do α-částice, vyzáření dvou neutrin a šesti fotonů záření γ. Tedy

$$4\,{}^1\mathrm{H} + 2\mathrm{e}^- \rightarrow {}^4\mathrm{He} + 2\nu + 6\gamma. \qquad (44.7)$$

Nyní přidejme na každou stranu rov. (44.7) dva elektrony, takže dostaneme

$$(4\,{}^1\mathrm{H} + 4\mathrm{e}^-) \rightarrow ({}^4\mathrm{He} + 2\mathrm{e}^-) + 2\nu + 6\gamma. \qquad (44.8)$$

Symboly v obou závorkách už představují *atomy* (ne pouze holá jádra) vodíku a helia.

Energie uvolněná v reakci popsané rov. (44.8) je

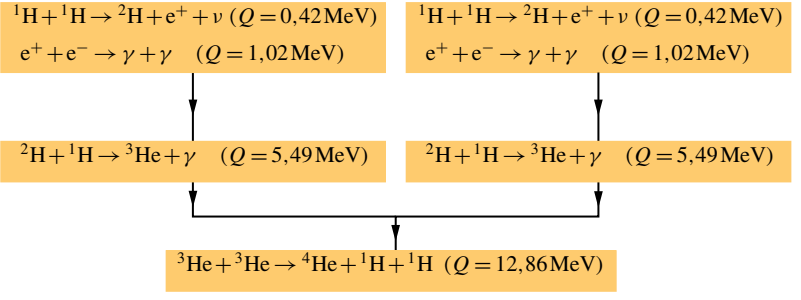
$$\begin{aligned} Q = \Delta mc^2 &= \\ &= (4(1{,}007\,825\,\mathrm{u}) - 4{,}002\,603\,\mathrm{u})(931{,}5\,\mathrm{MeV/u}) = \\ &= 26{,}7\,\mathrm{MeV}, \end{aligned}$$

kde 1,007 825 u je hmotnost vodíkového a 4,002 603 u hmotnost heliového atomu. Neutrina mají nulovou nebo zanedbatelně malou hmotnost a fotony γ-záření mají hmotnost nulovou; proto tyto částice ve výpočtu energie reakce nevystupují.

Stejnou hodnotu Q dostaneme (jak to také musí být) sečtením hodnot Q pro jednotlivé stupně proton–protonového řetězce na obr. 44.11. Je tedy

$$\begin{aligned} Q &= 2(0{,}42\,\mathrm{MeV}) + 2(1{,}02\,\mathrm{MeV}) + \\ &\quad + 2(5{,}49\,\mathrm{MeV}) + 12{,}86\,\mathrm{MeV} = \\ &= 26{,}7\,\mathrm{MeV}. \end{aligned}$$

Asi 0,5 MeV z této energie odnášejí ze Slunce obě neutrina z rov. (44.8); zbývající energie se ukládá v nitru Slunce jako tepelná energie.



Obr. 44.11 Proton–protonový řetězec, který zajišťuje produkci energie ve Slunci. V řetězci se fúzí protonů vytvářejí jádra ^{4}He (α-částice) a uvolňuje se při tom energie 26,7 MeV.

Spalování vodíku ve Slunci je svým způsobem alchymie v obřím měřítku, neboť jeden prvek se přeměňuje na jiný. Středověké alchymisty ovšem zajímala spíše přeměna olova na zlato než přeměna vodíku na helium. V jistém smyslu šli správnou cestou, pouze jejich pece neměly dostatečnou teplotu: namísto nějakých 600 K by potřebovali pece zahřáté na 10^8 K.

Spalování vodíku probíhá na Slunci po dobu přibližně $5{\cdot}10^9$ let a výpočty ukazují, že zásoby vodíku postačují na zhruba stejnou dobu do budoucnosti. Po těchto dalších 5 miliardách let spalování vodíku se však nitro Slunce, složené potom převážně z helia, začne ochlazovat a Slunce se začne hroutit působením své vlastní gravitace. To opět povede k růstu teploty nitra, která způsobí expanzi vnějšího obalu a Slunce se dostane do stadia hvězdy, kterému astronomové říkají *červený obr*.

Když teplota nitra opět dosáhne 10^8 K, může znovu dojít k uvolňování energie spalováním helia na uhlík. Jak se hvězda vyvíjí a stává se teplejší, může dojít k vytváření dalších prvků při jiných typech jaderné fúze. Touto cestou ale nemohou být vytvořeny prvky hmotnější než s hmotnostním číslem $A \approx 56$. Hmotnostnímu číslu $A = 56$ odpovídá maximum na křivce vazební energie na obr. 43.6, takže fúze, která vytváří nuklidy za touto hranicí, probíhá s pohlcováním, nikoli uvolňováním energie.

Myslíme si, že prvky s hmotnostním číslem větším než $A \approx 56$ vznikají záchytem neutronů při kataklyzmických explozích hvězd, kterým říkáme *supernovy* (obr. 44.12). Při výbuchu supernovy je vnější obal hvězdy vymrštěn do vnějšího prostoru, kde se smíchá s řiďoučkou látkou vyplňující mezihvězdný prostor a stane se tak její součástí. Z této látky, stále obohacované odpadem z hvězdných explozí, se pak opět vytvářejí nové hvězdy kondenzací vlivem gravitační síly.

Skutečnost, že se na Zemi vyskytují prvky hmotnější než vodík a helium, naznačuje, že naše sluneční soustava vznikla kondenzací mezihvězdné hmoty, která obsahovala zbytky po takových explozích. Všechny prvky kolem nás — včetně těch v našich vlastních tělech — byly tedy vyrobeny v nitrech dávno neexistujících hvězd. Jak řekl jeden z vědců: „Popravdě jsme vlastně děti hvězd."

PŘÍKLAD 44.5

Jak rychlá je spotřeba vodíku v nitru Slunce při p–p řetězci z obr. 44.11?

ŘEŠENÍ: Jak jsme ukázali, na každé čtyři spotřebované protony se uvolní ve Slunci 26,2 MeV energie, tedy 6,6 MeV na proton. Tedy z kilogramu hmoty se uvolní energie

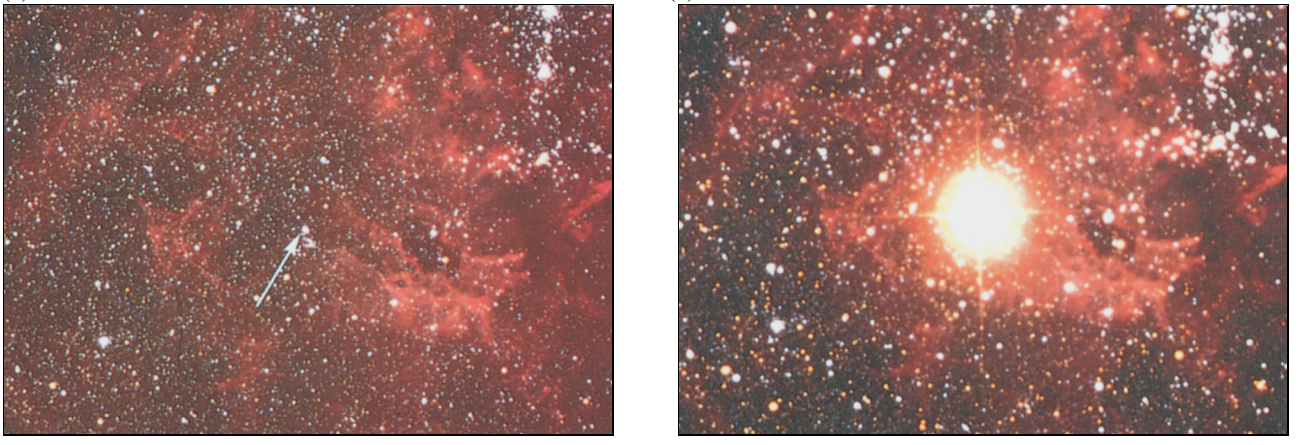
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m} = \frac{(6{,}6\,\mathrm{MeV})}{(1{,}67{\cdot}10^{-27}\,\mathrm{kg})} \cdot \left(\frac{1{,}60{\cdot}10^{-13}\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{MeV}}\right) = \\ = 6{,}3{\cdot}10^{14}\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}}.$$

Tento výsledek nám říká, že Slunce vyzáří $6{,}3{\cdot}10^{14}$ J energie na každý spotřebovaný kilogram hmotnosti protonů. Rychlost spotřeby vodíku R je pak dána jako výkon Slunce $P = 3{,}9{\cdot}10^{26}$ W dělený touto vypočtenou hodnotou, tedy

$$R = \frac{(3{,}9{\cdot}10^{26}\,\mathrm{W})}{(6{,}3{\cdot}10^{14}\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}})} = 6{,}2{\cdot}10^{11}\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

To vypadá jako obrovská ztráta hmotnosti za sekundu, ale musíme vidět věci ve správné perspektivě — jedná se o malou hodnotu ve srovnání s hmotností Slunce, která je $2{\cdot}10^{30}$ kg.

(*a*) (*b*)



Obr. 44.12 (a) Hvězda známá jako Sanduleak, jak se jevila před rokem 1987. (b) V tomto roce se k nám dostalo světlo supernovy této hvězdy; v době exploze byla stomilionkrát jasnější než naše Slunce a hvězda byla viditelná pouhým okem. Exploze nastala ve vzdálenosti 155 000 světelných let; došlo k ní tedy již před 155 000 lety.

44.8 ŘÍZENÁ TERMOJADERNÁ FÚZE

K první termojaderné reakci na Zemi došlo na atolu Eniwetok, když Spojené státy nechaly vybuchnout zařízení, které uvolnilo energii ekvivalentní 10 milionům tun TNT. Vysoké teploty a hustoty potřebné pro zažehnutí reakce byly dosaženy tím, že se jako rozbuška použila atomová puma založená na štěpné reakci.

Získat dlouhodobě pracující a řiditelný zdroj energie — reaktor pracující na základě termojaderné fúze je však mnohem obtížnější. K dosažení tohoto cíle však velmi intenzívně směřuje úsilí v mnoha zemích světa, protože mnoho lidí považuje reaktor na principu termojaderné fúze za zdroj budoucnosti, alespoň pokud jde o výrobu elektřiny.

Proton–protonový řetězec z obr. 44.11 není vhodný pro pozemský reaktor, protože je beznadějně pomalý. Na Slunci probíhá reakce úspěšně pouze díky obrovské hustotě protonů v nitru Slunce. Nejvhodnější pro použití na Zemi se zdají být dvě reakce deuteron–deuteronové (d–d)

$$^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} \rightarrow {}^3\mathrm{He} + \mathrm{n} \quad Q = +3{,}27\,\mathrm{MeV}, \qquad (44.9)$$

$$^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} \rightarrow {}^3\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H} \quad Q = +4{,}03\,\mathrm{MeV}, \qquad (44.10)$$

a deuteron–tritonová* (d–t).

$$^2\mathrm{H} + {}^3\mathrm{H} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + \mathrm{n} \quad Q = +17{,}59\,\mathrm{MeV}. \qquad (44.11)$$

Deuterium, které je v těchto reakcích zdroj deuteronů, má izotopický výskyt jen 1 : 6 700, ale je dostupné v neomezeném množství jako složka mořské vody. Zastánci využívání jaderné energie popisují naše možnosti v budoucnosti — až budou spálena všechna fosilní paliva — jako volbu ze dvou možností: buď „spalování kamení“ (štěpení uranu získaného z rud), nebo „spalování vody“ (fúze deuteria získaného z vody).

Pro úspěšný návrh termojaderného reaktoru musíme splnit tři podmínky:

1. ***Vysoká hustota částic n.*** Hustota interagujících částic (například počet deuteronů v jednotkovém objemu) musí být natolik vysoká, aby zajistila dostatečný počet d–d srážek. Při požadovaných vysokých teplotách je deuterium úplně ionizováno, takže vytváří navenek neutrální **plazma** (ionizovaný plyn) deuteronů a elektronů.

2. ***Vysoká teplota plazmatu T.*** Plazma musí být horké. Jinak by totiž neměly deuterony při srážce dostatečnou energii k překonání Coulombovy potenciálové bariéry, která se snaží udržet je od sebe. Laboratorně bylo dosaženo iontové teploty plazmatu 35 keV, což odpovídá $4{\cdot}10^8$ K. To je asi 30krát větší teplota, než je teplota středu Slunce.

3. ***Dlouhá doba udržení τ.*** Velký problém je udržování horkého plazmatu s potřebně vysokou hustotou a teplotou po tak dlouhou dobu, aby došlo k fúzi dostatečného množství paliva. Je jasné, že žádná pevná nádoba nemůže odolat tak vysokým teplotám, proto musíme použít důmyslné techniky pro udržení plazmatu; krátce se zmíníme o dvou možnostech.

Lze ukázat, že pro úspěšný chod termojaderného reaktoru, pracujícího s d–t reakcí, je třeba mít

$$n\tau > 10^{20}\,\mathrm{s{\cdot}m^{-3}}. \qquad (44.12)$$

Tato podmínka, známá jako **Lawsonovo kritérium**, nám říká, že musíme buď udržet mnoho částic po krátký časový interval, nebo méně částic po delší dobu. Kromě splnění podmínek kritéria je ještě dále nutné, aby teplota plazmatu byla dostatečně vysoká.

V současnosti se především studují dvě cesty, jak se dostat k řízenému uvolňování jaderné energie. Ačkoli zatím ani jedna z nich nebyla úspěšná, jsou stále rozvíjeny jednak proto, že jsou stále slibné, jednak také pro možnou velkou důležitost řízené fúze při řešení energetických problémů světa v budoucnosti.

Magnetické udržování

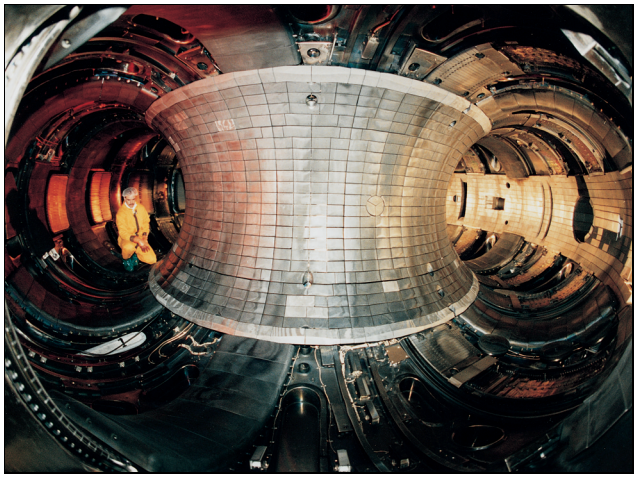
V jednom z těchto přístupů se pro udržování plazmatu v nádobě prstencového tvaru používá vhodně tvarované magnetické pole. Zařízení se nazývá **tokamak** (zkratka ruského názvu „toroidaľnaja kamera s magnitnymi katuškami“). Magnetické síly působí na nabité částice, které tvoří horké plazma, a zabraňují částicím plazmatu v dopadu na stěny nádoby. Na obr. 44.13 je jedno takové zařízení v Plasma Physics Laboratory, Princeton University.

Plazma je zahříváno jednak tím, že jsou v něm indukovány elektrické proudy, jednak ostřelováním plazmatu zvnějšku svazkem urychlených částic. Prvním cílem pokusů je dosáhnout **vyrovnání**, které nastane při splnění Lawsonova kritéria či při jeho překročení. Konečným cílem pak je **zažehnutí**, které spouští samostatně se udržující termojadernou reakci s čistým ziskem energie. Do roku 2000 nebylo dosaženo zažehnutí ani na tokamacích, ani na jiných zařízeních s magnetickým udržováním plazmatu.

Inerciální udržování

Tato technika udržování a ohřevu paliva pro fúzi až k dosažení potřebných parametrů pro termojadernou reakci začíná „otloukáním“ pevné tabletky paliva ze všech stran intenzívními laserovými svazky. To vede k odpaření jistého

* Jádro izotopu vodíku ^{3}H (tritium) se nazývá *triton*. Je to radionuklid s poločasem rozpadu 12,3 roku.



Obr. 44.13 Pokusný reaktor pro jadernou fúzi typu tokamak na Princeton University.

množství materiálu z povrchu tabletky. Odpaření materiálu způsobí vznik rázové vlny směřující dovnitř tabletky, která stlačí jádro tabletky a zvýší v něm jak hustotu částic, tak teplotu. Jev se nazývá *inerciální udržování*, protože (a) palivo se *udržuje* v jádře tabletky a (b) částice díky své setrvačné (*inerciální*) hmotnosti neunikají z tabletky zahřáté během velmi krátkého časového intervalu, kdy působí „údery“ laserů.

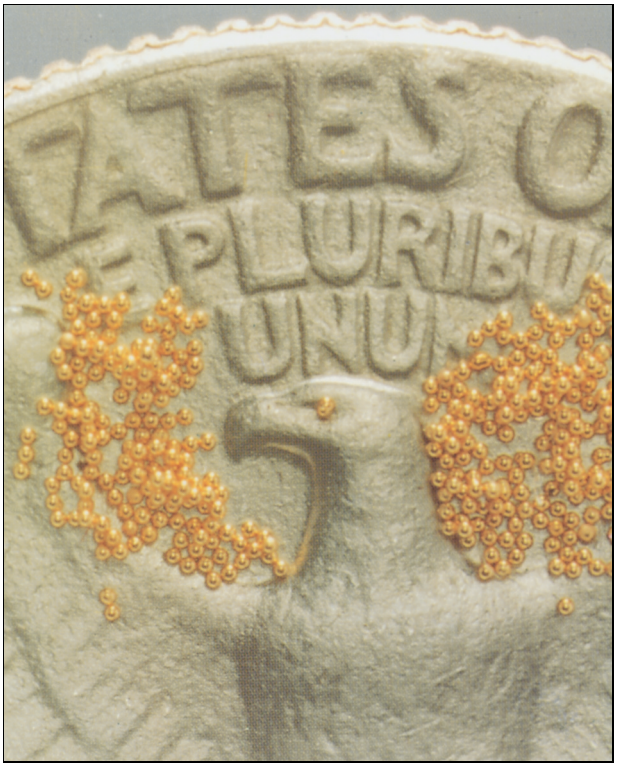
Laserová fúze, užívající techniky inerciálního udržování, se studuje v mnoha světových laboratořích. Například v Lawrence Livermore Laboratory se mají tabletky složené z deuteria a tritia, každá o velikosti menší než zrnko písku (obr. 44.14), otloukávat pulzy 10 synchronizovaných vysoce výkonných laserů symetricky rozmístěných kolem tabletky. Pulzní lasery jsou navrženy tak, aby v souhrnu dodávaly každé tabletce energii asi 200 kJ v době kratší než jedna nanosekunda. To odpovídá výkonu v době trvání pulzu asi $2{\cdot}10^{14}$ W, což je asi 100krát více než celkový trvalý výkon elektráren na celém světě!

V pracujícím termojaderném reaktoru s laserovou fúzí by tabletky měly vybuchovat jako miniaturní vodíkové bomby v počtu snad 10 až 100 za sekundu. Použitelnost laserové fúze jako základu práce termojaderných reaktorů nebyla do roku 2000 ověřena, práce však pokračují s velkým úsilím dále.

PŘÍKLAD 44.6

Předpokládejme, že palivová tabletka pro zařízení s laserovou fúzí obsahuje stejný počet atomů deuteria a tritia. Hustota tabletky $\varrho = 200\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ se zvýší 10^3násobně vlivem laserových pulzů.

(a) Kolik částic na jednotku objemu (jak deuteronů, tak tritonů) obsahuje tabletka ve zhuštěném stavu?



Obr. 44.14 Kuličky na čtvrtdolarové minci jsou tabletky deuterium-tritiového paliva pro pokusy v zařízení s laserovou fúzí.

ŘEŠENÍ: Pro hustotu ϱ^* zhuštěné tabletky můžeme psát

$$\varrho^* = 10^3\varrho = m_\mathrm{d}\left(\frac{n}{2}\right) + m_\mathrm{t}\left(\frac{n}{2}\right),$$

kde n je celkový počet částic v jednotkovém objemu ve zhuštěné tabletce (jak deuteronů, tak tritonů), m_d je hmotnost atomu deuteria a m_t hmotnost atomu tritia. Tyto atomové hmotnosti vyjádříme jako poměr odpovídajících molárních hmotností ($m_\mathrm{m,d} = 2{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$ a $m_\mathrm{m,t} = 3{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$) a Avogadrovy konstanty N_A

$$m_\mathrm{d} = \frac{m_\mathrm{m,d}}{N_\mathrm{A}} \quad \text{a} \quad m_\mathrm{t} = \frac{m_\mathrm{m,t}}{N_\mathrm{A}}.$$

Pro n tedy dostaneme

$$n = \frac{2\,000\varrho N_\mathrm{A}}{m_\mathrm{m,d} + m_\mathrm{m,t}},$$

odkud

$$n = \frac{2\,000(200\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}})(6{,}02{\cdot}10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}})}{(2{,}0{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}} + 3{,}0{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}})} = \\ = 4{,}8{\cdot}10^{31}\,\mathrm{m^{-3}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jak dlouho musí podle Lawsonova kritéria udržet tabletka tuto hustotu částic, abychom dosáhli vyrovnání?

ŘEŠENÍ: Z Lawsonova kritéria (44.12) máme

$$\tau > \frac{10^{20}\ \mathrm{s{\cdot}m^{-3}}}{4{,}8{\cdot}10^{31}\ \mathrm{m^{-3}}} \doteq 10^{-12}\ \mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tabletka musí zůstat stlačená alespoň 10^{-12} s, aby se splnila podmínka vyrovnání. (Teplota plazmatu musí být také dostatečně vysoká.)

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Energie z jádra

Jaderné reakce jsou při přeměně hmotnosti na jiné formy energie asi milionkrát účinnější než chemické reakce, vztahujeme-li hodnoty na jednotku hmotnosti.

Jaderné štěpení

Rov. (44.1) popisuje štěpení ^{236}U, který vznikl ostřelováním ^{235}U tepelnými neutrony. Rov. (44.2) a (44.3) popisují řetězce β-rozpadů primárních štěpných fragmentů. Energie uvolněná při tomto štěpení je $Q \approx 200$ MeV.

Jevu štěpení lze porozumět pomocí kolektivního modelu, ve kterém se jádro chová jako elektricky nabitá kapka ve stavu charakterizovaném nějakou excitační energií. Aby došlo ke štěpení, musí být tunelovým jevem překonána jistá potenciálová bariéra. Schopnost štěpení závisí na vzájemném vztahu výšky bariéry E_b a excitační energie E_n.

Neutrony uvolněné při štěpení mohou vyvolat *řetězovou reakci*. Na obr. 44.4 je bilance počtu neutronů jednoho cyklu v typickém rektoru. Na obr. 44.5 je naznačeno blokové schéma celé jaderné elektrárny.

Jaderná fúze

Uvolnění energie sloučením (fúzí) dvou lehkých jader brání jejich vzájemná Coulombova potenciálová bariéra. V konečném objemu látky může dojít k fúzi pouze tehdy, je-li teplota dostatečně vysoká (tj. je-li kinetická energie částic dostatečně velká), aby mohlo dojít k pozorovatelnému tunelování potenciálovou bariérou.

Energie Slunce pochází převážně ze spalování vodíku na helium při *proton–protonovém řetězci*, který je znázorněn na obr. 44.11. Prvky až do hmotnostního čísla $A \approx 56$ (maximum na křivce vazební energie) se mohou vytvořit při jiných fúzích po vyhoření zásob vodíkového paliva ve hvězdě.

Řízená fúze

Řízená *termojaderná fúze* pro účely výroby energie ještě nebyla dosažena ani v laboratorních podmínkách. Nejslibnější jsou reakce d–d a d–t. Pro reaktor s termojadernou fúzí musí být splněno *Lawsonovo kritérium*

$$n\tau > 10^{20}\ \mathrm{s{\cdot}m^{-3}} \qquad (44.12)$$

a teplota plazmatu T musí být dostatečně vysoká.

V *tokamaku* se plazma udržuje magnetickým polem. Při *laserové fúzi* je užita technika inerciálního udržování.

OTÁZKY

1. Můžeme použít vztah $Q = \Delta mc^2$ v tab. 44.1 při popisu (a) všech jevů, (b) všech jevů s výjimkou vodopádu, (c) pouze štěpení, (d) pouze štěpení a fúze?

2. Podle křivky z obr. 44.1 dochází ke štěpení ^{235}U tepelným neutronem na dva stejně hmotné fragmenty přibližně v jednom případě z (a) 10 000, (b) 1 000, (c) 100, (d) 10?

3. Mají primární fragmenty vytvořené štěpením (a) více protonů než neutronů, (b) více neutronů než protonů, (c) stejný počet protonů a neutronů?

4. Uvažujte štěpnou reakci

$$^{235}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow \mathrm{X} + \mathrm{Y} + 2\mathrm{n}.$$

Seřaďte následující možné nuklidy X (nebo Y) od nejvíce pravděpodobných do nejméně pravděpodobných: (a) ^{152}Nd, (b) ^{140}I, (c) ^{128}In, (d) ^{115}Pd, (e) ^{105}Mo. (*Tip*: Použijte obr. 44.1.)

5. Vyberte z každé dvojice ten prvek, který bude s největší pravděpodobností primární fragment štěpení: (a) ^{93}Sr nebo ^{93}Ru, (b) ^{140}Gd nebo ^{140}I, (c) ^{155}Nd nebo ^{155}Lu. (*Tip*: Použijte obr. 43.4 a periodickou tabulku prvků.)

6. Předpokládejte, že jádro ^{238}U „spolkne“ neutron a pak se rozpadá nikoli štěpením, ale β-rozpadem, kdy emituje elektron a neutrino. Jaký nuklid je produktem tohoto rozpadu: (a) ^{239}Pu, (b) ^{238}Np, (c) ^{239}Np, nebo (d) ^{238}Pa?

7. Jaderný reaktor pracuje s určitým výkonem, jeho násobicí faktor k je přitom nastaven na jedničku. Je-li užito řídicích tyčí tak, aby se výstupní výkon reaktoru snížil na 25 % původní hodnoty, je pak násobicí faktor (a) poněkud menší než jedna, (b) podstatně menší než jedna, nebo (c) stále roven jedné?

8. Jádro jaderného reaktoru by mělo mít co nejmenší poměr povrchu k objemu. Uspořádejte následující tělesa sestupně podle tohoto poměru: (a) krychle o hraně a, (b) koule s poloměrem a, (c) kužel výšky a a s poloměrem základny a a (d) válec s poloměrem a a výškou a. (Plocha *zakřivené* části povrchu kužele je $\sqrt{2}\pi a^2$ a jeho objem je $\pi a^3/3$.)

9. Obr. 44.6 ukazuje časový pokles tepla produkovaného radioaktivním odpadem po jednoročním provozu velké jaderné elektrárny. Kolikrát se přibližně sníží produkce tepelné energie po 100 letech: (a) 20, (b) 200, (c) 2 000, (d) více než 2 000?

10. Který z následujících prvků *není* „upečen“ při jaderné fúzi v nitru hvězd: (a) uhlík, (b) křemík, (c) chrom, (d) brom?

11. Přibližně 2 % energie vytvářené na Slunci při p–p reakci odnášejí ze Slunce neutrina. Je energie tohoto neutrinového toku (a) stejná, (b) větší, nebo (c) menší než energie, kterou Slunce vyzařuje ve formě elektromagnetického záření?

12. Lawsonovo kritérium pro d–t reakci (rov. (44.12)) je $n\tau > 10^{20}\ \mathrm{s\cdot m^{-3}}$. Pro d–d reakci bude číslo na pravé straně (a) stejné, (b) menší, nebo (c) větší?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 44.2 Jaderné štěpení: základní proces

1C. (a) Kolik atomů je obsaženo v 1,0 kg čistého ^{235}U? (b) Kolik energie v joulech se uvolní při dokonalém štěpení 1,0 kg ^{235}U? Uvažujte $Q = 200$ MeV. (c) Jak dlouho by tato energie umožnila svítit 100 W žárovkou?

2C. Štěpné vlastnosti izotopu plutonia ^{239}Pu jsou velmi podobné vlastnostem ^{235}U. Průměrná hodnota energie uvolněné při štěpení je 180 MeV. Kolik energie v MeV se uvolní, jestliže se všechny atomy v 1,0 kg čistého ^{239}Pu rozštěpí?

3C. Kolik jader ^{235}U musí za sekundu neutrony rozštěpit, aby se uvolnila energie poskytující výkon 1,0 W? Uvažujte $Q = 200$ MeV.

4C. Doplňte následující tabulku, která popisuje obecnou štěpnou reakci

$$^{235}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow \mathrm{X} + \mathrm{Y} + b\mathrm{n}.$$

X	Y	b
^{140}Xe	?	1
^{139}I	?	2
?	^{100}Zr	2
^{141}Cs	^{92}Rb	?

5C. Ověřte tvrzení z čl. 44.2, že střední kinetická energie neutronů v tepelné rovnováze s látkou při pokojové teplotě 300 K je přibližně 0,04 eV.

6C. Spočtěte energii Q reakce pro štěpení ^{52}Cr na dva stejné fragmenty. Hmotnosti potřebné pro výpočet jsou 51,940 51 u pro ^{52}Cr a 25,982 59 u pro ^{26}Mg.

7C. Spočtěte energii Q reakce pro štěpení ^{98}Mo na dva stejné fragmenty. Hmotnosti potřebné pro výpočet jsou 97,905 41 u pro ^{98}Mo a 48,950 02 u pro ^{49}Sc. Vyjde-li Q kladné, vysvětlete, proč k tomuto štěpení spontánně nedochází.

8C. Spočtěte energii uvolněnou při štěpné reakci

$$^{235}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{141}\mathrm{Cs} + {}^{93}\mathrm{Rb} + 2\mathrm{n}.$$

Potřebné hmotnosti atomů a částic jsou:

^{235}U	235,043 92 u	^{93}Rb	92,921 57 u
^{141}Cs	140,919 63 u	n	1,008 67 u

9C. Poločas α-rozpadu ^{235}U je $7{,}0\cdot10^{8}$ y. Rozpadá se také (zřídka) spontánním štěpením, a kdyby nedocházelo k α-rozpadu, byl by poločas rozpadu spontánním štěpením $3{,}0\cdot10^{17}$ y. (a) Jak často dojde ke spontánnímu štěpení v 1,0 g ^{235}U? (b) Kolik α-rozpadů připadá na jeden rozpad spontánním štěpením?

10Ú. Ověřte správnost údaje z tab. 44.1, že štěpení 1 kg UO_2 (obohaceného tak, že ^{235}U tvoří 3 % uranu) umožní svítit 100 W žárovkou po dobu 690 let.

11Ú. Uvažujte štěpení ^{238}U rychlými neutrony. V jednom možném případě dochází k tomu, že není uvolněn žádný neutron a po několika β-rozpadech zůstanou jako konečné stabilní produkty ^{140}Ce a ^{99}Ru. (a) Ke kolika β-rozpadům celkem dojde, počítáme-li obě rozpadové řady dohromady? (b) Vypočtěte Q. Potřebné hmotnosti jsou:

^{238}U	238,050 79 u	^{140}Ce	139,905 43 u
n	1,008 67 u	^{99}Ru	98,905 94 u

12Ú. V jednom možném případě štěpení ^{235}U pomalými neutrony dochází k tomu, že není uvolněn žádný neutron a jedním z primárních produktů štěpení je ^{83}Ge. (a) Jaký izotop je druhý primární fragment? (b) Jak je energie $Q = 170$ MeV reakce rozdělena mezi oba fragmenty? Spočtěte počáteční rychlost každého z fragmentů.

13Ú. Předpokládejte, že těsně po štěpení ^{236}U podle rov. (44.1) se vzniklá jádra ^{140}Xe a ^{96}Sr svými povrchy právě dotýkají. (a) Za předpokladu, že jádra jsou kulová, spočtěte potenciální energii (v MeV), kterou se oba fragmenty odpuzují. (*Tip*: Poloměry jader spočtěte podle rov. (43.3).) (b) Porovnejte tuto energii s energií uvolněnou při typickém štěpení.

14Ú. Jádro ^{236}U se při štěpení rozlomí na dva fragmenty ^{140}Xe a ^{96}Sr. Pro jádro uranu a jádra obou fragmentů určete jejich (a) povrch, (b) objem, (c) elektrickou potenciální energii. Potenciální energie rovnoměrně nabité koule o poloměru r a náboji Q je

$$E_{\mathrm{p}}(r) = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Porovnejte vypočtené veličiny před štěpením a po něm.

ODST. 44.4 Jaderný reaktor

15C. 200 MW jaderný reaktor spotřebuje polovinu svých zásob paliva za 3,00 roky. Kolik ^{235}U bylo v reaktoru na počátku? Předpokládejte, že všechna uvolněná energie pochází ze štěpení ^{235}U a že se tento nuklid spotřebovává pouze štěpením.

16C. Zopakujte řešení cvič. 15 s tím, že budete uvažovat také záchyty neutronu jádrem ^{235}U, které nevedou ke štěpení.

17C. Ke štěpení ^{238}Np je třeba 4,2 MeV. Abychom z tohoto nuklidu uvolnili neutron, musíme vynaložit energii 5,0 MeV. Můžeme ^{237}Np štěpit tepelnými neutrony?

18Ú. Tepelná energie vytvořená při pohlcování záření radionuklidů pevnou látkou může sloužit jako základ malého zdroje energie pro umělé družice, meteorologické stanice v odlehlých místech a podobně. Takové radionuklidy se vytvářejí v jaderných reaktorech ve velkém množství a můžeme je chemicky oddělit od ostatního vyhořelého paliva. Jedním z vhodných radionuklidů je ^{238}Pu ($\tau = 87{,}7$ y), který emituje α-částice s energií $Q = 5{,}50$ MeV. Jaký výkon poskytuje 1 kg tohoto materiálu?

19Ú. (Viz úloha 18.) Mezi mnoha štěpnými produkty, které můžeme chemicky separovat z vyhořelého paliva jaderného reaktoru, je ^{90}Sr ($\tau = 29$ y). Tento izotop vzniká při provozu typického velkého reaktoru v množství 18 kg/y. Jeho radioaktivita vede k produkci tepla 0,93 W/g. (a) Spočtěte efektivní energii Q_{ef} reakce pro rozpad jádra ^{90}Sr. (Q_{ef} zahrnuje příspěvek od každého rozpadu dceřinných produktů v rozpadové řadě ^{90}Sr, ovšem bez energie neutrin, která zcela opustí vzorek.) (b) Je třeba navrhnout zdroj (elektrického) výkonu 150 W pro napájení elektroniky podvodního akustického majáku. Kolik ^{90}Sr je potřeba, je-li zdroj založen na produkci tepla při rozpadu ^{90}Sr a účinnost přeměny tepelné energie na elektrickou je 5,0 %?

20Ú. Mnoho lidí se obává, že pomoc dalším státům při vývoji technologie potřebné pro stavbu jaderných reaktorů zvyšuje pravděpodobnost jaderné války. Reaktory mohou být totiž užity nejen k výrobě elektrické energie, ale také k výrobě ^{239}Pu (které je „palivem“ atomových bomb) jako vedlejšího produktu záchytu neutronu laciným ^{238}U. Jak vypadá jednoduchá řada reakcí, která zahrnuje záchyt neutronu a β-rozpad a vede ke vzniku tohoto izotopu plutonia?

21Ú. V atomové bombě se energie uvolňuje při neřízeném štěpení plutonia ^{239}Pu (nebo uranu ^{235}U). Mohutnost bomb určuje velikost uvolněné energie, kterou vyjadřujeme pomocí hmotnosti TNT (trinitrotoluenu) potřebné pro uvolnění stejné energie. Jedna megatuna (10^6 tun) TNT uvolní energii $2{,}6\cdot10^{28}$ MeV. (a) Spočtěte mohutnost atomové bomby (v tunách TNT), která obsahuje 95 kg ^{239}Pu, ze kterých se skutečně štěpí 2,5 kg (cvič. 2). (b) K čemu slouží zbývajících 92,5 kg ^{239}Pu, když se neštěpí?

22Ú. Atomová bomba o mohutnosti 66 kilotun TNT (úloha 21) má jako náplň čistý ^{235}U (obr. 44.15), z něhož se pak štěpí 4,0 %. (a) Kolik uranu je v bombě? (b) Kolik vzniká celkem primárních štěpných fragmentů? (c) Kolik neutronů vznikajících při štěpení unikne do okolního prostředí? (V průměru je možno počítat s 2,5 neutronů při jednom štěpení.)

23Ú. Délka života jedné generace neutronů t_g v reaktoru je dána střední dobou potřebnou k tomu, aby se rychlý neutron emitovaný při štěpení zpomalil na tepelné energie v moderátoru a vyvolal pak nové štěpení. Předpokládejte, že výkon reaktoru v čase $t = 0$ je P_0. Ukažte, že výkon $P(t)$ v čase t je dán vztahem

$$P(t) = P_0 k^{t/t_g},$$



Obr. 44.15 Úloha 22. „Knoflík“ ^{235}U připravený k přetavení a opracování pro bojovou hlavici.

kde k je násobicí faktor. Při konstantním výkonu je $k = 1$.

24Ú. Délka života jedné generace neutronů (úloha 23) v určitém reaktoru je 1,3 ms. Výkon reaktoru je 1 200 MW. Abychom mohli provést jistá měření při údržbě, musíme dočasně snížit výkon na 350 MW. Chceme, aby přechod na tuto hodnotu trval 2,6 s. Na jakou (konstantní) hodnotu musíme nastavit násobicí faktor, abychom tento přechod dosáhli za požadovanou dobu?

25Ú. Délka života neutronové generace t_g (úloha 23) v určitém reaktoru je 1,0 ms. Jestliže reaktor pracuje s výkonem 500 MW, kolik je v něm v každém časovém okamžiku přítomno volných neutronů?

26Ú. Reaktor pracuje na výkonu 400 MW s délkou života generace neutronů (úloha 23) 30,0 ms. Jestliže se po 5,00 min zvyšuje výkon s násobicím faktorem 1,000 3, jaký je výkon reaktoru na konci těchto 5,00 min?

27Ú. (a) Neutron o hmotnosti m_n a s kinetickou energií E_k se při pružné srážce čelně srazí s atomem v klidu o hmotnosti m. Ukažte, že relativní ztráta kinetické energie neutronu je dána vztahem

$$\frac{\Delta E_k}{E_k} = \frac{4m_n m}{(m + m_n)^2}.$$

(b) Spočtěte hodnotu $\Delta E_k / E_k$ pro následující atomy: vodík, deuterium, uhlík a olovo. (c) Jestliže je na počátku $E_k = 1{,}00$ MeV, kolik takových srážek povede ke snížení kinetické energie neutronu na tepelnou hodnotu (0,025 eV), bude-li se neutron srážet s atomy deuteria, běžně užívaného jako moderátor? (*Poznámka*: Ve skutečnosti většina srážek neutronů s atomy moderátoru není čelní.)

ODST. 44.5 Přírodní jaderný reaktor

28C. Před jakou dobou byl poměr ^{235}U/^{238}U v přírodním uranu roven 0,15?

29C. Odhaduje se, že přírodní jaderný reaktor z čl. 44.5 vyrobil během svého života 15 gigawatt-roků energie. (a) Pracoval-li reaktor 200 000 let, jaký byl jeho střední výkon? (b) Kolik ^{235}U spotřeboval reaktor za dobu, kdy byl v činnosti?

30Ú. Uran těžený v současnosti obsahuje pouze 0,72 % štěpného ^{235}U v převažujícím ^{238}U, což je příliš málo pro palivo reaktoru se štěpením pomocí tepelných neutronů. Proto je třeba přírodní uran obohacovat ^{235}U. Oba izotopy ^{235}U ($\tau = 7{,}0\cdot10^{8}$ y) a ^{238}U ($\tau = 4{,}5\cdot10^{9}$ y) jsou radioaktivní. Před jakou dobou byl přírodní uran prakticky použitelné palivo pro jaderný reaktor s poměrem ^{235}U/^{238}U rovným 3,0 %?

31Ú. Některé uranové vzorky z místa přírodního jaderného reaktoru z čl. 44.5 byly spíše nepatrně *obohaceny* než ochuzeny ^{235}U. Vysvětlete to pomocí absorpce neutronů v častějším izotopu ^{238}U a následného β-rozpadu a α-rozpadu jeho produktů.

ODST. 44.6 Termojaderná fúze: základní reakce

32C. Spočtěte výšku Coulombovy bariéry pro čelní srážku dvou deuteronů. Za efektivní poloměr deuteronu vezměte hodnotu 2,1 fm.

33C. Z údajů v textu najděte a vypište přibližné výšky Coulombovy bariéry (a) pro α-rozpad ^{238}U a (b) pro štěpení ^{235}U tepelnými neutrony.

34C. Ověřte, že fúze 1,0 kg deuteria při reakci

$$^{2}\mathrm{H} + {}^{2}\mathrm{H} \rightarrow {}^{3}\mathrm{He} + \mathrm{n} \quad (Q = +3{,}27\,\mathrm{MeV})$$

umožní svítit 100 W žárovkou po dobu $3\cdot10^{4}$ let.

35C. K překonání Coulombovy bariéry byly navrženy také jiné metody než zahřívání látky. Uvažuje se například o částicových urychlovačích. Užijete-li dva urychlovače pro urychlení dvou svazků deuteronů tak, aby došlo k jejich čelní srážce, (a) jaké napětí bude každý urychlovač vyžadovat, aby deuterony při srážce překonaly Coulombovu bariéru? (b) Proč se asi tato metoda v současnosti nepoužívá?

36Ú. Rovnice pro koncentraci částic na jednotku energie $n(E_\mathrm{k})$ z obr. 44.10 je

$$n(E_\mathrm{k}) = 1{,}13n\frac{E_\mathrm{k}^{1/2}}{(kT)^{3/2}}\mathrm{e}^{-E_\mathrm{k}/kT},$$

kde n je koncentrace částic. Ve středu Slunce je teplota $1{,}50\cdot10^{7}$ K a střední energie protonu $\overline{E}_\mathrm{k}$ je 1,94 keV. Najděte podíl koncentrace protonů pro energii 5,00 keV ke koncentraci pro energii rovnou střední energii protonu.

37Ú. Vypočtěte výšku Coulombovy bariéry pro dvě jádra ^{7}Li vystřelená proti sobě se stejnou kinetickou energií E_k. (*Tip*: Poloměr jádra spočtěte podle rov. (43.3).)

38Ú. V kap. 20 jsou uvedeny vztahy pro Maxwellovo rozdělení rychlostí a energií molekul plynu. (a) Ukažte, že *nejpravděpodobnější energie* je dána vztahem

$$E_{\mathrm{k,p}} = \tfrac{1}{2}kT.$$

Ověřte tento výsledek pro křivku energiového rozdělení na obr. 44.10, kde teplota $T = 1{,}5\cdot10^{7}$ K. (b) Ukažte, že *nejpravděpodobnější rychlost* je dána vztahem

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Najděte její hodnotu pro protony při $T = 1{,}5\cdot10^{7}$ K. (c) Ukažte, že *energie odpovídající nejpravděpodobnější rychlosti* (která není totožná s nejpravděpodobnější energií) je

$$E_\mathrm{k}(v_\mathrm{p}) = kT.$$

Vyznačte tuto energii na křivce v obr. 44.10.

ODST. 44.7 Termojaderná fúze ve Slunci a dalších hvězdách

39C. Viděli jsme, že energie Q pro celý proton–protonový řetězec je 26,7 MeV. Jak souvisí tato hodnota s hodnotami Q jednotlivých reakcí tvořících tento řetězec, popsaný na obr. 44.11?

40C. Ukažte, že energie uvolněná při fúzi tří α-částic na ^{12}C je 7,27 MeV. Atomová hmotnost ^{4}He je 4,002 6 u a hmotnost ^{12}C je 12,000 0 u.

41C. Ve středu Slunce je hustota $1{,}5\cdot10^{5}$ kg/m^3 a zhruba 35 % hmotnosti tvoří vodík a 65 % helium. (a) Jaká je hustota protonů ve středu Slunce? (b) Kolikrát větší je tato hodnota než hustota částic v ideálním plynu při teplotě 0 °C a tlaku $1{,}01\cdot10^{5}$ Pa?

42Ú. Ověřte správnost tří hodnot energií Q uváděných na obr. 44.11. Potřebné atomové hmotnosti a hmotnosti částic jsou

^{1}H	1,007 825 u	^{4}He	4,002 603 u
^{2}H	2,014 102 u	$\mathrm{e}^{\pm}$	0,000 548 6 u
^{3}He	3,016 029 u		

(*Tip*: Pečlivě rozlišujte mezi hmotnostmi atomů a jader a započtěte správně hmotnosti pozitronů.)

43Ú. Vypočtěte a porovnejte energii uvolněnou při (a) fúzi 1,0 kg vodíku v nitru Slunce a (b) štěpení 1,0 kg ^{235}U v jaderném reaktoru.

44Ú. Slunce má hmotnost $2{,}0\cdot10^{30}$ kg a vyzařuje energii s výkonem $3{,}9\cdot10^{26}$ W. (a) S jakou rychlostí se přeměňuje hmotnost Slunce na jiné formy energie? (b) Jakou část své původní hmotnosti ztratilo touto cestou Slunce za dobu, kdy v něm před asi $4{,}5\cdot10^{9}$ lety začalo spalování vodíku?

45Ú. (a) Spočtěte četnost vzniku neutrin ve Slunci. Předpokládejte, že veškerá produkce energie je dána proton–protonovým řetězcem. (b) Spočtěte četnost dopadu neutrin na Zemi.

46Ú. Uhlí hoří při reakci $\mathrm{C} + \mathrm{O}_2 \rightarrow \mathrm{CO}_2$. Teplo získané při spalování je $3{,}3\cdot10^{7}$ J/kg spotřebovaného uhlíku. (a) Vyjádřete tuto hodnotu jako energii na jeden spotřebovaný uhlíkový atom. (b) Vyjádřete tuto hodnotu jako energii na jeden kilogram počátečních prvků reakce, tj. uhlíku a kyslíku. (c) Předpokládejte, že Slunce (hmotnost je $2{,}0\cdot10^{30}$ kg) je složeno z uhlíku a kyslíku

v poměru potřebném pro hoření a vyzařuje energii se současným výkonem $3{,}9{\cdot}10^{26}$ W. Jak dlouho by mohlo hořet?

47Ú. V některých hvězdách je pravděpodobnější *uhlíkový řetězec* než proton–protonový řetězec. Uhlíkový řetězec tvoří reakce

$$\begin{aligned}
{}^{12}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} &\to {}^{13}\mathrm{N} + \gamma, & Q_1 &= 1{,}95\,\mathrm{MeV},\\
{}^{13}\mathrm{N} &\to {}^{13}\mathrm{C} + \mathrm{e}^{+} + \nu, & Q_2 &= 1{,}19\,\mathrm{MeV},\\
{}^{13}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} &\to {}^{14}\mathrm{N} + \gamma, & Q_3 &= 7{,}55\,\mathrm{MeV},\\
{}^{14}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} &\to {}^{15}\mathrm{O} + \gamma, & Q_4 &= 7{,}30\,\mathrm{MeV},\\
{}^{15}\mathrm{O} &\to {}^{15}\mathrm{N} + \mathrm{e}^{+} + \nu, & Q_5 &= 1{,}73\,\mathrm{MeV},\\
{}^{15}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} &\to {}^{12}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{He}, & Q_6 &= 4{,}97\,\mathrm{MeV}.
\end{aligned}$$

(a) Ukažte, že jako celek je tento řetězec přesně ekvivalentní proton–protonovému řetězci z obr. 44.11. (b) Ověřte, že tyto dva řetězce mají podle očekávání stejnou celkovou hodnotu Q.

48Ú. Předpokládejme, že hmotnost nitra Slunce tvoří jednu osminu jeho celkové hmotnosti a je soustředěna do koule, jejíž poloměr je čtvrtina poloměru Slunce. Předpokládejme dále, že 35 % hmotnosti nitra Slunce je tvořeno vodíkem a že se v něm produkuje veškerá energie. Kdyby Slunce i nadále spalovalo vodík s rychlostí vypočtenou v př. 44.5, jak dlouho ještě může trvat, než se zásoby vodíku zcela spotřebují? Hmotnost Slunce je $2{,}0{\cdot}10^{30}$ kg.

49Ú. Efektivní hodnota Q (po odečtení energie neutrin) pro proton–protonový řetězec z obr. 44.11 je 26,2 MeV. (a) Vyjádřete tuto hodnotu jako energii na kilogram spotřebovaného vodíku. (b) Výkon Slunce je $3{,}9{\cdot}10^{26}$ W. Pokud pochází všechna energie z proton–protonového řetězce, jak rychle se ve Slunci spotřebovává vodík? (c) Jak rychle ubývá hmotnost Slunce? Vysvětlete rozdíl ve výsledcích (b) a (c). (d) Hmotnost Slunce je $2{,}0{\cdot}10^{30}$ kg. Bude-li ubývat jeho hmotnosti rychlostí spočtenou v (c), za jak dlouho ztratí 0,10 % hmotnosti?

50Ú. Hvězda přemění veškerý svůj vodík na helium a je tvořena ze 100 % z helia. Potom začne přeměna helia na uhlík jako fúze tří α-částic

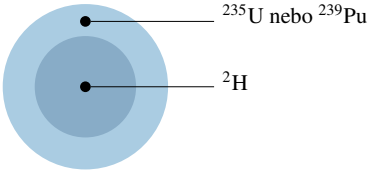
$$3\,{}^{4}\mathrm{He} \to {}^{12}\mathrm{C} + 7{,}27\,\mathrm{MeV}.$$

Hmotnost hvězdy je $4{,}6{\cdot}10^{32}$ kg a energie se vytváří s výkonem $5{,}3{\cdot}10^{30}$ W. Za jak dlouho se přemění všechno helium na uhlík?

51Ú. Na obr. 44.16 je starší návrh vodíkové bomby. Palivo pro fúzi je deuterium ${}^{2}\mathrm{H}$. Pro dosažení vysoké teploty a koncentrace částic potřebných pro fúzi se užívá jako „roznětka“ atomová bomba, která obsahuje štěpné palivo ${}^{235}\mathrm{U}$ nebo ${}^{239}\mathrm{Pu}$. Její geometrie je taková, že při výbuchu vzniká do středu směřující rázová vlna, která stlačuje deuterium. Základní reakce jaderné fúze je v tomto případě

$$5\,{}^{2}\mathrm{H} \to {}^{3}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He} + {}^{1}\mathrm{H} + 2\mathrm{n}.$$

(a) Spočtěte Q pro uvedenou reakci. Potřebné atomové hmotnosti jsou uvedeny v úloze 42. (b) Spočtěte mohutnost (úloha 21) části bomby založené na jaderné fúzi, obsahuje-li 500 kg deuteria, z něhož se 30 % účastní fúze.



Obr. 44.16 Úloha 51

ODST. 44.8 Řízená termojaderná fúze

52C. Ověřte hodnoty Q uvedené v rov. (44.9), (44.10) a (44.11). Potřebné hmotnosti jsou:

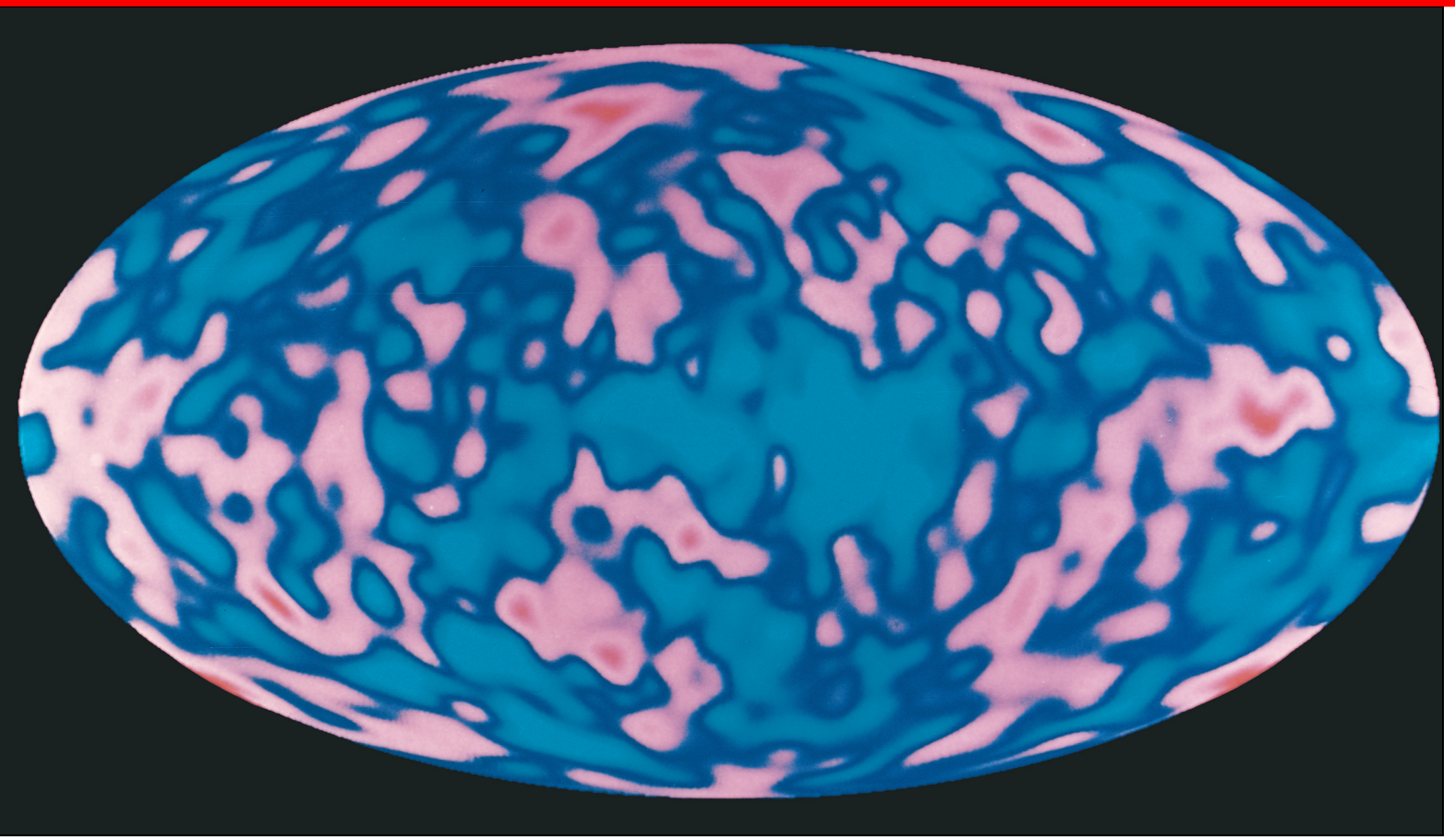
${}^{1}\mathrm{H}$	1,007 825 u	${}^{4}\mathrm{He}$	4,002 603 u
${}^{2}\mathrm{H}$	2,014 102 u	n	1,008 665 u
${}^{3}\mathrm{H}$	3,016 049 u		

53C. Jak se rozdělí energie Q reakce při deuteron-tritonové fúzi, uvedené v rov. (44.11), mezi α-částici a neutron? Zanedbejte relativně malé kinetické energie obou částic, které do reakce vstupují.

54Ú. Obyčejná voda obsahuje přibližně 0,015 0 % (hmotnostních) „těžké vody“, kde jeden ze dvou vodíkových atomů je nahrazen deuteriem ${}^{2}\mathrm{H}$. Jaký střední výkon můžeme získat, jestliže „spálíme“ během jednoho dne veškeré ${}^{2}\mathrm{H}$ obsažené v 1 litru vody reakcí ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{2}\mathrm{H} \to {}^{3}\mathrm{He} + \mathrm{n}$?

45

Kvarky, leptony a Velký třesk



Tento obrázek můžeme považovat za „fotografii“ vesmíru starého pouze 300 000 let, tedy v době před asi $15 \cdot 10^9$ lety. Takový obraz bychom tehdy viděli při pohledu do všech směrů (zorné pole bylo promítnuto do oválu obrázku). Skvrny světla z atomů se táhnou napříč „oblohou“, ale galaxie, hvězdy a planety se ještě nezformovaly. Jak můžeme takovou fotografii raného vesmíru získat?

45.1 ŽIVOT NA HRANĚ

Fyzikové často označují teorii relativity a kvantovou fyziku jako „moderní fyziku“, aby je odlišili od Newtonovy mechaniky a Maxwellovy elektromagnetické teorie, které jsou společně označovány jako „klasická fyzika“. Jak roky ubíhají, slovo „moderní“ je stále méně vhodné pro teorie, jejichž základy byly položeny na začátku dvacátého století. Nicméně jednou vytvořená nálepka již zůstává.

V této závěrečné kapitole budeme sledovat dva směry bádání, které jsou skutečně „moderní“, ale které zároveň mají ty nejstarší kořeny. Jsou soustředěny kolem dvou ošidně jednoduchých otázek:

Z čeho je vytvořen vesmír?
Jak došlo k tomu, že vesmír je takový, jaký je?

Pokrok ve schopnosti odpovídat na tyto otázky byl v posledních několika desetiletích velmi rychlý.

Mnoho nových poznatků je založeno na experimentech, prováděných na velkých urychlovačích částic. Jak ale fyzikové nechávají srážet částice při stále vyšších a vyšších energiích na stále větších a větších urychlovačích, docházejí k poznání, že žádný myslitelný urychlovač vytvořený na Zemi nemůže produkovat částice s energiemi dostatečně vysokými k ověření jejich teorií. Byl zde jediný takový zdroj částic s potřebnými energiemi, a to byl vesmír sám během prvních několika minut své existence. „Kvarková polévka“ tvořící vesmír v prvních několika sekundách odpočítávaných kosmickými hodinami je sama tím nejzákladnějším testem pro ověřování teorií fyziky elementárních částic!

V této kapitole se setkáme s množstvím nových pojmů a skutečnou záplavou částic s názvy, které si nemusíte snažit zapamatovat. Jestliže budete na chvíli zmateni, budete jen sdílet zmatení těch fyziků, kteří tento vývoj prožívali a kteří často neviděli nic jiného než narůstající složitost s malou nadějí na pochopení. Jestliže ale vytrváte, budete také sdílet nadšení, které fyzikové pociťovali, když báječné nové urychlovače chrlily nové výsledky a když teoretici předkládali nové myšlenky, stále odvážnější a odvážnější, až konečně ze zmatku vyvstal jasný obraz.

Možná by bylo vhodné si znovu přečíst čl. 2.9, ve kterém jsme poprvé mluvili o základních částicích fyziky.

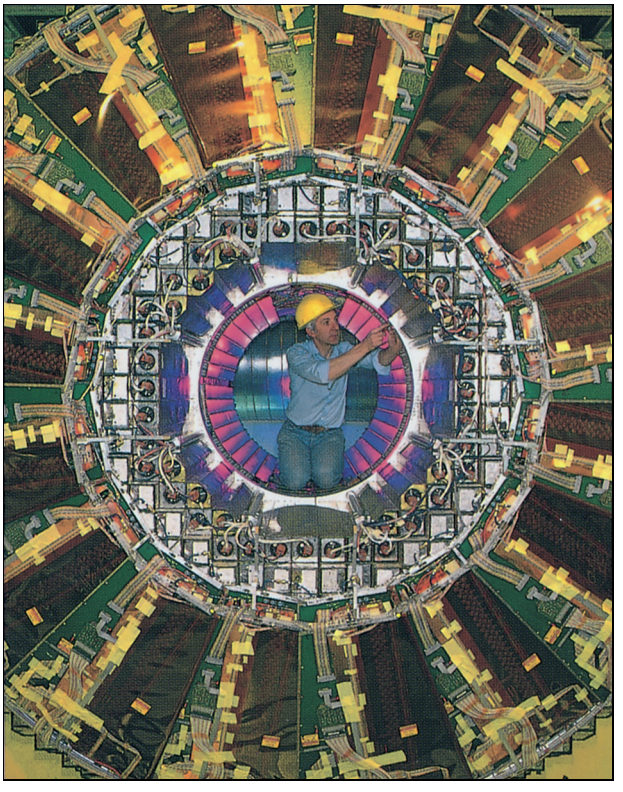
45.2 ČÁSTICE, ČÁSTICE, ČÁSTICE

Ve třicátých letech 20. století bylo mnoho fyziků, kteří se domnívali, že bádání o základech struktury hmoty je na nejlepší cestě k vyřešení. K pochopení atomu stačily tři částice: elektron, proton a neutron. Kvantová teorie uměla dobře počítat strukturu atomu a radioaktivní α-rozpad. K tomu přibylo předpokládané, ale tehdy ještě nepozorované neutrino, které Enrico Fermi zařadil do úspěšné teorie β-rozpadu. Byla naděje, že použití kvantové teorie na proton a neutron brzy umožní počítat vlastnosti jádra. Co víc si ještě můžeme přát?

Nadšení však nevydrželo dlouho. Již na konci zmíněné dekády začala doba objevů nových a nových částic, která trvá dodnes. Nové částice dostaly jména a označení jako *mion*, π*-mezon* (*pion*), K-*mezon* (*kaon*) a Σ*-baryon*. Všechny tyto nové částice jsou nestabilní, jejich střední doba života leží v intervalu od 10^{-6} s do 10^{-23} s. Tato poslední hodnota je tak malá, že existenci takové částice můžeme ověřit jen nepřímými metodami.

Zmíněné částice se vytvářejí při srážkách mezi protony nebo elektrony urychlenými na vysoké energie v urychlovačích v laboratořích jako Fermilab (blízko Chicaga), CERN (poblíž Ženevy), SLAC (ve Stanfordu) a DESY (nedaleko Hamburku). Částice objevujeme pomocí detektorů rozvinutých do důmyslných zařízení (příklad je na obr. 45.1), které si co do velikosti a složitosti nezadají s urychlovači budovanými před nějakými deseti lety.

Obr. 45.1 Detektor OPAL (zkratka anglického názvu „omni-purpose apparatus“, mnohaúčelové zařízení) v CERNu, evropské laboratoři fyziky vysokých energií blízko Ženevy. OPAL je navržen pro měření energií částic vytvářených při srážce elektronů a pozitronů s energiemi kolem 50 GeV. Ačkoli má tento detektor obrovské rozměry (váží více než 3 000 tun), je malý ve srovnání s vlastním urychlovačem, prstencem s obvodem 27 km.



Dnes známe několik stovek částic. Jejich pojmenování brzy vyčerpalo zásobu písmen řecké abecedy a jsou většinou známy jen pod číslem v periodicky publikovaných kompilacích. Abychom do této řady částic vtiskli řád, pokusíme se najít jednoduché fyzikální charakteristiky, z nichž každá umožní zařadit částice do právě jedné ze dvou skupin. Takový první hrubý řez částicemi můžeme provést alespoň třemi následujícími způsoby.

Fermiony nebo bosony?

Všechny částice mají vlastní moment hybnosti nazývaný **spin**, jak jsme to již viděli v čl. 32.4 pro elektrony, protony a neutrony. Zobecníme-li značení z tohoto odstavce, můžeme psát pro složku spinu $\boldsymbol{S}$ v libovolném směru (předpokládejme, že v tomto směru je orientována osa z)

$$S_z = m_s\hbar \quad \text{pro } m_s = s, s-1, \ldots, -s, \qquad (45.1)$$

kde $\hbar = h/(2\pi)$, m_s je *spinové magnetické kvantové číslo* a s je *spinové kvantové číslo*. Číslo s může nabývat buď poločíselných ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, …), nebo celočíselných (0, 1, 2, …) hodnot. Například pro elektron je $s = \frac{1}{2}$. Spin elektronu (měřený v průmětu do libovolného směru) může tedy nabývat hodnot

$$S_z = \tfrac{1}{2}\hbar \quad \text{(spin nahoru)},$$
$$S_z = -\tfrac{1}{2}\hbar \quad \text{(spin dolů)}.$$

Výraz *spin* se užívá ve dvou různých významech: správně označuje vlastní moment hybnosti částice $\boldsymbol{S}$, ale často se také volněji používá k označení spinového kvantového čísla s částice. V takovém případě se například mluví o elektronu jako o částici se spinem $\frac{1}{2}$.

Částice s poločíselným spinovým kvantovým číslem (jako např. elektrony) se nazývají **fermiony**, podle Fermiho, který (současně s Paulem Diracem) objevil statistické zákony, kterými se řídí jejich chování. Stejně jako elektrony mají i protony a neutrony spin $s = \frac{1}{2}$, a jsou tedy fermiony.

Částice s celočíselným (nebo nulovým) spinovým kvantovým číslem se nazývají **bosony**, podle indického fyzika Satyendranatha Boseho, který (současně s Albertem Einsteinem) objevil statistické zákony pro *tyto* částice. Fotony, které mají spin $s = 1$, jsou bosony; brzy se setkáme s dalšími částicemi tohoto druhu.

Tato klasifikace částic se zdá být triviální, ale je velmi důležitá z následujícího důvodu:

> Pro fermiony platí Pauliho vylučovací princip, který určuje, že v daném kvantovém stavu se může nacházet jediná částice. Bosony se tímto principem *neřídí*. V daném kvantovém stavu se může nacházet libovolný počet bosonů.

Viděli jsme, jak důležitý je Pauliho vylučovací princip při rozdělení elektronů (spin $\frac{1}{2}$) v atomu do jednotlivých kvantových stavů. Dokážeme tak plně vysvětlit strukturu a vlastnosti nejrůznějších atomů a také pevných látek jako kovů nebo polovodičů.

Protože se bosony *neřídí* Pauliho vylučovacím principem, mají všechny snahu zaujímat kvantový stav s nejnižší energií. V roce 1995 se podařilo skupině v Boulderu, Colorado získat kondenzát asi 2 000 atomů rubidia-87 — tyto atomy jsou bosony — v jediném kvantovém stavu s téměř nulovou energií.

Aby k takovému jevu mohlo dojít, muselo být rubidium získáno jako *pára* o teplotě tak nízké a hustotě tak vysoké, aby de Broglieho vlnová délka jednotlivých atomů byla velká ve srovnání se střední vzdáleností mezi atomy. Je-li tato podmínka splněna, vlnové funkce jednotlivých atomů se překrývají a celý soubor je možno považovat za jediný kvantový systém, nazývaný *Boseho-Einsteinův kondenzát*. Obr. 45.2 ukazuje, že když je teplota rubidiových par snížena asi na $1{,}70\cdot10^{-7}$ K, systém se skutečně „zhroutí“ do jediného ostře definovaného stavu, který odpovídá přibližně nulové rychlosti jeho atomů.

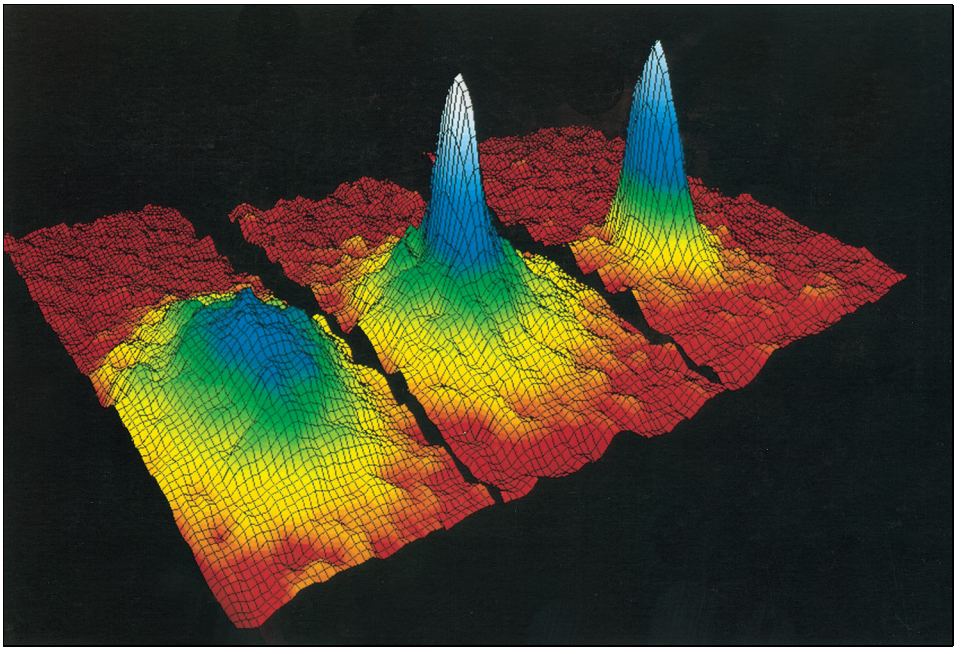
Hadrony nebo leptony?

Částice také můžeme třídit podle sil, které na ně působí. V čl. 6.5 (který by bylo vhodné si znovu přečíst) jsme nastínili existenci čtyř základních sil. *Gravitační síla* působí na *všechny* částice, ale její účinek je na úrovni subatomových částic tak slabý, že ji nemusíme uvažovat (alespoň při současných výzkumech). *Elektromagnetická síla* působí na všechny částice s nenulovým elektrickým nábojem, její účinek je dobře znám a můžeme ji v případě potřeby uvažovat; v této kapitole to ale nebudeme potřebovat.

Zůstává nám tedy *silná jaderná síla*, což je síla, která k sobě váže nukleony, a *slabá jaderná síla*, která se projevuje při β-rozpadu a podobných dějích. Slabá jaderná síla působí na všechny částice, silná jaderná síla pouze na některé.

Částice tedy můžeme zhruba rozdělit podle toho, jestli na ně působí silná jaderná síla. Částice, na které tato síla působí, nazýváme **hadrony**. Částice, na které silná jaderná síla *nepůsobí* a kde je tedy dominantní slabá jaderná síla, nazýváme **leptony**. Protony, neutrony a piony patří mezi hadrony; elektrony a neutrina jsou leptony. Brzy se setkáme s dalšími členy obou tříd.

Další dělení hadronů můžeme provést podle toho, jsou-li bosony (těm říkáme **mezony**); příkladem je pion. Ostatní hadrony jsou fermiony (říkáme jim **baryony**); příkladem je proton.



(*a*) (*b*) (*c*)

Obr. 45.2 Tři grafy znázorňují teoreticky vypočtené rozložení rychlostí atomů v parách rubidia-87. Teplota páry se postupně snižuje od grafu (a) ke grafu (c). Graf (c) ukazuje ostré maximum rozložení kolem nulové rychlosti. To znamená, že všechny atomy jsou v témže kvantovém stavu. Boseho-Einsteinův kondenzát, často nazývaný Svatý Grál atomové fyziky, byl konečně získán v roce 1995.

Částice nebo antičástice?

V roce 1928 Dirac předpověděl, že elektron e^- by měl mít kladně nabitý protějšek se stejnou hmotností a spinem. Tento protějšek, *pozitron* e^+, objevil v kosmickém záření Carl Anderson v roce 1932. Fyzikové pak postupně přišli k poznání, že ke každé částici existuje také odpovídající **antičástice**. Členové takových dvojic mají stejnou hmotnost a spin, ale opačné znaménko náboje (jsou-li nabité) a opačná znaménka dalších kvantových čísel, o nichž jsme se zatím nezmínili.

Původně se *částicemi* nazývaly obecně známé částice, jako jsou elektrony, protony a neutrony, a *antičásticemi* jejich velmi zřídka pozorované protějšky. Pro méně známé částice se zařazení do skupiny *částic* nebo *antičástic* děje tak, aby bylo konzistentní s určitými zákony zachování, které probereme později v této kapitole. Často, ale ne vždy důsledně, označujeme antičástici pruhem nad symbolem příslušné částice. Tak p je symbol pro proton a $\bar{\text{p}}$ je symbol pro antiproton.

Při setkání částice a její antičástice může dojít k vzájemné anihilaci. To znamená, že obě částice zmizí a jejich souhrnná energie se objeví v jiných formách. Pro anihilující dvojici elektron a pozitron se tato energie objeví ve formě dvou fotonů gama záření:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma \quad (Q = 1{,}02\,\text{MeV}). \qquad (45.2)$$

Jestliže obě částice jsou při anihilaci v klidu, mají oba fotony stejnou energii a — aby se zachovávala hybnost a protože fotony nemohou být v klidu — rozletí se do opačných směrů.

V roce 1996 se podařilo fyzikům v CERNu alespoň na několik prchavých nanosekund vytvořit hrstku antivodíkových atomů, tvořených vzájemně vázaným pozitronem a antiprotonem (pravděpodobně přesně tak, jako jsou vázány elektron a proton v atomu vodíku). Pro takový soubor antičástic užíváme název *antihmota*, když pro soubor částic užíváme běžně slovo *hmota*.

Můžeme si představit, že existují celé galaxie antihmoty, obsahující atomy, molekuly a dokonce fyziky. Můžeme dokonce uvažovat o katastrofě, která by nastala, kdyby se například asteroid uniklý z takové galaxie setkal (tedy anihiloval) s částí Země. Naštěstí ale současné poznatky svědčí o tom, že nejen naše galaxie, ale i celý vesmír pozůstávají především z hmoty. (Tato ztráta symetrie ovšem znepokojuje fyzika, který by normálně očekával, že v přírodě najde symetrii.)

Shrneme si tuto část takto: jestliže naleznete novou částici, musíte si položit tyto tři otázky:

- Je to fermion nebo boson?
- Je to lepton nebo hadron? Je-li to hadron, je to mezon nebo baryon?
- Je to částice nebo antičástice?

45.3 MEZIHRA

Dříve, než se hlouběji ponoříme do problému klasifikace částic, zastavme se na chvíli a pokusme se zachytit způsob

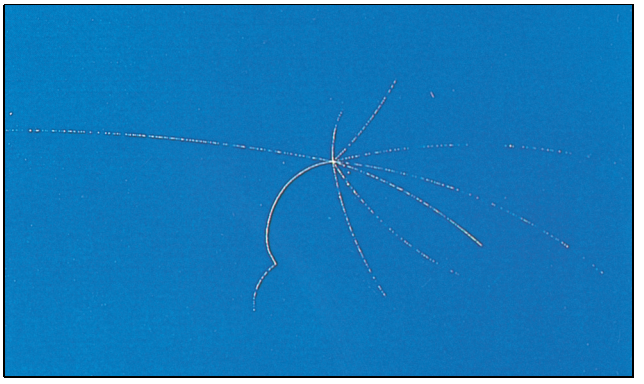
bádání ve fyzice částic tím, že budeme analyzovat typickou událost, zachycenou na fotografii z bublinkové komory (obr. 45.3a).

Stopy na obrázku jsou proudy bublinek vytvářených průchodem vysokoenergiových nabitých částic, které se pohybují komorou naplněnou tekutým vodíkem. Částici, která zanechává danou stopu, můžeme identifikovat — mimo jiné — podle relativní vzdálenosti mezi bublinkami. Komora je umístěna v magnetickém poli, které vychyluje kladně nabité částice proti směru a záporně nabité částice po směru otáčení hodinových ručiček. Ze změřeného poloměru křivosti stopy můžeme vypočítat hybnost částice. Tab. 45.1 obsahuje některé vlastnosti částic a antičástic, které se účastnily události zobrazené na obr. 45.3a. Podle obecné zvyklosti vyjadřujeme hmotnosti částic v tab. 45.1 — a ve všech dalších tabulkách této kapitoly — v jednotkách MeV/c^2. Důvod pro takovou volbu je dán tím, že spíše než hmotnost částice je potřeba znát její klidovou energii. Je-li tedy uvedena v tab. 45.1 hmotnost protonu 938,3 MeV/c^2, najdeme klidovou energii protonu vynásobením této hmotnosti c^2, tedy 938,3 MeV.

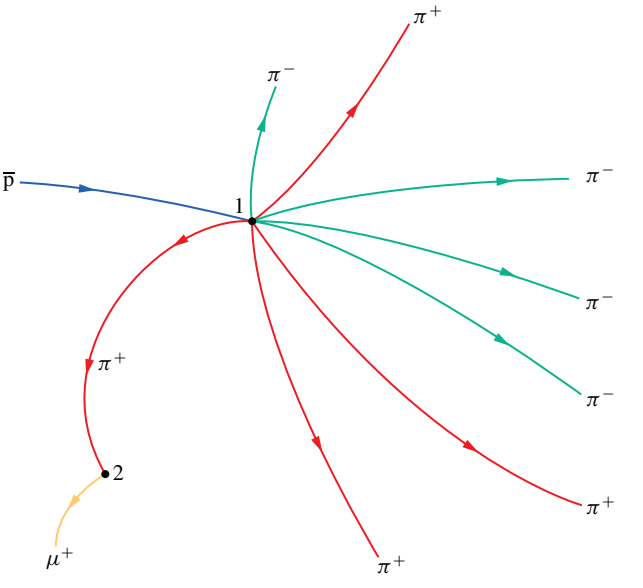
Nástroje, které užijeme při analýze události, jsou zákony zachování energie, hybnosti, momentu hybnosti a náboje. Přidáme k nim další zákony zachování, o kterých jsme se zatím nezmiňovali. Obr. 45.3a je jeden z dvojice stereosnímků, v praxi tedy probíhá analýza ve třech rozměrech.

Událost na obr. 45.3a je spuštěna antiprotonem ($\bar{p}$) o vysoké energii, který byl urychlen v urychlovači Lawrence Berkeley Laboratory a vstupuje do komory zleva. Proběhly tři oddělené události; dvě jsou viditelné jako body 1 a 2 na obr. 45.3b a třetí je už mimo obrázek.

1. ***Anihilace protonu a antiprotonu.*** V bodě 1 na obrázku 45.3b narazí antiproton (modrá stopa) do protonu z kapaliny v komoře a výsledkem je jejich vzájemná anihilace. O tom, že při anihilaci byl antiproton v pohybu, svědčí to, že převážná část částic vzniklých při srážce se pohybuje dopředu, tj. doprava na obr. 45.3. Ze zákona zachování hybnosti totiž plyne, že antiproton musel mít před anihilací hybnost, odpovídající pohybu vpřed.



(*a*)



(*b*)

Obr. 45.3 (a) Fotografie z bublinkové komory ukazuje řadu událostí spuštěných antiprotonem, který vnikl do komory zleva. (b) Dráhy částic jsou překresleny a popsány. Tečky v bodech 1 a 2 ukazují místa sekundárních událostí popsaných v textu. Dráhy jsou zakřiveny, protože magnetické pole v komoře vychyluje pohybující se nabité částice.

Celková energie při srážce antiprotonu s protonem (v klidu) je součtem kinetické energie antiprotonu a kli-

Tabulka 45.1 **Částice a antičástice z události na obr. 45.3**

Částice	Symbol	Náboj	Hmotnost (MeV/c^2)	Spin	Typ	Střední doba života[a] (s)	Antičástice
Neutrino	ν	0	0	1/2	lepton	stabilní	$\bar{\nu}$
Elektron	e^-	−1	0,511	1/2	lepton	stabilní	e^+
Mion	μ^-	−1	105,7	1/2	lepton	$2{,}2\cdot10^{-6}$	μ^+
Pion	π^+	+1	139,6	0	mezon	$2{,}6\cdot10^{-8}$	π^-
Proton	p	+1	938,3	1/2	baryon	stabilní	$\bar{p}$

[a] *Střední doba života* $1/\lambda$ se liší od *poločasu rozpadu* $(\ln 2)/\lambda$; rov. (43.8).

dových energií obou částic (938,3 MeV + 938,3 MeV = = 1 876,6 MeV). To je energie dostačující k tomu, aby vznikla řada lehčích částic i s jistou kinetickou energií. V našem případě vznikly po anihilaci čtyři kladné piony (červené stopy) a čtyři záporné piony (zelené stopy). Pro jednoduchost předpokládáme, že nevznikly žádné fotony γ-záření; ty by nezanechaly na snímku žádné stopy, neboť nemají elektrický náboj. Reakce je tedy

$$\mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}} \rightarrow 4\pi^+ + 4\pi^-. \qquad (45.3)$$

Z tab. 45.1 vidíme, že kladné piony (π^+) jsou *částice* a záporné piony (π^-) *antičástice*. Reakce popsaná rov. (45.3) je *silná interakce* (mezi částicemi působí silná jaderná síla), poněvadž všechny částice účastnící se reakce jsou hadrony.

Všimněme si, že se zachovává náboj. Náboj můžeme psát jako Qe, kde Q je nábojové kvantové číslo. (Nezaměňujte ho s Q, které označuje energii uvolněnou nebo pohlcenou v reakcích jako je rov. (45.2).) Hodnoty Q pro reakci popsanou v rov. (45.3) jsou

$$(+1) + (-1) = 4 \cdot (+1) + 4 \cdot (-1),$$

což nám říká, že celkový náboj je nulový před anihilací i po ní.

Pokud jde o energiovou bilanci, poznamenejme, že využitelná energie při anihilaci páru p–$\bar{\mathrm{p}}$ je minimálně rovna součtu klidových energií protonu a antiprotonu, tj. 1 876,6 MeV. Klidová energie pionu je 139,6 MeV, tedy klidová energie všech osmi pionů je $8 \cdot 139{,}6$ MeV, tj. 1 116,8 MeV. Tak je k dispozici nezanedbatelné množství energie (minimálně kolem 760 MeV), která se rozdělí na kinetickou energii uvedených osmi pionů. Vidíme, že při naší reakci můžeme snadno vyhovět požadavku zachování energie.

2. ***Rozpad pionů.*** Piony jsou nestabilní částice; rozpad nabitých pionů je charakterizován střední dobou života $2{,}6 \cdot 10^{-8}$ s. V bodě 2 na obr. 45.3b se jeden z kladných pionů v komoře zastaví a spontánně rozpadne na antimion μ^+ (žlutá stopa) a neutrino ν:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu. \qquad (45.4)$$

Poněvadž neutrino nemá elektrický náboj, nezanechává na snímku žádnou stopu. Jak antimion, tak neutrino jsou leptony; jsou to částice, které na sebe nepůsobí silnou jadernou silou. Mezi částicemi působí slabá jaderná síla, rozpad popsaný rov. (45.4) je *slabá interakce*. Klidová energie mionu je 105,7 MeV, takže pro kinetickou energii antimionu a neutrina zůstává 139,6 MeV − 105,7 MeV, tj. 33,9 MeV.

Spinové kvantové číslo pionu je nula a spinová kvantová čísla antimionu a neutrina jsou $\frac{1}{2}$; proto bude zákon zachování momentu hybnosti splněn pro reakci (45.4) tehdy, budou-li spiny antimionu a neutrina orientovány opačně (jedna částice bude mít spin nahoru, druhá dolů):

$$0\hbar = \tfrac{1}{2}\hbar + \left(-\tfrac{1}{2}\hbar\right).$$

Z rov. (45.4) je vidět, že je splněn zákon zachování náboje.

3. ***Rozpad mionu.*** Miony (ať už μ^- nebo μ^+) jsou také nestabilní, střední doba života je $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s. Mimo zorné pole obr. 45.3b se antimion vzniklý v reakci popsané rov. (45.4) zastaví a spontánně rozpadá podle schématu

$$\mu^+ \rightarrow \mathrm{e}^+ + \nu + \bar{\nu}. \qquad (45.5)$$

Klidová energie mionu je 105,7 MeV a klidová energie pozitronu je pouze 0,511 MeV, takže pro kinetickou energii tří částic vytvořených podle rov. (45.5) zůstává 105,2 MeV.

Můžeme se podivit: Proč máme v reakci (45.5) dvě neutrina? Proč nestačí jedno, podobně jako při rozpadu pionu v reakci (45.4)? Jedním důvodem je, že antimion, pozitron i neutrino mají spinové kvantové číslo $\frac{1}{2}$ a že tedy v reakci s jedním neutrinem by nemohl být splněn zákon zachování spinového momentu hybnosti v rov. (45.5). V čl. 45.4 rozebereme další důvod.

PŘÍKLAD 45.1

V roce 1964 byly v Brookhaven National Laboratory prováděny experimenty s fokusovaným svazkem kaonů (K^-). Kaony, jejichž kinetická energie byla 5 000 MeV a které byly produkovány v tamním synchrotronu, putovaly relativistickou rychlostí zhruba 140 m dlouhou vakuovou trubicí k bublinkové komoře, kde probíhaly experimenty.

Klidová energie mc^2 kaonů je 494 MeV a střední doba života je $8{,}6 \cdot 10^{-9}$ s. O kolik se snížila intenzita svazku kaonů při jejich cestě od synchrotronu k bublinkové komoře?

ŘEŠENÍ: Kinetická energie kaonu souvisí s klidovou energií mc^2 podle rov. (38.33):

$$E_{\mathrm{k,K}} = mc^2(\gamma - 1).$$

Lorentzův faktor γ pro 5 000 MeV kaony je

$$\gamma = \frac{E_{\mathrm{k,K}}}{mc^2} + 1 = \frac{(5\,000\ \mathrm{MeV})}{(494\ \mathrm{MeV})} + 1 = 11{,}1.$$

Střední doba života τ těchto pohybujících se částic v laboratorní soustavě je rovna střední době života v klidové soustavě částice násobené dilatačním faktorem podle rov. (38.8):

$$\tau = \gamma\tau_0 = (11{,}1)(8{,}6 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}) = \\ = 9{,}55 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}.$$

Při pohybu přibližně rychlostí světla po dobu τ urazí kaon dráhu, která měřena v laboratorní souřadné soustavě je

$$L = c\tau = (3{,}00 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}})(9{,}55 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}) = \\ = 28{,}7\ \mathrm{m}.$$

Střední době života kaonů odpovídá vzdálenost $L = 28{,}7$ m v laboratorní soustavě a počet částic ve svazku se tedy sníží

na polovinu vždy po proběhnutí této dráhy. Na samém konci, poté co svazek překoná vzdálenost 140 m, poklesne díky rozpadu částic počet kaonů ve svazku (tj. intenzita svazku) na

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{140}{28,7}\right)} = 0,034 \text{ neboli } 3,4\,\% \qquad \text{(Odpověď)}$$

počáteční hodnoty.

Takový útlum svazku je nevítaný, ale stále ještě přijatelný. Povšimněte si, jak důležitý je jev dilatace času. Bez něj by totiž došlo k zeslabení intenzity svazku na

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{140}{28,7}\right)(11,1)} \doteq 5{\cdot}10^{-17}$$

původní hodnoty. (Zdůvodnění najdete při opětném čtení předchozí argumentace.) Dilatace času způsobuje vzrůst intenzity v řádu milionů miliard.

PŘÍKLAD 45.2

Pion v klidu se rozpadá podle rov. (45.4):

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu.$$

Jaká bude kinetická energie antimionu μ^+? Jaká bude kinetická energie neutrina?

ŘEŠENÍ: Z tab. 45.1 známe klidové energie pionu a antimionu 139,6 MeV a 105,7 MeV. Rozdíl těchto energií musí být kinetická energie antimionu a neutrina, tedy

$$\begin{aligned} &139,6\,\text{MeV} - 105,7\,\text{MeV} = \\ &\quad = 33,9\,\text{MeV} = E_{\text{k},\mu} + E_{\text{k},\nu}. \end{aligned} \qquad (45.6)$$

Poněvadž pion byl v klidu, vyžaduje zákon zachování hybnosti

$$p_\mu = p_\nu,$$

kde p_μ je *velikost* hybnosti antimionu a p_ν neutrina. Vhodná forma tohoto vztahu je

$$(p_\mu c)^2 = (p_\nu c)^2. \qquad (45.7)$$

Rov. (38.37)

$$(pc)^2 = E_\text{k}^2 + 2E_\text{k}mc^2 \qquad (45.8)$$

dává relativistický vztah mezi kinetickou energií částice E_k a její hybností p. Po dosazení do rov. (45.7) dostáváme

$$E_{\text{k},\mu}^2 + 2E_{\text{k},\mu}m_\mu c^2 = E_{\text{k},\nu}^2, \qquad (45.9)$$

neboť pro neutrino předpokládáme $m_\nu c^2 = 0$. Nyní vypočteme z rov. (45.6) $E_{\text{k},\nu}$ a dosadíme do rov. (45.9). Odtud pak pro $E_{\text{k},\mu}$ dostaneme

$$\begin{aligned} E_{\text{k},\mu} &= \frac{(33,9\,\text{MeV})^2}{2(33,9\,\text{MeV} + m_\mu c^2)} = \\ &= \frac{(33,9\,\text{MeV})^2}{2(33,9\,\text{MeV} + 105,7\,\text{MeV})} = \\ &= 4,12\,\text{MeV}. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kinetická energie neutrina je potom z rov. (45.6)

$$\begin{aligned} E_{\text{k},\nu} &= 33,9\,\text{MeV} - E_{\text{k},\mu} = 33,9\,\text{MeV} - 4,12\,\text{MeV} = \\ &= 29,8\,\text{MeV}. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z výsledku vidíme, že ačkoli velikosti hybnosti obou rozbíhajících se částic jsou stejné, neutrino získá větší část (88 %) kinetické energie.

PŘÍKLAD 45.3

Protony v bublinkové komoře jsou bombardovány zápornými piony o vysoké energii a nastává následující reakce:

$$\pi^- + \text{p} \to \text{K}^- + \Sigma^+.$$

Klidové energie těchto částic jsou:

π^-	139,6 MeV	K^-	493,7 MeV
p	938,3 MeV	Σ^+	1 189,4 MeV

Jaká je energie rozpadu při této reakci?

ŘEŠENÍ: Energie rozpadu je

$$\begin{aligned} Q &= (m_\pi c^2 + m_\text{p} c^2) - (m_\text{K} c^2 + m_\Sigma c^2) = \\ &= (139,6\,\text{MeV} + 938,3\,\text{MeV}) - \\ &\quad - (493,7\,\text{MeV} + 1\,189,4\,\text{MeV}) = \\ &= -605\,\text{MeV}. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

Záporné znaménko výsledku říká, že jde o *endotermickou* reakci. To znamená, že pokud je proton v klidu, musí mít dopadající pion (π^-) kinetickou energii větší než nějaká prahová hodnota, aby reakce mohla vůbec proběhnout. Prahová energie je větší než 605 MeV vzhledem k tomu, že musí být splněn i zákon zachování hybnosti, tedy nejen že vznikne dvojice kaon (K^-) a Σ-baryon (Σ^+), ale že tyto částice musí získat jistou kinetickou energii. Relativistický výpočet, jehož detaily pro nás v tuto chvíli nejsou důležité, ukazuje, že prahová energie pro dopadající pion je 907 MeV.

45.4 LEPTONY

Pokračujme nyní s naším programem klasifikace částic. Budeme se nejprve zabývat leptony, tedy částicemi, na které *nepůsobí* silná jaderná síla.

Zatím jsme se jako s leptonem seznámili se známým elektronem a s neutrinem, které jej provází při β-rozpadu. Jiným příkladem leptonu je mion, jehož rozpad popisuje rov. (45.5). Fyzikové postupně objevili, že neutrino, které se objevuje v rov. (45.4) při vzniku mionu, *není ta samá částice* jako neutrino v β-rozpadu, které je spojeno s výskytem elektronu. Pokud je musíme rozlišovat, nazýváme první z nich **mionové neutrino** (symbol ν_μ) a druhé pak **elektronové neutrino** (symbol ν_e).

To, že se skutečně jedná o dva různé druhy neutrina, dokazuje skutečnost, že při dopadu mionových neutrin (produkovaných při pionovém rozpadu podle rov. (45.4)) na terč pevné látky jsou vždy pozorovány *pouze miony*, ale nikdy elektrony. Naopak dopadají-li elektronová neutrina (produkovaná při β-rozpadu štěpných produktů v jaderném reaktoru) na terč pevné látky, jsou vždy pozorovány *pouze elektrony*, ale nikdy miony.

Další lepton, **tauon** (symbol τ), byl objeven ve SLAC v roce 1975; jeho objevitel Martin Perl se stal v roce 1995 laureátem Nobelovy ceny za fyziku. Také k tauonu existuje přidružené neutrino, odlišné od obou předchozích. V tab. 45.2 jsou shrnuty dnes známé leptony. Leptony jsou rozděleny do tří rodin, z nichž každá obsahuje částici (elektron, mion a tauon) a k ní přidružené neutrino. Máme také důvod věřit, že existují právě jen tři rodiny leptonů uvedené v tab. 45.2. Leptony nemají žádnou rozeznatelnou vnitřní strukturu ani měřitelné rozměry; při interakci s ostatními částicemi nebo elektromagnetickými vlnami se chovají jako opravdu bodové fundamentální částice.

Zachování leptonového čísla

V každé ze tří leptonových rodin v tab. 45.2 můžeme definovat kvantové číslo, tzv. **leptonové číslo**: přiřadíme $L = +1$ každé částici a $L = -1$ každé antičástici. Částicím jiných druhů (jako třeba proton) přiřadíme $L = 0$. Je experimentálně ověřeno, že při všech reakcích se zachovává leptonové číslo *zvlášť pro každou leptonovou rodinu*. Máme tedy vlastně tři leptonová čísla, L_e, L_μ a L_τ, přitom *každé z nich* se při reakcích zachovává.

Příkladem je již uváděný rozpad antimionu v rovnici (45.5), který si nyní podrobněji napíšeme jako

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu. \qquad (45.10)$$

Podívejme se na rozpad nejprve z pohledu mionové rodiny leptonů. μ^+ je antičástice (tab. 45.2) a má tedy mionové leptonové číslo $L_\mu = -1$. Částice e^+ a ν_e nepatří do mionové rodiny a mají tedy $L_\mu = 0$. Nakonec poslední člen na pravé straně $\bar{\nu}_\mu$ je antičástice a má proto také mionové leptonové číslo $L_\mu = -1$. Obě strany rov. (45.10) mají stejné mionové leptonové číslo, jmenovitě $L_\mu = -1$; kdyby tomu tak nebylo, nemohlo by k takovému rozpadu μ^+ docházet.

Na levé straně rov. (45.10) není žádná částice elektronové rodiny, elektronové leptonové číslo je tedy $L_e = 0$. Na pravé straně rov. (45.10) má pozitron jako antičástice (tab. 45.2) leptonové číslo $L_e = -1$. Elektronové neutrino je částice a má tedy elektronové leptonové číslo $L_e = +1$. Celkové elektronové leptonové číslo částic na pravé straně rov. (45.10) je také nula; i elektronové leptonové číslo se zachovává.

V rov. (45.10) se neobjevuje žádný z členů tauonové rodiny, budeme tedy mít $L_\tau = 0$ na obou stranách. Všechna leptonová čísla L_μ, L_e a L_τ zůstávají při rozpadu popsaném v rov. (45.10) konstantní, jejich hodnoty jsou $-1, 0$ a 0. Rozebrali jsme tak jeden příklad obecného zákona, nazývaného **zákon zachování leptonového čísla**; tento zákon platí pro všechny typy částicových interakcí.

KONTROLA 1: (a) π^+ mezon se rozpadá reakcí $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$. Do které leptonové rodiny patří toto neutrino? (b) Je toto neutrino částice, nebo antičástice? (c) Jaké má leptonové číslo?

Tabulka 45.2 **Leptony**[a]

RODINA	ČÁSTICE	SYMBOL	HMOTNOST (MeV/c^2)	NÁBOJ	ANTIČÁSTICE
Elektron	elektron	e^-	0,511	-1	e^+
	elektronové neutrino[b]	ν_e	0	0	$\bar{\nu}_e$
Mion	mion	μ^-	105,7	-1	μ^+
	mionové neutrino[b]	ν_μ	0	0	$\bar{\nu}_\mu$
Tauon	tauon	τ^-	1 777	-1	τ^+
	tauonové neutrino[b]	ν_τ	0	0	$\bar{\nu}_\tau$

[a] Všechny leptony (částice i antičástice) mají spin $\frac{1}{2}$ a jsou tak fermiony.
[b] Nejsou-li hmotnosti neutrin nulové, jsou velmi malé. V roce 2000 je tato otázka stále otevřená.

45.5 HADRONY

Nyní budeme uvažovat hadrony (baryony a mezony), tedy částice, které na sebe působí silnou jadernou silou. Začneme tím, že k našemu seznamu zákonů zachování přidáme ještě jeden: **zákon zachování baryonového čísla**.

Abychom se k tomuto zákonu dostali, uvažujme rozpad protonu

$$\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{e}^{+} + \nu_{\mathrm{e}} \quad (Q = 937{,}8\,\mathrm{MeV}). \qquad (45.11)$$

Taková reakce *nikdy* nenastává. Můžeme být rádi, že tomu tak je, neboť jinak by se postupně všechny protony ve vesmíru přeměnily na pozitrony, což by mělo zhoubné následky. Ale přesto tento rozpad zatím nenarušuje žádný z nám známých zákonů zachování, včetně zachování leptonového čísla.

Pozorovanou stabilitu protonu — a nepřítomnost mnoha dalších reakcí v přírodě, které by byly jinak možné — započítáme zavedením **baryonového čísla** B a nového zákona zachování, zachování baryonového čísla.

Každému baryonu přiřadíme hodnotu $B = +1$ a každému antibaryonu hodnotu $B = -1$. Částicím jiných druhů přiřadíme pak hodnotu $B = 0$. Nemohou probíhat takové částicové reakce, které mění celkové baryonové číslo.

Proton je baryon, zatímco pozitron a neutrino nejsou. Reakce popsaná rov. (45.11) tedy nemůže nastat, neboť narušuje zachování baryonového čísla. Je totiž

$$(+1) \neq (0) + (0).$$

Zákon zachování baryonového čísla je užitečný právě tím, že vysvětluje, proč mnohé rozpady a částicové reakce nenastávají, i když by byly jinak dobře možné.

KONTROLA 2: V přírodě *není* pozorován následující typ rozpadu neutronu:

$$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^{-}.$$

Který z následujících zákonů zachování by byl takovou reakcí narušen: (a) energie, (b) momentu hybnosti, (c) hybnosti, (d) náboje, (e) leptonového čísla, (f) baryonového čísla? Hmotnosti částic jsou: $m_{\mathrm{n}} = 939{,}6\,\mathrm{MeV}/c^2$, $m_{\mathrm{p}} = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2$ a $m_{\mathrm{e}} = 0{,}511\,\mathrm{MeV}/c^2$.

PŘÍKLAD 45.4

Analyzujte hypotetický rozpad stacionárního protonu podle vztahu

$$\mathrm{p} \rightarrow \pi^{0} + \pi^{+} \quad \text{(nenastává!)}$$

tak, že budete zkoumat různé zákony zachování. (Oba piony jsou mezony se spinem a baryonovým číslem rovným nule. Klidová energie π^0 mezonu je 135,0 MeV.)

ŘEŠENÍ: Vidíme hned, že náboj se zachovává a že není obtížné splnit zákon zachování hybnosti — stačí, když se piony budou pohybovat v opačných směrech od protonu s hybnostmi o stejné velikosti. Snadno vidíme i zachování leptonového čísla, neboť leptonové číslo všech tří částic v reakci je nula.

Energii rozpadu najdeme odečtením klidových energií částic. Užitím tab. 45.1 dostaneme

$$\begin{aligned} Q &= (m_{\mathrm{p}}c^2) - (m_0c^2 + m_{+}c^2) = \\ &= (938{,}3\,\mathrm{MeV}) - (135{,}0\,\mathrm{MeV} + 139{,}6\,\mathrm{MeV}) = \\ &= 663{,}7\,\mathrm{MeV}. \end{aligned}$$

Kladné znaménko pro energii Q říká, že reakce není vyloučena zákonem zachování energie.

Zaznamenali jsme již, že oba piony mají nulový spin. Proton ale má spinové kvantové číslo $\frac{1}{2}$. V reakci se tedy *nezachovává* moment hybnosti a tento důvod stačí k tomu, aby tento rozpad protonu nemohl nastat.

Navíc se nezachovává ani baryonové číslo. Pro proton máme $B = +1$ a pro oba piony je $B = 0$. Takže uvažovaná reakce je tak dvakrát zakázána, neboť by narušila dva z našich pěti zákonů zachování.

PŘÍKLAD 45.5

Částice se symbolem Ξ^- (ksí minus) se rozpadá podle vztahu

$$\Xi^{-} \rightarrow \Lambda^{0} + \pi^{-}.$$

Obě částice, tj. Λ^0 (lambda nula) a π^-, jsou nestabilní. Než dostaneme stabilní částice, dojde ke kaskádě rozpadových reakcí:

$$\begin{aligned} \Lambda^{0} &\rightarrow \mathrm{p} + \pi^{-}, \\ \pi^{-} &\rightarrow \mu^{-} + \bar{\nu}_{\mu}, \\ \mu^{-} &\rightarrow \mathrm{e}^{-} + \nu_{\mu} + \bar{\nu}_{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

(a) Zapište výraz pro konečný stav rozpadu částice Ξ^-.

ŘEŠENÍ: Sloučením všech vztahů pro rozpady nestabilních částic dostaneme

$$\Xi^{-} \rightarrow \mathrm{p} + 2(\mathrm{e}^{-} + \bar{\nu}_{\mathrm{e}}) + 2(\nu_{\mu} + \bar{\nu}_{\mu}). \quad \text{(Odpověď)}$$

Všechny částice na pravé straně tohoto celkového vztahu jsou stabilní. Všimněte si zachování náboje, celkové nábojové kvantové číslo na obou stranách je -1.

(b) Je částice Ξ^- mezon, nebo baryon?

Tabulka 45.3 **Osm baryonů se spinem** 1/2

Částice	Symbol	Hmotnost (MeV/c^2)	Kvantová čísla: Náboj	Kvantová čísla: Podivnost
Proton	p	938,3	+1	0
Neutron	n	939,6	0	0
Lambda	Λ^0	1 115,6	0	−1
Sigma	Σ^+	1 189,4	+1	−1
Sigma	Σ^0	1 192,5	0	−1
Sigma	Σ^-	1 197,3	−1	−1
Ksí	Ξ^0	1 314,9	0	−2
Ksí	Ξ^-	1 321,3	−1	−2

ŘEŠENÍ: Proton je baryon. Všechny další částice na pravé straně celkového vztahu mají $B = 0$. Aby byl splněn zákon zachování baryonového čísla, musí být baryonové číslo částice Ξ^- rovno $B = +1$, částice Ξ^- je tedy baryon. Kdyby měla být mezon, její baryonové číslo by bylo nula.

(c) Jsou v celkovém vztahu zachována leptonová čísla?

ŘEŠENÍ: Částice Ξ^- na levé straně vztahu se neobjevuje v tab. 45.2, která obsahuje všechny leptony, musí mít tedy leptonové číslo nula. Pravá strana vztahu obsahuje osm leptonů, čtyři z elektronové a čtyři z mionové rodiny. Uvnitř každé rodiny se tyto leptony objevují jako dvojice částice s antičásticí a ty mají opačná znaménka leptonového čísla. Je tedy jak celkové elektronové leptonové číslo L_e, tak celkové mionové leptonové číslo L_μ rovno nule a leptonová čísla se v reakci zachovávají.

(d) Co můžete říci o spinu částice Ξ^-?

ŘEŠENÍ: Všech devět částic na pravé straně celkového vztahu má spin $\frac{1}{2}$. Devět hodnot $m_s = \pm\frac{1}{2}$ dá dohromady vždy *poločíselnou* hodnotu, bez ohledu na to, jaké bude znaménko jednotlivých složek S_z. Výsledné kvantové spinové číslo částice Ξ^- musí být poločíselné. (Skutečně, toto kvantové číslo je $\frac{1}{2}$, částice Ξ^- je uvedena spolu s dalšími baryony se spinem $\frac{1}{2}$ v tab. 45.3.)

45.6 A JEŠTĚ JEDEN ZÁKON ZACHOVÁNÍ

Částice mají ještě další vnitřní charakteristiky než ty, které jsme dosud uvažovali: hmotnost, náboj, spin, leptonové číslo a baryonové číslo. První z těchto dalších charakteristik se vynořila, když si experimentátoři povšimli, že některé nové částice jako je kaon (K) a sigma (Σ) vznikají jen spolu. Zdálo se nemožné získat v reakci jen jednu z nich. Při interakci svazku pionů s vysokou energií s protony kapaliny v bublinkové komoře dojde často k reakci

$$\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+. \qquad (45.12)$$

Naopak reakce

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^+, \qquad (45.13)$$

která neporušuje žádný ze zákonů zachování známých v počátcích částicové fyziky, nenastane nikdy.

Proto se začalo předpokládat (navrhli to nezávisle na sobě Murray Gell-Mann ve Spojených státech a K. Nishijima v Japonsku), že některé částice mají novou vlastnost, nazvanou **podivnost** (strangeness), které přísluší nové kvantové číslo S a pro toto číslo existuje vlastní zákon zachování. (Je třeba odlišovat zde zavedený symbol S od spinu.) Název *podivnost* pochází z doby před tím, než se odhalily vlastnosti těchto částic; tehdy byly známy jako „podivné částice“ a název už zůstal.

Proton, neutron a pion mají $S = 0$; nejsou to „podivné částice“. Částici K^+ byla přiřazena podivnost $S = +1$ a částici Σ^+ podivnost $S = -1$. Je tedy v rov. (45.12) podivnost zachována

$$(0) + (0) = (+1) + (-1) \quad \text{(hodnoty } S\text{)},$$

ale není zachována v rov. (45.13)

$$(0) + (0) \neq (0) + (-1) \quad \text{(hodnoty } S\text{)}.$$

Reakce popsaná rov. (45.13) nenastává, protože narušuje zákon **zachování podivnosti**:

Podivnost se při interakci prostřednictvím silné jaderné síly zachovává.

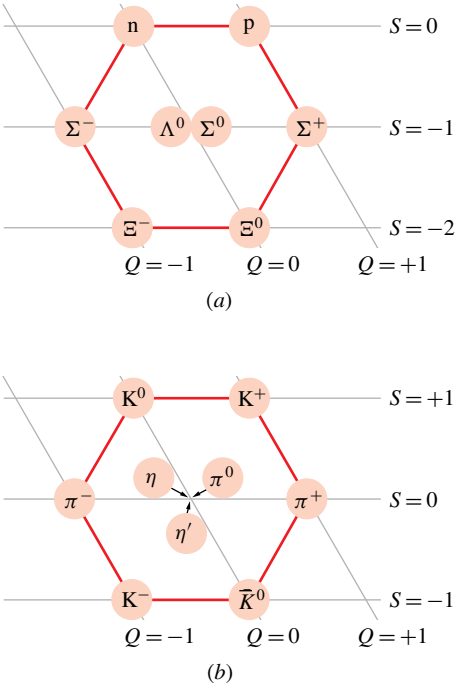
Může se zdát těžkopádné vymýšlet novou vlastnost částic jen proto, abychom vyřešili malou záhadu, jakou představují rov. (45.12) a (45.13). Podivnost a její kvantové číslo se však brzy projevily v mnoha dalších oblastech fyziky elementárních částic, a podivnost je dnes plnohodnotnou charakteristikou částice, podobně jako třeba náboj nebo spin. Pro ty, kteří znají a mají rádi elementární částice, už podivnost vůbec není podivná.

Nenechme se mýlit zvláštností jména. Podivnost není o nic záhadnější vlastností částic než náboj. Podivnost i náboj jsou vlastnosti, které má (nebo nemá) každá částice; každá vlastnost je určena příslušným kvantovým číslem. Každá splňuje zákon zachování. Později byly objeveny další charakteristiky částic a dostalo se jim ještě podivnějších jmen, jako *půvab* (charm) nebo *bottomness*, ale všechny jsou dokonale odůvodněné. Podívejme se například, jak se vyplatilo používání podivnosti pro odhalení důležitých pravidelností v charakteristikách elementárních částic.

45.7 OSMINÁSOBNÁ CESTA

Existuje skupina osmi baryonů — jsou mezi nimi neutron a proton — jejichž spinové kvantové číslo je $\frac{1}{2}$. Tab. 45.3 obsahuje některé jejich další vlastnosti. Na obr. 45.4a je fascinující obrazec, který vzniká, když zobrazujeme podivnost těchto baryonů v závislosti na jejich nábojovém kvantovém čísle. Šest z osmi vytváří šestiúhelník, v jehož středu jsou zbývající dva baryony.

Obraťme nyní pozornost od hadronů zvaných baryony k hadronům zvaným mezony. Některé vlastnosti skupiny devíti mezonů se spinem nula jsou uvedeny v tab. 45.4. Jestliže vykreslíme tuto skupinu do grafu s osami podivnost — náboj, jak ukazuje obr. 45.4b, dostáváme opět stejný fascinující obrazec! Existenci těchto a podobných grafů, nazývaných diagramy *Osminásobné cesty**, předpověděli nezávisle v roce 1961 Murray Gell-Mann z California Institute of Technology a Yuval Ne'eman z Imperial College v Londýně. Oba obrazce z obr. 45.4 jsou příkladem velkého počtu symetrických diagramů, do kterých jsou uspořádány skupiny baryonů a mezonů.



Obr. 45.4 (a) Obrazec Osminásobné cesty pro osm baryonů se spinem $\frac{1}{2}$ z tab. 45.3. Částice jsou zobrazeny jako kroužky v souřadnicích podivnost — náboj, osa nábojového kvantového čísla je nakloněná. (b) Podobný diagram pro devět mezonů se spinem nula z tab. 45.4.

Symetrie diagramu Osminásobné cesty pro baryony se spinem $\frac{3}{2}$, který zde neukazujeme, vyžaduje deset částic uspořádaných jako skupina deseti kuželek na kuželníku. Když však byl diagram poprvé zveřejněn, bylo známo pouze devět takových částic; „čelní kuželka" chyběla. V roce 1962 Gell-Mann předpověděl na základě teorie a symetrie diagramu toto:

* Převzato z východní mystiky. „Osm" odpovídá osmi kvantovým číslům (z nichž my jsme definovali pouze několik), které užívá teorie založená na předpokladu určitých symetrií a která předpovídá existenci zmiňovaných diagramů.

Tabulka 45.4 **Devět mezonů se spinem nula**[a]

Částice	Symbol	Hmotnost (MeV/c^2)	Kvantová čísla: Náboj	Podivnost
Pion	π^0	135,0	0	0
Pion	π^+	139,6	+1	0
Pion	π^-	139,6	−1	0
Kaon	K^+	493,7	+1	+1
Kaon	K^-	493,7	−1	−1
Kaon	K^0	497,7	0	+1
Kaon	$\overline{K}^0$	497,7	0	−1
Eta	η	547,5	0	0
Eta s čárkou	η'	957,8	0	0

[a] Všechny mezony jsou bozony se spinem 0, 1, 2, …

> Existuje baryon se spinem $\frac{3}{2}$, nábojem -1, podivností -3 a klidovou hmotností přibližně 1 680 MeV. Jestliže budeme tuto částici hledat (navrhuji pojmenovat ji omega minus), myslím, že ji musíme najít.

Skupina fyziků, kterou vedl Nicholas Samios z Brookhaven National Laboratory, se této výzvy chopila a skutečně nalezla „chybějící" částici a potvrdila, že má všechny předpovězené vlastnosti. Nemůže být nic lepšího pro pozvednutí důvěry v teorii než rychlé experimentální potvrzení nové předpovědi!

Obrazce Osminásobné cesty mají ve fyzice elementárních částic stejné postavení jako periodická tabulka prvků v chemii. V obou případech máme jistý obraz uspořádanosti, ve kterém jsou prázdná místa (chybějící částice nebo chybějící prvky) velice nápadná a ukazují experimentátorům směr bádání. Samotná existence periodické tabulky prvků ukazuje na to, že atomy prvků nejsou elementárními objekty, ale že musí mít vnitřní strukturu. Podobně také existence obrazců Osminásobné cesty naznačuje, že mezony a baryony musí mít nějakou vnitřní strukturu, pomocí níž mohou být pochopeny jejich vlastnosti. Tato struktura je *kvarkový model*, kterým se nyní budeme zabývat.

45.8 KVARKOVÝ MODEL

V roce 1964 Gell-Mann a Georg Zweig nezávisle poukázali na to, že diagramy Osminásobné cesty můžeme jednoduše pochopit, když budeme předpokládat, že mezony a baryony jsou složeny z částeček, které Gell-Mann nazval **kvarky**. Pojednáme nejprve o třech z nich, nazvaných *u-kvark* (nahoru — „up", symbol u), *d-kvark* (dolů — „down", symbol d) a *s-kvark* (podivný — „strange", symbol s) a přiřadíme jim vlastnosti podle tab. 45.5. (Jména pro tyto tři kvarky, stejně tak jako pro tři další, se kterými se setkáme později, nemají jiný význam než jako vhodné značky. Dohromady mluvíme o těchto jménech jako o *vůních kvarku* (flavors). Stejně dobře bychom mohli místo nahoru, dolů a podivný užít třeba vanilkový, čokoládový a jahodový.)

Zlomková nábojová kvantová čísla kvarků vypadají poněkud otřesně. Počkejte však se soudem, až uvidíte, jak hladce jsou z těchto zlomkových nábojů složeny pozorované celočíselné náboje mezonů a baryonů. Kvarky nebyly (dosud) přesvědčivě experimentálně pozorovány jako volné částice, a teoretici předložili rozumné důvody, proč tomu tak je. V každém případě je však kvarkový model tak užitečný, že nemožnost vidět volné kvarky nebrání fyzikům ve všeobecném přijetí kvarkového modelu.

Viděli jsme již, jak lze vytvořit atom kombinací elektronů a jádra. Nyní se podívejme, jak můžeme vytvořit mezony a baryony kombinací kvarků. Již předem si řekněme, že při tom dosáhneme úplného úspěchu pro všechny částice, složené z kvarků u, d a s.

> Nejsou známy žádné mezony nebo baryony, jejichž vlastnosti bychom nemohli pochopit jako výsledek vhodné kombinace kvarků. Naopak každá možná kombinace kvarků odpovídá nějakému pozorovanému mezonu nebo baryonu.

Začněme nejprve s baryony.

Kvarky a baryony

Každý baryon je kombinací tří kvarků; kombinace jsou znázorněny na obr. 45.5a. Pokud jde o baryonové číslo, vidíme že libovolné tři kvarky (každý s $B = +\frac{1}{3}$) vytvářejí skutečně baryon (s $B = 1$). Pro spiny je to také v pořádku. Máme-li tři spinová kvantová čísla $\frac{1}{2}$, můžeme vždy vzít dva spiny paralelně a jeden antiparalelně. To vede k celkovému spinu $s = \frac{1}{2}$, což je spinové kvantové číslo všech baryonů uvedených v tab. 45.3 a na obr. 45.4a.

Správné hodnoty dostáváme i pro náboj, jak můžeme vidět ze tří příkladů. Proton je složen z kvarků uud, takže

Tabulka 45.5 **Kvarky**[a]

			Kvantová čísla			
Částice	Symbol	Hmotnost (MeV/c^2)	Náboj Q	Podivnost S	Baryonové číslo B	Antičástice
Nahoru (Up)	u	5	$+\frac{2}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	$\bar{\mathrm{u}}$
Dolů (Down)	d	10	$-\frac{1}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	$\bar{\mathrm{d}}$
Půvabný (Charm)	c	1 500	$+\frac{2}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	$\bar{\mathrm{c}}$
Podivný (Strange)	s	200	$-\frac{1}{3}$	-1	$+\frac{1}{3}$	$\bar{\mathrm{s}}$
Horní (Top)	t	≈180 000	$+\frac{2}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	$\bar{\mathrm{t}}$
Dolní (Bottom)	b	4 300	$-\frac{1}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	$\bar{\mathrm{b}}$

[a] Všechny kvarky mají spin $\frac{1}{2}$ a jsou tak fermiony. Kvantová čísla antikvarků Q, S a B mají opačná znaménka než jsou znaménka odpovídajících kvarků.

jeho nábojové kvantové číslo je

$$Q(\mathrm{uud}) = \left(+\tfrac{2}{3}\right) + \left(+\tfrac{2}{3}\right) + \left(-\tfrac{1}{3}\right) = +1.$$

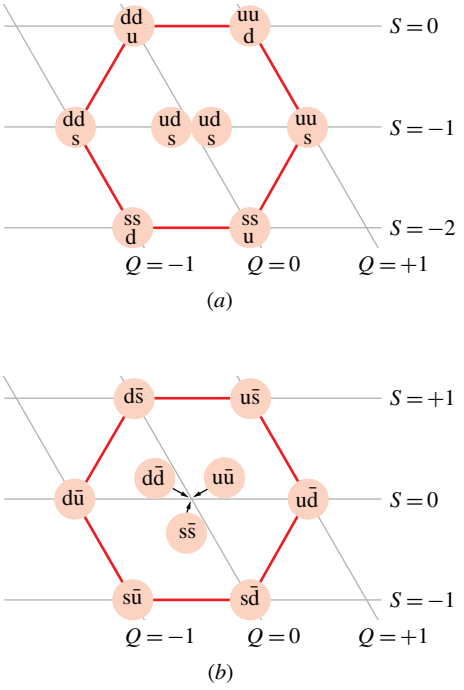
Neutron je složen z kvarků udd a jeho nábojové kvantové číslo je

$$Q(\mathrm{udd}) = \left(+\tfrac{2}{3}\right) + \left(-\tfrac{1}{3}\right) + \left(-\tfrac{1}{3}\right) = 0.$$

Baryon Σ^- je složen z kvarků dds, takže jeho nábojové kvantové číslo je

$$Q(\mathrm{dds}) = \left(-\tfrac{1}{3}\right) + \left(-\tfrac{1}{3}\right) + \left(-\tfrac{1}{3}\right) = -1.$$

O správnosti hodnot podivnosti se můžeme přesvědčit užitím hodnot z tab. 45.3 pro Σ^- a z tab. 45.5 pro kvarky.



Obr. 45.5 (a) Kvarková struktura osmi baryonů se spinem $\frac{1}{2}$ zobrazených na obr. 45.4a. (Oba centrální baryony mají stejnou kvarkovou strukturu, ale Σ je nabuzený stav Λ, který přechází rozpadem na Λ při emisi fotonu γ-záření.) (b) Kvarková struktura devíti mezonů se spinem nula zobrazených na obr. 45.4b.

Kvarky a mezony

Mezony jsou dvojice kvark + antikvark; jejich kvarková struktura je ukázána na obr. 45.5b a souhlasí s tím, že všechny mezony na obr. 45.4b a v tab. 45.4 mají nulový spin. Jak kvark, tak antikvark mají $s = \frac{1}{2}$, takže dvojice vytvářející mezon musí mít opačně orientované spiny, aby výsledný spin byl roven nule.

Model mezonu jako dvojice kvark + antikvark je také v souladu s tím, že mezony nejsou baryony; tedy, že baryonové číslo mezonů $B = 0$. Baryonové číslo kvarku je $+\frac{1}{3}$ a antikvarku $-\frac{1}{3}$; výsledné baryonové číslo mezonu je tedy skutečně nula.

Všimněme si blíže mezonu π^+, který je vytvořen z u-kvarku a $\bar{\mathrm{d}}$-antikvarku. Z tab. 45.5 vidíme, že nábojové kvantové číslo u-kvarku je $\frac{2}{3}$ a $\bar{\mathrm{d}}$-antikvarku je $\frac{1}{3}$ (opačné znaménko než kvantové číslo d-kvarku). To se pěkně sečte na nábojové kvantové číslo $+1$ pro π^+ mezon

$$Q(\mathrm{u\bar{d}}) = \left(+\tfrac{2}{3}\right) + \left(+\tfrac{1}{3}\right) = +1.$$

Všechna kvantová čísla náboje a podivnosti v obr. 45.5b souhlasí s čísly v tab. 45.4 a obr. 45.4b. Snadno se můžeme přesvědčit, že jsou užity všechny kombinace dvojic kvark+ + antikvark, které vyčerpávají všechny známé mezony se spinem nula. Všechno dobře souhlasí.

KONTROLA 3: Částice je kombinací d-kvarku a ū-antikvarku. Je tato částice (a) π^0 mezon, (b) proton, (c) π^- mezon, (d) π^+ mezon, nebo (e) neutron?

Nový pohled na β-rozpad

Podívejme se teď, jak vypadá β-rozpad z pohledu kvarkového modelu. V rov. (43.10) jsme uvedli typický příklad takového rozpadu:

$$^{32}\mathrm{P} \rightarrow {}^{32}\mathrm{S} + \mathrm{e}^- + \nu.$$

Po tom, co bylo objeveno neutrino a Fermi vypracoval svou teorii β-rozpadu, fyzikové pohlíželi na základní reakci v β-rozpadu jako na přeměnu neutronu na proton uvnitř jádra:

$$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e},$$

ve kterém je neutrino definováno úplněji. Dnes se díváme hlouběji a vidíme, že přeměna neutronu (udd) na proton (uud) je vlastně přeměnou d-kvarku na u-kvark. Za základní reakci β-rozpadu považujeme tedy nyní

$$\mathrm{d} \rightarrow \mathrm{u} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}.$$

Jak více a lépe poznáváme základní vlastnosti hmoty, můžeme studovat známé jevy na stále hlubší úrovni. Vidíme také, že kvarkový model nejenom umožňuje porozumět struktuře elementárních částic, ale také jasněji vysvětluje jejich interakce.

Ještě více kvarků

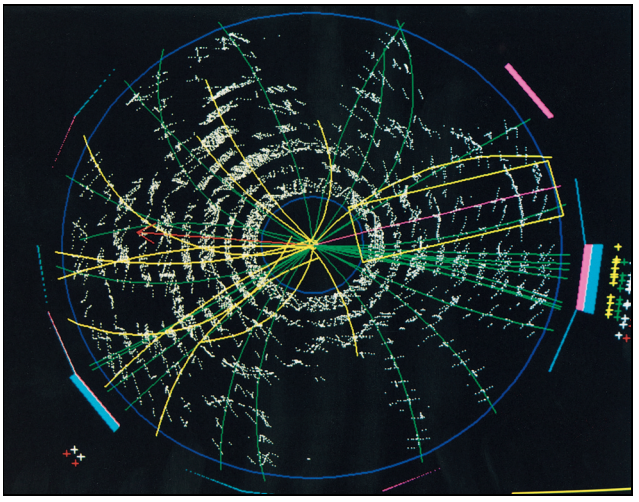
Existují další částice a další obrazce Osminásobné cesty, o kterých jsme se nezmiňovali. Abychom je mohli popsat,

musíme předpokládat existenci ještě tří dalších kvarků, nazvaných *c-kvark* (půvabný — „charm“, symbol c), *t-kvark* (horní — „top“, symbol t) a *b-kvark* (dolní — „bottom“, symbol b).

Z tab. 45.5 vidíme, že tyto tři kvarky mají neobyčejně velkou hmotnost, u nejhmotnějšího z nich (t-kvark) je hmotnost téměř 170krát větší než u protonu. Abychom mohli vytvářet částice obsahující tyto kvarky, musíme přecházet k větším a větším energiím, což je také důvod, proč tyto tři kvarky nebyly objeveny dříve.

První pozorovanou částicí, která obsahuje c-kvark, byl J mezon (též značený Ψ) s kvarkovou strukturou $c\bar{c}$. Byl objeven současně a nezávisle skupinami, které vedli Samuel Ting v Brookhaven National Laboratory a Burton Richter na Stanford University.

Nejhmotnější t-kvark odolával všem pokusům o produkci v laboratoři až do roku 1995, kdy byla jeho existence prokázána na Tevatronu, obřím urychlovači ve Fermilab. V tomto urychlovači dochází ke srážce protonů a antiprotonů, z nichž každý má energii $0{,}9\,\text{TeV} = 9{\cdot}10^{11}$ eV, uprostřed dvou velkých detektorů částic. Velmi zřídka dojde k tomu, že se při srážce vytvoří pár t-kvark a $\bar{\text{t}}$-antikvark ($\text{t}\bar{\text{t}}$), který se rychle rozpadá na částice s nižší energií. Obr. 45.6 ukazuje zobrazení stop zmíněných produktů rozpadu vytvořené počítačem. Existence páru t-kvark a $\bar{\text{t}}$-antikvark vyplývá z pečlivé analýzy těchto „úlomků“. Objev tohoto nejvíce hledaného t-kvarku je považován za triumf celého kvarkově-leptonového modelu fyziky elementárních částic.



Obr. 45.6 Počítačem vytvořené zobrazení stop částic vzniklých při rozpadu páru t-kvark a $\bar{\text{t}}$-antikvark. Tento pár byl vytvořen na Tevatronu ve Fermilab při čelní srážce protonu a antiprotonu s vysokou energií.

Podívejme se ještě jednou na tab. 45.5 (kvarkové rodiny) a tab. 45.2 (leptonové rodiny) a všimněme si úhledné symetrie těchto šestic částic, z nichž každá skupina je přirozeným způsobem rozdělena do tří dvojčlenných rodin. Podle současných poznatků považujeme kvarky a leptony za skutečně fundamentální částice, které již nemají žádnou vnitřní strukturu.

PŘÍKLAD 45.6

Částice Ξ^- má spinové kvantové číslo $\frac{1}{2}$ a kvantová čísla $Q = -1$ a $S = -2$. Víme, že je vytvořena jako kombinace tří kvarků a že jsou to pouze kvarky u, d nebo s. Jaká musí být tato kombinace?

ŘEŠENÍ: Protože podivnost je $S = -2$, musí tato částice obsahovat dva podivné kvarky, z nichž každý má podivnost $S = -1$ (tab. 45.5). Třetí kvark bude pak buď u-kvark, nebo d-kvark (oba mají $S = 0$). Dva s-kvarky mají úhrnem náboj $(-\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}$. Poněvadž náboj částice Ξ^- je -1, musí mít třetí kvark náboj $-\frac{1}{3}$; tedy musí to být d-kvark. Kvarková struktura částice Ξ^- je tedy dss.

Jako závěrečný test uvažme, že podle tab. 45.5 je baryonové číslo d- i s-kvarků $B = +\frac{1}{3}$. Vidíme tedy, že baryonové číslo částice Ξ^- (dss) je

$$B = \left(\tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3}\right) = +1.$$

Tento výsledek jsme museli očekávat, protože Ξ^- je složena z kvarků (ne antikvarků) a je tedy částice (ne antičástice). Kdyby to byla antičástice, měla by $B = -1$.



45.9 ZÁKLADNÍ SÍLY A ZPROSTŘEDKUJÍCÍ ČÁSTICE

Přejděme nyní od třídění elementárních částic k silám, kterými na sebe vzájemně působí.

Elektromagnetická síla

Na atomové úrovni jsme viděli, že dva elektrony na sebe působí elektromagnetickými silami podle Coulombova zákona. Na hlubší úrovni je tato interakce popsána vysoce úspěšnou teorií nazvanou **kvantová elektrodynamika** (QED). Podle kvantové elektrodynamiky elektron pociťuje přítomnost druhého elektronu tak, že si s ním vyměňuje fotony.

Tyto fotony nemůžeme detegovat, protože jsou emitovány jedním elektronem a po velmi krátké době absorbovány druhým elektronem. Pro jejich přechodný způsob existence je nazýváme **virtuální fotony**. Právě pro jejich zprostředkující roli při interakci dvou nábojů říkáme někdy o těchto fotonech, že jsou to *zprostředkující částice*.

Kdyby elektron v klidu emitoval foton a jeho stav by přitom zůstal nezměněn, nezachovávala by se energie. Zákon zachování energie však bude platit, uvážíme-li princip neurčitosti, zapsaný jako

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar. \tag{45.14}$$

Tento vztah interpretujeme tak, že můžeme „přečerpat“ jisté množství energie ΔE, narušující zachování energie, *za předpokladu*, že toto množství „vrátíme“ během doby Δt, dané vztahem $\hbar/\Delta E$. A to je právě případ virtuálních fotonů. Vezměme dvojici elektronů, které na sebe vzájemně působí. Když elektron A emituje virtuální foton, „nekrytá“ energie je rychle dodána pohlcením virtuálního fotonu emitovaného elektronem B a narušení zákona zachování energie pro uvažovanou dvojici elektronů nemůžeme pozorovat díky zákonité neurčitosti energie.

Slabá jaderná síla

Teorie slabé jaderné síly, která působí na všechny částice, byla rozvinuta jako analogie k teorii elektromagnetické síly. Zprostředkující částice, tj. částice, která zprostředkuje slabou interakci dvou částic, není ale v tomto případě foton (s nulovou hmotností), ale tuto funkci plní dvě hmotné částice, označované symboly W a Z. Teorie byla tak úspěšná, že dokonce ukázala, že elektromagnetická síla a slabá jaderná síla jsou pouze rozdílné projevy jediné **elektroslabé síly**. Tento výsledek je logickým rozšířením Maxwellovy teorie, která ukázala, že elektrické a magnetické síly jsou rozdílný projev jediné *elektromagnetické síly*.

Teorie elektroslabé interakce dokázala předpovědět vlastnosti zprostředkujících částic. Například pro jejich hmotnost a náboj stanovila hodnoty

ČÁSTICE	NÁBOJ	HMOTNOST
W	$\pm e$	$80{,}6\,\mathrm{GeV}/c^2$
Z	0	$91{,}2\,\mathrm{GeV}/c^2$

Připomeňme si, že hmotnost protonu je jen $0{,}938\,\mathrm{GeV}/c^2$; jsou to tedy opravdu velmi hmotné částice! Nobelovu cenu za fyziku získali v roce 1979 Sheldon Glashow, Steven Weinberg a Abdus Salam právě za vytvoření teorie elektroslabé interakce.

Teorie byla potvrzena v roce 1983 výsledky skupiny v CERNu, kterou vedl Carlo Rubbia. Byly pozorovány obě zprostředkující částice a jejich hmotnosti souhlasily s předpovězenými hodnotami. Již v roce 1984 byla tato vynikající experimentální práce oceněna Nobelovou cenou za fyziku, kterou obdrželi Carlo Rubbia a Simon van der Meer.

Jistou představu o složitosti dnešní fyziky elementárních částic získáme srovnáním s jiným experimentem z této oblasti, oceněným Nobelovou cenou — objevem neutronu. Tento životně důležitý experiment byl proveden „na laboratorním stole“, kde byl jako zdroj částic použit přirozeně radioaktivní materiál; výsledky byly uveřejněny v roce 1932 v článku s názvem „O možné existenci neutronu“ a jediným autorem byl James Chadwick.

Naproti tomu zprostředkující částice W a Z byly objeveny v roce 1983 na velkém urychlovači s obvodem kolem 7 km a energií částic několik set miliard elektronvoltů. Základní detektor částic sám vážil 2 000 tun. Na experimentu se podílelo více než 130 fyziků z 12 institucí v 8 zemích a s podporou velkého počtu pomocného personálu.

Silná jaderná síla

Byla vypracována také teorie silné jaderné síly — tj. síly, která působí mezi kvarky a udržuje tak pohromadě hadrony. Zprostředkující částice se v tomto případě nazývají **gluony** a předpokládá se o nich, že mají podobně jako fotony nulovou hmotnost. Teorie předpokládá, že se každá kvarková „vůně“ vyskytuje ve třech druzích, které se pro pohodlí označují jako *červená*, *žlutá* a *modrá*. Máme tedy tři u-kvarky, od každé barvy po jednom, a podobně u kvarků dalších vůní. Antikvarky mají také tři barvy, *antičervenou*, *antižlutou* a *antimodrou*. Nesmíme tyto barvy brát doslova a chápat kvarky jako malinké barevné lentilky. Ale i když jsou „barevné“ názvy jen konvence, mají v jistém smyslu své oprávnění, jak hned uvidíme.

Síle působící mezi kvarky se říká *barevná síla* a příslušné teorii pak v analogii s kvantovou elektrodynamikou (QED) **kvantová chromodynamika** (QCD). Podle této teorie se v přírodě vyskytují pouze takové kombinace kvarků, které jsou *barevně neutrální*.

Barevné neutrality lze dosáhnout dvěma způsoby. Při skládání skutečných barev dává červená + žlutá + modrá bílou, tedy barevně neutrální barvu; analogicky můžeme složit tři kvarky a vytvořit baryon. Antičervená+antižlutá+ + antimodrá dávají také bílou, takže můžeme složit tři antikvarky a vytvořit antibaryon. Ale také červená + antičervená a žlutá + antižlutá a modrá + antimodrá dají bílou. Tak můžeme skládat kombinace kvark + antikvark a vytvořit mezon. Pravidlo barevné neutrality nedovoluje žádnou jinou kombinaci kvarků a žádná jiná také není pozorována.

Barevná síla působí nejenom mezi kvarky, jež váže do baryonů a mezonů, ale působí také mezi takto vytvořenými částicemi; v této tradiční podobě je známa jako silná jaderná síla. Barevná síla tedy nejenom váže kvarky tak, že vytvářejí protony a neutrony, ale váže také protony a neutrony tak, že vytvářejí atomová jádra.

Einsteinův sen

Snaha sjednotit základní síly v přírodě — které věnoval Einstein většinu svého zralého života — je dnes velmi aktuální problém. V tab. 6.2 je shrnut současný stav. Viděli jsme, že slabá jaderná síla byla úspěšně sjednocena s elektromagnetickou silou, takže na ně můžeme pohlížet jako na různé projevy jediné *elektroslabé síly*. Intenzivně se rozvíjejí teorie, které se snaží přidat k této kombinaci silnou jadernou sílu; říkáme jim *teorie velkého sjednocení* (GUTs — „grand unification theories“). Teorie, které se snaží zakončit úsilí o sjednocení přidáním gravitační síly — občas nazývané *teorie všeho* (TOE — „theories of everything“) — jsou zatím v nadějném, ale stále ještě velmi spekulativním stavu.

45.10 PŘESTÁVKA K ZAMYŠLENÍ

Pohleďme na to, co jsme se právě dozvěděli, s větším odstupem. Jestliže vše, co nás zajímá, je struktura světa kolem nás, můžeme slušně vystačit s elektronem, neutrinem, neutronem a protonem. Jak kdosi řekl, „vesmírná loď Země“ si docela dobře vystačí právě jen s těmito částicemi. Jestliže studujeme kosmické záření, pak pozorujeme několik dalších exotických částic, ale pro vytváření většiny dalších musíme budovat veliké urychlovače a hledat tyto částice s velkým úsilím i náklady.

Je to tím, že — vyjádřeno pomocí energie — žijeme ve světě velmi nízkých teplot. Dokonce ve středu Slunce je hodnota kT jenom asi 1 keV. Abychom vytvářeli exotické částice, musíme být schopni urychlovat protony nebo elektrony na energie řádu GeV nebo TeV a vyšší. Kdysi dávno však *byla* teplota (všude) dostatečně vysoká, aby dodávala takové nebo i mnohem vyšší energie. Bylo to tehdy, kdy vesmír začal existovat. Obraťme proto nyní pozornost k této době.

Když se astronomové dívají do okolního prostoru, dívají se zároveň do minulých časů. Vesmír v dřívějším čase tedy můžeme studovat tak, že budeme pozorovat vzdálenější nebeské objekty. Nejvzdálenějšími objekty, které můžeme „vidět“, jsou **kvazary** (kvazistelární objekty); považujeme je za extrémně svítivé středy galaxií ve stadiu jejich utváření. V roce 2000 byla jako největší vzdálenost kvazaru od Země uváděna hodnota $14{\cdot}10^9$ světelných let (kvazar RDJ 030117 + 002025 objevený astronomy z Palomar Observatory a z Kitt Peak National Observatory). Světlo, které nyní vstupuje do našich teleskopů, opouštělo kvazar zhruba před 14 miliardami let, a proto vidíme tento objekt ve stavu, v jakém byl tehdy.

45.11 VESMÍR SE ROZPÍNÁ

Jak jsme viděli v čl. 18.9, můžeme měřit relativní rychlosti, se kterými se k nám galaxie přibližují nebo se od nás vzdalují, pomocí Dopplerova posuvu světla, které emitují. Jestliže budeme sledovat pouze vzdálené galaxie a vynecháme naše nejbližší galaktické sousedy, dojdeme k překvapujícímu závěru. Všechny galaxie se od nás vzdalují!

V roce 1929 určil Edwin P. Hubble vztah mezi zdánlivou rychlostí v vzdalování galaxie a její vzdáleností r od nás, jako přímou úměrnost. Platí

$$v = Hr \quad \text{(Hubblův zákon)}, \tag{45.15}$$

kde konstanta úměrnosti H se dnes nazývá **Hubblova konstanta**. Její hodnota je poněkud neurčitá, poněvadž je velmi obtížné měřit vzdálenosti vzdálených galaxií. Hodnota, založená na měřeních provedených v roce 1994 pomocí Hubblova vesmírného teleskopu, je

$$H = (80 \pm 17)\,\mathrm{km/(s{\cdot}Mpc)}, \tag{45.16}$$

kde Mpc je délková jednotka megaparsek:

$$1\,\mathrm{Mpc} = 3{,}084{\cdot}10^{19}\,\mathrm{km} = 3{,}260{\cdot}10^{6}\,\mathrm{ly}. \tag{45.17}$$

Jiná hodnota, podložená dlouhou sérií měření a publikovaná v roce 1996, je $57\,\mathrm{km/(s{\cdot}Mpc)}$. V roce 1999 publikované hodnoty se přiblížily, namísto 80 se udává 70 a namísto 57 se udává 59. Tyto dvě hodnoty naznačují, jaká je asi neurčitost ve stanovení tohoto důležitého parametru. My budeme v našich výpočtech užívat hodnotu $H = 80\,\mathrm{km/(s{\cdot}Mpc)}$, která je ekvivalentní hodnotě $24{,}5\,\mathrm{mm/(s{\cdot}ly)}$.

Hubblův zákon interpretujeme tak, že vesmír se rozpíná velmi podobně tomu, jako se při kynutí mazance s rozinkami od sebe vzdalují rozinky. Pozorovatelé v jiných galaxiích by všichni došli k závěru, že se od nich vzdálené galaxie vzdalují, a to podle Hubblova zákona. Přidržíme-li se naší analogie, žádná rozinka (galaxie) nemá jedinečné nebo privilegované postavení.

Hubblův zákon souhlasí dobře s hypotézou, že vesmír vznikl mohutným výbuchem (*Velký třesk*) před několika miliardami let. Vzdalující se galaxie jsou fragmenty této prvotní exploze; jejich struktura se během času měnila a galaxie se od sebe vzájemně rozbíhají v důsledku rozpínání samotného vesmíru.

PŘÍKLAD 45.7

Platí-li Hubblův zákon, jak daleko je kvazar, jehož zdánlivá rychlost vzdalování je $2{,}8{\cdot}10^8\,\mathrm{m/s}$? (Povšimněte si, že je to 93 % rychlosti světla.)

ŘEŠENÍ: Z Hubblova zákona (rov. (45.15)) plyne

$$r = \frac{v}{H} = \\ = \frac{(2{,}8\cdot10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})}{(80\ \mathrm{km/(s\cdot Mpc)})}\left(\frac{3{,}084\cdot10^{19}\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{Mpc}}\right)\left(\frac{1\ \mathrm{ly}}{9{,}46\cdot10^{15}\ \mathrm{m}}\right) = \\ = 11\cdot10^{9}\ \mathrm{ly}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek je pouze přibližný, neboť kvazar se od nás nevzdaloval po celou dobu se stejnou rychlostí jako dnes.

PŘÍKLAD 45.8

Předpokládejme, že se kvazar z př. 45.7 od nás vzdaloval stejnou rychlostí po celou dobu od Velkého třesku. Jakou minimální hodnotu to dává pro tuto dobu? Jinak řečeno, jakou minimální hodnotu stáří vesmíru dostáváme na základě této rychlosti?

ŘEŠENÍ: Požadovanou dobu můžeme najít ze vztahu

$$t = \frac{r}{v} = \frac{r}{rH} = \frac{1}{H} = \\ = \frac{1}{(80\ \mathrm{km/(s\cdot Mpc)})}\left(\frac{3{,}84\cdot10^{19}\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{Mpc}}\right)\left(\frac{1\ \mathrm{y}}{3{,}16\cdot10^{7}\ \mathrm{s}}\right) = \\ = 12\cdot10^{9}\ \mathrm{y}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek závisí na hodnotě Hubblovy konstanty; menší hodnota H by vedla k většímu stáří vesmíru.

45.12 KOSMICKÉ RELIKTNÍ ZÁŘENÍ

V roce 1965 testovali Arno Penzias a Robert Wilson z tehdejších Bell Telephone Laboratories velmi citlivý mikrovlnný přijímač pro telekomunikační výzkum. Objevili slabounký „šelest“ pozadí, jehož intenzita vůbec nezávisela na orientaci antény. Brzo bylo zřejmé, že Penzias a Wilson pozorovali **kosmické reliktní záření**, které vzniklo v raném vesmíru a vyplňuje téměř rovnoměrně celý prostor. Toto záření, které má maximum rozložení intenzity na vlnové délce 1,1 mm, má stejnou závislost intenzity na vlnové délce jako záření černého tělesa — dutiny, jejíž stěny mají teplotu 2,7 K; „dutinu“ v tomto případě tvoří celý vesmír. Za svůj objev dostali Penzias a Wilson v roce 1978 Nobelovu cenu za fyziku.

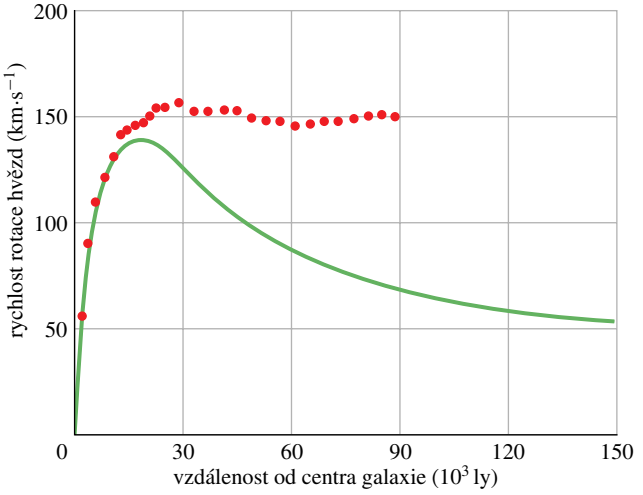
Záření vzniklo zhruba 300 000 let po Velkém třesku v době, kdy náhle začal vesmír propouštět elektromagnetické vlny. Záření v té době odpovídalo záření černého tělesa s teplotou asi 10^5 K. Při rozpínání vesmíru pak teplota klesala až na dnešní hodnotu 2,7 K podobně, jako klesá teplota adiabaticky se rozpínajícího plynu.

45.13 TEMNÁ HMOTA

Na Kitt Peak National Observatory v Arizoně měřila Vera Rubinová a její spolupracovník Kent Ford rychlosti rotace v řadě vzdálených galaxií. Rychlost rotace určovali z měření Dopplerova posuvu jasných hvězdokup dané galaxie v různých vzdálenostech od středu galaxie. Jak ukazuje obr. 45.7, jejich výsledky byly překvapivé: oběžná rychlost hvězd na vnějším viditelném okraji galaxie je přibližně stejná, jako mají hvězdy blízko galaktického středu.

Jak ukazuje plná křivka na obr. 45.7, pozorování není vůbec v souladu s tím, co bychom očekávali, kdyby všechna hmota galaxie byla pozorovatelná ve viditelném světle. Křivka získaná Rubinovou a Fordem se také odlišuje od toho, co pozorujeme ve sluneční soustavě. Například oběžná rychlost Pluta (planety nejvzdálenější od Slunce) je pouze desetina rychlosti Merkuru (planety nejbližší Slunci).

Chceme-li udržet soulad s Newtonovou mechanikou, pak můžeme výsledky Rubinové a Forda vysvětlit jedině předpokladem, že typická galaxie obsahuje mnohem více hmoty než jen tu, kterou můžeme skutečně vidět. Viditelná část galaxie by pak tvořila pouze 5 až 10 % její celkové hmotnosti. Kromě měření galaktických rotací existuje mnoho dalších pozorování, která vedou k závěru, že ve vesmíru je mnoho hmoty, kterou nemůžeme vidět.



Obr. 45.7 Rychlost rotace hvězd v typické galaxii v závislosti na jejich vzdálenosti od středu galaxie. Plná čára ukazuje, že kdyby všechna hmota v galaxii byla viditelná, musela by rychlost rotace výrazně klesat při větších vzdálenostech. Tečky jsou experimentálně zjištěné hodnoty a ukazují, že rychlost rotace je při větších vzdálenostech přibližně konstantní.

Co tedy je tato **temná hmota**, která prostupuje a obklopuje typickou galaxii jako gigantický závoj, jehož průměr je snad 30krát větší než průměr viditelné galaxie? Kandidáti

na temnou hmotu spadají do dvou kategorií s prapodivnými názvy: WIMP (z anglického „weakly interacting massive particles“ — slabě interagující hmotné částice) a MACHO (z anglického „massive compact halo objects“ — hmotné kompaktní závojové objekty). Mají-li neutrina nenulovou hmotnost, jsou to možné WIMP. MACHO mohou být objekty jako černé díry, bílí trpaslíci a hnědí trpaslíci; hnědí trpaslíci jsou objekty velikosti Jupiteru, které nejsou dost hmotné, aby se staly skutečnými hvězdami, které svítí díky jaderné fúzi.

V roce 2000 se zdá, že existují přesvědčivé důkazy o existenci MACHO v naší vlastní galaxii. Předpokládejme, že (neviditelný) MACHO v naší galaxii prochází náhodou před hvězdou v blízké galaxii. Einstein v obecné teorii relativity předpověděl, že se světelné paprsky procházející blízko hmotného objektu budou ohýbat (čl. 14.9). Budou-li tedy hvězda, MACHO a Země ležet na jedné přímce, bude MACHO působit jako *gravitační čočka*. Bude tedy fokusovat světelné paprsky vycházející z hvězdy, které procházejí v jeho blízkosti, a tím způsobí, že obraz hvězdy zjasní, když ji MACHO zastiňuje.

Takových jevů bylo pozorováno dostatečné množství, aby přesvědčilo některé astronomy, že MACHO mohou tvořit podstatnou část (řekněme kolem 50 %) temné hmoty v naší galaxii. Pozorování stále pokračují.

45.14 VELKÝ TŘESK

V roce 1985 pronesl jeden z účastníků fyzikální konference:

> To, že vesmír začal Velkým třeskem zhruba před 15 miliardami let, je stejně jisté, jako že Země obíhá okolo Slunce.

Takové silné tvrzení dosvědčuje, jak velkou důvěru v teorii Velkého třesku, kterou poprvé rozvinul belgický fyzik Georges Lemaître, chovají lidé zabývající se touto problematikou.

Velký třesk si nelze představovat jako explozi nějaké gigantické petardy, kdy můžeme alespoň v principu odstoupit stranou a pozorovat. Tady není žádné „stranou“, protože Velký třesk představuje počátek existence samotného prostoročasu. Z pohledu našeho dnešního vesmíru není možné ukázat na nějaké místo prostoru a říci „Tady se odehrál Velký třesk.“ Ten se odehrával všude.

Navíc nebylo žádné „před Velkým třeskem“, protože čas *začal* tímto stvořením. V tomto kontextu ztrácí slovo „před“ svůj význam. Můžeme však uvažovat o tom, co se dělo v okamžicích po Velkém třesku.

$t \approx 10^{-43}$ s. To je nejranější čas, kdy můžeme říci něco smysluplného o vývoji vesmíru. V tomto čase také získaly pojmy prostor a čas svůj dnešní význam a začaly platit fyzikální zákony, jak je známe. Celý vesmír byl tehdy mnohem menší než proton, zhruba odhadnuto, a jeho teplota byla asi 10^{32} K.

$t \approx 10^{-34}$ s. V tomto okamžiku nastal neobyčejně rychle probíhající inflační proces, při kterém se rozměry vesmíru zvětšily zhruba 10^{30}krát. Vesmír se stal horkou polévkou tvořenou kvarky a leptony s teplotou asi 10^{27} K.

$t \approx 10^{-4}$ s. Kvarky se nyní mohou kombinovat a vytvářet protony a neutrony a jejich antičástice. Vesmír se ochladil stálým rozpínáním (ale podstatně pomalejším než při inflaci) do takové míry, že energie fotonů už nedostačuje k rozbití těchto nových částic. Dochází ke srážkám částic hmoty a antihmoty a jejich anihilaci. Existuje však nepatrně více částic hmoty a tento přebytek, který nenachází příslušné partnery pro anihilaci, přežívá a vytváří hmotný svět, jak jej známe dnes.

$t \approx 1$ min. Vesmír se již ochladil natolik, že srážející se protony a neutrony mohou zůstat vázány do jader prvků s malým atomovým číslem ^{2}H, ^{3}He, ^{4}He a ^{7}Li. Předpovězené relativní četnosti těchto nuklidů jsou v souhlase s tím, co dnes ve vesmíru pozorujeme. Je přítomno velké množství záření, ale světlo neurazí nikdy příliš velkou vzdálenost díky interakci s jádry. Vesmír je pro své vlastní záření neprůhledný.

$t \approx 300\,000$ let. Teplota nyní poklesla na asi 10^4K, elektrony se mohou vázat po srážce s holými jádry a vytvářet tak atomy. Poněvadž světlo neinteraguje významně s (nenabitými) částicemi, jako jsou neutrální atomy, má světlo nyní možnost urazit volně velké vzdálenosti. Toto záření vytváří kosmické reliktní záření, diskutované v čl. 45.12. Vlivem gravitace se shlukují atomy vodíku a helia a začínají tak vytvářet galaxie a hvězdy.

První měření ukazovala, že kosmické reliktní záření je rovnoměrně rozděleno ve všech směrech (je izotropní), což vede k závěru, že 300 000 let po Velkém třesku byla hmota ve vesmíru rovnoměrně rozložena. Tato skutečnost byla velmi udivující, protože hmota v dnešním vesmíru není rozložena rovnoměrně, ale je soustředěna v galaxiích, kupách galaxií a nadkupách galaktických kup. Jsou tu také rozsáhlé oblasti prázdnoty (*voids*) s nepatrným množstvím hmoty a také oblasti tak zaplněné hmotou, že se jim říká zdi (*walls*). Jestliže je teorie Velkého třesku ve svém popisu počátků vesmíru alespoň přibližně správná, musely zde být zárodky tohoto nerovnoměrného rozložení hmoty ještě před tím, než vesmír dosáhl stáří 300 000 let a měly by se dnes projevovat nerovnoměrným rozložením kosmického mikrovlnného reliktního záření.

V roce 1992 také skutečně ukázala měření, prováděná družicí NASA zvanou Cosmic Background Explorer (COBE), že kosmické reliktní záření není dokonale izotropní. Obrázek na začátku této kapitoly byl vytvořen zpracováním těchto měření a ukazuje, jak vypadal vesmír v době, kdy mu bylo pouhých 300 000 let. Jak je na obrázku vidět, shlukování hmoty ve velkém měřítku již opravdu začalo; proto je teorie Velkého třesku, alespoň v principu, na správné stopě.

45.15 SHRNUTÍ

Uvažme v těchto závěrečných odstavcích, kam nás přivádí rychle se zvětšující množství poznatků o vesmíru. Je mimo pochybnost, že přináší uspokojení mnoha zvídavým fyzikům a astronomům. Někteří lidé se však cítí pokořeni tím, že každý přírůstek v poznání ukazuje jasněji naši relativní bezvýznamnost v celkové struktuře vesmíru. Tak postupně muselo lidstvo dojít k poznání, že:

Naše Země není střed sluneční soustavy.

Naše Slunce je jenom jedna z mnoha hvězd.

Naše galaxie je jen jedna z mnoha a naše Slunce je bezvýznamná hvězda při jejím vnějším okraji.

Naše Země existuje pouze po zhruba třetinu stáří vesmíru a zcela jistě zmizí, když naše Slunce spálí své zásoby paliva a stane se rudým obrem.

Náš druh obývá Zemi po dobu kratší než milion let, což je v kosmologických měřítcích nepatrný okamžik.

A poslední drtivá rána: Neutrony a protony, ze kterých jsme stvořeni, nejsou převládající formou hmoty ve vesmíru.

Chceme-li to však vidět z lepší stránky, jsme to my sami, kdo objevil všechny tyto skutečnosti. Ačkoli naše postavení ve vesmíru je nevýznamné, zdá se, že zákony fyziky, které jsme objevili (poodhalili), platí v celém vesmíru — alespoň pokud víme — pro všechen minulý i budoucí čas. Přinejmenším nemáme žádné náznaky toho, že by v jiných částech vesmíru platily jiné zákony. Můžeme tedy až do doby, kdy by si někdo stěžoval, dávat na fyzikální zákony ochrannou známku „Objeveno na Zemi“. Ještě však zůstává mnoho neobjeveného, a tak můžeme náš text uzavřít těmito nadějnými slovy: *Vesmír je plný magických věcí, které trpělivě čekají na odhalení, až náš důvtip dostatečně vzroste*.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Leptony a kvarky

Podle současného stavu výzkumu je všechna hmota vytvořena ze šesti druhů *leptonů* (tab. 45.2) a šesti druhů *kvarků* (tab. 45.5). Všechny tyto částice mají spinové kvantové číslo $\frac{1}{2}$ a jsou tedy *fermiony* (částice s poločíselným spinovým kvantovým číslem). Ke každému leptonu i kvarku existuje *antičástice*.

Interakce

Částice s elektrickým nábojem na sebe působí elektromagnetickou silou, kterou zprostředkovávají vzájemně vyměňované *virtuální fotony*. Leptony působí na sebe a také na kvarky *slabou jadernou silou*, kterou zprostředkovávají hmotné zprostředkující částice W a Z. Navíc kvarky mezi sebou působí *barevnou silou*. Elektromagnetická a slabá síla jsou různé projevy jediné síly, nazývané *elektroslabá síla*.

Leptony

Tři z leptonů (*elektron*, *mion* a *tauon*) mají elektrický náboj roven $-1e$; mají také nenulovou hmotnost. Další tři leptony jsou *neutrina* s nulovým nábojem, každé z nich odpovídá jednomu nabitému leptonu. Neutrina mají velmi malou hmotnost, možná nulovou. Antičástice nabitých leptonů mají kladný náboj.

Kvarky

Šest kvarků (u — nahoru, d — dolů, s — podivný, c — půvabný, b — dolní, t — horní; pořadí je zvoleno podle zvětšující se hmotnosti) mají každý baryonové číslo $+\frac{1}{3}$ a náboj rovný buď $+\frac{2}{3}e$, nebo $-\frac{1}{3}e$. Podivný kvark má podivnost -1, zatímco všechny ostatní mají podivnost rovnu nule. Pro antičástice jsou znaménka opačná.

Hadrony: baryony a mezony

Kvarky se kombinují do částic, které na sebe působí silnou jadernou silou; nazývají se *hadrony*. *Baryony* jsou hadrony s poločíselným spinovým kvantovým číslem ($\frac{1}{2}$, nebo $\frac{3}{2}$). *Mezony* jsou hadrony s celočíselným spinovým kvantovým číslem (0, nebo 1). Baryony jsou fermiony, mezony jsou bosony. Mezony mají baryonové číslo rovno nule; baryony mají baryonové číslo rovno $+1$, nebo -1. Podle *kvantové chromodynamiky* jsou dovolené kombinace kvarků buď kvark a antikvark, tři kvarky nebo tři antikvarky (tento závěr je v souladu s experimentem). Všechny hadrony s výjimkou protonu jsou nestabilní.

Rozpínání vesmíru

Současné poznatky silně podporují představu, že se vesmír rozpíná. Vzdálené galaxie se od nás vzdalují rychlostí v, kterou určuje

Hubblův zákon:

$$v = Hr \quad \text{(Hubblův zákon).} \tag{45.15}$$

Za hodnotu Hubblovy konstanty H zde bereme

$$H = 80\,\text{km/(s·Mpc)} = 24{,}5\,\text{mm/(s·ly)}. \tag{45.16}$$

Historie vesmíru

Rozpínání popsané Hubblovým zákonem a existence všudypřítomného kosmického reliktního záření nasvědčují tomu, že vesmír začal „velkým třeskem“ zhruba před 15 miliardami let.

OTÁZKY

1. Nejen částice jako elektron a proton, ale také celé atomy můžeme považovat za fermiony nebo bosony podle toho, je-li jejich celkové spinové kvantové číslo poločíselné nebo celočíselné. Uvažujme izotopy helia ^{3}He a ^{4}He. Které z následujících tvrzení je správné? (a) Oba jsou fermiony. (b) Oba jsou bosony. (c) ^{4}He je fermion a ^{3}He je boson. (d) ^{3}He je fermion a ^{4}He je boson. (Dva elektrony helia vytvářejí uzavřenou slupku a nehrají tedy v těchto úvahách žádnou roli.)

2. Míří magnetické pole na obr. 45.3b k nám, nebo od nás?

3. Který z osmi pionů na obr. 45.3b má nejmenší kinetickou energii?

4. Elektron se nemůže rozpadat na dvě neutrina. Který z následujících zákonů zachování by byl takovým rozpadem narušen? Zákon zachování (a) energie, (b) momentu hybnosti, (c) náboje, (d) leptonového čísla, (e) hybnosti, (f) baryonového čísla?

5. Proton se nemůže rozpadnout na neutron a neutrino. Který z následujících zákonů zachování by byl takovým rozpadem narušen? Zákon zachování (a) energie, (b) momentu hybnosti, (c) náboje, (d) leptonového čísla, (e) hybnosti, (f) baryonového čísla?

6. Proton má dostatek energie k rozpadu s vytvořením spršky elektronů, neutrin a jejich antičástic. Který z následujících zákonů zachování by byl takovým rozpadem narušen? Zákon zachování (a) energie, (b) momentu hybnosti, (c) náboje, (d) leptonového čísla, (e) hybnosti, (f) baryonového čísla?

7. Viděli jsme, že mezon π^- má kvarkovou strukturu $d\bar{u}$. Kdybychom předpokládali, že mezon π^- vytvoříme složením d-kvarku a u-kvarku, který ze zakonů zachování by byl narušen? Zákon zachování (a) energie, (b) momentu hybnosti, (c) náboje, (d) leptonového čísla, (e) hybnosti, (f) baryonového čísla?

8. Částice Σ^+ má tato kvantová čísla: podivnost $S = -1$, náboj $Q = +1$ a spin $s = \frac{1}{2}$. Jakou kombinací kvarků je tvořena: (a) dds, (b) $s\bar{s}$, (c) uus, (d) ssu, nebo (e) $uu\bar{s}$?

9. V levém sloupci jsou pojmy z atomové fyziky, v pravém pojmy z fyziky elementárních částic. Přiřaďte k sobě analogické pojmy:

1. chemie	a. obrazce Osminásobné cesty
2. elektrony	b. chybějící hadrony
3. periodická tabulka	c. kvantová chromodynamika
4. chybějící prvky	d. fyzika elementárních částic
5. kvantová mechanika	e. kvarky

10. Uvažujme neutrino označené $\bar{\nu}_\tau$. (a) Je to kvark, lepton, mezon, nebo baryon? (b) Je to částice, nebo antičástice? (c) Je to boson, nebo fermion? (d) Je stabilní vzhledem ke spontánnímu rozpadu?

11. Přiřaďte k sobě analogické pojmy z následujících dvou sloupců:

1. tauon	a. kvark
2. pion	b. lepton
3. proton	c. mezon
4. pozitron	d. baryon
5. půvab	e. antičástice

12. Seřaďte následující částice podle hmotnosti od nejmenší do největší: (a) proton, (b) neutrino, (c) mezon π^+, (d) s-kvark, (e) tauon, (f) elektron a (g) částice Σ^-. (*Tip*: Nahlédněte do tabulek v této kapitole.)

13. Jaká jsou leptonová čísla následujících částic: (a) π^-, (b) e^-, (c) μ^+, (d) τ^-, (e) $\bar{\nu}_\mu$?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 45.3 Mezihra

1C. Vypočtěte rozdíl v hmotnostech (v kilogramech) mionu a pionu z př. 45.2.

2C. Neutrální pion se rozpadá na dva fotony záření gama: $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. Spočtěte vlnovou délku fotonů vzniklých při rozpadu neutrálního pionu, který je v klidu.

3C. Vzdálenost mezi elektronem a pozitronem je r. Najděte podíl gravitační a elektrické síly jejich vzájemného působení. Co můžete z výsledku soudit o silách působících mezi částicemi detegovanými v bublinkové komoře?

4C. Kladně nabitý pion se rozpadá podle rov. (45.4): $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$. Jak bude vypadat vztah pro rozpad záporně nabitého pionu? (*Tip*: π^- je antičástice k π^+.)

5C. Jaké množství energie by se uvolnilo při anihilaci Země a anti-Země?

6Ú. Klidová energie neutrálního pionu je 135 MeV a střední doba života $8{,}3\cdot10^{-17}$ s. Je-li pion produkován s počáteční kinetickou energií 80 MeV a rozpadne-li se po době rovné střední době života, jaká je největší možná délka stopy, kterou zanechá v bublinkové komoře? Použijte vztahu pro relativistickou dilataci času. (*Tip*: Př. 45.1.)

7Ú. Pozorování neutrin emitovaných supernovou SN1987a (obr. 44.12) ve Velkém Magellanově mračnu vedou k hodnotě 20 eV pro horní hranici klidové energie neutrina. Předpokládejme tedy, že klidová energie neutrina není nulová, ale právě 20 eV. O kolik bude rychlost takového neutrina emitovaného při β-rozpadu s energií 1,5 MeV menší, než je rychlost světla?

8Ú. V některých teoriích se předpokládá, že proton je nestabilní s poločasem rozpadu kolem 10^{32} let. Za předpokladu správnosti této představy spočtěte počet protonových rozpadů, které se odehrají během jednoho roku v olympijském bazénu se 430 m^3 vody.

9Ú. Kladný tauon (τ^+, jeho klidová energie je 1 777 MeV) se pohybuje s kinetickou energií 2 200 MeV na kruhové dráze kolmé k homogennímu magnetickému poli indukce 1,20 T. (a) Spočtěte hybnost tauonu v $kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}$. Musíme uvažovat relativistický popis. (b) Najděte poloměr kruhové dráhy.

10Ú. Klidové energie mnoha částic s příliš krátkou dobou života nemůžeme měřit přímo, ale musíme je spočítat z měřených hybností a známých klidových energií produktů rozpadu. Uvažujme mezon ϱ^0, který se rozpadá reakcí $\varrho^0 \to \pi^+ + \pi^-$. Spočtěte klidovou energii mezonu ϱ^0, jestliže změřená hodnota hybnosti vytvořených pionů pohybujících se v opačných směrech je 358,3 MeV/c. Klidové energie pionů odečtěte z tab. 45.4.

11Ú. (a) Částice m_0 v klidu se rozpadá na dvě částice m_1 a m_2, které se pak pohybují s opačnými, ale stejně velkými hybnostmi. Ukažte, že kinetická energie $E_{k,1}$ částice m_1 je dána vztahem

$$E_{k,1} = \frac{1}{2E_0}\left[(E_0 - E_1)^2 - E_2^2\right],$$

kde m_0, m_1 a m_2 jsou hmotnosti a E_0, E_1 a E_2 odpovídající klidové energie. (*Tip*: Použijte postup z př. 45.2 s tím, že v našem případě nemá ani jedna z vytvořených částic nulovou hmotnost.) (b) Ukažte, že výsledek získaný v (a) dává kinetickou energii mionu z př. 45.2.

ODST. 45.5 Hadrony

12C. Ověřte, že hypotetické schéma rozpadu protonu podle rov. (45.11) nenarušuje zákon zachování (a) náboje, (b) energie, (c) hybnosti a (d) momentu hybnosti.

13C. Který zákon zachování je narušen v dále uvedených rozpadových schématech? Předpokládejte, že rozpadající se částice je v klidu a produkty rozpadu mají nulový moment hybnosti. (a) $\mu^- \to e^- + \nu_\mu$, (b) $\mu^- \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$, (c) $\mu^+ \to \pi^+ + \nu_\mu$.

14Ú. Částice A_2^+ a její produkty se rozpadají podle následujících schémat:

$$A_2^+ \to \varrho^0 + \pi^+, \quad \mu^+ \to e^+ + \nu + \bar{\nu},$$
$$\varrho^0 \to \pi^+ + \pi^-, \quad \pi^- \to \mu^- + \bar{\nu},$$
$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu, \quad \mu^- \to e^- + \nu + \bar{\nu}.$$

(a) Jaké jsou konečné stabilní produkty rozpadu? (b) Je částice A_2^+ fermion, nebo boson? Je mezon, nebo baryon? Jaké je její baryonové číslo? (*Tip*: Př. 45.5.)

ODST. 45.7 Osminásobná cesta

15C. Reakce $\pi^+ + p \to p + p + \bar{n}$ probíhá díky silné interakci. Užitím zákonů zachování odvoďte hodnoty náboje, baryonového čísla a podivnosti antineutronu.

16C. Sledováním podivnosti určete, které z následujících rozpadů probíhají díky silné interakci: (a) $K^0 \to \pi^+ + \pi^-$, (b) $\Lambda^0 + p \to \Sigma^+ + n$, (c) $\Lambda^0 \to p + \pi^-$; (d) $K^- + p \to \to \Lambda^0 + \pi^0$.

17C. Který ze zákonů zachování je narušen v následujících reakcích a rozpadech? (Předpokládejte, že produkty mají nulový moment hybnosti.) (a) $\Lambda^0 \to p + K^-$, (b) $\Omega^- \to \Sigma^- + \pi^0$ (částice Ω^- má $S = -3$ a $Q = -1$), (c) $K^- + p \to \Lambda^0 + \pi^+$.

18C. Spočtěte energii reakce pro (a) $\pi^+ + p \to \Sigma^+ + K^+$ a (b) $K^- + p \to \Lambda^0 + \pi^0$.

19C. Částice Σ^- se pohybuje s kinetickou energií 220 MeV a rozpadá se přitom podle vztahu $\Sigma^- \to \pi^- + n$. Vypočtěte celkovou kinetickou energii produktů rozpadu.

20Ú. Užijte zákony zachování pro identifikaci částice x v následujících reakcích, které probíhají díky silné interakci: (a) $p + \to + p \to p + \Lambda^0 + x$, (b) $p + \bar{p} \to n + x$, (c) $\pi^- + p \to \Xi^0 + \to + K^0 + x$.

21Ú. Ukažte, že kdybychom místo závislosti S na Q pro baryony se spinem $\frac{1}{2}$ na obr. 45.4a a pro mezony se spinem 0 na obr. 45.4b vykreslili závislost veličiny $Y = B + S$ na veličině $T_z = Q - \frac{1}{2}B$, dostali bychom hexagonální diagramy tehdy, byly-li by souřadné osy na sebe kolmé. (Veličina Y se nazývá *hypernáboj* a T_z je svázána s veličinou nazývanou *izospin*.)

22Ú. Uvažujme rozpad $\Lambda^0 \to p + \pi^-$ za předpokladu, že částice Λ^0 je v klidu. (a) Spočtěte energii reakce. (b) Spočtěte kinetickou energii protonu. (c) Jaká je kinetická energie pionu? (*Tip*: Úloha 11.)

ODST. 45.8 Kvarkový model

23C. Kvarkové složení protonu a neutronu je uud a udd. Jaké je kvarkové složení (a) antiprotonu a (b) antineutronu?

24C. Z tab. 45.3 a 45.5 určete baryony s následujícím kvarkovým složením. Ověřte svůj výsledek porovnáním s baryonovým oktetem na obr. 45.4a: (a) ddu; (b) uus; (c) ssd.

25C. Jaké kombinace kvarků jsou potřeba k vytvoření částic (a) Λ^0, (b) Ξ^0?

26C. Uvažujte pouze kvarky u, d a s. Vytvořte, je-li to možné, baryon s hodnotami (a) $Q = +1$ a $S = -2$ a (b) $Q = +2$ a $S = 0$.

27C. Máme deset baryonů se spinem $\frac{3}{2}$. Jejich symboly a kvantová čísla jsou následující:

	Q	S		Q	S
Δ^-	-1	0	Σ^{*0}	0	-1
Δ^0	0	0	Σ^{*+}	$+1$	-1
Δ^+	$+1$	0	Ξ^{*-}	-1	-2
Δ^{++}	$+2$	0	Ξ^{*0}	0	-2
Σ^{*-}	-1	-1	Ω^-	-1	-3

Vytvořte graf závislosti náboje na podivnosti pro tyto baryony, s použitím nakloněných souřadných os podle obr. 45.4. Porovnejte svůj diagram s tímto obrázkem.

28Ú. Neexistuje žádný mezon s $Q = +1$ a $S = -1$ nebo s $Q = -1$ a $S = +1$. Pomocí kvarkového modelu vysvětlete proč.

29Ú. Baryon Ξ^{*0} se spinem $\frac{3}{2}$ (cvič. 27) má klidovou energii 1 385 MeV (s nutnou vlastní neurčitostí, kterou zde neuvažujeme); baryon Σ^0 se spinem $\frac{1}{2}$ má klidovou energii 1 192,5 MeV. Má-li každá z těchto částic kinetickou energii 1 000 MeV, pohybuje se některá z nich rychleji, a jestli ano, tak o kolik?

ODST. 45.11 Vesmír se rozpíná

30C. Kdyby bylo možno Hubblův zákon extrapolovat do velmi velkých vzdáleností, pro jakou vzdálenost by zdánlivá rychlost vzdalování dosáhla rychlost světla?

31C. Jaká je pozorovaná vlnová délka čáry 656,3 nm H_α vodíku, byla-li emitována v galaxii ve vzdálenosti $2{,}40\cdot10^8$ ly?

32C. V laboratoři má jedna ze sodíkových čar vlnovou délku 590,0 nm. Ve světle přicházejícím z jisté galaxie ji však naměříme na 602,0 nm. Spočtěte vzdálenost galaxie za předpokladu platnosti Hubblova zákona.

33Ú. Zdánlivé rychlosti vzdalování velmi dalekých galaxií a kvazarů jsou blízké rychlosti světla, takže musíme počítat s relativistickým vztahem pro Dopplerův posuv (rov. (38.25)). Rudý posuv se udává jako relativní rudý posuv $z = \Delta\lambda/\lambda_0$. (a) Ukažte, že rychlostní parametr $\beta = v/c$ je vyjádřen pomocí z jako

$$\beta = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2}.$$

(b) Kvazar objevený v roce 1987 má $z = 4{,}43$. Spočtěte jeho rychlostní parametr. (c) Spočtěte vzdálenost kvazaru za předpokladu, že Hubblův zákon platí i v takových vzdálenostech.

34Ú. Bude se vesmír stále rozpínat i v budoucnosti? Při odpovědi na tuto otázku učiňme (rozumný?) předpoklad, že rychlost vzdalování v galaxie ve vzdálenosti r je určena pouze hmotou, která je uvnitř koule poloměru r se středem u nás. Jestliže celková hmotnost uvnitř této koule je M, bude úniková rychlost v_e rovna $v_e = \sqrt{2GM/r}$ (rov. (14.26)). (a) Aby se zabránilo neomezenému rozpínání, musí být střední hustota ϱ uvnitř koule nejméně

$$\varrho = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Dokažte to. (b) Spočtěte hodnotu této „kritické hustoty“ numericky a výsledek vyjádřete v počtu vodíkových atomů na jeden krychlový metr. Měření skutečné hustoty jsou obtížná a jsou komplikována existencí temné hmoty.

ODST. 45.12 Kosmické reliktní záření

35Ú. Díky všudypřítomnému kosmickému mikrovlnnému záření není nejmenší možná teplota plynu v mezihvězdném nebo mezigalaktickém prostoru nula, ale 2,7 K. To znamená, že významná část molekul v prostoru, která se může nacházet v nabuzených stavech s nízkou excitační energií, se v těchto stavech nalézá. Následný přechod do nižšího stavu vede k emisi záření, které pak můžeme pozorovat. Uvažte (hypotetickou) molekulu s právě jedním excitovaným stavem. (a) Jaká musí být excitační energie, aby se v nabuzeném stavu nacházelo 25 % molekul? (*Tip*: Rov. (41.21).) (b) Jaká by byla vlnová délka fotonu emitovaného při přechodu takové molekuly do základního stavu?

ODST. 45.13 Temná hmota

36C. Jaká by musela být hmotnost Slunce, aby měl Pluto (po většinu času nejvzdálenější planeta) stejnou oběžnou rychlost, jako má nyní Merkur (nejbližší planeta)? Využijte údajů z dodatku C a vyjádřete výsledek pomocí současné hmotnosti Slunce M. (Předpokládejte kruhové dráhy.)

37Ú. Předpokládejme, že by se hmotnost Slunce nezměnila, ale jeho poloměr by se zvětšil na $5{,}90\cdot10^{12}$ m (střední poloměr dráhy planety Pluto, nejvzdálenější planety), dále že hustota takového roztaženého Slunce by byla homogenní a planety by obíhaly uvnitř takového řídkého objektu. (a) Vypočtěte oběžnou rychlost Země v tomto novém uspořádání a srovnejte s nynější oběžnou rychlosti 29,8 km/s. Předpokládejte přitom, že poloměr oběžné dráhy Země by zůstal stejný. (b) Jaká by byla nová doba oběhu Země?

38Ú. Předpokládejte, že hmota nějaké galaxie (hvězdy, plyn, prach) o celkové hmotnosti M je rovnoměrně rozdělena uvnitř koule o poloměru R. Hvězda o hmotnosti m obíhá okolo středu galaxie po kruhové dráze o poloměru $r < R$. (a) Ukažte, že oběžná rychlost v hvězdy je dána vztahem

$$v = r\sqrt{\frac{GM}{R^3}},$$

a proto je perioda oběhu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

nezávislá na r. Zanedbejte všechny odporové síly. (b) Jaký je vztah pro periodu, předpokládáme-li, že hmotnost galaxie je výrazně koncentrovaná ke středu galaxie, takže v podstatě všechna hmotnost se nachází ve vzdálenostech menších než r?

ODST. 45.14 Velký třesk

39C. Teplota T záření v dutině a vlnová délka λ_{max}, pro kterou je toto záření nejsilnější, jsou svázány *Wienovým posunovacím zákonem*

$$\lambda_{max} T = 2\,898\ \mu\text{m}\cdot\text{K}.$$

(a) Kosmické mikrovlnné záření má maximum na vlnové délce 1,1 mm. Jaké teplotě to odpovídá? (b) Zhruba 300 000 let po Velkém třesku začal být vesmír propustný pro elektromagnetické záření. Jeho teplota tehdy byla asi 10^5 K. Jakou vlnovou délku mělo maximum kosmického mikrovlnného záření?

40C. Vlnová délka fotonů, na které má záření černého tělesa maximum, je

$$\lambda_{max} = (2\,898\ \mu\text{m}\cdot\text{K})/T$$

(cvič. 39). (a) Ukažte, že energii E takového fotonu můžeme vyjádřit vztahem

$$E = (4{,}28\cdot 10^{-10}\ \text{MeV/K})T.$$

(b) Jaká je minimální teplota, při které může tento foton vytvořit elektron-pozitronový pár kreační reakcí diskutovanou v čl. 22.6?

PROBLÉMY

41. Na obr. 45.8 je část experimentálního zařízení, na němž byly v padesátých letech objeveny antiprotony. Svazek protonů s energií 6,2 GeV vystupoval z urychlovače a srážel se s jádry měděného terče. Podle tehdejších teoretických předpovědí měly srážky protonů s protony a neutrony jader produkovat antiprotony v reakcích

$$\text{p} + \text{p} \rightarrow \text{p} + \text{p} + \text{p} + \bar{\text{p}}$$

a

$$\text{p} + \text{n} \rightarrow \text{p} + \text{n} + \text{p} + \bar{\text{p}}.$$

I kdyby se tyto reakce uskutečnily, byly by velmi řídké ve srovnání s reakcemi

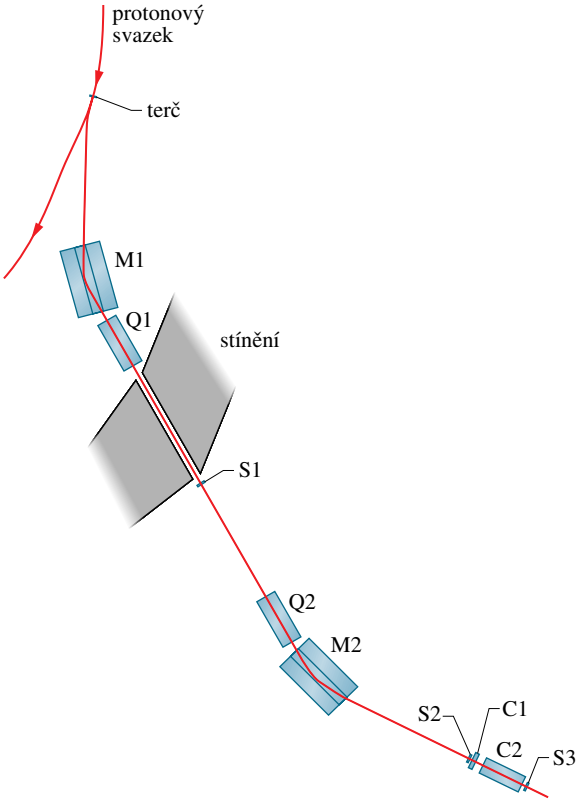
$$\text{p} + \text{p} \rightarrow \text{p} + \text{p} + \pi^+ + \pi^-$$

a

$$\text{p} + \text{n} \rightarrow \text{p} + \text{n} + \pi^+ + \pi^-.$$

Mezi částicemi produkovanými při srážce protonů s energií 6,2 GeV s měděným terčem tedy převažují piony.

Aby bylo možno dokázat, že antiproton existuje a že také vzniká při srážkách, procházely částice opouštějící terčík řadou oblastí s magnetickým polem a množstvím detektorů, jak ukazuje obr. 45.8. První magnetické pole M1 zakřivilo dráhu každé nabité částice a navíc bylo orientováno tak, aby do druhého magnetického pole Q1 vstupovaly jen záporně nabité částice (tedy buď $\bar{\text{p}}$, nebo π^-) s hybností 1,19 GeV/c. *Kvadrupólové pole* Q1 fokusovalo částice do svazku, který mohl projít otvorem v tlustém stínění ke *scintilačnímu detektoru* S1. Průchod nabité částice takovým detektorem spustí signál (podobně jako na běžné televizní obrazovce vznikne světelný pulz při dopadu elektronu.) Každý signál tak znamenal průchod buď 1,19 GeV/c pionu π^-, nebo (hledaného) 1,19 GeV/c antiprotonu $\bar{\text{p}}$.



Obr. 45.8 Úloha 41

Po další fokusaci magnetickým polem Q2 byly částice nasměrovány magnetickým polem M2 ke druhému scintilačnímu detektoru S2 a potom prošly dvěma *Čerenkovovými detektory* C1 a C2. Tyto detektory můžeme vyrobit tak, že budou vysílat signál pouze tehdy, má-li procházející částice rychlost v určitém intervalu. V daném experimentu částice s rychlostí větší než 0,79c spustí čítač detektoru C1 a částice s rychlostí mezi 0,75c a 0,78c spustí čítač detektoru C2.

Byly dva způsoby, jak odlišit předpovídané vzácné antiprotony od častých nadbytečných záporných pionů. Oba způsoby využívaly toho, že rychlost antiprotonů s hybností 1,19 GeV/c se liší od rychlosti záporného pionu se stejnou hybností: (1) Podle výpočtů $\bar{\text{p}}$ zaznamená jeden Čerenkovův detektor a π^- zaznamená druhý. (2) Časový interval Δt mezi signály z S1 a S2, které byly od sebe vzdáleny 12 m, bude mít jednu hodnotu pro $\bar{\text{p}}$ a jinou hodnotu pro π^-. Je-li tedy spuštěn správný Čerenkovův detektor a má-li časový interval Δt správnou hodnotu, je tímto experimentem prokázána existence antiprotonu.

Jaká je rychlost (a) antiprotonu s hybností 1,19 GeV/c a (b) záporného pionu s hybností 1,19 GeV/c? Rychlost antiprotonu v Čerenkovově detektoru bude ve skutečnosti o trochu menší než rychlost vypočtená díky malým energiovým ztrátám při průchodu detektorem. Který Čerenkovův detektor bude spuš-

těn (c) antiprotonem a který (d) záporným pionem? Jaký časový interval Δt odpovídal průchodu (e) antiprotonu a (f) záporného pionu? [Problém byl připraven podle článku O. Chamberlain, E. Segrè, C. Wiegand a T. Ypsilantis, „Observation of Antiprotons“, *Physical Review*, Vol. 100, pp. 947–950 (1955).]

42. *Kosmologický rudý posuv*. Rozpínání vesmíru často znázorňujeme obrázkem podobným obr. 45.9a. Na tomto obrázku se nacházíme v místě symbolu MD (naše galaxie, Mléčná dráha), v počátku osy r, která míří od nás radiálně všemi směry. Jsou vyznačeny další velmi vzdálené galaxie. U jejich symbolů jsou přidány vektory rychlosti získané ze změřeného rudého posuvu světla, které k nám z těchto galaxií přichází. Podle Hubblova zákona je rychlost galaxie úměrná vzdálenosti galaxie od nás. Takové obrázky ale mohou být zavádějící, protože naznačují, (1) že rudé posuvy jsou dány pohybem galaxií statickým (stacionárním) prostorem a (2) že my jsme ve středu celého tohoto pohybu.

Ve skutečnosti není rozpínání vesmíru a narůstání vzdáleností mezi galaxiemi způsobeno rozbíháním galaxií do předem daného prostoru, ale rozpínáním samotného prostoru všude ve vesmíru. *Prostor je dynamický, nikoli statický.*

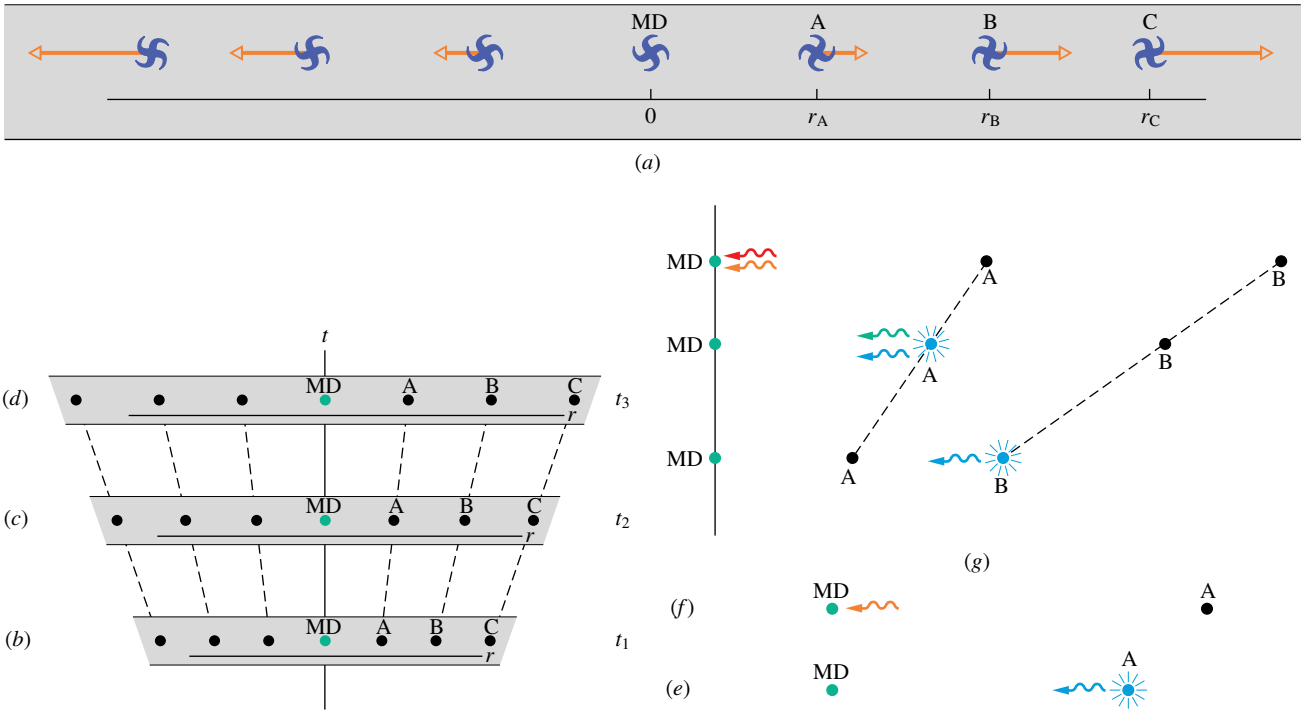
Obr. 45.9b, c, d ukazují jiný způsob znázornění vesmíru a jeho rozpínání. Každá část obrázku ukazuje část jednorozměrného řezu vesmírem (podél osy r); další dvě prostorové dimenze vesmíru nejsou zobrazeny. Každá ze tří částí obrázku ukazuje Mléčnou dráhu a šest dalších galaxií; části obrázku jsou uspořádány podél časové osy, čas vzrůstá směrem vzhůru. V části b, která odpovídá nejranějšímu času, jsou Mléčná dráha a ostatních šest galaxií vzájemně velmi blízko. Jak běží čas směrem vzhůru, prostor se rozpíná a galaxie se od sebe vzdalují. Vzhledem k nám se všechny ostatní galaxie vzdalují. Mléčná dráha však nemá žádné zvláštní postavení — galaxie se od sebe vzdalují, ať vybereme jakýkoli bod pozorování. Obr. 45.9e, f se soustřeďují jen na dvě galaxie, Mléčnou dráhu a jednu z dalších galaxií A ve dvou určitých časových okamžicích v průběhu rozpínání. V části e je galaxie A ve vzdálenosti r od nás v Mléčné dráze a emituje světelnou vlnu s vlnovou délkou λ. V části f, po uběhnutí časového intervalu Δt, pozorujeme tuto vlnu na Zemi. Označme rychlost rozpínání na jednotku délky prostoru jako α a předpokládejme, že se během doby Δt nezmění. Potom se během Δt každá jednotka délky prostoru (například každý metr) zvětší o $\alpha\Delta t$; tedy každá vzdálenost r se zvětší o $r\alpha\Delta t$. Světelná vlna z obr. 45.9e, f urazí rychlostí světla c cestu od galaxie A k Zemi. (a) Ukažte, že

$$\Delta t = \frac{r}{c - r\alpha}.$$

Na Zemi změříme vlnovou délku λ' světla větší, než je vlnová délka emitovaného světla λ, protože během intervalu Δt došlo k rozpínání prostoru. Přírůstek vlnové délky nazýváme **kosmologický rudý posuv**; není to Dopplerův jev. (b) Ukažte, že přírůstek vlnové délky $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ je dán vztahem

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{r\alpha}{c - r\alpha}.$$

(c) Rozviňte výraz na pravé straně pomocí binomického rozvoje (viz dodatek E a vysvětlení na str. 158). (d) Ponechte jen první člen rozvoje. Jaký je výsledný výraz pro $\Delta\lambda/\lambda$?



Obr. 45.9 Úloha 42

Budeme-li vycházet z obr. 45.9a a předpokládat, že $\Delta\lambda$ je dáno Dopplerovým jevem, dostáváme z rov. (18.57)

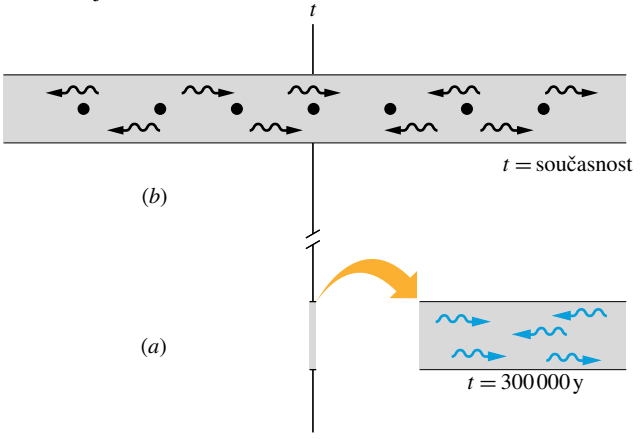
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c},$$

kde v je radiální rychlost galaxie A vzhledem k Zemi. (e) Použitím Hubblova zákona porovnejte výsledek získaný jako Dopplerův jev s výsledkem (d) a najděte tak hodnotu α. Z této analýzy je vidět, že oba výsledky, získané pomocí velmi rozdílných pohledů na rudý posuv světla emitovaného ve vzdálených galaxiích, jsou srovnatelné.

Předpokládejme, že světlo, které pozorujeme a které vzniklo v galaxii A, má rudý posuv $\Delta\lambda/\lambda = 0{,}050$ a že rychlost rozpínání vesmíru byla konstantní, s hodnotou uvedenou v této kapitole. (f) Použitím výsledku (b) nalezněte vzdálenost mezi galaxií A a Zemí v době, kdy bylo světlo emitováno. Vypočtěte, před jakou dobou bylo světlo galaxií A emitováno (g) pomocí výsledku (a), a (h) za předpokladu, že rudý posuv je způsoben Dopplerovým jevem. (*Tip*: Pro (h) je tato doba pouze vzdálenost v okamžiku emise dělená rychlostí světla, neboť je-li rudý posuv čistě Dopplerův jev, nemění se vzdálenost při cestě světla k nám. V tomto bodě se výsledky dvou modelů rudého posuvu liší.) (i) Jaká je vzdálenost mezi Zemí a galaxií A v době pozorování světla? (Předpokládáme, že galaxie A stále existuje; o jejím zániku se lidé nedozvědí dřív, než poslední galaxií emitované světlo dosáhne Zemi.)

Nyní předpokládejme, že pozorované světlo přicházející z galaxie B (obr. 45.9g) má rudý posuv $\Delta\lambda/\lambda = 0{,}080$. (j) S využitím výsledku (b) nalezněte vzdálenost mezi galaxií B a Zemí v době, kdy bylo světlo emitováno. (k) S využitím výsledku (a) vypočtěte, před jakou dobou bylo světlo galaxií B emitováno. (l) Jaká byla vzdálenost mezi galaxiemi A a B v době, kdy bylo galaxií A emitováno světlo, které teď pozorujeme?

43. *Kosmické reliktní záření.* Na obr. 45.10a je řez vesmírem v době, kdy jeho stáří bylo 300 000 let a obr. 45.10b je řez vesmírem v současnosti. (Tento typ zobrazení je vysvětlen v diskusi úlohy 42.) V čase $t = 300\,000$ y se volné elektrony a protony vázaly a vytvářely atomy vodíku, které pak emitovaly světlo do všech směrů (na obr. 45.10a je nakresleno pouze světlo pohybující se ve směru délky řezu). Emitované světlo nyní pozorujeme na Zemi jako součást kosmického reliktního záření.



Obr. 45.10 Úloha 43

Předpokládejme, že stáří vesmíru je 14 miliard let a že rychlost rozpínání se během té doby neměnila. (a) Jak se změnily vlnové délky světla emitovaného v čase $t = 300\,000$ y díky rozpínání vesmíru, měříme-li je v současné době? (b) Za předpokladu, že vodíkové atomy vzniklé v čase $t = 300\,000$ y byly stejné jako vodíkové atomy v současnosti, jaká dnes měřená vlnová délka odpovídá tehdy emitovanému světlu na hraně Lymanovy série? (c) Kosmické reliktní záření má maximum intenzity na vlnové délce 1,1 mm. Jaká byla odpovídající vlnová délka při emisi?

SVĚT KOLEM NÁS

Vzduch (suchý, při 20 °C, 1 atm)	
hustota	$1{,}21\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
měrná tepelná kapacita za stálého tlaku	$1\,010\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$
Poissonova konstanta	1,40
rychlost zvuku	$343\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
dielektrická pevnost	$3 \cdot 10^{6}\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$
průměrná molární hmotnost	$28{,}9\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$
Voda	
hustota	$1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
rychlost zvuku	$1\,460\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
měrná tepelná kapacita za stálého tlaku	$4\,190\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$
měrné skupenské teplo tání (0 °C)	$333\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$
měrné skupenské teplo varu (100 °C)	$2\,260\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$
index lomu ($\lambda = 589$ nm)	1,33
molární hmotnost	$18{,}0\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$
Země	
hmotnost	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
poloměr (koule téhož objemu)	6 371 km
poloosy zemského elipsoidu	6 378 km; 6 357 km
normální tíhové zrychlení	$9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
oběžná doba satelitu ve výšce 100 km	86,3 min
výška nad Zemí pro stacionární družici	35 822 km
úniková rychlost	$11{,}2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$
magnetický dipólový moment	$8{,}0 \cdot 10^{22}\ \mathrm{A \cdot m^{2}}$
obvyklé elektrické pole na povrchu	$150\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$, dolů
Vzdálenosti k různým objektům	
Měsíc	$3{,}82 \cdot 10^{8}$ m
Slunce	$1{,}50 \cdot 10^{11}$ m
nejbližší hvězda	$4{,}04 \cdot 10^{16}$ m
střed naší Galaxie	$2{,}2 \cdot 10^{20}$ m
galaxie Andromedy	$2{,}1 \cdot 10^{22}$ m
hranice pozorovatelného Vesmíru	$\doteq 10^{26}$ m

PŘEDPONY SI

Činitel	Předpona	Značka	Činitel	Předpona	Značka
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	mili	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	mikro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	piko	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hekto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deka	da	10^{-24}	yokto	y

NEJPOUŽÍVANĚJŠÍ FYZIKÁLNÍ KONSTANTY

KONSTANTA	ZNAČKA	PŘIBLIŽNÁ HODNOTA
Rychlost světla ve vakuu	c	$3{,}00{\cdot}10^{8}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
Elementární náboj	e	$1{,}60{\cdot}10^{-19}\ \mathrm{C}$
Gravitační konstanta	G	$6{,}67{\cdot}10^{-11}\ \mathrm{m^{3}{\cdot}s^{-2}{\cdot}kg^{-1}}$
Univerzální plynová konstanta	R	$8{,}31\ \mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$
Avogadrova konstanta	N_A	$6{,}02{\cdot}10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Boltzmannova konstanta	k	$1{,}38{\cdot}10^{-23}\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$
Stefanova-Boltzmannova konstanta	σ	$5{,}67{\cdot}10^{-8}\ \mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$
Molární objem ideálního plynu (0 °C, 1 atm)	V_mol	$2{,}24{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{m^{3}{\cdot}mol^{-1}}$
Permitivita vakua $= 1/(c^2\mu_0)$ přesně	ε_0	$8{,}85{\cdot}10^{-12}\ \mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$
Permeabilita vakua $= 4\pi{\cdot}10^{-7}$ přesně	μ_0	$1{,}26{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{H{\cdot}m^{-1}}$
Planckova konstanta	h	$6{,}63{\cdot}10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s}$
Hmotnost elektronu	m_e	$9{,}11{\cdot}10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Hmotnost protonu	m_p	$1{,}67{\cdot}10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Bohrův magneton	μ_B	$9{,}27{\cdot}10^{-24}\ \mathrm{J{\cdot}T^{-1}}$
Bohrův poloměr	r_B	$5{,}29{\cdot}10^{-11}\ \mathrm{m}$
Rydbergova konstanta	R_∞	$1{,}10{\cdot}10^{7}\ \mathrm{m^{-1}}$

Úplnější přehled naleznete v dodatku B.

ALFABETA

alfa	A	α	iota	I	ι	ró	P	ϱ
beta	B	β	kappa	K	$\varkappa$	sigma	Σ	σ, ς
gama	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	T	τ
delta	Δ	δ	mí	M	μ	ypsilon	Y	υ
epsílon	E	ε, ϵ	ný	N	ν	fí	Φ	φ, ϕ
dzéta	Z	ζ	ksí	X	ξ	chí	X	χ
éta	H	η	omikron	O	o	psí	Ψ	ψ
théta	Θ	θ, ϑ	pí	Π	π	omega	Ω	ω

Poloha malých písmen na řádce: $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\epsilon\zeta\eta\theta\vartheta\iota\varkappa\lambda\mu\nu\xi o\pi\varrho\sigma\varsigma\tau\upsilon\varphi\phi\chi\psi\omega$

Dodatek A
Mezinárodní soustava jednotek (SI)

1. ZÁKLADNÍ JEDNOTKY SI

VELIČINA	NÁZEV	ZNAČKA	DEFINICE
délka	metr	m	„metr je délka dráhy proběhnuté světlem ve vakuu za dobu 1/299 792 458 sekundy“ (ČSN ISO 31-1, prosinec 1994)
hmotnost	kilogram	kg	„kilogram je jednotka hmotnosti; rovná se hmotnosti mezinárodního prototypu kilogramu“ (ČSN ISO 31-3, prosinec 1994)
čas	sekunda	s	„sekunda je trvání 9 192 631 770 period záření odpovídajícího přechodu mezi dvěma velmi jemnými hladinami základního stavu atomu cesia 133“ (ČSN ISO 31-1, prosinec 1994)
elektrický proud	ampér	A	„ampér je stálý elektrický proud, který při průtoku dvěma přímými nekonečně dlouhými rovnoběžnými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu, umístěnými ve vakuu ve vzdálenosti 1 metru, vyvolá mezi nimi sílu $2 \cdot 10^{-7}$ newtonu na metr délky“ (ČSN ISO 31-5, listopad 1995)
termodynamická teplota	kelvin	K	„kelvin, jednotka termodynamické teploty, je 1/273,16 termodynamické teploty trojného bodu vody“ (ČSN ISO 31-4, prosinec 1994)
látkové množství	mol	mol	„mol je látkové množství soustavy, která obsahuje tolik elementárních entit, kolik je atomů v 0,012 kg uhlíku 12. Při užití molu musí být elementární entity specifikovány. Mohou to být atomy, molekuly, ionty, elektrony, jiné částice nebo specifikované skupiny takových částic.“ (ČSN ISO 31-8, červen 1996)
svítivost	kandela	cd	„kandela je svítivost zdroje v daném směru, který vysílá monochromatické záření s kmitočtem $540 \cdot 10^{12}$ hertzů a má v tomto směru zářivost 1/683 wattů na steradián“ (ČSN ISO 31-6, listopad 1995)

2. NĚKTERÉ ODVOZENÉ JEDNOTKY SI

VELIČINA	NÁZEV JEDNOTKY	ZNAČKA	
plocha	čtverečný metr	m^2	
objem	krychlový metr	m^3	
rychlost		$m \cdot s^{-1}$	
zrychlení		$m \cdot s^{-2}$	
rovinný úhel	radián	rad	
prostorový úhel	steradián	sr	
úhlová rychlost		$rad \cdot s^{-1}$	
úhlové zrychlení		$rad \cdot s^{-2}$	
frekvence, kmitočet	hertz	Hz	s^{-1}
hustota		$kg \cdot m^{-3}$	
síla	newton	N	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
tlak	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$
práce, energie, teplo	joule	J	$N \cdot m$
výkon	watt	W	$J \cdot s^{-1}$
elektrický náboj	coulomb	C	$A \cdot s$
potenciál, napětí	volt	V	$W \cdot A^{-1}$
intenzita elektrického pole		$V \cdot m^{-1}$	$N \cdot C^{-1}$
elektrický odpor	ohm	Ω	$V \cdot A^{-1}$
elektrická vodivost	siemens	S	Ω^{-1}
kapacita	farad	F	$A \cdot s \cdot V^{-1}$
magnetická indukce	tesla	T	$Wb \cdot m^{-2}$
magnetický tok	weber	Wb	$V \cdot s$
indukčnost	henry	H	$V \cdot s \cdot A^{-1}$
intenzita magnetického pole		$A \cdot m^{-1}$	
entropie		$J \cdot K^{-1}$	
měrná tepelná kapacita		$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	
tepelná vodivost		$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	
Celsiova teplota	stupeň Celsia	°C	
světelný tok	lumen	lm	cd·sr
osvětlení	lux	lx	$lm \cdot m^{-2}$
zářivost		$W \cdot sr^{-1}$	

Dodatek B
Některé základní fyzikální konstanty*

Konstanta	Značka	Přibližná hodnota	Nejpřesnější hodnota (1986)	
			Hodnota[a]	Nejistota[b]
Rychlost světla ve vakuu	c	$3{,}00\cdot10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$	2,997 924 58	přesně
Elementární náboj	e	$1{,}60\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}$	1,602 177 33	0,30
Gravitační konstanta[e]	G	$6{,}67\cdot10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-2}\cdot kg^{-1}}$	6,672 59	128
Univerzální plynová konstanta	R	$8{,}31\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$	8,314 510	8,4
Avogadrova konstanta	N_A	$6{,}02\cdot10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$	6,022 136 7	0,59
Boltzmannova konstanta	k	$1{,}38\cdot10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$	1,380 658	8,5
Stefanova-Boltzmannova konstanta	σ	$5{,}67\cdot10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$	5,670 51	34
Molární objem ideálního plynu za STP[d]	V_m	$2{,}24\cdot10^{-2}\,\mathrm{m^3\cdot mol^{-1}}$	2,241 409	8,4
Permitivita vakua	ε_0	$8{,}85\cdot10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$	$1/(c^2\mu_0)$	přesně
Permeabilita vakua	μ_0	$1{,}26\cdot10^{-6}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}$	$4\pi\cdot10^{-7}$	přesně
Planckova konstanta	h	$6{,}63\cdot10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$	6,626 075 5	0,60
Redukovaná Planckova konstanta	$\hbar = h/(2\pi)$	$1{,}05\cdot10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$	1,054 572 7	0,10
Hmotnost elektronu[c]	m_e	$9{,}11\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg}$	9,109 389 7	0,59
		$5{,}49\cdot10^{-4}\,\mathrm{u}$	5,485 799 03	0,023
Hmotnost protonu[c]	m_p	$1{,}67\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg}$	1,672 623 1	0,59
		$1{,}007\,3\,\mathrm{u}$	1,007 276 466 0	0,005
Poměr hmotností protonu a elektronu	$m_\mathrm{p}/m_\mathrm{e}$	1 840	1 836,152 701	0,020
Měrný náboj elektronu	e/m_e	$1{,}76\cdot10^{11}\,\mathrm{C\cdot kg^{-1}}$	1,758 819 61	0,30
Hmotnost neutronu[c]	m_n	$1{,}67\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg}$	1,674 928 6	0,59
		$1{,}008\,7\,\mathrm{u}$	1,008 664 923 5	0,002 3
Hmotnost atomu vodíku[c]	$m_{^1\mathrm{H}}$	$1{,}007\,8\,\mathrm{u}$	1,007 825 031 6	0,000 5
Hmotnost atomu deuteria[c]	$m_{^2\mathrm{H}}$	$2{,}014\,1\,\mathrm{u}$	2,014 101 777 9	0,000 5
Hmotnost atomu helia[c]	$m_{^4\mathrm{He}}$	$4{,}002\,6\,\mathrm{u}$	4,002 603 2	0,067
Hmotnost mionu	m_μ	$1{,}88\cdot10^{-28}\,\mathrm{kg}$	1,883 532 6	0,61
Magnetický moment elektronu	μ_e	$9{,}28\cdot10^{-24}\,\mathrm{J\cdot T^{-1}}$	9,284 770 1	0,34
Magnetický moment protonu	μ_p	$1{,}41\cdot10^{-26}\,\mathrm{J\cdot T^{-1}}$	1,410 607 61	0,34
Bohrův magneton	μ_B	$9{,}27\cdot10^{-24}\,\mathrm{J\cdot T^{-1}}$	9,274 015 4	0,34
Jaderný magneton	μ_N	$5{,}05\cdot10^{-27}\,\mathrm{J\cdot T^{-1}}$	5,050 786 6	0,34
Bohrův poloměr	r_B	$5{,}29\cdot10^{-11}\,\mathrm{m}$	5,291 772 49	0,045
Rydbergova konstanta	R	$1{,}10\cdot10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}$	1,097 373 153 4	0,001 2
Comptonova vlnová délka elektronu	λ_C	$2{,}43\cdot10^{-12}\,\mathrm{m}$	2,426 310 58	0,089

[a] K hodnotám v tomto sloupci je nutno přiřadit stejnou jednotku a mocninu desítky jako u přibližné hodnoty.
[b] V miliontinách.
[c] Hmotnosti zapsané v u jsou v atomových hmotnostních jednotkách, kde $1\,\mathrm{u} = 1{,}660\,540\,2\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg}$.
[d] STP znamená standardní teplotu a tlak: 0 °C a 1,0 atm (0,1 MPa).
[e] V ČR je dosud dosti rozšířena starší značka $\varkappa$.

* Hodnoty v této tabulce byly vybrány ze *Symbols, Units and Nomenclatur in Physics* (IUPAP), který sestavili E. Richard Cohen a Pierre Giacomo, 1986.

Dodatek C
Některá astronomická data

NĚKTERÉ VZDÁLENOSTI OD ZEMĚ

k Měsíci (průměrná vzdálenost)	$3{,}82 \cdot 10^{8}$ m
ke Slunci (průměrná vzdálenost)	$1{,}50 \cdot 10^{11}$ m
k nejbližší hvězdě (Proxima Centauri)	$4{,}04 \cdot 10^{16}$ m
k centru naší Galaxie	$2{,}2 \cdot 10^{20}$ m
ke galaxii v Andromedě	$2{,}1 \cdot 10^{22}$ m
k okraji pozorovatelného vesmíru	$\sim 10^{26}$ m

SLUNCE, ZEMĚ A MĚSÍC

VLASTNOST	JEDNOTKA	SLUNCE	ZEMĚ	MĚSÍC
Hmotnost	kg	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	$7{,}36 \cdot 10^{22}$
Střední poloměr	m	$6{,}96 \cdot 10^{8}$	$6{,}37 \cdot 10^{6}$	$1{,}74 \cdot 10^{6}$
Střední hustota	$\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$	1410	5520	3340
Tíhové zrychlení na povrchu	$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$	274	9,81	1,67
Úniková rychlost	$\mathrm{km \cdot s^{-1}}$	618	11,2	2,38
Doba rotace[a]	—	37 d na pólech[b] 26 d na rovníku[b]	23 h 56 min	27,3 d
Zářivý výkon[c]	W	$3{,}90 \cdot 10^{26}$		

[a] Měřeno vzhledem ke vzdáleným hvězdám.
[b] Slunce, plynná koule, nerotuje jako tuhé těleso.
[c] Výkon sluneční energie dopadající kolmo na povrch Země, měřeno vně zemské atmosféry, je $1\,340\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$.

NĚKTERÉ CHARAKTERISTIKY PLANET

	MERKUR	VENUŠE	ZEMĚ	MARS	JUPITER	SATURN	URAN	NEPTUN	PLUTO
Střední vzdálenost od Slunce (10^6 km)	57,9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
Doba oběhu (y)	0,241	0,615	1,00	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
Doba[a] rotace (d)	58,7	−243[b]	0,997	1,03	0,409	0,426	−0,451[b]	0,658	6,39
Orbitální rychlost (km·s^{-1})	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
Sklon osy k rovině oběhu	$< 28°$	$\approx 3°$	23,4°	25,0°	3,08°	26,7°	97,9°	29,6°	57,5°
Sklon orbity k ekliptice	7,00°	3,39°	0°	1,85°	1,30°	2,49°	0,77°	1,77°	17,2°
Excentricita trajektorie	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086	0,250
Rovníkový průměr (km)	4880	12100	12800	6790	143000	120000	51800	49500	2300
Hmotnost (Země = 1)	0,0558	0,815	1,000	0,107	318	95,1	14,5	17,2	0,002
Hustota (voda = 1)	5,60	5,20	5,52	3,95	1,31	0,704	1,21	1,67	2,03
Tíhové zrychlení[c] na povrchu (m·s^{-2})	3,78	8,60	9,78	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	0,5
Úniková rychlost[c] (km/s)	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	1,1
Známé satelity a prstence	0	0	1	2	16+ p	18+ pp	15+ pp	8+ pp	1

[a] Měřeno vzhledem ke vzdáleným hvězdám.
[b] Venuše a Uran rotují retrográdně (tj. v opačném smyslu, než v jakém obíhají kolem Slunce).
[c] Měřeno na rovníku.

Dodatek D
Převodní koeficienty mezi jednotkami

Převodní koeficienty odečítáme přímo z jednotlivých tabulek. Např. 1 stupeň (1°) = $2{,}778\cdot10^{-3}$ otáček, takže hodnotu 16,7° převedeme úpravou: $16{,}7^\circ = 16{,}7 \cdot 2{,}778 \cdot 10^{-3}$ ot $= 4{,}64\cdot10^{-2}$ ot.

PLOŠNÝ ÚHEL

	°	′	″	rad	ot
°	1	60	3 600	$1{,}745\cdot10^{-2}$	$2{,}778\cdot10^{-3}$
′	$1{,}667\cdot10^{-2}$	1	60	$2{,}909\cdot10^{-4}$	$4{,}630\cdot10^{-5}$
″	$2{,}778\cdot10^{-4}$	$1{,}667\cdot10^{-2}$	1	$4{,}848\cdot10^{-6}$	$7{,}716\cdot10^{-7}$
rad	57,30	3 438	$2{,}063\cdot10^{5}$	1	0,159 2
ot	360	$2{,}16\cdot10^{4}$	$1{,}296\cdot10^{6}$	6,283	1

Zápis jednotek: 1 stupeň 1°; 2 minuty 2′; 3 vteřiny 3″. Otáčka není jednotka SI, ale často se užívá; zde ji zkracujeme na ot.

PROSTOROVÝ ÚHEL

plný prostorový úhel = 4π steradiánu ≐ 12,57 steradiánu

DÉLKA

	cm	m	km	in	ft	mi
m	100	1	$1\cdot10^{-3}$	39,37	3,281	$6{,}214\cdot10^{-4}$
in	2,540	$2{,}540\cdot10^{-2}$	$2{,}540\cdot10^{-5}$	1	$8{,}333\cdot10^{-2}$	$1{,}578\cdot10^{-5}$
ft	30,48	0,304 8	$3{,}048\cdot10^{-4}$	12	1	$1{,}894\cdot10^{-4}$
mi	$1{,}609\cdot10^{5}$	1 609	1,609	$6{,}336\cdot10^{4}$	5 280	1

1 Angström (1 Å) = $1\cdot10^{-10}$ m
1 fermi (1 fm) = $1\cdot10^{-15}$ m
1 fathom = 6 ft
1 rod = 16,5 ft
1 nautical mile = 1 852 m přesně
1 light-year (1 ly) = $9{,}460\cdot10^{12}$ km
1 Bohrův poloměr = $5{,}292\cdot10^{-11}$ m
1 mil = $1\cdot10^{-3}$ in
1 parsec (1 pc) = $3{,}084\cdot10^{13}$ km
1 yard (yd) = 3 ft

Výklad zkratek: in = inch (palec, coul); ft = foot (stopa); mi = mile (míle); nautical mile (námořní míle); rod = rod (tyč); ly = light-year (světelný rok)

PLOCHA

	m^2	cm^2	ft^2	in^2
m^2	1	$1\cdot10^{4}$	10,76	1 550
cm^2	$1\cdot10^{-4}$	1	$1{,}076\cdot10^{-3}$	0,155 0
ft^2	$9{,}290\cdot10^{-2}$	929,0	1	144
in^2	$6{,}452\cdot10^{-4}$	6,452	$6{,}944\cdot10^{-3}$	1

1 square mile = $2{,}788\cdot10^{7}$ ft^2 = 640 akr
1 hektar = $1\cdot10^{4}$ m^2 = 2,471 akr
1 barn = $1\cdot10^{-28}$ m^2
1 ar = $1\cdot10^{2}$ m^2
1 akr = 43 560 ft^2

OBJEM

	m^3	cm^3	l	ft^3	in^3
m^3	1	$1{\cdot}10^{6}$	$1{\cdot}10^{3}$	35,31	$6{,}102{\cdot}10^{4}$
cm^3	$1{\cdot}10^{-6}$	1	$1{,}000{\cdot}10^{-3}$	$3{,}531{\cdot}10^{-5}$	$6{,}102{\cdot}10^{-2}$
l	$1{,}000{\cdot}10^{-3}$	$1{\cdot}10^{3}$	1	$3{,}531{\cdot}10^{-2}$	61,02
ft^3	$2{,}832{\cdot}10^{-2}$	$2{,}832{\cdot}10^{4}$	28,32	1	1 728
in^3	$1{,}639{\cdot}10^{-5}$	16,39	$1{,}639{\cdot}10^{-2}$	$5{,}787{\cdot}10^{-4}$	1

1 U.S. fluid gallon = 4 U.S. fluid quarts = 8 U.S. pints = 128 U.S. fluid ounces = 231 in^3,
1 British imperial gallon = 277,4 in^3 = 1,201 U.S. fluid gallons

HMOTNOST

Jednotka ve zbarvené oblasti je jednotkou síly, ale používá se někdy i pro hmotnost. Píšeme-li tedy např. „1 kg = 2,205 lb“, znamená to, že kilogram je *hmotnost tělesa vážícího* 2,205 liber v místě, kde má tíhové zrychlení standardní hodnotu 9,806 65 $m{\cdot}s^{-2}$.

	g	kg	u	oz	lb
kg	1 000	1	$6{,}022{\cdot}10^{26}$	35,27	2,205
u	$1{,}661{\cdot}10^{-24}$	$1{,}661{\cdot}10^{-27}$	1	$5{,}857{\cdot}10^{-26}$	$3{,}662{\cdot}10^{-27}$
oz	28,35	$2{,}835{\cdot}10^{-2}$	$1{,}718{\cdot}10^{25}$	1	$6{,}250{\cdot}10^{-2}$
lb	453,6	0,453 6	$2{,}732{\cdot}10^{26}$	16	1

Výklad zkratek: u = unit (atomová hmotnostní jednotka), oz = ounce (unce), lb = pound (libra)

HUSTOTA

Hodnoty ve zbarvených oblastech jsou hustoty síly (váhy) a jejich rozměr se liší od ostatních. Vysvětlení jako u tabulky hmotností.

	$kg{\cdot}m^{-3}$	$g{\cdot}cm^{-3}$	$lb{\cdot}ft^{-3}$	$lb{\cdot}in^{-3}$
$kg{\cdot}m^{-3}$	1	0,001	$6{,}243{\cdot}10^{-2}$	$3{,}613{\cdot}10^{-5}$
$g{\cdot}cm^{-3}$	1 000	1	62,43	$3{,}613{\cdot}10^{-2}$
$lb{\cdot}ft^{-3}$	16,02	$1{,}602{\cdot}10^{-2}$	1	$5{,}787{\cdot}10^{-4}$
$lb{\cdot}in^{-3}$	$2{,}768{\cdot}10^{4}$	27,68	1 728	1

ČAS

	y	d	h	min	s
y	1	365,25	$8{,}766{\cdot}10^{3}$	$5{,}259{\cdot}10^{5}$	$3{,}156{\cdot}10^{7}$
d	$2{,}738{\cdot}10^{-3}$	1	24	1 440	$8{,}640{\cdot}10^{4}$
h	$1{,}141{\cdot}10^{-4}$	$4{,}167{\cdot}10^{-2}$	1	60	3 600
min	$1{,}901{\cdot}10^{-6}$	$6{,}944{\cdot}10^{-4}$	$1{,}667{\cdot}10^{-2}$	1	60
s	$3{,}169{\cdot}10^{-8}$	$1{,}157{\cdot}10^{-5}$	$2{,}778{\cdot}10^{-4}$	$1{,}667{\cdot}10^{-2}$	1

Výklad zkratek: y = year (rok), d = day (den), h = hour (hodina), min = minute (minuta), s = second (sekunda; dříve se užíval i název vteřina, ale ten je nyní rezervován jen pro úhel)

RYCHLOST

	$ft \cdot s^{-1}$	$km \cdot h^{-1}$	$m \cdot s^{-1}$	$mi \cdot h^{-1}$	$cm \cdot s^{-1}$
$ft \cdot s^{-1}$	1	1,097	0,304 8	0,681 8	30,48
$km \cdot h^{-1}$	0,911 3	1	0,277 8	0,621 4	27,78
$m \cdot s^{-1}$	3,281	3,6	1	2,237	100
$mi \cdot h^{-1}$	1,467	1,609	0,447 0	1	44,70
$cm \cdot s^{-1}$	$3,281 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	0,01	$2,237 \cdot 10^{-2}$	1

1 knot (uzel) = 1 nautical mile per hour = 1,688 $ft \cdot s^{-1}$

SÍLA

Jednotka síly ve zbarvené oblasti se u nás nyní neužívá: 1 gram síly (gram-force) je tíhová síla působící na těleso o hmotnosti 1 gram v místě, kde má tíhové zrychlení standardní hodnotu 9,806 65 $m \cdot s^{-2}$. Dříve se nazýval 1 pond.

	dyn	N	lb	pdl	gf
dyn	1	$1 \cdot 10^{-5}$	$2,248 \cdot 10^{-6}$	$7,233 \cdot 10^{-5}$	$1,020 \cdot 10^{-3}$
N	$1 \cdot 10^{5}$	1	0,224 8	7,233	102,0
lb	$4,448 \cdot 10^{5}$	4,448	1	32,17	453,6
pdl	$1,383 \cdot 10^{4}$	0,138 3	$3,108 \cdot 10^{-2}$	1	14,10
gf	980,7	$9,807 \cdot 10^{-3}$	$2,205 \cdot 10^{-3}$	$7,093 \cdot 10^{-2}$	1

Výklad zkratek: lb = pound, pdl = poundal

TLAK

	atm	$dyn \cdot cm^{-2}$	inch of water	mm Hg	Pa	$lb \cdot in^{-2}$	$lb \cdot ft^{-2}$
atm	1	$1,013 \cdot 10^{6}$	406,8	760	$1,013 \cdot 10^{5}$	14,70	2 116
$dyn \cdot cm^{-2}$	$9,869 \cdot 10^{-7}$	1	$4,015 \cdot 10^{-4}$	$7,501 \cdot 10^{-4}$	0,1	$1,405 \cdot 10^{-5}$	$2,089 \cdot 10^{-3}$
inch of water[a,b]	$2,458 \cdot 10^{-3}$	2 491	1	1,868	249,1	$3,613 \cdot 10^{-2}$	5,202
mm Hg[a,c]	$1,316 \cdot 10^{-3}$	$1,333 \cdot 10^{3}$	0,535 3	1	133,3	$1,934 \cdot 10^{-2}$	2,785
Pa	$9,689 \cdot 10^{-6}$	10	$4,015 \cdot 10^{-3}$	$7,501 \cdot 10^{-3}$	1	$1,450 \cdot 10^{-4}$	$2,089 \cdot 10^{-2}$
$lb \cdot in^{-2}$	$6,805 \cdot 10^{-2}$	$6,895 \cdot 10^{4}$	27,68	51,71	$6,895 \cdot 10^{3}$	1	144
$lb \cdot ft^{-2}$	$4,725 \cdot 10^{-4}$	478,8	0,192 2	0,359 1	47,88	$6,944 \cdot 10^{-3}$	1

[a] Při normálním tíhovém zrychlení $g = 9,806\,65\ m \cdot s^{-2}$.
[b] Při teplotě 4 °C.
[c] Při teplotě 0 °C.

1 bar = $1 \cdot 10^{6}$ $dyn \cdot cm^{-2}$ = 0,1 MPa, 1 milibar = $1 \cdot 10^{3}$ $dyn \cdot cm^{-2}$ = $1 \cdot 10^{2}$ Pa, 1 torr = 1 mm Hg

Překlad: inch of water = palec vody

ENERGIE, PRÁCE, TEPLO

Jednotky ve zbarvených oblastech jsou jednotkami hmotnosti a nikoli energie, nicméně je vhodné je zde uvést. Převod je založen na relativistické ekvivalenci hmoty a energie vyjádřené vztahem $E = mc^2$.

	Btu	erg	ft·lb	hp·h	J	cal	kW·h	eV	kg	u
Btu	1	$1{,}055\cdot 10^{10}$	777,9	$3{,}929\cdot 10^{-4}$	1 055	252,0	$2{,}930\cdot 10^{-4}$	$6{,}585\cdot 10^{21}$	$1{,}174\cdot 10^{-14}$	$7{,}070\cdot 10^{12}$
erg	$9{,}481\cdot 10^{-11}$	1	$7{,}376\cdot 10^{-8}$	$3{,}725\cdot 10^{-14}$	10^{-7}	$2{,}389\cdot 10^{-8}$	$2{,}778\cdot 10^{-14}$	$6{,}242\cdot 10^{11}$	$1{,}113\cdot 10^{-24}$	670,2
ft·lb	$1{,}285\cdot 10^{-3}$	$1{,}356\cdot 10^{7}$	1	$5{,}051\cdot 10^{-7}$	1,356	0,323 8	$3{,}766\cdot 10^{-7}$	$8{,}464\cdot 10^{18}$	$1{,}509\cdot 10^{-17}$	$9{,}037\cdot 10^{9}$
hp·h	2 545	$2{,}685\cdot 10^{13}$	$1{,}980\cdot 10^{6}$	1	$2{,}685\cdot 10^{6}$	$6{,}413\cdot 10^{5}$	0,745 7	$1{,}676\cdot 10^{25}$	$2{,}988\cdot 10^{-11}$	$1{,}799\cdot 10^{16}$
J	$9{,}481\cdot 10^{-4}$	10^{7}	0,737 6	$3{,}725\cdot 10^{-7}$	1	0,238 9	$2{,}778\cdot 10^{-7}$	$6{,}242\cdot 10^{18}$	$1{,}113\cdot 10^{-17}$	$6{,}702\cdot 10^{9}$
cal	$3{,}969\cdot 10^{-3}$	$4{,}186\cdot 10^{7}$	3,088	$1{,}560\cdot 10^{-6}$	4,186	1	$1{,}163\cdot 10^{-6}$	$2{,}613\cdot 10^{19}$	$4{,}660\cdot 10^{-17}$	$2{,}806\cdot 10^{10}$
kW·h	3 413	$3{,}600\cdot 10^{13}$	$2{,}655\cdot 10^{6}$	1,341	$3{,}600\cdot 10^{6}$	$8{,}600\cdot 10^{5}$	1	$2{,}247\cdot 10^{25}$	$4{,}007\cdot 10^{-11}$	$2{,}413\cdot 10^{16}$
eV	$1{,}519\cdot 10^{-22}$	$1{,}602\cdot 10^{-12}$	$1{,}182\cdot 10^{-19}$	$5{,}967\cdot 10^{-26}$	$1{,}602\cdot 10^{-19}$	$3{,}827\cdot 10^{-20}$	$4{,}450\cdot 10^{-26}$	1	$1{,}783\cdot 10^{-36}$	$1{,}074\cdot 10^{-9}$
kg	$8{,}521\cdot 10^{13}$	$8{,}987\cdot 10^{23}$	$6{,}629\cdot 10^{16}$	$3{,}348\cdot 10^{10}$	$8{,}987\cdot 10^{16}$	$2{,}146\cdot 10^{16}$	$2{,}497\cdot 10^{10}$	$5{,}610\cdot 10^{35}$	1	$6{,}022\cdot 10^{26}$
u	$1{,}415\cdot 10^{-13}$	$1{,}492\cdot 10^{-3}$	$1{,}101\cdot 10^{-10}$	$5{,}559\cdot 10^{-17}$	$1{,}492\cdot 10^{-10}$	$3{,}564\cdot 10^{-11}$	$4{,}146\cdot 10^{-17}$	$9{,}320\cdot 10^{8}$	$1{,}661\cdot 10^{-27}$	1

Výklad zkratek: Btu = British thermal unit, hp·h = horse-power-hour, J = joule, cal = kalorie, kW·h = kilowatthodina, eV = elektronvolt, u = atomová hmotnostní jednotka $\doteq 1{,}661\cdot 10^{-27}$ kg

VÝKON

	$\text{Btu}\cdot\text{h}^{-1}$	$\text{ft}\cdot\text{lb}\cdot\text{s}^{-1}$	hp	$\text{cal}\cdot\text{s}^{-1}$	W
$1\ \text{Btu}\cdot\text{h}^{-1}$	1	0,216 1	$3{,}929\cdot 10^{-4}$	$6{,}998\cdot 10^{-2}$	0,293 0
$1\ \text{ft}\cdot\text{lb}\cdot\text{s}^{-1}$	4,628	1	$1{,}818\cdot 10^{-3}$	0,323 9	1,356
1 hp	2 545	550	1	178,1	745,7
$1\ \text{cal}\cdot\text{s}^{-1}$	14,29	3,088	$5{,}615\cdot 10^{-3}$	1	4,186
1 W	3,413	0,737 6	$1{,}341\cdot 10^{-3}$	0,238 9	1

Výklad zkratek: $\text{Btu}\cdot\text{h}^{-1}$ = British thermal unit per hour, $\text{ft}\cdot\text{lb}\cdot\text{s}^{-1}$ = foot-pound per second, hp = horse-power (koňská síla), $\text{cal}\cdot\text{s}^{-1}$ = kalorie za sekundu, W = watt

MAGNETICKÉ POLE

	G	T
G	1	$1\cdot 10^{-4}$
T	$1\cdot 10^{4}$	1

$1\ \text{T} = 1\ \text{Wb}\cdot\text{m}^{-2}$

Výklad zkratek: G = gauss, T = tesla, M = maxwell, Wb = weber

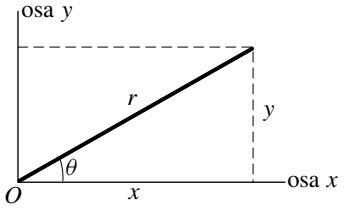
MAGNETICKÝ TOK

	M	Wb
M	1	$1\cdot 10^{-8}$
Wb	$1\cdot 10^{8}$	1

Dodatek E
Matematické vzorce

GONIOMETRICKÉ FUNKCE

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$
$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{x}{y}$$



Inverzní funkce

Je-li $0 \leqq \theta \leqq \pi$ a $y = \cos\theta$, pak $\arccos y = \theta$.
Je-li $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ a $y = \sin\theta$, pak $\arcsin y = \theta$.
Je-li $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ a $y = \operatorname{tg}\theta$, pak $\operatorname{arctg} y = \theta$.

Vztahy

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sin(360^\circ + \theta) = \sin(180^\circ - \theta) = \\ &= -\sin(-\theta) = -\sin(180^\circ + \theta) = \\ &= \cos(90^\circ - \theta) = -\cos(90^\circ + \theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(360^\circ + \theta) = \cos(-\theta) = \\ &= -\cos(180^\circ - \theta) = -\cos(180^\circ + \theta) = \\ &= \sin(90^\circ - \theta) = -\sin(90^\circ + \theta)\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(180^\circ + \theta) = -\operatorname{tg}(-\theta)$$
$$\operatorname{cotg}\theta = \operatorname{cotg}(180^\circ + \theta) = -\operatorname{cotg}(-\theta)$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

BINOMICKÁ VĚTA

Výraz $(1 + x)^n$ lze rozvinout v řadu

$$1 + \frac{n}{1}x + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}x^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3 + \dots .$$

Pro přirozené n má řada jen $n + 1$ sčítanců a vzorec platí pro libovolné x.

Pro ostatní n je tato řada nekonečná a vzorec platí jen pro $|x| < 1$.

Ověřte si, že pro $x = \alpha$ a $n = \frac{1}{2}$, resp. $x = -\beta^2$ a $n = -\frac{1}{2}$ dostaneme:

$$\sqrt{1+\alpha} = 1 + \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{1}{16}\alpha^3 + \dots ,$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \frac{5}{16}\beta^6 + \dots .$$

ROZVOJE NĚKTERÝCH FUNKCÍ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{(všechna } x\text{)}$$

$$\cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \text{(všechna } x\text{)}$$

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad \text{(všechna } x\text{)}$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{3}x^3 + \dots \quad (|x| < 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{(všechna } x\text{)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad \text{(všechna } x\text{)}$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (|x| < \pi/2)$$

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Každá lineární rovnice $ax + b = c$ pro $a \neq 0$ s reálnými koeficienty a, b, c má reálné řešení x. Toto však neplatí pro kvadratické rovnice: rovnice $x^2 = -1$ nemá řešení x mezi reálnými čísly. Zavádíme proto komplexní jednotku „i“ (elektrotechnici raději užívají symbol „j“) takovou, že $\mathrm{i}^2 = -1$. Komplexní číslo z pak lze psát jako $z = x + \mathrm{i}y$ (s reálnou částí $x = \mathrm{Re}\, z$ a imaginární částí $y = \mathrm{Im}\, z$) a pracujeme s ním jako s obvyklým dvojčlenem. Lze dokázat, že *každá* rovnice libovolného stupně s komplexními koeficienty pak má (komplexní) řešení. Komplexní čísla s výhodou zobrazujeme jako body v rovině (komplexní, Gaussově). Každé komplexní číslo můžeme zapsat kterýmkoliv z těchto tvarů:

$$z = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Velikost $|z|$ (absolutní hodnota) komplexního čísla je rovna r. Převodní vztahy jsou zřejmé z geometrie:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = y/x.$$

K číslu z zavádíme číslo komplexně sdružené z^* vztahem

$$z^* = x - \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = r(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Často jsou užitečné vztahy

$$z + z^* = 2x,$$
$$z - z^* = \mathrm{i}\cdot 2y,$$
$$zz^* = |z|^2 = r^2.$$

Hodnotu funkce s komplexním argumentem získáme např. dosazením dvojčlenu $x + \mathrm{i}y$ do jejího rozvoje. Ověřte si sami, že platí

$$\mathrm{i}^0 = 1; \quad \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}; \quad \mathrm{i}^2 = -1; \quad \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}; \quad \mathrm{i}^4 = 1;$$
$$\mathrm{i}^{4k+m} = \mathrm{i}^m, \ k, m \text{ přirozená čísla}, \ m < 4;$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1; \quad \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1;$$
$$\sqrt{\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm \mathrm{i});$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi.$$

Přirozený logaritmus ln (o základě e, nikoli 10) komplexního čísla je rovněž komplexní číslo. Pro libovolné komplexní číslo $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ a pro libovolné přirozené číslo k platí

$$\ln z = \ln r + \mathrm{i}(\varphi + 2k\pi).$$

Ověřte si, že $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\pi/2} \doteq 0{,}208$.

VEKTORY

Označme $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ jednotkové vektory ve směrech os x, y a z. Pak platí

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1,$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0,$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 0,$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

Pro vektor $\boldsymbol{a}$ o složkách a_x, a_y a a_z platí

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},$$
$$a_x = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}; \quad a_y = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}; \quad a_z = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}.$$

Nechť θ je menší z úhlů sevřených vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Potom platí

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos\theta,$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$
$$= \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$
$$= (a_yb_z - b_ya_z)\boldsymbol{i} + (a_zb_x - b_za_x)\boldsymbol{j} + (a_xb_y - b_xa_y)\boldsymbol{k},$$
$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = ab\sin\theta.$$

Pro vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ a skalár s platí:

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}),$$
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}),$$
$$(s\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(s\boldsymbol{b}) = s(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = s(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}),$$
$$(s\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times(s\boldsymbol{b}) = s(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = -s(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}),$$
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

Známe-li skalární i vektorový součin neznámého vektoru $\boldsymbol{v}$ se známým nenulovým vektorem $\boldsymbol{a}$, můžeme vždy jednoznačně určit vektor $\boldsymbol{v}$: Jestliže $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = \gamma$ a $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, pak platí

$$\boldsymbol{v} = (\gamma\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})/a^2.$$

Řešení představuje rozklad vektoru $\boldsymbol{v}$ na průmět rovnoběžný s $\boldsymbol{a}$ a průmět kolmý k $\boldsymbol{a}$.

DERIVACE A INTEGRÁLY

Názorný význam derivace jako směrnice křivky a integrálu jako plochy pod grafem funkce je rozebrán v bodu 2.5 a 7.1.

V následujících vzorcích představují u, v funkce proměnné x; w je funkcí y a y je funkcí t; a, b a m jsou konstanty. Ke každému neurčitému integrálu můžeme přičíst libovolnou integrační konstantu. Derivace a primitivní funkce (tj. integrál jako funkce své horní meze) jsou navzájem „inverzní“ operace: derivace primitivní funkce dává zpět původní funkci.

„Gramatika“

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(au \pm bv) = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u \pm b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}uv = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \quad \text{derivace součinu}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w(y(t)) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad \text{derivace složené funkce}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 1 \Big/ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad \text{derivace inverzní funkce } x(u)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x u(x')\,\mathrm{d}x' = u(x); \quad \text{stručně se psává}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int u(x)\,\mathrm{d}x = u(x)$$

$$\int (au \pm bv)\,\mathrm{d}x = a\int u\,\mathrm{d}x \pm b\int v\,\mathrm{d}x$$

$$\int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = uv - \int \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v\,\mathrm{d}x \quad \text{„per partes“}$$

$$\int w(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int W(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{substituce,}$$

kde W je složená funkce $W(t) = w(y(t))$.

„Slovník“

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^m = mx^{m-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin u = \cos u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos u = -\sin u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$\int \mathrm{d}x = x$$

$$\int x^m\,\mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$$

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}$$

$$\int x\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^2}(ax+1)\mathrm{e}^{-ax}$$

$$\int x^2\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 1)\mathrm{e}^{-ax}$$

$$\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\int_0^\infty x^{2n}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

Vhodný výklad potřebné matematiky naleznete např. v knize Jozef Kvasnica, *Matematický aparát fyziky*, 2. opr. vydání, Academia, Praha 1997.

Dodatek F
Vlastnosti prvků

Z protonové číslo; m_m molární hmotnost; ϱ hustota; T_t teplota tání; T_v teplota varu; c_p měrná tepelná kapacita při stálém tlaku. Všechny fyzikální vlastnosti jsou za standardních podmínek, není-li uvedeno jinak.

Prvek	Značka	Z	m_m / g·mol^{-1}	ϱ / g·cm^{-3}	T_t / °C	T_v / °C	c_p / J·g^{-1}·K^{-1}
Aktinium	Ac	89	(227)	10,06	1323	(3473)	0,092
Americium	Am	95	(243)	13,67	1541	—	—
Antimon	Sb	51	121,75	6,691	630,5	1380	0,205
Argon	Ar	18	39,948	$1{,}6626\cdot10^{-3}$	−189,4	−185,8	0,523
Arsen	As	33	74,9216	5,78	817 (28 atm)	613	0,331
Astat	At	85	(210)	—	(302)	—	—
Baryum	Ba	56	137,34	3,594	729	1640	0,205
Berkelium	Bk	97	(247)	14,79	—	—	—
Beryllium	Be	4	9,0122	1,848	1287	2770	1,83
Bismut	Bi	83	208,980	9,747	271,37	1560	0,122
Bor	B	5	10,811	2,34	2030	—	1,11
Brom	Br	35	79,909	3,12 (kapalný)	−7,2	58	0,293
Cer	Ce	58	140,12	6,768	804	3470	0,188
Cesium	Cs	55	132,905	1,873	28,40	690	0,243
Cín	Sn	50	118,69	7,2984	231,868	2270	0,226
Curium	Cm	96	(247)	13,3	—	—	—
Draslík	K	19	39,102	0,862	63,20	760	0,758
Dusík	N	7	14,0067	$1{,}1649\cdot10^{-3}$	−210	−195,8	1,03
Dysprosium	Dy	66	162,50	8,55	1409	2330	0,172
Einsteinium	Es	99	(254)	—	—	—	—
Erbium	Er	68	167,26	9,15	1522	2630	0,167
Europium	Eu	63	151,96	5,243	817	1490	0,163
Fermium	Fm	100	(237)	—	—	—	—
Fluor	F	9	18,9984	$1{,}696\cdot10^{-3}$ (0 °C)	−219,6	−188,2	0,753
Fosfor	P	15	30,9738	1,83	44,25	280	0,741
Francium	Fr	87	(223)	—	(27)	—	—
Gadolinium	Gd	64	157,25	7,90	1312	2730	0,234
Gallium	Ga	31	69,72	5,907	29,75	2237	0,377
Germanium	Ge	32	72,59	5,323	937,25	2830	0,322
Hafnium	Hf	72	178,49	13,31	2227	5400	0,144
Hahnium	Ha	105	—	—	—	—	—
Hassium	Hs	108	—	—	—	—	—
Helium	He	2	4,0026	$0{,}1664\cdot10^{-3}$	−269,7	−268,9	5,23
Hliník	Al	13	26,9815	2,699	660	2450	0,900
Holmium	Ho	67	164,930	8,79	1470	2330	0,165
Hořčík	Mg	12	24,312	1,738	650	1107	1,03
Chlor	Cl	17	35,453	$3{,}214\cdot10^{-3}$ (0 °C)	−101	−34,7	0,486
Chrom	Cr	24	51,996	7,19	1857	2665	0,448
Indium	In	49	114,82	7,31	156,634	2000	0,233
Iridium	Ir	77	192,2	22,5	2447	(5300)	0,130
Jod	I	53	126,9044	4,93	113,7	183	0,218
Kadmium	Cd	48	112,401	8,65	321,03	765	0,226
Kalifornium	Cf	98	(251)	—	—	—	—
Kobalt	Co	27	58,9332	8,85	1495	2900	0,423

Pokračování na další straně

PRVEK	ZNAČKA	Z	m_m / g·mol^{-1}	ϱ / g·cm^{-3}	T_t / °C	T_v / °C	c_p / J·g^{-1}·K^{-1}
Kyslík	O	8	15,9994	$1{,}3318\cdot10^{-3}$	−218,80	−183,0	0,913
Krypton	Kr	36	83,80	$3{,}488\cdot10^{-3}$	−157,37	−152	0,247
Křemík	Si	14	28,086	2,33	1412	2680	0,712
Lanthan	La	57	138,91	6,189	920	3470	0,195
Lawrencium	Lr	103	(257)	—	—	—	—
Lithium	Li	23	6,939	0,534	180,55	1300	3,58
Lutecium	Lu	71	174,97	9,849	1663	1930	0,155
Mangan	Mn	25	54,9380	7,44	1244	2150	0,481
Meitnerium	Mt	109	—	—	—	—	—
Mendelevium	Md	101	(256)	—	—	—	—
Měď	Cu	29	63,54	8,96	1083,40	2595	0,385
Molybden	Mo	42	95,94	10,22	2617	5560	0,251
Neodym	Nd	60	144,24	7,007	1016	3180	0,188
Neon	Ne	10	20,183	$0{,}8387\cdot10^{-3}$	−248,597	−246,0	1,03
Neptunium	Np	93	(237)	20,25	637	—	1,26
Nielsbohrium	Ns	107	—	—	—	—	—
Nikl	Ni	28	58,71	8,902	1453	2730	0,444
Niob	Nb	41	92,906	8,57	2468	4927	0,264
Nobelium	No	102	(255)	—	—	—	—
Olovo	Pb	82	207,19	11,35	327,45	1725	0,129
Osmium	Os	76	190,2	22,59	3027	5500	0,130
Palladium	Pd	46	106,4	12,02	1552	3980	0,243
Platina	Pt	78	195,05	21,45	1769	4530	0,134
Plutonium	Pu	94	(244)	19,8	640	3235	0,130
Polonium	Po	84	(210)	9,32	254	—	—
Praseodym	Pr	59	140,907	6,773	931	3020	0,197
Promethium	Pm	61	(145)	7,22	(1027)	—	—
Protaktinium	Pa	91	(231)	15,37 (odhad)	(1230)	—	—
Radium	Ra	88	(226)	5,0	700	—	—
Radon	Rn	85	(222)	$9{,}96\cdot10^{-3}$ (0 °C)	(−71)	−61,8	0,092
Rhenium	Re	75	186,2	21,02	3180	5900	0,134
Rhodium	Rh	45	102,905	12,41	1963	4500	0,243
Rtuť	Hg	80	200,59	13,55	−38,87	357	0,138
Rubidium	Rb	37	85,47	1,532	39,49	688	0,364
Ruthenium	Ru	44	101,107	12,37	2250	4900	0,239
Rutherfordium	Rf	104	—	—	—	—	—
Samarium	Sm	62	150,35	7,52	1072	1630	0,197
Seaborgium	Sg	106	—	—	—	—	—
Selen	Se	34	78,96	4,79	221	685	0,318
Síra	S	16	32,064	2,07	119,0	444,6	0,707
Skandium	Sc	21	44,956	2,99	1539	2730	0,569
Sodík	Na	11	22,9898	0,9712	97,85	892	1,23
Stroncium	Sr	38	87,62	2,54	768	1380	0,737
Stříbro	Ag	47	107,870	10,49	960,8	2210	0,234
Tantal	Ta	73	180,948	16,6	3014	5425	0,138
Thallium	Tl	81	204,37	11,85	304	1457	0,130
Thorium	Th	90	(232)	11,72	1755	(3850)	0,117
Thulium	Tm	69	168,934	9,32	1545	1720	0,159
Technecium	Tc	43	(99)	11,46	2200	—	0,209
Tellur	Te	52	127,60	6,24	449,5	990	0,201
Terbium	Tb	65	158,924	8,229	1357	2530	0,180
Titan	Ti	22	47,90	4,54	1670	3260	0,523
Uhlík	C	6	12,01115	2,26	3727	4830	0,691
Uran	U	92	(238)	18,95	1132	3818	0,117

Pokračování na další straně

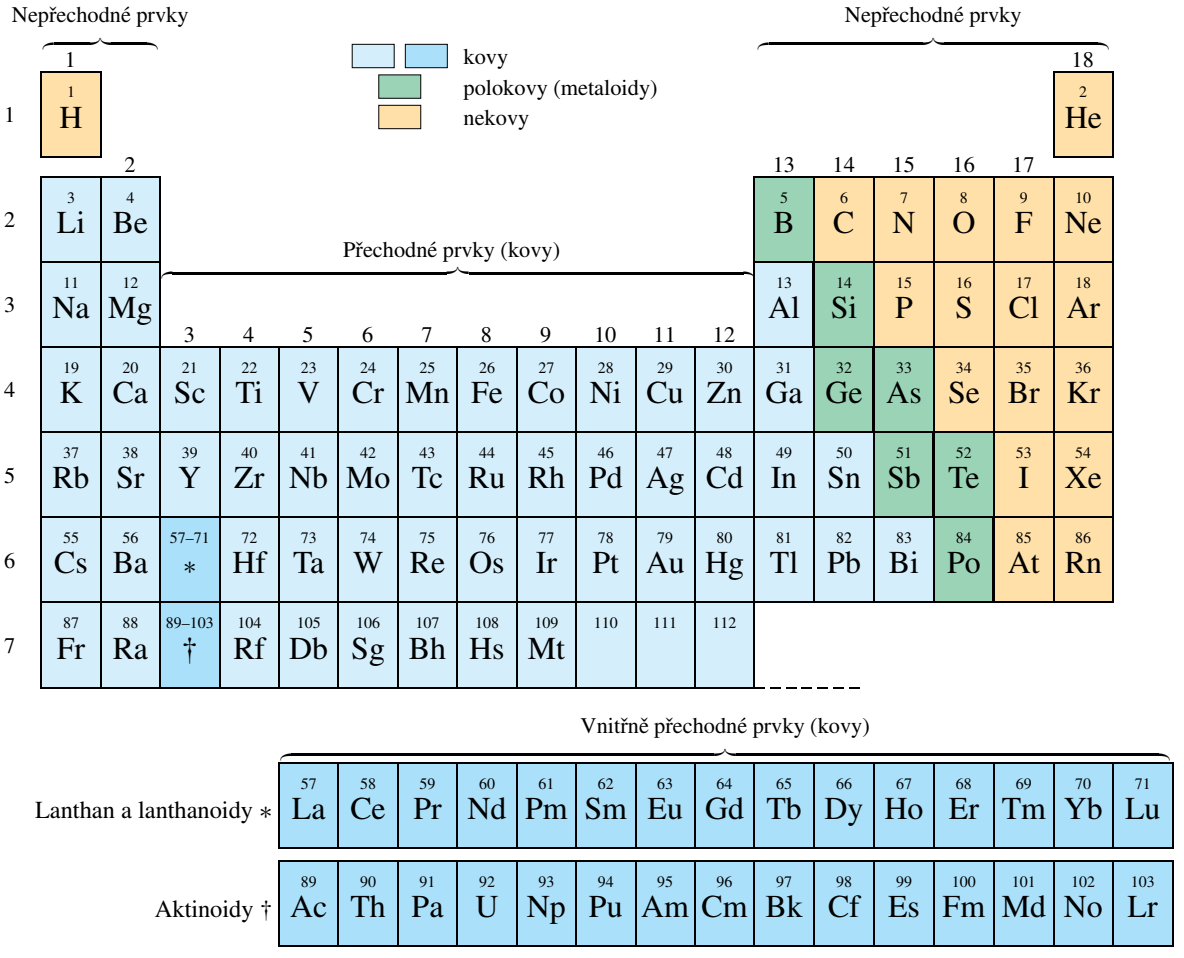
PRVEK	ZNAČKA	Z	$\frac{m_\mathrm{m}}{\mathrm{g\cdot mol^{-1}}}$	$\frac{\varrho}{\mathrm{g\cdot cm^{-3}}}$	$\frac{T_\mathrm{t}}{^\circ\mathrm{C}}$	$\frac{T_\mathrm{v}}{^\circ\mathrm{C}}$	$\frac{c_p}{\mathrm{J\cdot g^{-1}\cdot K^{-1}}}$
Vanad	V	23	50,942	6,11	1902	3400	0,490
Vápník	Ca	20	40,08	1,55	838	1440	0,624
Vodík	H	1	1,00797	$0{,}08375\cdot10^{-3}$	−259,19	−252,7	14,4
Wolfram	W	74	183,85	19,3	3380	5930	0,134
Xenon	Xe	54	131,30	$5{,}495\cdot10^{-3}$	−111,79	−108	0,159
Ytterbium	Yb	70	173,04	6,965	824	1530	0,155
Yttrium	Y	39	88,905	4,469	1526	3030	0,297
Zinek	Zn	30	65,37	7,133	419,58	906	0,389
Zirkon	Zr	40	91,22	6,506	1852	3580	0,276
Zlato	Au	79	196,967	19,32	1064,43	2970	0,131
Železo	Fe	26	55,847	7,874	1536,5	3000	0,447

Hodnoty v závorce ve sloupci molárních hmotností jsou hmotnostní čísla izotopu radioaktivního prvku s největším poločasem rozpadu. Teploty tání a varu v závorkách jsou nejisté.

Hodnoty pro plyny jsou platné jen pro jejich běžné molekulární stavy, jako např. H_2, He, O_2, Ne atd.

Zdroj: Upraveno podle Wehr, Richards, Adair, *Physics of Atom*, 4th ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1984, a podle J. Emsley, *The Elements*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1991.

Dodatek G
Periodická soustava prvků



Periodická soustava se též nazývá **Mendělejevova tabulka** podle ruského přírodovědce D. I. Mendělejeva, který ji kolem r. 1869 sestavil (v poněkud jiné podobě).

Podle doporučení názvoslovné komise IUPAC se sloupce (zvané též skupiny) průběžně číslují od 1 do 18 (dřívější dělení na podskupiny A, B bylo různé v Evropě a v USA). Speciální skupinové názvy:

Prvky s-bloku: sloupce 1 a 2.

Prvky d-bloku, též přechodné prvky (kovy): ze 3. sloupce ^{21}Sc a ^{39}Y, dále celé sloupce 4–12.

Prvky f-bloku, též vnitřně přechodné prvky (kovy): lanthan ^{57}La, **lanthanoidy** ^{58}Ce až ^{71}Lu a **aktinoidy** ^{89}Ac až ^{103}Lr.

Prvky p-bloku: sloupce 13 až 18.

Další názvy sloupců: sloupec 1 (dříve I A) ^{3}Li až ^{87}Fr: **alkalické kovy**;

sloupec 2 (dříve II A) ^{20}Ca až ^{88}Ra, někdy i ^{4}Be a ^{12}Mg: **kovy alkalických zemin**;

sloupec 3 (dříve III B): **vzácné zeminy**;

sloupec 15 (dříve V A): **pniktidy**;

sloupec 16 (dříve VI A) ^{16}S až ^{84}Po, často i ^{8}O: **chalkogeny**;

sloupec 17 (dříve VII A): **halogeny**;

sloupec 18 (dříve 0): **vzácné** neboli **netečné plyny** (ačkoliv nejsou ani vzácné — argonu je ve vzduchu kolem 1 %, ani netečné — z novější doby známe sloučeniny xenoničelany, oxidy a fluoridy xenonu aj.).

Prvky následující za uranem (od ^{93}Np) se nazývají **transurany**. Prvky za ^{109}Mt zatím nemají dohodnutá jména. Možná se setkáte i s označením **triáda železa** (^{26}Fe, ^{27}Co, ^{28}Ni) a platinové kovy: lehké (^{44}Ru, ^{45}Rh, ^{46}Pd) a těžké (^{76}Os, ^{77}Ir, ^{78}Pt).

Dodatek H
Nositelé Nobelových cen za fyziku*

1901 Wilhelm Conrad Röntgen *(1845–1923)* za objev paprsků X (nyní zvaných rentgenové záření)

1902 Hendrik Antoon Lorentz *(1853–1928)* a Pieter Zeeman *(1865–1943)* za výzkum vlivu magnetismu na záření

1903 Antoine Henri Becquerel *(1852–1908)* za objev přirozené radioaktivity

Pierre Curie *(1859–1906)* a Marie Sklodowska-Curie *(1867–1934)* za společný výzkum záření objeveného Becquerelem

1904 Lord Rayleigh (John William Strutt) *(1842–1919)* za zkoumání hustoty nejdůležitějších plynů a za objev argonu

1905 Philipp Eduard Anton von Lenard *(1862–1947)* za výzkum katodových paprsků

1906 Joseph John Thomson *(1856–1940)* za teoretický a experimentální výzkum elektrické vodivosti plynů

1907 Albert Abraham Michelson *(1852–1931)* za přesné optické přístroje a za spektroskopické a metrologické výzkumy, které s jejich pomocí provedl

1908 Gabriel Lippmann *(1845–1921)* za objev metody barevné fotografe založené na interferenci světla

1909 Guglielmo Marconi *(1874–1937)* a Carl Ferdinand Braun *(1850–1918)* za příspěvky k rozvoji bezdrátové telegrafie

1910 Johannes Diderik van der Waals *(1837–1932)* za práci o stavové rovnici plynů a kapalin

1911 Wilhelm Wien *(1864–1928)* za objevy týkající se zákonů tepelného záření

1912 Nils Gustaf Dalén *(1869–1937)* za vynález acetylenového akumulátoru a automatického regulátoru osvětlení pro majáky a bóje

1913 Heike Kamerlingh-Onnes *(1853–1926)* za výzkum vlastností látek při nízkých teplotách, který mj. vedl ke zkapalnění helia

1914 Max von Laue *(1879–1960)* za objev difrakce rentgenového záření na krystalech

1915 William Henry Bragg *(1862–1942)* a William Lawrence Bragg *(1890–1971)* za výzkum struktury krystalů pomocí rentgenového záření

1916 Nobelova cena nebyla udělena

1917 Charles Glover Barkla *(1877–1944)* za objev charakteristického rentgenového záření prvků

1918 Max Planck *(1858–1947)* za objev energiových kvant

1919 Johannes Stark *(1874–1957)* za objev Dopplerova jevu v kanálových paprscích (tvořených kladnými ionty zbytků plynu ve výbojové trubici) a rozštěpení spektrálních čar v elektrickém poli

1920 Charles-Édouard Guillaume *(1861–1938)* za objev anomálií niklových ocelí a jeho využití pro získání ideálního materiálu pro přesná mechanická měřidla (invar)

1921 Albert Einstein *(1879–1955)* za příspěvky k teoretické fyzice, zejména za formulaci zákona popisujícího fotoelektrický jev

1922 Niels Bohr *(1885–1962)* za výzkum struktury atomů a záření jimi vysílaného

1923 Robert Andrews Millikan *(1868–1953)* za práce o elementárním elektrickém náboji a o fotoelektrickém jevu

1924 Karl Manne Georg Siegbahn *(1888–1978)* za objevy a výzkum v oblasti rentgenové spektroskopie

1925 James Franck *(1882–1964)* a Gustav Hertz *(1887–1975)* za objev zákonů pro srážky elektronu s atomem

1926 Jean Baptiste Perrin *(1870–1942)* za práci o nespojité struktuře hmoty a zejména za objev sedimentační rovnováhy

1927 Arthur Holly Compton *(1892–1962)* za objev jevu, který nyní nese jeho jméno

Charles Thomson Rees Wilson *(1869–1959)* za metodu zviditelnění dráhy elektricky nabitých částic pomocí kondenzace páry

1928 Owen Willans Richardson *(1879–1959)* za práci o termoemisi a zvláště za formulaci zákona nyní pojmenovaného po něm

1929 Prince Louis Victor de Broglie *(1892–1987)* za objev vlnové povahy elektronů

1930 Sir Chandrasekhara Venkata Raman *(1888–1970)* za práci o rozptylu světla a za objev jevu nyní pojmenovaného po něm

1931 Nobelova cena nebyla udělena

---

* Biografie oceněných a jejich přednášky při přebírání ceny viz *Nobel Lectures, Physics*, 1901–1970, Elsevier Publishing Company; český seznam s fotografiemi je v Čs. čas. fyz., *(4)*, 1995, po r. 1970 publikuje Čs. čas. fyz. též texty přednášek; srv. též www.nobel.se/physics.

1932 Werner Heisenberg *(1901–1976)* za formulaci kvantové mechaniky, jejíž použití vedlo mj. k objevu alotropních forem vodíku

1933 Erwin Schrödinger *(1887–1961)* a Paul Adrien Maurice Dirac *(1902–1984)* za nové formulace atomové teorie

1934 Nobelova cena nebyla udělena

1935 James Chadwick *(1891–1974)* za objev neutronu

1936 Victor Franz Hess *(1883–1964)* za objev kosmického záření

Carl David Anderson *(1905–1991)* za objev pozitronu

1937 Clinton Joseph Davisson *(1881–1958)* a George Paget Thomson *(1892–1975)* za experimentální důkaz difrakce elektronů na krystalech

1938 Enrico Fermi *(1901–1954)* za prokázání nových radioaktivních prvků produkovaných ozářením neutrony a s tím spojený objev jaderných reakcí způsobených pomalými neutrony

1939 Ernest Orlando Lawrence *(1901–1958)* za vynález a zdokonalování cyklotronu a za výsledky pomocí něj získané, zejména za uměle vyrobené radioaktivní prvky

1943 Otto Stern *(1888–1969)* za příspěvek k vývoji metody molekulových paprsků a za objev magnetického momentu protonu

1944 Isidor Isaac Rabi *(1898–1988)* za rezonanční metodu zaznamenávání magnetických vlastností atomových jader

1945 Wolfgang Pauli *(1900–1958)* za formulaci vylučovacího principu (zvaného též Pauliho princip)

1946 Percy Williams Bridgman *(1882–1961)* za sestrojení aparatury k přípravě extrémně vysokých tlaků a za objevy v oblasti fyziky vysokých tlaků díky tomu učiněné

1947 Sir Edward Victor Appleton *(1892–1965)* za výzkum ve fyzice horních vrstev atmosféry, zejména za objev tzv. Appletonovy vrstvy

1948 Patrick Maynard Stuart Blackett *(1897–1974)* za zdokonalení Wilsonovy mlžné komory a s tím spojené objevy v jaderné fyzice a v kosmickém záření

1949 Hideki Yukawa *(1907–1981)* za předpověď existence mezonů na základě teoretického rozboru jaderných sil

1950 Cecil Frank Powell *(1903–1969)* za zdokonalení fotografické metody studia jaderných procesů a za touto metodou učiněné objevy týkající se mezonů

1951 Sir John Douglas Cockcroft *(1897–1967)* a Ernest Thomas Sinton Walton *(1903–1995)* za transmutaci atomových jader uměle urychlenými atomovými částicemi

1952 Felix Bloch *(1905–1983)* a Edward Mills Purcell *(*1912)* za příspěvky k rozvoji jaderné magnetické rezonance a za objevy s tímto spojené

1953 Frits Zernike *(1888–1966)* za demonstraci metody fázového kontrastu, a zejména za vynález mikroskopu založeném na fázovém kontrastu

1954 Max Born *(1882–1970)* za zásadní výzkum v kvantové mechanice, zejména za statistickou interpretaci vlnové funkce

Walther Bothe *(1891–1957)* za metodu koincidence a s ní související objevy

1955 Willis Eugene Lamb *(*1913)* za objevy týkající se jemné struktury spektra vodíku

Polykarp Kush *(1911–1993)* za přesné určení magnetického momentu elektronu

1956 William Shockley *(1910–1989)*, John Bardeen *(1908 až 1991)* a Walter Houser Brattain *(1902–1987)* za výzkum polovodičů a objev tranzistorového jevu

1957 Chen Ning Yang *(*1922)* a Tsung Dao Lee *(*1926)* za zkoumání zákonů parity, které vedlo k významným objevům týkajícím se elementárních částic

1958 Pavel Aleksejevič Čerenkov *(1904–1990)*, Il'ja Michajlovič Frank *(1908–1990)* a Igor' Evgeněvič Tamm *(1895 až 1971)* za objev a interpretaci Čerenkovova jevu

1959 Emilio Gino Segrè *(1905–1989)* a Owen Chamberlain *(*1920)* za objev antiprotonu

1960 Donald Arthur Glaser *(*1926)* za vynález bublinové komory

1961 Robert Hofstadter *(1915–1990)* za průkopnická pozorování rozptylu elektronů na jádrech atomů a tím určené tvary a velikosti nukleonů

Rudolf Ludwig Mössbauer *(*1929)* za výzkum rezonanční absorpce γ-záření a s tím spojený objev jevu, jenž je po něm pojmenován

1962 Lev Davidovič Landau *(1908–1968)* za objevitelské teorie týkajících se kondenzovaného stavu hmoty, a především kapalného helia

1963 Eugene P. Wigner *(1902–1995)* za příspěvek k teorii atomového jádra a elementárních částic, a to objevem a aplikací základních principů symetrie

Maria Goeppert Mayer *(1906–1972)* a J. Hans D. Jensen *(1907–1973)* za vypracování modelu slupkové struktury jádra

1964 Charles H. Townes *(*1915)*, Nicolai G. Basov *(*1922)* a Alexander M. Prochorov *(*1916)* za základní práce v oblasti kvantové elektroniky, které vedly ke konstrukci maseru a laseru

1965 Sin-itiro Tomonaga *(1906–1979)*, Julian Schwinger *(1918 až 1994)* a Richard P. Feynman *(1918–1988)* za zásadní práci v kvantové elektrodynamice, s dalekosáhlými důsledky ve fyzice elementárních částic

1966 Alfred Kastler *(1902–1984)* za objev a rozvíjení optických metod ke studiu Hertzovy rezonance v atomech

1967 Hans Albrecht Bethe *(*1906)* za příspěvek k teorii jaderných reakcí, zejména objevy týkající se produkce energie ve hvězdách

1968 Luis W. Alvarez *(1911–1988)* za rozhodující příspěvek k fyzice elementárních částic, především za objev velkého počtu rezonancí díky jím zdokonalené vodíkové bublinové komory a analýze z ní získaných dat

1969 Murray Gell-Mann *(*1929)* za příspěvky a objevy týkající se klasifikace elementárních částic a jejich interakcí

1970 Hannes Alfvén *(1908–1995)* za základní práci a objevy v magnetohydrodynamice s bohatým využitím v různých oblastech fyziky plazmatu

Louis Néel *(*1904)* za významnou práci a objevy týkající se antiferomagnetismu a ferimagnetismu, které vedly k důležitým aplikacím ve fyzice pevných látek

1971 Dennis Gabor *(1900–1979)* za vynález a rozvoj holografie

1972 John Bardeen *(1908–1991)*, Leon N. Cooper *(*1930)* a J. Robert Schrieffer *(*1931)* za společně vypracovanou teorii supravodivosti, běžně nazývanou BBS-teorií

1973 Leo Esaki *(*1925)* za objev tunelového jevu v polovodičích

Ivar Giaever *(*1929)* za objev tunelového jevu v supravodičích

Brian D. Josephson *(*1940)* za teoretickou předpověď vlastností supravodivého proudu tunelovou bariérou, speciálně těch jevů, které jsou nyní obecně známé jako Josephsonovy jevy

1974 Antony Hewish *(*1924)* za objev pulzarů

Sir Martin Ryle *(1918–1984)* za průkopnickou práci v radioastronomii

1975 Aage Bohr *(*1922)*, Ben Mottelson *(*1926)* a James Rainwater *(1917–1986)* za objev vztahu mezi kolektivním pohybem a pohybem individuálních částic v atomových jádrech a za rozvoj teorie struktury jádra atomu na základě tohoto vztahu

1976 Burton Richter *(*1931)* a Samuel Chao Chung Ting *(*1936)* za objev těžkých elementárních částic nového druhu

1977 Phillip Warren Anderson *(*1923)*, Nevill Francis Mott *(1905–1996)* a John Hasbrouck Van Vleck *(1899–1980)* za významný teoretický výzkum elektronové struktury magnetických a neuspořádaných systémů

1978 Pjotr L. Kapica *(1894–1984)* za základní objevy a vynálezy ve fyzice nízkých teplot

Arno A. Penzias *(*1933)* a Robert Woodrow Wilson *(*1936)* za objev reliktního mikrovlnného kosmického záření

1979 Sheldon Lee Glashow *(*1932)*, Abdus Salam *(1926–1996)* a Steven Weinberg *(*1933)* za model sjednocující slabé a elektromagnetické interakce a předpověď existence neutrálních proudů

1980 James W. Cronin *(*1931)* a Val L. Fitch *(*1923)* za objev porušení základních principů symetrie při rozpadu kaonů

1981 Nicolaas Bloembergen *(*1920)* a Arthur Leonard Schawlow *(*1921)* za příspěvek k rozvoji laserové spektroskopie

Kai M. Siegbahn *(*1918)* za rozvoj laserové spektroskopie s vysokým rozlišením

1982 Kenneth Geddes Wilson *(*1936)* za teorii kritických jevů ve vztahu k fázovým změnám

1983 Subrehmanyan Chandrasekhar *(1910–1995)* za teoretické studium struktury a vývoje hvězd

William A. Fowler *(1911–1995)* za studium vzniku chemických prvků ve vesmíru

1984 Carlo Rubbia *(*1934)* a Simon van der Meer *(*1925)* za rozhodující příspěvky k velkému projektu, který vedl k objevu polních částic W a Z, zprostředkujících slabou interakci

1985 Klaus von Klitzing *(*1943)* za objev kvantového Hallova jevu

1986 Ernst Ruska *(1906–1988)* za vynález elektronového mikroskopu

Gerd Binnig *(*1947)* a Heinrich Rohrer *(*1933)* za vynález řádkovacího tunelového mikroskopu

1987 Karl Alex Müller *(*1927)* a J. George Bednorz *(*1950)* za průkopnický objev supravodivosti v keramických materiálech

1988 Leon M. Lederman *(*1922)*, Melvin Schwartz *(*1932)* a Jack Steinberger *(*1921)* za první použití svazku neutrin a za objev mionového neutrina

1989 Norman Ramsey *(*1915)*, Hans Dehmelt *(*1922)* a Wolfgang Paul *(1913–1993)* za práci, která vedla k rozvoji atomových hodin a přesného měření času

1990 Jerome I. Friedman *(*1930)*, Henry W. Kendall *(*1926)* a Richard E. Taylor *(*1929)* za základní práce týkající se nepružného rozptylu elektronů na protonech a vázaných neutronech, které umožnily rozvoj kvarkového modelu v částicové fyzice

1991 Pierre de Gennes *(*1932)* za objev, že metody rozvinuté pro studium jiných jevů v jednoduchých systémech mohou být zobecněny na komplexnější formy hmoty, zejména na tekuté krystaly a polymery

1992 George Charpak *(*1924)* za vynález a vývoj detektorů částic, zejména vícedrátové proporcionální komory

1993 Joseph H. Taylor *(*1941)* a Russel A. Hulse *(*1950)* za objev nového typu pulzaru, objevu, který dává nové možnosti pro studium gravitace

1994 za rozvoj metod rozptylu neutronů pro studium kondenzovaných látek

Bertram N. Brockhouse *(*1918)* za rozvoj neutronové spektroskopie

Clifford G. Shull *(*1915)* za rozvoj neutronových difrakčních metod

1995 za průkopnické experimentální příspěvky k fyzice leptonů

Martin L. Perl *(*1927)* za objev leptonu τ (tauonu)

Frederick Reines *(*1918)* za detekci neutrina

1996 David M. Lee *(*1931)*, Robert C. Richardson *(*1937)* a Douglas D. Oscheroff *(*1944)* za objev supratekutosti helia-3

1997 Steven Chu *(*1948)*, Claude Cohen-Tannoudji *(*1933)* a William D. Phillips *(*1948)* za vývoj metod pro ochlazení a záchyt atomů laserovým světlem

1998 Robert B. Laughlin *(*1950)*, Horst L. Stormer *(*1949)* a Daniel C. Tsui *(*1939)* za objev nové formy kvantové tekutiny s excitacemi nesoucími zlomkový náboj

1999 Gerardus 't Hooft *(*1946)* a Martinus J. G. Veltman *(*1931)* za objasnění kvantové struktury elektroslabých interakcí

2000 za základní práce, které přispěly k informačním a komunikačním technologiím

Žores I. Alferov *(*1930)*, Herbert Kroemer *(*1928)* za vývoj polovodičových heterostruktur používaných v optoelektronice a velmi rychlých elektronických obvodech

Jack S. Kilby *(*1923)* za příspěvek k vývoji integrovaných obvodů

Výsledky

Kapitola 1

CVIČENÍ A ÚLOHY **3.** (a) 186 mi; (b) $3{,}0{\cdot}10^8$ mm. **5.** (a) $1{\cdot}10^9$; (b) $1{\cdot}10^{-4}$; (c) $9{,}1{\cdot}10^5$. **7.** 32,2 km. **9.** 0,020 km^3. **11.** (a) 250 ft^2; (b) 23,3 m^2; (c) 3 060 ft^3; (d) 86,6 m^3. **13.** 844 km. **15.** (a) 460 $\mathrm{ft}^2/\mathrm{gal}$; (b) $1{,}13{\cdot}10^4\ \mathrm{m}^{-1}$; (c) $2{,}17{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{gal{\cdot}ft}^{-2}$. **17.** (a) $d_\mathrm{S}/d_\mathrm{M} = 400$; (b) $V_\mathrm{S}/V_\mathrm{M} = 6{,}4{\cdot}10^7$; (c) $3{,}5{\cdot}10^3$ km. **19.** (a) $0{,}98\ \mathrm{ft{\cdot}ns}^{-1}$; (b) $0{,}30\ \mathrm{mm{\cdot}ps}^{-1}$. **21.** $3{,}156{\cdot}10^7$ s oproti $3{,}142{\cdot}10^7$ s, rozdíl $< \frac{1}{2}$ %. **23.** $5{,}79{\cdot}10^{12}$ d (dnů). **25.** (a) 0,013; (b) 0,54; (c) 10,3; (d) 31 (vesměs $\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$). **27.** 15°; 1 450 km. **29.** 3,3 ft. **31.** O 2 dny 5 hodin; zahrnuje i pohyb Země kolem Slunce. **33.** (a) $2{,}8{\cdot}10^{-26}$ kg; (b) $4{,}7{\cdot}10^{46}$. **35.** $1{,}3{\cdot}10^9$ kg. **37.** (a) $1{\cdot}10^3\ \mathrm{kg{\cdot}m}^{-3}$; (b) $158\ \mathrm{kg{\cdot}s}^{-1}$. **39.** (a) $1{,}18{\cdot}10^{-29}\ \mathrm{m}^3$; (b) 0,228 nm.

Kapitola 2

KONTROLY **1.** b, c. **2.** $0\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$. **3.** (a) 1 a 4; (b) 2 a 3; (c) 3. **4.** (a) +; (b) −; (c) −; (d) +. **5.** 1 a 4. **6.** (a) +; (b) −; (c) $a = -g = -9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-2}$.

OTÁZKY **1.** (a) Ano; (b) ne; (c) ano; (d) ano. **3.** (a) 2, 3; (b) 1, 3; (c) 4. **5.** Posunutí je u všech stejné (rov. 2.16). **7.** (a) $-g$; (b) $2\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$ směrem vzhůru. **9.** Rychlost je stejná. **11.** $x = t^2$ a $x = 8(t-2) + (1{,}5)(t-2)^2$. **13.** Vzdálenost roste.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) Lewis: $10{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$, Rodgers: $5{,}41\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$; (b) 1 h 10 min. **3.** 94 m. **5.** $2\ \mathrm{cm{\cdot}y}^{-1}$. **7.** $6{,}71{\cdot}10^8\ \mathrm{mi{\cdot}h}^{-1}$; $9{,}84{\cdot}10^8\ \mathrm{ft{\cdot}s}^{-1}$; $1{,}00\ \mathrm{ly{\cdot}y}^{-1}$. **9.** (a) $1{,}7\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$; (b) $2{,}1\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$. **11.** (a) 73 km/h; (b) 69 km/h; (c) 71 km/h; (d) 0 km/h. **13.** (a) $28{,}5\ \mathrm{cm{\cdot}s}^{-1}$; (b) $18{,}0\ \mathrm{cm{\cdot}s}^{-1}$; (c) $40{,}5\ \mathrm{cm{\cdot}s}^{-1}$; (d) $28{,}1\ \mathrm{cm{\cdot}s}^{-1}$; (e) $30{,}3\ \mathrm{cm{\cdot}s}^{-1}$. **15.** (a) V prvním přiblížení nekonečněkrát (zanedbáme-li vlastní rozměry ptáka, ztrátu času při obrátce atd.); (b) 60 km. **17.** (a) $4\ \mathrm{s} > t > 2\ \mathrm{s}$; (b) $3\ \mathrm{s} > t > 0$; (c) $7\ \mathrm{s} > t > 3\ \mathrm{s}$; (d) $t = 3\ \mathrm{s}$. **19.** 92 m. **23.** (a) Znaménka v a a jsou: AB: +, −; BC: 0, 0; CD: +, +; DE: +, 0; (b) ne; (c) ne. **25.** (e) Situace (a), (b) a (d). **27.** (a) $80\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$; (b) $110\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$; (c) $20\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-2}$. **29.** (a) $1{,}10\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$, $6{,}11\ \mathrm{mm{\cdot}s}^{-2}$; (b) $1{,}47\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$, $6{,}11\ \mathrm{mm{\cdot}s}^{-2}$. **31.** (a) 2,00 s; (b) 12 cm od levého okraje stínítka; (c) $9{,}00\ \mathrm{cm{\cdot}s}^{-2}$ doleva; (d) doprava; (e) doleva; (f) 3,46 s. **33.** 0,556 s. **35.** Oba $0{,}28\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-2}$. **37.** $2{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-2}$. **39.** $1{,}62{\cdot}10^{15}\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-2}$. **41.** $21g$. **43.** (a) $25g$; (b) 400 m. **45.** 90 m. **47.** (a) $5{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-2}$; (b) 4,0 s; (c) 6,0 s; (d) 90 m. **49.** (a) $5{,}00\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$; (b) $1{,}67\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-2}$; (c) 7,50 m. **51.** (a) 0,74 s; (b) $-6{,}1\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-2}$. **53.** (a) 0,75 s; (b) 50 m. **55.** (a) 10,6 m; (b) 41,6 s. **57.** (a) $0{,}99\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-2}$. **61.** (a) $31\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$; (b) 6,4 s. **63.** (a) $48{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$; (b) 4,95 s; (c) $34{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$; (d) 3,50 s. **65.** (a) 5,44 s; (b) $53{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$; (c) 5,80 m. **67.** (a) 3,2 s; (b) 1,3 s. **69.** $4{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$. **71.** (a) 350 ms; (b) 82 ms (každý pro vzestup a pokles o 15 cm). **73.** $857\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-2}$ směrem vzhůru. **75.** (a) 1,23 cm; (b) 4krát, 9krát, 16krát, 25krát. **77.** (a) $8{,}85\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$; (b) 1,00 m. **79.** 22 cm a 89 cm pod ústím. **81.** (a) 3,41 s; (b) 57 m. **83.** (a) $12{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-2}$. **85.** 1,5 s. **87.** (a) 5,4 s; (b) $41\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$. **89.** 20,4 m. **91.** (a) $d = v_{x,\mathrm{i}}^2/2a' + T_\mathrm{R} v_{x,\mathrm{i}}$; (b) $9{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-2}$; (c) 0,66 s. **93.** (a) $v_j^2 = 2a'd_0(j-1) + v_1^2$; (c) $7{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-2}$; (d) 14 m.

Kapitola 3

KONTROLY **1.** (a) 7 m; (b) 1 m. **2.** c, d, f. **3.** (a) +, +; (b) +, −; (c) +, +. **4.** (a) 90°; (b) 0 (vektory jsou souhlasně rovnoběžné); (c) 180° (nesouhlasně rovnoběžné). **5.** (a) 0° nebo 180°; (b) 90°.

OTÁZKY **1.** A a B. **3.** Odčítání komutativní není, ale sčítání $(a) + (-b)$ je: $a + (-b) = (-b) + a$. **5.** (a) $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou rovnoběžné; (b) $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$; (c) $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou na sebe kolmé. **7.** (a) až (c) ano (příklad: $5\boldsymbol{i}$ a $-2\boldsymbol{i}$). **9.** Všechny kromě e. **11.** (a) −, −; (b) −, −. **13.** (a) $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{E}$; (b) $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{E}$. **15.** Ne (mohou mít nejrůznější směry). **17.** (a) $\boldsymbol{0}$ (vektory jsou souhlasně rovnoběžné); (b) $\boldsymbol{0}$ (vektory jsou nesouhlasně rovnoběžné).

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** Posunutí musí být (a) souhlasně rovnoběžná, (b) nesouhlasně rovnoběžná, (c) vzájemně kolmá. **3.** (b) 3,2 km, 41° jižně směrem od západu. **5.** $a + b$: 4,2; 40° na východ směrem od severu; $b - a$: 8,0; 24° na sever směrem od západu. **7.** (a) 38 jednotek pod úhlem 320°; (b) 130 jednotek pod úhlem 1,2°; (c) 62 jednotek pod úhlem 130°. **9.** $a_x = -2{,}5$; $a_y = -6{,}9$. **11.** $r_x = 13$ m, $r_y = 7{,}5$ m. **13.** (a) 14 cm, 45° doleva od směru přímo dolů; (b) 20 cm svisle vzhůru; (c) nula. **15.** 4,74 km. **17.** 168 cm, 32,5° nad zemí. **19.** $r_x = 1{,}8$; $r_y = -5{,}8$; $r_z = -2{,}8$. **21.** (a) $8\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$, 8,2; 14°; (b) $2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j}$, 6,3; −72° vzhledem k $\boldsymbol{i}$. **23.** (a) 5,0; −37°; (b) 10; 53°; (c) 11; 27°; (d) 11; 80°; (e) 11; 260°; úhly jsou určeny vůči $\boldsymbol{i}$, tj. směru osy $+x$. Poslední dva vektory mají opačné směry. **25.** 4,1. **27.** (a) $r_x = 1{,}59$; $r_y = 12{,}1$; (b) 12,2; (c) 82,5°. **29.** 1 033 m vodorovně. **31.** (a) −2,83 m, −2,83 m, +5,00 m, 0 m, 3,00 m, 5,20 m; (b) 5,17 m, 2,37 m; (c) 5,69 m, 24,6° na sever směrem od východu; (d) 5,69 m, 24,6° jižně od západu. **35.** (a) $a_x = 9{,}51$ m, $a_y = 14{,}1$ m; (b) $a'_x = 13{,}4$ m, $a'_y = 10{,}5$ m. **37.** (a) $+y$; (b) $-y$, (c) 0; (d) 0; (e) $+z$; (f) $-z$; (g) ab, oba; (h) ab/d, $+z$. **39.** Ano. **41.** (a) Vzhůru, jednotková velikost; (b) nula; (c) jih, jednotková velikost; (d) 1,00; (e) 0. **43.** (a) −18,8; (b) 26,9; směrem $+z$. **45.** (a) 12; ze stránky k nám; (b) 12; do stránky od nás; (c) 12; k nám. **47.** (a) $11\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$; (b) 120°. **51.** (a) 57°; (b) $c_x = \pm 2{,}2$, $c_y = \mp 4{,}5$. **53.** (a) −21; (b) −9; (c) $5\boldsymbol{i} - 11\boldsymbol{j} - 9\boldsymbol{k}$.

Kapitola 4

KONTROLY **1.** (a) $(8\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j})$ m; (b) s osami ne, s rovinou xy ano. **2.** (a) V prvním; (b) ve třetím. **3.** (1) a (3) a_x a a_y jsou obě konstantní, a tedy $\boldsymbol{a}$ je konstantní; (2) a (4) a_y je konstantní, ale a_x ne, tedy $\boldsymbol{a}$ není konstantní. **4.** $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-3}}$, $-2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, 3 m. **5.** (a) v_x je konstantní; (b) v_y, původně kladné, klesá do nuly a pak postupně roste v záporném směru; (c) $a_x = 0$ po celou dobu; (d) $a_y = -g$ po celou dobu. **6.** (a) $\boldsymbol{v} = -(4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i}$; (b) $\boldsymbol{a} = -(8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\boldsymbol{j}$. **7.** (1) 0, vzdálenost se nemění; (2) $+70\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, vzdálenost se zvětšuje; (3) $+80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, vzdálenost se zmenšuje.

OTÁZKY **1.** (1) a (3) a_y je konstantní, ale a_y ne, a tedy ani $\boldsymbol{a}$ není; (2) a_x je konstantní, ale a_y ne, a tedy ani $\boldsymbol{a}$ není; (4) a_x a a_y jsou obě konstantní, a tedy i $\boldsymbol{a}$ je konstantní; $-2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. **3.** (a) Nejmenší v nejvyšším bodu; (b) největší v nejnižším bodu. **5.** (a) Všechny stejné; (b) 1 a 2 stejné (raketa je vystřelena vzhůru), potom 3 a 4 stejné (raketa je vystřelena do země!). **7.** $(2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j})\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. **9.** (a) Stejné; (b) stejné; (c) c, b, a; (d) c, b, a. **11.** (a) Ne; (b) stejná. **13.** (a) Do ruky; (b) za dítě; (c) před dítě. **15.** (a) Úsečka dolů; (b) zakřivená trajektorie; (c) více zakřivená trajektorie. **17.** (a) 3; (b) 4.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) $(-5{,}0\boldsymbol{i} + 8{,}0\boldsymbol{j})$ m; (b) 9,4 m, 122° od osy $+x$; (d) $(8\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j})$ m; (e) 11 m, −45° od osy $+x$. **3.** (a) $(-7{,}0\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j})$ m; (b) s rovinou xy. **5.** (a) 671 km na jihovýchod, 63,4° od místní rovnoběžky; (b) 298 km/h, 63,4° od místní rovnoběžky; (c) 400 km/h. **7.** (a) $6{,}79\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$; (b) 6,96°. **9.** (a) $(3\boldsymbol{i} - 8t\boldsymbol{j})\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (b) $(3\boldsymbol{i} - 16\boldsymbol{j})\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (c) $16\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, −79° k ose $+x$. **11.** (a) $(8t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (b) $8\boldsymbol{j}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. **13.** $(-2{,}10\boldsymbol{i} + 2{,}81\boldsymbol{j})\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. **15.** (a) $-1{,}5\boldsymbol{j}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (b) $(4{,}5\boldsymbol{i} - 2{,}25\boldsymbol{j})$ m. **17.** 60,0°. **19.** (a) 62 ms; (b) $490\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. **21.** (a) 2,0 ns; (b) 2,0 mm; (c) $(1{,}0{\cdot}10^9\boldsymbol{i} - 2{,}0{\cdot}10^8\boldsymbol{j})\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$. **23.** (a) 3,03 s; (b) 758 m; (c) $29{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. **25.** (a) $16\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, 23° nad vodorovnou osou; (b) $27\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, 57° pod vodorovnou osou. **27.** (a) 32,4 m; (b) −37,7 m. **29.** (b) 76°. **31.** (a) 51,8 m; (b) $27{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (c) 67,5 m. **33.** (a) $194\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (b) 38°. **35.** 4,9 cm. **37.** (a) 11 m; (b) 23 m; (c) $17\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, 63° nad vodorovnou osou; (d) $17\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, 63° pod vodorovnou osou. **41.** (a) 16,3 m; (b) 7,6°; (c) 1,0 s. **43.** $23\,\mathrm{ft{\cdot}s^{-1}}$. **45.** (a) 11 m; (b) $45\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. **47.** 30 m nad úrovní, odkud byl vyhozen. **49.** $5{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. **51.** (a) $202\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (b) 806 m; (c) $161\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $-171\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. **53.** (a) 20 cm; (b) ne, míček narazí na síť ve výšce 4,4 cm nad zemí. **55.** Ano, míček proletí asi 2 m nad horním okrajem plotu. **57.** (a) $9{,}00{\cdot}10^{22}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ směrem ke středu; (b) $1{,}52{\cdot}10^{-16}$ s. **59.** (a) $6{,}7{\cdot}10^6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (b) $1{,}4{\cdot}10^{-7}$ s. **61.** (a) $7{,}49\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$; (b) $8{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. **63.** (a) 0,94 m; (b) $19\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (c) $2\,400\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ směrem do středu; (d) 0,05 s. **65.** (a) $1{,}3{\cdot}10^5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (b) $7{,}9{\cdot}10^5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ neboli $8{,}0{\cdot}10^4 g$ směrem do středu; (c) obě hodnoty se zvětší. **67.** (a) $0{,}034\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$; (b) 84 min. **69.** $2{,}58\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-2}}$. **71.** $160\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. **73.** 36 s, ne. **75.** $29\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ z obou systémů. **77.** 130°. **79.** 60°. **81.** (a) $5{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (b) 16,7 m; (c) 67°. **83.** $185\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, 22° jižně směrem od západu. **85.** (a) Ze 75° na východ (měřeno od jihu); (b) 30° východně (měřeno od severu); k získání druhého řešení zaměňte západ za východ. **87.** (a) 30° proti proudu; (b) 69 min; (c) 80 min; (d) 80 min; (e) kolmo k proudu, nejkratší možný čas je 60 min. **89.** $0{,}83c$. **91.** (a) $0{,}35c$; (b) $0{,}62c$. **93.** Pokud je úhel vrhu mezi 5° a 70°, pohybuje se vždy směrem od místa vrhu. Pokud je úhel vrhu 75°, pohybuje se směrem k výchozímu místu v čase mezi 11,5 s a 18,5 s po vrhu. Je-li vrženo pod úhlem 80°, pohybuje se směrem k místu vrhu v čase mezi 10,5 s a 20,5 s po vyhození. Při úhlu vrhu 85° se směrem k výchozímu místu pohybuje v čase mezi 10,5 s a 20,5 s po vrhu. Při úhlu vrhu 90° se směrem k výchozímu místu pohybuje v čase mezi 10 s a 20,5 s po vrhu. **95.** (a) 1,6 s; (b) ne; (c) $14\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (d) ano. **97.** (a) $\Delta\boldsymbol{D} = (1{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} - (2{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (1{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$; (b) 2,4 m; (c) $\bar{\boldsymbol{v}} = (0{,}025\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (0{,}050\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j} + (0{,}025\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{k}$; (d) nelze určit jen z uvedených údajů.

Kapitola 5

KONTROLY **1.** c, d a e. **2.** (a) a (b) 2 N, doleva (zrychlení je v obou případech nulové). **3.** (a) a (b) 1, 4, 3, 2. **4.** (a) Stejná; (b) větší (zrychlení míří nahoru, takže výsledná síla působící na těleso musí směřovat nahoru). **5.** (a) Stejná; (b) větší; (c) menší. **6.** (a) Vzrostou; (b) ano; (c) zůstanou; (d) ano. **7.** (a) $F\sin\theta$; (b) zvýší. **8.** 0.

OTÁZKY **1.** (a) Ano; (b) ano; (c) ano; (d) ano. **3.** (a) (2) a (4); (b) (2) a (4). **5.** (a) 50 N, nahoru; (b) 150 N, nahoru. **7.** (a) Menší; (b) větší. **9.** (a) Ne; (b) ne; (c) ne. **11.** (a) Roste; (b) roste; (c) klesá; (d) klesá. **13.** (a) 20 kg; (b) 18 kg; (c) 10 kg; (d) všechny stejné; (e) 3, 2, 1. **15.** d, c, a, b.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) $F_x = 1{,}88$ N, $F_y = 0{,}684$ N; (b) $(1{,}88\boldsymbol{i} + 0{,}684\boldsymbol{j})$. **3.** (a) $(-6{,}26\boldsymbol{i} - 3{,}23\boldsymbol{j})$ N; (b) 7,0 N, 207° vzhledem k $+x$. **5.** $(-2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j})$ N. **7.** (a) 0; (b) +20 N; (c) −20 N; (d) −40 N; (e) −60 N. **9.** (a) $(1\boldsymbol{i} - 1{,}3\boldsymbol{j})\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$; (b) $1{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ pod úhlem −50° vzhledem k $+x$. **11.** (a) $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ míří ve směru $-x$, $\boldsymbol{a} = 0$; (b) $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ míří ve směru $-x$, $\boldsymbol{a}$ leží na ose x, $a = 0{,}83\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$; (c) $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ svírají se směrem $-x$ úhel 34°, $\boldsymbol{a} = 0$. **13.** (a) 22 N, 2,3 kg; (b) 1 100 N, 110 kg; (c) $1{,}8{\cdot}10^4$ N, $1{,}8{\cdot}10^3$ kg. **15.** (a) 11 N, 2,2 kg; (b) 2,2 kg, 0. **17.** (a) 44 N; (b) 78 N; (c) 54 N; (d) 152 N. **19.** $1{,}18{\cdot}10^4$ N. **21.** $1{,}2{\cdot}10^5$ N. **23.** 16 N. **25.** (a) $5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$; (b) 1,3 kN. **27.** (a) 42 N; (b) 72 N; (c) $4{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. **29.** (a) $0{,}02\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$; (b) $8{\cdot}10^4$ km; (c) $2{\cdot}10^3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. **31.** (a) $1{,}1{\cdot}10^{-15}$ N; (b) $8{,}9{\cdot}10^{-30}$ N. **33.** (a) 5 500 N; (b) 2,7 s; (c) čtyřikrát delší; (d) dvakrát delší. **35.** (a) $4{,}9{\cdot}10^5$ N; (b) $1{,}5{\cdot}10^6$ N. **37.** (a) 490 N směrem nahoru; (b) 490 N směrem dolů.

39. (a) 0,74 m·s^{-2}; (b) 7,3 m·s^{-2}. **41.** (a) $\cos\theta$; (b) $\sqrt{\cos\theta}$. **43.** 1,8·10^4 N. **45.** (a) 4,6·10^3 N; (b) 5,8·10^3 N. **47.** (a) 250 m·s^{-2}; (b) 2,0·10^4 N. **49.** 23 kg. **51.** (a) 620 N; (b) 580 N. **53.** 1,9·10^5 lb. **55.** (a) Lano se přetrhne; (b) 1,6 m·s^{-2}. **57.** 4,6 N. **59.** (a) Umožnit zrychlení alespoň 2 m·s^{-2} nebo větší směrem dolů; (b) 6 m·s^{-1} nebo větší. **61.** 195 N, nahoru. **63.** (a) 566 N; (b) 1 130 N. **65.** 18 000 N. **67.** (a) 1,4·10^4 N; (b) 1,1·10^4 N; (c) 2 700 N, směrem k protizávaží. **69.** 6 800 N, pod úhlem 21° vzhledem k trajektorii pramice. **71.** (a) 4,6 m·s^{-2}; (b) 2,6 m·s^{-2}. **73.** (b) $F/(m+M)$; (c) $MF/(m+M)$; (d) $F(m+2M)/2(m+M)$. **75.** $T_1 = 13$ N, $T_2 = 20$ N, $a = 3{,}2$ m·s^{-2}.

Kapitola 6

KONTROLY **1.** (a) Nulová (na kostku nepůsobí žádná vodorovná síla a kostka je v klidu); (b) 5 N; (c) ne; (d) ano. **2.** (a) Stejná (10 N); (b) klesá; (c) klesá. **3.** Větší. **4.** (a) $\boldsymbol{a}$ dolů, $\boldsymbol{N}$ nahoru; (b) $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{N}$ nahoru. **5.** (a) $4R_1$; (b) $4R_1$. **6.** (a) Stejná; (b) roste; (c) roste.

OTÁZKY **1.** Kostky sklouznou při stejném úhlu sklonu, bez ohledu na uspořádání. **3.** (a) Nahoru; (b) vodorovně, směrem k nám; (c) beze změny; (d) vzroste; (e) vzroste. **5.** Třecí síla $\boldsymbol{F}_s$ míří nejdříve nahoru podél rampy, pak její velikost klesá, až klesne na nulu; pak směřuje dolů podél rampy, přičemž její velikost roste, pokud nedosáhne hodnoty $F_{s,max}$; poté bude velikost třecí síly F_k konstantní a menší než $F_{s,max}$. **7.** (a) Klesá; (b) klesá; (c) roste; (d) roste. **9.** Perioda $T = 0$, rychlost $v = \infty$; úhlu 90° nelze dosáhnout. **11.** 4, 3; poté 1, 2 a 5 se stejnou dostředivou silou. **13.** (a) Menší; (b) větší.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) 200 N; (b) 120 N. **3.** 2°. **5.** 440 N. **7.** (a) 110 N; (b) 130 N; (c) ne; (d) 46 N; (e) 17 N. **9.** (a) 90 N; (b) 70 N; (c) 0,89 m·s^{-2}. **11.** (a) Ne; (b) $(-12\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j})$ N. **13.** 20°. **15.** (a) 0,13 N; (b) 0,12. **17.** $f_s = 0{,}58$, $f_d = 0{,}54$. **19.** (a) 0,11 m·s^{-2}, 0,23 m·s^{-2}; (b) 0,041, 0,029. **21.** 36 m. **23.** (a) 300 N; (b) 1,3 m·s^{-2}. **25.** (a) 66 N; (b) 2,3 m·s^{-2}. **27.** (a) $f_d mg/(\sin\theta - f_d\cos\theta)$; (b) $\theta_0 = \operatorname{arctg} f_s$. **29.** (b) 3,0·10^7 N. **31.** 10 kg. **33.** 3,0 kg. **35.** (a) 3,46 m·s^{-2}; (b) 16 N; (c) na pořadí kostek nezáleží. **37.** (a) 27 N; (b) 3,0 m·s^{-2}. **39.** (a) 6,1 m·s^{-2}, doleva; (b) 0,98 m·s^{-2}, doleva. **41.** (a) 3,0·10^5 N; (b) 1,2°. **43.** 9,9 s. **45.** 3,75. **47.** 13 cm. **49.** 22 m. **51.** (a) 3 210 N; (b) dobře, nepodklouzne. **53.** 0,079. **55.** (a) 0,72 m·s^{-1}; (b) 2,1 m·s^{-2}; (c) 0,50 N. **57.** $\sqrt{Mgr/m}$. **59.** (a) 30 cm·s^{-1}; (b) 180 cm·s^{-2}, radiálně dovnitř; (c) 3,6·10^{-3} N, radiálně dovnitř; (d) 0,37. **61.** (a) 275 N; (b) 877 N. **63.** 874 N. **65.** (a) V nejnižším bodě; (b) 10,9 m·s^{-1}. **67.** (a) 9,5 m·s^{-1}; (b) 20 m. **69.** 13°. **71.** (a) 0,033 8 N; (b) 9,77 N.

Kapitola 7

KONTROLY **1.** (a) Klesne; (b) nezmění se; (c) v případě a) záporná, v případě b) nulová. **2.** d, c, b, a. **3.** (a) Stejná; (b) menší. **4.** (a) Kladná; (b) záporná; (c) nulová. **5.** Nulový.

OTÁZKY **1.** Stejné. **3.** (a) Roste; (b) stejná; (c) stejná; (d) roste. **5.** (a) Kladná; (b) záporná; (c) záporná. **7.** (a) Kladná; (b) nulová; (c) záporná; (d) záporná; (e) nulová; (f) kladná. **9.** Práce tíhové síly je ve všech případech stejná. **11.** c; d; a a b stejně; pak f; e. **13.** (a) 3 m; (b) 3 m; (c) 0 a 6 m; (d) v záporném směru osy x. **15.** (a) A; (b) B. **17.** Dvojnásobek.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** 1,8·10^{13} J. **3.** (a) 3 610 J; (b) 1 900 J; (c) 1,2·10^{10} J. **5.** (a) 1·10^5 megatun TNT; (b) 1·10^7 bomb. **7.** Otec: 2,4 m·s^{-1}; syn: 4,8 m·s^{-1}. **9.** (a) 200 N; (b) 700 m; (c) $-1{,}4\cdot10^5$ J; (d) 400 N, 350 m, $-1{,}4\cdot10^5$ J. **11.** 5 000 J. **13.** 47 keV. **15.** 7,9 J. **17.** 530 J. **19.** -37 J. **21.** (a) 314 J; (b) -155 J; (c) 0 J; (d) 158 J. **23.** (a) 98 N; (b) 4,0 cm; (c) 3,9 J; (d) $-3{,}9$ J. **25.** (a) $-3Mgd/4$; (b) Mgd; (c) $Mgd/4$; (d) $\sqrt{gd/2}$. **27.** 25 J. **31.** -6 J. **33.** (a) 12 J; (b) 4,0 m; (c) 18 J. **35.** (a) $-0{,}043$ J; (b) $-0{,}13$ J. **37.** (a) 6,6 m·s^{-1}; (b) 4,7 m. **39.** (a) Nad původní polohou; (b) 5,0 cm; (c) 5,0 J. **41.** 270 kW. **43.** 235 kW. **45.** 490 W. **47.** (a) 100 J; (b) 67 W; (c) 33 W. **49.** 0,99 HP. **51.** (a) 0; (b) -350 W. **53.** (a) 79,4 keV; (b) 3,12 MeV; (c) 10,9 MeV. **55.** (a) 32 J; (b) 8 W; (c) 78°.

Kapitola 8

KONTROLY **1.** Ne. **2.** 3, 1, 2. **3.** (a) Stejné; (b) stejné. **4.** (a) CD, AB, BC (nula); (b) kladný směr osy x. **5.** 2, 1, 3. **6.** Menší. **7.** (a) Sedmý excitovaný stav, s energií E_7; (b) 1,3 eV.

OTÁZKY **1.** -40 J. **3.** (c) a (d) stejné; pak (a) a (b) stejné. **5.** (a) Všechny stejné; (b) všechny stejné. **7.** (a) 3, 2, 1; (b) 1, 2, 3. **9.** Menší (menší pokles potenciální energie). **11.** (a) $E < 3$ J, $E_k < 2$ J; (b) $E < 5$ J, $E_k < 4$ J. **13.** (a) Roste; (b) klesá; (c) klesá; (d) zůstává konstantní v AB a BC, pokles v CD.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** 15 J. **3.** (a) 167 J; (b) -167 J; (c) 196 J; (d) 29,4 J. **5.** (a) 0; (b) $mgh/2$; (c) mgh; (d) $mgh/2$; (e) mgh. **7.** (a) $-0{,}80$ J; (b) $-0{,}80$ J; (c) $+1{,}1$ J. **9.** (a) $mgL(1-\cos\theta)$; (b) $-mgL(1-\cos\theta)$; (c) $mgL(1-\cos\theta)$. **11.** (a) 18 J; (b) 0 J; (c) 30 J; (d) 0 J; (e) v případech b, d. **13.** (a) 2,08 m·s^{-1}; (b) 2,08 m·s^{-1}. **15.** (a) $\sqrt{2gL}$; (b) $2\sqrt{gL}$; (c) $\sqrt{2gL}$. **17.** 257 m. **19.** (a) 6,75 J; (b) $-6{,}75$ J; (c) 6,75 J; (d) 6,75 J; (e) $-6{,}75$ J; (f) 0,459 m. **21.** (a) 21 m·s^{-1}; (b) 21 m·s^{-1}. **23.** (a) 0,98 J; (b) $-0{,}98$ J; (c) 3,1 N·cm^{-1}. **25.** (a) 39,2 J; (b) vzroste o 39,2 J; (c) 4,00 m. **27.** (a) 54 m·s^{-1}; (b) 52 m·s^{-1}; (c) $x = 90$ m, $y = 76$ m, pod úrovní ústí hlavně. **29.** (a) 11,9 m·s^{-1}; (b) 7,8 cm. **31.** (a) 300 J; (b) 93,8 J; (c) 6,38 m. **33.** (a) 4,8 m·s^{-1}; (b) 2,4 m·s^{-1}. **35.** (a) $\sqrt{v_0^2 + 2gL(1-\cos\theta_0)}$; (b) $\sqrt{2gl\cos\theta_0}$;

(c) $\sqrt{gL(3+2\cos\theta_0)}$. **37.** (a) $E_p(x) = -Gm_1m_2/x$; (b) $Gm_1m_2d/[x_1(x_1+d)]$. **39.** (a) Vodorovný průmět ($8mg$) míří vlevo, svislý průmět (mg) míří dolů; (b) $2{,}5R$. **43.** $mgL/32$. **47.** (a) $1{,}12(A/B)^{1/6}$; (b) odpudivé; (c) přitažlivé. **49.** (a) Bod obratu pouze nalevo, atomy se oddělí a molekula se rozpadne; (b) bod obratu napravo i nalevo; atomy se nemohou oddělit, molekula se nerozpadne; (c) $-1{,}2\cdot10^{-19}$ J; (d) $2{,}2\cdot10^{-19}$ J; (e) velikost interakčních sil je asi $1\cdot10^{-9}$ N, síly jsou přitažlivé; (f) $r < 0{,}2$ nm; (g) $r > 0{,}2$ nm; (h) $r = 0{,}2$ nm. **51.** -45 J. **53.** (a) 2 200 J; (b) $-1\,500$ J; (c) 700 J. (Výsledky zkresleny zaokrouhlováním.) **55.** 17 kW. **57.** (a) $-0{,}74$ J; (b) $-0{,}53$ J. **59.** -12 J. **61.** 54 %. **63.** 880 MW. **65.** (a) 39 kW; (b) 39 kW. **67.** (a) 1,5 MJ; (b) 0,51 MJ; (c) 1,0 MJ; (d) 63 m·s^{-1}. **69.** (a) 67 J; (b) 67 J; (c) 46 cm. **71.** Nemá-li ve výsledku dojít ke změně kinetické energie hlávky, musíme na ni působit další silou (síla ruky, která rovněž koná práci). **73.** (a) $-0{,}90$ J; (b) 0,46 J; (c) 1,0 m·s^{-1}. **75.** (a) 5,7 m·s^{-1}; (b) 5,9 m. **77.** 4,3 m. **79.** (a) 31,0 J; (b) 5,35 m·s^{-1}; (c) je konzervativní. **81.** 1,2 m. **85.** Uprostřed rovného úseku. **87.** (a) 7,7 m·s^{-1}; (b) 96 cm; (c) 2,4 m; (d) 16 m. **89.** (a) 216 J; (b) 1 180 N; (c) 432 J; (d) motor dodává energii, která zahřívá pás a krabici během dynamického tření. **91.** (a) $1{,}1\cdot10^{17}$ J; (b) 1,2 kg. **93.** 7,28 MeV. **95.** (a) Uvolnění; (b) 17,6 MeV. **97.** (a) 5,3 eV; (b) 0,9 eV. **99.** (a) 7,2 J; (b) $-7{,}2$ J; (c) 86 cm; (d) 26 cm.

Kapitola 9

KONTROLY **1.** (a) V počátku souřadnic; (b) ve čtvrtém kvadrantu; (c) na ose y pod počátkem; (d) v počátku souřadnic; (e) ve třetím kvadrantu; (f) v počátku souřadnic. **2.** (a) až (c) v těžišti soustavy, tedy stále v počátku souřadnic (jejich síly jsou vnitřní, těžiště se nemůže pohybovat). **3.** (a) 1, 3, a pak 2 a 4 stejně; (b) 3. **4.** (a) 0; (b) ne; (c) opačný než osa x. **5.** (a) 500 km·h^{-1}; (b) 2 600 km·h^{-1}; (c) 1 600 km·h^{-1}. **6.** (a) Ano; (b) ne.

OTÁZKY **1.** Bod 4. **3.** (a) Ve středu sáněk; (b) $L/4$, doprava; (c) nepohybuje se (nepůsobí vnější síly); (d) $L/4$, doleva; (e) L; (f) $L/2$; (g) $L/2$. **5.** (a) AC, CD, a BC; (b) BC; (c) BD a AD. **7.** (a) 2 N, doprava; (b) 2 N doprava; (c) větší než 2 N, doprava. **9.** b, c, a. **11.** (a) Ano; (b) 6 kg·m·s^{-1} v záporném směru osy x; (c) z údajů nelze určit jednoznačně.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) 4 600 km; (b) $0{,}73R_Z$. **3.** (a) $x_T = 1{,}1$ m, $y_T = 1{,}3$ m; (b) posouvá se k nejvýše položené částici. **5.** $x_T = -0{,}25$ m, $y_T = 0$ m. **7.** Uvnitř železné části, ve střední výšce a šířce, 2,7 cm od poloviny délky. **9.** $x_T = y_T = 20$ cm, $z_T = 16$ cm. **11.** (a) $H/2$; (b) $H/2$; (c) klesne do nejnižšího bodu, pak vystoupí do $H/2$; (d) $(HM/m)(\sqrt{1+m/M}-1)$. **13.** 72 km·h^{-1}. **15.** (a) Těžiště se nepohybuje; (b) 0,75 m. **17.** 4,8 m·s^{-1}. **19.** (a) 22 m; (b) 9,3 m·s^{-1}. **21.** 53 m. **23.** 4,97 m. **25.** (a) 52,0 km·h^{-1}; (b) 28,8 km·h^{-1}. **27.** Proton. **29.** (a) 30°; (b) $-0{,}572\boldsymbol{j}$ kg·m·s^{-1}. **31.** (a) $-4{,}0\cdot10^4\boldsymbol{i}$ kg·m·s^{-1}; (b) na západ; (c) 0. **33.** $0{,}707c$. **35.** 0,57 m·s^{-1}, do těžiště. **37.** Zvyšuje se o 4,4 m·s^{-1}. **39.** (a) Motor: 7 290 m·s^{-1}, modul: 8 200 m·s^{-1}; (b) před: $1{,}271\cdot10^{10}$ J po: $1{,}275\cdot10^{10}$ J. **41.** (a) +1; (b) 1 830; (c) 1 830; (d) odpovědi se nezmění. **43.** 14 m·s^{-1}, 135° od ostatních kusů. **45.** 190 m·s^{-1}. **47.** (a) $0{,}200v_{rel}$; (b) $0{,}210v_{rel}$; (c) $0{,}209v_{rel}$. **49.** (a) $1{,}57\cdot10^6$ N; (b) $1{,}35\cdot10^5$ kg; (c) 2,08 km·s^{-1}. **51.** 108 m·s^{-1}. **53.** $2{,}2\cdot10^{-3}$. **57.** Rychlejší člun: o 46 N větší; pomalejší loď: beze změny. **59.** (a) 3,9 MJ; (b) 3,1. **61.** 690 W. **63.** $5{,}5\cdot10^6$ N. **65.** 24 W. **67.** 100 m. **69.** (a) 860 N; (b) 2,4 m·s^{-1}. **71.** (a) $3{,}0\cdot10^5$ J; (b) 10 kW; (c) 20 kW. **73.** (a) $2{,}1\cdot10^6$ kg; (b) $\sqrt{100+1{,}5t}$ m·s^{-1}; (c) $1{,}5\cdot10^6/\sqrt{100+1{,}5t}$ N; (d) 6,7 km. **75.** $t = (3d/2)^{2/3}(m/2P)^{1/3}$.

Kapitola 10

KONTROLY **1.** (a) Beze změny; (b) beze změny; (c) zmenší se. **2.** (a) Nula; (b) kladné; (c) kladný směr osy y. **3.** (a) 4 kg·m·s^{-1}; (b) 8 kg·m·s^{-1}; (c) 3 J. **4.** (a) 0; (b) 4 kg·m·s^{-1}. **5.** (a) 10 kg·m·s^{-1}; (b) 14 kg·m·s^{-1}; (c) 6 kg·m·s^{-1}. **6.** 2 kg·m·s^{-1}; (b) 3 kg·m·s^{-1}. **7.** (a) Zvětšil by se; (b) zvětšil by se.

OTÁZKY **1.** Je u všech stejný. **3.** b, c. **5.** (a) První bylo v klidu; (b) 2; (c) 5; (d) stejná. **7.** (a) 1 a 4 stejná; pak 2 a 3 stejná; (b) 1, 3 a 4 stejná, pak 2. **9.** (a) Doprava; (b) doprava; (c) menší. **11.** V kladném směru osy x.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) 750 N; (b) 6,0 m·s^{-1}. **3.** $6{,}2\cdot10^4$ N. **5.** 3 000 N. **7.** 1,1 m. **9.** (a) 42 N·s; (b) 2 100 N. **11.** (a) $(7{,}4\cdot10^3\boldsymbol{i} - 7{,}4\cdot10^3\boldsymbol{j})$ N·s; (b) $(-7{,}4\cdot10^3\boldsymbol{i})$ N·s; (c) $2{,}3\cdot10^3$ N; (d) $2{,}1\cdot10^4$ N; (e) $-45°$. **13.** (a) 1,0 kg·m·s^{-1}; (b) 250 J; (c) 10 N; (d) 1 700 N. **15.** 5 N. **17.** $2\mu\boldsymbol{v}$. **19.** 990 N. **21.** (a) 1,8 N·s, nahoru; (b) 180 N, dolů. **25.** 8 m·s^{-1}. **27.** 38 km·s^{-1}. **29.** 4,2 m·s^{-1}. **31.** (a) 99 g; (b) 1,9 m·s^{-1}; (c) 0,93 m·s^{-1}. **33.** (a) 1,2 kg; (b) 2,5 m·s^{-1}. **35.** 7,8 kg. **37.** (a) 1/3; (b) $4h$. **39.** 35 cm. **41.** 3,0 m·s^{-1}. **43.** (a) $(10\boldsymbol{i} + 15\boldsymbol{j})$ m·s^{-1}; (b) 500 J ztráta. **45.** (a) 2,7 m·s^{-1}; (b) 1 400 m·s^{-1}. **47.** (a) A: 4,6 m·s^{-1} B: 3,9 m·s^{-1}; (b) 7,5 m·s^{-1}. **49.** 20 J těžká částice, 40 J lehká. **51.** $mv^2/6$. **53.** 13 t. **55.** 25 cm. **57.** 0,975 m·s^{-1}, 0,841 m·s^{-1}. (c) $v_{24} = 5{,}3$ ft·s^{-1}, $v_{32} = 3{,}3$ ft·s^{-1}. **59.** (a) 1,2 m·s^{-1}; (b) 2 700 J; (c) $v_{24} = 1{,}6$ m·s^{-1}, $v_{32} = 1{,}0$ m·s^{-1}. **61.** (a) 30°, od směru přilétajícího protonu; (b) 250 m·s^{-1} a 430 m·s^{-1}. **63.** (a) 41°; (b) 4,76 m·s^{-1}; (c) ne. **65.** $v = V/4$. **67.** (a) 117° od výsledného směru B; (b) ne. **69.** 120°. **71.** (a) 1,9 m·s^{-1}, 30° od původního směru; (b) ne. **73.** (a) 3,4 m·s^{-1}, odkloněna o 17° doprava; (b) 0,95 MJ. **75.** (a) 117 MeV; (b) hybnosti jsou stejně

velké, ale mají opačné směry; (c) π^-. **77.** (a) 4,94 MeV; (b) 0; (c) 4,85 MeV; (d) 0,09 MeV.

Kapitola 11

KONTROLY **1.** (b), (c). **2.** (a), (d). **3.** (a) Ano; (b) ne; (c) ano; (d) ano. **4.** Všechny stejné. **5.** 1, 2, 4, 3. **6.** (a) 1 a 3 stejné, 4, 2 a 5 stejné (rovné nule). **7.** (a) Dolů v obrázku; (b) menší.

OTÁZKY **1.** (a) Kladná; (b) nulová; (c) záporná; (d) záporné. **3.** (a) 2, 3; (b) 1, 3; (c) 4. **5.** (a), (c). **7.** (a) Všechny stejné; (b) 2, 3; pak 1 a 4 stejné. **9.** b, c, a. **11.** Menší. **13.** 90°; pak 70° a 110° stejné. **15.** Otočení kolem různých os o velké úhly spolu nekomutují.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) 1,5 rad; (b) 85,9°; (c) 0,237 m. **3.** (a) 0,105 rad·s^{-1}; (b) 1,75·10^{-3} rad·s^{-1}; (c) 1,45·10^{-4} rad·s^{-1}. **5.** (a) $\omega(2) = 4{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $\omega(4) = 28\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$; (b) 12 rad·s^{-2}; (c) $\alpha(2) = 6{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$, $\alpha(4) = 18\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$. **7.** (a) $\omega_0 + at^4 - bt^3$; (b) $\theta_0 + \omega_0 t + {+}\, at^5/5 - bt^4/4$. **9.** 11 rad·s^{-1}. **11.** (a) 9 000 ot·min^{-2}; (b) 420 ot. **13.** (a) 30 s; (b) 1 800 rad. **15.** 200 ot·min^{-1}. **17.** (a) 2,0 rad·s^{-2}; (b) 5,0 rad·s^{-1}; (c) 10 rad·s^{-1}; (d) 75 rad. **19.** (a) 13,5 s; (b) 27,0 rad·s^{-1}. **21.** (a) 340 s; (b) $-4{,}5\cdot10^{-3}$ rad·s^{-2}; (c) 98 s. **23.** (a) 1,0 ot·s^{-2}; (b) 4,8 s; (c) 9,6 s; (d) 48 ot. **25.** 1,8 m·s^{-2}, směrem do středu. **27.** 0,14 rad·s^{-1}. **29.** 5,6 rad·s^{-2}. **31.** (a) 5,1 h; (b) 8,1 h. **33.** (a) 2,50·10^{-3} rad·s^{-1}; (b) 20,2 m·s^{-2}; (c) 0. **35.** (a) $-1{,}1$ ot·min^{-2}; (b) 9 900 ot; (c) $-0{,}99$ mm·s^{-2}; (d) 31 m·s^{-2}. **37.** (a) 310 m·s^{-1}; (b) 340 m·s^{-1}. **39.** (a) 1,94 m·s^{-2}; (b) 75,1°, směrem do středu trajektorie. **41.** 16 s. **43.** (a) 73 cm·s^{-2}; (b) 0,075; (c) 0,11. **45.** 12,3 kg·m^2. **47.** První válec: 1 100 J; druhý válec: 9 700 J. **49.** (a) 221 kg·m^2; (b) 1,1·10^4 J. **51.** (a) 6 490 kg·m^2; (b) 4,36 MJ. **53.** 0,097 kg·m^2. **57.** (a) 1 300 g·cm^2; (b) 550 g·cm^2; (c) 1 900 g·cm^2; (d) $I_x + I_y$. **59.** (a) 49 MJ; (b) 100 min. **61.** 4,7 N·m. **63.** (a) $r_1F_1\sin\theta_1 - r_2F_2\sin\theta_2$; (b) $-3{,}8$ N·m. **65.** 1,28 kg·m^2. **67.** 9,7 rad·s^{-2}, proti směru otáčení hodinových ručiček. **69.** (a) 155 kg·m^2; (b) 64,4 kg. **71.** (a) 420 rad·s^{-2}; (b) 500 rad·s^{-1}. **73.** Malá koule: (a) 0,689 N·m a (b) 3,05 N; velká koule (a) 9,84 N·m a (b) 11,5 N. **75.** 1,73 m·s^{-2}; 6,92 m·s^{-2}. **77.** (a) 1,4 m·s^{-1}; (b) 1.4 m·s^{-1}. **79.** (a) 19,8 kJ; (b) 1,32 kW. **81.** (a) 8,2·10^{28} N·m; (b) 2,6·10^{29} J; (c) 3,0·10^{21} kW. **83.** $\sqrt{9g/4l}$. **85.** (a) 4,8·10^5 N; (b) 1,1·10^4 N·m; (c) 1,3·10^6 J. **87.** (a) $3g(1-\cos\theta)$; (b) $\frac{3}{2}g\sin\theta$; (c) 41,8°. **89.** (a) 5,6 rad·s^{-2}; (b) 3,1 rad·s^{-1}. **91.** (a) 42,1 km·h^{-1}; (b) 3,09 rad·s^{-2}; (c) 7,57 kW. **93.** (a) 3,4·10^5 g·cm^2; (b) 2,9·10^5 g·cm^2; (c) 6,3·10^5 g·cm^2; (d) (1,2 cm)$\boldsymbol{i}$ + (5,9 cm)$\boldsymbol{j}$.

Kapitola 12

KONTROLY **1.** (a) Stejná; (b) menší. **2.** Menší. **3.** (a) $\pm z$; (b) $+y$; (c) $-x$. **4.** (a) 1 a 3 stejné, pak 2 a 4 stejné, pak 5 (nulový); (b) 2 a 3. **5.** (a) 3, 1; pak 2 a 4 (nulová); (b) 3. **6.** (a) Stejný pro všechna tělesa (stejné $\boldsymbol{F}$, stejné t, proto stejné ΔL); (b) koule, kotouč, prstenec. **7.** (a) Klesne; (b) zůstane stejný; (c) vzroste.

OTÁZKY **1.** (a) Stejnou; (b) kvádr; (c) kvádr. **3.** (a) Větší; (b) stejná. **5.** (a) L; (b) $1{,}5L$. **7.** B, pak C a D stejná; pak A a E stejná (nula). **9.** A, pak B a C stejná; pak E a D stejná (nula). **11.** (a) Nezmění; (b) vzroste díky zmenšení momentu setrvačnosti. **13.** (a) 30 jednotek ve směru hodinových ručiček; (b) 2, pak 4, pak ostatní; anebo 4, pak 2, pak ostatní. **15.** (a) Klouže a otáčí se na místě („protáčí se“); (b) valí se směrem doprava; (c) doleva.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** 1,00. **3.** (a) 59,3 rad·s^{-1}; (b) $-9{,}31$ rad·s^{-2}; (c) 70,7 m. **5.** (a) $-4{,}44$ m·s^{-2}; (b) $-16{,}4$ rad·s^{-2}; (c) $-2{,}54$ N·m. **7.** (a) 8,0°; (b) 0,14g. **9.** (a) 4,0 N, doleva; (b) 0,60 kg·m^2. **11.** (a) $\frac{1}{2}mR^2$; (b) plný válec. **13.** (a) $mg(R-r)$; (b) 2/7; (c) (17/7)mg. **15.** (a) 2,7R; (b) (50/7)mg. **17.** (a) 13 cm·s^{-2}; (b) 4,4 s; (c) 55 cm·s^{-1}; (d) 1,8·10^{-2} J; (e) 1,4 J; (f) 27 ot·s^{-1}. **21.** (a) 24 N·m, v kladném směru osy y; (b) 24 N·m, $-y$; (c) 12 N·m, $+y$; (d) 12 N·m, $-y$. **23.** (a) $(-1{,}5\boldsymbol{i} - 4{,}0\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$ N·m; (b) $(-1{,}5\boldsymbol{i} - 4{,}0\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$ N·m. **25.** $-2{,}0\boldsymbol{i}$ N·m. **27.** 9,8 kg·m^2·s^{-1}. **29.** (a) 12 kg·m^2·s^{-1}, směr $+z$ (k nám); (b) 3,0 N·m, směr $+z$ (k nám). **31.** (a) 0; (b) $(8{,}0\boldsymbol{i} + 8{,}0\boldsymbol{k})$ N·m. **33.** (a) mvd; (b) nezmění se; (c) 0, změní se. **35.** (a) 3,15·10^{43} kg·m^2·s^{-1}; (b) moment hybnosti Jupitera 0,616. **37.** 4,5 N·m, rovnoběžně s rovinou xy pod úhlem $-63°$ od osy $+x$. **39.** (a) 0; (b) 0; (c) $30t^3$ kg·m^2·s^{-1}, $90t^2$ N·m, obojí ve směru $-z$; (d) $30t^3$ kg·m^2·s^{-1}, $90t^2$ N·m, obojí ve směru $+z$. **41.** (a) $\frac{1}{2}mgt^2v_0\cos\theta_0$; (b) $mgtv_0\cos\theta_0$; (c) $mgtv_0\cos\theta_0$. **43.** (a) $-1{,}47$ N·m; (b) 20,4 rad; (c) $-29{,}9$ J; (d) 19,9 W. **45.** (a) 12,2 kg·m^2; (b) 308 kg·m^2·s^{-1}, dolů. **47.** (a) 1/3; (b) 1/9. **49.** $\omega_0R_1R_2I_1/(I_1R_2^2 + I_2R_1^2)$. **51.** (a) 3,6 ot/s; (b) 3,0; (c) člověk konal práci, aby závaží přiblížil k ose rotace. **53.** (a) 267 ot/min; (b) 2/3. **55.** 3,0 min. **57.** 2,6 rad/s. **59.** (a) Obíhají po kružnici o poloměru 1,5 m úhlovou rychlostí 0,93 rad/s; (b) 8,4 rad/s; (c) $K_a = 98$ J, $K_b = 880$ J; (d) z práce vykonané vzájemným přitahováním bruslařů. **61.** $m'/(m'+m)(v/R)$. **63.** (a) $m'vR/(I + mR^2)$; (b) $m'vR^2/(I + mR^2)$. **65.** 1 300 m·s^{-1}. **67.** (a) 18 rad/s; (b) 0,92. **69.** $\theta = \arccos\left(1 - \dfrac{6m^2h}{l(2m+M)(3m+M)}\right)$. **71.** 5,28·10^{-35} J·s. **73.** Tři jsou otočeny nahoru, zbývající dolů. **75.** (a) Velikost momentu hybnosti roste úměrně s t^2 a velikost momentu síly roste úměrně s t ve shodě s větou o momentu hybnosti. (b) Velikost momentu hybnosti i velikost momentu síly opět rostou s časem, ale jejich změny za kteroukoliv dobu jsou z důvodu tření menší než v předchozím případě.

Kapitola 13

KONTROLY **1.** c, e, f. **2.** (a) Ne; (b) do místa, kde

působí síla $\boldsymbol{F}_1$ kolmo k rovině obrázku; (c) 45 N. **3.** (a) Do bodu C, aby se vyloučily tam působící momenty sil; b) plus; (c) minus; (d) stejně velké. **4.** Ano — případ d. **5.** (a) Stejně velký; (b) B; (c) B.

OTÁZKY **1.** (a) Ano; (b) ano; (c) ano; (d) ne. **3.** b. **5.** (a) Ano; (b) ne; (c) ne (můžeme vyvážit momenty, ale síly pak budou nevyvážené). **7.** a, b a c stejné, d. **9.** (a) 20 N (kladka, která nese neznámou tíhu, je ve stejném postavení jako kladka, která nese známou tíhu 20 N); (b) 25 N. **11.** (a) $\sin\theta$; (b) ponechat stejný; (c) zvětšit. **13.** Stejné v tyčích A a B, menší v C.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) 2; (b) 7. **3.** (a) 2,5 m; (b) 7,3°. **5.** 120°. **7.** 7 920 N. **9.** (a) 840 N; (b) 530 N. **11.** 0,536 m. **13.** (a) 2 770 N; (b) 3 890 N. **15.** (a) 1 160 N směrem dolů; (b) 1 740 N směrem nahoru; (c) levá je natahována, pravá je stlačována. **17.** (a) 280 N; (b) 880 N pod úhlem 71° směrem vzhůru od vodorovné roviny. **19.** Tyče BC, CD a DA jsou namáhány tahem o velikosti T, úhlopříčné tyče AC a BD tlakem o velikosti $T\sqrt{2}$. **21.** (a) 8 830 N; (b) 4 030 N; (c) 6 240 N. **23.** (a) 49 N; (b) 28 N; (c) 57 N, 29°. **25.** (a) 1 900 N vzhůru; (b) 2 100 N dolů. **27.** (a) 340 N; (b) 0,88 m; (c) vzrůstá; (d) klesá. **29.** $F = G\sqrt{2rh - h^2}/(r - h)$. **31.** (a) $d/2$; (b) $d/4$; (c) $d/6$; (d) $d/8$; (e) $25d/24$. **33.** (a) 6 630 N; (b) $F_\mathrm{h} = 5\,740$ N; (c) $F_\mathrm{v} = 5\,960$ N. **35.** 2,20 m. **37.** (a) 1,50 m; (b) 433 N; (c) 250 N. **39.** (a) $a_1 = d/2$, $a_2 = 5d/8$, $h = 9d/8$; (b) $b_1 = 2d/3$, $b_2 = d/2$, $h = 7d/6$. **41.** (a) 173 N; (b) 521 N; (c) 313 N. **43.** (a) 445 N; (b) 0,50; (c) 315 N. **45.** (a) 3,9 m·s^{-2}; (b) 2 000 N na každé zadní kolo, 3 500 N na každé přední kolo; (c) 790 N na každé zadní kolo, 1 410 N na každé přední kolo. **47.** (a) $1{,}9\cdot10^{-3}$; (b) $1{,}3\cdot10^{7}$ Pa; (c) $6{,}9\cdot10^{9}$ Pa. **49.** 3,1 cm. **51.** $2{,}4\cdot10^{9}$ Pa. **53.** (a) $1{,}8\cdot10^{7}$ N; (b) $1{,}4\cdot10^{7}$ N; (c) 16. **55.** (a) 867 N; (b) 143 N; (c) 0,165.

Kapitola 14

KONTROLY **1.** Všechny působí stejnou silou. **2.** (a) (1), (2) společně se (4), nakonec (3); (b) k úsečce délky d. **3.** Záporný směr osy y. **4.** (a) Roste; (b) záporná. **5.** (a) 2; (b) 1. **6.** (a) Po dráze 1 (menší energie E odpovídá menší délce poloosy a); (b) menší (menší délka poloosy a odpovídá kratší oběžné době T).

OTÁZKY **1.** (a) Mezi nimi, blíže k lehčí částici; (b) ne; (c) ne (různý od nekonečna). **3.** $3GM^2/d^2$, doleva. **5.** (b), (a) společně s (c) a potom (d). **7.** b, a, c. **9.** (a) Záporná; (b) záporná; (c) kladná; (d) všechno stejné. **11.** (a) Všechny stejné; (b) všechny stejné. **13.** (a) Stejné; (b) větší.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** 19 m. **3.** 2,16. **5.** 1/2. **7.** $3{,}4\cdot10^{5}$ km. **9.** $3{,}7\cdot10^{-5}$ N v kladném směru osy y. **11.** $M = m$. **13.** $3{,}2\cdot10^{-7}$ N. **15.** $(GmM/d^2)\cdot\left(1 - 1/\{8(1 - R/2d)^2\}\right)$. **17.** $2{,}6\cdot10^{6}$ m. **19.** (a) $1{,}3\cdot10^{12}$ m·s^{-2}; (b) $1{,}6\cdot10^{6}$ m·s^{-1}. **21.** (a) 17 N; (b) $2{,}5R_\mathrm{Z}$. **23.** (b) 1,9 h. **27.** (a) $a_{g0} = (3{,}03\cdot10^{43}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}})/M_\check{\mathrm{c}}$; (b) klesající; (c) 9,82 m·s^{-2}; (d) $7{,}30\cdot10^{-15}$ m·s^{-2}; (e) ne. **29.** 7,91 km·s^{-1}. **31.** (a) $(3{,}0\cdot10^{-7}m)$ N; (b) $(3{,}3\cdot10^{-7}m)$ N; (c) $(6{,}7\cdot10^{-7}mr)$ N. **33.** (a) 9,83 m·s^{-2}; (b) 9,84 m·s^{-2}; (c) 9,79 m·s^{-2}. **35.** (a) $-1{,}4\cdot10^{-4}$ J; (b) nižší; (c) kladnou; (d) záporná. **37.** (a) 0,74; (b) 3,7 m·s^{-2}; (c) 5,0 km·s^{-1}. **39.** (a) $E_\mathrm{M} = 0{,}045\,1E_\mathrm{Z}$; (b) $E_\mathrm{J} = 28{,}5E_\mathrm{Z}$. **41.** $-GmM_\mathrm{Z}/R$; $-GmM_\mathrm{M}/r$. **43.** (a) $5{,}0\cdot10^{-11}$ J; (b) $-5{,}0\cdot10^{-11}$ J. **45.** (a) 1 700 m·s^{-1}; (b) 250 km; (c) 1 400 m·s^{-1}. **47.** (a) $2{,}2\cdot10^{-7}$ rad·s^{-1}; (b) 90 km·s^{-1}. **49.** $6{,}4\cdot10^{6}$ m. **51.** (a) $-1{,}67\cdot10^{-8}$ J; (b) $0{,}56\cdot10^{-8}$ J. **55.** $6{,}5\cdot10^{23}$ kg. **57.** $5\cdot10^{10}$. **59.** (a) 7,82 km·s^{-1}; (b) 87,5 min. **61.** (a) 6 640 km; (b) 0,013 6. **63.** (a) 39,5 AU^3·y^{-2}·M_S^{-1}; (b) $T^2 = r^3/M_\mathrm{S}$. **65.** (a) $1{,}9\cdot10^{13}$ m; (b) $3{,}5R_\mathrm{p}$. **67.** Na jih, 35,4° nad obzor. **71.** $2\pi r^{3/2}/\sqrt{G(M + m/4)}$. **73.** $\sqrt{GM/a}$. **75.** (a) 2,8 y; (b) $1{,}0\cdot10^{-4}$. **77.** (a) 1/2; (b) 1/2; (c) B, o $1{,}1\cdot10^{8}$ J. **79.** (a) 54 km·s^{-1}; (b) 960 m·s^{-1}; (c) $R_\mathrm{p}/R_\mathrm{a} = v_\mathrm{a}/v_\mathrm{p}$. **81.** (a) $4{,}6\cdot10^{5}$ J; (b) 260krát větší. **83.** (a) 7,5 km·s^{-1}; (b) 97 min; (c) 410 km; (d) 7,7 km·s^{-1}; (e) 92 min; (f) $32\cdot10^{-3}$ N; (g) považujeme-li systém družice+Země za izolovaný, zachovává se jeho moment hybnosti. **85.** (a) 5 540 s; (b) 7,68 km·s^{-1}; (c) 7,60 km·s^{-1}; (d) $5{,}78\cdot10^{10}$ J; (e) $-11{,}8\cdot10^{10}$ J; (f) $-6{,}02\cdot10^{10}$ J; (g) $6{,}63\cdot10^{6}$ m; (h) 170 s, nová dráha. **87.** (a) $(-7{,}0\ \mathrm{mm})\boldsymbol{i} + (3{,}0\ \mathrm{cm})\boldsymbol{j}$; (b) $(-0{,}19\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} + (0{,}40\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j}$. **89.** (a) $\Delta v = 2{,}7$ km·s^{-1}; $\Delta E = 60\cdot10^{11}$ J; (b) $\Delta v = 2{,}5$ km·s^{-1}; $\Delta E = 43\cdot10^{11}$ J.

Kapitola 15

KONTROLY **1.** Všechny stejné. **2.** (a) Všechny stejné; (b) $0{,}95\varrho_0$, ϱ_0, $1{,}1\varrho_0$. **3.** 13 cm^3·s^{-1} směrem ven. **4.** (a) Všude stejný; (b) 1, pak 2 a 3 stejná, 4; (c) 4, 3, 2, 1.

OTÁZKY **1.** e, pak b a d stejná, pak a a c stejná. **3.** (a) (1), (3), (2); (b) všude stejný; (c) ne (k tíze, která by se projevila výchylkou vah, přispívá i tlak na stěny nádob). **5.** (3), (4), (1), (2). **7.** (a) Klesne; (b) klesne; (c) zůstane stejná. **9.** (a), (b) Stejně, zdánlivá váha (příklad 5.11a) jak vody, tak i dřeva zůstává stejná; (c), (d) stejně; zdánlivá váha (př. 5.11b, c) při (c) vzroste, při (d) klesne, ale stejně pro vodu i dřevo. **11.** (a) Blok 1 proti směru otáčení hodinových ručiček, blok 2 ve směru; (b) blok 1 se ještě více vychýlí, blok 2 se narovná.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** 1 000 kg·m^{-3}. **3.** $1{,}1\cdot10^{5}$ Pa neboli 1,1 atm. **5.** $2{,}9\cdot10^{4}$ N. **7.** $5{,}0\cdot10^{4}$ Pa. **9.** $1{,}90\cdot10^{4}$ Pa. **11.** $5{,}4\cdot10^{4}$ Pa. **13.** 0,52 m. **15.** (a) $6{,}06\cdot10^{9}$ N; (b) 20 atm, nemůže. **17.** 0,412 cm. **19.** $(1/4)\varrho g S(h_2{}^2 - h_1{}^2)^2$. **21.** 44 km. **23.** (a) $\varrho g d h^2/2$; (b) $\varrho g d h^3/6$; (c) $h/3$. **25.** (a) 2,2; (b) 2,4. **27.** $-3{,}9\cdot10^{-3}$ atm. **29.** (a) F_1S_2/S_1; (b) 100 N. **31.** 1 070 g. **33.** 1,5 g/cm^3. **35.** 600 kg/m^3. **37.** (a) 670 kg/m^3; (b) 740 kg/m^3. **39.** 390 kg; helium je nehořlavé. **41.** (a) 1,2 kg; (b) 1 300 kg/m^3.

43. 0,126 m^3. **45.** Pět. **47.** (a) 1,80 m^3; (b) 4,75 m^3. **49.** 2,79 g/cm^3. **51.** (a) 9,4 N; (b) 1,6 N. **53.** 4,0 m. **55.** 9,4 $m\cdot s^{-1}$. **57.** 45 $cm\cdot s^{-1}$. **59.** (a) 2,4 $m\cdot s^{-1}$; (b) 245 Pa. **61.** (a) 4,0 $m\cdot s^{-1}$; (b) $84\cdot10^3$ Pa. **63.** $1{,}17\cdot10^{-4}$ J. **65.** (a) 2; (b) 1/2; (c) musí se snížit na hodnotu $h_2 = h_1/4$. **67.** 116 $m\cdot s^{-1}$. **69.** (a) 6,4 m^3; (b) 5,4 $m\cdot s^{-1}$; (c) $9{,}8\cdot10^4$ Pa. **71.** 560 Pa; (b) $5{,}0\cdot10^4$ N. **73.** 40 $m\cdot s^{-1}$. **75.** (b) $H - h$; (c) $H/2$. **77.** (b) $22\cdot10^{-3}$ $m^3\cdot s^{-1}$. **79.** (b) 63,3 $m\cdot s^{-1}$.

Kapitola 16

KONTROLY **1.** (a) $-x_m$; (b) $+x_m$; (c) 0. **2.** Vztah (a). **3.** (a) 5 J; (b) 2 J; (c) 5 J. **4.** Vesměs stejná perioda (v rov. (16.32) je m zahrnuto v I). **5.** 1, 2, 3 (význam má poměr m/b, nikoliv k).

OTÁZKY **1.** Vztah (c). **3.** (a) 0; (b) mezi 0 a $+x_m$; (c) mezi $-x_m$ a 0; (d) mezi $-x_m$ a 0. **5.** (a) Směrem k $-x_m$; (b) směrem k $+x_m$; (c) mezi $-x_m$ a 0; (d) mezi $-x_m$ a 0; (e) rychlost se zvětšuje, velikost rychlosti zmenšuje; (f) rychlost i velikost rychlosti se zvětšují. **7.** (a) (3), (2), (1); (b) vesměs stejná frekvence. **9.** (3), (2), (1). **11.** Oscilátor s pružinou A. **13.** (c), (a); „kyvadlo“ (b) se nekýve, ale otáčí se dokola. **15.** (a), (b), (c) zůstane stejné; (d), (e) zmenší se; (f), (g) nebude kývat, ale otáčet se.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) 0,50 s; (b) 2,0 Hz; (c) 18 cm. **3.** (a) 245 N/m; (b) 0,284 s. **5.** 708 N/m. **7.** $f > 500$ Hz. **9.** (a) 100 N/m; (b) 0,45 s. **11.** (a) $6{,}28\cdot10^5$ $rad\cdot s^{-1}$; (b) 1,59 mm. **13.** (a) 1,0 mm; (b) 0,75 $m\cdot s^{-1}$; (c) 570 $m\cdot s^{-2}$. **15.** (a) $1{,}29\cdot10^5$ N/m; (b) 2,68 Hz. **17.** (a) 4,0 s; (b) $\frac{\pi}{2}$ $rad\cdot s^{-1}$; (c) 0,37 cm; (d) (0,37 cm) $\cos\frac{\pi}{2}t$; (e) (−0,58 $cm\cdot s^{-1}$) $\sin\frac{\pi}{2}t$; (f) 0,58 $cm\cdot s^{-1}$; (g) 0,91 $cm\cdot s^{-2}$; (h) 0; (i) 0,58 $cm\cdot s^{-1}$. **19.** (b) 12,47 kg; (c) 54,43 kg. **21.** 1,6 kg. **23.** (a) 1,6 Hz; (b) 1,0 $m\cdot s^{-1}$, 0; (c) 10 $m\cdot s^{-2}$, ±10 cm; (d) $(-10\ N\cdot m^{-1})x$. **25.** 22 cm. **27.** (a) 25 cm; (b) 2,2 Hz. **29.** (a) 0,500 m; (b) −0,251 m; (c) 3,06 $m\cdot s^{-1}$. **31.** (a) $0{,}183a$; (b) ve stejném směru. **37.** (a) $k_1 = (n+1)k/n$, $k_2 = (n+1)k$; (b) $f_1 = f\sqrt{(n+1)/n}$, $f_2 = f\sqrt{n+1}$. **39.** (b) 42 min. **41.** (a) 200 N/m; (b) 1,39 kg; (c) 1,91 Hz. **43.** (a) 130 N/m; (b) 0,62 s; (c) 1,6 Hz; (d) 5,0 cm; (e) 0,51 $m\cdot s^{-1}$. **45.** (a) 3/4; (b) 1/4; (c) $x_m/\sqrt{2}$. **47.** (a) 3,5 m; (b) 0,75 s. **49.** (a) 0,21 m; (b) 1,6 Hz; (c) 0,10 m. **51.** (a) 0,062 5 J; (b) 0,031 25 J. **53.** 12 s. **55.** (a) 39,5 rad/s; (b) 34,2 rad/s; (c) 124 rad/s^2. **57.** (a) 8,3 s; (b) ne. **59.** 9,47 $m\cdot s^{-2}$. **61.** 8,77 s. **63.** 5,6 cm. **65.** $2\pi\sqrt{(R^2+2d^2)/2gd}$. **67.** (a) 0,205 $kg\cdot m^2$; (b) 47,7 cm; (c) 1,50 s. **71.** $2\pi\sqrt{(L^2+12x^2)/(12gx)}$; (b) 0,289 m. **73.** 9,78 $m\cdot s^{-2}$. **75.** $2\pi\sqrt{m/(3k)}$. **77.** $\frac{1}{2\pi}(\sqrt{g^2+v^4/R^2}/L)^{1/2}$. **79.** (b) menší. **81.** (a) 2,0 s; (b) 18,5 N·m/rad. **83.** $0{,}29L$. **85.** 2,59krát. **87.** (a) 0,102 kg/s; (b) 0,137 J. **89.** $k = 490$ N/cm, $b = 1\,100$ $kg\cdot s^{-1}$. **91.** 1,9 in. **93.** (a) $y_m = 8{,}8\cdot10^{-4}$ m, $T = 0{,}18$ s, $\omega = 35$ $rad\cdot s^{-1}$; (b) $y_m = 5{,}6\cdot10^{-2}$ m, $T = 0{,}48$ s, $\omega = 13$ $rad\cdot s^{-1}$; (c) $y_m = 3{,}3\cdot10^{-2}$ m, $T = 0{,}31$ s, $\omega = 20$ $rad\cdot s^{-1}$.

Kapitola 17

KONTROLY **1.** 1 → (c); 2 → (a); 3 → (b). **2.** (a) (2), (3), (1); (b) (3), pak společně (1) a (2). **3.** (a). **4.** 0,20λ a 0,80λ společně, pak 0,60λ; 0,45λ. **5.** (a) (1); (b) (3); (c) (2). **6.** (a) 75 Hz; (b) 525 Hz.

OTÁZKY **1.** $7d$. **3.** Společně A a B, pak C, D. **5.** Částečná (blíže k destruktivní interferenci). **7.** (a) a (d) společně, pak (b) a (c) společně. **9.** (a) 8; (b) kmitna; (c) delší; (d) nižší. **11.** (a) Celočíselné násobky 3; (b) uzel; (c) uzel. **13.** Struna A. **15.** Snížení.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) 75 Hz; (b) 13 ms. **3.** (a) $7{,}5\cdot10^{14}$ Hz až $4{,}3\cdot10^{14}$ Hz; (b) 1,0 m až 200 m; (c) $6{,}0\cdot10^{16}$ Hz až $3{,}0\cdot10^{19}$ Hz. **5.** $y = 0{,}010\sin\{\pi(3{,}33x + 1\,100t)\}$, kde x a y jsou v metrech a t v sekundách. **11.** (a) $z = 3{,}0\sin(60y - 10\pi t)$, kde z je udáno v mm, y v cm a t v sekundách; (b) 9,4 $cm\cdot s^{-1}$. **13.** (a) $y = 2{,}0\sin\{2\pi(0{,}10x - 400t)\}$, kde x a y jsou udány v cm a t v sekundách; (b) 50 $m\cdot s^{-1}$; (c) 40 $m\cdot s^{-1}$. **15.** (b) 2,0 $cm\cdot s^{-1}$; (c) $y = (4{,}0\text{ cm})\sin\{\pi(x/10 - t/5 + 1)\}$, kde x je udáno v cm a t v sekundách; (d) −2,5 $cm\cdot s^{-1}$. **17.** 129 $m\cdot s^{-1}$. **19.** 135 N. **23.** (a) 15 $m\cdot s^{-1}$; (b) 0,036 N. **25.** $y = 0{,}12\sin(141x + 628t)$, kde y je v mm, x v metrech a t v sekundách. **27.** (a) 5,0 cm; (b) 40 cm; (c) 12 $m\cdot s^{-1}$; (d) 0,033 s; (e) 9,4 $m\cdot s^{-1}$; (f) $5{,}0\sin(16x + 190t + 0{,}79)$, kde x je v metrech, y v cm a t v sekundách. **29.** (a) $v_1 = 28{,}6$ $m\cdot s^{-1}$, $v_2 = 22{,}1$ $m\cdot s^{-1}$; (b) $M_1 = 187{,}5$ g, $M_2 = 312{,}5$ g. **31.** (a) $\sqrt{k(\Delta l)(l+\Delta l)/m}$. **33.** (a) $P_2 = 2P_1$; (b) $P_2 = P_1/4$. **35.** (a) 3,77 $m\cdot s^{-1}$; (b) 12,3 N; (c) nula; (d) 46,3 W; (e) nula; (f) nula; (g) ±0,50 cm. **37.** 82,8°, 1,45 rad, 0,23 vlnových délek. **39.** 5,0 cm. **41.** (a) 4,4 mm; (b) 112°. **43.** (a) $0{,}83y_1$; (b) 37°. **45.** (a) $2f_3$; (b) λ_3. **47.** 10 cm. **49.** (a) 82,0 $m\cdot s^{-1}$; (b) 16,8 m; (c) 4,88 Hz. **51.** 240 cm, 120 cm, 80 cm. **53.** 7,91 Hz, 15,8 Hz, 23,7 Hz. **55.** Ano, dvě rezonanční frekvence $f_{1A} = f_{4B}$, $f_{2A} = f_{8B}$. **57.** (a) 2,0 Hz, 200 cm, 400 $cm\cdot s^{-1}$; (b) $x = 50$ cm, 150 cm, 250 cm atd.; (c) $x = 0$, 100 cm, 200 cm atd. **63.** (a) 1,3 m; (b) $y' = 0{,}002\sin(9{,}4x)\cos(3\,800t)$, kde x a y jsou v metrech a t v sekundách. **67.** (b) V kladném směru osy x; výměna amplitud původních dvou postupných vln; (c) největší v $x = \lambda/4 = 6{,}26$ cm; nejmenší v $x = 0$ a $x = \lambda/2 = 12{,}5$ cm; (d) největší amplituda 4,0 mm odpovídá součtu amplitud původních postupných vln; nejmenší amplituda 1,0 mm odpovídá absolutní hodnotě jejich rozdílu.

Kapitola 18

KONTROLY **1.** Začíná klesat (příklad: posuňte myšleně křivky v obr. 18.6 doprava za bod $x = 42$ m). **2.** (a) Plně konstruktivní, $m = 0$; (b) plně destruktivní, $m = 4$. **3.** (a) 1 a 2 stejná, pak 3; (b) 3, pak 1 a 2

stejná. **4.** Druhá. **5.** Povolit. **6.** (*a*) větší; (*b*) menší; (*c*) ani (*d*) nelze rozhodnout; (*e*) větší; (*f*) menší. **7.** (a) 222 $m \cdot s^{-1}$; (b) +20 $m \cdot s^{-1}$.

OTÁZKY **1.** Pulz podél dráhy 2. **3.** (a) 2,0 vlnové délky; (b) 1,5 vlnové délky; (c) plně konstruktivní, plně destruktivní. **5.** (a) V protifázi; (b) v protifázi. **7.** 70 dB. **9.** (a) Dva; (b) kmitna. **11.** Všechny liché harmonické. **13.** Buď 501 Hz, 503 Hz a 508 Hz, anebo 505 Hz, 507 Hz a 508 Hz.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) Skutečná vzdálenost je asi o 3 % větší; (b) počet sekund dělit 4,7 (skutečná vzdálenost je o necelé 1 % větší) nebo násobit 0,21 (o 1,5 % menší). **3.** Posluchač rádia, přibližně o 0,85 s. **5.** $7{,}9 \cdot 10^{10}$ Pa. **7.** 9,999 2 cm $< x <$ 10,000 7 cm; 15,575 1 μs $< t <$ 15,577 5 μs. Chyba nesmí překročit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6\,420} \doteq 0{,}07$ %. **9.** 43,5 m. **11.** 40,7 m. **13.** 100 kHz. **15.** (a) 2,29 kHz, 0,229 kHz, 22,9 kHz; (b) 1,14 kHz, 0,114 kHz, 11,4 kHz. **17.** (a) 6,0 $m \cdot s^{-1}$; (b) $y = 0{,}30 \sin\{\pi(x/12 + 50t)\}$, kde x a y jsou v cm a t v sekundách. **19.** 4,12 rad. **21.** (a) $343(1 + 2m)$ Hz, kde m je celé číslo od 0 do 28; (b) $686m$ Hz, kde m je celé číslo od 1 do 29. **23.** (a) Osm; (b) osm. **25.** 64,7 Hz, 129 Hz. **27.** (a) 0,080 $W \cdot m^{-2}$; (b) 0,013 $W \cdot m^{-2}$. **29.** 36,8 nm. **31.** (a) 1 000krát; (b) 32krát. **33.** (a) 39,7 μ$W \cdot m^{-2}$; (b) 171 nm; (c) 0,893 Pa. **35.** (a) 59,7; (b) $2{,}81 \cdot 10^{-4}$. **37.** $s_m \sim r^{-1/2}$. **39.** (a) 5 000; (b) 71; (c) 71. **41.** 171 m. **43.** 3,16 km. **45.** (a) 5 200 Hz; (b) $a_{ZAD}/a_{ZBD} = 2$. **47.** 20 kHz. **49.** Čtyřikrát. **51.** Při výšce vodního sloupce $\frac{7}{8}$ m, $\frac{5}{8}$ m, $\frac{3}{8}$ m, $\frac{1}{8}$ m. **53.** (a) 5,0 cm od jednoho konce; (b) 1,2; (c) 1,2. **55.** (a) 1 130 Hz, 1 500 Hz a 1 880 Hz. **57.** (a) 230 Hz; (b) vyšší. **59.** (a) Uzel; (c) 22 s. **61.** 387 Hz. **63.** 0,02. **65.** 3,8 Hz. **67.** (a) 612 km/h od majitelky psa; (b) 124 km/h od majitelky. **69.** 4,6 $m \cdot s^{-1}$. **71.** $2{,}6 \cdot 10^{8}$ $m \cdot s^{-1}$. **73.** (a) 77,6 Hz; (b) 77,0 Hz. **75.** 33,0 km. **79.** (a) 970 Hz; (b) 1 030 Hz; (c) 60 Hz, ne. **81.** (a) 1,02 kHz; (b) 1,04 kHz. **83.** 1 540 $m \cdot s^{-1}$. **85.** 41 kHz. **87.** (a) 2,0 kHz; (b) 2,0 kHz. **89.** (a) 485,8 Hz; (b) 500,0 Hz; (c) 486,2 Hz; (d) 500,0 Hz. **91.** $1 \cdot 10^{6}$ $m \cdot s^{-1}$, vzdaluje se. **93.** 0,13c.

Kapitola 19

KONTROLY **1.** (a) Všechny stejné; (b) 50°X, 50°Y, 50°W. **2.** (a) (2) a (3) stejný, pak (1), pak (4); (b) (3), (2), potom (1) a (4) stejný. **3.** Materiál A. **4.** c a e. **5.** (a) Nula; (b) záporné. **6.** b a d stejné, pak a, c.

OTÁZKY **1.** 25 S°, 25 U°, 25 R°. **3.** c, ostatní stejné. **5.** B, potom A a C stejné. **7.** (a) Oba ve směru otáčení hodinových ručiček; (b) oba ve směru otáčení hodinových ručiček. **9.** c, a, b. **11.** Nahoru (při kapalné vodě vně a zespodu je $\Delta T = 0$ horizontálně i dolů). **13.** Při teplotě svých prstů. **15.** (3), (2), (1).

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** 2,71 K. **3.** 0,05 kPa, dusík. **5.** (a) 320 °F; (b) −12,3 °F. **7.** (a) −96 °F; (b) 56,7 °C. **9.** (a) −40 °C; (b) 575 K; (c) Celsiova a Kelvinova teplota nemohou nabývat stejné hodnoty. **11.** (a) $[A] =$ $= s^{-1}$. **13.** 1,000 22krát, tj. o $4{,}4 \cdot 10^{-3}$ cm. **15.** 0,038 in = 0,97 mm. **17.** (a) 9,996 cm; (b) 68 °C. **19.** O 170 km. **21.** O 0,32 cm^2. **23.** Vzroste o 29 cm^3. **25.** O 0,432 cm^3. **27.** Při −157 °C. **29.** Při 360 °C. **35.** +0,68 s za hodinu. **37.** (b) Použijte 39,3 cm oceli a 13,1 cm mosazi. **39.** (a) 523 $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$; (b) 0,600 mol, tedy $3{,}61 \cdot 10^{23}$ molekul; (c) 26,2 $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$. **41.** 94,61. **43.** 109 g. **45.** 1,30 MJ. **47.** 1,9krát větší. **49.** (a) 33,9 Btu; (b) 95,6 C°. **51.** (a) 52 MJ; (b) 0 °C. **53.** (a) 411 g; (b) 23 hal. **55.** 0,41 $kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$. **57.** 3,0 min. **59.** 73 kW. **61.** 2,17 g. **63.** 33 m^2. **65.** 33 g. **67.** (a) 0 °C; (b) 2,5 °C. **69.** 2 500 $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$. **71.** a: 120 J, b: 75 J, c: 30 J. **73.** (a) −200 J; (b) −293 J; (c) −93 J. **75.** −5,0 J. **77.** 33,3 kJ. **79.** 766 °C. **81.** (a) 1,2 $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$, 0,70 Btu/(ft·F°·h); (b) 0,030 $ft^2 \cdot F° \cdot h \cdot Btu^{-1}$. **83.** 1 660 $J \cdot s^{-1}$. **87.** Uspořádání b. **89.** (a) 2,0 MW; (b) 220 W. **91.** (a) 17 $kW \cdot m^{-2}$; (b) 18 $W \cdot m^{-2}$. **93.** −6,1 nW. **95.** 0,40 $cm \cdot h^{-1}$. **97.** Cu-Al: 84,3 °C; Al-mosaz: 57,6 °C.

Kapitola 20

KONTROLY **1.** Všechny kromě c. **2.** (a) Všechny stejně; (b) 3, 2, 1. **3.** U plynu A. **4.** 5 (největší změna T), potom společně 1, 2, 3, 4. **5.** 1, 2, 3, 4; $Q_4 < 0$ při izochorickém chlazení, $Q_3 = 0$, Q_2 se změní v práci W_2, ale Q_1 se změní ve větší práci W_1 a zvýší teplotu plynu.

OTÁZKY **1.** Vzroste, ale mnohem méně než na dvojnásobek (jsou zadány °C, ale je třeba dosazovat K). **3.** (a), (c), (b). **5.** 1 180 J. **7.** d, potom společně a a b, potom c. **9.** Izochorický děj. **11.** (a) Stejná; (b) vzroste; (c) poklesne; (d) vzroste. **13.** −4 J. **15.** (a) 1: víceatomové; 2: dvojatomové; 3: jednoatomové; (b) větší.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) 0,012 7; (b) $7{,}65 \cdot 10^{21}$. **3.** Asi 6 600 molekul. **5.** Počet molekul v inkoustu je asi $3 \cdot 10^{16}$; počet tvorů by byl asi $6 \cdot 10^{20}$, tedy zhruba 20 000krát větší. **7.** (a) $5{,}47 \cdot 10^{-8}$ mol ;(b) $3{,}29 \cdot 10^{16}$. **9.** (a) 106 mol; (b) 0,892 m^3. **11.** 27,0 $lb \cdot in^{-2}$. **13.** (a) $2{,}5 \cdot 10^{25}$ m^{-3}; (b) 1,2 kg. **15.** 5 600 J. **17.** 1/5. **19.** (a) Zmenší se o 45 J; (b) 180 K. **21.** 100 cm^3. **23.** 198 °F. **25.** $2{,}0 \cdot 10^{5}$ Pa. **27.** 180 $m \cdot s^{-1}$. **29.** $9{,}53 \cdot 10^{6}$ $m \cdot s^{-1}$. **31.** 313 °C. **33.** 1,9 kPa. **35.** (a) 0,035 3 eV, 0,048 3 eV; (b) 3 400 J, 4 650 J. **37.** $\Delta U = 5{,}21 \cdot 10^{-26}$ J, $\overline{E_k} = 5{,}65 \cdot 10^{-21}$ J; ΔU je vůči $\overline{E_k}$ zanedbatelná. **39.** (a) $6{,}75 \cdot 10^{-20}$ J; (b) 1 : 10,7. **41.** 0,32 nm. **43.** 15 cm. **45.** (a) $3{,}27 \cdot 10^{10}$; (b) 172 m. **47.** (a) 22,4 l; (b) 1 : 2,25; (c) $8{,}4 \cdot 10^{-5}$ m; (d) stejně jako v (c). **51.** (a) 3,2 $cm \cdot s^{-1}$; (b) 3,4 $cm \cdot s^{-1}$; (c) 4,0 $cm \cdot s^{-1}$. **53.** (a) v_P, v_{ef}, $\overline{v}$; (b) pořadí je opačné. **55.** (a) $1{,}0 \cdot 10^{4}$ K, $1{,}6 \cdot 10^{5}$ K; (b) 440 K, 7 000 K; (c) kyslík. **57.** 4,7. **59.** (a) $2N/(3v_0)$; (b) $N/3$; (c) $1{,}22v_0$; (d) $1{,}31v_0$. **61.** $RT \ln(V_f/V_i)$. **63.** (a) 15,9 J; (b) 33,4 $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$; (c) 26,1 $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$.

65. $(n_1C_1+n_2C_2+n_3C_3)/(n_1+n_2+n_3)$. **67.** (a) −5,0 kJ; (b) 2,0 kJ; (c) 5,0 kJ. **69.** (a) 0,375 mol; (b) 1 090 J; (c) 0,714. **71.** (a) $p_f = 14$ atm; (b) $T_f = 620$ K. **79.** 0,63. **81.** (a) Jednoatomový; (b) $2{,}7\cdot10^4$ K; (c) $4{,}5\cdot10^4$ mol; (d) 3,4 kJ, 340 kJ; (e) 0,01. **83.** 5 m^3. **85.** (a) Hodnoty v pořadí Q, ΔE_{int}, W: děj 1 → 2: 3 740 J, 3 740 J, 0; děj 2 → 3: 0, −1 810 J, 1 810 J; děj 3 → 1: −3 220 J, −1 930 J, −1 290 J; celý cyklus: 520 J, 0, 520 J; (b) $V_2 = 0{,}024\,6$ m^3, $p_2 = 2p_1$, $V_3 = 0{,}037\,3$ m^3, $p_3 = p_1 = 1{,}01\cdot10^5$ Pa.

Kapitola 21

KONTROLY **1.** (a), (b), (c). **2.** Menší. **3.** (c), (b), (a). **4.** (a), (d), (c), (b). **5.** (b).

OTÁZKY **1.** Nemění se. **3.** B, A, C, D. **5.** Je stejná. **7.** (a) Zůstává konstantní; (b) roste; (c) klesá. **9.** (a) Zůstává konstantní; (b) roste; (c) klesá. **11.** (a) 0; (b) 1/4; (c) 1/2.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** 14,4 J·K^{-1}. **3.** (a) $9{,}22\cdot10^3$ J; (b) 23,1 J·K^{-1}; (c) 0. **5.** $5{,}79\cdot10^4$ J; 173 J·K^{-1}. **7.** (a) 14,6 J·K^{-1}; (b) 30,2 J·K^{-1}. **9.** (a) 57,0 °C; (b) −22,1 J·K^{-1}; (c) +24,9 J·K^{-1}; (d) +2,8 J·K^{-1}. **13.** (a) 320 K; (b) 0; (c) +1,72 J·K^{-1}. **15.** 0,75 J·K^{-1}. **17.** (a) −943 J·K^{-1}; (b) +943 J·K^{-1}; (c) ano. **19.** (a) $3p_0V_0$; (b) $6RT_0$, $(3/2)R\ln 2$; (c) obě změny jsou nulové. **21.** 31 %; 16 kJ. **23.** (a) 23,6 %; (b) $1{,}49\cdot10^4$ J. **25.** −7,2 °C; 67,8 °C. **27.** (a) $1{,}47\cdot10^3$ J; (b) $-5{,}54\cdot10^2$ J; (c) $9{,}18\cdot10^2$ J; (d) 62,4 %. **29.** (a) 2 270 J; (b) 14 800 J; (c) 15,4 %; (d) 75,0 %, je větší. **31.** (a) 78 %; (b) 81 kg·s^{-1}. **33.** (a) $p_2 = 3p_1$, $V_2 = nRT_1/p_1$; $p_4 = p_1/4^{\gamma}$, $T_4 = T_1/4^{(\gamma-1)}$; $p_3 = 3p_1/4^{\gamma}$, $T_3 = 3T_1/4^{(\gamma-1)}$; (b) $1 - 1/4^{(\gamma-1)}$. **35.** (a) 21 J. **37.** 440 W. **39.** 186 W. **41.** $\{1-(T_2/T_1)\}/\{1-(T_4/T_3)\}$. **45.** (a) $W = N!/(n_1!n_2!n_3!)$; (b) $\{(N/2)!(N/2)!\}/\{(N/3)!(N/3)!(N/3)!\}$; (c) $4{,}2\cdot10^{16}$.

Kapitola 22

KONTROLY **1.** C a D se přitahují; B a D se přitahují. **2.** (a) Doleva; (b) doleva; (c) doleva. **3.** (a) (1), (3), (2); (b) menší. **4.** $-15e$ (celkový náboj $-30e$ se rovnoměrně rozdělí na obě koule).

OTÁZKY **1.** Ne, platí pouze pro bodové náboje, tělesa, která lze za bodové náboje považovat (např. ve velkých vzdálenostech) a pro rovnoměrně nabité kulové vrstvy (včetně plných koulí). **3.** (*a*) a (*b*). **5.** Dvě možnosti: jedna vlevo od částic, druhá mezi protony. **7.** $6Q^2/(4\pi\varepsilon_0 d^2)$, doleva. **9.** (a) Stejné; (b) menší; (c) vyruší se; (d) nevyruší se; (e) kladný směr osy y; (f) záporný směr osy y; (g) kladný směr osy x; (h) záporný směr osy x. **11.** (a) A, B a D; (b) všechny čtyři; (c) spojit A a D; rozpojit je; pak spojit jednu z nich s B. (Existují ještě dvě další řešení.) **13.** (a) Může být, ale nemusí; (b) musí být. **15.** Stejná. **17.** D.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** 0,50 C. **3.** 2,81 N na každý náboj. **5.** (a) $4{,}9\cdot10^{-7}$ kg; (b) $7{,}1\cdot10^{-11}$ C. **7.** $3F/8$. **9.** (a) 1,60 N; (b) 2,77 N. **11.** (a) $Q_1 = 9Q_2$; (b) $Q_1 = -25Q_2$. **13.** Buď −1,00 μC a +3,00 μC, nebo +1,00 μC a −3,00 μC. **15.** (a) 36 N, −10° od osy x; (b) $x = -8{,}3$ cm, $y = +2{,}7$ cm. **17.** (a) $5{,}7\cdot10^{13}$ C, ne; (b) $6{,}0\cdot10^5$ kg. **19.** (a) $Q_1 = -2\sqrt{2}Q_2$; (b) ne. **21.** 3,1 cm. **23.** $2{,}89\cdot10^{-9}$ N. **25.** $-1{,}32\cdot10^{13}$ C. **27.** (a) $3{,}2\cdot10^{-19}$ C; (b) dvojmocné. **29.** (a) $8{,}99\cdot10^{-19}$ N; (b) 625. **31.** 5,1 m pod elektronem. **33.** 1,3 d. **35.** (a) 0; (b) $1{,}9\cdot10^{-9}$ N. **37.** 10^{18} N. **39.** (a) ^{9}B; (b) ^{13}N; (c) ^{12}C. **41.** (a) $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{d^2}\alpha(1-\alpha)$; (c) 0,5; (d) 0,15 a 0,85.

Kapitola 23

KONTROLY **1.** (a) Doprava; (b) doleva; (c) doleva; (d) doprava (p a e mají náboj o stejné velikosti, p je vzdálenější). **2.** Všechny stejné. **3.** (a) V kladném směru osy y; (b) v kladném směru osy x; (c) v záporném směru osy y. **4.** (a) Vlevo; (b) vlevo; (c) klesat. **5.** (a) Všechny stejné; (b) stejné (1) a (3), potom stejné (2) a (4).

OTÁZKY **1.** (a) V kladném směru osy x; (b) dolů a doprava; (c) v bodě A. **3.** Jsou dva takové body: jeden vlevo od částic, druhý mezi protony. **5.** (a) Ano; (b) směrem k náboji; (c) ne (vektory intenzity nemají stejný směr); (d) vyruší se; (e) zesílí se; (f) v záporném směru osy y. **7.** (a) (3), pak (1) a (2) stejné (nula); (b) všechny stejné; (c) stejné (1) a (2), pak (3). **9.** (a) Doprava; (b) velikost rychlosti protonu p$^+$ a mionu μ^- stoupá, pionu π^+ klesá, neutronu n se nemění. **11.** (*a*), (*b*), (*c*). **13.** (a) (4), (3), (1), (2); (b) (3), pak (1) a (4) stejný, pak (2).

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) $6{,}4\cdot10^{-18}$ N; (b) 20 N·C^{-1}. **3.** Na obrázku doprava. **7.** 56 pC. **9.** $3{,}07\cdot10^{21}$ N·C^{-1}, radiálně směrem od jádra. **13.** (a) $Q/(8\pi\varepsilon_0 d^2)$, doleva; $3Q/(\pi\varepsilon_0 d^2)$, doprava; $7Q/16(\pi\varepsilon_0 d^2)$, doleva. **15.** 0. **17.** 9 h 30 min. **19.** $E = (Q/\pi\varepsilon_0 a^2)$, podél osy souměrnosti směrem od trojúhelníku. **21.** $7{,}4Q/(4\pi\varepsilon_0 d^2)$, leží v prvním kvadrantu a svírá s osou x úhel 28°. **23.** $6{,}88\cdot10^{-28}$ C·m. **25.** $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(p/r^3)$, antiparalelně s $\boldsymbol{p}$. **29.** $R/\sqrt{2}$. **31.** $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(4Q/\pi R^2)$, ve směru rostoucího y. **37.** (a) 0,10 μC; (b) $1{,}3\cdot10^{17}$; (c) $5{,}0\cdot10^{-6}$. **39.** $3{,}51\cdot10^{15}$ m·s^{-2}. **41.** $6{,}6\cdot10^{-15}$ N. **43.** $2{,}03\cdot10^{-7}$ N·C^{-1}, svisle vzhůru. **45.** (a) −0,029 C; (b) koule by se vlivem odpudivých sil roztrhla. **47.** (a) $1{,}92\cdot10^{12}$ m·s^{-2}; (b) $1{,}96\cdot10^5$ m·s^{-1}. **49.** (a) $9{,}04\cdot10^{-16}$ kg; (b) 120. **51.** $1{,}64\cdot10^{-19}$ C (asi o 3 % vyšší). **53.** (a) 0,245 N, ve směru osy $+x$, ve čtvrtém kvadrantu, svírá s osou x úhel 11,3°; (b) $x = 108$ m, $y = -21{,}6$ m. **55.** 27 μm. **57.** (a) Ano; (b) na horní desku, 2,73 cm. **59.** (a) 0; (b) $8{,}5\cdot10^{-22}$ N·m; (c) 0. **61.** $(1/2\pi)\sqrt{pE/I}$. **63.** (a) $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2Qd^{-2}\alpha(1+\alpha^2)^{-3/2}$; (c) $\alpha = 0{,}707$; (d) $\alpha = 0{,}21$ a $\alpha = 1{,}9$.

Kapitola 24

KONTROLY **1.** (a) $+ES$; (b) $-ES$; (c) 0; (d) 0. **2.** (a) (2); (b) (3); (c) (1). **3.** (a) Stejný; (b) stejný; (c) stejný. **4.** (a) $+50Q$; (b) $-150Q$. **5.** 3 a 4 stejné, potom 2, 1.

OTÁZKY **1.** (a) $8\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-1}}$; (b) 0. **3.** (a) Všechny stejné (nula); (b) všechny stejné. **5.** $+13Q/\varepsilon_0$. **7.** Všechny stejné. **9.** Všechny stejné. **11.** 2σ, σ, 3σ nebo 3σ, σ, 2σ. **13.** (a) Všechny stejné ($E = 0$); (b) všechny stejné. **15.** (a) Stejné ($E = 0$); (b) klesá; (c) klesá (k nule); (d) stejné.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) $693\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$; (b) $693\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$; (c) $347\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$; (d) $347\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$; (e) $575\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$. **3.** (a) 0; (b) $-3{,}92\,\mathrm{N{\cdot}m^{-2}{\cdot}C^{-1}}$; (c) 0; (d) 0 pro každé pole. **5.** (a) Obklopuje $2Q$ a $-2Q$ nebo všechny čtyři náboje; (b) obklopuje $2Q$ a Q; (c) není možné. **7.** $2{,}0{\cdot}10^{-5}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-1}}$. **9.** $Q/(6\varepsilon_0)$. **11.** (a) $-\pi R^2 E$; (b) $\pi R^2 E$. **13.** $-4{,}2{\cdot}10^{-10}\,\mathrm{C}$. **15.** 0 pro každou ze tří stěn, které se dotýkají Q, $Q/(24\varepsilon_0)$ pro ostatní stěny. **17.** $2{,}0\,\mu\mathrm{C{\cdot}m^{-2}}$. **19.** (a) $4{,}5{\cdot}10^{-7}\,\mathrm{C{\cdot}m^{-2}}$; (b) $5{,}1{\cdot}10^{4}\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$. **21.** (a) $-3{,}0{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{C}$; (b) $+1{,}3{\cdot}10^{-5}\,\mathrm{C}$. **23.** (a) $0{,}32\,\mu\mathrm{C}$; (b) $0{,}14\,\mu\mathrm{C}$. **27.** (a) $E = Q/(2\pi\varepsilon_0 Lr)$, směřuje radiálně dovnitř; (b) $-Q$ na vnitřní i vnější stěně; (c) $E = Q/(2\pi\varepsilon_0 Lr)$, směřuje radiálně ven. **29.** $3{,}6\,\mathrm{nC}$. **31.** (b) $\varrho R^2/(2\varepsilon_0 r)$. **33.** (a) $5{,}3{\cdot}10^{7}\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$; (b) $60\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$. **35.** $5{,}0\,\mathrm{nC{\cdot}m^{-2}}$. **37.** $0{,}44\,\mathrm{mm}$. **39.** (a) $4{,}9{\cdot}10^{-22}\,\mathrm{C{\cdot}m^{-2}}$; (b) dolů. **41.** (a) $\varrho x/\varepsilon_0$; (b) $\varrho d/(2\varepsilon_0)$, nezávislá na x. **43.** (a) $-750\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-1}}$; (b) $-6{,}64\,\mathrm{nC}$. **45.** (a) $4{,}0{\cdot}10^{6}\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$; (b) 0. **47.** (a) 0; (b) $Q_a/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$; (c) $(Q_a + Q_b)/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$; (d) vnitřní stěna vnější koule: 0, vnější stěna vnitřní koule: Q_a, vnitřní stěna vnější koule: $-Q_a$, vnější stěna vnější koule: $Q_a + Q_b$. **51.** (a) $-Q$; (b) $+Q$; (c) $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ radiálně směrem ven; (d) $E = 0$; (e) $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ radiálně směrem ven; (f) 0; (g) $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, radiálně směrem ven; (h) ano, náboj se indukuje; (i) ne; (j) ano; (k) ne; (l) ne. **53.** (a) $E = Qr/(4\pi\varepsilon_0 a^3)$; (b) $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$; (c) 0; (d) 0; (e) na vnitřní $-Q$, na vnější 0. **55.** $Q/(2\pi a^2)$. **59.** $\alpha = 0{,}80$.

Kapitola 25

KONTROLY **1.** (a) Zápornou; (b) roste. **2.** (a) Kladnou; (b) vyšší. **3.** (a) Doprava; (b) (1), (2), (3), (5): kladná; (4), záporná; (c) (3), pak (1), (2) a (5) stejně, pak (4). **4.** Všechny stejně. **5.** A, C (nula), B. **6.** (a) (2), pak (1) a (3) stejně; (b) (3); (c) bude se zrychlovat směrem doleva. **7.** Blíž (polovina z 9,23 fm).

OTÁZKY **1.** (a) S vyšším; (b) kladná; (c) záporná; (d) všechny stejně. **3.** (a) (1) a (2); (b) pro žádnou; (c) ne; (d) (1) a (2) ano, (3) a (4) ne. **5.** (b), pak (a), (c) a (d) stejná. **7.** (a) Záporná; (b) nulová. **9.** (a) (1), pak (2) a (3) stejně; (b) 3. **11.** Vlevo. **13.** (a), (b), (c). **15.** (a) (3), (2), (1); (b) nula. **17.** (a) Kladná; (b) kladná; (c) záporná; (d) všechny stejně. **19.** (a) Ne; (b) ano. **21.** Ne (body na průsečnici by měly dvě rozdílné hodnoty potenciálu). **23.** (a)–(b) všechny stejně; (c) (C), (B), (A); (d) všechny stejně.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** 1,2 GeV. **3.** (a) Klesne o $3{,}0{\cdot}10^{10}\,\mathrm{J}$; (b) $7{,}7\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$; (c) $9{,}0{\cdot}10^{4}\,\mathrm{kg}$. **5.** 2,90 kV. **9.** 8,8 mm. **11.** (a) $136\,\mathrm{MV{\cdot}m^{-1}}$; (b) $8{,}82\,\mathrm{kV{\cdot}m^{-1}}$. **13.** (b) Protože jsme bod s $\varphi = 0$ zvolili jinde; (c) $Q/(8\pi\varepsilon_0 R)$; (d) rozdíly potenciálů jsou nezávislé na volbě bodu $\varphi = 0$. **15.** (a) $-4\,500\,\mathrm{V}$; (b) $-4\,500\,\mathrm{V}$. **17.** 843 V. **19.** $2{,}8{\cdot}10^{5}$. **21.** $x = d/4$ a $x = -d/2$. **23.** Žádný. **25.** (a) 3,3 nC; (b) $12\,\mathrm{nC{\cdot}m^{-2}}$. **27.** $6{,}4{\cdot}10^{8}\,\mathrm{V}$. **29.** 190 MV. **31.** (a) $-4{,}8\,\mathrm{nm}$; (b) 8,1 nm; (c) ne. **33.** $16{,}3\,\mu\mathrm{V}$. **35.** (a) $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda \ln\bigl(L/2 + \sqrt{L^2/4 + d^2}\bigr)/d$; (b) 0. **37.** (a) $-\frac{5Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$; (b) $-\frac{5Q}{4\pi\varepsilon_0}(z^2 + R^2)^{-1/2}$. **39.** $0{,}113\sigma R/\varepsilon_0$. **41.** $Q/(4\pi\varepsilon_0 L)\cdot \ln(1 + L/d)$. **43.** $670\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$. **45.** $p/(2\pi\varepsilon_0 r^3)$. **47.** $39\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$, ve směru $-x$. **49.** (b) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Qz(z^2 + R^2)^{-3/2}$. **51.** (a) $c\bigl(\sqrt{L^2 + y^2} - y\bigr)/(4\pi\varepsilon_0)$; (b) $E = c/(4\pi\varepsilon_0)\bigl(1 - y/\sqrt{L^2 + y^2}\bigr)$; (c) pro výpočet $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ neznáme $\varphi(P_2')$ v bodech P_2' mimo osu y poblíž P_2. **53.** (a) 2,5 MV; (b) 5,1 J; (c) 6,9 J. **55.** $-1{,}9\,\mathrm{J}$. **57.** (a) 0,484 MeV; (b) 0. **59.** 2,1 d. **61.** 0. **63.** (a) 27,2 V; (b) $-27{,}2\,\mathrm{eV}$; (c) 13,6 eV; (d) 13,6 eV. **65.** $1{,}8{\cdot}10^{-10}\,\mathrm{J}$. **67.** $1{,}48{\cdot}10^{7}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. **69.** $Q_0 Q/(4\pi\varepsilon_0 E_k)$. **71.** $0{,}32\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. **73.** $1{,}6{\cdot}10^{-9}\,\mathrm{m}$. **77.** (a) $\varphi_1 = \varphi_2$; (b) $Q_1 = Q/3$, $Q_2 = 2Q/3$; (c) 2. **79.** (a) $-0{,}12\,\mathrm{V}$; (b) $1{,}8{\cdot}10^{-8}\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$, radiálně směrem dovnitř. **81.** (a) $12\,000\,\mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$; (b) 1 800 V; (c) 5,8 cm. **83.** (c) 4,24 V.

Kapitola 26

KONTROLY **1.** (a) Nezmění se; (b) nezmění se. **2.** (a) Klesá; (b) roste; (c) klesá. **3.** (a) U, $Q/2$; (b) $U/2$, Q. **4.** (a) $Q_0 = Q_1 + Q_{34}$; (b) stejný (C_3 a C_4 jsou v sérii). **5.** (a) Stejná; (b)–(d) roste; (e) stejná (při stejné vzdálenosti desek je stejný také rozdíl potenciálů). **6.** (a) Stejná; (b) klesá; (c) roste.

OTÁZKY **1.** a, 2; b, 1; c, 3. **3.** (a) Vzroste; (b) nezmění se. **5.** (a) Paralelním; (b) sériovém. **7.** (a) $C/3$; (b) $3C$; (c) paralelním. **9.** (a) Stejné; (b) menší. **11.** (a)–(d) menší. **13.** (a) (2); (b) (3); (c) (1). **15.** Zvětšit vzdálenost desek d, ale také jejich plochu S tak, aby poměr S/d zůstal konstantní.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** 7,5 pC. **3.** 3,0 mC. **5.** (a) 140 pF; (b) 17 nC. **7.** (a) 84,5 pF; (b) $191\,\mathrm{cm^2}$. **9.** (a) $11\,\mathrm{cm^2}$; (b) 11 pF; (c) 1,2 V. **13.** (b) $4{,}6{\cdot}10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}}$. **15.** $7{,}33\,\mu\mathrm{F}$. **17.** 315 mC. **19.** (a) $10{,}0\,\mu\mathrm{F}$; (b) $Q_2 = 0{,}800\,\mathrm{mC}$, $Q_1 = 1{,}20\,\mathrm{mC}$; (c) 200 V pro oba. **21.** (a) $d/3$; (b) $3d$. **25.** (a) Pět v sérii; (b) tři skupiny jako v (a) a zapojit je paralelně (jsou i jiné možnosti). **27.** 43 pF. **29.** (a) 50 V; (b) $5{,}0{\cdot}10^{-5}\,\mathrm{C}$; (c) $1{,}5{\cdot}10^{-4}\,\mathrm{C}$. **31.** (a) $Q_1 = 9{,}0\,\mu\mathrm{C}$, $Q_2 = 16\,\mu\mathrm{C}$, $Q_3 = 9{,}0\,\mu\mathrm{C}$, $Q_4 = 16\,\mu\mathrm{C}$; (b) $Q_1 = 8{,}4\,\mu\mathrm{C}$,

$Q_2 = 17\,\mu C$, $Q_3 = 11\,\mu C$, $Q_4 = 14\,\mu C$. **33.** 99,6 nJ. **35.** 72 F. **37.** O 4,9 %. **39.** 0,27 J. **41.** 0,11 $J \cdot m^{-3}$. **43.** (a) 2,0 J. **45.** (a) $Q_1 = 0{,}21$ mC, $Q_2 = 0{,}11$ mC, $Q_3 = 0{,}32$ mC; (b) $U_1 = U_2 = 21$ V, $U_3 = 79$ V; (c) $E_{p,1} = 2{,}2$ mJ, $E_{p,2} = 1{,}1$ mJ, $E_{p,3} = 13$ mJ. **47.** (a) $Q_1 = Q_2 = 0{,}33$ mC, $Q_3 = 0{,}40$ mC; (b) $U_1 = 33$ V, $U_2 = 67$ V, $U_3 = 100$ V; (c) $E_{p,1} = 5{,}6$ mJ, $E_{p,2} = 11$ mJ, $E_{p,3} = 20$ mJ. **53.** Pyrex. **55.** (a) 6,2 cm; (b) 280 pF. **57.** 0,63 m^2. **59.** (a) 2,85 m^3; (b) $1{,}01 \cdot 10^4$. **61.** (a) $\varepsilon_0 S/(d-b)$; (b) $d/(d-b)$; (c) $-q^2 b/(2\varepsilon_0 S)$, vtahován dovnitř. **65.** $\frac{\varepsilon_0 S}{4d}\left(\varepsilon_{r,1} + \frac{2\varepsilon_{r,2}\varepsilon_{r,3}}{\varepsilon_{r,2}+\varepsilon_{r,3}}\right)$. **67.** (a) 13,4 pF; (b) 1,15 nC; (c) $1{,}13 \cdot 10^4$ $N \cdot C^{-1}$; (d) $4{,}33 \cdot 10^3$ $N \cdot C^{-1}$. **69.** (a) 7,1; (b) 0,77 μC. **71.** (a) 0,606; (b) 0,394.

Kapitola 27

KONTROLY **1.** 8 A, doprava. **2.** (a)–(c) doprava. **3.** (a), (c) stejný proud; (b) menší. **4.** Součástka 2. **5.** (a) a (b) stejné, dále (d), pak (c).

OTÁZKY **1.** a, b, c stejný, potom d nulový. **3.** (b), (a), (c). **5.** A, B, C stejný, potom A + B, B + C stejný, potom A + B + C. **7.** (a)–(c) 1 a 2 stejné, potom 3. **9.** C, A, B. **11.** (b), (a), (c). **13.** (a) Vodiče 1, 4, polovodiče 2, 3; (b) 2 a 3; (c) všechny čtyři.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** $1{,}25 \cdot 10^{15}$. **3.** 6,7 $\mu C \cdot m^{-2}$. **5.** Typ CW14. **7.** (a) $2{,}4 \cdot 10^{-5}$ $A \cdot m^{-2}$; (b) $1{,}8 \cdot 10^{-15}$ $m \cdot s^{-1}$. **9.** 0,67 A, směrem k záporné elektrodě. **11.** (a) 0,654 $\mu A \cdot m^{-2}$; (b) 83,4 MA. **13.** 13,5 min. **15.** (a) $J_0 S/3$; (b) $2J_0 S/3$. **17.** $2{,}0 \cdot 10^{-8}$ Ω·m. **19.** 100 V. **21.** (a) 1,53 kA; (b) 54,1 $MA \cdot m^{-2}$; (c) $10{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ω·m, platina. **23.** (a) 253 °C; (b) ano. **25.** (a) 0,38 mV; (b) nižší; (c) 3 min 58 s. **27.** 54 Ω. **29.** 3,0. **31.** (a) 1,3 mΩ; (b) 4,6 mm. **33.** (a) 6,0 mA; (b) $1{,}59 \cdot 10^{-8}$ V; (c) 21,2 nΩ. **35.** 2 000 K. **37.** (a) Měď $5{,}32 \cdot 10^5$ $A \cdot m^{-2}$, hliník $3{,}27 \cdot 10^5$ $A \cdot m^{-2}$; (b) měď 1,01 $kg \cdot m^{-1}$, hliník 0,495 $kg \cdot m^{-1}$. **39.** 0,40 Ω. **41.** (a) $R = \varrho L/(\pi ab)$. **43.** 14 kC. **45.** 11,1 Ω. **47.** (a) 3,8 kW; (b) 33 Kč. **49.** 0,135 W. **51.** (a) 1,69 A; (b) 2,15 $MA \cdot m^{-2}$; (c) 36,3 $mV \cdot m^{-1}$; (d) 2,09 W. **53.** (a) $1{,}3 \cdot 10^5$ $A \cdot m^{-2}$; (b) 94 mV. **55.** (a) 126 Kč (30 dnů); (b) 529 Ω; (c) 0,435 A. **57.** 660 W. **59.** (a) $3{,}1 \cdot 10^{11}$; (b) 25 μA; (c) 1 300 W; 25 MW. **61.** 27 $cm \cdot s^{-1}$. **63.** (a) 120 Ω; (b) 107 Ω; (c) $5{,}3 \cdot 10^{-3}$/C°; (d) $5{,}9 \cdot 10^{-3}$/C°; (e) 276 Ω.

Kapitola 28

KONTROLY **1.** (a) Doprava; (b) všude stejný; (c) bod b, potom stejný v bodech a, c; (d) bod b, potom stejný v bodech a, c. **2.** (a) Stejný; (b) R_1, R_2, R_3. **3.** (a) Menší; (b) větší; (c) stejné. **4.** (a) $U/2$, I; (b) U, $I/2$. **5.** (a) 1, 2, 4, 3; (b) 4, potom stejný 1 a 2, potom 3.

OTÁZKY **1.** (3), (4), (1), (2). **3.** (a) Ne; (b) ano; (c) stejné (protože všechny obvody jsou stejné). **5.** Paralelně, R_2, R_1, sériově. **7.** (a) Stejné; (b) větší. **9.** (a) Zmenší; (b) zmenší; (c) zvětší. **11.** C_1, 15 V; C_2, 35 V; C_3, 20 V; C_4, 20 V; C_5, 30 V. **13.** 60 μC. **15.** c, b, a. **17.** (a) Stejný; (b) (1), (3), (2). **19.** (1), (3) a (4) stejné (8 V na každém rezistoru), potom (2), (5) (4 V na každém rezistoru).

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) 4 800 Kč; (b) 1,40 Kč. **3.** 11 kJ. **5.** (a) Proti směru otáčení hodinových ručiček; (b) baterie 1; (c) B. **7.** (a) 80 J; (b) 67 J; (c) 13 J se přemění v teplo uvnitř baterie. **9.** (a) 14 V; (b) 100 W; (c) 600 W; (d) 10 V, 100 W. **11.** (a) 50 V; (b) 48 V; (c) B je připojen k zápornému pólu. **13.** 2,5 V. **15.** (a) 6,9 km; (b) 20 Ω. **17.** 8,0 Ω. **19.** 10^{-6}. **21.** Kabel. **23.** (a) 1 000 Ω; (b) 300 mV; (c) $2{,}3 \cdot 10^{-3}$. **25.** (a) 3,41 A nebo 0,586 A; (b) 0,293 V nebo 1,71 V. **27.** 5,56 A. **29.** 4,0 Ω a 12 Ω. **31.** 4,50 Ω. **33.** 0,00 A, 2,00 A, 2,40 A, 2,86 A, 3,00 A, 3,60 A, 3,75 A, 3,94 A. **35.** $U = \varphi_d - \varphi_c = +0{,}25$ V. **37.** Sedm. **39.** (a) 2,50 Ω; (b) 3,13 Ω. **41.** Devět, např. sériově zapojit tři paralelní trojice anebo paralelně zapojit tři sériové trojice. **43.** (a) Levá větev: 0,67 A dolů, prostřední větev: 0,33 A nahoru, pravá větev: 0,33 A nahoru; (b) 3,3 V. **47.** (a) 120 Ω; (b) $I_1 = 51$ mA, $I_2 = I_3 = 19$ mA, $I_4 = 13$ mA. **49.** (a) 19,5 Ω; (b) 0; (c) ∞; (d) 82,3 W, 57,6 W. **51.** (a) Měď 1,11 A, hliník 0,893 A; (b) 126 m. **53.** (a) 13,5 kΩ; (b) 1 500 Ω; (c) 167 Ω; (d) 1 480 Ω. **55.** (a) 0,45 A. **57.** −0,9 %. **59.** (a) 12,5 V; (b) 50 A. **65.** (a) $0{,}41\tau_C$; (b) $1{,}1\tau_C$. **67.** $4{,}6\tau_C$. **69.** (a) 0,955 $\mu C \cdot s^{-1}$; (b) 1,08 μW; (c) 2,74 μW; (d) 3,82 μW. **71.** 2,35 MΩ. **73.** 0,72 MΩ. **75.** 24,8 Ω až 14,9 kΩ. **77.** (a) Pro $t = 0$ je $I_1 = 1{,}1$ mA, $I_2 = I_3 = 0{,}55$ mA, pro $t \to \infty$ je $I_1 = I_2 = 0{,}82$ mA, $I_3 = 0$; (c) pro $t = 0$ je $U_2 = 400$ V, pro $t \to \infty$ je $U_2 = 600$ V; (d) t je větší než několik časových konstant obvodu ($\tau_C = 7{,}1$ s). **79.** (a) $U_s = -IR + \mathscr{E}$; (b) 13,6 V; (c) 0,060 Ω. **81.** (a) 6,4 V; (b) 3,6 W; (c) 17 W; (d) −5,6 W; (e) bod a.

Kapitola 29

KONTROLY **1.** (a): $+z$; (b): $-x$; (c): $F_B = 0$. **2.** (a) (2), poté stejně (1) a (3) (nula); (b) (4). **3.** (a) $+z$ a $-z$ stejně, poté $+y$ a $-y$ stejně a pak $+x$ a $-x$ stejně (nula); (b) $+y$. **4.** (a) Elektron; (b) po směru hodinových ručiček. **5.** $-y$. **6.** (a) Všechny stejně; (b) nejdřív (1) a (4) stejně, pak (2) a (3) stejně.

OTÁZKY **1.** (a) Všechny stejně; (b) (1) a (2) (náboj je záporný). **3.** (a): Ne, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{F}_B$ musí být kolmé; (b): ano; (c): ne, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{F}_B$ musí být kolmé. **5.** (a) $\boldsymbol{F}_E$; (b) $\boldsymbol{F}_B$. **7.** (a) Na pravém křídle; (b) k pravé. **9.** (a) Záporný; (b) rovná v_0; (c) rovná T_0; (d) půlkružnice. **11.** (a) $\boldsymbol{B}_1$; (b) $\boldsymbol{B}_1$: od nás; $\boldsymbol{B}_2$: k nám; (c) menší. **13.** Všechny. **15.** Všechny stejné. **17.** (a) Kladná; (b) (α) a (β) stejně, pak (γ) (nulová).

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** $kg \cdot A^{-1} \cdot s^{-2}$. **3.** (a) $9{,}56 \cdot 10^{-14}$ N, 0; (b) 0,267°. **5.** (a) Na východ; (b) $6{,}28 \cdot 10^{14}$ $m \cdot s^{-2}$; (c) 2,98 mm. **7.** $0{,}75\boldsymbol{k}$ T. **9.** (a) $3{,}4 \cdot 10^{-4}$ T, horizontálně a doleva vzhledem k $\boldsymbol{v}_0$; (b) ano,

pokud je rychlost stejná jako rychlost elektronu.
11. $(-11{,}4\boldsymbol{i} - 6{,}00\boldsymbol{j} + 4{,}80\boldsymbol{k})\ \mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$. **13.** $680\ \mathrm{kV{\cdot}m^{-1}}$.
17. (b) $2{,}84{\cdot}10^{-3}$. **19.** (a) $1{,}11{\cdot}10^{7}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$;
(b) 0,316 mm. **21.** (a) 0,34 mm; (b) 2,6 keV.
23. (a) $2{,}05{\cdot}10^{7}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (b) 467 μT; (c) 13,1 MHz;
(d) 76,3 ns. **25.** (a) $2{,}60{\cdot}10^{6}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (b) 0,109 μs;
(c) 0,140 MeV; (d) 70 kV. **29.** (a) 1,0 MeV;
(b) 0,5 MeV. **31.** $R_\mathrm{d} = \sqrt{2}R_\mathrm{p}$; $R_\alpha = R_\mathrm{p}$.
33. (a) $B\sqrt{mQ/2U}\,\Delta x$; (b) 8,2 mm. **37.** (a) $-Q$;
(b) $\pi m/(QB)$. **39.** $B_\mathrm{min} = \sqrt{mU/(2ed^2)}$. **41.** (a) 22 cm;
(b) 21 MHz. **43.** Neutron se pohybuje po dráze tečné
k té původní, proton opisuje kružnici o poloměru
25 cm. **45.** 28,2 N, horizontálně směrem na západ.
47. 20,1 N. **49.** $BItd/m$, směrem od generátoru.
51. $-0{,}35\boldsymbol{k}$ N. **53.** 0,10 T pod úhlem 31° od vertikály.
55. $4{,}3{\cdot}10^{-3}$ N·m, y je záporné. **59.** $QvrB/2$.
61. (a) 540 Ω, sériově; (b) 2,52 Ω, paralelně.
63. (a) 12,7 A; (b) 0,080 5 N·m. **65.** (a) $0{,}184\ \mathrm{A{\cdot}m^{2}}$;
(b) 1,45 N·m. **67.** (a) 20 min; (b) $5{,}9{\cdot}10^{-2}$ N·m.
69. (a) $(8{,}0{\cdot}10^{-4}\ \mathrm{N{\cdot}m})(-1{,}2\boldsymbol{i} - 0{,}90\boldsymbol{j} + 1{,}0\boldsymbol{k})$;
(b) $-6{,}0{\cdot}10^{-4}$ J.

Kapitola 30

KONTROLY **1.** (*a*), (*c*), (*b*). **2.** (*b*), (*c*), (*a*). **3.** *d*, pak *a* a *c* stejně, pak *b* (nula). **4.** (*d*), (*a*), pak (*b*) a (*c*) stejně (nula).

OTÁZKY **1.** (*c*), (*d*), pak (*a*) a (*b*) stejně. **3.** Ve 2. a 4. **5.** (*a*), (*b*), (*c*). **7.** (*b*), (*d*), (*c*), (*a*) (nula). **9.** (a) (1): $+x$; (2): $-y$; (b) (1): $+y$; (2): $+x$. **11.** Vypne se do oblouku. **13.** *c* a *d* stejně, pak *b*, *a*. **15.** (*d*), poté stejně (*a*) a (*e*), pak (*b*), (*c*). **17.** 0 (skalární součin je nula).

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** 32,1 A. **3.** (a) 3,3 μT; (b) ano. **5.** (a) $(0{,}24\boldsymbol{i})$ nT; (b) 0; (c) $(-43\boldsymbol{k})$ pT; (d) $(0{,}14\boldsymbol{k})$ nT. **7.** (a) 16 A; (b) od západu k východu. **9.** 0. **11.** (a) 0; (b) $\mu_0 I/(4R)$, od nás; (c) stejně jako v (b). **13.** $\mu_0 I\theta(1/b - 1/a)/4\pi$, k nám. **15.** (a) 1,0 mT, k nám; (b) 0,80 mT, k nám. **25.** 200 μT, od nás. **27.** (a) Přesně mezi nimi musí být $B = 0$; (b) 30 A. **29.** 4,3 A, k nám. **35.** $0{,}338\mu_0 I^2/a$, směrem do středu čtverce. **37.** (b) Doprava. **39.** (b) $2{,}3\ \mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. **41.** $+5\mu_0 I$. **47.** (a) $\mu_0 Ir/(2\pi c^2)$; (b) $\mu_0 I/(2\pi r)$; (c) $\frac{\mu_0 I(a^2-r^2)}{2\pi r(a^2-b^2)}$; (d) 0. **49.** $3I/8$, od nás. **53.** 0,30 mT. **55.** 108 m. **61.** 0,272 A. **63.** (a) 4; (b) 1/2. **65.** (a) $2{,}4\ \mathrm{A{\cdot}m^{2}}$; (b) 46 cm. **67.** (a) $\mu_0 I(1/a+1/b)/4$, od nás; (b) $\frac{1}{2}(\pi a^2+\pi b^2)I$, od nás. **69.** (a) 79 μT; (b) $1{,}1{\cdot}10^{-6}$ N·m. **71.** (b) $(0{,}060\boldsymbol{j})\ \mathrm{A{\cdot}m^{2}}$; (c) $(9{,}6{\cdot}10^{-11}\boldsymbol{j})$ T, $(-4{,}8{\cdot}10^{-11}\boldsymbol{j})$ T. **73.** (a) B ze součtu: $7{,}069{\cdot}10^{-5}$ T; $\mu_0 In = 5{,}027{\cdot}10^{-5}$ T; rozdíl je 40 %; (b) B ze součtu: $1{,}043{\cdot}10^{-4}$ T; $\mu_0 In = 1{,}005{\cdot}10^{-4}$ T; rozdíl je 4 %; (c) B ze součtu: $2{,}506{\cdot}10^{-4}$ T; $\mu_0 In = 2{,}513{\cdot}10^{-4}$ T; rozdíl 0,3 %. **75.** (a) $\boldsymbol{B} = (\mu_0/2\pi)[I_1/(x-a) + I_2/x]\boldsymbol{j}$; (b) $\boldsymbol{B} = (\mu_0/2\pi)(I_1/a)(1 + b/2)\boldsymbol{j}$.

Kapitola 31

KONTROLY **1.** *b*, pak *d* a *e* stejné, pak *a* a *c* stejné (nulové). **2.** (*a*) a (*b*) stejný, pak (*c*) (nulový). **3.** *c* a *d* stejné, pak *a* a *b* stejné. **4.** *b*: Od nás; *c*: od nás; *d*: k nám; *e*: k nám. **5.** (*d*) a (*e*). **6.** (a) (2), (3), (1) (nulový); (b) (2), (3), (1). **7.** *a* a *b* stejná, pak *c*.

OTÁZKY **1.** (a) Všechny stejné (nulové); (b) všechny stejné (různé od nuly); (c) (3), pak (1) a (2) stejné (nulové). **3.** K nám. **5.** (a) Od nás; (b) proti směru otáčení hodinových ručiček; (c) větší. **7.** (a) Doleva; (b) doprava. **9.** c, a, b. **11.** (a) 1, 3, 2; (b) 1 a 3 stejný, pak 2. **13.** (*a*), pak (*b*) a (*c*) stejné. **15.** (a) Větší; (b) stejný; (c) stejný; (d) stejný (nulový). **17.** *a*, 2; *b*, 4; *c*, 1; *d*, 3.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** 57 μWb. **3.** 1,5 mV. **5.** (a) 0,40 V; (b) 20 A. **7.** (a) 31 mV; (b) zprava doleva. **9.** (b) 58 mA. **11.** 1,2 mV. **13.** 1,15 μWb. **15.** 51 mV, po směru otáčení hodinových ručiček, díváme-li se ve směru $\boldsymbol{B}$. **17.** (a) $1{,}26{\cdot}10^{-4}$ T, 0, $-1{,}26{\cdot}10^{-4}$ T; (b) $5{,}04{\cdot}10^{-8}$ V. **19.** (b) Ne. **21.** 15,5 μC. **23.** (a) 24 μV; (b) od *c* do *b*. **25.** (b) Uspořádání musí být takové, aby platilo $Nab = (5/2\pi)\ (\mathrm{v\,m^{2}})$. **27.** (a) 0,598 μV; (b) proti směru hodinových ručiček. **29.** (a) $\mu_0 Ia(2r + b)/[2\pi(2r - b)]$; (b) $2\mu_0 Iabv/[\pi R(4r^2 - b^2)]$. **31.** $S^2B^2/(R\Delta t)$. **33.** (a) 48,1 mV; (b) 2,67 mA; (c) 0,128 mW. **35.** $v_\mathrm{m} = mgR/(B^2L^2)$. **37.** 268 W. **39.** (a) 240 μV; (b) 0,600 mA; (c) 0,144 μW; (d) $2{,}88{\cdot}10^{-8}$ N; (e) stejně jako v (c). **41.** (1): −1,07 mV; (2): −2,40 mV; (3): 1,33 mV. **43.** *a*: $4{,}4{\cdot}10^{7}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, doprava; *b*: 0; *c*: $4{,}4{\cdot}10^{7}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, doleva. **45.** 0,10 μWb. **47.** (a) 800; (b) $2{,}5{\cdot}10^{-6}$ H. **49.** (a) $\mu_0 I/d$; (b) $\pi\mu_0 R^2/d$. **51.** (a) Klesá; (b) 0,68 mH. **53.** (a) $0{,}10\ \mathrm{H{\cdot}m^{-1}}$; (b) $1{,}3\ \mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$. **55.** (a) 16 kV; (b) 3,1 kV; (c) 23 kV. **57.** (b) Změna magnetického pole jedné cívky nesmí indukovat proud v druhé; (c) $1/L_\mathrm{p} = \sum_{j=1}^{N}(1/L_j)$. **59.** $6{,}91\tau_L$. **61.** 1,54 s. **63.** (a) 8,45 ns; (b) 7,37 mA. **65.** $(42 + 20t)$ V. **67.** $12{,}0\ \mathrm{A{\cdot}s^{-1}}$. **69.** (a) $I_1 = I_2 = 3{,}33$ A; (b) $I_1 = 4{,}55$ A, $I_2 = 2{,}73$ A; (c) $I_1 = 0$, $I_2 = 1{,}82$ A; (d) $I_1 = I_2 = 0$. **71.** $\mathscr{E}L_1/R(L_1 + L_2)$. **73.** (a) $I(1 - \mathrm{e}^{-Rt/L})$. **75.** $1{,}23\tau_L$. **77.** (a) 240 W; (b) 150 W; (c) 390 W. **79.** (a) 97,9 H; (b) 0,196 mJ. **81.** (a) 10,5 mJ; (b) 14,1 mJ. **83.** (a) $34{,}2\ \mathrm{J{\cdot}m^{-3}}$; (b) 49,4 mJ. **85.** $1{,}5{\cdot}10^{8}\ \mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$. **87.** $(\mu_0 I/2\pi)\ln(b/a)$. **89.** (a) 1,3 mT; (b) $0{,}63\ \mathrm{J{\cdot}m^{-3}}$. **91.** (a) $1{,}0\ \mathrm{J{\cdot}m^{-3}}$; (b) $4{,}8{\cdot}10^{-15}\ \mathrm{J{\cdot}m^{-3}}$. **93.** (a) 1,67 mH; (b) 6,00 mWb. **95.** 13 H. **99.** Magnetické pole je nenulové pouze v průřezu solenoidu 1.

Kapitola 32

KONTROLY **1.** (*d*), (*b*), (*c*), (*a*) (nula). **2.** (a) 2; (b) 1. **3.** (a) Od něho; (b) od něho; (c) menší. **4.** (a) K němu; (b) k němu; (c) menší. **5.** *a*, *c*, *b*, *d* (nula). **6.** *b*, *c*, *d* stejně, potom *a*.

OTÁZKY **1.** (a) *a*, *c*, *f*; (b) tyč *gh*. **3.** Dodat. **5.** (a) Všechny dolů; (b) (1) nahoru, (2) dolů, (3) nula.

7. (a) (1) Nahoru, (2) nahoru, (3) dolů; (b) (1) dolů, (2) nahoru, (3) nula. **9.** (a) Doprava; (b) doleva. **11.** (a) Snižuje; (b) snižuje. **13.** (a) a a b (stejně), c, d; (b), (c) podél žádné z nich (deska není rotačně symetrická, takže $\boldsymbol{B}$ není tečné ani ke kruhové smyčce). **15.** 1/4.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (b) Je záporné; (c) ne, plocha není uzavřená. Na otevřeném konci blízko magnetu by byl kladný tok. **3.** 47 μWb, dovnitř. **5.** 55 μT. **7.** (a) 600 MA; (b) ano; (c) ne. **9.** (a) $B = 31{,}0\,\mu\text{T}$, $\varphi = 0°$; (b) $B = 55{,}9\,\mu\text{T}$, $\varphi = 73{,}9°$; (c) $B = 62{,}0\,\mu\text{T}$, $\varphi = 90°$. **11.** $4{,}6\cdot10^{-24}$ J. **13.** (a) $5{,}3\cdot10^{11}$ V·m^{-1}; (b) 20 mT; (c) 660. **15.** (a) 7; (b) 7; (c) $3\hbar$, 0; (d) $3e\hbar/(2m)$, 0; (e) $3{,}5\hbar$; (f) 8. **17.** (b) Ve směru vektoru momentu hybnosti. **19.** $\Delta\mu = e^2r^2B/(4m)$. **21.** 20,8 mJ·T^{-1}. **23.** Ano. **25.** (a) 4 K; (b) 1 K. **29.** (a) 3,0 μT; (b) $5{,}6\cdot10^{-10}$ eV. **31.** (a) 8,9 A·m^2; (b) 13 N·m. **35.** (a) 0,14 A; (b) 79 μC. **37.** $2{,}4\cdot10^{13}$ V·m^{-1}·s^{-1}. **39.** (a) 3,4 pT. **41.** $7{,}5\cdot10^{5}$ V·s^{-1}. **43.** $7{,}2\cdot10^{12}$ V·m^{-1}·s^{-1}. **45.** (a) $2{,}1\cdot10^{-8}$ A, dolů; (b) ve směru otáčení hodinových ručiček. **47.** (a) 0,63 μT; (b) $2{,}3\cdot10^{12}$ V·m^{-1}·s^{-1}. **49.** (a) 2,0 A; (b) $2{,}3\cdot10^{11}$ V·m^{-1}·s^{-1}; (c) 0,50 A; (d) 0,63 μT·m. **51.** (a) 7,60 μA; (b) 859 kV·m·s^{-1}; (c) 3,39 mm; (d) 5,16 pT.

Kapitola 33

KONTROLY **1.** (a) $T/2$; (b) T; (c) $T/2$; (d) $T/4$. **2.** (a) 5 V; (b) 150 μJ. **3.** (a) 1; (b) 2. **4.** (a) D, C, S, B, A; (b) 1: A, 2: B, 3: S, 4: C; 5: D; (c) A. **5.** (a) Vzroste; (b) klesne. **6.** (a) (1): zpožďuje se; (2): předbíhá; (3): ve fázi; (b) (3) ($\omega_b = \omega$, když $X_L = X_C$). **7.** (a) Zvětšit (obvod má kapacitní charakter; pro přiblížení k rezonanci, tj. pro maximální $P_{\text{stř}}$ je třeba zvětšit C neboli zmenšit X_C); (b) blíže. **8.** Zvyšovací.

OTÁZKY **1.** (a) $T/4$; (b) $T/4$; (c) $T/2$, viz obr. 33.2; (d) $T/2$, viz rov. (31.40). **3.** (b), (a), (c). **5.** (a) (3), (1), (2); (b) (2), pak (1) a (3) stejné. **7.** Pomaleji. **9.** (a) (1) a (4); (b) (2) a (3). **11.** (a) 3, potom 1 a 2 stejná; (b) 2, 1, 3. **13.** (a) Záporná; (b) předbíhá. **15.** (a)–(c) Vpravo a zvýší se.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** 9,14 nF. **3.** 45,2 mA. **5.** (a) 6,00 μs; (b) 167 kHz; (c) 3,00 μs. **7.** (a) 89 rad·s^{-1}; (b) 70 ms; (c) 25 μF. **9.** 38 μH. **11.** $7{,}0\cdot10^{-4}$ s. **15.** (a) 3,0 nC; (b) 1,7 mA; (c) 4,5 nJ. **17.** (a) 3,60 mH; (b) 1,33 kHz; (c) 0,188 ms. **19.** 600 Hz, 710 Hz, 1 100 Hz, 1 300 Hz. **21.** (a) $Q/\sqrt{3}$; (b) 0,152. **25.** (a) 1,98 μJ; (b) 5,56 μC; (c) 12,6 mA; (d) −46,9°; (e) +46,9°. **27.** (a) 0; (b) $2i(t)$. **29.** (a) 356 μs; (b) 2,50 mH; (c) 3,20 mJ. **31.** 8,66 mΩ. **33.** $(L/R)\ln 2$. **35.** (a) $\pi/2$ rad; (b) $q = (I/\omega')e^{-Rt/(2L)}\sin\omega' t$. **39.** (a) 0,095 5 A; (b) 0,011 9 A. **41.** (a) 4,60 kHz; (b) 26,6 nF; (c) $X_L = 2{,}60\,\text{k}\Omega$, $X_C = 0{,}650\,\text{k}\Omega$. **43.** (a) 0,65 kHz; (b) 24 Ω. **45.** (a) 39,1 mA; (b) 0; (c) 33,9 mA. **47.** (a) 6,73 ms; (b) 2,24 ms; (c) kondenzátor; (d) 59,0 μF. **49.** (a) $X_C = 0$, $X_L = 86{,}7\,\Omega$, $Z = 182\,\Omega$, $I = 198$ mA, $\varphi = 28{,}5°$. **51.** (a) $X_C = 37{,}9\,\Omega$, $X_L = 86{,}7\,\Omega$, $Z = 167\,\Omega$, $I = 216$ mA, $\varphi = 17{,}1°$. **53.** (a) 2,35 mH; (b) vzdalují se od 1,40 kHz. **55.** Ano, 1 000 V. **57.** (a) 36,0 V; (b) 27,3 V; (c) 17,0 V; (d) −8,34 V. **59.** (a) 224 rad·s^{-1}; (b) 6,00 A; (c) 228 rad·s^{-1}, 219 rad·s^{-1}; (d) 0,040. **61.** (a) 707 Ω; (b) 32,2 mH; (c) 21,9 nF. **63.** (a) Rezonance při $f = 1/(2\pi\sqrt{LC}) = 85{,}7$ Hz; (b) 15,6 μF; (c) 225 mA. **65.** (a) 796 Hz; (b) beze změny; (c) zmenší se; (d) zvětší se. **69.** 141 V. **71.** (a) Odebírá; (b) dodává. **73.** 0, 9,00 W, 3,14 W, 1,82 W. **75.** 177 Ω. **77.** 7,61 A. **83.** (a) 169 μF; (b) 0; (c) 90,0 W, 0; (d) 0°, 90°; (e) 1, 0. **85.** (a) 2,59 A; (b) 38,8 V, 159 V, 224 V, 64,2 V, 75,0 V; (c) 100 W v R, 0 v L a C. **87.** (a) 2,4 V; (b) 3,2 mA, 0,16 A. **89.** (a) 1,9 V, 5,9 W; (b) 19 V, 590 W; (c) 0,19 kV, 59 kW. **91.** (a) $X_C = [(2\pi)(45\cdot10^{-6}\,\text{F})f]^{-1}$; (c) 17,7 Hz. **93.** (a) $X_L = (2\pi)(40\cdot10^{-3}\,\text{H})f$; (c) 796 Hz. **95.** (b) 61 Hz; (c) 61 Hz a 90 Ω.

Kapitola 34

KONTROLY **1.** (a) (Podle obr. 34.5.) Na pravé straně obdélníku má $\boldsymbol{E}$ směr záporné osy y, na levé straně má $\boldsymbol{E} + d\boldsymbol{E}$ stejný směr a větší velikost. (b) $\boldsymbol{E}$ směřuje dolů. Na pravé straně má $\boldsymbol{B}$ směr záporné osy z, na levé straně má $\boldsymbol{B} + d\boldsymbol{B}$ stejný směr a větší velikost. **2.** Má směr kladné osy x. **3.** (a) Zůstává stejný; (b) zmenší se. **4.** a, d, b, c (nula). **5.** (a). **6.** (a) Ano; (b) ne.

OTÁZKY **1.** (a) Ve směru kladné osy z; (b) ve směru osy x. **3.** (a) Zůstane konstatní; (b) bude růst; (c) bude klesat. **5.** Obě 20° po směru otáčení hodinových ručiček od osy y. **7.** Dvě. **9.** b, 30°; c, 60°; d, 60°; e, 30°; f, 60°. **11.** d, b, a, c. **13.** (a) b; (b) modrá; (c) c. **15.** 1,5.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) $4{,}7\cdot10^{-3}$ Hz; (b) 3 min 32 s. **3.** (a) $4{,}5\cdot10^{24}$ Hz; (b) $1{,}0\cdot10^{4}$ km neboli 1,6 poloměrů Země. **7.** (a) Poroste; (b) změřit celkové rozdíly mezi zdánlivou dobou zatmění a dobou pozorovanou z A; změřit poloměr zemské dráhy. **9.** $5{,}0\cdot10^{-21}$ H; nereálně malá indukčnost. **11.** 1,07 pT. **17.** $4{,}8\cdot10^{-29}$ W·m^{-2}. **19.** $4{,}51\cdot10^{-10}$. **21.** 89 cm. **23.** 1,2 MW·m^{-2}. **25.** 820 m. **27.** 1,03 kV·m^{-1}; 3,43 μT. **29.** (a) $1{,}4\cdot10^{-22}$ W; (b) $1{,}1\cdot10^{15}$ W. **31.** (a) 87 mV·m^{-1}; (b) 0,30 nT; (c) 13 kW. **33.** $3{,}3\cdot10^{-8}$ Pa. **35.** (a) $4{,}7\cdot10^{-6}$ Pa; (b) $2{,}1\cdot10^{10}$krát menší. **37.** $5{,}9\cdot10^{-8}$ Pa. **39.** (a) 3,97 GW·m^{-2}; (b) 13,2 Pa; (c) $1{,}67\cdot10^{-11}$ N; (d) $3{,}14\cdot10^{3}$ m·s^{-2}. **41.** $I(2-\alpha)/c$. **43.** $p_{r\perp}\cos^2\theta$. **45.** 1,9 mm·s^{-1}. **47.** (b) 580 nm. **49.** (a) 1,9 V·m^{-1}; (b) $1{,}7\cdot10^{-11}$ Pa. **51.** 1/8. **53.** 3,1 %. **55.** 20° nebo 70°. **57.** 19 W·m^{-2}. **59.** (a) 2 destičky; (b) 5 destiček. **61.** 180°. **63.** 1,26. **65.** 1,07 m. **69.** (a) 0; (b) 20°; (c) rovněž 0 a 20°. **73.** 1,41. **75.** 1,22. **77.** 182 cm. **79.** (a) Ne; (b) ano;

(c) asi 43°. **81.** (a) 35,6°; (b) 53,1°. **83.** (b) 23,2°. **85.** (a) 53°; (b) ano. **87.** 55,5°; 55,8°.

Kapitola 35

KONTROLY Kaleidoskop: V trubici jsou dvě zrcadla a svírají úhel 60°. **1.** $0{,}2d$; $1{,}8d$; $2{,}2d$. **2.** (a) Reálný; (b) převrácený; (c) na téže straně. **3.** (a) e; (b) virtuální, na stejné straně. **4.** Virtuální, stejná jako předmět, rozptylka.

OTÁZKY **1.** c. **3.** (a) A; (b) C. **5.** (a) Ne; (b) ano (čtvrté zrcadlo je ED). **7.** (a) Z nekonečna k ohnisku; (b) spojitě se zmenšuje. **9.** d (nekonečno), stejné a a b, pak c. **11.** Zrcadlo: stejná; čočka: větší. **13.** (a) Pro všechny kromě variace 2; (b) pro 1, 3, 4: vpravo, obrácené; pro 5, 6: vlevo, stejná. **15.** (a) Menší; (b) menší.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) Virtuální; (b) stejnou; (c) stejnou; (d) $D + L$. **3.** 40 cm. **7.** (a) 7; (b) 5; (c) 1 až 3; (d) závisí na poloze O a naší perspektivě. **11.** Nová intenzita je 10/9 původní. **15.** 10,5 cm. **19.** (a) 2,00; (b) úloha nemá řešení. **23.** 1,14. **25.** (b) Vzdálit čočky od sebe na $f_2 - |f_1|$, kde f_2 je ohnisková vzdálenost spojky. **27.** 45 mm, 90 mm. **29.** (a) +40 cm; (b) v nekonečnu. **33.** (a) 40 cm, reálný; (b) 80 cm, reálný; (c) 240 cm, reálný; (d) −40 cm, virtuální; (e) −80 cm, virtuální; (f) −240 cm, virtuální. **35.** Stejná orientace, virtuální, 30 cm vlevo od druhé čočky, $m = 1$. **37.** (a) Výsledný obraz má tutéž polohu jako předmět; je reálný, převrácený a $m = -1{,}0$. **39.** (a) Má tutéž polohu jako původní předmět a je 5krát zvětšený; (c) virtuální; (d) ano. **45.** $i = (2 - n)r/\big(2(n - 1)\big)$, vpravo od pravé strany koule. **47.** 2,1 mm. **49.** (b) Je-li obraz v blízkém bodě. **51.** (b) Dalekozraký. **53.** −125.

Kapitola 36

KONTROLY **1.** b (nejmenší n), c, a. **2.** (a) Horní; (b) částečně konstruktivní (fázový rozdíl je $2{,}1\lambda$). **3.** (a) 3λ, 3; (b) $2{,}5\lambda$, 2,5. **4.** a, d (amplituda výsledné vlny je $4E_0$); potom b, c (amplituda výsledné vlny je $2E_0$). **5.** (a) 1 a 4; (b) 1 a 4.

OTÁZKY **1.** a, c, b. **3.** (a) 300 nm; (b) mají opačnou fázi. **5.** c. **7.** (a) Vzrůstá; (b) 1λ. **9.** Dolů. **11.** (a) Maximum; (b) minimum; (c) střídání maxim a minim. **13.** d. **15.** (a) $0{,}5\lambda$; (b) 1λ. **17.** Světlý. **19.** Ve všech.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) $5{,}09{\cdot}10^{14}$ Hz; (b) 388 nm; (c) $1{,}97{\cdot}10^{8}$ m/s. **5.** $2{,}1{\cdot}10^{8}$ Hz. **7.** V potrubí se vzduchem je doba průchodu větší o 1,55 ns. **9.** 22°, lom snižuje úhel θ. **11.** (a) 2. pulz; (b) $0{,}03h/c$. **13.** (a) 1,70 (což je ekvivalentní 0,70); (b) 1,70 ($\simeq$ 0,70); (c) 1,30 ($\simeq$ 0,30); (d) intenzity jsou ve všech případech stejné, blíže destruktivní interferenci. **15.** (a) 0,833; (b) přechod mezi minimem a maximem, blíže ke konstruktivní interferenci. **17.** $(2m + 1)\pi$. **19.** 2,25 mm. **21.** 648 nm. **23.** 1,6 mm. **25.** 16. **27.** 0,072 mm. **29.** $8{,}75\lambda$. **31.** 0,03 %. **33.** 6,64 μm. **35.** $y = 17\sin(\omega t + 13°)$. **39.** (a) 1,17 m, 3,00 m, 7,50 m; (b) není. **41.** $I = \frac{1}{9}I_{\mathrm{m}}[1 + 8\cos^2(\pi d \sin\theta/\lambda)]$, I_{m} = intenzita centrálního maxima. **43.** $h = (m + \frac{1}{2})\lambda/2$, kde $m = 0, 1, 2, \ldots$. **45.** 0,117 μm, 0,352 μm. **47.** $\lambda/5$. **49.** 70,0 nm. **51.** Pro žádnou. **53.** (a) 552 nm; (b) 442 nm. **55.** 338 nm. **59.** $2n_2h/\cos\theta_r = (m + \frac{1}{2})\lambda$, když $m = 0, 1, 2, \ldots$, kde $\theta_r = \arcsin[(\sin\theta_i)/n_2]$. **61.** Intenzita poklesne o 88 % pro 450 nm a o 94 % pro 650 nm. **63.** (a) Tmavý; (b) pro modrý konec. **65.** 1,89 μm. **67.** 1,000 25. **69.** (a) 34; (b) 46. **73.** 588 nm. **75.** 1,000 3. **77.** $I = I_m\cos^2(2\pi x/\lambda)$.

Kapitola 37

KONTROLY **1.** (a) Rozšíří se; (b) rozšíří se. **2.** (a) Druhé vedlejší maximum; (b) 2,5. **3.** (a) Červenou; (b) fialovou. **4.** Zhorší se. **5.** (a) Zvětší se; (b) nezmění se. **6.** (a) Vlevo; (b) menší.

OTÁZKY **1.** (a) Zúží se; (b) zúží se. **3.** S megafonem (větší otvor, menší difrakce). **5.** Čtyři. **7.** (a) Větší; (b) červený. **9.** (a) Zmenší se; (b) zůstanou stejné; (c) zůstanou na místě. **11.** (a) A; (b) ta vlevo; (c) vlevo; (d) vpravo.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** 690 nm. **3.** 60,4 μm. **5.** (a) 2,5 mm; (b) $2{,}2{\cdot}10^{-4}$ rad. **7.** (a) 70 cm; (b) 1,0 mm. **9.** Ve vzdálenosti 41,2 m od centrální osy. **11.** 160°. **15.** (d) 53°, 10°, 5,1°. **19.** (a) $1{,}3{\cdot}10^{-4}$ rad; (b) 10 km. **21.** 50 m. **23.** 30,5 μm. **25.** 1 600 km. **27.** (a) 17,1 m; (b) $1{,}37{\cdot}10^{-10}$. **29.** 27 cm. **31.** 4,7 cm. **33.** (a) 0,347°; (b) 0,97°. **35.** (a) Červená; (b) 130 μm. **37.** Pět. **41.** $\lambda D/d$. **43.** (a) 5,05 μm; (b) 20,2 μm. **45.** (a) 3,33 μm; (b) 0°, ±10,2°, ±20,7°, ±32,0°, ±45,0°, ±62,2°. **47.** Pro všechny vlnové délky kratší než 635 nm. **49.** 13 600. **51.** 500 nm. **53.** (a) Tři (b) 0,051°. **55.** 523 nm. **61.** 470 nm až 560 nm. **63.** 491. **65.** 3 650. **67.** (a) 10 μm; (b) 3,3 mm. **69.** (a) 0,032°/nm, 0,076°/nm, 0,24°/nm, (b) $4{\cdot}10^{4}$, $8{\cdot}10^{4}$, $1{,}2{\cdot}10^{5}$. **71.** (a) $\mathrm{tg}\,\theta$; (b) 0,89. **73.** 0,26 nm. **75.** 6,8°. **77.** (a) 170 pm; (b) 130 pm. **81.** 0,570 nm. **83.** 30,6°, 15,3° (ve směru otáčení hodinových ručiček); 3,08°, 37,8° (proti směru otáčení hodinových ručiček).

Kapitola 38

KONTROLY **1.** (a) Jsou stejné (postulát rychlosti světla); (b), (c) ne (začátek a konec letu nenastávají ve stejném místě). **2.** (a) Sylvino; (b) Sylvino. **3.** a, záporná; b, kladná; c, záporná. **4.** (a) Doprava; (b) větší. **5.** (a) Stejná; (b) menší.

OTÁZKY **1.** Rychlosti jsou stejné (rovny c). **3.** (a) C_1; (b) C_1. **5.** (a) 3, 2, 1; (b) 1 a 3 stejné, pak 2. **7.** (a) záporná; (b) kladná. **9.** c, pak b a d stejné, pak a. **11.** (a) 3, 1 a 2 stejné, pak 4; (b) 4, 1 a 2 stejné, pak 3; (c) 1, 4, 2, 3. **13.** Větší než f_1.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) $3{\cdot}10^{-18}$; (b) $8{,}2{\cdot}10^{-8}$; (c) $1{,}1{\cdot}10^{-6}$; (d) $3{,}7{\cdot}10^{-5}$; (e) 0,10. **3.** $0{,}75c$. **5.** $0{,}99c$.

7. 55 m. **9.** 1,32 m. **11.** 0,63 m. **13.** 6,4 cm. **15.** (a) 26 y; (b) 52 y; (c) 3,7 y. **17.** (b) 0,999 999 15c. **19.** (a) $x' = 0$, $t = 2{,}29$ s; (b) $x' = 6{,}55{\cdot}10^{8}$ m, $t' = 3{,}16$ s. **21.** (a) 25,8 μs; (b) malé vzplanutí. **23.** (a) 1,25; (b) 0,800 μs. **25.** 2,40 μs. **27.** (a) 0,84c, ve směru rostoucího x; (b) 0,21c, ve směru rostoucího x; klasické předpovědi jsou 1,1c a 0,15c. **29.** (a) 0,35c; (b) 0,62c. **31.** 1,2 μs. **33.** Sedm. **35.** 22,9 MHz. **37.** +2,97 nm. **39.** (a) $\tau_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. **41.** (a) 0,134$c$; (b) 4,65 keV; (c) 1,1 %. **43.** (a) 0,998 8, 20,6; (b) 0,145, 1,01; (c) 0,073, 1,002 7. **45.** (a) 5,71 GeV, 6,65 GeV, 6,58 GeV/c; (b) 3,11 MeV, 3,62 MeV, 3,59 MeV/c. **47.** 18 hmotností Slunce za rok. **49.** 0,943c; (b) 0,886c. **51.** (a) 256 kV; (b) 0,746c. **53.** $\sqrt{8}mc$. **55.** 10,70·10^{6} km čili 270 zemských obvodů. **57.** 110 km. **59.** (a) 2,7·10^{14} J; (b) 1,8·10^{7} kg; (c) 6,0·10^{6}. **61.** 4,00 u, jde pravděpodobně o heliové jádro. **63.** 330 mT. **65.**

SIGNÁL	OKAMŽIK VYSLÁNÍ DLE ZEMĚ (h)	OKAMŽIK PŘIJETÍ ODPOVĚDI DLE ZEMĚ (h)	HLÁŠENÝ ČAS ODPOVĚDI DLE RAKETY	VZDÁLENOST (m)
1	6,0	400	11,8	2,10·10^{14}
2	12,0	800	23,6	4,19·10^{14}
3	18,0	1 200	35,5	6,29·10^{14}
4	24,0	1 600	47,3	8,38·10^{14}
5	30,0	2 000	59,1	1,05·10^{15}

67. (a) $vt \sin\theta$; (b) $t(1 - (v/c)\cos\theta)$; (c) 3,24c.

Kapitola 39

KONTROLY **1.** b, a, d, c. **2.** (a) Lithium, sodík, draslík, cesium; (b) všechny stejné. **3.** (a) Stejný; (b)–(d) rentgenové záření. **4.** (a) Proton; (b) stejnou; (c) proton. **5.** Stejná.

OTÁZKY **1.** (a) Mikrovlny; (b), (c) rentgenové záření. **3.** Draslík. **5.** Na desce se vytvoří kladný náboj, který zabraňuje další emisi elektronů. **7.** Žádnou. **9.** (a) Větší; (b) menší. **11.** Změna je zanedbatelná. **13.** (a) Zmenší se $1/\sqrt{2}$krát; (b) zmenší se na polovinu. **15.** Velmi malá. **17.** (a) Zmenšuje se; (b) zvětšuje se; (c) stejná; (d) stejná. **19.** a. **21.** (a) Nula; (b) ano.

CVIČENÍ A ÚLOHY **3.** 4,14 eV·fs. **5.** 5,9 μeV. **7.** 1,0·10^{45} fotonů/s. **9.** 2,047 eV. **11.** (a) Infračervená žárovka; (b) 1,4·10^{21} fotonů/s. **13.** 4,7·10^{26} fotonů. **15.** (a) 2,96·10^{20} fotonů/s; (b) 48 600 km; (c) 5,89·10^{18} fotonů/(m^2·s). **17.** Baryum a lithium. **19.** 10 eV. **21.** 676 km/s. **23.** (a) 1,3 V; (b) 680 km/s. **25.** 233 nm. **27.** (a) 6,60·10^{-34} J·s; (b) 2,27 eV; (c) 545 nm. **29.** 9,68·10^{-20} A. **31.** (a) 8,57·10^{18} Hz; (b) 35,4 keV; (c) 1,89·10^{-23} kg·m/s = 35,4 keV/c. **33.** (a) 2,7 pm; (b) 6,05 pm. **37.** (a) 2,43 pm; (b) 1,32 fm; (c) 0,511 MeV; (d) 938 MeV. **39.** 300 %. **43.** (a) 41,8 keV; (b) 8,2 keV. **45.** 44°. **47.** 1,12 keV. **49.** (a) 1,7·10^{-35} m; (b) jeho de Brogliehо vlnová délka je příliš malá. **51.** 7,75 pm. **53.** 4,3 μeV. **55.** (a) 38,8 meV; (b) 146 pm. **57.** (a) 73 pm, 3,4 nm; (b) ano, jejich střední de Brogliehо vlnová délka je mnohem menší než jejich střední vzdálenost. **59.** (a) 1,24 keV, 1,50 eV; (b) 1,24 GeV, 1,24 GeV. **61.** 0,025 fm, asi 200krát menší než poloměr jádra. **63.** Neutron. **65.** 9,70 kV (relativistický výpočet), 9,79 kV (klasický výpočet). **73.** (d) $x = n(\lambda/2)$, kde $n = 0, 1, 2, \ldots$. **75.** 2,1·10^{-24} kg·m·s^{-1}. **79.** (a) Proton: 9,2·10^{-6}; deuteron: 7,6·10^{-8}; (b) 3,0 MeV pro každou; (c) 3,0 MeV pro každou. **81.** (a) 10^{104} let (nepředstavitelně dlouho); (b) 2·10^{-19} s (menší hmotnost elektronu způsobuje obrovský rozdíl). **83.** $T = 10^{-x}$, kde $x = 3{,}1{\cdot}10^{39}$, *nesmírně* malé číslo.

Kapitola 40

KONTROLY **1.** b, a, c. **2.** (a) Všechny stejně; (b) a, b, c. **3.** a, b, c, d. **4.** (a) $n = 1$; (b) $n = 3$, $n = 2$, $n = 1$. **5.** (a) $E_{1,1}$ (ani n_x a n_y nemohou být rovny 0). **6.** (a) 5; (b) 7.

OTÁZKY **1.** (a) 1/4; (b) stejný násobek. **3.** c. **5.** (a) $\sqrt{1/L}\sin(\pi x/2L)$; (b) $\sqrt{4/L}\sin(2\pi x/L)$; (c) $\sqrt{2/L}\sin(\pi x/L)$. **7.** Menší. **9.** (a) Širší; (b) hlubší. **11.** $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$. **13.** Menší. **15.** Stejné. **17.** (a) $n = 3$; (b) $n = 1$; (c) $n = 5$.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** Násobte $\sqrt{2}$. **3.** 850 pm. **5.** 0,65 eV. **7.** m^{-1}. **13.** (a) 5,0 %; (b) 10 %; (c) 0,95 %. **15.** (a) 19,6 %; (b) 60,8 %; (c) 19,6 %. **17.** 13,3 eV. **19.** (b) $\varkappa = (2\pi/h)[2m(E_{p0} - E)]^{1/2}$. **21.** (b) $\varkappa = (2\pi/h)(2mE)^{1/2}$. **23.** 2,60 eV. **25.** 0,75; 1,25; 1,75; 2,00; 2,25; 3,00; 3,75. **27.** 1,00; 2,00; 3,00; 5,00; 6,00; 8,00; 9,00. **29.** 2,6 eV. **31.** (a) 658 nm; (b) 366 nm. **33.** (a) 12 eV; (b) 6,5·10^{-27} kg·m/s; (c) 103 nm. **37.** (a) 0; (b) 10,2 nm^{-1}; (c) 5,54 nm^{-1}. **39.** (a) 13,6 eV; (b) 3,40 eV. **41.** (a) 13,6 eV; (b) −27,2 eV. **43.** (a) Z $n = 4$ na $n = 2$; (b) Balmerova série. **45.** (a) 2,6 eV; (b) z $n = 4$ na $n = 2$. **47.** Z $n = 3$ na $n = 1$. **49.** 43,9 %. **53.** $n \approx 4\,348$. **57.** (a) $P_{2,1,0} = (r^4/8a^5)e^{-r/a}\cos^2\theta$; $P_{2,1,+1} = P_{2,1,-1} = (r^4/16a^5)e^{-r/a}\sin^2\theta$.

Kapitola 41

KONTROLY **1.** 7. **2.** (a) Sníží se; (b)–(d) zůstane stejná. **3.** Kratší. **4.** A, C, B.

OTÁZKY **1.** 0, 2 a 3. **3.** 6p. **5.** (a) 2, 8; (b) 5, 50. **7.** (a) n; (b) n a l. **9.** a, c, e, f. **11.** (a) Zůstane beze změny; (b) sníží se; (c) sníží se. **13.** a, b.

CVIČENÍ A ÚLOHY **3.** (a) 32; (b) 2; (c) 18; (d) 8. **5.** (a) 3; (b) 3. **7.** $n = 4$, $l = 3$, $m_l = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. **9.** $l = 4$; $n \geq 5$; $m_s = \pm 1/2$. **11.** (a) 3; (b) 9; (c) 2; (d) 18; (e) 3. **13.** (a) 3·10^{74}; (b) 6·10^{74}; (c) 6·10^{-38} rad. **15.** 54,7° a 125°. **17.** (a) 58 μeV; (b) 14 GHz; (c) 2,1 cm, oblast krátkých radiových

vln. **19.** 5,35 cm. **21.** 19 mT. **23.** $44h^2/(8mL^2)$. **25.** (a) $51h^2/(8mL^2)$; (b) $56h^2/(8mL^2)$; (c) $59h^2/(8mL^2)$. **27.** $42h^2/(8mL^2)$. **31.** Argon. **33.** (a) 2, 0, 0, $\pm\frac{1}{2}$; (b) $n = 2$, $l = 1$, $m_l = 1, 0$ nebo -1, $m_s = \pm\frac{1}{2}$. **39.** (a) 5,7 keV; (b) 87 pm, 14 keV; 220 pm, 5,7 keV. **43.** (a) 35,4 pm stejně jako pro molybden; (b) 57 pm; (c) 50 pm. **49.** (a) 19,7 keV, 17,5 keV; (b) Zr nebo Nb (lépe Zr). **51.** (a) $(Z-1)^2/(Z'-1)^2$; (b) 57,5; (c) 2 070. **53.** 6. **55.** (a) 2,55 s; (b) 500 ps; (c) $(4{,}5{\cdot}10^{-4})^\circ$, tj. 1,6″. **57.** 10 000 K. **59.** $7{,}3{\cdot}10^{15}$ za sekundu. **61.** $2{,}0{\cdot}10^{16}$ za sekundu. **63.** 4,6 km. **65.** 1,8 pm. **67.** (a) 7,33 μm; (b) $7{,}07{\cdot}10^5$ W·m^{-2}; (c) $2{,}49{\cdot}10^{10}$ W·m^{-2}. **69.** (a) 4,3 μm; (b) 10 μm; (c) infračervené.

Kapitola 42

KONTROLY **1.** (a) Větší; (b) stejná. **2.** Cleveland, kov; Troy, žádný; Seattle, polovodič. **3.** a, b, c. **4.** b. **5.** b.

OTÁZKY **1.** 4. **3.** b, c. **5.** (a) Kdekoliv v mřížce; (b) v každé Si-Si vazbě; (c) v křemíkovém iontu, v mřížkovém bodě. **7.** b a d. **9.** $+4e$. **11.** Žádný. **13.** (a) Zprava doleva; (b) pro závěrný směr. **15.** a, b, c.

CVIČENÍ A ÚLOHY **5.** (a) $+8{,}0{\cdot}10^{-11}$ Ω·m·K^{-1}; (b) -210 Ω·m·K^{-1}. **9.** (a) 0; (b) 0,096. **13.** 0,91. **15.** (a) 90 %; (b) 12 %; (c) pro sodík. **17.** (a) 2 500 K; (b) 5 300 K. **19.** (a) $2{,}7{\cdot}10^{25}$ m^{-3}; (b) $8{,}4{\cdot}10^{28}$ m^{-3}; (c) 3 100; (d) molekuly: 3,3 nm; elektrony: 0,23 nm. **21.** (a) 1,0, 0,99, 0,50, 0,014, $2{,}5{\cdot}10^{-17}$; (b) 700 K. **25.** (a) $5{,}9{\cdot}10^{28}$ m^{-3}; (b) 5,5 eV; (c) 1 390 km·s^{-1}; (d) 0,52 nm. **27.** (b) $1{,}80{\cdot}10^{28}$ m^{-3}·eV^{-1}. **31.** (a) 19,7 kJ; (b) 197 s. **33.** 200 °C. **35.** (a) 109,5°; (b) 235 pm. **37.** (a) 225 nm; (b) v ultrafialové oblasti. **41.** 0,22 μg. **43.** (a) 0,744 eV nad vrcholem valenčního pásu; (b) $7{,}13{\cdot}10^{-7}$. **45.** (b) $2{,}5{\cdot}10^8$. **47.** Neprůhledný. **49.** (a) $5{,}0{\cdot}10^{-17}$ F; (b) okolo $300e$.

Kapitola 43

KONTROLY **1.** ^{90}As a ^{158}Nd. **2.** Trochu větší než 75 Bq (uplynulo o trochu méně než tři poločasy rozpadu). **3.** ^{206}Pb.

OTÁZKY **1.** Menší. **3.** ^{240}U. **5.** Menší. **7.** (a) Na přímce $N = Z$; (b) pozitrony; (c) okolo 120. **9.** Ne. **11.** Ano. **13.** (a) Zvětší se; (b) zůstane stejná. **15.** 7 h. **17.** d.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** 15,8 fm. **3.** (a) 0,390 MeV; (b) 4,61 MeV. **5.** (a) Šest; (b) osm. **9.** (a) 1 150 MeV; (b) 4,81 MeV na nukleon, 12,2 MeV na proton. **15.** $4{\cdot}10^{-22}$ s. **17.** $E_k \approx 30$ MeV. **21.** (a) 19,8 MeV, 6,26 MeV, 2,22 MeV; (b) 28,3 MeV; (c) 7,07 MeV. **23.** $1{,}6{\cdot}10^{25}$ MeV. **25.** 7,92 MeV. **27.** 280 d. **29.** (a) $7{,}6{\cdot}10^{16}$ s^{-1}; (b) $4{,}9{\cdot}10^{16}$ s^{-1}. **31.** (a) $4{,}8{\cdot}10^{-18}$ s^{-1}; (b) $4{,}6{\cdot}10^9$ y. **33.** $5{,}3{\cdot}10^{22}$. **35.** 265 mg. **37.** 209 d. **39.** 87,8 mg. **41.** 730 cm^2. **45.** (a) $3{,}66{\cdot}10^7$ s^{-1}; (b) $t \gg 3{,}82$ d; (c) $3{,}66{\cdot}10^7$ s^{-1}; (d) 6,42 ng. **47.** Pu: $1{,}2{\cdot}10^{-17}$, Cm: $e^{-9\,173} \approx 0$. **49.** (a) 4,25 MeV; (b) $-24{,}1$ MeV; (c) 28,3 MeV. **51.** $Q_3 = -9{,}50$ MeV, $Q_4 = 4{,}66$ MeV, $Q_5 = -1{,}30$ MeV. **53.** 1,21 MeV. **55.** 0,782 MeV. **59.** (b) 0,961 MeV. **61.** 78,4 eV. **63.** 1 600 y. **65.** 1,8 mg. **67.** 1,02 mg. **69.** (a) 18 mJ; (b) 2,9 mSv = 0,29 rem. **71.** (a) $6{,}3{\cdot}10^{18}$; (b) $2{,}5{\cdot}10^{11}$; (c) 0,20 J; (d) 2,3 mGy; (e) 30 mSv. **73.** $3{,}87{\cdot}10^{10}$ K. **75.** (a) 25,4 MeV; (b) 12,8 MeV; (c) 25,0 MeV. **77.** (a) 3,85 MeV, 7,95 MeV; (b) 3,98 MeV, 7,33 MeV. **79.** (a) 5,8 MeV; (b) 11 MeV.

Kapitola 44

KONTROLY **1.** c, d. **2.** (a) Ne; (b) ano; (c) ne. **3.** e.

OTÁZKY **1.** a. **3.** b. **5.** (a) ^{93}Sr; (b) ^{140}I; (c) ^{155}Nd. **7.** c. **9.** a. **11.** c.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) $2{,}6{\cdot}10^{24}$; (b) $8{,}2{\cdot}10^{13}$ J; (c) $2{,}6{\cdot}10^4$ y. **3.** $3{,}1{\cdot}10^{10}$ s^{-1}. **7.** +5,00 MeV. **9.** (a) 16 rozpadů za den; (b) $4{,}3{\cdot}10^8$. **11.** (a) 10; (b) 226 MeV. **13.** (a) 252 MeV; (b) typická energie štěpení je 200 MeV. **15.** 461 kg. **17.** Ano. **19.** (a) 1,2 MeV; (b) 3,2 kg. **21.** 44 kilotun. **25.** $1{,}6{\cdot}10^{16}$. **27.** (b) 1,0, 0,89, 0,28, 0,019; (c) 8. **29.** (a) 75 kW; (b) 5 800 kg. **33.** (a) 30 MeV; (b) 6 MeV. **35.** (a) 170 kV. **37.** 1,41 MeV. **41.** (a) $3{,}1{\cdot}10^{31}$ protonů/m^3; (b) $1{,}2{\cdot}10^6$krát. **43.** (a) $4{,}0{\cdot}10^{27}$ MeV; (b) $5{,}1{\cdot}10^{26}$ MeV. **45.** (a) $1{,}83{\cdot}10^{38}$ s^{-1}; (b) $8{,}25{\cdot}10^{28}$ s^{-1}. **49.** (a) $6{,}3{\cdot}10^{14}$ J·kg^{-1}; (b) $6{,}2{\cdot}10^{11}$ kg·s^{-1}; (c) $4{,}3{\cdot}10^9$ kg·s^{-1}; (d) $15{\cdot}10^9$ y. **51.** (a) 24,9 MeV; (b) 8,65 megatun TNT. **53.** $E_\alpha = 3{,}52$ MeV, $E_n = 14{,}1$ MeV.

Kapitola 45

KONTROLY **1.** (a) Mionové; (b) částice; (c) $L_\mu = +1$. **2.** b, e. **3.** c.

OTÁZKY **1.** d. **3.** π^+ pion nalevo, jehož dráha se zakřivuje dolů. **5.** a, b, c, d. **7.** c, f. **9.** 1d, 2e, 3a, 4b, 5c. **11.** 1b, 2c, 3d, 4e, 5a. **13.** (a) 0; (b) +1; (c) −1; (d) +1; (e) −1.

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** $6{,}03{\cdot}10^{-29}$ kg. **3.** $2{,}4{\cdot}10^{-43}$. **5.** $1{,}08{\cdot}10^{42}$ J. **7.** 2,7 cm·s^{-1}. **9.** (a) $1{,}9{\cdot}10^{-18}$ kg·m·s^{-1}; (b) 9,9 m. **13.** (a) L_μ, L_e, moment hybnosti; (b) náboj; (c) energie, L_μ. **15.** $Q = 0$, $B = -1$, $S = 0$. **17.** (a) Energie; (b) podivnost; (c) náboj. **19.** 338 MeV. **23.** (a) $\overline{u}u\overline{d}$; (b) $\overline{u}d\overline{d}$. **25.** (a) sud; (b) uss. **29.** Σ^0, 7 530 km/s. **31.** 669 nm. **33.** (b) 0,934; (c) $1{,}15{\cdot}10^{10}$ ly. **35.** (a) 256 μeV; (b) 4,84 mm. **37.** (a) 122 m·s^{-1}; (b) 246 y. **39.** (a) 2,6 K; (b) 29 nm. **41.** (a) $0{,}785c$; (b) $0{,}993c$; (c) C2; (d) C1; (e) 51 ns; (f) 40 ns. **43.** (a) $4{,}7{\cdot}10^4$krát; (b) 4,3 mm; (c) 24 nm.

Rejstřík

A

aberace
  chromatická, 937
  sférická, 937
absorpce fotonu, 1058, 1097
adiabata, 541
afelium, 369
akce (a reakce), 98
akceptor, 1116
aktinoidy, D16
aktivita radionuklidu, 1136, 1142
albedo, 516
AM (amplitudová modulace), 890
amfiteátr, 491
ampér, 695
  definice, 778
ampérmetr, 728
amplituda, 411, 860
  náboje, 860, 863
  napětí, 860, 872
  proudu, 860, 872
  rychlosti, 412
  tlaku, 470
  úhlová, 419
  vlny, 441
  výchylky, 411, 470
  zrychlení, 412
analogie elektro-mechanická, 862
analýza rozměrová, 445
analyzátor, 901
anihilace, 586, 1178
anizotropie, 901
antičástice, 28
antihelium, 918
antihmota, 1177
antiproton, 1178, D18
antivodík, 1075
antizvuk, 486
aorta, 396
apertura, 985
apogeum, 369
ar, 9
Arizonský kráter, 238, 258
asteroid, 366, 380
  Ida, 381
  Tunguzský, 289
atmosféra (jedn.), 386
atom, 28, 1080
  příměsový, 707
  vodíku, 639, 1066
atraktor Velký, 357
Atwoodův padostroj, 105, 293
AU, 10
autotransformátor, 887
Avogadro, Amadeo, 527

B

Ballot, Buys, 479, 492
bar, D8
Bar ve Folies-Bergère, 923
bariéra potenciálová, 1046
barometr rtuťový, 389
barva (tónu), 477
baryon, 1176
baterie, 716
  termoelektrická, 716
becquerel, 663, 1136
Becquerel, Henri, 1136
Bell, Alexander Graham, 474
Bernoulli, Daniel, 397
biceps, 336
bimetal, 501
blesk, 627, 644
bloky prvků (s, p, d, f), D16
bod
  blízký, 935
  hmotný, 13
  jemný (pálky), 435
  obratu, 181
  ohniskový
    čočky, 931
    kulového zrcadla, 925
  referenční, 174
  trojný (vody), 497, 565
Bohr, Niels, 1060, 1067, 1143, 1157
Boltzmann, Ludwig, 514
Bose, Satyendranath, 1176
boson, 1176
bottomness, 1184
Bragg, William L., 997
Brahe, Tycho, 366
Brewster, sir David, 910
British thermal unit, 504
btu, 504, D9
bublinková komora, 746
buňka elementární, 996, 1108

C

cal, D9
Callisto, 381, 422
Carnot, Sadi Nicolas Léonard, 558
centrifuga, 272
CERN, 1175
cesium (radioaktivní), 1150
cesta Osminásobná, 1184
cirkulace vektoru, 780
cívka, 760, 785, 810
  ideální, 812
  plochá, 760
cívky Helmholtzovy, 796
Compton, Arthur, 1037
Comptonova vlnová délka elektronu, 1038
Comptonův posuv, 1037
coulomb, 581, D2
Coulomb, Charles Augustin, 581
Cowan, Clyde L., 1140
curie, 1136
Curie, Marie, 1149
Curie, Pierre, 1149
CW, 713
cyklotron, 755, D18
cyklus
  (kmity), 410
  (termodyn.), 558

Č

čáry
  absorpční, 1067
  difrakční, 991
  emisní, 992, 1067
  Fraunhoferovy, 1105
  magnetické indukční, 746
  proudové, 696
čas, 5
  absolutní, 90
  jaderný charakteristický, 1148
  UTC, 6
částice, 13, 439
  a antičástice, 1177
  a vlny, 1042
  fundamentální, 1175
  tekutiny, 395
  volná, 89
  zprostředkující, 1187
čelo
  magnetu, 747
  vlny, 892
Černobyl, 1160
činitel
  chlazení, 563
  jakosti, 884
čip, 1123
číslice platná, 4
číslo
  atomové, 1081, 1131
  Avogadrovo, 527
  baryonové, 1182
  harmonického kmitu (módu), 456
  hmotnostní, 1131

kvantové, 1056, 1068, 1082, 1088
hlavní, 1068, 1082
magnetické
orbitální, 838, 1068, 1082
spinové, 837, 1082, 1176
orbitální, 1068, 1082
spinové, 1082, 1176
vedlejší, 1068
leptonové, 1181
Loschmidtovo, 546
magické nukleonové, 1144
Machovo, 482
nábojové, 1084
neutronové, 1131
protonové, 1131
řádu, 991
typové CW, 713
vlnové, 892, 1045
čítač Geigerův, 636
článek
palivový, 716
sluneční, 716
čočka, 931, 946
gravitační, 373, 1191
rozptylná (divergentní), 930
spojná (konvergentní), 930
tenká, 930, 946
čpavek, 663

D

dalekohled, 936
dálnice Nimitzova, 426
datování radioaktivní, 1141
dávka
ekvivalentní, 1143
pohlcená, 1142
radiační, 1142
debye, 663
decibel, 474
deexcitace, 191, 1058, 1067
defekt krystalu, 592
deformace, 342, 343
ve smyku, 344
všestranným tlakem, 344
děj, 143
adiabatický, 510, 541
cyklický, 509, 510
izobarický, 529
izochorický, 510, 529
nevratný, 553
stacionární, 513
termodynamický, 508
ustálený, 513
vratný, 553
deklinace magnetická, 835
dělič svazku, 965, 975, 1041
délka, 4
klidová, 1014
kontrahovaná, 1014
kyvadla redukovaná, 420
vlastní, 1014
vlnová, 441
Comptonova, 1038
de Broglieho, 1041
prahová, 1093
dělo elektromagnetické, 778
derivace funkce, 18
parciální, 444, 471, 653
DESY, 1175
detektor Čerenkovův, 1196
deuterium, 28
diagram
energiový, 1089, 1090
fázorový, 452
fázový, 402
nuklidový, 1132
p-V, 508
silový, 92, 584
diamagnetismus, 840
diamant, 402
dielektrikum, 579
nepolární, 682
polární, 681
diferenciál neúplný, 509
difrakce, 953, 978
Babinetův princip, 1000
elektronů, 1043
Fraunhoferova, 979
Fresnelova, 979
Fresnelova světlá stopa, 978
na dvojštěrbině, 988
na kruhovém otvoru, 985
na mřížce, 990
na štěrbině, 979, 982
rentgenová, 996
dilatace času, 1012, 1018
dioda, 1119
laserová, 1121
LED, 1120
tunelová, 1047
dioptrie, 947
dipól
elektrický, 596, 599
elementární, 650
magnetický, 761, 785, 834
díra, 1092, 1094, 1114, 1116
černá, 362, 370, 378, 379, 485
Dirac, Paul, 1176
disipace energie, 184
rezistorem, 706, 721, 865
disk nabitý, 604
diskrétní hodnoty, 27
disperze
anomální, 905
chromatická, 905
mřížky, 994
divergence úhlová, 914
doba
oběhu, 71
střední mezi srážkami, 704
vlastní, 1012
dolet, 65, 67, 78
doména magnetická, 843
donor, 1116
dopování, 707
Doppler, Johann Christian, 479
dotování, 1115
dráha
Mléčná, 357
oběžná geocentrická, 381
volná střední, 532
drift, 1114
duha, 905
Maxwellova, 890
dutina ve vodiči, 625
dvojlom, 901
dvojštěrbina, 978, 1039

E

Edgerton, Harold, 678
Einstein, Albert, 372, 1007, 1034, 1081, 1176, 1189
ekvivalent hmotnosti energiový, 188
elektrické pole, 594
dipólu, 599
energie, 677
homogenní, 596
indukované, 807
nabitého disku, 603
nabitého vlákna, 600
elektrické siločáry, 595
elektroda kondenzátoru, 669
elektrodynamika kvantová (QED), 1187
elektromagnet, 744
elektromagnetická vlna, 890, 893
elektromagnetismus, 578
elektrometr, 680, 687
elektromotor, 759
elektron, 28, 748, 1181
β-rozpad, 1139
valenční, 1092
vázaný, 1056, 1058
vodivostní, 580, 656, 694, 703, 707, 1110
elektron (řec.), 578
elektronové dělo, 751
elektronvolt, 142, 643
elektroplax, 726
element proudový, 774
elipsa, 367
Emauzy — Vermeer, 1152
emise fotonu, 1058
spontánní, 1097
stimulovaná, 1097, 1098
emisivita, 514
emitor, 1122
emn, 716
indukované, 799

energie, 142, 188, 1023
  cívky, 816
  excitační, 1077
  Fermiho, 1111
  gravitační, 170
  ionizační, 1080
  kinetická, 142, 1023
    částice, 143
    soustavy, 192
    tělesa, 142, 273, 281, 299
  klidová, 1023
  kondenzátoru, 677
  kvantování, 1057
  mechanická, 175, 183
  potenciální, 170, 641
    dipólu elektrického, 608
    dipólu magnetického, 761
    elektrická, 641, 677
    elektrostatická, 641
    gravitační, 363
    pružná, 170, 174
    soustavy nábojů, 654
    tíhová, 173
  soustavy, 184, 186
  systému, 641
    elektronů, 1089
  tepelná, 496
  tíhová, 170
  vazební, 144, 190, 655, 1077, 1134
  vnitřní, 171, 496, 503, 509, 536
  základního stavu, 1060
entopické halo, 999
entropie, 553
etalon sekundární, 566
éter, 975
Europa, 381
eV, D9
excentricita elipsy, 367
excitace, 1067
expander (rozšiřovač) svazku, 945
expanze, 510
  izotermická, 528
  volná (do vakua), 510, 542
experiment
  EPR, 1072
  Youngův, 953

F

faktor
  chladicí, 563
  Lorentzův, 1012
  násobicí reaktoru, 1159
  RBE, 1143
faktoriál, 158, 567
farad, 670, D2
Faraday, Michael, 578, 679
fata morgana, 921
fáze, 411, 471, 505, 868
  počáteční, 411
  vlny, 441
fázor, 452, 868, 958
femtometr, 1133
femur, 345
fermi, 1133
Fermi, Enrico, 1162, 1176
Fermilab, 756
fermion, 1176
feromagnetismus, 840, 842
FET, 1122
fibrilace, 678
filtr polarizační, 900
fluidum, 584
fotodioda, 1121
fotoefekt, 1035
fotoelektron, 1035
foton, 1034
  virtuální, 1187
fotoproud, 1035
Fourier, Jean Baptiste, 449
Franklin, Benjamin, 579
frekvence, 410
  budicí, 867
  harmonická, 456
  kruhová, 411
  píšťaly vlastní (rezonanční), 476
  prahová, 1035
  rezonanční, 873
  struny vlastní (rezonanční), 455
  úhlová, 411, 442, 892
  vlastní LC obvodu, 867
  vlny, 442
Fresnel, Augustin, 978
Fresnelova světlá stopa, 978
Frisch, Otto, 1155
fulerény, 1041
funkce
  cyklometrické, 45, D10
  goniometrické, 45, D10
  hladká, 1046
  vlnová, 1044
    atomu vodíku, 1068
    elektronu v jámě, 1059
    volné částice, 1045
fúze
  jaderná, 1134, 1163
  laserová, 1168
  termojaderná, 1163
    řízená, 1167
    ve Slunci, 1165
fyzika
  elementárních částic, 27
  klasická, 27
  kvantová, 27, 1034

G

galaxie
  M87, 484
  NGC7319, 493
Galaxie (naše), 380
Galilei, Galileo, 82, 381, 422, 1007
Galileo, sonda, 381
galvanometr, 761
  balistický, 843
Ganymedes, 381
gauss, 746
Gauss, Carl Friedrich, 619
Geiger, Hans, 1130
Gell-Mann, Murray, 1183
generace, 1159
generátor elektrický, 716, 886
geometrická optika, 903
Gerlach, Walter, 1085
gluon, 1188
gradient, 653, 1085
graf
  (el. schématu), 728
  bodový, 1069
grafit, 402
gravitace, 357
graviton, 373
gray, 1142
Guericke, Otto von, 401

H

Haas de, W. J., 1081
hadron, 1176
Hahn, Otto, 1155
Hall, Edwin E., 749
halogeny, 1092, D16
harmonická (1., 2., …), 476
heavy metal, 475
Heisenberg, Werner, 1045
hektar, 9
henry, 810, D2
hertz, 410, D2
Hertz, Heinrich, 890
hladina
  energiová, 190, 707, 1058
    akceptorů, 1116
    částečně obsazená, 1089
    degenerová, 1065
    donorů, 1116
    jaderná, 1134
    obsazená, 1089
  Fermiho, 1111
  intenzity zvuku, 474
  kompenzace, 402
  prázdná, 1089
hlasitost zvuku, 474
hloubka jámy, 1061
hmota, 1177
  jaderná, 1135
  temná, 1190
hmotnost, 8, 91, 188
  klidová, 1023
  molární, 527
  proměnná, 222

redukovaná, 182
relativistická, 1023
hodnota
efektivní, 875, 896
okamžitá, 860
homogennost po vrstvách, 358
horizont (černé díry), 362
houpačka, 410
hp, D9
hradba kvantová, 1055, 1064, 1080, 1088
hradlo, 1122
hrana
grafu, 728
série, 1067
Hubble, Edwin Powell, 1189
hustota, 385
délková, 445
energie pole
elektrického, 678, 896
elektromagnetického, 896
magnetického, 817
náboje, 600
objemová, 697
obsazených stavů, 1112
pravděpodobnosti, 1044
radiální, 1068
proudu elektrického, 696
stavů, 1111
Huygens, Christian, 950, 978
hvězda
neutronová, 84, 314, 365, 370, 378, 1147
pulzující, 491
hvězdokupa kulová, 364
hybnost, 182, 216
fotonu, 1037
relativistická, 1022
hypernáboj, 1194
hystereze magnetická, 845

C

Chadwick, James, 1155, 1188
chalkogeny, D16
Cheopsova pyramida, 231
chladnička, 563
100%, 563
Carnotova, 563
ideální, 563
chlor, 1092
chromodynamika kvantová (QCD), 1188
chvost komety, 899

I

impedance, 872
impulz
momentu síly, 324
síly, 239
index lomu, 904, 905, 951
indukce
elektrická, 683
elektromagnetická, 799
magnetická, 744
magnetoelektrická, 846
náboje, 675
vlastní, 812
vzájemná, 818
indukčnost cívky
vlastní, 810
vzájemná, 818
induktance, 871
induktor, 810
inch, 4
inklinace magnetická, 836
integrál, 155
křivkový, 151, 152, 646
plošný, 621
intenzita
elektrická, 594
elektrického pole, 594
vlny, 896
zvuku, 472
interakce (síla), 89
elektromagnetická, 132
elektroslabá, 132
gravitační, 95
silná, 28, 132, 586, 1135
slabá, 132
výměnná, 842
interference, 450, 954
částečná, 451
destruktivní, 471, 954
elektronů, 1041
konstruktivní, 471, 954
na dvojštěrbině (Youngův pokus), 953
na tenké vrstvě, 959
světla, 950
úplně
destruktivní, 451
konstruktivní, 450
vln, 450
interferometr, 965
akustický, 490
Michelsonův, 965
invar, D17
inverze populace, 1121
Io, 381
iont, 580
izobara, 1133
izolátor, 579, 707, 1108, 1110
izospin, 1194
izoterma, 528
izotop, 28, 1131

J

jádro
atomu, 28, 1130
dceřiné, 586
mateřské, 586
složené, 1143
jáma (potenciálová), 1057, 1088
Jeans, James, 449
jednotka, 2
astronomická, 10
hmotnostní atomová, 8, 1133, D9
komplexní, D11
odvozená, 2
základní, 2
Jensen, Hans, 1144
jev
Comptonův, 1037, D17
Čerenkovův, 969, D18
Dopplerův, 479, 1010, 1020
příčný, 1021
elektromagnetické indukce, 799
fotoelektrický, 1035
Hallův, 749
Josephsonův, 1047, D19
piezoelektrický, 1048
Ramanův, D17
Richardsonův, D17
tunelový, 1046, D19
jezero Nyos, 392
jiskra, 605, 612
jojo, 303
joule, 142, 504, D2
Jupiter, 422

K

kalorie, 504
kalorimetr průtokový, 522
Kamerlingh, Onnes, 708
kanál, 1122
kandela, D1
kapacita
kondenzátoru, 670
tepelná, 504
měrná, 504
molární, 505
kapacitance, 871
kapacitor, 669
kapalina, 385, 394
ideální, 393
nestlačitelná, 393, 394
neviskózní, 393, 394
kaustika, 913
kavitace, 408
kelvin, 496, 497, D1
Kepler, Johannes, 366
kilogram, 8, D1
kilopond, 386
kinematika, 13
kinetická energie, 142
částice, 143
soustavy, 192
tělesa, 142, 273, 281, 299
Kirchhoff, Gustav Robert, 718

kmit
  harmonický (1., 2., …), 456
  struny vlastní (rezonanční), 455
  základní, 456
kmitání (viz též kmity), 410
kmitna, 453, 476
kmitočet, 410
  úhlový, 411, 442
kmity
  buzené, 867
  elektromagnetické, 860
  harmonické, 411
  nucené, 425, 867
  obvodu LC, 860
  relaxační, 413
  tlumené, 410, 423, 865
  torzní, 417
  vlastní (rezonanční), 455, 476
  vlastní obvodu LC, 867
  volné, 425
knihovna Kongresu, 1035
koeficient
  průchodu, 1047
  převodní, 3
  tření, 120
koherence, 956
kolektor, 1122
kolimátor, 992
kometa
  Halleyova, 369
  Woo Woo, 381
komora
  bezdozvuková, 490
  bublinková, 746
komorní a, 479
kompas, 836
komprese izotermická, 528
koncentrace nosičů náboje, 697, 1108, 1114
kondenzát Boseho-Einsteinův, 1176
kondenzátor, 669
  deskový, 669, 692
  elektrody, 669
  kulový, 673
  nabitý, 670
  otočný, 689
  s dielektrikem, 679
  válcový, 672
konduktance, 699
konduktivita, 700
konfigurace, 170, 567
  elektronová, 1089
  referenční, 174, 641
konstanta
  Avogadrova, 527, D3
  Boltzmannova, 532, 841, D3
  Curieova, 842
  časová
    obvodu RC, 729
    obvodu RL, 814
  dielektrická, 679
  elektrická, 582
  gravitační, 357, D3
  Hubblova, 1189
  magnetická, 774
  mřížková, 991, 996
  Planckova, 1034, D3
    redukovaná, 1034
  plynová, 528, D3
  Poissonova, 541
  rozpadu, 1136
  Stefanova-Boltzmannova, 514, D3
kontinent, 403
kontrakce délky, 1014, 1018
korona Měsíce, 1002
korpus nástroje, 475
kořen hory, 402
kov, 1108, 1110
kovy
  alkalické, 1092, D16
  alkalických zemin, D16
  nepřechodné, D16
  přechodné, D16
  vodivost, 703, 1111
Krabí mlhovina, 290
krabice (potenciálová), 1065, 1089
kritérium
  Lawsonovo, 1167
  Rayleighovo, 986
kroucení, 417
kroužky Newtonovy, 974
kružnice hlavní, 372
krystal
  dvouosý, 902
  jednoosý, 902
  opt. negativní, 902
  opt. pozitivní, 902
křivka
  Ampérova, 780
  hysterezní, 846
  rezonanční, 422, 873
kůra zemská, 361
kužel Machův, 482
kuželosečka, 367
kvadrupól elektrický, 614
kvantování, 27
  elektrického náboje, 585
  energie, 190, 1034
  momentu hybnosti, 317
  pohybu, 1056
  prostorové, 1086
kvantování energie, 1057
kvantum, 27, 1034
kvark, 28, 1185, D19
kvazar, 373, 1189
kytara elektrická, 802
kyvadlo
  balistické, 246
  fyzické, 419
  konické, 128
  matematické, 418
  reverzní, 420
  torzní, 417, 1082

L

lámavý povrch, 929
Land, Edwin, 900
lanthanoidy, 1095, D16
laser, 957, 1096, D18
  plynový He-Ne, 1098
  přirozený, 1105
laserová pinzeta, 898
látka
  diamagnetická, 840
  feromagnetická, 840
  magnetická, 840
  paramagnetická, 840
  pevná, 1108
    energiové hladiny, 1109
    krystalická, 1108
    pásová struktura, 1109
  pracovní, 558
látro, 9
Laue, Max von, 996
lázeň tepelná, 508
LED, 1120
Lemaître, Georges, 1191
Lenz, Emil, 801
Leonardo da Vinci, 439
lepton, 28, 1176, 1181
lidské oko, 1050
lis hydraulický, 403
lom, 903
lumen, D2
lupa, 935
lux, D2
ly (light year), 4
lýtko, 350

M

magdeburské polokoule, 401
magnet, 747
  permanentní, 744
  tyčový, 746
magnetické indukční čáry, 746
magnetické pole, 744
  cívky, 785
  elektrického proudu, 774
  energie, 815
  indukované, 846
  kruhového oblouku, 776
  nejsilnější, 827
  přímého vodiče, 775
  solenoidu, 783
  toroidu, 785
  Země, 747
magnetismus
  jaderný, 1134

permanentní, 846
termoremanentní, 844
magnetizace, 841
magnetka inklinační, 836
magnetometr, 836
magneton Bohrův, 837, 1083
mach, 482
Mach, Ernst, 482
MACHO, 1191
makrostav, 567
Manet, Edouard, 923
manometr kapalinový, 390
Marsden, Ernest, 1130
materiál izotropní, 700
matice, 742
Maxwell, James Clerk, 540, 578, 890, 897
Mayerová, Marie, 1144
mechanika
kvantová, 1056
newtonovská, 89
Meitnerová, Lise, 1155
Mendělejev, Dimitrij Ivanovič, D16
měsíc
lunární, 11
siderický, 11
Měsíc, D4
měsíce Jupiteru, 381
meteorit, 163
metr, 5, 893, 1050, D1
standardní, 4
metrologie, 565
mez
kluzu, 343
pevnosti, 343
mezera energiová, 1109
mezon, 1176, D18
μ, 28
J, 1187
Michelson, Albert A., 965
mikroskop
optický, 936
tunelový rastrovací, 1047
mikrostav, 567
mikrovlny, 609
milimetr rtuťového sloupce, 386
Millikan, Robert A., 605
mion, 28
míra oblouková, 265
místo
desetinné, 4
platné, 4
mlhovina Krabí, 290
množství, 8
mód kmitání, 476
model
jaderného štěpení, 1157
jaderný, 1143
kolektivní, 1143
kombinovaný, 1145
nezávislých částic, 1144
jádra slupkový, D18
kvarkový, 1185
smyčkový, 838
vodíku Bohrův, 1067
volných elektronů, 703, 1110
moderátor, 1158
modul
objemové pružnosti, 344
pružnosti, 343
v tahu, 343
ve smyku, 344
Youngův, 343
Moho vrstva, 379
Mohole, 379
mohyla Silbury Hill, 212
mol, 8, 527, D1
molekula
nepolární, 650
polární, 650
moment
deviační, 311
dipólový elektrický, 599
indukovaný, 651, 682
dipólový magnetický, 761
atomu, 1081
cívky, 785
efektivní, 1084
orbitální, 851, 1083
permanentní, 650
spinový, 837, 1083
Země, 854
hybnosti, 306, 310
atomu, 1081
jaderný, 1134
orbitální, 1083
skládání, 1084
spinový, 317, 837, 1082
magnetický jaderný, 1134
setrvačnosti, 273
síly (silový), 278, 279, 304, 608
výsledný, 307
monopól (magnetický), 744, 834
Moseley, Henry Gwyn Jeffreys, 1094
Moseleyho graf, 1094
MOSFET, 1122
motor, 558
100%, 560
elektrický, 759
ideální, 558
Stirlingův, 561
tepelný, 558
mračno Magellanovo Velké, 370
MRI, 1087
Mrtvé moře, 404
mřížka
difrakční, 990
krystalová, 1108, 1115
multimetr, 728

N

náboj, 578
bodový, 581, 597
elektrický, 578, 586
elementární, 585, 605
hustota, 600
indukovaný, 580
jednotkový, 642
kondenzátoru, 670
magnetický, 744, 834
prostorový, 1118
spojitě rozložený, 600
testovací, 594
vázaný, 683
volný, 578, 683
nadbytek
hmotnostní, 1140
neutronový, 1132
nádoba magnetická, 753
nanokrystal, 1063
napětí
(elektrické), 642, 648, 670, 671
brzdné, 1035
elektromotorické (emn), 716
indukované, 800
Hallovo, 750
kontaktní, 1118
mechanické, 342
průrazné, 680
při bouřce, 661
svorkové, 717
násobnost, 567
násoska, 407
nástavec magnetu pólový, 747
nástroje hudební, 477
Ne'eman, Yuval, 1184
nekonečno, 641, 654
neon, 1091
Nernst, Walther, 570
neutrino, 28, 1139, 1181, 1191
neutron, 28, D18
neutrony tepelné, 1155
nevodič, 579
newton, 90, D2
Newton, Isaac, 357
Niagarské vodopády, 201
Nishijima, Kazuhiko, 1183
NMR, 1087
nor, 595, 834
normování, 1060
nosič
majoritní, 1116
minoritní, 1116
nukleon, 28, 1131
nuklid, 28, 1131
magický, 1144
nula absolutní, 496, 570

O
objekt bodový, 13, 142
objem molární, 549
objev
  elektronu, 749
  struktury jaderných slupek, 1144
obr červený, 1166
obraz, 921
  bodový, 922
  fokusovaný (zaostřený), 926
  reálný, 921, 929, 932
  virtuální, 921, 922, 929, 932
obrazce Chladniho, 456
obrazec
  difrakční, 978
  interferenční, 954
  paprskový, 933
obrazová vzdálenost, 923
obvod
  LC, 860
  RC, 728
  RL, 813
  RLC, 862, 865, 871
  elektrický, 717
  induktivního charakteru, 872
  integrovaný, 1123
  kapacitního charakteru, 872
  kmitavý, 860
odezva reaktoru, 1159
odpor
  diferenciální, 703
  elektrický, 699
  měrný elektrický, 700
  tepelný, 512
  vnitřní zdroje, 719
odraz, 903
  (mech. vlny), 454
  úplný, 908
odražeč koutový, 944
Oersted, Hans Christian, 578
ohm, 699, D2
ohmmetr, 728
ohnisko
  skutečné (reálné), 925, 931
  zdánlivé (virtuální), 925, 932
oko lidské, 947
okolí (systému), 503
okruh reaktoru
  primární, 1159
  sekundární, 1159
optické vlákno, 919
optika geometrická, 903
osa
  dipólu, 599
  optická (centrální), 902, 924
  otáčení (rotace), 264
  zrcadla (centrální), 924
oscilace obvodu, 860
oscilátor
  LC, 863
  harmonický, 413
  lineární, 413
  tlumený, 423
  torzní, 417
osmispřeží, 401
otáčení, 264–284
otočení, 265, 267

P
pád volný, 24
padostroj Atwoodův, 105, 293
palec (inch), 4
paprsek, 892
  dopadající, 903
  lomený, 903
  mimořádný, 902
  monochromatický, 905
  odražený, 903
  řádný, 902
paprsková konstrukce, 927, 933
paprsky, 467
  kanálové, D17
  rentgenové, 890
  X, 891, D17
paradox hydrostatický, 400
paramagnetismus, 840, 841
parametr
  deformace, 1157
  mřížkový, 996
  rychlostní, 1012
paranthelium, 918
parsek, 10
pás
  energiový, 707, 1109
  valenční, 707, 1114
  vodivostní, 707, 1114
  zakázaný, 707, 1109
pascal, 386, D2
Pascal, Blaise, 390
past
  elektronová, 1057, 1064, 1088
  magnetická, 753
pásy radiační Van Allenovy, 753
paúhoř elektrický, 715, 726
Pauli, Wolfgang, 1139
pentium, 1128
perigeum, 369
perihel, perihelium, 369
perioda, 71, 410
  kmitů vlny, 442
permeabilita vakua, 774
permitivita
  absolutní, 680
  relativní, 679
  vakua, 582, 672
perpetuum mobile
  1. druhu, 561
  2. druhu, 561
pevnost dielektrická, 680
Phobos, 380
Pisa, šikmá věž, 349
píšťala, 476
planety, D5
plazma, 385, 1167
plocha
  ekvipotenciální, 643
  Gaussova, 619
plyn, 385
  ideální, 527
plyny netečné (vzácné), 1092, D16
p-n přechod, 1117
pniktidy, D16
pnutí, 97
počátek, 13
počítač Geigerův, 662
podivnost, 1183
podmínka Bohrova frekvenční, 1080
podmínky
  počáteční, 414
  rovnováhy, 331
podslupka, 1071
  uzavřená, 1091
podtlak, 390
pohlcení fotonu, 1058
pohon
  housenkový, 766
  magnetohydrodynamický, 766
pohyb, 13
  aperiodický, 424
  harmonický, 411
    torzní, 416
  otáčivý, 264
  periodický, 410
  podélný (longitudinální), 440
  posuvný, 225, 264
  příčný (transverzální), 440
  přímočarý, 13
  rotační, 264
  rovnoměrně zrychlený, 21
  translační, 225, 264
  vzájemný, 74
pokus
  Einsteinův-de Haasův, 1081
  jednofotonový dvojštěrbinový, 1040
  Millikanův, 661
  Sternův-Gerlachův, 1085
  Youngův, 953, 1039
pól
  geografický, 747
  geomagnetický, 835
    jižní, 747
    severní, 747
  jižní, 834
  magnetický, 836
  severní, 834
polarizace, 899
  dielektrika, 681
  lineární, 440
  molekuly, 651

vlny, 899
polarizátor, 901
polarizátory zkřížené, 901
polaroid, 900
pole
elektrické, 594
dipólu, 599
energie, 677
homogenní, 596
indukované, 807
nabitého disku, 603
nabitého vlákna, 600
fyzikální, 594
magnetické, 744, 896
cívky, 785
elektrického proudu, 774
energie, 815
indukované, 846
kruhového oblouku, 776
nejsilnější, 827
přímého vodiče, 775
solenoidu, 783
toroidu, 785
Země, 747
nepotenciálové, 809
rychlostí, 620
skalární, 594
vektorové, 594
zkřížená, 748
zorné, 924
polní pojetí, 677
poločas rozpadu, 1136
poloha, 13
rovnovážná, 181
indiferentní, 181
labilní, 181
stabilní, 181
volná, 181
vratká, 181
úhlová, 265
poloměr
Bohrův, 595, 639, 1067, 1068
gyrační, 291
křivosti
kulových lámavých povrchů, 928
kulových zrcadel, 924
poloosa elipsy hlavní, 367
pološířka, 991, 1001
polovodič, 580, 706, 1108, 1114
polovodiče
typu *n*, 1115
typu *p*, 1116
postulát
entropie, 553
rychlosti světla, 1008
posun fázový, 867, 872
posunutí, 13, 59
fázové, 412
posuv, 264
Comptonův, 1038
modrý, 484, 1020
rudý, 484, 493, 1020
kosmologický, 1197
potenciál elektrický, 642, 643, 671
bodového náboje, 647
dipólu, 650
nabité úsečky, 651
nabitého disku, 651
nabitého vodiče, 656
soustavy nábojů, 648
spojitě rozloženého náboje, 651
vodivé koule, 656
potenciometr, 739
poutač Velký, 357
Poynting, John Henry, 895
pozitron, 28, 1139, 1177, D18
práce, 143, 504
při otáčivém pohybu, 281
síly
elektrické, 641
konstantní, 145
konzervativní, 171
proměnné, 150
pružné, 153
tíhové, 147
výstupní, 1036
prak gravitační, 257
pravděpodobnost obsazení, 1112
pravidlo
jedné poloviny, 900
kosinu na druhou, 900
Lenzovo, 801
pravé ruky, 268, 745, 775, 777
(pro vektorový součin), 50
smyčkové, 718
uzlové, 723
precese, 1084
princip
Babinetův, 1000
ekvivalence, 372
Huygensův, 950
invariance, 159
korespondence, 1060
neurčitosti Heisenbergův, 1045, 1084
omezovací, 1056, 1066
Pauliho vylučovací, 1088, 1098, 1176, D18
superpozice, 358, 448, 582, 597, 774
pro elektrické pole, 597
pro magnetické pole, 774
světla, 950
proces (viz děj), 508
prodloužení relativní, 343
proměnná konfigurační, 173
propad, 595, 834
prosakování, 1062
prostor absolutní, 90
prostoročas, 372
prostředí
izotropní, 473
průhledné, 903
protifáze, 471
protislunce, 918
proud, 694
difuzní, 1117
driftový, 1118
elektrický, 579
fotoelektrický, 1035
harmonický, 867
indukovaný, 799
Maxwellův, 848
posuvný, 848
povrchový zemní, 628
přechodný, 872
smrtelný, 712
stejnosměrný, 694, 866
střídavý, 866
ustálený, 694, 872
závěrný, 1120
proudění, 394
tepla, 513
proudnice, 395
proudy vířivé, 806
proužek bimetalový, 501
proužky interferenční, 954
prstence
planet, 380
Saturnovy, 662
prstenec
Einsteinův, 373
ekvivalentní, 291
průmět vektoru pravoúhlý, 46
průraz elektrický, 604
průřez účinný, 124
průtokoměr Venturiův, 407
pružina gravitační, 419
pružnost, 342
prvek radioaktivní, 1130
předmět, 921
předpony jednotek SI, 3
přechod
p-n, 1117
kvantový, 191, 1058
překlopení spinu, 1087
přenos tepla
prouděním, 513
vedením, 512
zářením, 514
přetlak, 388, 390
převod
hydraulický, 391
jednotek, 3
převrácení (inverze) populace, 1098
přímka
vektorová, 278
vztažná, 265
přístroj fotografický, 948
přístroje optické, 935
psi (pound per square inch), 386
Ptolemaios, Claudius, 917

pulz, 439
pulzar, 290, 362
půvab (charm), 1184

R
R-value, 512
rad, 1142
radiační Van Allenův pás, 694
radián, 265, D2
radionuklid, 1131
radiouhlík, 1141
rameno síly, 278
rampouch, 519
rastrovací tunelový mikroskop (STM), 1047
ráz (srážka), 238
rázy (zázněje), 478
RBE, 1143
reakce
(a akce), 98
endotermická, 251
exotermická, 251
jaderná, 250
řetězová, 1158
reaktance
induktivní, 869
kapacitní, 868
reaktor jaderný, 1158
přírodní, 1162
tlakovodní (PWR), 1159
reflexe totální, 908
refrakce, 903
Reines, Frederick, 1140
relativita, 1007
rem, 1143
reologie, 385
rezistance, 699, 868
rezistivita, 700, 1108, 1114
teplotní součinitel, 1108, 1114
rezistor, 699
rezonance, 425, 867, 872
jaderná magnetická (NMR), 1087
parametrická, 426
struny, 455
režim práce reaktoru, 1159
kritický, 1159
nadkritický, 1159
podkritický, 1159
Richere, Jean, 435
Roemer, Olaf, 914
rok světelný, 4, 10
rotace, 264
rovina
dopadu, 903
Gaussova (komplexní), D11
kmitů, 899
krystalová, 996
přechodu, 1117
reflexní, 996
rovnice
Bernoulliova, 397
diferenciální
obecné řešení, 730
partikulární řešení, 730
kontinuity, 395
Maxwellovy, 850
Měščerského, 223
parametrická, 67
Schrödingerova, 1044, 1054
stavová ideálního plynu, 527
transformační Galileovy, 1016
rovnováha, 330
sekulární, 1149
sil, 92
stálá (stabilní), 330, 583
statická, 330
tepelná, 497
volná (indiferentní), 330
vratká (labilní), 330
rozdělení Maxwellovo, 534, 703, 1164
rozdíl
dráhový, 955, 958, 982
fázový, 412, 450, 958, 982
potenciálový (napětí), 648, 671
rozepnutí (expanze), 510
rozfázování, 412
rozklad vektoru do složek, 43
rozlišovací schopnost, 937
rozpad
α, 1137
β, 1139, 1186
jádra, 1131
mionu, 1179
radioaktivní, 586, 1135
rozpínání izotermické, 528
rozptyl Comptonův, 1038
rozptylka, 930
rozšiřovač (expander) svazku, 945
roztažnost teplotní, 501
rozvor, 349, 354
Rutherford, Ernest, 638, 665, 1053, 1130
rychlost, 17, 60
driftová, 696, 704
Fermiho, 704, 1111
mezní, 124, 1008
obvodová, 271
okamžitá, 17, 60
průměrná, 14, 60
relativní, 73
střední, 14
kvadratická, 530
úhlová, 423
okamžitá, 266
průměrná, 266
úniková, 365, 666
vlny, 442
zvuku, 468, 531

Ř
řád čáry, 991
řada Fourierova, 449
řešení obvodu, 727
řetězec
proton–protonový, 1165
uhlíkový, 1173

S
sálání, 514
samoindukce, 812
satelit Echo, 377
saturace, 842
sčítání vektorů, 41, 46
seismograf, 488
sekunda, 6, D1
sendvič, 1064
série
Balmerova, 1067, 1068
Lymanova, 1067
Paschenova, 1067
schéma elektrické, 670
schopnost rozlišovací, 994
Schrödinger, Erwin, 1044
SI, 2
siemens, 699, D2
sievert, 1143
síla, 89, 90
Ampérova, 758
brzdná, 423
dostředivá, 126
elektrická, 579
elektromagnetická, 131, 1176
elektroslabá, 1188
elektrostatická, 579, 581
externí, 184
gravitační, 131, 357, 586, 1176
interakční, 181
interní, 181
jaderná, 1134
silná, 1176, 1188
slabá, 1176, 1188
koňská, 156
konzervativní, 171, 365, 641
Lorentzova, 745
mezi vodiči, 778
nekonzervativní, 171
normálová, 96
objemová, 127
odporová, 124
plošná, 127
pružná, 152
radiační, 898
silná, 1135
slapová, 362
tahová (tažná), 97
tíhová, 95
tlaková, 96

třecí, 97, 184
dynamická, 119
kinetická, 119
statická, 119
vazební, 172, 645
vnější, 92, 144, 184
vnitřní, 92, 144, 181
výsledná, 91
vztlaková, 392
siločára, 595
sjednocení (interakcí), 132
skalár, 40
skok kvantový, 1058
skupenství, 505
Skylab Two, 430
složka
normálová, 272
vektoru, 43
Slunce, 1165, D4
vedlejší, 918
slupka, 1072
$(K, L, M, \ldots)$, 1094
jaderná, 1144
směr
kladný, 13
polarizace, 900
proudu, 695
propustný, 1119
závěrný, 1120
přenosu energie, 902
záporný, 13
smyčka
hysterezní, 846
v el. obvodu, 718
smyk, 342, 344
snímač (na kytaře), 802
sodík, 1092
sodíkový dublet, 995, 1102
solenoid, 783
ideální, 783
současnost, 1010, 1017
součet vektorů, 41
součin vektorů
skalární, 49
vektorový, 50
součinitel
odporu, 124
tepelné vodivosti, 512
teplotní
rezistivity, 700, 1108
roztažnosti
délkové, 501
objemové, 502
útlumu, 424
souřadnice
časová, 1009
kartézské, 59
prostoročasové, 1009
prostorové, 1009
soustava
elektrických nábojů, 654
Galileiova, 90
inerciální, 90, 1007
izolovaná, 175, 222
jednotek mezinárodní, 2
kartézská, 46
laboratorní, 90
metrická, 2
neinerciální, 90, 96, 107
neúplně určená, 341
pravotočivá, 46
prvků periodická, 1091
SI, 2
těžišťová, 182, 221, 1030
uzavřená, 214, 218
vztažná, 72, 1007
spektrometr hmotnostní, 754
spektroskop mřížkový, 992
spektrum
absorpční NMR, 1087
atomu vodíku, 1067
elektromagnetické, 890
rentgenové
charakteristické, 1094
spojité, 1093
spin, 317, 837, 1082, 1176
jaderný, 1134
spojení
cívek
paralelní, 829
sériové, 829
kondenzátorů
paralelní, 674
sériové, 674
odporů
paralelní, 723
sériové, 720
spojka, 930
srážka, 238
čelní, 241
dokonale nepružná, 245
elastická, 242
nepružná, 245
pružná, 242
přímá, 241
šikmá, 248
srdeční záchvat, 668, 678
standard, 2
druhotný, 4
statistika Fermiho-Diracova, 1112
stav
beztíže, 106
degenerovaný, 1065
excitovaný, 190, 1058
kvantový, 190, 1057, 1068
lokalizovaný, 1116
metastabilní, 1097
termodynamický, 504, 517
vázaný, 1057
základní, 190, 1058
stavba atomu, 28
Stefan, Joseph, 514
steradián, D2
Stern, Otto, 1085
stlačení
izotermické, 528
plic, 388
Stonehenge, 212
stopa Fresnelova světlá, 978
stoupání, 752
Strassmann, Fritz, 1155
stroboskop, 678
stroj
Carnotův, 558
tepelný, 558, 563
strom (graf), 728
stroncium (radioaktivní), 1149
střed
hmoty (hmotný, hmotnosti), 208, 332
křivosti
kulových lámavých ploch, 929
kulových zrcadel, 924
kyvu, 420
vztlakový, 393
střední volná dráha, 705
stupnice
Celsiova, 497, 499, D2
Fahrenheitova, 499
Kelvinova, 497
Richterova, 205
substrát, 1123
superkondenzátor, 673
supernova, 84, 365, 1166
SN 1987A, 1140
superstruny, 131
supravodič, 580
supravodivost, 580, 708
Svatý Grál, 1177
svazek, 892
světelná vlna, 893
světelnost, 937
světlo, 893
částečně koherentní, 956
částečně polarizované, 900
koherentní, 956
nekoherentní, 957
nepolarizované, 899
polarizované, 899, 900
viditelné, 891
symetrie
kulová (sférická), 358, 630
rovinná, 628
válcová (rotační), 596, 627
synchrotron, 756
systém (termodyn.), 503

Š

šířka zeměpisná magnetická, 854

špička ledovce, 393
štěpení
  jaderné, 1134
  jádra, 1155
štír, 440

T
tabulka prvků periodická, 1080, 1091, D16
tah, 342, 343
  motoru, 224
takt, 558
tauon, 28, 1181
tečky kvantové, 1064
tekutina, 124, 385
těleso
  černé, 514
  pružné, 342
  volné, 340
teorém
  ekvipartiční, 540
  slupkový, 358, 362, 582, 630
teorie
  plynů, kinetická, 527
  relativity
    obecná, 372
    speciální, 158, 188, 216, 893, 1007
  superstrun, 131
  supersymetrie, 131
  velkého sjednocení, 131, 1189
  všeho (TOE), 1189
teplo, 503
  Joulovo, 706
  latentní, 506
  měrné (specifické), 504
  molární, 505
  skupenské, 505
    kondenzace, 505
    měrné, 505
    molární, 505
    tání, 505
    tuhnutí, 506
    varu, 505
    vypařování, 505
teploměr, 496
  plynový, 498
teplota, 496, 497
  Celsiova, 499
  Curieova, 843
  Fahrenheitova, 499
  ideální plynová, 499
  nízká (rekordní), 570
  standardního bodu, 497
  termodynamická, 565
  záporná absolutní, 1104
termometr, 496
termoskop, 496
tesla, 746, D2
těžiště, 208, 213, 333
  sluneční soustavy, 383
těžnice, 330, 334
Thomson, Joseph John sir, 748, 1130
tiskárna inkoustová, 607
tlak, 343, 385, 386
  absolutní, 388
  aerostatický, 387
  elektrostatický, 691
  homogenní, 386
  hydrostatický, 387
  radiační, 897
  tekutiny, 385
  všestranný, 342, 344
  záření, 897
tlakoměr, 390
TNT, 1171
tok
  elektrické intenzity, 620
  hmotnostní, 240, 395
  magnetický indukční, 800, 834
  objemový, 395
  pole plochou, 619
  tepelný, 512
tokamak, 1167
tomograf CT, 1088
tomografie NMR, 1087
toner, 579
toroid, 785
  ideální, 785
torr, 386, D8
torze, 279, 417
trajektorie, 764
transformace
  Galileova, 1016
  Lorentzova, 1016
transformátor, 877
  snižovací, 878
  zvyšovací, 878
translace, 264
tranzistor
  MOSFET, 1122
  řízený polem (FET), 1122
triáda železa, D16
triboluminiscence, 577, 585
triceps, 351
tritium, 28
triton, 1167
trojný bod (vody), 497, 565
trouba mikrovlnná, 609
trpaslík bílý, 365, 491
trubice
  katodová, 748
  Pitotova, 408
  proudová, 395
tření, 97
třesk aerodynamický, 482
tuhost
  pružiny, 153
  torzní, 417
  ve zkrutu, 417
tunelování, 1046
Tunguzský asteroid, 289
tvar exponenciální, 2
tvorba párů, 586
tyč
  palivová, 1158
  řídicí, 1159

U
u (atomová hmotnostní jednotka), 8, D9
účiník, 875
účinnost (tepelná), 560
událost, 1009
údolí nuklidů, 1140
udržování (fúze)
  inerciální, 1167
  magnetické, 1167
úhel
  azimutální, 46
  Braggův, 997
  Brewsterův, 909
  deviační, 918
  dopadu, 903
  elevační, 65
  lomu, 903
  Machův, 482
  mezní, 908
  minimální deviace, 918
  odrazu, 903
  sférický, 46
  zorný, 935
usměrňovač diodový, 1119
uzavřenost soustavy, 222
uzel, 722
  grafu, 728
  vlny, 453

V
vada
  barevná, 937
  otvorová, 937
váha, 95
  pružinová, 96
  zdánlivá, 96
valení, 297
vedení tepla, 512
vektor, 40
  cirkulace, 780
  jednotkový, 45
  nulový, 42
  opačný, 42
  polohový, 59
  posunutí, 13, 40
  Poyntingův, 895
  tok plochou, 620
veličina
  dějová, 504, 509

fyzikální, 2
invariantní, 159
kvantovaná, 317
stavová, 504, 509, 553
vektorová, 13, 40
základní, 2
velikost
posunutí, 13
rychlosti, 16, 17
vektoru, 40
Velké Magellanovo mračno, 1140
Velké sjednocení, D19
Velký třesk, 1189, 1191
Vesmír, 496
rozpínání, 1189, 1191
trvání, 1191
věta
binomická, 158, 605
Earnshawova, 583
impulzová
druhá, 280, 309, 311
první, 214
o hybnosti, 214
o momentu hybnosti, 280, 309, 311
Steinerova, 275, 421
větev, 722
viskozita (vazkost), 394
vítr sluneční, 694, 712, 889
vlastní indukce, 818
vlna, 439
de Broglieho, 1041, 1056
elektromagnetická, 594, 890, 893
harmonická, 441
hmoty, 1041
kulová, 467
kýlová, 969
nepolarizovaná, 899
podélná (longitudinální), 440, 467
polarizovaná, 899
postupná, 440
pravděpodobnosti, 1040
příčná (transverzální), 439, 440, 467, 891
rázová, 482, 969
rovinná, 467
stojatá, 453
světelná, 893
vlnění (viz též vlna, vlny), 467
vlnočet úhlový, 442, 892, 1045
vlnoplocha, 467, 892, 950
vlny, 439
de Broglieho, 439, 1041
elektromagnetické, 439, 890
hmoty, 439
mechanické, 439
rádiové, 890
ultrazvukové (v lékařství), 493
vodič, 579, 694, 707
vodivost, 699
volt, 643, 717, D2
voltmetr, 728
Voyager 2, 257, 314
vrh
svislý, 24
šikmý, 64, 65
vrchol rezonanční, 426
vrstva
interferenční, 950
nabitá, 604
vůně kvarku (flavor), 1185
vybíjení kondenzátoru, 730
výboj koronový, 656
výkon, 156
disipace energie v rezistoru, 705
elektrického zdroje, 721
elektrický, 705
okamžitý, 156, 187
průměrný, 156, 187
střídavého proudu, 874
tepelný, 706
vlny, 448
ztrátový, 706
výslednice, 91
výstřednost elipsy, 367
výška
obrazu, 926
předmětu, 926
vyzáření fotonu, 1058
vzdálenost
mezirovinná, 996
obrazová, 923, 929
ohnisková, 926
čočky, 930
kulového zrcadla, 925
předmětová, 923, 929
vzducholoď Hindenburg, 701
vzorec
Ciolkovského, 224
Rutherfordův, 638
Stokesův, 606
vztlak, 392

W

watt, 2, 156, D2
weber, 800, D2
Wheatstoneův můstek, 741
Wheeler, John, 1157
WIMP, 1191

X

xerox, 579

Y

y (year), 4, D7
Young, Thomas, 953, 978, 1039
Youngův pokus, 953

Z

zahřívání Země, 1151
záchyt rezonanční, 1158
záchyt tepelný, 1159
zákon
akce a reakce, 98
Ampérův, 780
Ampérův-Maxwellův, 847
Archimedův, 393
asociativní, 42
Avogadrův, 548
Biotův-Savartův (-Laplaceův), 774
Braggův, 997
Brewsterův, 910
celkového proudu, 780, 848
Coulombův, 581, 597, 624
Curieův, 842
Dulongův-Petitův, 505
elektromagnetické indukce, 799
Faradayův elektromagnetické indukce, 799, 846
fotoelektrický, 1036
Gaussův
elektrostatiky, 619, 622, 682
pro magnetické pole, 834
Hookův, 153
Hubblův, 1189
Keplerův
druhý, 367
první, 367
třetí, 368
Kirchhoffův
druhý, 718
o napětí, 718
o proudech, 723
první, 723
komutativní, 41
Lenzův, 801
lomu (Snellův), 904, 950
Maxwellův magnetoelektrické indukce, 846
Moseleyův, 1094
Newtonův
druhý, 92
gravitační, 357, 635
o vedení tepla, 520
první, 89, 90
třetí, 98
oběžných
dob, 368
drah, 367
odrazu, 904
Ohmův, 702
parciálních tlaků, 547
Pascalův, 390
ploch, 367
převráceného čtverce, 581, 774
setrvačnosti, 90
Stefanův-Boltzmannův, 514
Stokesův, 606

termodynamiky
druhý, 558, 560
nultý, 497
první, 509
třetí, 570
Wienův posunovací, 1196
zachování, 1054
baryonového čísla, 1182
elektrického náboje, 586
energie, 176, 186, 1023
hmotnosti, 188
hybnosti, 218, 222
leptonového čísla, 1181
momentu hybnosti, 312
podivnosti, 1183
zakřivení prostoru, 372
záře polární, 743, 753
záření
brzdné, 1093
Čerenkovovo, 492
γ, 1142
kosmické, 592
odražené, 897
pohlcené, 897
reliktní, 519, 1190, 1198
rentgenové, 891, 1092, D17
tepelné, 514
tlak, 897
zářič černý, 514
zátěž odporová, 867
závit, 760
zázněje, 478
zdroj
bodový, 467
čárový, 474
emn, 716
výkon, 721
izotropní, 467
Země, D4
hustota, 361
řez, 379
zemětřesení, 488
zeminy
alkalické, D16
vzácné, D16
zepelín, 701
zlato, 631, 655
zóna, 979
ochuzená, 1118, 1120
zorné pole, 924
zrcadlo, 921
kulové (sférické), 924
rovinné, 921
vyduté (konkávní), 924
vypuklé (konvexní), 924
zrychlení, 19, 61
dostředivé, 71
gravitační, 360
normálové, 272
obvodové, 272
okamžité, 19, 61
průměrné, 19, 61
radiální, 272
tečné, 272
tíhové, 24, 95, 360
normální, 19
úhlové
okamžité, 266
průměrné, 266
zřídlo, 595, 834
zvětšení
podélné, 944
příčné, 926
úhlové, 935
zvuk, 467
Zweig, Georg, 1185

Ž

železo, 1092