11
Rotace

Sledovali jste někdy zápas v judu? Pak jste si jistě všimli, že vítězství v tomto sportu není jen záležitostí fyzické zdatnosti sportovce. Judista, který je obeznámen se základními zákony fyziky nebo jich dokáže alespoň intuitivně využívat, může totiž bez velkých problémů porazit většího a silnějšího protivníka. Např. judista při chvatu ***o goši*** *svého soupeře nadzdvihne, otočí kolem svého boku a položí ho na žíněnku. Zdálo by se, že tento chvat vyžaduje značnou sílu, a nemusel by se vůbec podařit. Opravdu může fyzika pomoci i v tomto případě? A jak?*

11.1 POSUVNÝ A OTÁČIVÝ POHYB

Jízdu krasobruslařky vnímáme samozřejmě především jako esteticky dokonale působivý celek. Přesto však v ní můžeme rozpoznat dva základní typy pohybu. Na obr. 11.1a zachytil fotograf krasobruslařku v situaci, kdy klouže po přímce takřka rovnoměrně. Takový pohyb je jedním ze speciálních případů tzv. **posuvného** (**translačního**) pohybu, zkráceně **posuvu** neboli **translace**. Obr. 11.1b naopak ukazuje bruslařku při piruetě, při níž se otáčí kolem svislé osy určitou úhlovou rychlostí. Koná tak **otáčivý** (**rotační**) pohyb, krátce nazývaný **otáčení** neboli **rotace**. V této kapitole se budeme podrobněji zabývat právě otáčivým pohybem.

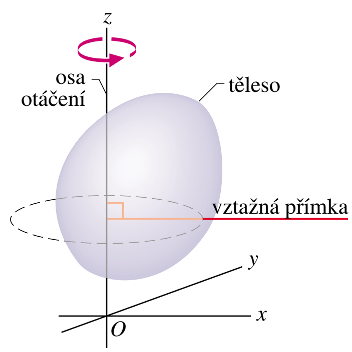
Obr. 11.1 Krasobruslařka Kristi Yamaguchiová (a) při čisté translaci, (b) při čisté rotaci kolem pevné osy.

(a) (b)

Dosud jsme se převážně zabývali pohybem posuvným, často dokonce pouze přímočarým. K typickým případům otáčivého pohybu patří otáčení kol a převodových kol, pohyb částí motorů, hodinových ručiček, rotorů tryskových motorů, vrtulí vrtulníků. Rotují také tornáda, planety, hvězdy a galaxie.

11.2 VELIČINY CHARAKTERIZUJÍCÍ OTÁČIVÝ POHYB

V této kapitole se budeme zabývat rotací *tuhého* tělesa kolem *pevné* osy.* První z těchto požadavků znamená omezení výběru objektů, jejichž otáčivý pohyb budeme popisovat. Nebudeme se tedy zabývat například rotací Slunce, které si lze nejspíš představit jako plynovou kouli. Slunce modelu tuhého tělesa rozhodně nevyhovuje. Pomocí druhého omezení vyloučíme z našich úvah například valivé pohyby, neboť při nich těleso rotuje kolem osy pohyblivé v prostoru (kolo automobilu), ale také třeba pohyb závaží odstředivého regulátoru (může se vzdalovat od osy otáčení).



Obr. 11.2 Tuhé těleso obecného tvaru se otáčí kolem souřadnicové osy z. Poloha *vztažné přímky* vzhledem k tělesu je libovolná až na to, že je přímka kolmá k ose otáčení. Je spojena s tělesem a rotuje spolu s ním.

Na obr. 11.2 je tuhé těleso obecného tvaru, které se *otáčí kolem pevné osy*, zvané **osa otáčení** neboli **osa rotace**. Každý bod tělesa opisuje kružnici, jejíž střed leží na ose otáčení. V daném časovém intervalu opíší všechny body *stejný úhel*. (Naproti tomu se při posuvném pohybu pohybují všechny body tělesa po trajektoriích stejného tvaru, například po přímkách, a v daném časovém intervalu urazí *tutéž vzdálenost*. V dalším výkladu budeme posuvný a otáčivý pohyb často srovnávat.)

Zabývejme se nyní veličinami, které charakterizují rotační pohyb obdobně, jako veličiny poloha, posunutí, rych-

* Její poloha se nemění ani vůči tělesu, ani vůči okolí.

lost a zrychlení popisují translaci. Půjde o tzv. *úhlové* veličiny (*úhlovou polohu, úhlovou rychlost a úhlové zrychlení*). Místo slovního spojení „úhlové posunutí" užijeme termínu *otočení*.

Úhlová poloha

Všimněme si, že v obr. 11.2 je vyznačena **vztažná přímka**, kolmá k ose otáčení a pevně spojená s tělesem. Otáčí se tedy spolu s ním a umožňuje tak snadno popsat jeho pohyb pomocí **úhlové polohy**. Úhlovou polohou budeme rozumět úhel, který vztažná přímka svírá s pevně zvoleným směrem ležícím v rovině kolmé k ose otáčení. Na obr. 11.3 je úhlová poloha θ měřena vzhledem ke kladnému směru osy x. Pro úhel θ platí

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(v radiánech).} \tag{11.1}$$

Symbolem s jsme označili délku oblouku kružnice, který je ohraničen kladnou osou x a vztažnou přímkou, r je poloměr této kružnice.

Hodnoty takto definovaného úhlu vyjadřujeme obvykle v tzv. **obloukové míře**, tj. v **radiánech** (rad). Hodnoty zadané ve stupních nebo pomocí počtu otáček snadno přepočteme. Všimněme si, že úhel v obloukové míře je určen poměrem délek a je tedy bezrozměrovou veličinou.

Obvod kružnice o poloměru r je $2\pi r$, takže jedna otáčka odpovídá změně úhlové polohy o 2π radiánů:

$$1\ \text{ot} = 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ \text{rad} \tag{11.2}$$

a odtud

$$1\ \text{rad} = 57{,}3^\circ = 0{,}159\ \text{ot}. \tag{11.3}$$

Na rozdíl od dohody zavedené v geometrii *nebude* v našem případě úhel $\theta = 0$ ekvivalentní hodnotám 2π, 4π atd. Po ukončené otáčce vztažné přímky se tedy hodnota její úhlové polohy *nevynuluje*. Po ukončení první otáčky nabývá úhlová poloha hodnoty 2π rad, po druhé otáčce je 4π rad atd.

Úplnou informaci o posuvném pohybu tělesa například podél osy x lze získat na základě znalosti funkce $x(t)$ popisující časovou závislost polohy některého jeho bodu, zvoleného zcela libovolně. Podobně jsou všechny myslitelné údaje o otáčivém pohybu tělesa kolem pevné osy obsaženy v časové závislosti $\theta(t)$ úhlové polohy vztažné přímky.

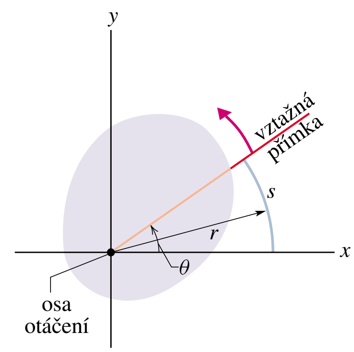
Otočení

Dejme tomu, že se úhlová poloha vztažné přímky tělesa na obr. 11.3, rotujícího kolem pevné osy, změní v určitém časovém intervalu z hodnoty θ_1 na hodnotu θ_2 (obr. 11.4). **Otočením** tělesa v tomto časovém intervalu rozumíme veličinu $\Delta\theta$, definovanou vztahem

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \tag{11.4}$$

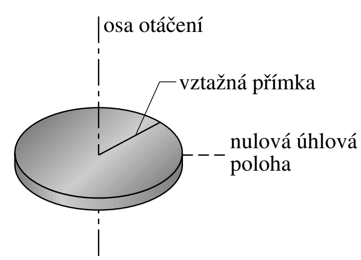
Tato definice otočení se vztahuje nejen na tuhé těleso jako celek, ale i *na každou jeho částici*.

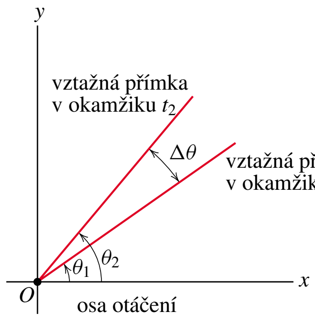
Koná-li těleso posuvný pohyb, například podél osy x, může být jeho posunutí Δx jak kladné, tak záporné. Znaménko závisí na tom, zda se těleso pohybuje ve směru rostoucí či klesající souřadnice x. Také otočení $\Delta\theta$ rotujícího tělesa může nabývat kladných i záporných hodnot. Jeho znaménko je kladné, otáčí-li se těleso ve směru rostoucího úhlu θ (proti směru otáčení hodinových ručiček). Při otáčení tělesa ve směru klesajících hodnot úhlové polohy (po směru otáčení hodinových ručiček) je naopak otočení záporné (obr. 11.3 a 11.4).



Obr. 11.3 Řez rotujícího tuhého tělesa z obr. 11.2 zobrazený v nadhledu. Osa otáčení je nyní kolmá k rovině nákresu a směřuje ke čtenáři. Rovina řezu je kolmá k ose otáčení, splývá tedy s nákresnou. Vztažná přímka svírá s osou x úhel θ.

KONTROLA 1: Kotouč na obrázku se může otáčet kolem své osy jako kolotoč. Rozhodněte, které z následujících dvojic počáteční a výsledné úhlové polohy odpovídají zápornému otočení: (a) -3 rad, $+5$ rad, (b) -3 rad, -7 rad, (c) 7 rad, -3 rad.





Obr. 11.4 Vztažná přímka tuhého tělesa znázorněného na obrázku 11.2 a 11.3 má v okamžiku t_1 úhlovou polohu θ_1 a v okamžiku t_2 úhlovou polohu θ_2. Rozdíl $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ představuje otočení tělesa v časovém intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$. (Těleso není v obrázku zakresleno.)

Úhlová rychlost

V souhlasu s obr. 11.4 označme úhlovou polohu rotujícího tělesa v okamžiku t_1 jako θ_1 a v okamžiku t_2 jako θ_2. **Průměrnou úhlovou rychlost** tělesa v časovém intervalu Δt od t_1 do t_2 definujeme vztahem

$$\overline{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \tag{11.5}$$

kde $\Delta\theta$ je otočení tělesa v časovém intervalu Δt.

(Okamžitá) úhlová rychlost ω, se kterou budeme pracovat nejčastěji, je limitou průměrné úhlové rychlosti, vyjádřené vztahem (11.5), při poklesu veličiny Δt k nulové hodnotě, tj.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \tag{11.6}$$

Známe-li časovou závislost úhlové polohy $\theta(t)$, můžeme úhlovou rychlost ω snadno určit jejím derivováním.

Rov. (11.5) a (11.6) platí nejen pro rotující tuhé těleso jako celek, ale také pro *každou jeho částici*. Jako jednotku úhlové rychlosti používáme nejčastěji radián za sekundu (rad/s), někdy i počet otáček za sekundu (ot/s).

Pohybuje-li se částice podél osy x, je její rychlost v_x kladná, nebo záporná podle toho, zda se pohyb děje ve směru rostoucí, nebo klesající souřadnice x. Také úhlová rychlost může mít kladné, nebo záporné znaménko. V prvním případě se těleso otáčí ve směru rostoucího úhlu θ (proti směru otáčení hodinových ručiček), v druhém případě ve směru klesajícího úhlu θ (ve směru otáčení hodinových ručiček).

Předchozí definici ještě upřesníme: úhlovou rychlost rotujícího tělesa definujeme jako vektor $\boldsymbol{\omega}$ rovnoběžný s osou otáčení, jehož složka měřená podél této osy je dána vztahem (11.6). Velikost vektoru úhlové rychlosti značíme obvykle rovněž symbolem ω. Se slovním spojením „úhlová rychlost“ se tedy můžeme setkat dokonce v trojím významu. Může představovat vektor, jeho složku do osy rotace či jeho velikost. Nemusíme však mít obavu, že bychom tyto možnosti nedokázali v textu dobře rozpoznat. Věta „Úhlová rychlost mění směr“ zcela jistě vypovídá o úhlové rychlosti jako o vektoru a věta „Úhlová rychlost činí 50 otáček za sekundu“ se nepochybně týká její velikosti.

Úhlové zrychlení

V případech, kdy úhlová rychlost rotujícího tělesa není konstantní, má těleso nenulové úhlové zrychlení. Dejme tomu, že úhlová rychlost tělesa v okamžiku t_1 je ω_1 a v okamžiku t_2 má hodnotu ω_2. **Průměrné úhlové zrychlení** tělesa v časovém intervalu od t_1 do t_2 pak definujeme vztahem

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \tag{11.7}$$

kde $\Delta\omega$ je změna úhlové rychlosti v daném časovém intervalu délky Δt. **(Okamžité) úhlové zrychlení** ε, se kterým budeme pracovat nejčastěji, je limitou průměrného úhlového zrychlení při poklesu hodnoty Δt k nule. Platí tedy

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \tag{11.8}$$

Rov. (11.7) a (11.8) platí nejen pro rotující tuhé těleso jako celek, ale i pro *každou jeho částici*. Nejužívanější jednotkou úhlového zrychlení je radián za sekundu na druhou (rad/s^2), případně počet otáček za sekundu na druhou (ot/s^2).

Podobně jako u úhlové rychlosti můžeme i zde zavést vektor úhlového zrychlení: $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$. Jeho směr je dán osou a směrem otáčení. Situace je tedy obdobná jako u jednorozměrných vektorů v kap. 2.

PŘÍKLAD 11.1

Časová závislost úhlové polohy vztažné přímky rotujícího kola je dána vztahem

$$\theta = t^3 - 27t + 4,$$

kde t je v sekundách a θ v radiánech.

(a) Určete $\omega(t)$ a $\varepsilon(t)$.

ŘEŠENÍ: Úhlovou rychlost $\omega(t)$ najdeme jako derivaci funkce $\theta(t)$ podle času:

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt} = 3t^2 - 27. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Dalším derivováním získáme úhlové zrychlení $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d(3t^2 - 27)}{dt} = 6t. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Zjistěte, zda se v některém okamžiku úhlová rychlost anuluje. Ve kterém?

ŘEŠENÍ: Požadavek $\omega(t) = 0$ vede k rovnici

$$0 = 3t^2 - 27,$$

jejíž řešení má tvar

$$t = \pm 3. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Okamžitá úhlová rychlost kola je nulová v okamžicích $t = 3$ s a $t = -3$ s (3 sekundy před začátkem měření).

(c) Popište pohyb kola pro $t \geqq 0$.

ŘEŠENÍ: Všimněme si podrobněji časových závislostí $\theta(t)$, $\omega(t)$ a $\varepsilon(t)$.

V okamžiku $t = 0$ (začátek měření) má vztažná přímka úhlovou polohu $\theta = 4$ rad, kolo se otáčí úhlovou rychlostí -27 rad/s (tedy *ve směru* otáčení hodinových ručiček) a jeho úhlové zrychlení je nulové.

V intervalu $0 < t < 3$ s se kolo otáčí stále ve směru otáčení hodinových ručiček. Jeho úhlové zrychlení je kladné, a proto velikost jeho úhlové rychlosti klesá (otáčení se zvolňuje). Ověřte toto tvrzení například pro okamžik $t = 2$ s.

V okamžiku $t = 3$ s je úhlová rychlost kola nulová ($\omega = 0$) a kolo je v krajní úhlové poloze (vztažná přímka má v tomto okamžiku úhlovou polohu $\theta = -50$ rad).

Pro $t > 3$ s úhlové zrychlení kola roste. Zvyšuje se i jeho úhlová rychlost, která je nyní kladná. Vzhledem k tomu, že veličiny ω a ε mají stejné (kladné) znaménko, roste i velikost úhlové rychlosti, a to poměrně rychle.

PŘÍKLAD 11.2

Dětská káča se otáčí s úhlovým zrychlením

$$\varepsilon = 5t^3 - 4t.$$

Všechny veličiny jsou vyjádřeny v odpovídajících jednotkách SI (rad, s). V čase $t = 0$ má káča úhlovou rychlost 5 rad/s a její vztažná přímka má úhlovou polohu $\theta = 2$ rad.

(a) Najděte časovou závislost úhlové rychlosti káči $\omega(t)$.

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.8) dostaneme vztah

$$d\omega = \varepsilon\, dt$$

a jeho integrací získáme funkci

$$\omega = \int \varepsilon\, dt = \int (5t^3 - 4t)\, dt = \tfrac{5}{4}t^4 - \tfrac{4}{2}t^2 + C.$$

Pro výpočet integrační konstanty C použijeme podmínku $\omega(t = 0) = 5$ rad/s, jejímž dosazením do poslední rovnice dostáváme

$$5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} = 0 - 0 + C.$$

Je tedy $C = 5$ rad/s a

$$\omega = \tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Najděte časovou závislost úhlové polohy káči $\theta(t)$.

ŘEŠENÍ: Rov. (11.6) přepíšeme ve tvaru

$$d\theta = \omega\, dt$$

a integrací dostaneme hledanou časovou závislost $\theta(t)$:

$$\begin{aligned}\theta &= \int \omega\, dt = \int (\tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5)\, dt = \\ &= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + C' = \\ &= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + 2. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

Konstantu C' jsme určili z podmínky $\theta(t = 0) = 2$ rad.

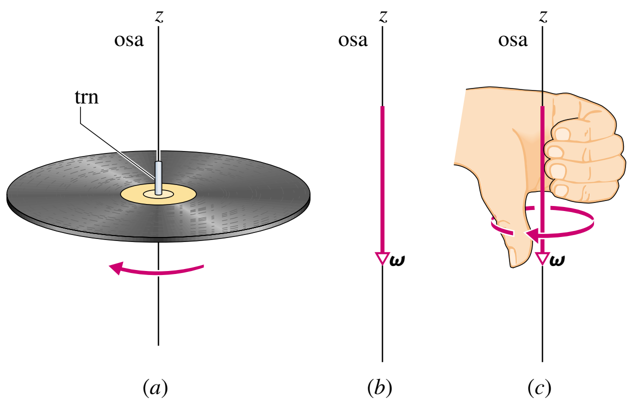
11.3 JSOU ÚHLOVÉ VELIČINY VEKTOROVÉ?

Poloha, rychlost a zrychlení částice jsou typické vektorové veličiny. Vzpomeňme si však, že při popisu přímočarého pohybu částice jsme vektorovou algebru v plném rozsahu nepotřebovali. Dva možné směry pohybu částice jsme totiž dokázali rozlišit pouze znaménkem. Polohový vektor, rychlost i zrychlení byly zadány vždy jediným číselným údajem, představujícím složku vektoru měřenou podél přímky — trajektorie částice.

V podobné situaci se ocitáme při popisu otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy. Těleso se může otáčet v některém ze dvou možných směrů, které opět odlišíme znaménky: ve směru kladném (proti směru otáčení hodinových ručiček), nebo záporném (ve směru otáčení hodinových ručiček). Znamená to, že můžeme otočení, úhlovou rychlost a úhlové zrychlení pokládat za vektorové veličiny? Odpověď na tuto otázku je pro případ úhlové rychlosti a úhlového zrychlení kladná. Otočení však vektorovou veličinou *není*. K podrobnějšímu rozboru této skutečnosti se vrátíme v závěru článku.

Uvažujme úhlovou rychlost. Na obr. 11.5a je znázorněna gramofonová deska, která se otáčí kolem pevného trnu stálou úhlovou rychlostí $\omega = 33\frac{1}{3}$ ot/min. Rovněž směr otáčení je stálý a při pohledu shora se děje ve směru otáčení hodinových ručiček. Úhlovou rychlost tedy můžeme definovat jako vektor $\boldsymbol{\omega}$, rovnoběžný s osou otáčení (obr. 11.5). Délku tohoto vektoru znázorníme v nějakém vhodném měřítku, např. 1 cm bude odpovídat 10 ot/min.

Směr vektoru $\boldsymbol{\omega}$ definujeme pomocí **pravidla pravé ruky** podle obr. 11.5. Přiložíme pravou dlaň k rotující desce tak, aby prsty směřovaly ve směru otáčení. Natažený palec pak ukazuje směr vektoru úhlové rychlosti. Kdyby se deska otáčela opačným směrem, byl by směr vektoru úhlové rychlosti, určený pravidlem pravé ruky, opačný.



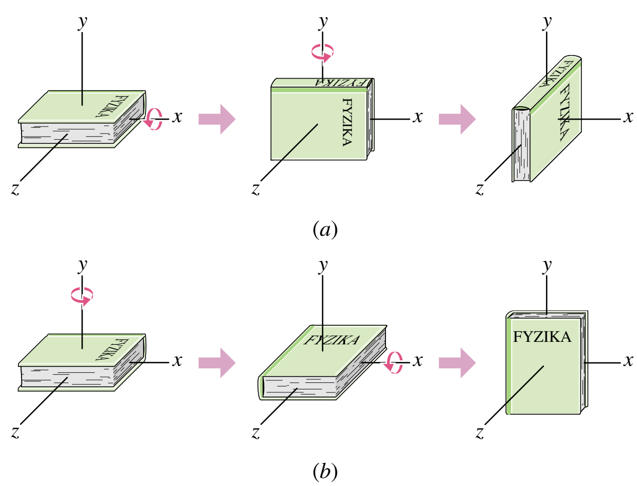
Obr. 11.5 (a) Gramofonová deska se otáčí kolem svislé osy (trnu). (b) Úhlovou rychlost rotující desky lze chápat jako vektor $\boldsymbol{\omega}$, rovnoběžný s osou otáčení a směřující dolů. (c) Směr vektoru úhlové rychlosti stanovíme pomocí pravidla pravé ruky. Prsty pravé ruky ukazují směr otáčení, palec ukazuje směr vektoru $\boldsymbol{\omega}$.

Na vektorovou povahu úhlových veličin si zřejmě budeme chvíli zvykat. Intuitivně totiž cítíme, že by vektor měl udávat směr pohybu nějakého objektu. V případě úhlových veličin by však byla taková představa nesprávná. Tuhé těleso se otáčí *kolem* směru vektoru. Při rotačním pohybu určuje vektor směr osy otáčení, nikoli směr pohybu. I takový vektor však charakterizuje pohybový stav objektu. Samozřejmě i pro něj platí pravidla vektorové algebry, shrnutá v kap. 3. Předchozí úvahy se týkají jak úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$, tak úhlového zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Poněvadž se v této kapitole zabýváme pouze otáčením tělesa kolem pevné osy, nemusíme za každou cenu pracovat s úhlovými veličinami jako s vektory. Úhlovou rychlost i úhlové zrychlení můžeme totiž v každém okamžiku zadat pouze číselnými údaji ω a ε, směr vektoru je určen znaménkem příslušné číselné hodnoty. Při řešení složitějších úloh je však vektorový zápis vhodnější.

Vraťme se nyní k možnosti popsat i otočení jako vektorovou veličinu. Pokud nejde o otočení velmi malé, není takový popis možný. Otočení *není* vektorovou veličinou. Jak jsme na to přišli? Každému otočení přece můžeme přiřadit velikost i směr, podobně jako v případě úhlové rychlosti tělesa na obr. 11.5. Možnost přisoudit veličině směr a velikost však ještě nezaručuje, že jde o veličinu vektorovou. Matematik by řekl, že je tím splněna pouze podmínka nutná, ne však postačující. Abychom totiž mohli nějakou veličinu prohlásit za vektorovou, musela by vyhovovat pravidlům vektorové algebry. Podle jednoho z nich je například součet vektorů nezávislý na pořadí sčítání. Snadno však zjistíme, že otočení tomuto pravidlu nevyhovuje.

Abychom se o tom přesvědčili, položme na stůl knihu podle obr. 11.6a. Otočme ji dvakrát po sobě o úhel 90°, *nejdříve* kolem vodorovné osy x, *potom* kolem svislé osy y. K určení kladného směru otočení použijeme pravidlo pravé ruky (obr. 11.5).



Obr. 11.6 (a) Knihu otočíme dvakrát o 90°, nejdříve kolem vodorovné osy x, potom kolem svislé osy y. (b) Táž otočení provedeme v opačném pořadí. (Výchozí poloha knihy je v případech (a) i (b) stejná.) Pokud by otočení bylo vektorovou veličinou, neovlivnilo by pořadí otočení výslednou polohu knihy. Z obrázku je však zřejmé, že výsledná poloha knihy na pořadí provedených otočení závisí. Otočení není vektorová veličina, přestože jí můžeme přiřadit velikost a směr.

Vraťme nyní knihu do původní polohy a proveďme tato dvě otočení v opačném pořadí (obr. 11.6b), tedy *nejprve* kolem osy y a teprve potom kolem osy x. Jak je vidět z obrázku, výsledná polohy knihy se v obou případech liší.

Táž dvojice operací vede k různým výsledkům, jsou-li operace provedeny v různém pořadí. Skládání otočení není komutativní a otočení tedy nemůže být vektorovou veličinou. Jednoduchým pokusem však snadno ukážeme, že odlišnost výsledných poloh knihy je nepatrná, jsou-li provedená otočení mnohem menší než 90°. Infinitezimálně (neomezeně) malé otočení (například $d\theta$ v rov. (11.6)) již může být pokládáno za vektorovou veličinu.

Tabulka 11.1 **Posuvný pohyb s konstantním zrychlením a otáčivý pohyb s konstantním úhlovým zrychlením**

ROVNICE ČÍSLO	POSUVNÝ POHYB	CHYBĚJÍCÍ VELIČINA		OTÁČIVÝ POHYB	ROVNICE ČÍSLO
(2.11)	$v_x = v_{0x} + a_x t$	x	θ	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$	(11.9)
(2.15)	$x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	v_x	ω	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$	(11.10)
(2.16)	$v_x^2 = v_0^2 + 2 a_x x$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\theta$	(11.11)
(2.17)	$x = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	a_x	ε	$\theta = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$	(11.12)
(2.18)	$x = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2$	v_{0x}	ω_0	$\theta = \omega t - \frac{1}{2}\varepsilon t^2$	(11.13)

11.4 ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ OTÁČIVÝ POHYB

Důležitým zvláštním případem posuvného pohybu po přímce je rovnoměrně zrychlený pohyb (například volný pád). Tab. 2.1 obsahuje souhrn rovnic, které se takového případu týkají.

Pohyb *s konstantním úhlovým zrychlením* je zase významným speciálním případem pohybu otáčivého a vztahy mezi veličinami, které jej popisují, se rovnicím v tab. 2.1 velmi podobají, jak je zřejmé z tab. 11.1. Snadno je můžeme získat z odpovídajících vztahů pro posuvný pohyb. Stačí, abychom v nich nahradili polohu, rychlost a zrychlení příslušnými úhlovými veličinami. Oba soubory rovnic, tj. (2.11), (2.15) až (2.18) a (11.9) až (11.13), shrnuje pro porovnání tab. 11.1. Pro jednoduchost jsme v nich položili $x_0 = 0$ a $\theta_0 = 0$. Při takových *počátečních podmínkách* je posunutí $\Delta x = x - x_0$ dáno přímo souřadnicí x a otočení $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ úhlovou polohou θ.

KONTROLA 2: Časová závislost úhlové polohy rotujícího tělesa $\theta(t)$ může být vyjádřena některým z následujících vztahů: (a) $\theta(t) = 3t - 4$, (b) $\theta(t) = -5t^3 + 4t^2 + 6$, (c) $\theta(t) = 2/t^2 - 4/t$ a (d) $\theta(t) = 5t^2 - 3$. Pro který z nich lze použít tab. 11.1?

PŘÍKLAD 11.3

Mlýnské kolo na obr. 11.7 se otáčí s konstantním úhlovým zrychlením $\varepsilon = 0{,}35\,\mathrm{rad/s^2}$. Roztáčí se z klidové polohy (tj. $\omega_0 = 0$), v níž je jeho vztažná přímka vodorovná ($\theta_0 = 0$).

(a) Určete otočení vztažné přímky v okamžiku $t = 18\,\mathrm{s}$.

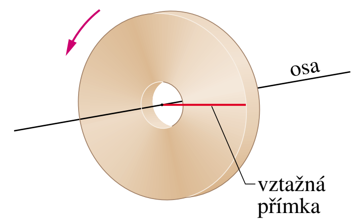
ŘEŠENÍ: Z rov. (11.10) v tab. 11.1 ($\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$) dostaneme

$$\theta = 0(18\,\mathrm{s}) + \tfrac{1}{2}(0{,}35\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-2}})(18\,\mathrm{s})^2 = \\ = 56{,}7\,\mathrm{rad} \doteq 57\,\mathrm{rad} \doteq 3\,200^\circ \doteq 9{,}0\,\mathrm{ot.} \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je v tomto okamžiku úhlová rychlost kola?

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.9) v tab. 11.1 ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$) vyjde

$$\omega = 0 + (0{,}35\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-2}})(18\,\mathrm{s}) = \\ = 6{,}3\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} = 360^\circ/\mathrm{s} = 1{,}0\,\mathrm{ot/s}. \quad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 11.7 Příklady 11.3 a 11.4. Vztažná přímka mlýnského kola je v okamžiku $t = 0$ vodorovná.

PŘÍKLAD 11.4

Předpokládejme, že počáteční úhlová rychlost mlýnského kola z př. 11.3 je nyní $\omega_0 = -4{,}6\,\mathrm{rad/s}$. Kolo se točí opět s úhlovým zrychlením ($\varepsilon = 0{,}35\,\mathrm{rad/s^2}$). Znaménka veličin ω_0 a ε jsou opačná, otáčivý pohyb kola je tedy zpomalený.

(a) Určete okamžik, kdy bude úhlová rychlost kola nulová.

ŘEŠENÍ: Vyřešíme rov. (11.9) ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$) pro neznámou t a dostaneme

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} = \frac{0 - (-4{,}6\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})}{(0{,}35\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-2}})} = 13\,\mathrm{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete okamžik, kdy úhlová poloha kola odpovídá pěti otáčkám v kladném směru. (V tomto okamžiku má otočení vztažné přímky hodnotu $\theta = 5$ ot.)

ŘEŠENÍ: Na počátku pohybu se kolo otáčí v záporném směru (ve směru otáčení hodinových ručiček) úhlovou rychlostí $\omega_0 = -4{,}6\,\mathrm{rad/s}$. Jeho úhlové zrychlení je ovšem kladné (proti směru otáčení hodinových ručiček). Opačná znaménka počáteční úhlové rychlosti a úhlového zrychlení znamenají, že velikost úhlové rychlosti kola klesá. V určité chvíli se kolo na okamžik zastaví a začne se roztáčet v kladném směru. Poté, co se vztažná přímka vrátila do své počáteční úhlové polohy

$\theta = 0$, musí kolo vykonat ještě dalších pět otáček, aby jeho úhlová poloha měla předepsanou hodnotu. Popis pohybu kola se nám může zdát poměrně složitý. Všechny jeho fáze jsou však „již obsaženy“ v rov. (11.10):

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2.$$

Po vyjádření úhlu θ v radiánech ($\theta = 5\,\mathrm{ot} = 10\pi\,\mathrm{rad}$) a dosazení číselných údajů dostaneme

$$10\pi\,\mathrm{rad} = (-4{,}6\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})t + \tfrac{1}{2}(0{,}35\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-2}})t^2.$$

Je-li čas t vyjádřen v sekundách, je získaná rovnice rozměrově správná. V dalším výpočtu jednotky pro jednoduchost vynecháme. Kvadratickou rovnici pro neznámou t přepíšeme do tvaru

$$t^2 - 26{,}3t - 180 = 0 \qquad (11.14)$$

a vyřešíme ji. Řešením úlohy je její kladný kořen

$$t = 32\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

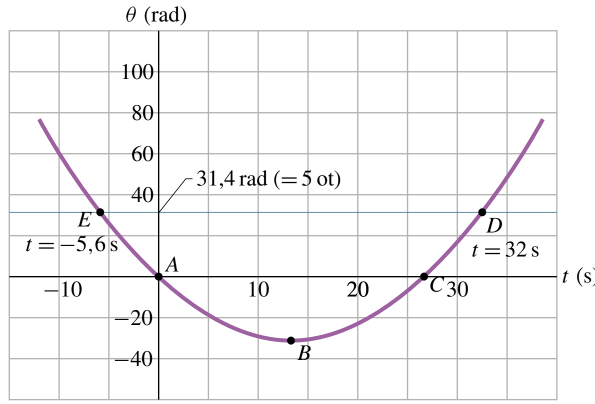
Bod 11.1: *Neočekávané výsledky*

Při posuzování fyzikálního významu kořenů kvadratické rovnice bychom neměli postupovat unáhleně. I kořen, který se nám na první pohled jeví jako nepřípustný, může mít dobrý fyzikální smysl. Právě tak je tomu i v př. 11.4.

Rov. (11.14) má kořeny $t = 32$ s a $t = -5{,}6$ s. První z nich (kladný) jsme prohlásili za řešení úlohy a druhý zavrhli jako fyzikálně nevýznamný. Rozhodli jsme správně? Nikoliv! Záporná hodnota časové proměnné v tomto případě jednoduše udává jistý konkrétní okamžik předtím, než jsme začali pohyb kola sledovat, tj. než jsme stiskli vynulované stopky.

Obr. 11.8 znázorňuje časový průběh úhlové polohy θ vztažné přímky mlýnského kola (př. 11.4) pro kladné i záporné hodnoty časové proměnné. Představuje grafické vyjádření rov. (11.10) ($\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$) pro číselné hodnoty $\omega_0 = -4{,}6$ rad/s a $\varepsilon = +0{,}35\,\mathrm{rad/s^2}$. Bod A odpovídá okamžiku $t = 0$, jemuž jsme přisoudili nulovou hodnotu úhlové polohy vztažné přímky. Od této chvíle se kolo točí v záporném směru až do okamžiku $t = 13$ s, kdy jeho úhlová rychlost dosáhne nulové hodnoty (v grafu bod B). Směr otáčení se změní v opačný a vztažná přímka projde úhlovou polohou $\theta = 0$ v okamžiku, jemuž v grafu odpovídá bod C. Pak se kolo ještě pětkrát otočí ($\theta = 31{,}4$ rad, $t = 32$ s, bod D v grafu). Časový údaj $t = 32$ s jsme v př. 11.4 přijali jako správné řešení úlohy.

Všimněme si však, že vztažná přímka měla úhlovou polohu $\theta = 5$ ot také v okamžiku $t = -5{,}6$ s, tj. před „oficiálně stanoveným“ začátkem měření veličin charakterizujících pohyb kola. Fyzikální význam tohoto kořene kvadratické rovnice (11.14), reprezentovaného bodem E na obrázku, není tedy o nic menší než význam kořene odpovídajícího bodu D. Kromě posouzení právoplatnosti záporného kořene rov. (11.14) jsme předchozími úvahami také podrobněji popsali časový průběh otáčení kola.



Obr. 11.8 Graf časové závislosti úhlové polohy $\theta(t)$ mlýnského kola podle př. 11.4. V grafu je znázorněna situace i pro záporné hodnoty časové proměnné (před okamžikem $t = 0$). Dva kořeny rov. (11.14) odpovídají bodům D a E.

PŘÍKLAD 11.5

Při zkoumání pohybu rotoru vrtulníku se zjistilo, že se jeho úhlová rychlost změnila během doby 1,50 min z 320 ot/min na 225 ot/min.

(a) Určete průměrné úhlové zrychlení rotoru v uvedeném intervalu.

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.7) plyne

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{(225\,\mathrm{ot/min}) - (320\,\mathrm{ot/min})}{(1{,}50\,\mathrm{min})} = $$
$$= -63{,}3\,\mathrm{ot/min^2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Předpokládejme, že se otáčení rotoru zpožďuje rovnoměrně, takže je okamžité úhlové zrychlení v každém okamžiku shodné s průměrným. Jak dlouho potrvá, než se rotor zastaví, je-li jeho počáteční úhlová rychlost 320 ot/min?

ŘEŠENÍ: Rov. (11.9) ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$) řešíme vzhledem k neznámé t a dostaneme

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} = \frac{0 - (320\,\mathrm{ot/min})}{(-63{,}3\,\mathrm{ot/min^2})} = $$
$$= 5{,}1\,\mathrm{min}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Kolik otáček vykoná rotor vrtulníku v úloze (b)?

ŘEŠENÍ: Rov. (11.11) ($\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\theta$) nyní řešíme vzhledem k neznámé θ:

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon} = \frac{0 - (320\,\mathrm{ot/min})^2}{2(-63{,}3\,\mathrm{ot/min^2})} = $$
$$= 809\,\mathrm{ot}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

11.5 KORESPONDENCE OBVODOVÝCH A ÚHLOVÝCH VELIČIN

Připomeňme si čl. 4.7, kde jsme studovali rovnoměrný pohyb částice po kružnici. Částice se pohybovala *obvodovou rychlostí* $\boldsymbol{v}$ se stálou velikostí v. Takový pohyb však můžeme chápat i jako rotaci částice kolem pevné osy, vedené středem kružnice kolmo k její rovině. Otáčí-li se kolem pevné osy tuhé těleso (například kolotoč), pohybuje se každá jeho částice po své vlastní kruhové trajektorii. Osa otáčení tělesa je spojnicí středů všech těchto kružnic. Protože je těleso tuhé, trvá jeden oběh všech jeho částic stejnou dobu. Částice tedy mají stejnou úhlovou rychlost ω.

Čím je však částice vzdálenější od osy otáčení, tím větší je obvod její trajektorie a tedy i její obvodová rychlost. Tuto skutečnost si snadno uvědomíme třeba při jízdě na kolotoči. Úhlová rychlost otáčení ω je nezávislá na vzdálenosti sedačky, na níž se vezeme, od osy kolotoče. Obvodová rychlost $\boldsymbol{v}$ (a nepříjemné pocity dané její změnou) je však tím větší, čím je sedačka od osy vzdálenější.

Často je třeba mít k dispozici vztahy mezi obvodovými veličinami, tj. délkou oblouku s, obvodovou rychlostí v a obvodovým zrychlením a jednotlivých částic rotujícího tuhého tělesa a úhlovými veličinami θ, ω a ε, charakterizujícími otáčivý pohyb tělesa jako celku. Vztah obvodových a úhlových veličin je pro každou částici určen její *vzdáleností* r od osy otáčení, tj. poloměrem její kruhové trajektorie.

Poloha

Sledujme pohyb vybrané částice rotujícího tuhého tělesa. Při otočení vztažné přímky o úhel θ urazí částice po oblouku své kruhové trajektorie dráhu s podle rov. (11.1)

$$s = \theta r \quad (\theta \text{ je v rad}). \tag{11.15}$$

Získáváme první vztah mezi obvodovými a úhlovými veličinami. Úhel θ je třeba měřit v radiánech, neboť rov. (11.15) představuje současně definici úhlové míry.

Rychlost

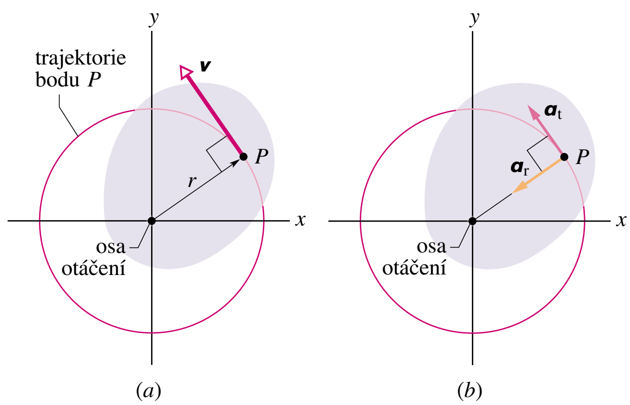
Derivujme rov. (11.15) podle času (při konstantní hodnotě r). Pak

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} r \quad (\theta \text{ je v rad}).$$

Veličina $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ představuje obvodovou rychlost uvažované částice a $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ je úhlová rychlost ω rotujícího tělesa. Je tedy

$$v = \omega r \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.16}$$

Úhlovou rychlost ω je opět nutné vyjádřit pomocí obloukové míry, tj. v jednotkách rad/s. Jak již víme, mají všechny částice tělesa stejnou úhlovou rychlost. Z rov. (11.16) pak snadno poznáme, že částice, které obíhají ve větší vzdálenosti r od osy otáčení, mají větší obvodovou rychlost v. Obr. 11.9a znázorňuje známou skutečnost, že vektor rychlosti částice je v každém okamžiku tečný k její kruhové trajektorii.



Obr. 11.9 Řez tuhým tělesem znázorněným na obr. 11.2 rovinou kolmou k ose otáčení. Každá částice tělesa (např. P) se pohybuje po kruhové trajektorii, jejíž střed leží na ose otáčení. (a) Vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ částice je tečný k její kruhové trajektorii. (b) Zrychlení $\boldsymbol{a}$ libovolné částice je součtem dvou průmětů, tečného ($\boldsymbol{a}_t$) a normálového ($\boldsymbol{a}_r$).

Při otáčení tělesa stálou úhlovou rychlostí je podle rov. (11.16) časově neproměnná i obvodová rychlost každé jeho částice. Každá částice tělesa tedy koná rovnoměrný pohyb po kružnici. Doba oběhu T je pro všechny částice stejná a samozřejmě shodná s trváním jedné otáčky celého tělesa. Je vyjádřena vztahem (4.23)

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \tag{11.17}$$

z něhož je patrné, že je podílem délky kruhové trajektorie částice ($2\pi r$) a její obvodové rychlosti (v). Po dosazení v z rov. (11.16) a malé úpravě dostaneme

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.18}$$

Tento výsledek je samozřejmě ekvivalentní s rov. (11.17). Vyjadřuje však společnou dobu oběhu všech částic pomocí veličin charakterizujících otáčivý pohyb tělesa jako celku, tj. jako podíl úhlu otočení tělesa (2π rad) během jedné otáčky a jeho úhlové rychlosti (ω).

Obvodové zrychlení

Derivací rov. (11.16) podle času (r je opět konstantní) dostáváme

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt}r. \tag{11.19}$$

V tuto chvíli je na místě jistá obezřetnost: veličina dv/dt na levé straně rov. (11.19) je časovou derivací obvodové rychlosti částice. Udává tedy časovou změnu *velikosti* vektoru její rychlosti a charakterizuje tak *nerovnoměrnost* jejího pohybu. Vraťme se na okamžik k čl. 6.4, který se zabýval výhradně *rovnoměrným* pohybem po kružnici. Vzpomeňme si, že zrychlení částice směřovalo v tomto případě neustále do středu její kruhové trajektorie, takže jeho tečný průmět (*tečné zrychlení*) byl nulový. Zdá se tedy, že tečné zrychlení nutně souvisí se změnou obvodové rychlosti a při nerovnoměrném pohybu již pochopitelně nebude nulové. Skutečně, výraz dv/dt představuje *tečnou složku* a_t vektoru zrychlení částice. Platí pro ni

$$a_t = \varepsilon r \quad (\varepsilon \text{ je v rad/s}^2), \tag{11.20}$$

kde $\varepsilon = d\omega/dt$.

(Při pohybu po kružnici nazýváme někdy tečnou složku zrychlení částice též obvodovým zrychlením.)

Celkové zrychlení částice je součtem jeho dvou průmětů, **tečného zrychlení $\boldsymbol{a}_t$** a **normálového (radiálního) zrychlení $\boldsymbol{a}_r$**. Při pohybu po kružnici směřuje normálové zrychlení do jejího středu a vystihuje změnu směru vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$. Jeho velikost, tzv. **normálová složka** zrychlení, se řídí známým vztahem $a_r = v^2/r$ (rov. (4.22)). Dosazením v z rov. (11.16) dostaneme pro a_r vztah

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.21}$$

Předchozí úvahy názorně shrnuje obr. 11.9b: zrychlení každé částice rotujícího tuhého tělesa je součtem svých dvou průmětů, tečného a normálového zrychlení. Tečné zrychlení $\boldsymbol{a}_t$ má směr vektoru rychlosti a normálové zrychlení $\boldsymbol{a}_r$ směřuje do středu kruhové trajektorie. Normálová složka zrychlení je dána vztahem (11.21), a je tedy vždy nenulová (pokud těleso rotuje, je $\omega \neq 0$). Tečná složka a_t se řídí vztahem (11.20)) a je nenulová v případě, že je otáčivý pohyb tělesa nerovnoměrný, tj. jeho úhlové zrychlení je nenulové.

KONTROLA 3: Moucha se veze na okraji kolotoče, jehož úhlová rychlost je konstantní. Rozhodněte, zda je (a) normálová, resp. (b) tečná složka zrychlení mouchy nenulová. (c), (d) Zodpovězte předchozí otázky pro případ, že úhlová rychlost kolotoče klesá.

PŘÍKLAD 11.6

Na obr. 11.10 je vyfotografována centrifuga určená pro výcvik astronautů. Poloměr r kruhové trajektorie trénujícího astronauta je 15 m.

Obr. 11.10 Příklad 11.6. Centrifuga pro výcvik astronautů v německém Kolíně. Při tréninku si astronauti zvykají na velká zrychlení, jimž jsou vystaveni při startu rakety.

(a) Předpokládejme, že se centrifuga otáčí rovnoměrně. Jaká musí být její úhlová rychlost, má-li si astronaut zvykat na zrychlení $11g$?

ŘEŠENÍ: Protože je úhlová rychlost centrifugy stálá, je její úhlové zrychlení ε ($= d\omega/dt$) nulové. Podle rov. (11.20) je nulová i tečná složka zrychlení astronauta. Celkové zrychlení je tedy dáno pouze zrychlením normálovým. Užitím rov. (11.21) ($a_r = \omega^2 r$) a požadavku $a_r = 11g$ dostaneme

$$\omega = \sqrt{\frac{a_r}{r}} = \sqrt{\frac{11(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}{(15\,\mathrm{m})}} = $$
$$= 2{,}68\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \doteq 26\,\mathrm{ot/min}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete tečné zrychlení pohybu astronauta za předpokladu, že úhlová rychlost centrifugy rovnoměrně vzroste během 120 s z počáteční nulové hodnoty na hodnotu vypočtenou v úkolu (a).

ŘEŠENÍ: Poněvadž je úhlové zrychlení centrifugy podle předpokladu stálé, můžeme pro jeho výpočet použít rovnici (11.9). Dostaneme

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{(2{,}68\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} - 0)}{(120\,\mathrm{s})} = 0{,}022\,3\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}.$$

Tečnou složku zrychlení astronauta pak již snadno určíme pomocí rov. (11.20):

$$a_t = \varepsilon r = (0{,}022\,3\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}})(15\,\mathrm{m}) =$$
$$= 0{,}33\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledná hodnota normálové složky zrychlení astronauta je značná ($a_r = 11g$). Tečná složka při rozjezdu centrifugy je v porovnání s ní mnohonásobně nižší ($a_t = 0{,}034g$).

RADY A NÁMĚTY

Bod 11.2: *Jednotky úhlových veličin*

Definice úhlové polohy ve tvaru (11.1) ($\theta = s/r$) nás zavazuje k používání obloukové míry (radiány) ve všech vztazích mezi úhlovými a obvodovými veličinami. Otočení tedy musíme vyjadřovat vždy v radiánech, úhlové rychlosti v jednotkách rad/s nebo rad/min a úhlová zrychlení v jednotkách rad/s^2 nebo rad/min^2. Ve vztazích (11.15), (11.16), (11.18), (11.20) a (11.21) jsme tuto skutečnost explicitně zdůraznili. Tímto pravidlem se však nemusíme řídit ve vztazích obsahujících *výhradně* úhlové veličiny (vztahy v pravé části tab. 11.1). Můžeme v nich pracovat s libovolnými úhlovými jednotkami, tj. kromě radiánů také se stupni nebo počty otáček, pokud je užíváme konzistentně, tj. „nemícháme je“.

Ve vztazích vyžadujících použití obloukové míry není třeba vypisovat jednotku „radián“ (rad) během celého výpočtu. Stačí ji uvést až ve výsledku. Takového zjednodušení zápisu jsme použili v př. 11.6.

11.6 KINETICKÁ ENERGIE TĚLESA PŘI OTÁČIVÉM POHYBU

Rychle rotující kotoučová pila má určitě značnou kinetickou energii a jistě je možné ji určit. Ale jak? Známý vztah $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ platí totiž pro částici. Pro výpočet kinetické energie rotujícího tělesa však není přímo použitelný už proto, že nevíme, kterou veličinu bychom měli dosazovat za v.

Považujme kotoučovou pilu (a obecně každé rotující tuhé těleso) za soustavu částic pohybujících se různými rychlostmi. Kinetickou energii takového tělesa pak celkem přirozeně definujeme jako součet kinetických energií jednotlivých částic, tj.

$$E_k = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3v_3^2 + \ldots = \\ = \sum \tfrac{1}{2}m_iv_i^2. \tag{11.22}$$

Hmotnost i-té částice jsme označili symbolem m_i a velikost její rychlosti v_i. Součet zahrnuje všechny částice tělesa.

Získaný vztah je ovšem pro praktický výpočet kinetické energie tělesa poněkud nepohodlný. Částice se totiž pohybují různými rychlostmi $\boldsymbol{v}_i$. Uvědomíme-li si však, že rov. (11.16) umožňuje vyjádřit velikost rychlosti každé částice pomocí její vzdálenosti od osy otáčení a úhlové rychlosti, která charakterizuje otáčivý pohyb tělesa jako celku, můžeme se tohoto „nepohodlí“ snadno zbavit. Užitím rov. (11.16) dostaneme

$$E_k = \sum \tfrac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_ir_i^2\right)\omega^2. \tag{11.23}$$

Hodnota ω je stejná pro všechny částice.

Veličina v závorce po poslední úpravě rov. (11.23) závisí na rozložení hmoty tělesa vzhledem k ose otáčení. Nazýváme ji **momentem setrvačnosti** tělesa vzhledem k dané ose otáčení a značíme ji I. Všimněme si, že pro případ tuhého tělesa, které se otáčí kolem pevně zvolené osy, je moment setrvačnosti konstantní. Tato jeho vlastnost je velmi podstatná a usnadňuje všechny další úvahy. Volbu osy otáčení je ovšem nutno při výpočtu momentu setrvačnosti jasně zadat, neboť jeho hodnota na ní výrazně závisí.

Pomocí momentu setrvačnosti

$$I = \sum m_ir_i^2 \tag{11.24}$$

získáme z rov. (11.23) pro E_k velmi jednoduchý výraz

$$E_k = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.25}$$

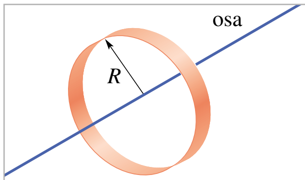
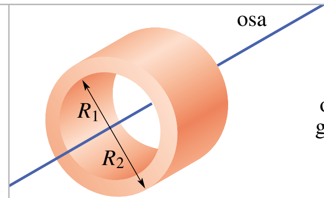
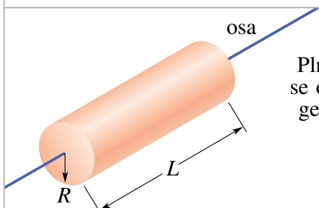
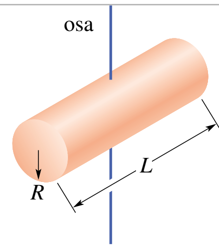
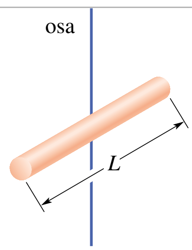
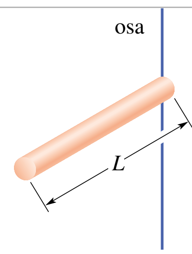
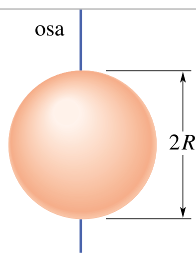
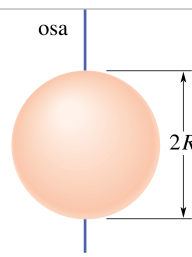
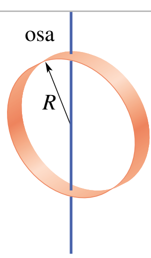
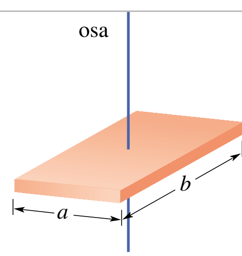
Při jeho odvození jsme použili vztah $v = \omega r$. Úhlovou rychlost ω v rov. (11.25) musíme proto zadávat v obloukové míře.

Všimněme si podobnosti rov. (11.25) pro kinetickou energii otáčejícího se tuhého tělesa se vztahem $E_k = \frac{1}{2}mv_T^2$, který vyjadřuje jeho kinetickou energii při posuvném pohybu. V obou vztazích se vyskytuje faktor $\frac{1}{2}$. Hmotnost m ve vztahu pro kinetickou energii posuvného pohybu představuje „míru setrvačnosti“ tělesa. V případě otáčení se ve výrazu pro E_k objevuje moment setrvačnosti I, který tak lze chápat jako „míru setrvačnosti“ tělesa při jeho otáčení. V obou vztazích vystupuje druhá mocnina příslušné rychlosti (rychlosti posuvného, resp. úhlové rychlosti otáčivého pohybu). Oba výrazy vyjadřují stejný typ energie, energii kinetickou. Liší se pouze způsobem zápisu podle typu pohybu tělesa.

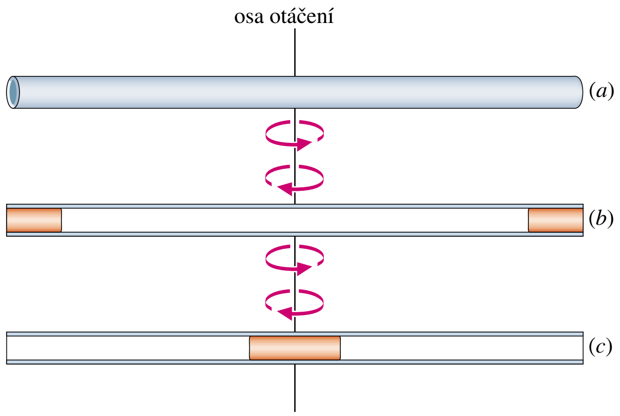
Všimli jsme si již, že moment setrvačnosti tuhého tělesa závisí nejen na jeho hmotnosti, ale i jejím rozložení vzhledem k ose otáčení. Obr. 11.11 názorně ukazuje, jak můžeme rozdíly momentu setrvačnosti pocítit takřka „na vlastní kůži“. Na obr. 11.11a jsou dvě duté tyče, které na pohled vypadají úplně stejně. Jejich vnější rozměry i hmotnosti jsou shodné a obě tyče jsou v rovnováze, jsou-li podepřeny uprostřed. Žádný rozdíl nezpozorujeme ani tehdy, uchopíme-li je postupně do ruky a uvedeme do posuvného pohybu.

Zcela odlišné pocity však zaznamenáme, zkusíme-li tyče rychle roztáčet. S jednou z nich to půjde velmi snadno, druhá se „bude bránit“. Obr. 11.11b, c odhalují podstatu

Tabulka 11.2 Momenty setrvačnosti některých homogenních těles

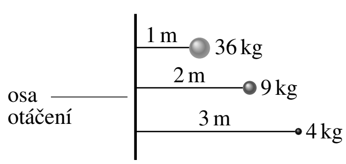
 Obruč se otáčí kolem své geometrické osy. $I = mR^2$ (*a*)	 Dutý válec (prstenec) se otáčí kolem své geometrické osy. $I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$ (*b*)
 Plný válec (disk) se otáčí kolem své geometrické osy. $I = \frac{1}{2}mR^2$ (*c*)	 Plný válec (disk) se otáčí kolem osy vedené jeho středem kolmo k jeho podélné (geometrické) ose. $I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$ (*d*)
 Tenká tyč se otáčí kolem osy vedené jejím středem kolmo k její délce. $I = \frac{1}{12}mL^2$ (*e*)	 Tenká tyč se otáčí kolem osy vedené jedním z jejích konců kolmo k její délce. $I = \frac{1}{3}mL^2$ (*f*)
 Plná koule se otáčí kolem osy vedené jejím středem. $I = \frac{2}{5}mR^2$ (*g*)	 Kulová slupka se otáčí kolem osy vedené jejím středem. $I = \frac{2}{3}mR^2$ (*h*)
 Obruč se otáčí kolem osy splývající s jejím průměrem. $I = \frac{1}{2}mR^2$ (*i*)	 Deska se otáčí kolem příčné osy vedené jejím středem. $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ (*j*)

tohoto rozdílu. „Poslušná“ tyč má uvnitř dvě závaží, která jsou umístěna blízko jejího středu, zatímco druhá tyč má stejná závaží připevněna na koncích. Hmotnosti tyčí jsou sice stejné, ale jejich hmota je *jinak rozložena* vzhledem k vyznačené ose otáčení. Proto jsou výrazně odlišné i hodnoty jejich momentu setrvačnosti vzhledem k této ose.



Obr. 11.11 (a) Vnější vzhled tyčí, jejichž vnitřek je znázorněn na obrázcích (b) a (c), je totožný. Tyče se budou jevit stejné do chvíle, kdy se pokusíme je roztočit kolem osy procházející jejich středem. Tyč (c) se roztáčí snadno, tyč (b) „odolává“. I když mají obě tyče stejnou hmotnost, jsou jejich momenty setrvačnosti vzhledem k dané ose otáčení výrazně odlišné vlivem různého rozložení jejich hmoty. Moment setrvačnosti tyče (b) je podstatně větší než moment setrvačnosti tyče (c).

KONTROLA 4: Částice na obrázku obíhají kolem svislé osy v daných vzdálenostech. Seřaďte je sestupně podle velikosti jejich momentu setrvačnosti vzhledem k této ose.



11.7 VÝPOČET MOMENTU SETRVAČNOSTI

Je-li tuhé těleso složeno z jednotlivých částic, lze jeho moment setrvačnosti snadno určit pomocí součtu (11.24). Je-li však hmota tělesa rozložena spojitě, je třeba nahradit tento součet integrálem. Moment setrvačnosti je pak definován jako

$$I = \int r^2\,\mathrm{d}m. \tag{11.26}$$

V úlohách této kapitoly se budeme zabývat výpočty I pro oba typy těles. Obecně lze říci, že moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k dané ose otáčení závisí (1) na jeho tvaru, (2) na vzdálenosti jeho těžiště od osy otáčení a (3) na jeho orientaci vzhledem k ose otáčení.

Tab. 11.2 shrnuje vztahy pro výpočet momentu setrvačnosti některých běžných homogenních těles vzhledem k různým osám otáčení. Všimněme si, jak rozložení hmoty vzhledem k ose otáčení ovlivní hodnotu I. Tak například u tyče na obrázku (f) je větší část hmoty dále od osy otáčení než u stejně dlouhé tyče na obrázku (e). Tyče mají stejnou hmotnost i délku, jejich momenty setrvačnosti jsou však rozdílné vlivem odlišné volby osy otáčení. Moment setrvačnosti tyče v situaci (f) je větší než v případě (e).

Steinerova věta

Známe-li moment setrvačnosti I_T tělesa vzhledem k jisté ose jdoucí jeho těžištěm, můžeme snadno vypočítat jeho moment setrvačnosti vzhledem ke každé další ose téhož směru. Vztah mezi oběma momenty setrvačnosti se nazývá **Steinerova věta**. Platí

$$I = I_T + mh^2, \tag{11.27}$$

kde m je hmotnost tělesa a h je vzdálenost uvažovaných rovnoběžných os. Slovně lze předchozí vztah vyjádřit takto:

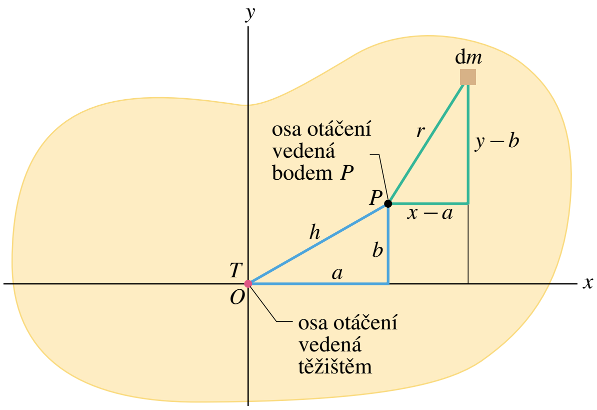
Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k libovolně zvolené ose o je *součtem* jeho momentu setrvačnosti I_T vzhledem k rovnoběžné ose o' ($o' \parallel o$), vedené jeho těžištěm, a momentu setrvačnosti mh^2 veškeré hmoty soustředěné v těžišti vzhledem k ose o, kde h je vzdálenost os o, o'.

Důkaz Steinerovy věty

Uvažujme těleso obecného tvaru, které se může otáčet kolem obecně zvolené pevné osy. Těžiště tělesa označme T a umístěme v něm počátek soustavy souřadnic ($O = T$). Řez tělesa rovinou kolmou k ose otáčení a procházející těžištěm tělesa je znázorněn obr. 11.12. Průsečík osy otáčení s rovinou řezu označme P a jeho souřadnice a a b.

Uvažujme objemový element tělesa v bodě o souřadnicích x a y a označme jeho hmotnost $\mathrm{d}m$. Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené bodem P můžeme vyjádřit pomocí rov. (11.26) takto:

$$I = \int r^2\,\mathrm{d}m = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2]\,\mathrm{d}m.$$



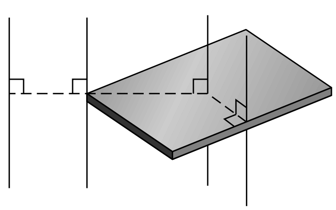
Obr. 11.12 Řez tuhým tělesem s těžištěm T v počátku O soustavy souřadnic. Steinerova věta (11.27) umožňuje vyjádřit moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené bodem P jako součet momentu setrvačnosti vzhledem k ose téhož směru, procházející však těžištěm T, a výrazu mh^2, kde h je vzdálenost obou os. Osy jsou kolmé k rovině nákresu.

Tento integrál lze přepsat ve tvaru

$$I = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m - 2a\int x\,\mathrm{d}m - 2b\int y\,\mathrm{d}m + \int (a^2 + b^2)\,\mathrm{d}m. \qquad (11.28)$$

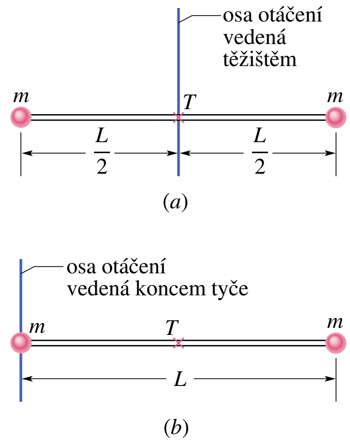
Uvědomíme-li si definiční vztah pro polohu těžiště tělesa (rov. (9.9)), ihned vidíme, že druhý a třetí integrál v rov. (11.28) představují, až na násobení konstantou, x-ovou a y-ovou souřadnici těžiště. Jsou tedy nulové. Součet $x^2 + y^2$ můžeme označit jako R^2, kde symbolem R rozumíme vzdálenost elementu $\mathrm{d}m$ od bodu O. Je zřejmé, že první integrál má význam momentu setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm, I_T. Poslední člen v rov. (11.28) má hodnotu je mh^2 (obr. 11.12), kde m je hmotnost tělesa. Získali jsme rov. (11.27), představující matematický zápis Steinerovy věty.

KONTROLA 5: Těleso na obrázku (například kniha) se může otáčet kolem čtyř různých os. Všechny jsou kolmé k vodorovné základně tělesa. Seřaďte je sestupně podle odpovídajících hodnot momentu setrvačnosti tělesa.



PŘÍKLAD 11.7

Tuhé těleso na obr. 11.13 je tvořeno dvěma částicemi o hmotnosti m spojenými tyčí délky L, jejíž hmotnost je zanedbatelná.



Obr. 11.13 Příklad 11.7. Tuhé těleso je tvořeno dvěma částicemi o hmotnosti m spojenými tyčí zanedbatelné hmotnosti.

(a) Určete moment setrvačnosti tohoto tělesa vzhledem k ose vedené kolmo k tyči jejím středem (obr. 11.13a).

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.24) plyne

$$I = \sum m_i r_i^2 = m(\tfrac{1}{2}L)^2 + m(\tfrac{1}{2}L)^2 = \tfrac{1}{2}mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené koncem tyče rovnoběžně s osou zadanou v úloze (a) (obr. 11.13b).

ŘEŠENÍ: Úlohu řešíme pomocí Steinerovy věty (11.27). Moment setrvačnosti I_T jsme určili v části (a). Víme, že vzdálenost h obou rovnoběžných os je polovinou délky tyče. Z rov. (11.27) tedy dostáváme

$$I = I_T + mh^2 = \tfrac{1}{2}mL^2 + (2m)(\tfrac{1}{2}L)^2 = mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek můžeme snadno ověřit přímým výpočtem podle rov. (11.24):

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)(0)^2 + (m)(L)^2 = mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 11.8

Na obr. 11.14 je znázorněna tenká homogenní tyč o hmotnosti m a délce L.

(a) Vypočtěte její moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené kolmo k tyči jejím hmotným středem.

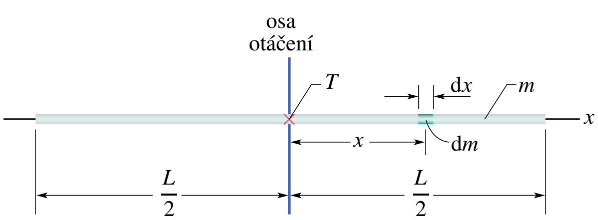
ŘEŠENÍ: Zvolme osu x rovnoběžně s tyčí tak, aby její počátek ležel v těžišti tyče. Označme $\mathrm{d}x$ element délky tyče, umístěný v bodě o souřadnici x. Hmotnost úseku tyče jednotkové délky, tzv. lineární hustota, je m/L, element $\mathrm{d}x$ má hmotnost

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{L}\,\mathrm{d}x.$$

Podle rov. (11.26) je pak

$$I = \int r^2\,\mathrm{d}m = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{m}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{3L}\left[x^3\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{m}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right] = \tfrac{1}{12}mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledek se shoduje s údajem v tab. 11.2e.



Obr. 11.14 Příklad 11.8. Homogenní tyč délky L a hmotnosti m.

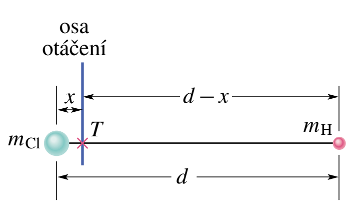
(b) Určete moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose vedené kolmo k tyči jejím koncovým bodem.

ŘEŠENÍ: Použijeme výsledek části (a) a Steinerovu větu (11.27). Dostaneme, ve shodě s tab. 11.2f,

$$I = I_T + mh^2 = \tfrac{1}{12}mL^2 + (m)(\tfrac{1}{2}L)^2 = \tfrac{1}{3}mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 11.9

Molekula chlorovodíku se skládá z atomu vodíku o hmotnosti $m_{\mathrm{H}} = 1{,}01\,\mathrm{u}$ a atomu chloru o hmotnosti $m_{\mathrm{Cl}} = 35{,}0\,\mathrm{u}$. Vzdálenost středů atomů je $d = 1{,}27\cdot10^{-10}\,\mathrm{m} = 127\,\mathrm{pm}$ (obr. 11.15). Vypočtěte polohu těžiště molekuly chlorovodíku vzhledem k ose vedené jejím těžištěm kolmo ke spojnici atomů.



Obr. 11.15 Příklad 11.9. Schematicky znázorněná molekula chlorovodíku. Osa otáčení prochází jejím těžištěm a je kolmá je spojnici atomů.

ŘEŠENÍ: Označme x vzdálenost atomu chloru od těžiště molekuly. Z obr. 11.15 a rov. (9.3) dostáváme

$$0 = \frac{-m_{\mathrm{Cl}}x + m_{\mathrm{H}}(d-x)}{m_{\mathrm{Cl}} + m_{\mathrm{H}}},$$

tj.

$$m_{\mathrm{Cl}}x = m_{\mathrm{H}}(d-x).$$

Odtud

$$x = d\frac{m_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{Cl}} + m_{\mathrm{H}}}. \qquad (11.29)$$

Moment setrvačnosti molekuly vzhledem k ose jdoucí jejím těžištěm je (viz rov. (11.24))

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_{\mathrm{H}}(d-x)^2 + m_{\mathrm{Cl}}x^2.$$

Dosazením za x ze vztahu (11.29) a po úpravě dostaneme

$$I = d^2\frac{m_{\mathrm{H}}m_{\mathrm{Cl}}}{m_{\mathrm{H}} + m_{\mathrm{Cl}}} = (127\,\mathrm{pm})^2\frac{(1{,}01\,\mathrm{u})(35{,}0\,\mathrm{u})}{(1{,}01\,\mathrm{u} + 35{,}0\,\mathrm{u})} = 15{,}800\,\mathrm{u\cdot pm^2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Použité jednotky jsou pro vyjádření momentu setrvačnosti molekul přiměřené. Ještě vhodnější je délková jednotka angström ($1\,\text{Å} = 10^{-10}\,\mathrm{m}$), pomocí níž bude $I = 1{,}58\,\mathrm{u\cdot Å^2}$.

PŘÍKLAD 11.10

Pomocí moderní techniky je možné zkonstruovat setrvačník, který může sloužit jako pohon automobilu. Setrvačník se nejprve roztočí motorem tak, aby kinetická energie jeho otáčivého pohybu byla dostatečná. Takto „uložená“ energie je pak postupně předávána automobilu prostřednictvím převodové soustavy. Představme si takový setrvačník jako plný válec o hmotnosti $m = 75\,\mathrm{kg}$ a poloměru $R = 25\,\mathrm{cm}$. Zjistěte, jak velká energie je v něm „uložena“, je-li roztočen na úhlovou rychlost 85 000 ot/min.

ŘEŠENÍ: Moment setrvačnosti válcového setrvačníku vyjádříme podle tab. 11.2c:

$$I = \tfrac{1}{2}mR^2 = \tfrac{1}{2}(75\,\mathrm{kg})(0{,}25\,\mathrm{m})^2 = 2{,}34\,\mathrm{kg\cdot m^2}.$$

Úhlová rychlost setrvačníku je

$$\omega = (85\,000\,\mathrm{ot/min})(2\pi\,\mathrm{rad/ot})(1\,\mathrm{min}/60\,\mathrm{s}) = 8\,900\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}.$$

Z rov. (11.25) získáme jeho kinetickou energii

$$E_{\mathrm{k}} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2{,}34\,\mathrm{kg\cdot m^2})(8\,900\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}})^2 = 9{,}3\cdot10^7\,\mathrm{J} = 26\,\mathrm{kW\cdot h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Účinnost takového pohonu nebude samozřejmě stoprocentní. Vezmeme-li však v úvahu její rozumný odhad, zjistíme, že setrvačník by dokázal dopravit automobil do vzdálenosti 320 km.

11.8 MOMENT SÍLY

Přemýšleli jste někdy nad tím, proč je klika umístěna na protilehlé straně závěsu dveří? K otevření těžkých dveří je potřeba značné síly. Samotná síla by ovšem k otevření dveří nemusela stačit, kdybychom nevhodně zvolili její směr nebo působiště. Kdyby síla působila v některém bodě poblíž závěsu dveří nebo kdyby nebyla ke dveřím kolmá, musela by být větší než v případě, že by její směr a působiště byly vybrány optimálně.

Na obr. 11.16a vidíme řez tělesem, které se může volně otáčet kolem pevné osy kolmé k rovině nákresu. Na těleso působí v bodě P síla $\boldsymbol{F}$. Rovina řezu je vedena bodem P, její průsečík s osou otáčení je označen O. Polohový vektor bodu P vzhledem k O označíme $\boldsymbol{r}$. Vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{r}$ svírají úhel φ. Pro jednoduchost se omezíme pouze na síly ležící v některé z rovin kolmých k ose otáčení. Průmět každé takové síly do směru osy otáčení je nulový. Ve shodě s tímto předpokladem leží tedy síla $\boldsymbol{F}$ v rovině obrázku.

Abychom zjistili otáčivý účinek síly $\boldsymbol{F}$, rozložíme ji do dvou průmětů podle obr. 11.16b. První z nich určuje takzvanou *radiální složku* F_r síly $\boldsymbol{F}$. Je rovnoběžný s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$ a nemá vliv na otáčivý pohyb tělesa. Působí totiž podél spojnice bodů P a O. (Jistě si snadno představíme, nebo i vyzkoušíme, co se stane, budeme-li tahat za kliku ve směru ležícím v rovině dveří. Pravděpodobně dveřmi příliš nepohneme.) Druhý průmět síly $\boldsymbol{F}$, kolmý k vektoru $\boldsymbol{r}$, definuje její *tečnou složku* $F_t = F \sin\varphi$. Právě ona *způsobí* otočení dveří. (Můžeme si vyzkoušet, že silou namířenou kolmo k rovině dveří jimi celkem snadno otočíme.)

„Schopnost“ síly $\boldsymbol{F}$ otáčet tělesem závisí však nejen na velikosti její tečné složky F_t, ale také na vzdálenosti jejího působiště od bodu O. Veličina, která bere v úvahu oba tyto vlivy, se nazývá **moment síly $\boldsymbol{M}$** vzhledem k ose otáčení. Jeho velikost definujeme vztahem

$$M = (r)(F \sin\varphi). \tag{11.30}$$

Existují dva ekvivalentní způsoby vyjádření momentu síly:

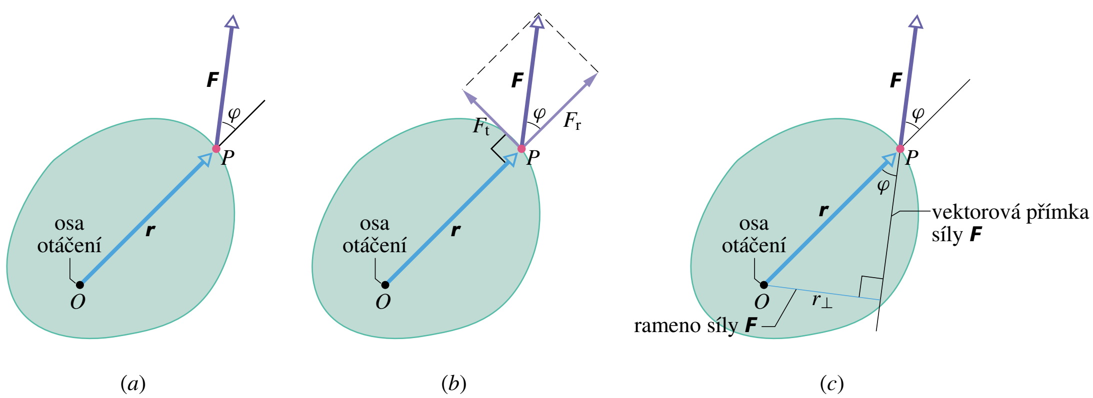
$$M = (r)(F \sin\varphi) = rF_t \tag{11.31}$$

nebo

$$M = (r \sin\varphi)(F) = r_\perp F, \tag{11.32}$$

$r_\perp$ je kolmá vzdálenost bodu O od vektorové přímky síly $\boldsymbol{F}$. Je to přímka, v níž vektor síly leží (obr. 11.16c). Veličinu $r_\perp$ nazýváme **rameno síly $\boldsymbol{F}$**. Z obr. 11.16b je zřejmé, že r (tedy velikost vektoru $\boldsymbol{r}$) je současně ramenem tečného průmětu $\boldsymbol{F}_t$ síly $\boldsymbol{F}$.*

* Uvědomme si dobře souvislost definice momentu síly *vzhledem k ose otáčení* s konstrukcí na obr. 11.16. Bod O je průsečíkem roviny řezu vedené působištěm P síly $\boldsymbol{F}$ kolmo k ose otáčení. Dejme tomu, že na těleso působí ještě jiná síla $\boldsymbol{F}'$, jejíž působiště P' však *neleží* v rovině vedené kolmo k ose otáčení bodem P. Abychom určili její moment vzhledem k ose, musíme opět najít průsečík osy s příslušnou rovinou řezu. Dostaneme tak bod O'. Taková konstrukce má ovšem smysl jen tehdy, je-li osa otáčení pevná. Také definice momentu síly vzhledem k ose otáčení je na tento předpoklad vázána. V obecných situacích je nutné definovat moment síly obecněji a vztahovat jej nikoli k pevné přímce (ose), nýbrž k pevnému bodu. Nakonec si ještě povšimněme, že v případě otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy, na které působí síly ležící výhradně v rovinách kolmých k ose otáčení, jsou vektorové přímky těchto sil kolmé k ose a v obecném případě jsou s ní mimoběžné. Ramenem každé ze sil vzhledem k ose otáčení je pak vzdálenost dvou mimoběžek, vektorové přímky dotyčné síly a osy otáčení.



Obr. 11.16 (a) Síla $\boldsymbol{F}$ působí na tuhé těleso v bodě P. Těleso se může otáčet kolem osy vedené bodem O kolmo k rovině obrázku. (b) Moment této síly vzhledem k této ose má velikost $(r)(F \sin\varphi)$, kterou lze také vyjádřit ve tvaru rF_t, kde F_t je tečná složka síly $\boldsymbol{F}$. (c) Jiný možný zápis velikosti momentu síly $\boldsymbol{F}$ má tvar $r_\perp F$, kde $r_\perp$ je rameno síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k ose otáčení.

Kroucení se též nazývá **torze** (z latiny). Přibližně lze říci, že moment síly vyjadřuje kroutivý (torzní) účinek síly.

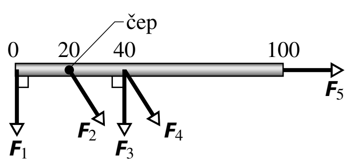
Shrňme nyní dosavadní poznatky. Působíme-li na těleso, třeba na šroubovák nebo klíč, určitou silou ve snaze tělesem *otočit*, musí být moment této síly vzhledem k ose otáčení nenulový. Někdy říkáme, že na těleso *působíme určitým momentem*. Jednotkou momentu síly v soustavě SI je N·m.* Moment M považujeme za kladný, roztáčí-li těleso proti směru otáčení hodinových ručiček, tj. ve směru rostoucí úhlové polohy θ. (Taková situace je znázorněna na obr. 11.16.) Roztáčí-li se těleso ve směru otáčení hodinových ručiček, přisuzujeme momentu síly záporné znaménko.

Definici momentu síly rov. (11.30) lze zapsat i ve vektorovém tvaru, konkrétně pomocí *vektorového součinu*

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \qquad (11.33)$$

Moment síly je tedy vektorovou veličinou. Jeho směr je podle definice (11.33) kolmý k rovině vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$. Jeho velikost je dána vztahy (11.30), (11.31) a (11.32) a orientaci určuje pravidlo pravé ruky. Vztah (11.33) budeme používat v kap. 12.

KONTROLA 6: Na obrázku je v nadhledu znázorněn tyčový metr, který se může otáčet kolem čepu umístěného u značky 20 (20 cm). Všechny síly vyznačené v obrázku jsou vodorovné a mají stejnou velikost. Seřaďte je sestupně podle velikosti jejich momentu vzhledem k ose otáčení.



11.9 VĚTA O MOMENTU HYBNOSTI

Obr. 11.17 znázorňuje jednoduchý případ otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy. Těleso je tvořeno částicí o hmotnosti m připevněnou na konci tyče délky r, jejíž hmotnost je zanedbatelná. Síla $\boldsymbol{F}$ uvádí částici do pohybu po kružnici kolem osy otáčení. Zrychlení částice je dáno druhým Newtonovým zákonem:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{T},$$

kde $\boldsymbol{T}$ je tahová síla tyče, která pro jednoduchost není v obrázku vyznačena. (Její moment vzhledem k ose otáčení je nulový). Pro tečnou složku zrychlení částice tedy platí

$$ma_\mathrm{t} = F_\mathrm{t}.$$

Moment síly $\boldsymbol{F}$ působící na částici lze podle rov. (11.31) vyjádřit jako

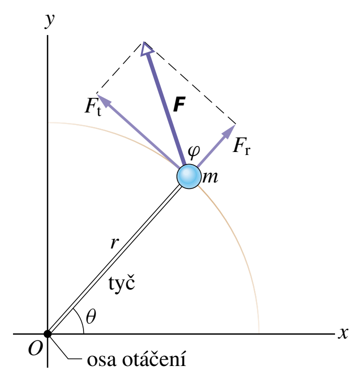
$$M = F_\mathrm{t} r = ma_\mathrm{t} r$$

a pomocí rov. (11.20) ($a_\mathrm{t} = \varepsilon r$) přepsat do tvaru

$$M = m(\varepsilon r)r = (mr^2)\varepsilon. \qquad (11.34)$$

Výraz mr^2 představuje moment setrvačnosti částice vzhledem k ose otáčení (rov. (11.24)). Rov. (11.34) lze tedy zapsat velmi jednoduše:

$$I\varepsilon = M \quad (\varepsilon \text{ je v rad·s}^{-2}). \qquad (11.35)$$



Obr. 11.17 Jednoduché tuhé těleso se skládá z částice o hmotnosti m připevněné na tyči o délce r a zanedbatelné hmotnosti. Působením síly $\boldsymbol{F}$ se těleso roztáčí kolem osy vedené bodem O.

Působí-li na těleso více sil, je třeba vztah (11.35) zobecnit:

$$I\varepsilon = \sum M \quad (\varepsilon \text{ je v rad·s}^{-2}), \qquad (11.36)$$

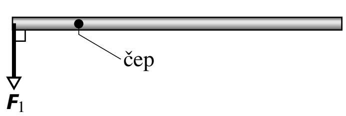
kde $\sum M$ je součet momentů všech sil působících na částici (**výsledný silový moment**). Rov. (11.36) je analogická druhému Newtonovu zákonu při použití úhlových veličin.

Vztah (11.35) a jeho obecnější verzi (11.36) jsme odvodili pro zcela speciální případ tělesa — jedinou částici obíhající kolem pevné osy. Zamysleme se nad tím, zda jej dokážeme zobecnit pro libovolné tuhé těleso, které se otáčí kolem pevné osy. Takové zobecnění je skutečně možné. Tuhé těleso není vlastně nic jiného než soustava částic,

* N·m je také jednotka práce. Moment síly a práce jsou ovšem zcela rozdílné veličiny, které nesmíme zaměňovat. Práce se často vyjadřuje také v joulech (1 J = 1 N·m), zatímco pro moment síly jednotku J nepoužíváme nikdy.

které obíhají kolem osy otáčení se stejným úhlovým zrychlením ε. Levá strana rov. (11.35) a (11.36) je tedy pro tuhé těleso vyjádřena stejně jako pro částici, s tím rozdílem, že symbolem I je třeba rozumět moment setrvačnosti *tělesa* vzhledem k ose otáčení. Jistý problém vzniká při interpretaci pravé strany těchto vztahů. Na každou částici tělesa mohou totiž určitými silami působit jak okolní objekty, tak i jeho ostatní částice. Uvědomíme-li si však, že pro síly vzájemného působení částic uvnitř tělesa platí třetí Newtonův zákon, a předpokládáme-li celkem přirozeně, že interakční síly mají pro každou dvojici částic směr jejich spojnice, zjistíme, že výsledný moment sil působících uvnitř tělesa je nulový. Zkušenost tento závěr potvrzuje: žádné těleso se ještě neroztočilo vlivem vnitřních sil, tj. samo od sebe. Předchozí úvahu můžeme uzavřít konstatováním, že platnost rov. (11.36) je mnohem obecnější než pro případ jednotlivé částice. Platí pro libovolné tuhé těleso otáčející se kolem pevné osy, jestliže I je jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení a $\sum M$ je výsledný moment *vnějších sil* působících na těleso, vztažený k této ose. Takto zobecněný vztah (11.36) představuje pohybovou rovnici pro otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy. Nazýváme ho **věta o momentu hybnosti** (soustavy částic) nebo také **druhá impulzová věta**.

KONTROLA 7: Na obrázku je v nadhledu zobrazen tyčový metr, který se může otáčet kolem vyznačeného čepu, umístěného vlevo od středu tyče. Na tyč působí dvě vodorovné síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$, pouze síla $\boldsymbol{F}_1$ je však v obrázku zakreslena. Síla $\boldsymbol{F}_2$ je k tyči kolmá a působí na její pravý konec. Předpokládejte, že se tyč neotáčí a určete (a) orientaci síly $\boldsymbol{F}_2$. (b) Rozhodněte, zda je síla $\boldsymbol{F}_2$ větší, stejně velká, nebo menší než síla $\boldsymbol{F}_1$.

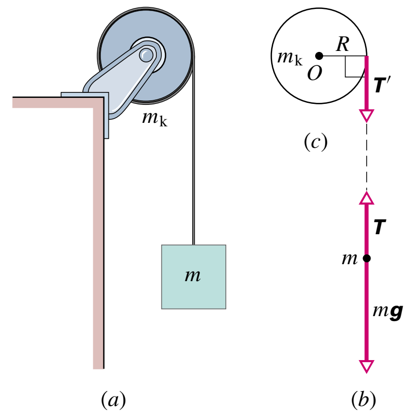


PŘÍKLAD 11.11

Obr. 11.18a znázorňuje homogenní kotouč o hmotnosti $m_k = 2{,}5\,\text{kg}$ a poloměru $R = 20\,\text{cm}$, který je připevněn na pevnou vodorovnou osu. Závaží o hmotnosti $m = 1{,}2\,\text{kg}$ visí na vlákně zanedbatelné hmotnosti navinutém na obvodu kotouče. Závaží padá svisle dolů a kotouč se roztáčí. Vypočtěte zrychlení závaží, úhlové zrychlení kotouče a tahovou sílu vlákna. Předpokládáme, že vlákno po obvodu kotouče neklouže a zanedbáváme tření v ose.

ŘEŠENÍ: Na obr. 11.18b jsou znázorněny síly působící na závaží.

Závaží se urychluje směrem dolů, takže velikost tíhové síly mg je větší než velikost tahové síly vlákna T. Podle



Obr. 11.18 Příklady 11.11 a 11.13. (a) Padající závaží roztáčí kotouč. (b) Silový diagram závaží. (c) Silový diagram kotouče.

druhého Newtonova pohybového zákona je

$$ma = T - mg. \tag{11.37}$$

Na obr. 11.18c jsou znázorněny síly působící na kotouč. Vlivem momentu síly $\boldsymbol{T}'$ se kotouč roztáčí po směru otáčení hodinových ručiček. Tento moment je tedy záporný a je roven $-T'R$. Ze vztahu (c) v tab. 11.2 víme, že moment setrvačnosti kotouče je $I = \frac{1}{2}m_k R^2$. Na kotouč působí také tíhová síla $m_k\boldsymbol{g}$ a svislá síla $\boldsymbol{N}$, kterou na kotouč působí pevná osa. Vektorové přímky obou těchto sil procházejí osou otáčení kotouče a jejich momenty vzhledem k ní jsou proto nulové. Použitím druhé impulzové věty ve tvaru $I\varepsilon = M$ dostaneme

$$\tfrac{1}{2}m_k R^2 \varepsilon = -T'R.$$

Protože vlákno po obvodu kotouče neprokluzuje, je zrychlení a závaží shodné s tečným zrychlením a_t bodu na obvodu kotouče. Použitím rov. (11.20) ($\varepsilon = a/R$) můžeme poslední vztah zjednodušit do tvaru

$$-\tfrac{1}{2}m_k a = T'. \tag{11.38}$$

Z rov. (11.37) a (11.38) a s uvážením, že $T' = T$ (velikosti sil $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ jsou stejné), nakonec dostaneme

$$a = -g\frac{2m}{m_k + 2m} = -(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})\frac{2(1{,}2\,\text{kg})}{(2{,}5\,\text{kg}) + 2(1{,}2\,\text{kg})} = = -4{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

K určení velikosti síly T použijeme rov. (11.38):

$$T = -\tfrac{1}{2}m_k a = -\tfrac{1}{2}(2{,}5\,\text{kg})(-4{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}) = = 6{,}0\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

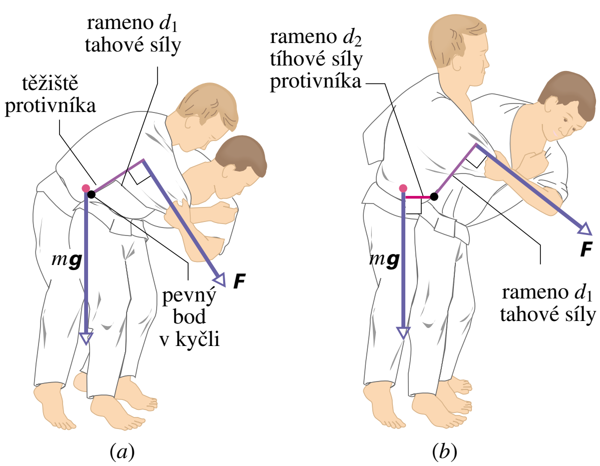
Podle očekávání je zrychlení padajícího závaží menší než g a tahová síla vlákna (6,0 N) je menší než tíhová síla působící na závaží ($mg = 11{,}8$ N). Všimněme si, že zrychlení tělesa a tahová síla vlákna nezávisí na poloměru kotouče, pouze na jeho hmotnosti. Pro kontrolu ještě dosaďme $m_k = 0$ (kotouč zanedbatelné hmotnosti). Dostáváme $a = -g$ a $T = 0$. Ani tento výsledek není nečekaný: závaží padá volným pádem a táhne s sebou nenapjaté vlákno.

Z rov. (11.20) vypočteme ještě úhlové zrychlení kotouče

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{(-4{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})}{(0{,}20\,\mathrm{m})} = -24\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-2}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 11.12

Zápasník v judu se chystá položit svého osmdesátikilového soka na žíněnku. Uchopí jej za oděv na rameni a snaží se jej otočit kolem svého těla. Při tom na něj působí silou $\boldsymbol{F}$. Osou otáčení je spojnice ramenního a kyčelního kloubu zápasníka. Rameno působící síly vzhledem k této ose má v běžných situacích velikost $d_1 = 30$ cm. Předpokládejme, že zápasník udělí soupeři úhlové zrychlení $-6{,}0\,\mathrm{rad/s^2}$, roztáčí jej tedy ve směru otáčení hodinových ručiček (obr. 11.19). Moment setrvačnosti soupeře vzhledem k ose otáčení je zhruba $15\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$.



Obr. 11.19 Příklad 11.12. (a) Správně a (b) nesprávně provedený chvat v judu.

(a) Určete velikost síly $\boldsymbol{F}$ potřebné k tomuto chvatu za předpokladu, že judista těsně před jeho provedením ohne soupeře tak, aby posunul jeho těžiště nad svůj kyčelní kloub (obr. 11.19a).

ŘEŠENÍ: Leží-li těžiště soupeře na ose rotace vedené kyčelním kloubem judisty, je moment tíhové síly působící na soupeře vzhledem k ose otáčení nulový. Jediným nenulovým momentem, který má vliv na pohyb soupeře, je moment síly $\boldsymbol{F}$. Tento moment je záporný. Pomocí rov. (11.31) a (11.35) jej zapíšeme ve tvaru

$$M = -d_1 F = I\varepsilon,$$

odkud

$$F = \frac{-I\varepsilon}{d_1} = \frac{-(15\,\mathrm{kg{\cdot}m^2})(-6{,}0\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-2}})}{(0{,}30\,\mathrm{m})} = 300\,\mathrm{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Předpokládejme, že soupeř zůstane vzpřímen, takže rameno tíhové síly vzhledem k ose otáčení má velikost $d_2 = 0{,}12$ m. Jak velká musí být síla $\boldsymbol{F}$ nyní?

ŘEŠENÍ: V této situaci je moment tíhové síly působící na soupeře nenulový. Jeho směr je kladný, tedy opačný než směr momentu síly $\boldsymbol{F}$. Z rov. (11.31) a (11.36) dostáváme

$$\sum M = -d_1 F + d_2 mg = I\varepsilon,$$

a tedy

$$F = -\frac{I\varepsilon}{d_1} + \frac{d_2 mg}{d_1}.$$

V části (a) této úlohy jsme již zjistili, že první člen na pravé straně poslední rovnice činí 300 N. Dosazením této hodnoty i dalších číselných údajů do získaného vztahu pro F nakonec dostáváme

$$F = (300\,\mathrm{N}) + \frac{(0{,}12\,\mathrm{m})(80\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})}{(0{,}30\,\mathrm{m})} = 613{,}6\,\mathrm{N} \doteq 610\,\mathrm{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Z výsledků (a) a (b) vidíme, jak důležitá je příprava zápasníka na provedení chvatu. Pokud se mu totiž nepodaří uskutečnit přípravnou fázi tak, jak je popsáno v části (a), tj. ohnout soupeře a podsunout svou kyčel pod jeho těžiště, potřebuje k provedení chvatu mnohem větší sílu. Dobrý judista toto pravidlo zná a používá. (Rozbor fyzikální problematiky juda a aikido mohou zájemci najít v červnovém čísle časopisu Scientific American z r. 1980.)

11.10 PRÁCE A KINETICKÁ ENERGIE PŘI OTÁČIVÉM POHYBU

Připomeňme si znovu situaci na obr. 11.17: síla $\boldsymbol{F}$ roztáčí tuhé těleso tvořené jedinou částicí o hmotnosti m připevněnou na konci tyče, jejíž hmotnost je zanedbatelná. Pokus je uspořádán tak, že se mění pouze kinetická energie tělesa. Můžeme proto použít vztah mezi prací a změnou kinetické energie podle rov. (7.4)

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W. \qquad (11.39)$$

Použitím vztahu $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ a (11.16) ($v = \omega r$) můžeme přepsat rov. (11.39) do tvaru

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}mr^2\omega_i^2 = W. \qquad (11.40)$$

Moment setrvačnosti částice je $I = mr^2$ (rov. (11.24)). Jeho dosazením do rov. (11.40) dostaneme

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = W. \qquad (11.41)$$

Vidíme, že v jednoduché situaci znázorněné na na obr. 11.17 je změna kinetické energie spojené s otáčivým pohybem tělesa dána prací síly $\boldsymbol{F}$. Rov. (11.41) pro otáčivý pohyb je tedy obdobou vztahu mezi prací a změnou kinetické energie, získaného již dříve pro pohyb posuvný. Odvodili jsme ji sice pro případ jediné částice, platí však pro libovolné tuhé těleso rotující kolem pevné osy.

Pro situaci na obr. 11.17 se nyní pokusíme vyjádřit práci W pomocí momentu síly $\boldsymbol{F}$. Při elementárním otočení tělesa o úhel $d\theta$ se částice posune podél své kruhové trajektorie o vzdálenost ds. Práci síly $\boldsymbol{F}$ při tomto posunutí vyjádříme pomocí rov. (7.11):

$$dW = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = F_t\,ds = F_t r\,d\theta. \qquad (11.42)$$

(Připomeňme, že F_t je tečná složka síly $\boldsymbol{F}$.) Součin $F_t r$ představuje podle rov. (11.31) moment M síly $\boldsymbol{F}$. Rov. (11.42) tak získává tvar

$$dW = M\,d\theta. \qquad (11.43)$$

Práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při celkovém otočení tělesa z úhlové polohy θ_i do polohy θ_f je pak dána integrálem

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M\,d\theta. \qquad (11.44)$$

Tento vztah je „rotační" obdobou rov. (7.27)

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx.$$

Odvodili jsme jej opět pro jedinou částici, platí však pro libovolné tuhé těleso, podobně jako vztah mezi prací a kinetickou energií.

Z rov. (11.43) můžeme zjistit, jaký je výkon síly působící na těleso při rotačním pohybu:

$$P = \frac{dW}{dt} = M\frac{d\theta}{dt} = M\omega. \qquad (11.45)$$

Tento výsledek, získaný pro otáčivý pohyb, je obdobou vztahu $P = Fv$ (rov. (7.49)), platného pro pohyb posuvný.

Tab. 11.3 shrnuje základní vztahy, které jsme v této kapitole získali pro otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy a pro porovnání uvádí i odpovídající rovnice pro pohyb posuvný.

PŘÍKLAD 11.13

(a) O jaký úhel se otočí kotouč na obr. 11.18 za 2,5 s, rozbíhá-li se z klidu?

ŘEŠENÍ: Dosazením $\omega_0 = 0$ do rov. (11.10) ($\theta = \omega_0 + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$) a použitím hodnoty ε, kterou jsme získali v př. 11.11, vyjde

$$\theta = 0 + \tfrac{1}{2}(-24\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}})(2{,}5\,\mathrm{s})^2 = = -75\,\mathrm{rad}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je úhlová rychlost kotouče v okamžiku $t = 2{,}5$ s?

ŘEŠENÍ: Úhlovou rychlost vypočteme z rov. (11.9) ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$). Dosadíme hodnotu úhlového zrychlení ε, vypočtenou v př. 11.11 a nulovou hodnotu počáteční úhlové rychlosti ($\omega_0 = 0$). Dostáváme

$$\omega = 0 + (-24\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}})(2{,}5\,\mathrm{s}) = = -60\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jak velkou kinetickou energii má kotouč v okamžiku $t = 2{,}5$ s?

Tabulka 11.3 **Posuvný a otáčivý pohyb**

Posuvný pohyb v daném směru		Otáčivý pohyb kolem pevné osy	
poloha	x	úhlová poloha	θ
rychlost	$v = dx/dt$	úhlová rychlost	$\omega = d\theta/dt$
zrychlení	$a = dv/dt$	úhlové zrychlení	$\varepsilon = d\omega/dt$
hmotnost	m	moment setrvačnosti	I
věta o hybnosti	$ma = F$	věta o momentu hybnosti	$I\varepsilon = M$
práce	$W = \int F dx$	práce	$W = \int M d\theta$
kinetická energie	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	kinetická energie	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
výkon	$P = Fv$	výkon	$P = M\omega$
vztah mezi prací a změnou kinetické energie	$W = \Delta E_k$	vztah mezi prací a změnou kinetické energie	$W = \Delta E_k$

ŘEŠENÍ: Kinetická energie rotujícího kotouče je dána vztahem (11.25), tj. $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$. Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k jeho geometrické ose, která je v našem případě i osou otáčení, má hodnotu $I = \frac{1}{2}mR^2$. Úhlovou rychlost ω v okamžiku $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$ jsme zjistili v části (b). Dosadíme číselné údaje:

$$\begin{aligned} E_k &= \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mR^2)\omega^2 = \\ &= \tfrac{1}{4}(2{,}5\,\mathrm{kg})(0{,}20\,\mathrm{m})^2(-60\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}})^2 = \\ &= 90\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Jiný způsob výpočtu kinetické energie nabízí vztah mezi prací a změnou kinetické energie. Určíme práci W, kterou vykoná tahová síla vlákna, které roztáčí kotouč. Ostatní síly působící na kotouč, tj. tíhová síla a tlaková síla v jeho ose, práci nekonají, jejich momenty vzhledem k ose otáčení jsou nulové. Při výpočtu práce tahové síly vyjdeme z rov. (11.44) a využijeme skutečnosti, že velikost tahové síly T i její moment M vzhledem k ose otáčení jsou konstantní. Dostáváme

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M\,d\theta = M\int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = M(\theta_f - \theta_i).$$

Pro moment tahové síly T platí $M = -TR$. Dosadíme hodnoty $T = -6{,}0\,\mathrm{N}$ (př. 11.11) a $R = 0{,}20\,\mathrm{m}$. Rozdíl $\theta_f - \theta_i$ představuje úhlové otočení kotouče od počátku pohybu do okamžiku $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$. Jeho hodnotu jsme již určili v části (a). S uvážením všech předchozích skutečností můžeme psát

$$\begin{aligned} W &= M(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i) = \\ &= -(6{,}0\,\mathrm{N})(0{,}20\,\mathrm{m})(-75\,\mathrm{rad}) = \\ &= 90\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Protože se kotouč roztáčí z klidu, je jeho počáteční kinetická energie $E_{k,i}$ nulová. V souladu s rov. (11.41) pak vypočtená práce určuje přímo kinetickou energii kotouče E_k v daném okamžiku.

PŘÍKLAD 11.14

Tuhá konstrukce, znázorněná na obr. 11.20, je sestavena z tuhého prstence o hmotnosti m a poloměru $R = 0{,}15\,\mathrm{m}$ a dvou tenkých tyčí, z nichž každá má hmotnost m a délku $L = 2{,}0R$. Může se otáčet kolem vodorovné osy, která leží v rovině prstence a prochází jeho středem.

(a) Vyjádřete moment setrvačnosti konstrukce pomocí m a R.

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (i) v tab. 11.2 má prstenec vzhledem k zadané ose moment setrvačnosti $I_{\text{prstenec}} = \frac{1}{2}mR^2$.

Moment setrvačnosti tyče A vypočteme pomocí Steinerovy věty (11.27). Její moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jejím středem rovnoběžně s osou otáčení najdeme v tab. 11.2e, $I_{T,A} = mL^2/12$. Podle Steinerovy věty platí

$$\begin{aligned} I_A &= I_{T,A} + mh_{T,A}^2 = \frac{mL^2}{12} + m\left(R + \frac{L}{2}\right)^2 = \\ &= 4{,}33mR^2. \end{aligned}$$

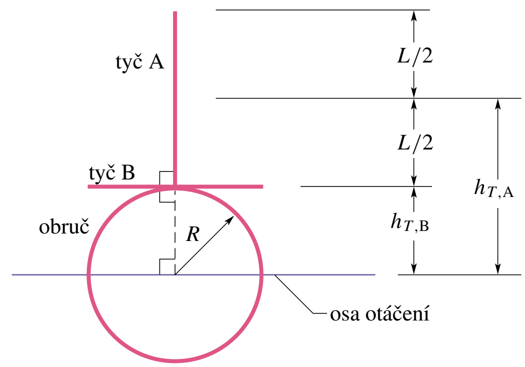
V předchozím výpočtu jsme již vzali v úvahu vztah $L = 2{,}0R$ a symbolem $h_{T,A} = R + \frac{1}{2}L$ jsme označili vzdálenost těžiště tyče A od osy otáčení.

Steinerovy věty použijeme i při výpočtu momentu setrvačnosti tyče B. Vůči své podélné ose má tyč nulový moment setrvačnosti, tj. $I_{T,B} = 0$. Její moment setrvačnosti vůči zadané ose otáčení je tedy

$$I_B = I_{T,B} + mh_{T,B}^2 = 0 + mR^2 = mR^2,$$

kde $h_{T,B} = R$ je vzdálenost tyče B od osy otáčení. Moment setrvačnosti I celé konstrukce vzhledem k zadané ose otáčení je součtem momentů setrvačnosti jejích jednotlivých částí, tj.

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{prstenec}} + I_A + I_B = \tfrac{1}{2}mR^2 + 4{,}33mR^2 + mR^2 = \\ &= 5{,}83mR^2 \doteq 5{,}8mR^2. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$



Obr. 11.20 Příklad 11.14. Tuhá konstrukce tvořená prstencem a dvěma tyčemi se může otáčet kolem vodorovné osy.

(b) Předpokládejme, že konstrukce je ve výchozí klidové poloze znázorněné na obr. 11.20. Tato poloha není stabilní. Po uvolnění se tedy konstrukce začne roztáčet vlivem nenulového momentu tíhové síly. Určete její úhlovou rychlost ω v okamžiku, kdy prochází dolní rovnovážnou polohou.

ŘEŠENÍ: Ve výchozí poloze leží těžiště konstrukce ve vzdálenosti y_T nad osou otáčení. Podle rov. (9.5) je

$$y_T = \frac{m(0) + mR + m(R + \frac{1}{2}L)}{3m} = R.$$

Po uvolnění se konstrukce začne otáčet kolem zadané pevné osy a její těžiště klesá. V okamžiku, kdy konstrukce dosáhne rovnovážné polohy, je její těžiště *pod* osou otáčení, opět ve vzdálenosti y_T. Jeho posunutí je tedy $\Delta y_T = -2R$. Odpovídající pokles tíhové potenciální energie soustavy konstrukce + Země je kompenzován přírůstkem kinetické energie otáčivého pohybu konstrukce. Změnu potenciální energie ΔE_p vypočteme jako součin velikosti tíhové síly působící na konstrukci ($3mg$, celková hmotnost konstrukce je $3m$) a svislé složky posunutí jejího těžiště Δy_T:

$$\Delta E_\mathrm{p} = 3mg\Delta y_T = 3mg(-2R) = -6mgR.$$

Odpovídající změna kinetické energie je podle rov. (11.25)

$$\Delta E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 - 0 = \tfrac{1}{2}I\omega^2.$$

Ze zákona zachování mechanické energie, zapsaného ve tvaru

$$E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = 0,$$

dostaneme

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 - 6mgR = 0.$$

Dosadíme $I = 5{,}83mR^2$ a vyjádříme ze získané rovnice úhlovou rychlost ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{12g}{5{,}83R}} = \sqrt{\frac{12(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})}{5{,}83(0{,}15\,\mathrm{m})}} = $$

$$= 12\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Úhlová poloha

Pro usnadnění popisu otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy (tzv. **osy otáčení**) zavádíme **vztažnou přímku** kolmou k ose otáčení, kterou pevně spojíme s otáčejícím se tělesem. Měříme **úhlovou polohu** θ této přímky vzhledem ke zvolenému směru. Je-li veličina θ vyjádřena v radiánech, platí

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\theta \text{ je v rad}), \qquad (11.1)$$

kde s je délka oblouku kruhové trajektorie s poloměrem r a středovým úhlem θ. Jednotka 1 rad souvisí s úhlovými jednotkami 1° a 1 otáčka (1 ot) vztahem

$$1\,\text{ot} = 360^\circ = 2\pi\,\text{rad}. \qquad (11.2)$$

Otočení

Změna úhlové polohy otáčejícího se tělesa z výchozí hodnoty θ_1 na výslednou hodnotu θ_2 určuje jeho **otočení**

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \qquad (11.4)$$

Hodnota $\Delta\theta$ je kladná, otáčí-li se těleso v kladném směru, tj. proti směru otáčení hodinových ručiček, záporná je v opačném případě.

Úhlová rychlost

Podíl otočení tělesa $\Delta\theta$ a délky Δt časového intervalu, během něhož k tomuto otočení došlo, představuje **průměrnou úhlovou rychlost** tělesa v daném intervalu

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \qquad (11.5)$$

Okamžitá úhlová rychlost tělesa je definována vztahem

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \qquad (11.6)$$

Veličiny $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ a $\boldsymbol{\omega}$ definují vektory rovnoběžné s osou otáčení, jejichž orientace je dána **pravidlem pravé ruky**, znázorněným na obr. 11.5. Vzhledem k tomu, že jejich směr je pevně zadán (směr osy otáčení), stačí k jejich vyjádření jen číselná hodnota udávající jejich velikost, opatřená kladným, resp. záporným znaménkem, otáčí-li se těleso ve směru kladném (proti směru otáčení hodinových ručiček), či záporném (ve směru otáčení hodinových ručiček).

Úhlové zrychlení

Podíl změny úhlové rychlosti tělesa z hodnoty $\boldsymbol{\omega}_1$ na hodnotu $\boldsymbol{\omega}_2$ a délky $\Delta t = t_2 - t_1$ časového intervalu, v němž tato změna proběhla, definuje **průměrné úhlové zrychlení** tělesa $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ v daném intervalu:

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}. \qquad (11.7)$$

Okamžité úhlové zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$ tělesa je definováno vztahem

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}. \qquad (11.8)$$

Veličiny $\boldsymbol{\varepsilon}$ a $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ jsou vektorové.

Vztahy pro otáčivý pohyb s konstantním úhlovým zrychlením

Otáčení s konstantním úhlovým zrychlením ($\boldsymbol{\varepsilon} = \text{konst}$) je důležitým speciálním případem otáčivého pohybu. Je popsáno následujícími rovnicemi, které shrnuje také tab. 11.1:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \qquad (11.9)$$

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2, \qquad (11.10)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\theta, \qquad (11.11)$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t, \qquad (11.12)$$

$$\theta = \omega t - \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2. \qquad (11.13)$$

Vztah mezi obvodovými a úhlovými veličinami

Každá částice tuhého tělesa, které se otáčí kolem pevné osy, se pohybuje po kružnici, jejíž poloměr je roven vzdálenosti částice od osy otáčení. Při otočení tělesa o úhel θ opíše částice kruhový oblouk o délce

$$s = \theta r, \tag{11.15}$$

kde θ je v rad.

Vektor rychlosti částice $\boldsymbol{v}$ je tečný k její kruhové trajektorii. Jeho velikost (tzv. obvodová rychlost) je

$$v = \omega r, \tag{11.16}$$

kde ω je úhlová rychlost tělesa vyjádřená v rad/s.

Vektor zrychlení částice $\boldsymbol{a}$ je určen *tečnou* a *normálovou* složkou, které odpovídají jeho rozkladu do tečného a normálového směru k trajektorii. Tečnou složku lze zapsat ve tvaru

$$a_t = \varepsilon r, \tag{11.20}$$

kde ε je úhlové zrychlení tělesa vyjádřené v rad/s^2. Normálová složka je dána vztahem

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.21}$$

Pohybuje-li se částice po své kruhové trajektorii rovnoměrně, je její pohyb periodický s periodou

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.17, 11.18}$$

Kinetická energie otáčivého pohybu a moment setrvačnosti

Tuhé těleso otáčející se kolem pevné osy má kinetickou energii

$$E_k = \tfrac{1}{2} I \omega^2 \quad (\omega \text{ je v rad/s}), \tag{11.25}$$

kde I je **moment setrvačnosti** tělesa vzhledem k ose otáčení. Pro soustavu částic (těleso s diskrétním rozložením hmoty) je definován vztahem

$$I = \sum m_i r_i^2 \tag{11.24}$$

a pro těleso se spojitě rozloženou hmotou vztahem

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m. \tag{11.26}$$

Symboly r_i, resp. r v těchto vztazích představují vzdálenost i-té částice, resp. elementu tělesa od osy otáčení.

Steinerova věta

Steinerova věta popisuje souvislost mezi momentem setrvačnosti I tělesa vzhledem k libovolné ose otáčení a momentem setrvačnosti I_T téhož tělesa vzhledem k rovnoběžné ose vedené jeho těžištěm:

$$I = I_T + mh^2, \tag{11.27}$$

kde h je vzdálenost obou os.

Moment síly

Moment síly charakterizuje rotační účinek síly $\boldsymbol{F}$, která působí na těleso při jeho otáčení kolem pevné osy. (Předpokládáme, že směr síly $\boldsymbol{F}$ leží v rovině kolmé k ose otáčení.) Označíme-li polohový vektor působiště síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k ose otáčení symbolem $\boldsymbol{r}$, můžeme moment $\boldsymbol{M}$ této síly vzhledem k uvedené ose vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \tag{11.33}$$

(Počátečním bodem vektoru $\boldsymbol{r}$ je průsečík osy otáčení s rovinou k ní kolmou a vedenou působištěm síly $\boldsymbol{F}$.) Moment síly je vektor. Pro jeho velikost platí

$$M = rF_t = r_\perp F = rF \sin\varphi, \tag{11.30, 11.31, 11.32}$$

kde F_t je tečná složka síly $\boldsymbol{F}$, φ je úhel vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$. Symbol $r_\perp$ označuje **rameno síly $\boldsymbol{F}$** vzhledem k ose otáčení, definované jako vzdálenost vektorové přímky síly $\boldsymbol{F}$ od této osy. Rameno síly F_t je označeno r.

Ve zjednodušených situacích, jež v této kapitole uvažujeme, má moment síly vždy směr osy otáčení. Proto jej stačí zadávat číselným údajem představujícím jeho velikost opatřenou vhodným znaménkem. Moment síly M je kladný, je-li podle pravidla pravé ruky orientován v kladném směru, v opačném případě je záporný. Jednotkou momentu síly v soustavě SI je newton-metr (N·m).

Věta o momentu hybnosti

Věta o momentu hybnosti, představující pohybovou rovnici pro otáčivý pohyb, má tvar

$$I\varepsilon = \sum M, \tag{11.36}$$

kde $\sum M$ je výsledný moment všech sil působících na částici nebo tuhé těleso, vztažený k ose otáčení, I je moment setrvačnosti částice nebo tuhého tělesa vzhledem k této ose a ε je úhlové zrychlení otáčivého pohybu částice nebo tuhého tělesa kolem této osy.

Práce a kinetická energie otáčivého pohybu

Vztahy pro výpočet práce a výkonu při otáčivém pohybu jsou podobné odpovídajícím vztahům pro pohyb posuvný:

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M \, \mathrm{d}\theta \tag{11.44}$$

a

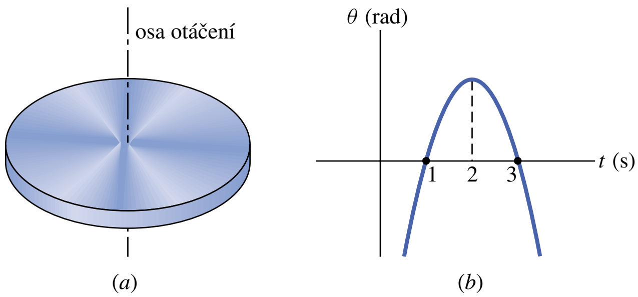
$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega. \tag{11.45}$$

Vztah mezi prací a změnou kinetické energie má pro otáčivý pohyb tvar

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2} I \omega_f^2 - \tfrac{1}{2} I \omega_i^2 = W. \tag{11.41}$$

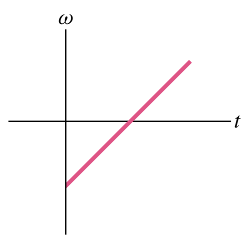
OTÁZKY

1. Na obr. 11.21b je zakreslen graf časové závislosti úhlové polohy otáčejícího se kotouče, znázorněného na obr. 11.21a. Rozhodněte, zda v okamžicích (a) $t = 1$ s, (b) $t = 2$ s a (c) $t = 3$ s je úhlová rychlost kotouče kladná, záporná, nebo nulová. (d) Je jeho úhlové zrychlení kladné, nebo záporné?



Obr. 11.21 Otázka 1

2. Obr. 11.22 představuje graf časové závislosti úhlové rychlosti kotouče na obr. 11.21a. Jaký je (a) počáteční a (b) výsledný směr otáčení kotouče? (c) Je úhlová rychlost kotouče v některém okamžiku nulová? Ve kterém? (d) Rozhodněte, zda je úhlové zrychlení kotouče kladné, nebo záporné. (e) Je konstantní, nebo proměnné?



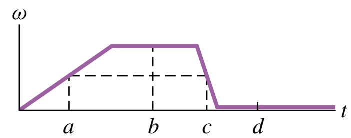
Obr. 11.22
Otázka 2

3. V okamžiku $t = 0$ má kotouč na obr. 11.21a úhlovou polohu $\theta_0 = -2$ rad. V následující tabulce jsou uvedena znaménka počáteční úhlové rychlosti kotouče a jeho stálého úhlového zrychlení ve čtyřech různých situacích: (1) $+, +$; (2) $+, -$; (3) $-, +$ a (4) $-, -$. Rozhodněte, ve kterém z uvedených čtyř případů (a) se kotouč na okamžik zastaví, (b) v některém okamžiku zcela jistě projde úhlovou polohou $\theta = 0$, (c) nikdy neprojde úhlovou polohou $\theta = 0$.

4. Následující dvojice hodnot představují počáteční a výslednou úhlovou rychlost kotouče znázorněného na obr. 11.21a ve čtyřech různých situacích: (a) 2 rad/s, 3 rad/s; (b) -2 rad/s, 3 rad/s; (c) -2 rad/s, -3 rad/s; (d) 2 rad/s, -3 rad/s. Velikost úhlového zrychlení má ve všech případech stejnou hodnotu a je stálé. Seřaďte situace sestupně podle velikosti otočení kotouče.

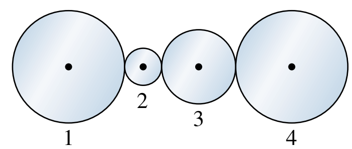
5. Rozhodněte, pro kterou z následujících funkcí, vyjadřujících možnou časovou závislost úhlové rychlosti otáčejícího se tělesa, platí rovnice shrnuté v tab. 11.1: (a) $\omega = 3$; (b) $\omega = 4t^2 + 2t - 6$; (c) $\omega = 3t - 4$; (d) $\omega = 5t^2 - 3$.

6. Obr. 11.23 představuje graf časové závislosti úhlové rychlosti otáčejících se kotouče z obr. 11.21a. Zvolte libovolnou částici na jeho obvodu a seřaďte vyznačené okamžiky a, b, c a d podle velikosti (a) tečné složky jejího zrychlení (obvodového zrychlení), (b) normálové složky jejího zrychlení.



Obr. 11.23 Otázka 6

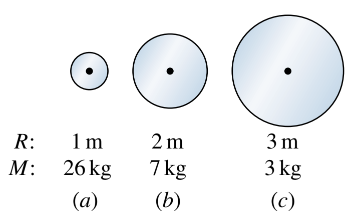
7. Obr. 11.24 znázorňuje převodovku se čtyřmi koly, která se otáčejí bez prokluzu. Poloměry kol 1, 2, 3 a 4 jsou po řadě $3R$, R, $2R$ a $3R$. Kolo 2 je poháněno motorem. Seřaďte kola sestupně (a) podle obvodových rychlostí částic a (b) podle velikosti jejich úhlových rychlostí.



Obr. 11.24 Otázka 7

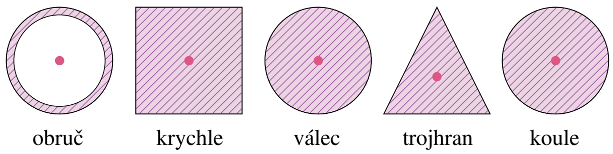
8. Kruhové kotouče A a B mají stejnou hmotnost a tloušťku. Hustota kotouče A je však větší než hustota kotouče B. Rozhodněte, zda je moment setrvačnosti kotouče A vzhledem k jeho ose symetrie (a) ležící v rovině kotouče, (b) kolmé k rovině kotouče větší, menší, nebo stejný jako moment setrvačnosti kotouče B.

9. Na obr. 11.25 jsou znázorněny tři homogenní kotouče se zadanými hmotnostmi a poloměry. Seřaďte je sestupně podle hodnot momentu setrvačnosti vzhledem k ose symetrie kolmé k rovině kotouče.



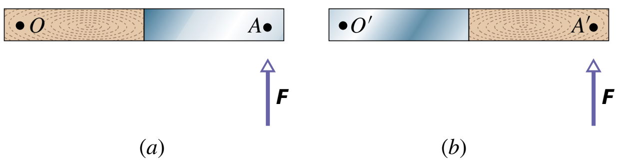
Obr. 11.25 Otázka 9

10. Na obr. 11.26 jsou zakresleny půdorysné průměty pěti těles o stejné hmotnosti. Měřítko nákresu je pro všechna tělesa stejné a také jejich výška je shodná. Tělesa však mohou být dutá a není jisté, zda jsou vyrobena z materiálu stejné tloušťky. Dokážete rozhodnout, které z nich má (a) největší, (b) nejmenší moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené těžištěm kolmo k půdorysnému průmětu?



Obr. 11.26 Otázka 10

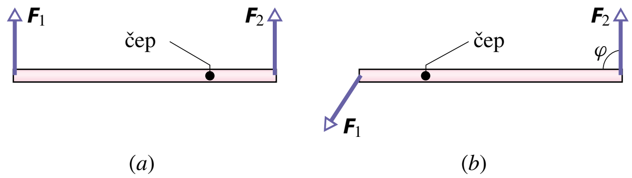
11. Na obr. 11.27a je metrová tyč vyrobená napůl ze dřeva a napůl z oceli. Tyč se může otáčet kolem čepu umístěného v bodě O na konci dřevěné části. V bodě A na konci ocelové části působí síla $\boldsymbol{F}$. Situace na obr. 11.27b je opačná: tyč se otáčí kolem bodu O' na konci ocelové části a síla $\boldsymbol{F}$ působí v bodě A' na konci dřevěné části. Rozhodněte, zda je úhlové zrychlení tyče na obr. 11.27a větší, menší, nebo stejné jako zrychlení tyče na obr. 11.27b.



Obr. 11.27 Otázka 11

12. Obr. 11.28a znázorňuje vodorovnou tyč (nadhled), která se může otáčet kolem osy vedené vyznačeným bodem (čepem) kolmo k nákresu. Na tyč působí dvě síly, avšak tyč je v klidu. Z nějakých důvodů je potřeba úhel mezi tyčí a silou $\boldsymbol{F}_2$ změnit. Jak je nutné upravit velikost síly $\boldsymbol{F}_1$, aby tyč zůstala v klidu?

13. Na obr. 11.28b je v nadhledu znázorněna vodorovná tyč, která se otáčí kolem osy vedené vyznačeným bodem (čepem) kolmo k rovině nákresu. Na opačných koncích působí na tyč vodorovné síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. Síla $\boldsymbol{F}_2$ svírá s tyčí úhel φ. Seřaďte následující hodnoty úhlu φ podle velikosti odpovídajícího úhlového zrychlení tyče: 90°, 70° a 110°.



Obr. 11.28 Otázky 12 a 13

14. Úhlová rychlost kotouče znázorněného na obr. 11.21a se mění vlivem síly, působící na obvodu kotouče. Následující dvojice údajů představují hodnoty počáteční a výsledné úhlové rychlosti kotouče ve čtyřech různých situacích: (a) -2 rad/s, 5 rad/s, (b) 2 rad/s, 5 rad/s, (c) -2 rad/s, -5 rad/s, (d) 2 rad/s, -5 rad/s. Seřaďte tyto případy podle práce, kterou síla vykonala.

15. Připažte, přiložte dlaně ke stehnům a zpevněte zápěstí. Proveďte postupně tyto cviky: (1) Předpažte. (2) Z předpažení upažte a zápěstí udržujte zpevněné. (3) Nakonec připažte. Všimněte si, že vaše dlaň je otevřena směrem dopředu. Opakujte cviky (1) až (3) v pozměněném pořadí (2), (1), (3). Vysvětlete, proč nyní dlaň *nesměřuje* dopředu.

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 11.2 Veličiny charakterizující otáčivý pohyb

1C. (a) Určete středový úhel oblouku o délce 1,80 m a poloměru 1,20 m. Výsledek vyjádřete v radiánech. (b) Vyjádřete tento úhel také ve stupních. (c) Úhel mezi dvěma poloměry kružnice je 0,620 rad. Určete délku oblouku, který je těmito poloměry vymezen, víte-li, že obvod celé kružnice je 2,40 m.

2C. Úhlová poloha setrvačníku závisí na čase vztahem $\theta = at + bt^3 - ct^4$, kde a, b, c jsou konstanty. Vyjádřete (a) úhlovou rychlost a (b) úhlové zrychlení setrvačníku jako funkce času.

3C. Určete velikost úhlové rychlosti (a) sekundové, (b) minutové a (c) hodinové ručičky hodin. Získané hodnoty vyjádřete v jednotkách rad/s.

4C. Slunce je od středu naší Galaxie vzdáleno asi $2{,}3\cdot 10^4$ světelných let a obíhá kolem něj po kružnici obvodovou rychlostí 250 km/s. (a) Jak dlouho trvá Slunci jeden takový oběh? (b) Kolik oběhů již Slunce vykonalo za dobu své existence, tj. za asi $4{,}5\cdot 10^9$ let?

5C. Úhlová poloha θ bodu na obvodu rotujícího kotouče závisí na čase t vztahem $\theta = 4{,}0t - 3{,}0t^2 + t^3$, kde t je v sekundách a θ v radiánech. (a) Vypočtěte úhlovou rychlost kotouče v okamžicích $t = 2{,}0$ s a $t = 4{,}0$ s. (b) Určete jeho průměrné úhlové zrychlení v časovém intervalu od $t = 2{,}0$ s do $t = 4{,}0$ s a (c) okamžité úhlové zrychlení na počátku a na konci tohoto intervalu.

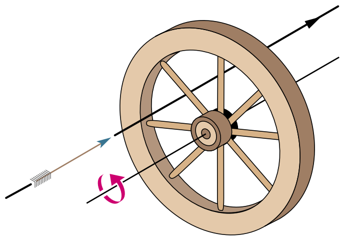
6C. Časová závislost úhlové polohy bodu rotujícího kola je popsána funkcí $\theta = 2 + 4t^2 + 2t^3$, kde θ je v radiánech a t v sekundách. Jaká je (a) úhlová poloha tohoto bodu v okamžiku $t = 0$? (b) Určete úhlovou rychlost kotouče v okamžicích $t = 0$ a (c) $t = 4{,}0$ s. (d) Vypočtěte jeho úhlové zrychlení v okamžiku $t = 2{,}0$ s. (e) Rozhodněte, zda je úhlové zrychlení kotouče stálé.

7Ú. Kolo se otáčí s úhlovým zrychlením ε, jehož časová závislost je popsána funkcí $\varepsilon = 4at^3 - 3bt^2$ (a, b jsou konstanty). Počáteční úhlová rychlost kola je ω_0. Najděte časovou závislost (a) úhlové rychlosti a (b) otočení kola.

8Ú. Dobrý hráč baseballu může hodit míč rychlostí 53 km/h. Míč přitom rotuje úhlovou rychlostí 1 800 ot/min. Kolik otáček během letu vykoná, je-li cíl vzdálen 20 m? (Pro jednoduchost předpokládáme, že let míče je přímočarý.)

9Ú. Při skoku z desetimetrové věže provedl skokan před dopadem na vodní hladinu 2,5 otáčky. Předpokládejte, že svislá složka jeho počáteční rychlosti byla nulová, a vypočtěte úhlovou rychlost jeho otáčivého pohybu.

10Ú. Kolo s osmi loukotěmi na obr. 11.29 má poloměr 30 cm. Je upevněno na pevné ose a otáčí se úhlovou rychlostí 2,5 ot/s. Hoši střílejí z luku ve směru osy kola a snaží se, aby šíp volně prolétl mezerou. Délka šípu je 20 cm. Předpokládáme, že šíp i loukotě kola jsou zanedbatelně tenké. (a) Určete nejmenší možnou rychlost šípu. (b) Zjistěte, zda je rozhodující, do kterého místa mezi osou kola a jeho obvodem šíp míří. V kladném případě určete, kam je třeba mířit.



Obr. 11.29 Úloha 10

ODST. 11.4 Rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb

11C. Údaj na otáčkoměru automobilového motoru (ot/min) rovnoměrně vzrostl během 12 s z 1 200 ot/min na 3 000 ot/min. (a) Určete úhlové zrychlení motoru v ot/min^2. (b) Určete celkový počet otáček motoru v daném časovém intervalu.

12C. Talíř gramofonu se otáčí úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min a zastaví se za 30 s od okamžiku vypnutí motorku. (a) Určete jeho úhlové zrychlení v ot/min^2 za předpokladu, že jeho úhlová rychlost klesá rovnoměrně. (b) Kolik otáček talíř během brzdění vykoná?

13C. Kotouč, který se zpočátku otáčel úhlovou rychlostí 120 rad/s, se začal zpomalovat s konstantním úhlovým zrychlením o velikosti 4,0 rad/s^2. (a) Jak dlouho trvalo, než se kotouč zastavil? (b) O jaký úhel se za tuto dobu otočil?

14C. Na obvodu kladky o průměru 8,0 cm je navinuto lano délky 5,6 m. Kladka se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením 1,5 rad/s^2. (a) Jaké musí být otočení kladky, aby se celé lano rozvinulo? (b) Jak dlouho to bude trvat?

15C. Těžký setrvačník otáčející se kolem osy symetrie vedené jeho středem se začne zpomalovat vlivem tření v ložiscích. Na konci první minuty činí jeho úhlová rychlost 90 % původní hodnoty 250 ot/min. Předpokládáme, že třecí síla je stálá. Určete úhlovou rychlost setrvačníku na konci druhé minuty.

16C. Setrvačník motoru rotuje úhlovou rychlostí 25,0 rad/s. Po vypnutí motoru se začne zpomalovat s konstantním úhlovým zrychlením a zastaví se po uplynutí 20,0 s. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení setrvačníku v rad/s^2, (b) jeho otočení (v rad) od okamžiku vypnutí motoru, (c) celkový počet otáček od okamžiku vypnutí motoru.

17C. Kotouč, který se může otáčet kolem své osy, se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením. Za dobu 5,0 s se otočí o 25 rad. Určete jeho (a) úhlové zrychlení, (b) průměrnou úhlovou rychlost, (c) okamžitou úhlovou rychlost na konci páté sekundy, (d) otočení v intervalu od konce páté do konce desáté sekundy.

18Ú. Kolo se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením a v okamžiku $t = 2{,}0$ s má úhlovou rychlost 5,0 rad/s. Pohyb kola se dále urychluje až do okamžiku $t = 20$ s, kdy dojde k vypnutí pohonu. Určete otočení kola v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 40$ s.

19Ú. V okamžiku $t = 0$ se kolo začne roztáčet z klidu s konstantním úhlovým zrychlením 2,00 rad/s^2. V časovém intervalu délky $\Delta t = 3{,}00$ s, měřeném od okamžiku t do okamžiku $t + \Delta t$, se kolo otočilo o 90,0 rad. (a) Určete okamžik t a (b) odpovídající okamžitou úhlovou rychlost kola.

20Ú. Kolo se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením 3,0 rad/s^2. V časovém intervalu $(t, t + \Delta t)$ délky $\Delta t = 4{,}0$ s se otočilo o úhel 120 rad. Určete okamžik t.

21Ú. Rotující setrvačník se rovnoměrně zpomaluje. Od okamžiku $t = 0$, kdy je jeho úhlová rychlost 1,5 rad/s, do okamžiku zastavení vykoná 40 otáček. Určete (a) dobu brzdění a (b) úhlové zrychlení setrvačníku. (c) Za jakou dobu vykonal setrvačník prvních 20 otáček?

22Ú. V okamžiku $t = 0$ má setrvačník úhlovou rychlost 4,7 rad/s, jeho úhlové zrychlení je $-0{,}25$ rad/s^2 a jeho vztažná přímka má úhlovou polohu $\theta_0 = 0$. (a) Určete krajní úhlovou polohu θ_{max} (v kladném směru) vztažné přímky setrvačníku. Zjistěte, v kterém okamžiku má úhlová poloha vztažné přímky hodnotu (b) $\theta = \frac{1}{2}\theta_{max}$ a (c) $\theta = -10{,}5$ rad. (Připouštíme kladné i záporné hodnoty časové proměnné t.) (d) Nakreslete graf funkce $\theta(t)$ a vyznačte na něm hodnoty vypočtené v částech (a) až (c).

23Ú. Kotouč se roztáčí kolem své osy se stálým úhlovým zrychlením. Jeho počáteční úhlová rychlost je nulová. V jistém okamžiku t_1 je jeho úhlová rychlost $\omega_1 = 10$ ot/s. Po dalších 60 otáčkách je jeho úhlová rychlost $\omega_2 = 15$ ot/s. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení kotouče, (b) dobu $\Delta t = t_2 - t_1$, potřebnou k vykonání zmíněných šedesáti otáček, (c) dobu t_1 potřebnou k získání úhlové rychlosti 10 ot/s a (d) počet otáček kotouče za dobu t_1.

24Ú. Kolo se roztáčí s konstantním úhlovým zrychlením. V určitém okamžiku stiskneme stopky a začneme měřit čas ($t = 0$). Během prvních 15 s od počátku měření vykoná kolo 90 otáček. Jeho úhlová rychlost na konci tohoto intervalu je 10 ot/s. (a) Určete úhlovou rychlost kola v okamžiku, kdy započalo měření. (b) Jaká doba uplynula od okamžiku, kdy se kolo začalo roztáčet z klidu, do začátku měření?

ODST. 11.5 Korespondence obvodových a úhlových veličin

25C. Určete zrychlení $\boldsymbol{a}$ (tečnou i normálovou složku) bodu na obvodu gramofonové desky o průměru 30 cm, která se otáčí úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min.

26C. Gramofonová deska se otáčí úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min. (a) Vyjádřete její úhlovou rychlost v rad/s. Určete obvodovou rychlost bodu desky v místě přenosové jehly (b) na počátku a (c) na konci nahrávky. Vzdálenost jehly od osy talíře gramofonu na začátku, resp. na konci nahrávky je asi 150 mm, resp. 74 mm.

27C. Jaká je úhlová rychlost automobilu, který projíždí kruhovou zatáčku o poloměru 110 m rychlostí 50 km/h?

28C. Setrvačník o průměru 1,20 m vykoná 200 ot/min. (a) Vyjádřete jeho úhlovou rychlost v rad/s. (b) Určete rychlost bodu na jeho obvodu. (c) Při jaké (konstantní) hodnotě úhlového zrychlení (v rad/min^2) by se jeho úhlová rychlost zvýšila na 1 000 ot/min během 60 s? (d) Kolik otáček by setrvačník za tuto dobu vykonal?

29C. Úhlová rychlost bodu na obvodu brusného kotouče o průměru 0,75 m se změnila z 12 m/s na 25 m/s za dobu 6,2 s. Určete průměrné úhlové zrychlení kotouče v tomto časovém intervalu.

30C. Dráha Země kolem Slunce je přibližně kruhová. Určete (a) úhlovou rychlost, (b) rychlost a (c) zrychlení Země vzhledem ke Slunci.

31C. Dne 30. června 1908 v 7 h 14 min ráno došlo na střední Sibiři, v místě o souřadnicích 61° sev. šířky a 102° vých. délky k obrovskému výbuchu, při němž bylo možné pozorovat oslnivý záblesk. Podle náhodného svědka této *tunguzské záhady* „pokryl záblesk obrovskou část oblohy“. Jednalo se pravděpodobně o dopad *kamenného asteroidu* o velikosti asi 140 m. (a) Vezměte v úvahu pouze otáčení Země a vypočtěte, o jakou dobu později by musel asteroid vybuchnout, aby se výbuch odehrál nad Helsinkami, jejichž zeměpisná délka je 25° východně. (Takový výbuch by město úplně zničil.) (b) Kdyby se jednalo o *kovový asteroid*, mohl by dopadnout až na povrch Země. O jakou dobu později by musel asteroid přiletět, aby dopadl do Atlantického oceánu v místě se zeměpisnou délkou 20° západně? (Vzniklá vlna tsunami by v takovém případě vyhladila pobřežní osídlení na obou stranách Atlantiku.)

32C. Astronaut je testován na centrifuze. Centrifuga má poloměr 10 m a během roztáčení je časová závislost její úhlové polohy popsána funkcí $\theta(t) = 0{,}30t^2$, kde θ je v radiánech a t v sekundách. Vypočtěte (a) úhlovou rychlost, (b) obvodovou rychlost, (c) velikost tečné složky zrychlení a (d) velikost normálové složky zrychlení astronauta v okamžiku $t = 5{,}0$ s.

33C. Vypočtěte (a) úhlovou rychlost, (b) normálovou složku zrychlení a (c) tečnou složku zrychlení vesmírné lodi letící obvodovou rychlostí 29 000 km/h po kruhové dráze o poloměru 3 200 km.

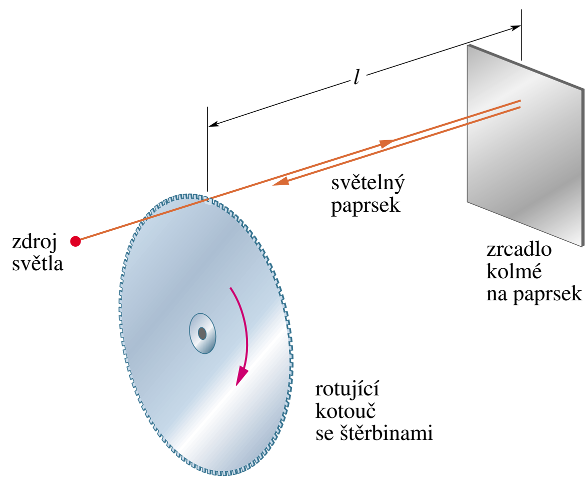
34C. Mince o hmotnosti M leží ve vzdálenosti R od středu talíře gramofonu. Koeficient statického tření mezi mincí a talířem je f_s. Úhlová rychlost talíře se pomalu zvětšuje na hodnotu ω_0, kdy mince z talíře sklouzne. (a) Vyjádřete ω_0 pomocí M, R, g a f_s. (b) Nakreslete přibližně trajektorii mince po jejím sklouznutí z talíře.

35Ú. Setrvačník parního stroje se otáčí konstantní úhlovou rychlostí 150 ot/min. Po uzavření přívodu páry se pohyb setrvačníku začne vlivem tření a odporu prostředí rovnoměrně zpomalovat a za 2,2 h se setrvačník zastaví. (a) Určete úhlové zrychlení setrvačníku v ot/min^2. (b) Kolik otáček ještě vykoná od okamžiku uzavření přívodu páry? V jistém okamžiku se setrvačník otáčí úhlovou rychlostí 75 ot/min. (c) Určete okamžitou hodnotu tečné složky zrychlení částice setrvačníku, která obíhá ve vzdálenosti 50 cm od jeho osy a (d) velikost okamžitého zrychlení této částice.

36Ú. Setrvačník gyroskopu o poloměru 2,83 cm se roztáčí z klidu s úhlovým zrychlením 14,2 rad/s^2 až do okamžiku, kdy dosáhne úhlové rychlosti 2 760 ot/min. (a) Určete tečnou složku zrychlení bodu na obvodu setrvačníku. (b) Jaká je hodnota normálové složky zrychlení v okamžiku, kdy setrvačník dosáhne největší úhlové rychlosti? (c) Jakou dráhu urazí bod na obvodu během roztáčení setrvačníku?

37Ú. Vrtule letadla se otáčí s úhlovou rychlostí 2 000 ot/min, letadlo letí rychlostí 480 km/h vzhledem k zemi. Zjistěte, jakou rychlostí se pohybuje bod na špičce listu vrtule o poloměru 1,5 m (a) vzhledem k letadlu, (b) vzhledem k zemi. Rychlost letadla je rovnoběžná s osou otáčení vrtule.

38Ú. Jedna ze starších metod měření rychlosti světla používala rovnoměrně rotující ozubené kolo (obr. 11.30). Světelný paprsek prošel mezerou mezi zuby kola, odrazil se od zrcadla a dopadl zpět na rotující kolo tak, aby právě prošel následující mezerou. Ozubené kolo o poloměru 5,0 cm mělo na obvodu 500 zubů. Pomocí zrcadla umístěného ve vzdálenosti $l = 500$ m byla naměřena hodnota rychlosti světla $3{,}0\cdot10^5$ km/s. (a) Jaká byla úhlová rychlost kola? (b) Vypočtěte velikost rychlosti bodu na jeho obvodu.

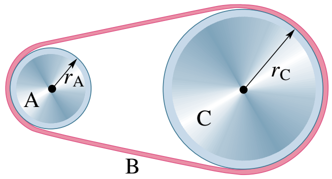


Obr. 11.30 Úloha 38

39Ú. Automobil se rozjíždí z klidu po kruhové dráze o poloměru 30,0 m. Jeho tečné zrychlení má stálou velikost 0,500 m/s^2. (a) Určete zrychlení automobilu v okamžiku $t = 15{,}0$ s po rozjezdu. (b) Jaký úhel svírá v tomto okamžiku vektor zrychlení automobilu s vektorem jeho rychlosti?

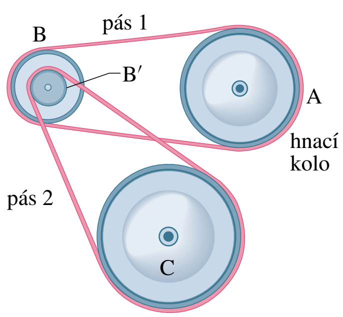
40Ú. Poloha bodu na zemském povrchu je určena zeměpisnou šířkou 40°. Určete úhlovou rychlost oběhu tohoto bodu kolem zemské osy. (b) Určete jeho obvodovou rychlost. (c) Řešte úlohy (a) a (b) pro bod na rovníku.

41Ú. Poloměry kol A a C na obr. 11.31 jsou $r_A = 10$ cm a $r_C = 25$ cm. Kola jsou spřažena pásem B, který po nich neklouže. Úhlová rychlost kola A se rovnoměrně zvětšuje z počáteční nulové hodnoty s úhlovým zrychlením 1,6 rad/s^2. Zjistěte, v kterém okamžiku bude mít kolo C úhlovou rychlost 100 ot/min. (*Tip*: Jestliže pás neklouže, jsou obvodové rychlosti bodů na obvodech kol shodné.)



Obr. 11.31 Úloha 41

42Ú. Na obr. 11.32 jsou znázorněna čtyři kola spojená dvěma pásy. Hnací kolo A má poloměr 15 cm a otáčí se úhlovou rychlostí 10 rad/s. Kolo B o poloměru 10 cm je s kolem A spojeno pásem 1. Kola B′ a B mají společnou osu. Kolo C o poloměru 25 cm je s kolem B′ o poloměru 5 cm spojeno pásem 2. Vypočtěte (a) rychlost bodu na pásu 1, (b) úhlovou rychlost kola B, (c) úhlovou rychlost kola B′, (d) rychlost bodu na pásu 2, (e) úhlovou rychlost kola C. (Použijte návod k úloze 41.)



Obr. 11.32 Úloha 42

43Ú. Talíř gramofonu se otáčí s úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min. Ve vzdálenosti 6,0 cm od jeho osy leží malé tělísko. (a) Vypočtěte zrychlení tělíska za předpokladu, že je vzhledem k talíři v klidu (talíř nepodkluzuje). (b) Určete nejmenší přípustnou hodnotu koeficientu statického tření mezi talířem a tělískem. (c) Předpokládejme, že se talíř rovnoměrně urychloval po dobu 0,25 s, než získal zadanou úhlovou rychlost. Určete nejmenší možnou hodnotu koeficientu statického tření mezi tělískem a talířem, při níž ještě tělísko z talíře během urychlování nesklouzne.

44Ú. **Pulzar** je neutronová hvězda, která se velmi rychle otáčí a vysílá při tom pulzy radiových vln přesně synchronizované se svým otáčivým pohybem. Během jedné otáčky vyšle jeden pulz. Periodu otáčivého pohybu hvězdy je tedy možné snadno zjistit měřením doby mezi dvěma pulzy. Měřením se zjistilo, že perioda otáčení pulzaru v centrální oblasti Krabí mlhoviny (obr. 11.33) je v současné době $T = 0{,}033$ s a pomalu narůstá o $1{,}26\cdot10^{-5}$ s za jeden rok. (a) Vypočtěte úhlové zrychlení pulzaru v rad/s^2. (b) Za kolik let se pulzar zastaví? (c) Pulzar vznikl výbuchem supernovy v roce 1054 n. l. Jaká byla perioda jeho rotace v době vzniku? (Při řešení úlohy předpokládáme, že úhlové zrychlení pulzaru je konstantní.)

Obr. 11.33 Úloha 44. Krabí mlhovina vznikla výbuchem hvězdy, který byl pozorován v roce 1054 n. l. Na obrázku jsou patrny plynné zbytky výbuchu. Kromě nich tehdy vznikla i rotující neutronová hvězda, jejíž poloměr je pouhých 30 km.

ODST. 11.6 Kinetická energie tělesa při otáčivém pohybu

45C. Vypočtěte moment setrvačnosti kola, které se otáčí úhlovou rychlostí 602 ot/min a má kinetickou energii 24 400 J.

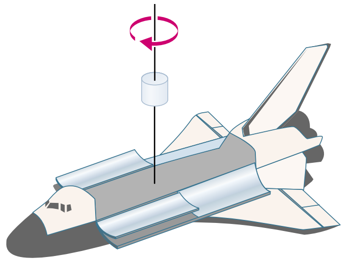
46Ú. Celková hmotnost molekuly kyslíku O_2 je $5{,}30\cdot10^{-26}$ kg. Její moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé ke spojnici atomů a vedené jejím středem je $1{,}94\cdot10^{-46}$ kg·m^2. Předpokládejme, že molekula plynného kyslíku má rychlost 500 m/s a kinetická energie jejího otáčivého pohybu je rovna dvěma třetinám kinetické energie pohybu posuvného. Určete úhlovou rychlost molekuly.

ODST. 11.7 Výpočet momentu setrvačnosti

47C. Vypočtěte hodnoty kinetické energie dvou homogenních plných válců, které rotují kolem svých os symetrie. Válce mají stejnou hmotnost 1,25 kg a otáčejí se se stejnou úhlovou rychlostí 235 rad/s. První z nich má poloměr 0,25 m a druhý 0,75 m.

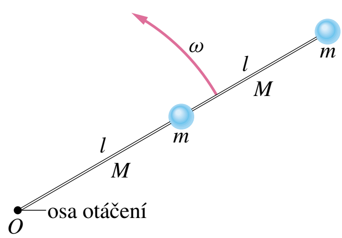
48C. Molekula má moment setrvačnosti 14 000 u·pm^2 a otáčí se s úhlovou rychlostí $4{,}3\cdot10^{12}$ rad/s. (a) Vyjádřete moment setrvačnosti molekuly v kg·m^2. (b) Vypočtěte kinetickou energii jejího rotačního pohybu a vyjádřete ji v elektronvoltech.

49C. Družice o hmotnosti 1 210 kg má tvar plného válce o průměru 1,21 m a délce 1,75 m. Před vypuštěním z nákladového prostoru raketoplánu byla družice roztočena úhlovou rychlostí 1,52 ot/s kolem osy válce (obr. 11.34). Vypočtěte její moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení a (b) její kinetickou energii spojenou s otáčivým pohybem.



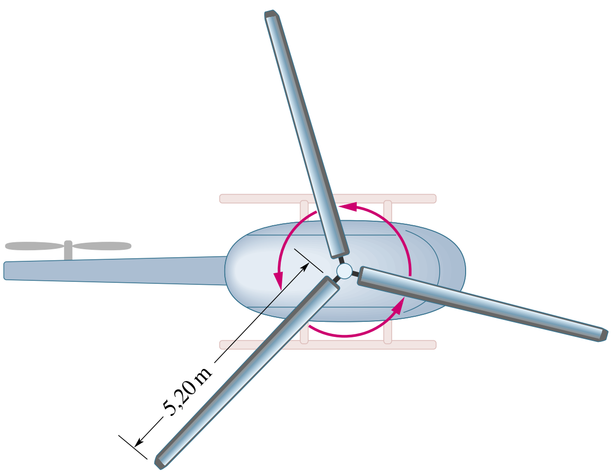
Obr. 11.34 Cvičení 49

50C. Dvě částice se stejnými hmotnostmi m jsou spolu spojeny a připevněny k ose otáčení O dvěma tenkými tyčemi o délkách l a hmotnostech M (obr. 11.35). Soustava se otáčí úhlovou rychlostí ω. Odvoďte výraz pro (a) moment setrvačnosti soustavy vzhledem k ose O a (b) kinetickou energii jejího otáčivého pohybu vzhledem k této ose.



Obr. 11.35 Cvičení 50

51C. Každý z trojice listů rotoru vrtulníku na obr. 11.36 má délku 5,20 m a hmotnost 240 kg. Rotor se otáčí úhlovou rychlostí 350 ot/min. (a) Jaký je jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení? (List lze pokládat za tenkou tyč.) (b) Jaká je kinetická energie otáčivého pohybu rotoru?



Obr. 11.36 Cvičení 51 a úloha 85

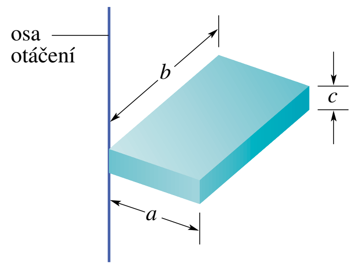
52C. Za předpokladu, že je Země homogenní koule, vypočtěte (a) její moment setrvačnosti a (b) její kinetickou energii spojenou s otáčivým pohybem. (c) Představme si, že by bylo možné tuto energii nějak využít. Jak dlouho by Země mohla dodávat výkon 1,0 kW každému člověku na planetě? (Počet lidí na Zemi je asi $6{,}4\cdot 10^9$.)

53C. Vypočtěte moment setrvačnosti tyčového metru o hmotnosti 0,56 kg vzhledem k ose vedené značkou 20 cm kolmo k tyči. (Tyč lze pokládat za velmi tenkou.)

54Ú. Ukažte, že osa rotace, vůči níž má tuhé těleso nejmenší možnou hodnotu momentu setrvačnosti, musí procházet jeho těžištěm.

55Ú. Odvoďte výraz pro moment setrvačnosti prstence o hmotnosti m a poloměru R, uvedený v tab. 11.2a.

56Ú. Na obr. 11.37 je homogenní tuhý kvádr o hmotnosti m a rozměrech a, b a c. Vypočtěte jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose splývající s jeho hranou.



Obr. 11.37 Úloha 56

57Ú. Následující trojice údajů představují hmotnost a souřadnice každé ze čtyř částic v rovině xy: 50 g, $x = 2{,}0$ cm, $y = 2{,}0$ cm; 25 g, $x = 0$, $y = 4{,}0$ cm; 25 g, $x = -3{,}0$ cm, $y = -3{,}0$ cm; 30 g, $x = -2{,}0$ cm, $y = 4{,}0$ cm. Vypočtěte moment setrvačnosti této soustavy částic (a) vzhledem k ose x, (b) vzhledem k ose y, (c) vzhledem k ose z. Momenty setrvačnosti označte I_x, I_y a I_z. (d) Vyjádřete I_z pomocí I_x a I_y.

58Ú. (a) Ukažte, že moment setrvačnosti plného válce o hmotnosti m a poloměru R vzhledem k jeho rotační ose symetrie je roven momentu setrvačnosti tenkého prstence o hmotnosti m a poloměru $R/\sqrt{2}$ vzhledem k jeho rotační ose symetrie. (b) Ukažte, že moment setrvačnosti libovolného tělesa o hmotnosti m vzhledem k libovolné ose je roven momentu setrvačnosti *ekvivalentního prstence* o stejné hmotnosti vzhledem k jeho rotační ose symetrie, má-li prstenec poloměr

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}.$$

Poloměr ekvivalentního prstence se nazývá *gyrační poloměr* tělesa.

59Ú. Některé dodávkové automobily jsou poháněny setrvačníkem. Setrvačník má tvar plného homogenního válce o hmotnosti 500 kg a poloměru 1,0 m. Elektrickým motorem se setrvačník roztočí na úhlovou rychlost 200π rad/s. (a) Jak velká kinetická energie je „uložena" v roztočeném setrvačníku? (b) Průměrný příkon takového automobilu je 8,0 kW. Jak dlouho může automobil jezdit, než se setrvačník zastaví?

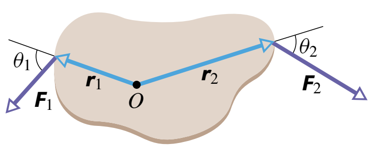
ODST. 11.8 Moment síly

60C. Délka ramene pedálu jízdního kola je 0,152 m. Chodidlo tlačí na pedál svislou silou o velikosti 111 N. Určete velikost momentu této síly vzhledem k ložisku, svírá-li rameno pedálu se svislým směrem úhel (a) 30°, (b) 90° a (c) 180°.

61C. Míč o hmotnosti 0,75 kg je připevněn k jednomu konci tyče o délce 1,25 m a zanedbatelné hmotnosti. Druhý konec tyče se může otáčet kolem vodorovného čepu. Určete velikost momentu tíhové síly vzhledem k čepu při vychýlení takto vzniklého kyvadla z rovnovážné polohy o úhel 30°.

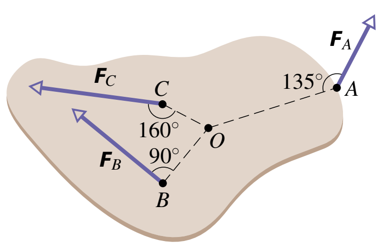
62C. Cyklista o hmotnosti 70 kg tlačí pedál celou svou vahou v okamžiku, kdy se pedál pohybuje směrem dolů. Pedál opisuje kruhovou dráhu o poloměru 0,40 m. Vypočtěte maximální velikost momentu tlakové síly, kterou cyklista na pedál působí.

63Ú. Na těleso na obr. 11.38, které se může otáčet kolem bodu O, působí dvě síly. (a) Odvoďte výraz pro velikost výsledného momentu těchto sil vzhledem k bodu O a (b) vyčíslete jej pro hodnoty $r_1 = 1{,}30$ m, $r_2 = 2{,}15$ m, $F_1 = 4{,}20$ N, $F_2 = 4{,}90$ N, $\theta_1 = 75{,}0°$ a $\theta_2 = 60{,}0°$.



Obr. 11.38 Úloha 63

64Ú. Těleso na obr. 11.39 se může otáčet kolem bodu O. Působí na ně tři síly, které jsou v obrázku rovněž vyznačeny. Síla $\boldsymbol{F}_A$ má velikost $F_A = 10$ N a působí v bodě A, který leží ve vzdálenosti 8,0 m od bodu O. Síla $\boldsymbol{F}_B$ má velikost $F_B = 16$ N a působí v bodě B vzdáleném 4,0 m od bodu O. Síla $\boldsymbol{F}_C$ má velikost $F_C = 19$ N a působí v bodě C, jehož vzdálenost od bodu O je 3,0 m. Vypočtěte celkový moment všech těchto sil vzhledem k bodu O.



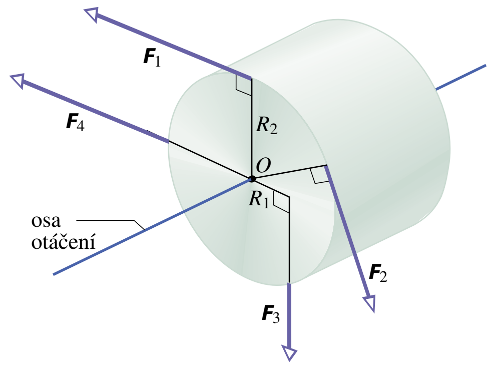
Obr. 11.39 Úloha 64

ODST. 11.9 Věta o momentu hybnosti

65C. Moment síly, která roztáčí kolo, má velikost 32 N·m. Úhlové zrychlení kola je 25,0 rad/s^2. Vypočtěte moment setrvačnosti kola.

66C. Při výskoku z prkna zvětší skokan do vody svou úhlovou rychlost z počáteční nulové hodnoty na hodnotu 6,20 rad/s. Výskok trvá 220 ms. Moment setrvačnosti skokana je 12,0 kg·m^2. (a) Vypočtěte úhlové zrychlení při výskoku a (b) výsledný moment vnějších sil, které na skokana při výskoku působily.

67C. Válec o hmotnosti 2,0 kg se může otáčet kolem osy vedené bodem O (obr. 11.40). Na válec působí síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ a $\boldsymbol{F}_4$, které jsou v obrázku rovněž vyznačeny. Jejich velikosti jsou $F_1 = 6{,}0$ N, $F_2 = 4{,}0$ N, $F_3 = 2{,}0$ N a $F_4 = 5{,}0$ N a jejich působiště leží ve vzdálenostech $R_1 = 5{,}0$ cm a $R_2 = 12$ cm od osy otáčení. Vypočtěte velikost úhlového zrychlení válce a určete jeho směr. (Směr působících sil *vzhledem k válci* se během jeho pohybu nemění.)



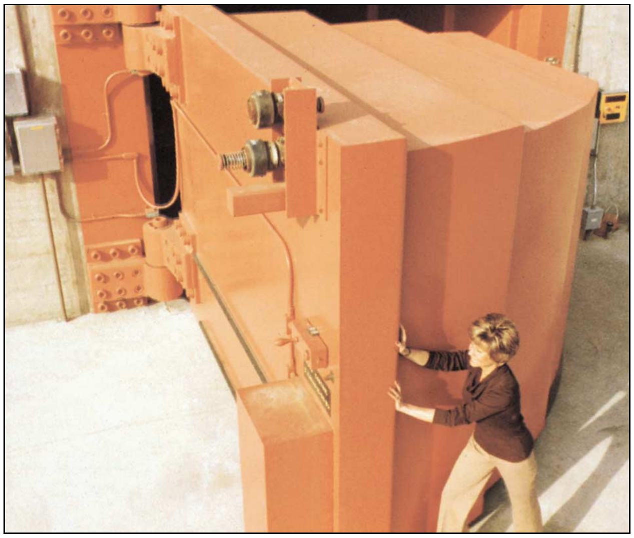
Obr. 11.40 Cvičení 67

68C. Těleso je tvořeno částicí o hmotnosti 1,30 kg, která je připevněna k jednomu konci tyče o délce 0,780 m a zanedbatelné hmotnosti. Otáčí se úhlovou rychlostí 5 010 ot/min kolem svislé osy vedené druhým koncem tyče. (a) Vypočtěte moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení. (b) Na částici působí proti směru jejího pohybu odporová síla prostředí o velikosti $2{,}30\cdot10^{-2}$ N. Jaký musí být moment další síly, kterou musíme na těleso působit, aby jeho otáčivý pohyb byl rovnoměrný?

69C. Tenká kulová slupka má poloměr 1,90 m. Moment síly, která na ni působí, má velikost 960 N·m. Slupka se otáčí kolem osy vedené jejím středem s úhlovým zrychlením 6,20 rad/s^2. Vypočtěte (a) moment setrvačnosti a (b) hmotnost slupky.

70Ú. Na obr. 11.41 vidíme masivní stínicí dveře pokusného neutronového reaktoru v Lawrence Livermore Laboratory. (Jsou to nejtěžší zavěšené dveře na světě.) Hmotnost dveří je 44 000 kg a jejich moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jejich závěsy je $8{,}7\cdot10^4$ kg·m^2. Šířka přední stěny dveří je 2,4 m. Jak velkou stálou silou kolmou k přední stěně dveří je třeba působit u jejich vnějšího okraje, abychom jimi dokázali za 30 s otočit o 90°? (Dveře jsou zpočátku v klidu, vliv třecích sil pokládáme za zanedbatelný.)

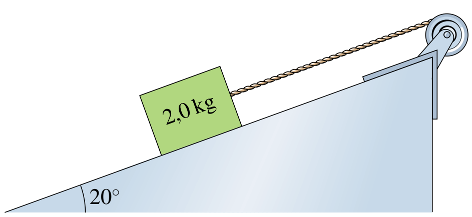
71Ú. Na kladku o poloměru 10 cm působí v bodě na jejím obvodu tečná síla, jejíž velikost je časově proměnná a je popsána funkcí $F = 0{,}50t + 0{,}30t^2$ (F je newtonech a t v sekundách). Moment setrvačnosti kladky vzhledem k její ose je



Obr. 11.41 Úloha 70

$1{,}0{\cdot}10^{-3}$ kg·m^2. Kladka je zpočátku v klidu. Vypočtěte (a) její úhlové zrychlení a (b) úhlovou rychlost v okamžiku $t = 3{,}0$ s.

72Ú. Kolo o poloměru 0,20 m se může otáčet bez tření kolem vodorovné osy. Po obvodu kola je navinuto vlákno zanedbatelné hmotnosti. Druhý konec vlákna je připevněn k tělesu o hmotnosti 2,0 kg, které může klouzat bez tření po nakloněné rovině o úhlu sklonu 20° (obr. 11.42). Těleso klesá po nakloněné rovině se zrychlením 2,0 m/s^2. Vypočtěte moment setrvačnosti kola vzhledem k jeho ose otáčení.

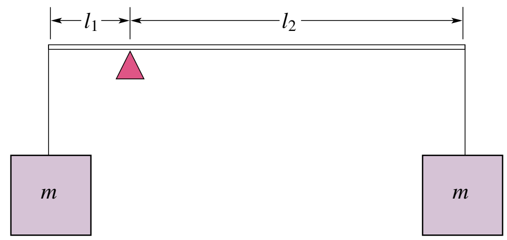


Obr. 11.42 Úloha 72

73Ú. Dvě homogenní plné koule mají stejnou hmotnost 1,65 kg s poloměry 0,226 m a 0,854 m. (a) Pro každou z nich vypočtěte moment síly, která kouli roztočí za 15,5 s z klidu na úhlovou rychlost 317 rad/s. Koule se může otáčet kolem osy vedené jejím středem. (b) Pro každou kouli zjistěte, jak velká tečná síla musí působit v bodě na rovníku, aby její moment vzhledem k ose otáčení měl požadovanou velikost.

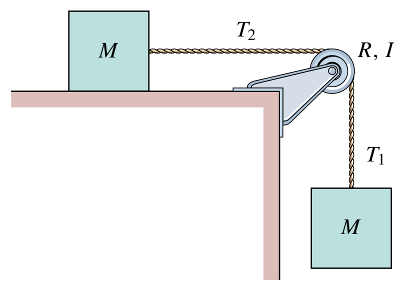
74Ú. Tělíska použitá v Atwoodově padostroji na obr. 5.23 mají hmotnosti 500 g a 460 g. Kladka o poloměru 5,00 cm se může otáčet kolem vodorovné osy bez tření. Po uvolnění soustavy pokleslo těžší těleso o 75,0 cm za dobu 5,00 s (vlákno v kladce neprokluzuje). (a) Určete zrychlení těles a tahovou sílu vlákna působící na (b) těžší a (c) lehčí těleso. (d) Vypočtěte úhlové zrychlení kladky a (e) její moment setrvačnosti.

75Ú. Na obr. 11.43 jsou znázorněna dvě tělesa o stejných hmotnostech m, zavěšená na koncích tuhé tyče o délce $l_1 + l_2$, kde $l_1 = 20$ cm a $l_2 = 80$ cm. Hmotnost tyče je zanedbatelná. Tyč je podepřena břitem podle obrázku. Držíme ji nejprve ve vodorovné poloze a pak uvolníme. Vypočtěte zrychlení těles bezprostředně po uvolnění.



Obr. 11.43 Úloha 75

76Ú. Dvě stejná tělesa o hmotnosti M jsou spojena vláknem zanedbatelné hmotnosti, které je vedeno přes kladku o poloměru R a momentu setrvačnosti I (obr. 11.44). Vlákno v kladce neprokluzuje, kladka se může otáčet bez tření. Předem nevíme, zda lze tření mezi tělesem a vodorovnou podložkou zanedbat. Po uvolnění soustavy se tělesa pohybovala se zrychlením o stálé velikosti. Za dobu t se kladka otočila o úhel θ. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení kladky, (b) zrychlení těles, (c) tahovou sílu v horní a dolní části vlákna. Výsledky vyjádřete pomocí veličin M, I, R θ, g a t.



Obr. 11.44 Úloha 76

ODST. 11.10 Práce a kinetická energie při otáčivém pohybu

77C. (a) Pro soustavu na obr. 11.18 jsou zadány tyto hodnoty: $R = 12$ cm, $M = 400$ g a $m = 50$ g. Určete rychlost tělesa v okamžiku, kdy pokleslo z počáteční klidové polohy o 50 cm. Úlohu řešte pomocí zákona zachování mechanické energie. (b) Zopakujte výpočet pro $R = 5{,}0$ cm.

78C. Kliková hřídel v automobilovém motoru přenáší při úhlové rychlosti 1 800 ot/min výkon 100 HP = 74,6 kW. Určete odpovídající silový moment.

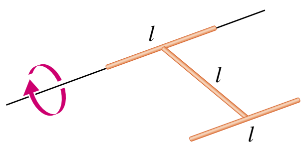
79C. Tenký prstenec o hmotnosti 32,0 kg a poloměru 1,20 m má v jistém okamžiku $t = 0$ úhlovou rychlostí 280 ot/min. Během dalších 15,0 s se prstenec zastaví. (a) Vypočtěte práci brzdných sil a (b) odpovídající výkon.

80C. Tenká tyč o délce l a hmotnosti m je na jednom konci volně zavěšena. Po vychýlení kmitá kolem rovnovážné polohy jako kyvadlo, rovnovážnou polohou prochází úhlovou rychlostí ω. (a) Vypočtěte kinetickou energii tyče při průchodu rovnovážnou polohou. (b) Určete výšku těžiště kyvadla v bodě obratu nad jeho rovnovážnou polohou. Tření a odpor vzduchu zanedbejte.

81Ú. Představme si, že bychom měli za jeden den roztočit Zemi z klidu na její současnou úhlovou rychlost. Vypočtěte (a) potřebný moment působící síly, (b) dodanou energii, (c) průměrný výkon síly při tomto hypotetickém ději.

82Ú. Tyčový metr je spodním koncem opřen o podlahu a jeho horní konec přidržujeme. V jistém okamžiku horní konec uvolníme a tyčový metr padá. Vypočtěte rychlost jeho volného konce v okamžiku dopadu na podlahu za předpokladu, že spodní konec během pádu nepodklouzl. (*Tip*: Použijte zákon zachování mechanické energie a považujte tyč za velmi tenkou.)

83Ú. Tuhé těleso se skládá ze tří stejných tenkých tyčí o délce l spojených do tvaru písmene H (obr. 11.45). Těleso se může otáčet kolem vodorovné osy, která prochází jednou nožkou písmene H. Těleso uvolníme v poloze, kdy je rovina písmene H vodorovná. Vypočtěte jeho úhlovou rychlost v okamžiku, kdy je rovina písmene H svislá.

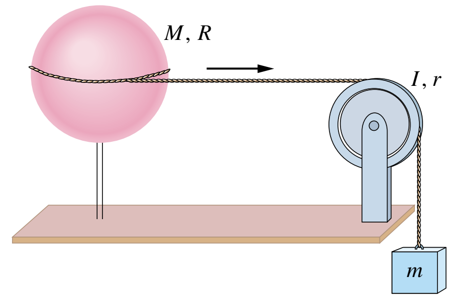


Obr. 11.45 Úloha 83

84Ú. Homogenní válec o poloměru 10 cm a hmotnosti 20 kg se může volně otáčet kolem vodorovné osy, rovnoběžné s jeho rotační osou symetrie. Vzdálenost obou os je 5,0 cm. (a) Vypočtěte moment setrvačnosti válce vzhledem k zadané ose otáčení. (b) Válec uvolníme z klidové polohy, v níž byly osa otáčení a osa symetrie válce ve stejné výšce. Jaká je úhlová rychlost válce v okamžiku, kdy prochází rovnovážnou polohou? (*Tip*: Použijte zákon zachování mechanické energie.)

85Ú. Homogenní list vrtulníkového rotoru na obr. 11.36 má délku 7,80 m a hmotnost 110 kg. (a) Jakou silou působí list na svorník, jímž je připevněn k ose rotoru, otáčí-li se úhlovou rychlostí 320 ot/min? (*Tip*: Při řešení této úlohy lze list nahradit částicí umístěnou v jeho těžišti. Přemýšlejte proč.) (b) Vypočtěte moment síly, kterou musí působit motor vrtulníku na rotor, aby získal úhlovou rychlost 320 ot/min za dobu 6,7 s při roztáčení z klidu. Zanedbejte odpor vzduchu. (V tomto případě již nelze nahradit rotorový list částicí umístěnou do jeho těžiště. Proč? List nahraďte tenkou homogenní tyčí.) (c) Jakou práci vykonal motor při roztočení rotoru vrtulníku z klidu na výslednou úhlovou rychlost?

86Ú. Homogenní kulová slupka o hmotnosti M a poloměru R se otáčí bez tření kolem svislé osy (obr. 11.46). Vlákno zanedbatelné hmotnosti je navinuto podél jejího rovníku, je vedeno přes kladku s momentem setrvačnosti I a na jeho druhém konci je připevněno malé tělísko o hmotnosti m. Tření v ose kladky zanedbáme a předpokládáme, že vlákno po povrchu kulové slupky neklouže. V určitém okamžiku soustavu uvolníme. Určete rychlost padajícího tělíska v okamžiku, kdy urazilo dráhu h. Použijte zákon zachování mechanické energie.

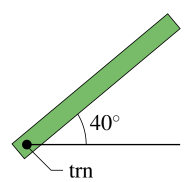


Obr. 11.46 Úloha 86

87Ú. Vysoký komín válcového tvaru padá tak, že se otáčí kolem svého konce uchyceného u země. Nahraďte komín tenkou tyčí o délce h a vyjádřete (a) normálovou a (b) tečnou složku zrychlení částice na vrcholu komína jako funkci úhlu θ, který komín svírá se svislým směrem. (c) Určete hodnotu θ, pro kterou má zrychlení této částice velikost g.

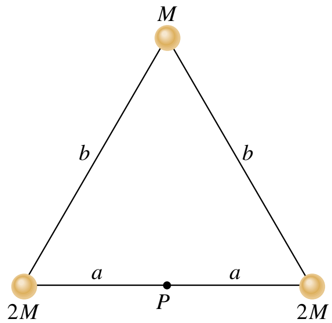
88Ú. Na obou koncích tenké ocelové tyče o délce 1,20 m a hmotnosti 6,40 kg jsou upevněny malé míčky o hmotnostech 1,06 kg. Tyč se otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím středem. V jistém okamžiku měla tyč úhlovou rychlost 39,0 ot/s. Za dalších 32,0 s se vlivem třecích sil zastavila. Předpokládejme, že moment třecích sil je konstantní. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení tyče, (b) moment třecích sil, (c) celkovou ztrátu mechanické energie vlivem sil tření a (d) počet otáček, které tyč vykonala od začátku měření do okamžiku zastavení. (e) Předpokládejme nyní, že moment třecích sil není konstantní. Kterou z veličin (a), (b), (c), nebo (d) je přesto možné vypočítat bez dodatečné informace? Uveďte její hodnotu.

89Ú. Homogenní tyč o hmotnosti 1,5 kg má délku 2,0 m (obrázek 11.47) a může se otáčet bez tření kolem vodorovného čepu umístěného na jednom jejím konci. Tyč uvedeme do výchozí klidové polohy, v níž svírá s vodorovným směrem úhel 40°, a uvolníme. (a) Určete úhlové zrychlení tyče v okamžiku jejího uvolnění. Moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose vedené čepem je 2,0 kg·m^2. (b) Pomocí zákona zachování mechanické energie určete úhlovou rychlost tyče v okamžiku, kdy prochází vodorovnou polohou.



Obr. 11.47 Úloha 89

90Ú. Tuhé těleso na obr. 11.48 se skládá ze tří částic spojených tyčemi zanedbatelné hmotnosti. Těleso se otáčí kolem osy vedené bodem P kolmo k rovině obrázku. Pro hodnoty $M = 0{,}40$ kg, $a = 30$ cm a $b = 50$ cm vypočtěte práci nutnou k roztočení tělesa z klidu na úhlovou rychlost 5,0 rad/s.



Obr. 11.48 Úloha 90

91Ú★. Automobil je vybaven setrvačníkem pro akumulaci energie ve tvaru homogenního kotouče o průměru 1,1 m. Setrvačník je spojen převody s koly automobilu tak, že jeho úhlová rychlost je 240 ot/s při rychlosti automobilu 80 km/h. Celková hmotnost automobilu je 800 kg, setrvačník váží 200 N. Automobil je zpočátku v klidu a začne sjíždět bez motoru po svahu délky 1 500 m a úhlem sklonu 5°. Třecí síly a moment setrvačnosti kol automobilu zanedbejte a vypočtěte (a) rychlost automobilu, (b) úhlové zrychlení setrvačníku a (c) výkon dodávaný setrvačníku na konci svahu.

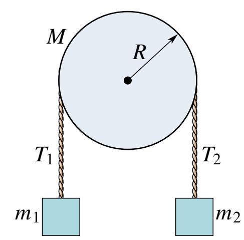
PRO POČÍTAČ

92Ú. Dva kotouče se mohou nezávisle na sobě otáčet kolem rovnoběžných os. První kotouč má poloměr 7,0 cm a moment setrvačnosti 1,5 kg·m^2, poloměr druhého je 15 cm a moment setrvačnosti 3,5 kg·m^2. První kotouč je v klidu a druhý roztočíme úhlovou rychlostí 175 rad/s. Osy kotoučů pak posuneme tak, aby se jejich obvody dotkly. Kotouče na sebe působí normálovými silami o velikostech 150 N, koeficient dynamického tření mezi kotouči je 0,25. (a) Vytvořte tabulku obsahující časové závislosti úhlových rychlostí kotoučů v časovém intervalu 80 s měřeném od okamžiku jejich dotyku. Hodnoty tabelujte s krokem 2 s. Sestrojte grafy těchto závislostí a graf časové závislosti celkové kinetické energie kotoučů. Zachovává se celková kinetická energie? (b) Jaký vliv na pohyb kotoučů má třecí síla? Výpočty zopakujte pro koeficient dynamického tření 0,50. Závisí doba potřebná k ustavení výsledné (rovnovážné) úhlové rychlosti kotoučů na koeficientu dynamického tření? Závisí výsledná úhlová rychlost kotoučů a jejich celková výsledná kinetická energie na koeficientu dynamického tření?

93Ú. V následující tabulce jsou uvedeny souřadnice pěti částic ležících v rovině xy. Částice jsou pevně spojeny a tvoří tuhé těleso. Vypočtěte moment setrvačnosti tohoto tělesa (a) vzhledem k ose x, (b) vzhledem k ose y a (c) vzhledem k ose z. (d) Najděte polohu těžiště tělesa.

TĚLESO	1	2	3	4	5
Hmotnost (g)	500	400	300	600	450
x (cm)	15	−13	17	−4,0	−5,0
y (cm)	20	13	−6,0	−7,0	9,0

94Ú. Na obr. 11.49 jsou znázorněna dvě tělesa o hmotnostech $m_1 = 400$ g a $m_2 = 600$ g. Tělesa jsou spojená vláknem zanedbatelné hmotnosti, vedeným přes homogenní kladku o hmotnosti $M = 500$ g a poloměru $R = 12{,}0$ cm. Kladka se může otáčet bez tření kolem vodorovné osy. Vlákno po obvodu kladky neklouže. Soustavu uvolníme z klidové polohy. Vypočtěte (a) velikost zrychlení těles, (b) tahovou sílu T_1 v levé části vlákna a (c) tahovou sílu T_2 v pravé části vlákna.



Obr. 11.49 Úloha 94