

5. Neharmonické periodické signály

5.1 Fourierovy řady

Doposud jsme se seznámili se způsoby řešení obvodů za předpokladu, že máme co dělat se stejnosměrným proudem / v tom případě uvažujeme pouze zdroje a rezistivní prvky obvodů - kapacitory nahrazujeme rozpojeným obvodem a induktory (ideální) zkratem / nebo s čistě harmonickým průběhem, kdy zavádíme pojem impedance / $Z_C = 1/j\omega C$, $Z_L = j\omega L$ / a pomocí nich řešíme obvody / jejich ustálené poměry / pro neznámé proudy a napětí, případně další odvozené veličiny.

V této kapitole nás bude zajímat případ signálů a průběhů, které jsou sice periodické / tak tomu bylo i v případě čistě harmonického signálu /, ale nebudou mít jednoduchý harmonický charakter. Periodická funkce splňuje vztah

$$f(t) = f(t + nT) \quad \text{kde} \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (5.1.1)$$

Následující úvahy a výsledky jsou založeny na práci Jeana Baptisty Josepha Fouriera (1768 - 1830) a nacházejí použití nejenom v problematice elektrických obvodů, ale i řadě dalších vědeckých disciplín. V přednáškách z matematiky byla tato problematika jistě dostatečně probrána a bylo zdůvodněno, že za předpokladu splnění jistých podmínek / Dirichletovy podmínky / periodická funkce $f(t)$ může být reprezentována sumou harmonických funkcí. /Z hlediska výpočtu obvodů však musíme klást požadavek jejich linearity, tzn. aby platilo, že působení součtu signálů na nějaký obvod je ekvivalentní součtu působení jednotlivých signálů./ Uveďme tedy pouze výsledky na základě přednášek z matematiky. Periodickou funkci mohou vyjádřit ve tvaru :

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (5.1.2)$$

kde $\omega_0 = 2\pi/T$ a A_0 je střední hodnota průběhu .

Pro $n = 1$ dostáváme tzv. základní harmonickou složku a pro $n > 1$ tzv. vyšší harmonické tj. pro $n = 2$ druhou harmonickou, $n = 3$ třetí harmonickou atd. Jinak můžeme tento vztah vyjádřit následovně :

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (5.1.3)$$

kde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt \quad (5.1.4)$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \, dt \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \varphi_n = \arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (5.1.5)$$

Pokud bychom do (5.1.3) dosadili

$$\sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \quad \cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

dostaneme po provedených úpravách

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (5.1.6)$$

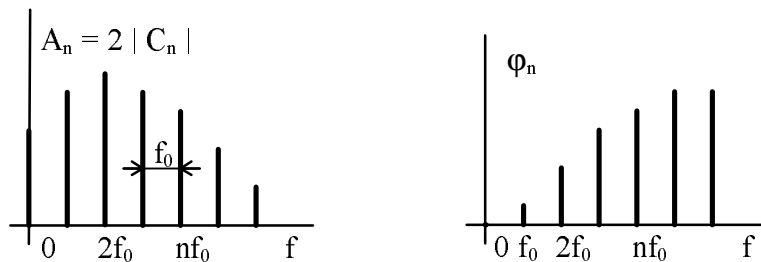
což je tzv. exponenciální tvar Fourierovy řady. Komplexní Fourierovy koeficienty c_n lze určit ze vztahu

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (5.1.7)$$

Přitom lze odvodit, že

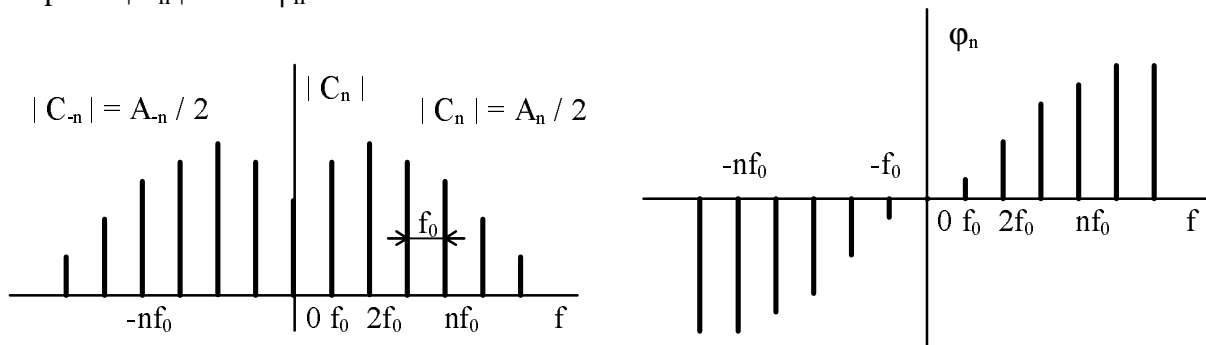
$$2c_n = a_n - jb_n \quad \text{pro } n > 0, \quad 2c_n = a_n + jb_n \quad \text{pro } n < 0 \quad (5.1.8)$$

Libovolný periodický průběh je tedy určen jednoznačně parametry A_n ; φ_n ; $n\omega_0$. Množině amplitud A_n říkáme amplitudové spektrum; množině počátečních fází φ_n říkáme fázové spektrum. Tato spektra mohou vypadat například takto:



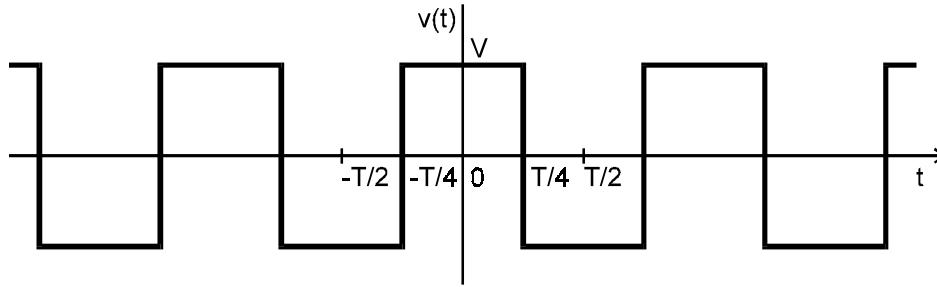
Obr. 5.1-1

Jsou to diskrétní spektra - čárová - někdy též nazývaná jednostranná. Na základě vztahu (5.1.6) můžeme kreslit tzv. oboustranné spektrum jako spektrum modulů komplexních amplitud $|C_n|$ a fází φ_n .



Obr. 5.1-2

Příklad : Určete Fourierovu řadu pro periodický průběh podle obrázku



Obr. 5.1-3

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{-T/4} -Ve^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{+T/4} Ve^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_{T/4}^{T/2} -Ve^{-jn\omega_0 t} dt$$

protože platí $T = 1 / f$, $\omega_0 = 2\pi f$ dostáváme

$$c_n = \frac{V}{jn2\pi} \left[e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi} - e^{-jn\pi/2} + e^{jn\pi/2} + e^{-jn\pi} - e^{jn\pi/2} \right]$$

$$c_n = \frac{V}{n\pi} \left[2 \left(\frac{e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2}}{2j} \right) - \left(\frac{e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}}{2j} \right) \right]$$

$$c_n = \frac{V}{n\pi} \left[2 \sin \frac{n\pi}{2} - \sin n\pi \right]$$

pro n sudé $c_n = 0$, pro n liché $c_n = \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$

Protože $c_0 = 0 \Rightarrow v(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0 \\ n \text{ - liché}}^{\infty} \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} e^{jn\omega_0 t}$

$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ - liché}}}^{\infty} \frac{4V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ - liché}}}^{\infty} \frac{4V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos n\omega_0 t$$

Při výpočtu Fourierových řad lze s výhodou užít symetrie : sudá funkce : $f(t) = f(-t)$,
 lichá funkce : $f(t) = -f(-t)$.

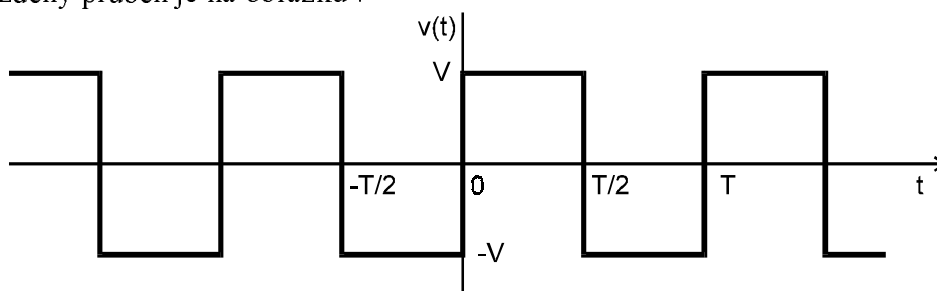
V některých případech nás může zajímat časový posun signálu. Budeme-li mít časovou periodickou funkci $f(t)$ definovanou vztahem

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

pak

$$f(t-t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0(t-t_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(c_n e^{-jn\omega_0 t_0} \right) e^{jn\omega_0 t} \quad (5.1.9)$$

Příklad : Zpozdíme průběh, který jsme počítali, o čtvrtinu periody a vypočteme Fourierovu řadu. Zpožděný průběh je na obrázku :



Obr. 5.1-4

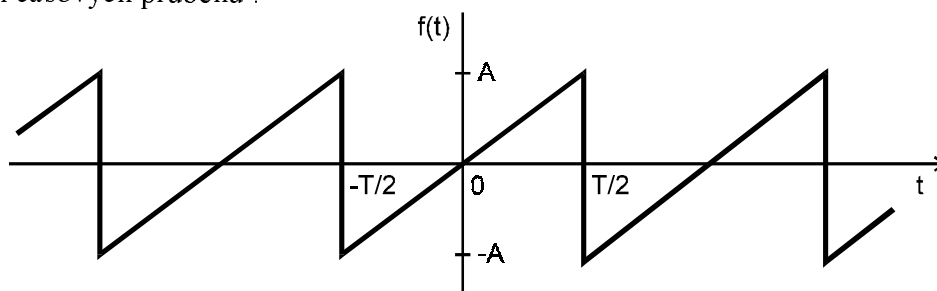
Posunutý průběh bude mít

$$c_n = \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} e^{-jn\pi/2} \quad n - \text{liché} \quad , \text{ neboť } \quad n\omega_0 t_0 = n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} = n \frac{\pi}{2}$$

a proto

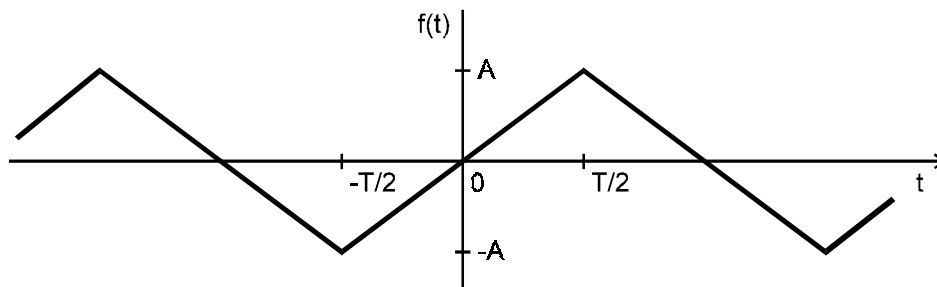
$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \sin n\omega_0 t$$

Na základě výrazu pro posunutý průběh bychom mohli ve spojitosti s principem superpozice vypočítávat řady pro celou řadu složitějších průběhů. Uvedme si nyní řady pro několik základních časových průběhů :



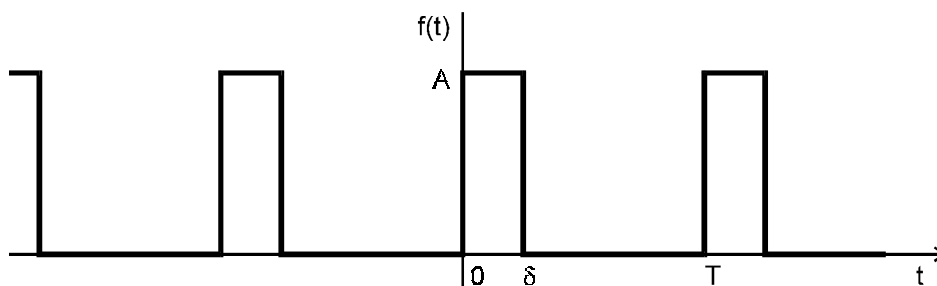
Obr. 5.1-5

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2A}{n\pi} \sin n\omega_0 t \quad (5.1.10)$$



Obr. 5.1-6

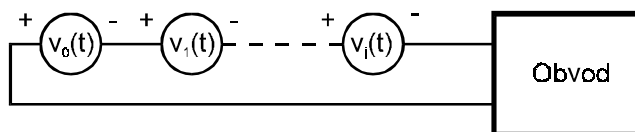
$$f(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\text{-liché}}}^{\infty} \frac{8A}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin n\omega_0 t \quad (5.1.11)$$



Obr. 5.1-7

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{n\pi} \sin \frac{n\pi\delta}{T} e^{jn\omega_0(t - \delta/2)} \quad (5.1.12)$$

Působení periodického neharmonického signálu na obvod si můžeme představit podle obrázku.



Obr. 5.1-8

Pro vstupní signál můžeme psát

$$v(t) = v_0 + v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \dots \quad (5.1.13)$$

Bude-li obvod lineární, můžeme působení signálu $v(t)$ nahradit působením dílčích signálů $v_i(t)$ a výsledek dostaneme jako superpozici odezev na dílčí signály.

V předcházejících přednáškách jsme si definovali tzv. efektivní hodnotu. Pro některé účely je výhodné její vyjádření pomocí harmonických složek. Za tím účelem uijeme komplexní tvar Fourierovy řady např. proudu

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n e^{jn\omega_0 t}$$

Pro kvadrát efektivní hodnoty můžeme psát

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n e^{jn\omega_0 t} dt \quad (5.1.14)$$

Proud $i(t)$ nezávisí na n a I_n je fázor a není tudíž závislý na čase. Tyto skutečnosti nám umožňují zaměnit pořadí matematických operací.

$$I^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \frac{1}{T} \int_0^T i(t) \cdot e^{jn\omega_0 t} dt \quad (5.1.15)$$

Z (5.1.7) plyne, že

$$\frac{1}{T} \int_0^T i(t) \cdot e^{jn\omega_0 t} dt = I_{-n} = I_n^* \quad (5.1.16)$$

a proto můžeme psát / hvězdičkou označujeme komplexně sdruženou veličinu /

$$I^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot I_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |I_n|^2 = I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{n(ef)}^2 \quad (5.1.17)$$

a tedy

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_{1(ef)}^2 + I_{2(ef)}^2 + \dots} \quad (5.1.18)$$

Jestliže nějaký zdroj periodického napětí $u(t)$ dodává do obvodu proud $i(t)$, je okamžitý výkon dán

$$p = u(t) \cdot i(t) \quad (5.1.19)$$

Činný výkon je střední hodnota p za dobu jedné periody čili

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt \quad (5.1.20)$$

Jestliže pro případ obecného periodického průběhu vyjádříme napětí a proud Fourierovými řadami, bude

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{jn\omega_0 t} \quad i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n e^{jn\omega_0 t}$$

kde U_n a I_n jsou fázory

$$U_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \quad I_n = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Na základě předchozího můžeme napsat

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{jn\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \frac{1}{T} \int_0^T i(t) \cdot e^{jn\omega_0 t} dt$$

neboli

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n I_n^* \quad (5.1.21)$$

Poslednímu našemu výsledku se říká Parsevalův vztah a udává vztah mezi výkonem v časové a frekvenční oblasti. Současně nám tento vztah říká, že činný výkon mohou poskytovat pouze složky proudu a napětí o stejném kmitočtu. Složky o nesterjné kmitočtu / různé harmonické / nedávají spolu žádný činný výkon.

Z předcházejících příkladů a úvah však jednoznačně vyplynulo, že v případě aplikace neharmonického signálu na lineární obvod výstupní obvod může obsahovat jenom harmonické složky, které byly obsaženy v signálu vstupním. V lineárním obvodu tedy právě v důsledku jeho linearit nemohou vzniknout žádné nové harmonické složky.

Přesně lineární obvod, na jehož vstupu působí harmonický signál, bude mít na svém výstupu opět harmonický signál - ovšem s jinou amplitudou a jinou fází.

Skutečné obvody nejsou nikdy přesně lineární a řada používaných obvodů je úmyslně nelineárních pro dosažení určitého působení. Na závěr této kapitoly si tedy uveďme působení periodického signálu na nelineární obvod. Obecně nelineární charakteristiku nějakého obvodu si můžeme představit v tomto tvaru

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (5.1.22)$$

kde x a y mohou být proudy nebo napětí. Přivedeme-li čistě harmonický signál $x(t) = A \sin \omega t$ a dosadíme do vztahu (5.1.22), pak při užití vztahů pro mocniny funkce $\sin \omega t$ dostaneme

$$y(t) = a_0 + a_1 A \sin \omega t + a_2 \frac{A^2}{2} (1 - \cos 2\omega t) + a_3 \frac{A^3}{4} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t) + \dots$$

V důsledku nelinearity vznikají složky - vyšší harmonické kmitočty. Stejnosečná složka na výstupu $y(t)$ bude

$$A_0 = a_0 + \frac{1}{2} a_2 A^2 + \frac{3}{8} a_4 A^4 + \dots \quad (5.1.23)$$

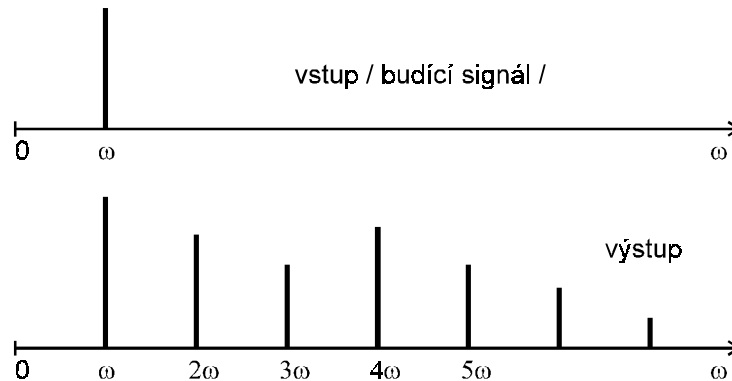
První / základní / harmonická bude

$$A_1 = a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3 + \frac{5}{8} a_5 A^5 + \dots$$

Další harmonické jsou dány vztahem

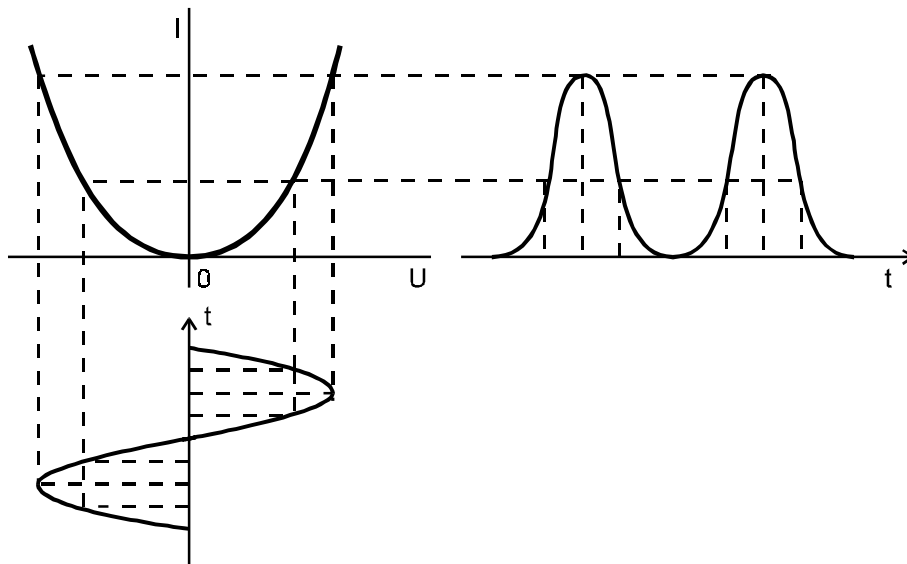
$$A_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+n)!}{2^{(2k+n-1)} k!(k+n)!} a_{2k+n} A^{2k+n} \quad (5.1.24)$$

Spektra amplitud na vstupu a výstupu jsou



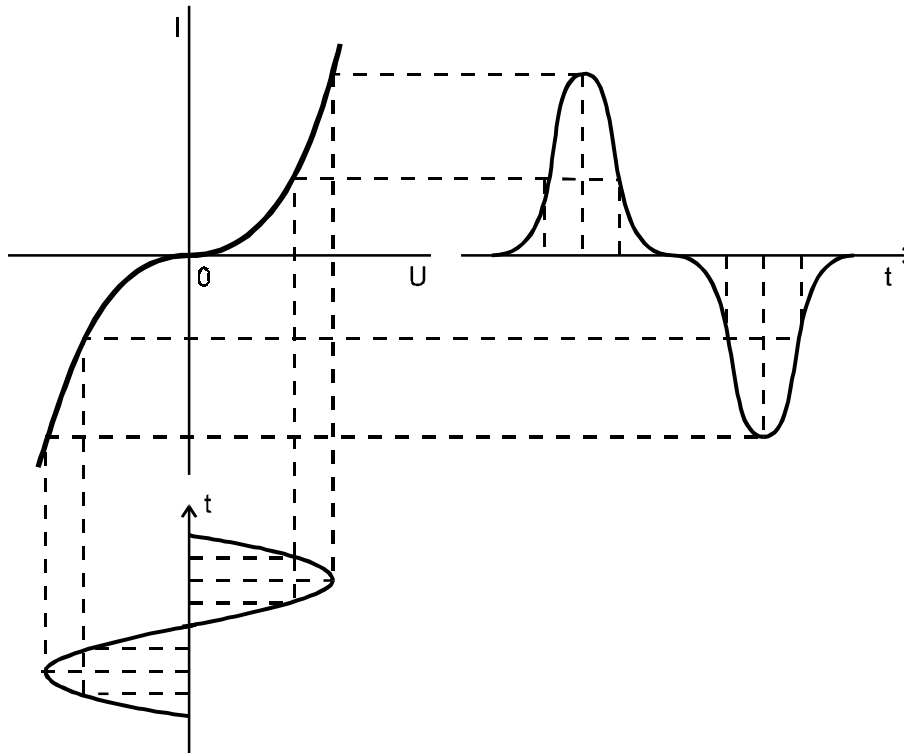
Obr. 5.1-9

Nelineárních obvodů můžeme užít v tomto uspořádání např. pro přeměnu střídavého harmonického průběhu na stejnosměrný čili využít stejnosměrnou složku $y(t)$. Z (5.1.23) vyplývá, že potřebný nelineární obvod nebo prvek by měl mít v (5.1.22) pouze sudé členy, což znamená, že by to měla být sudá funkce.



Obr. 5.1-10

Charakteristiku podle obrázku však žádný prvek nemá, je možné uvažovat prvek s charakteristikou diody. Užitím dvou diod a dvoucestného zapojení / dvoucestný usměrňovač, můstek / můžeme za cenu složitějšího obvodu realizovat činnost podle předcházející úvahy. V žádném případě pro získání stejnosměrné složky nemůže být (5.1.22) funkcí lichou - v tom případě $A_0 = 0$ / viz obrázek /.



Obr. 5.1-11

Nelineární obvody můžeme též užít pro získání potřebné vyšší harmonické, zde ale volíme tvar charakteristiky podle řádu harmonické. Při působení jednoho harmonického signálu vznikají v nelineárním obvodu vyšší harmonické kmitočty / čili oktávy - v reprodukované hudbě mění barvu tónu, ale nezní nelibě / .

Uvažujme nyní situaci, kdy budou působit dva harmonické signály současně a tedy

$$x(t) = A \sin \omega_a t + B \sin \omega_b t \quad (5.1.25)$$

Dosazením do (5.1.22) dostaneme

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(A \sin \omega_a t + B \sin \omega_b t \right)^k$$

Použijeme-li binomický rozvoj, dostaneme

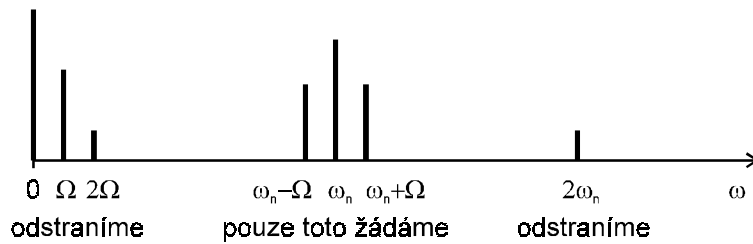
$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \left(A \sin \omega_a t \right)^{k-m} \cdot \left(B \sin \omega_b t \right)^m \quad (5.1.26)$$

Podrobným rozbořem tohoto vztahu bychom dospěli k závěru, že se nám budou vyskytovat kmitočty

$$\omega = p\omega_a \pm q\omega_b \quad (5.1.27)$$

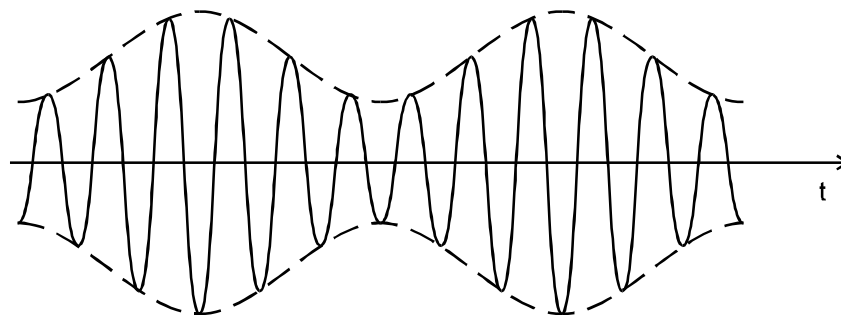
kde $p, q = 0, 1, 2, 3, \dots$

Tento jev je daleko méně žádoucí - vzniká totiž tzv. intermodulační zkreslení - objevují se složky s novými kmitočty. Naopak se tohoto jevu užívá pro amplitudovou modulaci vysokofrekvenčních signálů.



Obr. 5.1-12

Na Obr. 5.1-12 je naznačeno působení dvou napětí $u_1(t) = U_{1m} \sin \omega_n t$ a $u_2(t) = U_0 + U_{2m} \sin \Omega t$ na prvek s charakteristikou $i = au^2$ pro $u > 0$ a $i = 0$ pro $u < 0$. Skutečný časový průběh signálu s amplitudovou modulací bude podle následujícího obrázku :



Obr. 5.1-13

6. Fourierův integrál a transformace, Laplaceova transformace

6.1 Fourierův integrál a Fourierova transformace

Neperiodickou funkci (máme jeden jediný průběh) mohu chápat jako limitní případ periodické funkce, kde $T \rightarrow \infty$, potom frekvenční interval spektra $\omega_0 = 2\pi / T = 2\pi f_0 \rightarrow 0$ a spektrum se stane spektrem spojitým. Současně ale suma udávající Fourierovu řadu se změní na integrál nazývaný Fourierův integrál

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (6.1.1)$$

a obráceně podobným postupem ze vztahu (5.1.6)

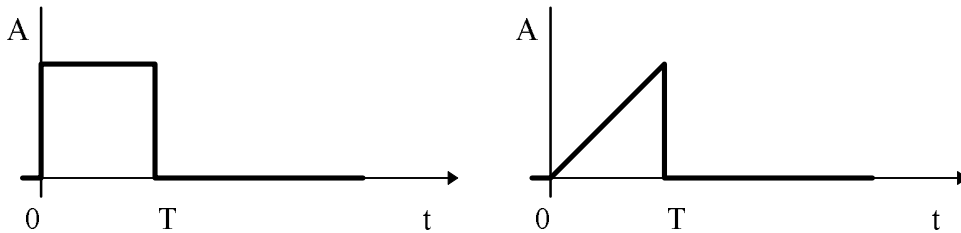
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (6.1.2)$$

Tyto dva vztahy určují přímou a zpětnou Fourierovu transformaci a mohl bych je používat stejným způsobem jako Fourierovu řadu, ale tentokrát pro funkce neperiodické.

Na funkci $f(t)$ je však kladena další podmínka, a to aby existoval integrál (6.1.1) . Tomu bude za podmínky, že existuje integrál

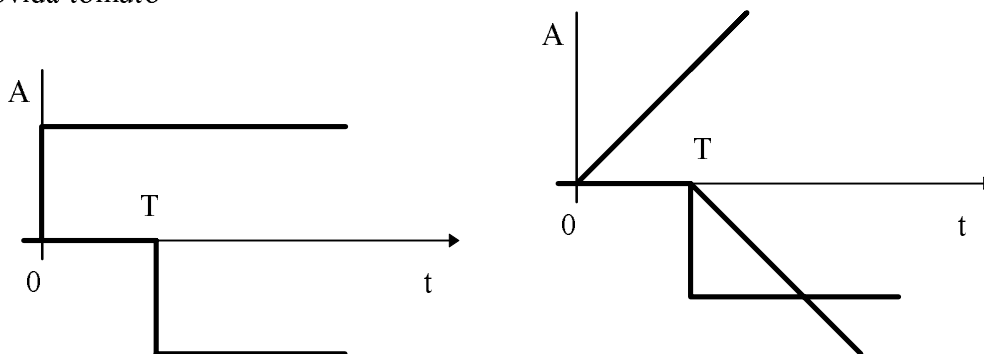
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \quad (6.1.3)$$

Realizovatelné průběhy toto zřejmě splňují. My jsme však zavedli některé idealizované průběhy, pomocí nichž jsme studovali chování našich obvodů, případně jsme z nich na základě superpozice vytvářeli idealizované tvary jako např. tyto:



Obr. 6.1-1

což odpovídá tomuto



Obr. 6.1-2

Zřejmě ale neexistuje v přesném smyslu Fourierova transformace těchto průběhů / lze ji však určit limitními metodami / , a navíc výpočty zpětné transformace nemusí být jednoduché - je to integrál komplexní funkce reálné proměnné ω / viz (6.1.2) / .

Abychom si pomohli, uvažujme, že naše funkce vynásobíme členem $\exp(-\sigma t)$, čili budeme pracovat s funkcemi $f(t) \cdot \exp(-\sigma t)$ a zvolíme-li vhodně σ , bude (6.1.3) a tedy i (6.1.1) existovat. Uvažujme tedy tento integrál :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

6.2 Laplaceova transformace

Nechť platí :
$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad \text{kde} \quad p = \sigma + j\omega \quad (6.2.1)$$

Vztah (6.2.1) definuje tzv. Laplaceovu transformaci, a to tzv. přímou, kdy k reálnému časovému signálu $f(t)$ hledáme jeho Laplaceův obraz $F(p)$.

Obrácená úloha může být najít k obrazu původní signál - originál $f(t)$. Ten bych mohl určit úpravou vztahu (6.1.2), tedy:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp \quad (6.2.2)$$

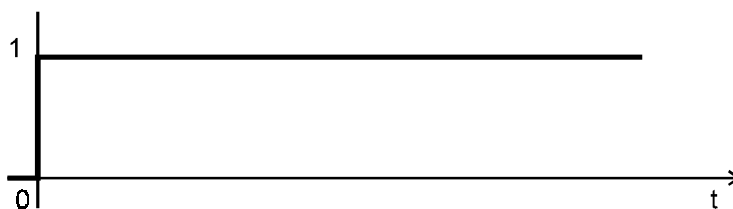
což je integrál v oboru komplexní proměnné, a jeho řešení je poměrně jednoduché.

Abychom dosáhli vzájemné jednoznačnosti přiřazení mezi originálem a obrazem, je nutné ve vztahu (6.2.1) uvažovat dolní mez integrálu rovnu nule. Tím se naše původní oboustranná Laplaceova transformace mění na jednostrannou (ale jednoznačnou) Laplaceovu transformaci a vztah (6.2.1) přechází na vztah (6.2.3) :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad (6.2.3)$$

Jednostrannost nám není na závadu, protože víme, že každý děj v jistém okamžiku začíná, a to může tedy být náš „nulový čas“.

Laplaceův obraz funkce : $\delta_1(t) = 0$ pro $t \leq 0$ a $\delta_1(t) = 1$ pro $t > 0$

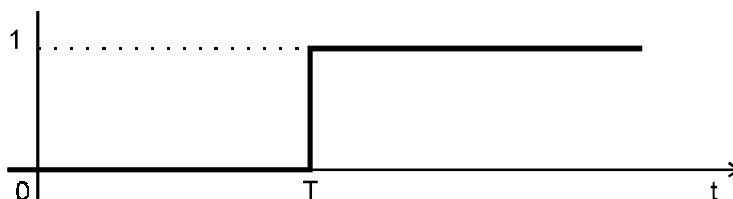


Obr. 6.2-1

můžeme psát :

$$L\{\delta_1(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p} \quad (6.2.4)$$

Nebo posunutí v čase čili



Obr. 6.2-2

Posunutou funkci vyjádříme jako $f(t-T)$:

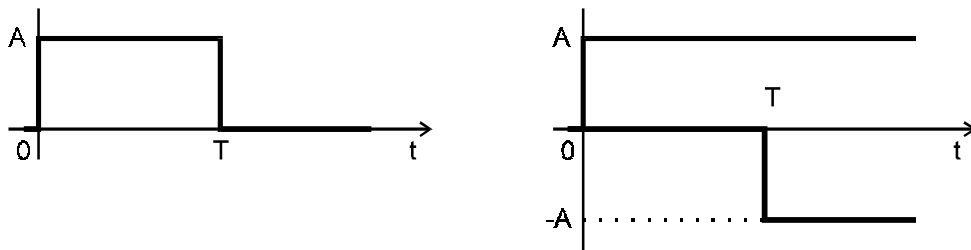
$$F_1(p) = L\{f(t-T)\} = \int_0^{\infty} f(t-T) \cdot e^{-pt} dt$$

a provedeme-li substituci $u = t-T$, dostaneme

$$F_1(p) = \int_0^{\infty} f(u) \cdot e^{-pu} \cdot e^{-pT} du = e^{-pT} \cdot \int_0^{\infty} f(u) \cdot e^{-pu} du = e^{-pT} \cdot F(p)$$

Posunutí v čase, což znamená násobení původního obrazu nezpožděného signálu výrazem $\exp(-pT)$.

Nyní již můžeme vypočítat obraz obdélníkového impulsu amplitudy A a délky T .



Obr. 6.2-3

Obraz bude

$$F(p) = \frac{A}{p} - \frac{A}{p} \cdot e^{-pT} = \frac{A}{p} \left(1 - e^{-pT} \right)$$

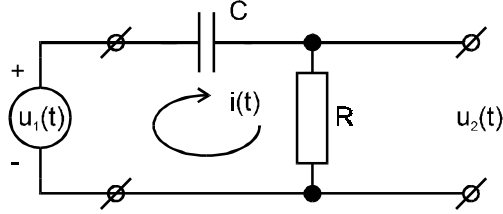
Podobně bychom odvodili, že např. je-li obraz funkce $f(t)$ roven $F(p)$ čili $L\{f(t)\} = F(p)$, pak bude

$${}^{(1)}F(p) = L\left\{ \int_0^t f(u) du \right\} = \frac{1}{p} F(p) \quad (6.2.5)$$

a pro derivaci

$$F^{(1)}(p) = L\left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = pF(p) - F(0^+) \quad (6.2.6)$$

Příklad : Vyřešte reakci následujícího obvodu $u_2(t)$, bude-li $u_1(t) = A \cdot \delta_1(t)$; za předpokladu, že $u_C(0) = 0$.



Obr. 6.2-4

$$u_1(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau + R \cdot i(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + R \cdot i(t)$$

neboť
$$u_C(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau = 0$$

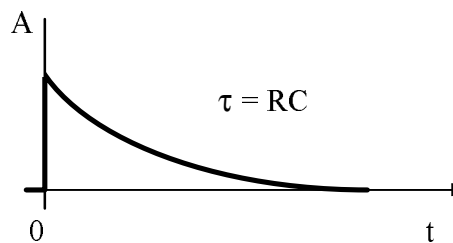
$$L\{u_1(t)\} = L\left\{\frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + R \cdot i(t)\right\} \Rightarrow \frac{A}{p} = \frac{1}{pC} i(p) + R \cdot i(p)$$

Tedy

$$i(p) = \frac{A}{R \cdot (p + 1/RC)} \quad L\{u_2(t)\} = u_2(p) = R \cdot i(p) = \frac{A}{R \cdot (p + 1/RC)}$$

A po provedení zpětné transformace dostáváme

$$u_2(t) = A \cdot e^{-t/RC}$$



Obr. 6.2-5

Metoda Laplaceovy transformace mi umožňuje řešit obyčejné diferenciální rovnice tím, že je převedu do Laplaceovy transformace a najdu obraz řešení jako řešení algebraické rovnice a provedu zpětnou transformaci. Např. :

$$\frac{dy}{dx} + cy = f(x) \quad y(0) = y_0 \quad L\left\{\frac{dy}{dx} + cy\right\} = L\{f(x)\}$$

$$p \cdot y(p) - y(0) + c \cdot y(p) = f(p)$$

a tedy

$$y(p) = \frac{f(p)}{p+c} + \frac{y_0}{p+c}$$

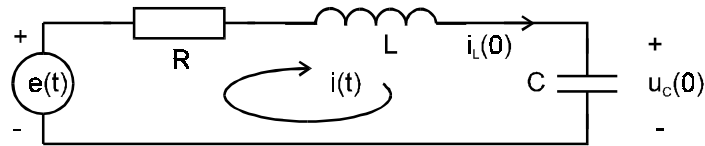
Známe-li $f(x)$ a y_0 , spočítáme $y(p)$ a zpětnou transformaci určíme takto :

$$y(x) = L^{-1}\{y(p)\}$$

Zpětnou transformaci provádíme nejčastěji pomocí slovníku Laplaceovy transformace :

$f(t)$	$F(p)$
A	A/p
$\delta_0(t)$	1
$\delta_1(t)$	$1/p$
$\delta_1(t-t_0)$	$\frac{1}{p} e^{-t_0 p}$
$\delta_2(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$	$1/p^2$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$
$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$
$\cos \alpha t$	$\frac{p}{p^2 + \alpha^2}$
$1/\sqrt{\pi t}$	$1/\sqrt{p}$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$

Příklad : Mějme obvod dle Obr. 6.2-6 :



Obr. 6.2-6

Podle 2. Kirchhoffova zákona můžeme psát

$$e(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$L\{e(t)\} = e(p) \quad L\{i(t)\} = i(p)$$

takže

$$e(p) = R \cdot i(p) + pL \cdot i(p) - L \cdot i_L(0) + \frac{1}{pC} i(p) + \frac{u_C(0)}{p}$$

Z toho tedy plyne :

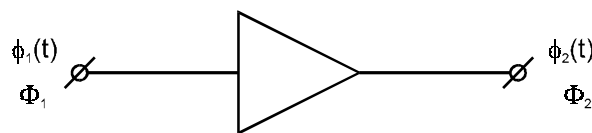
$$i(p) = \frac{e(p) + L \cdot i_L(0) - u_C(0)/p}{R + pL + 1/pC}$$

Na základě známého $e(t)$, $i_L(0)$, $u_C(0)$ bychom zpětnou transformací našli řešení.

7. Zpětná vazba v lineárních obvodech

7.1 Přenos

Mějme lineární obvod (např. nějaký zesilovač)



Obr. 7.1-1

Poměry časových veličin $\Phi_2(t)$ a $\Phi_1(t)$ udává tzv. konvoluční integrál

$$\Phi_2(t) = \int_0^t a(\tau) \cdot \Phi_1(t - \tau) d\tau \quad (7.1.1)$$

kde $a(t)$ je odezva na jednotkový impuls.

Snadněji ovšem získáme vzájemný vztah na základě Fourierovy nebo Laplaceovy transformace.

Budiž $\Phi(j\omega) = F\{\varphi(t)\}$ případně $\Phi(p) = L\{\varphi(t)\}$.

Potom poměr

nebo

$$\frac{\Phi_2(j\omega)}{\Phi_1(j\omega)} = K(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad \frac{\Phi_2(p)}{\Phi_1(p)} = K(p) \quad (7.1.2)$$

nazýváme přenosem nebo operátorovým přenosem.

$K(j\omega)$ případně $K(p)$ získáme analýzou obvodu, zavedeme-li impedance případně operátorové impedance

$$Z_C = 1/j\omega C \quad Z_L = j\omega L \quad Z_C = 1/pC \quad Z_L = pL \quad (7.1.3)$$

Stanovíme $K(p)$ nebo $K(j\omega)$ / víme že $K(j\omega) = K(p) \Big|_{p=j\omega}$ /

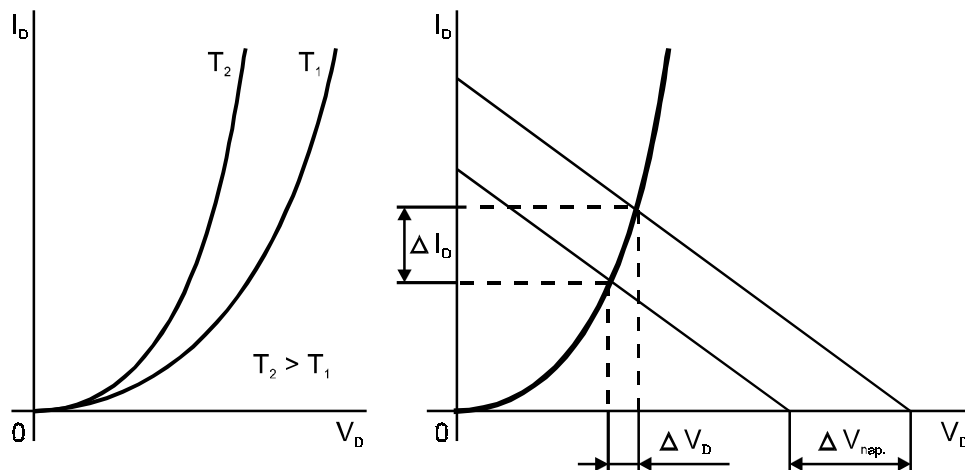
a dále $\Phi_1(p) = L\{\varphi_1(t)\} \quad \Phi_2(p) = K(p) \cdot \Phi_1(p)$

a nakonec $\varphi_2(t) = L^{-1}\{\Phi_2(p)\}$ (7.1.4)

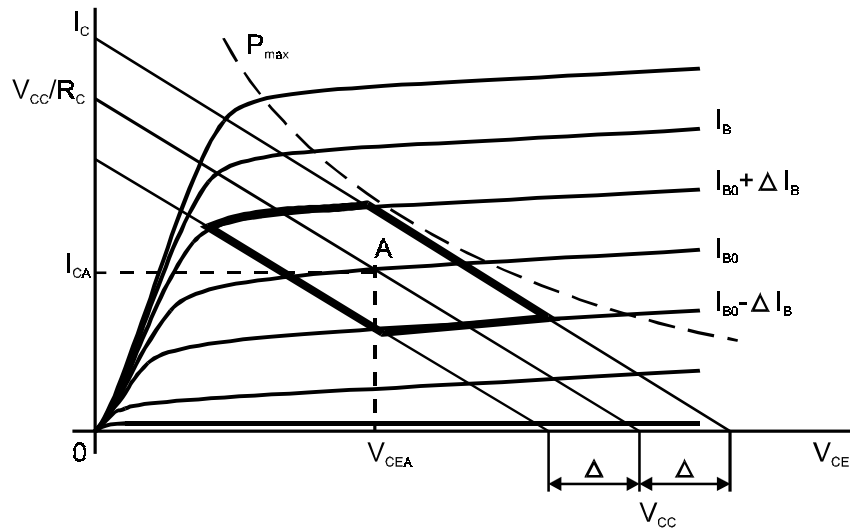
7.2 Zpětná vazba

V předchozích přednáškách jsme viděli, že parametry prvků - kromě své tolerance (chceme stejné výsledky od řady realizovaných zařízení) - závisí na teplotě a změnách napájení. Navíc časem se mění pomalu parametry v důsledku stárnutí prvků.

S teplotou se např. mění napětí na diodě o $-2,1 \text{ mV}/^\circ\text{C}$; totéž se týká napětí V_{BE} bipolárního tranzistoru.



Obr. 7.2-1



Obr. 7.2-2

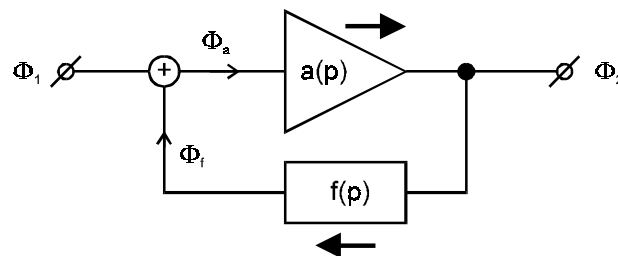
Je zřejmé, že potřebujeme radikálně omezit vliv těchto změn na výsledné vlastnosti obvodu. Jsou však i problémy další. V důsledku nelinearity prvků vzniká zkreslení signálů. V případě přesně lineárního obvodu by ve spektru výstupního signálu byly obsaženy pouze kmitočty, které obsahovalo spektrum vstupního signálu. V důsledku nelinearit se objevují ve výstupním spektru vyšší harmonické kmitočty a při současném působení několika harmonických kmitočtů ještě i kombinační kmitočty. Nelineární zkreslení (udává se v %) se definuje vztahem

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots}{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}} \quad (7.2.1)$$

kde U_1, U_2, U_3, \dots jsou amplitudy základního a vyšších harmonických kmitočtů.

Pan H. Black v roce 1927 přišel s myšlenkou tzv. záporné zpětné vazby, která nám pomůže redukovat výše uvedené vlivy (kladná zpětná vazba byla pro účely generace signálu známa již dříve).

Základní schéma zpětnovazebního obvodu je na Obr. 7.2-3



Obr. 7.2-3

Jako podmínku řešení stanovme jednostrannost přenosu obvodu přímé a zpětné vazby. Naše základní idea je v tom, že přivedením jisté části výstupního signálu zpět na vstup v takové fázi, že tento signál bude v protifázi se signálem vstupním, dojde ke snížení vlivu interních změn v obvodu $a(p)$ (přímé vazby).

Pro obvod platí

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_a} = a(p) \quad \Phi_a = \Phi_1 + \Phi_f \quad f(p) = \frac{\Phi_f}{\Phi_2} \quad (7.2.2)$$

Řešíme-li tyto rovnice, dostaneme

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{a(p)}{1 - f(p) \cdot a(p)} = A(p) \quad (7.2.3)$$

Toto je obecný vztah pro zpětnovazební obvod (za podmínky jednostrannosti přenosů). Bude-li znaménko součinu $a(p) \cdot f(p)$ kladné, bude se jednat o vazbu kladnou, a bude-li znaménko záporné, půjde o náš případ záporné zpětné vazby.

7.3 Citlivost

Chtěli bychom nyní dosáhnout toho, aby výsledek $A(p)$ byl málo závislý na změnách $a(p)$ a $f(p)$, jinými slovy aby citlivost na změny $a(p)$ a $f(p)$ byla co nejmenší. Změny teploty a napájecích podmínek jsou pomalé, stejně tak změny parametrů s časem, proto můžeme brát do úvahy následující vztahy

$$a(j\omega) = a(p) \Big|_{p=j\omega} \quad a(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} = a_0 \quad f(p) \rightarrow f_0$$

čili

$$A_0 = \frac{a_0}{1 - a_0 f_0} \quad (7.3.1)$$

Relativní citlivost veličiny A na změny parametru k definujeme

$$S_K^A = \frac{\partial A/A}{\partial K/K} \quad (7.3.2)$$

Uvažujme nyní změnu veličiny a_0 a sledujme tedy $S_{a_0}^{A_0}$

$$\frac{\partial A_0}{\partial a_0} = \frac{1}{(1 - a_0 f_0)^2} \quad S_{a_0}^{A_0} = \frac{\partial A_0/A_0}{\partial a_0/a_0} = \frac{a_0}{A_0} \frac{\partial A_0}{\partial a_0} = \frac{1}{1 - a_0 f_0} \quad (7.3.3)$$

neboli

$$\frac{\partial A_0}{A_0} = S_{a_0}^{A_0} \cdot \frac{\partial a_0}{a_0} \quad (7.3.4)$$

Je vidět, že pokud uděláme $a_0 f_0$ záporné a velké, dosáhneme velmi malou citlivosti A_0 v na závislosti na změnách a_0 .

Příklad : Máme zesilovač, pro který platí $a_0 = -1000 \pm 100$. Za pomoci záporné zpětné vazby potřebujeme vytvořit zesilovač, který bude měnit zesílení maximálně o $\pm 0,1\%$. Najděte hodnotu f_0 potřebnou pro dosažení tohoto efektu a vypočítejte velikost výsledného zesílení.

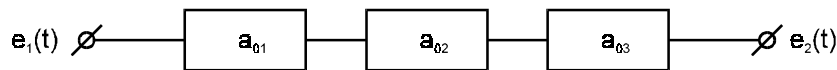
Podle zadání je $\left| \frac{\partial a_0}{a_0} \right| = \frac{100}{1000} = 10^{-1}$ a musíme dosáhnout $\left| \frac{\partial A_0}{A_0} \right| = 10^{-3}$. Platí zřejmě

$\left| \frac{\partial A_0}{A_0} \right| = \left| \frac{1}{1 - a_0 f_0} \right| \cdot \left| \frac{\partial a_0}{a_0} \right|$, z čehož vyplývá, že $f_0 \cong 10^{-1}$. Výsledné zesílení bude potom

$$A_0 = \frac{a_0}{1 - a_0 f_0} \cong -10$$

Z tohoto číselného příkladu vidíme, jak zaplatíme za dosažení nezávislosti na podmínkách snížením zesílení ($1000 \rightarrow 10$) .

Ještě jeden obecnější příklad : Abychom dosáhli zřejmě potřebného velkého zesílení a_0 , budeme řadit několik jednoduchých zesilovačů do kaskády. Pokud se nebudou ovlivňovat, bude jejich výsledné zesílení $a_0 = a_{01} \cdot a_{02} \cdot a_{03} \cdot \dots$. Mějme tedy zesilovač skládající se ze tří identických stupňů v kaskádě.



Obr. 7.3-1

Z výstupu zavedeme zápornou zpětnou vazbu a požadujeme, aby relativní změna $\partial A_0/A_0$ nebyla větší než Ψ . Jaká musí být minimální velikost zesílení stupňů bez zpětné vazby, abychom tohoto dosáhli ?

Předpokládejme relativní změnu všech tří stupňů stejnou : $\Psi_1 = \frac{\partial a_{01}}{a_{01}}$

Zesílení jednoho stupně je $a_{01} \pm \Psi_1 \cdot a_{01} = a_{01} \cdot (1 \pm \Psi_1)$. Zesílení tří stupňů v kaskádě bude $a_0 = a_{01}^3 \cdot (1 \pm \Psi_1)^3 \cong a_{01}^3 \cdot (1 \pm 3\Psi_1)$, $\Psi_1 \ll 1$.

Protože platí $\left| \frac{\partial A_0}{A_0} \right| = \frac{1}{1 - a_0 f_0} \cdot \left| \frac{\partial a_0}{a_0} \right| \rightarrow |\Psi| = \frac{1}{1 - a_{01}^3 f_0} \cdot |3\Psi_1|$, $a_{01}^3 = a_0$

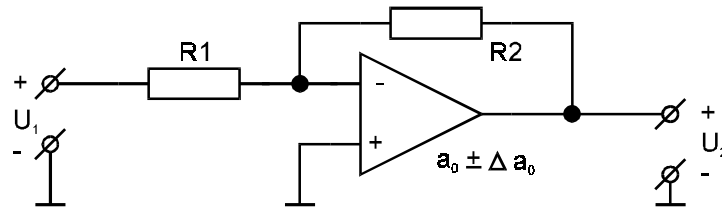
a protože $A_0 = \frac{a_0}{1 - a_0 f_0}$, dostaneme $a_0 = 3A_0 \cdot \left| \frac{\Psi_1}{\Psi} \right|$. Chceme-li např. $A_0 = -100$;

$\Psi_1 = 10^{-1}$ a $\Psi = 10^{-3}$, pak toho můžeme dosáhnout jedině tehdy, bude-li

$a_0 = 3A_0 \cdot \left| \frac{\Psi_1}{\Psi} \right| = -3 \cdot 10^4$ a to znamená, že zesílení bez vazby musí být minimálně 30 000 ,

abychom dosáhli požadovaných vlastností.

Předložené dva příklady by měly dostatečně ilustrovat to, že chceme-li získat analogový obvod nezávislý na teplotě, napájení, stárnutí atd., musíme vytvořit obvod s vysokým zesílením a pomocí silné záporné zpětné vazby dosáhnout žádaného účinku. Operační zesilovače nejrůznějších typů jsou pro tento účel takto konstruovány.



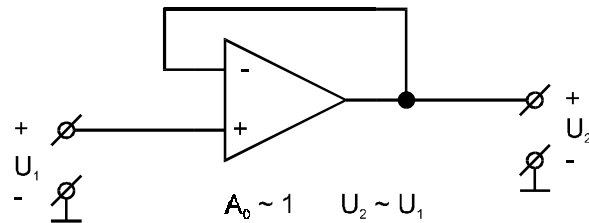
Obr. 7.3-2

$$A_0 = -\frac{R_2}{R_1}, \quad a_0 \rightarrow \infty, \quad A_0 = \frac{a_0}{1 - a_0 f_0} \cong -\frac{1}{f_0} \Rightarrow f_0 \cong -\frac{1}{A_0} = \frac{R_1}{R_2}$$

Mezním případem velikosti zpětnovazebního přenosu $f(p)$ bude jistě případ, kdy se tento rovná jedničce, což znamená, že celý výstupní signál je signálem zpětnovazebním, tedy

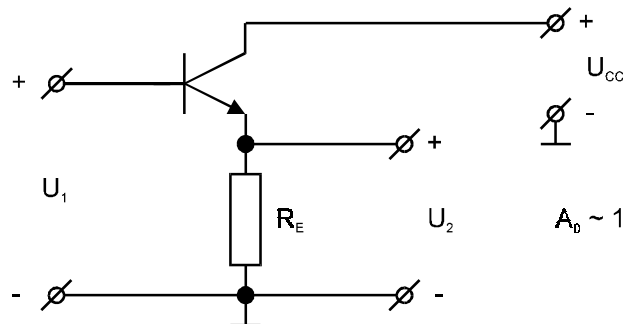
$$f(p) = 1 \quad A_0 = \frac{a_0}{1 - a_0 f_0} = \frac{a_0}{1 - a_0} \quad a_0 < 0 \quad (7.3.5)$$

Je zřejmé, že zesílení je vždy menší než jedna a bude se tím více blížit této limitě, čím větší bude a_0 . Obvod může vypadat takto (sledovač)



Obr. 7.3-3

a v nejjednodušším provedení i takto



Obr. 7.3-4

Poznámka : Sledovač má význam v tom, že ačkoliv neposkytuje zesílení, výstupní energie je čerpána z napájecích zdrojů a nikoliv ze zdroje signálu; zdroj signálu by ji nemusel být schopen dodat (jedná se o tzv. impedanční transformaci).

Prakticky ve všech analogových obvodech i v těch nejjednodušších užíváme záporné zpětné vazby pro omezení vlivů na obvody a tyto obvody pak různými způsoby řadíme do kaskády. To vede potom k tomu, že ve výsledném obvodu existuje i řada zpětných vazeb vnitřních kromě námi uvažované hlavní zpětné vazby.

Podívejme se nyní na problém citlivosti z hlediska zpětnovazebního obvodu a zkoumejme vliv změn tohoto obvodu. Takže musí platit následující vztahy

$$S \frac{A_0}{f_0} = \frac{\partial A_0 / A_0}{\partial f_0 / f_0} = \frac{\partial A_0}{\partial f_0} \frac{f_0}{A_0} = A_0 f_0 \quad \text{neboť} \quad A_0 = \frac{a_0}{1 - a_0 f_0}$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial f_0} = A_0 f_0 \cdot \frac{\partial f_0}{f_0} \quad (7.3.6)$$

Vidíme, že citlivost na změny zpětné vazby je velká. Proto zpětnovazební obvod musí být co nejméně závislý na vnějších podmínkách a na základě našich znalostí by tedy měl obsahovat pouze pasivní prvky (R, L, C) a pokud je to možné, měli bychom se vyvarovat užití prvků na bázi polovodičů (diody, tranzistory, atd.) a pokud se bez nich neobejdeme, musíme zabezpečit výsledek jinými metodami - kompenzace, stabilizace napájecích napětí, termostatování, atd.

7.4 Frekvenční vlastnosti zpětnovazebních obvodů

Povšimněme si dále, že bude-li $| a(p) \cdot f(p) | \gg 1$, bude

$$A(p) = \frac{a(p)}{1 - a(p)f(p)} \cong -\frac{1}{f(p)} \quad (7.4.1)$$

a to znamená, že frekvenční vlastnosti celkového obvodu jsou zcela dány za této podmínky obvodem zpětné vazby. Můžeme proto vytvářet dle potřeby pasivní obvody s jistými frekvenčními vlastnostmi a tím realizovat žádaný průběh frekvenční charakteristiky celého obvodu.

Zatím jsme se přímo nezabývali vlivem zpětné vazby na frekvenční vlastnosti zesilovače. Ukažme si je na následujícím příkladu .

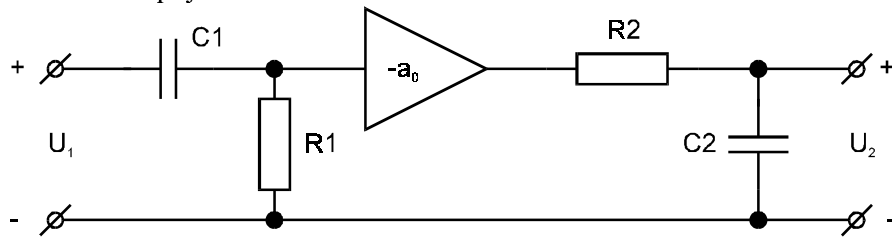
Příklad : Mějme zesilovač, jehož operátorový přenos $K(p) = a(p)$ je dán vztahem

$$a(p) = \frac{-a_0 p_2 p}{(p + p_1)(p + p_2)} \quad , \text{ kde } p_1, p_2 \text{ jsou reálná čísla}$$

Tento přenos si můžeme představit i v této formě

$$a(p) = \frac{p}{p + p_1} \cdot (-a_0) \cdot \frac{p_2}{p + p_2}$$

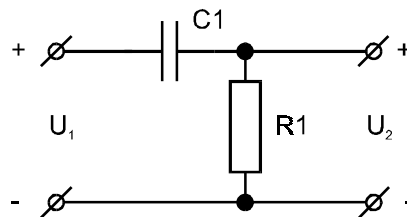
což odpovídá tomuto zapojení



Obr. 7.4-1

Amplitudová charakteristika za předpokladu, že p_1 a p_2 jsou dostatečně vzdálené, bude dle našich znalostí odpovídat Obr. 7.4-4 . Mezní frekvence budou dány prakticky póly $\omega_d \cong p_1$, $\omega_h \cong p_2$.

Poznámka: Výpočet derivačního obvodu (viz Obr. 7.4-2)

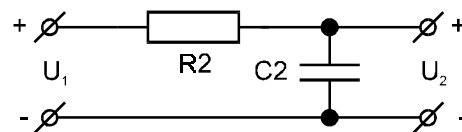


Obr. 7.4-2

$$u_1(p) = \left(\frac{1}{pC_1} + R_1 \right) \cdot i(p) \quad u_2(p) = R_1 \cdot i(p)$$

$$K(p) = \frac{u_2(p)}{u_1(p)} = \frac{p}{p + 1/R_1 C_1} = \frac{p}{p + 1/\tau_1} = \frac{p}{p + p_1}$$

Výpočet integračního obvodu (viz Obr. 7.4-3)



Obr. 7.4-3

$$u_1(p) = \left(\frac{1}{pC_2} + R_2 \right) \cdot i(p) \quad u_2(p) = \frac{1}{pC_2} \cdot i(p)$$

$$K(p) = \frac{u_2(p)}{u_1(p)} = \frac{1}{R_2 C_2 (p + 1/R_2 C_2)} = \frac{1}{\tau_2} \frac{p}{p + 1/\tau_2} = \frac{p_2}{p + p_2}$$

Zavedeme-li zpětnou vazbu tak, že platí $f(p) = f_0$, bude

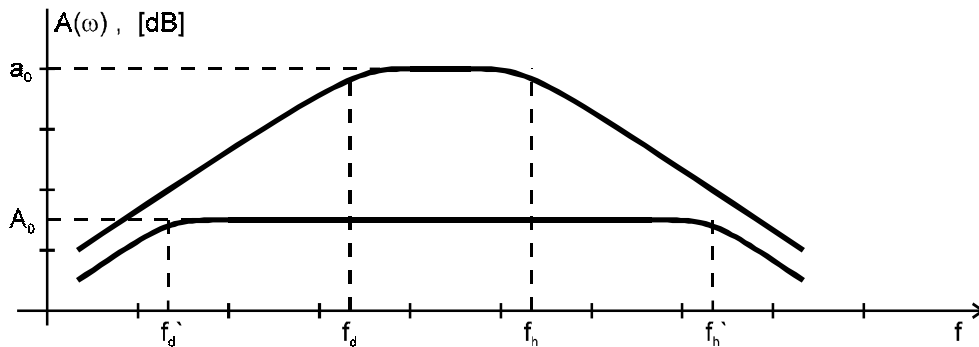
$$A(p) = \frac{a(p)}{1 - a(p)f(p)} = \frac{-\frac{a_0 p_2 p}{(p+p_1)(p+p_2)}}{1 + f_0 \frac{a_0 p_2 p}{(p+p_1)(p+p_2)}} = \frac{-a_0 p_2 p}{(p+p_1')(p+p_2')}$$

kde

$$p_1' = \frac{p_1}{1 + a_0 f_0} \quad p_2' = p_2(1 + a_0 f_0)$$

$$a_0' = \frac{a_0}{1 + a_0 f_0} \quad \omega_d' = p_1' \quad \omega_h' = p_2'$$

Charakter grafu zůstává, zesílení ve středu pásma kleslo faktorem $1/(1+a_0f_0)$, přičemž se zmenšila a zvětšila mezní frekvence ω_d a ω_h (viz obr. Obr. 7.4-4).



Obr. 7.4-4

Podobně bychom mohli dokázat snížení vnitřních šumů, brumů a zkreslení.

7.5 Stabilita zpětnovazebních obvodů

V předchozí kapitole jsme řekli, že potřebujeme realizovat velké $a_0 f_0$, ale neřekli jsme, zda to můžeme vždy udělat a zda v některých případech nedojde k nežádoucím, třeba pro nás novým jevům.

Uvažujme takto. Máme lineární obvod a známe jeho $K(p)$ čili operátorový přenos a chceme vědět, jak se bude chovat při vychýlení z rovnovážného - klidového stavu. Aplikujme na něj tedy signál ve tvaru tzv. jednotkového impulsu (delta funkci) $\delta_0(t)$. Platí:

$$\delta_0(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad u_1(p) = L\{\delta_0(t)\} = 1 \quad (7.5.1)$$

potom tedy bude

$$u_2(t) = L^{-1}\{u_2(p)\} = L^{-1}\{u_1(p) \cdot K(p)\} = L^{-1}\{K(p)\}$$

Pro soustředěné obvody je $K(p)$ lomenou funkcí v p čili

$$K(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}$$

a v jiném tvaru

$$K(p) = K \cdot \frac{(p-z_1)(p-z_2)\cdots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n)} \quad (7.5.2)$$

z_1, z_2, \dots, z_m nazýváme **nuly** přenosové funkce

p_1, p_2, \dots, p_n nazýváme **póly** přenosové funkce

Polynom $D(p)$ má reálné, konstantní koeficienty, a proto póly budou buď čísla reálná nebo komplexně sdružené dvojice.

Výraz (7.5.2) můžeme převést v případě, že se bude jednat jednoduché póly (např. metodou neurčitých koeficientů nebo jinou) na tvar

$$K(p) = \frac{K_1}{p-p_1} + \frac{K_2}{p-p_2} + \dots + \frac{K_n}{p-p_n} \quad (7.5.3)$$

kde K_1, K_2, \dots, K_n jsou patřičné konstanty (reálné nebo komplexní) . Odezva na dílčí lomené funkce pak bude

$$L^{-1} \left\{ \frac{K_n}{p-p_n} \right\} = K_n \cdot e^{p_n t} \quad (7.5.4)$$

Bude-li p_n reálné, dostaneme klesající nebo narůstající exponenciálu. Bude-li p_n komplexní :

$e^{p_n t} = e^{(\sigma \pm j\omega)t} = e^{\sigma t} \cdot e^{\pm j\omega t}$, dostaneme s časem klesající nebo narůstající harmonický průběh.

Poznámka : V případě k - násobného pólu dostaneme

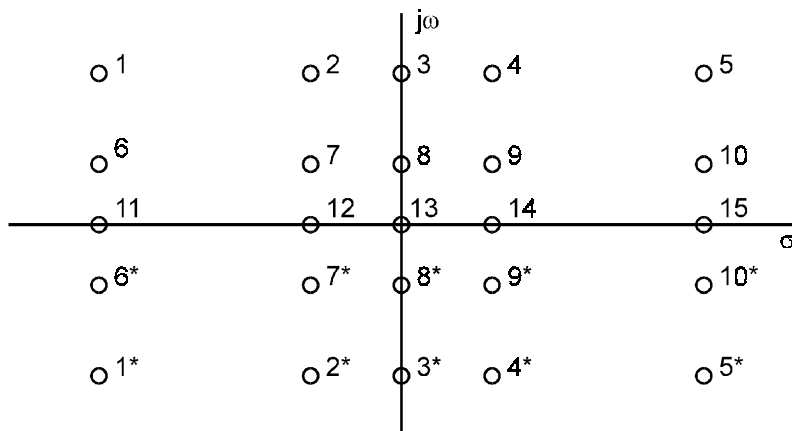
$$K(p) = \frac{N(p)}{D(p) \cdot (p-p_1)^k} = \frac{K_{11}}{p-p_1} + \frac{K_{12}}{(p-p_1)^2} + \dots + \frac{K_{1k}}{(p-p_1)^k} \quad (7.5.5)$$

což vede k zpětné Laplaceově transformaci tohoto tvaru

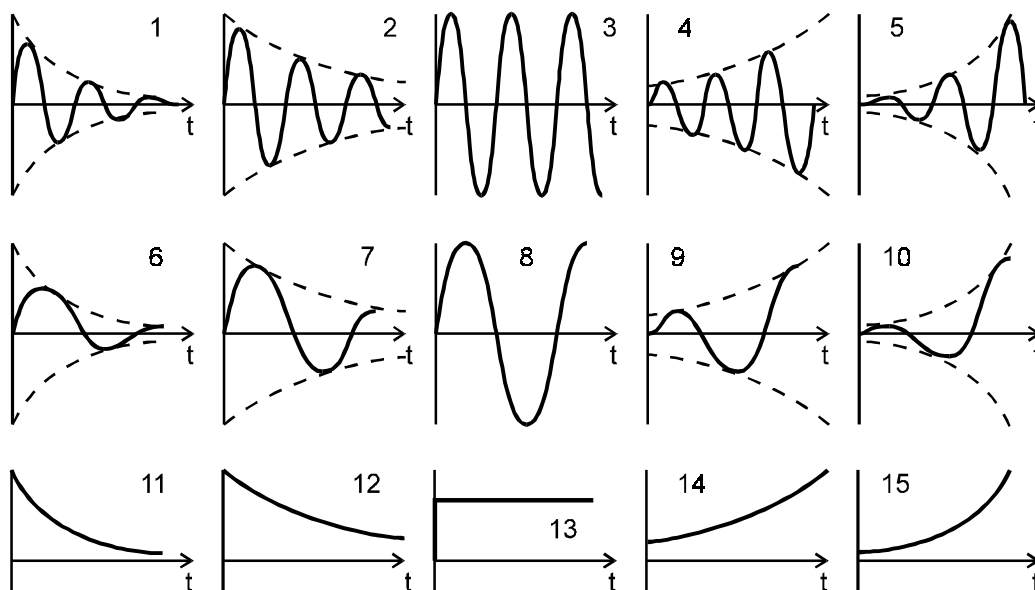
$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p+a)^{n+1}} \right\} = \frac{t^n \cdot e^{-at}}{n!} \quad (7.5.6)$$

Tvary průběhů však budou zcela analogické jako u pólů prostých.

Pro větší názornost si nyní nakresleme polohu pólů a jim odpovídající časovou odezvu na $\delta_0(t)$



Obr. 7.5-1



Obr. 7.5-2

Z hořejšího obrázku je zřejmé, že pokud reálná část pólu bude záporná, čili póly se budou nacházet v levé části komplexní roviny, bude časová odezva postupně klesat - jedná se tedy o tzv. stabilní obvody. Naopak budou-li reálné části pólů kladné, čili póly se budou nacházet v pravé části komplexní roviny, budou časové odezvy narůstat nade všechny meze - jedná se tedy o tzv. nestabilní obvody.

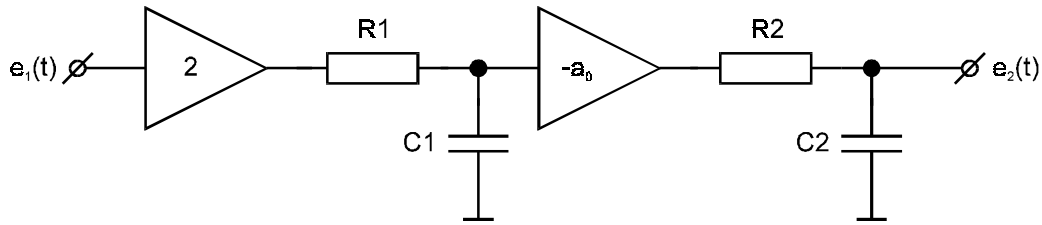
Mezi oběma případy je případ pólů na imaginární ose - je to případ čistě teoretický. Např. 13 by odpovídalo obvodu, v němž by neexistoval reálný odpor, 3 a 8 - při sebemenší změně parametrů obvodu přechází na stabilní nebo nestabilní obvod. Aby tedy obvod byl obvodem stabilním, musí mít póly v levé části komplexní roviny.

Zpětná vazba zřejmě bude měnit polohu pólů obvodu v komplexní rovině a pokud přesune póly z levé poloroviny do pravé, obvod, který byl původně stabilní, se stane nestabilním (ze zesilovače se stane generátor harmonického nebo neharmonického průběhu). Na tomto místě znovu musíme zkoumat, zda se tak nestane pro velké hodnoty $a_0 f_0$. Ukažme si toto na následujících dvou příkladech.

Příklad : Mějme obvod, pro který platí vztah

$$a(p) = -\frac{2a_0}{(p+1)(p+2)} \quad a_0 > 0$$

což může odpovídat obvodu



Obr. 7.5-3

čili dva stupně v kaskádě s omezením na vyšších kmitočtech. Zavedeme-li zpětnou vazbu $f(p) = f_0$; $f_0 > 0$ a dosadíme-li do vztahu

$$A(p) = \frac{a(p)}{1 - a(p)f(p)} \quad ,$$

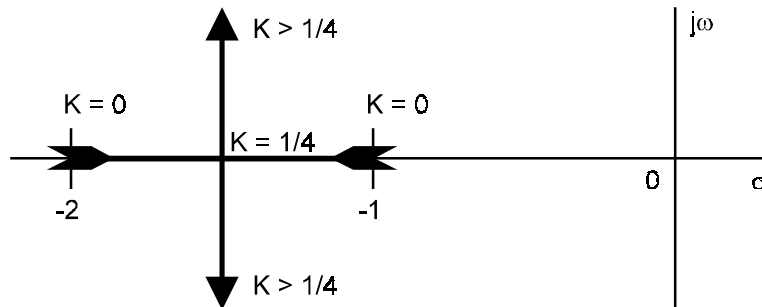
dostaneme

$$A(p) = \frac{-2a_0}{p^2 + 3p + 2 + 2a_0f_0}$$

a nazveme-li $2a_0f_0 = K$, můžeme spočítat polohu pólu v závislosti na K . Dostaneme

$$p_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8+4K}{4}}$$

což odpovídá obrázku



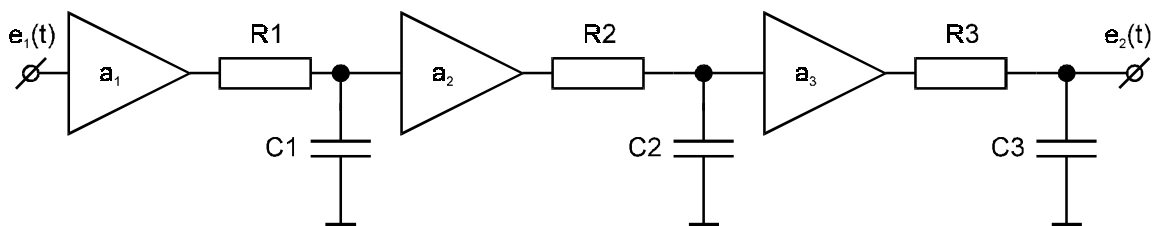
Obr. 7.5-4

Zřejmě se tento obvod nikdy nedostane do nestability, protože komplexně sdružené dvojice pólů pro libovolné K se nacházejí na rovnoběžce s imaginární osou.

Příklad : Je dán obvod

$$a(p) = \frac{a_0}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)} \quad , \quad f(p) = f_0 \quad , \quad f_0 > 0$$

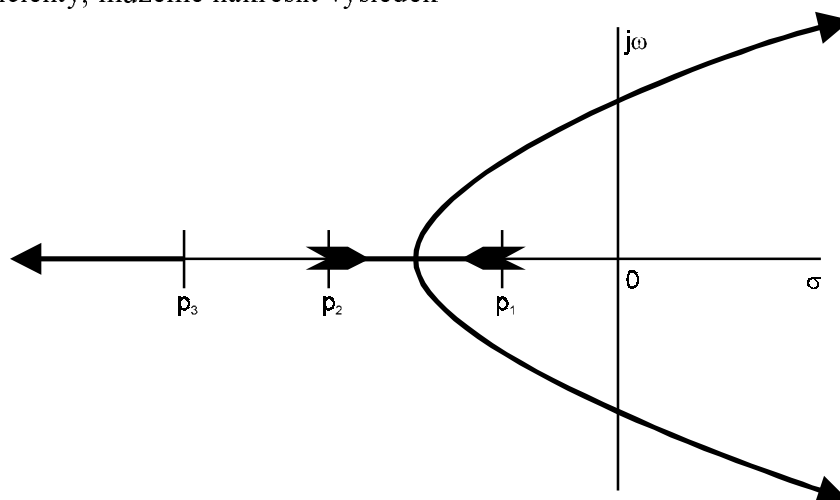
což odpovídá tomuto zapojení



Obr. 7.5-5

$$a_0 = a_1 a_2 a_3$$

Na základě toho, co je známo o řešení algebraických rovnic třetího řádu s konstantními reálnými koeficienty, můžeme nakreslit výsledek



Obr. 7.5-6

Stejně jako v předchozím případě, šipky označují zvětšující se $a_0 f_0$. V tomto případě už ovšem pro velké $a_0 f_0$ dochází jasně k nestabilitě, a tedy ke vzniku s časem narůstajících kmitů.

Z předchozího je patrné, že zpětná vazba může dát vznik komplexně sdruženým pólům, které ovšem mají za následek v tom, že jakákoliv rychlá změna vstupního signálu bude na výstupu doprovázena tlumenými harmonickými kmity. To je nepříznivý jev, a proto našim požadavkem bude, aby při zavedení zpětné vazby póly zůstaly i nadále reálné nebo se nacházely blízko reálné osy tak, aby amplituda tlumených kmitů nepřesáhla několik procent celkové amplitudy výstupního signálu.

Známe tedy již kritéria umístění pólů obvodu a kritéria pro vznik nestability. Potíž je však v tom, že jsou to kritéria vlastně matematická, vycházející z vlastností přenosové funkce. Nejsme schopni měřením zjistit polohu pólů přímo. Proto je výhodné zavést kritéria související s polohou pólů ale na základě měření, která mohou udělat. Jednou z dobrých možností je měření amplitudové charakteristiky. Vzniká tedy otázka, jak souvisí amplitudová charakteristika (případně i fázová charakteristika) s polohou pólů v komplexní rovině. / Pro jednoduchost budeme uvažovat případ jednoduchých pólů z důvodů, které byly uvedeny dříve. / Takovým pólům odpovídá přenos ve tvaru - viz vztah (7.5.7)

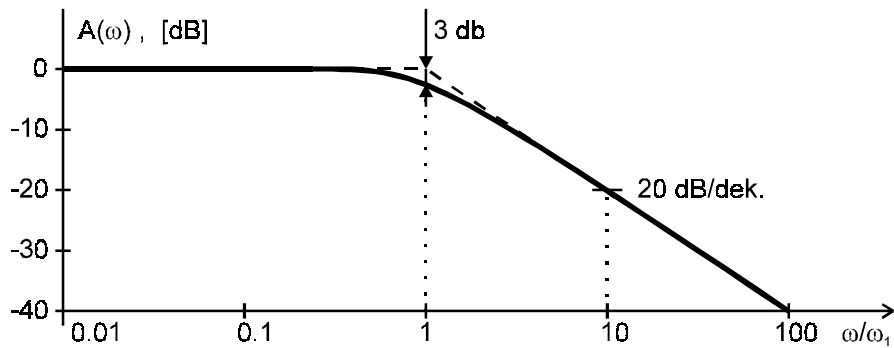
$$K(p) = \frac{K}{p - p_n} \quad K(j\omega) = k(p) \Big|_{p = j\omega} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (7.5.7)$$

Z toho určíme, že

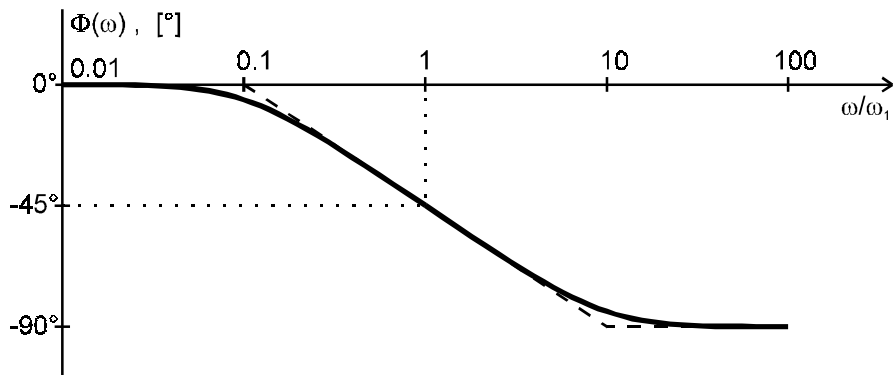
$$A(\omega) = \left[1 + (\omega/\omega_1)^2 \right]^{-1/2} \quad \text{neboli} \quad A(\omega) \Big|_{dB} = -10 \log \left[1 + (\omega/\omega_1)^2 \right] \quad (7.5.8)$$

$$\Phi(\omega) = \arctg(-\omega/\omega_1) \quad \text{kde} \quad \omega_1 = p_n \quad (7.5.9)$$

Potom můžeme nakreslit tyto charakteristiky a aby měly obecnou platnost, budeme vynášet závislost $A(\omega)$ v dB na ω/ω_1 a $\varphi(\omega)$ ve stupních na ω/ω_1 . Charakteristiky jsou uvedeny na dalším obrázku. Abychom nahradili tyto charakteristiky jednodušší závislostí, pokusme se je sestavit z přímkových úseků, jak je též na obrázku znázorněno.



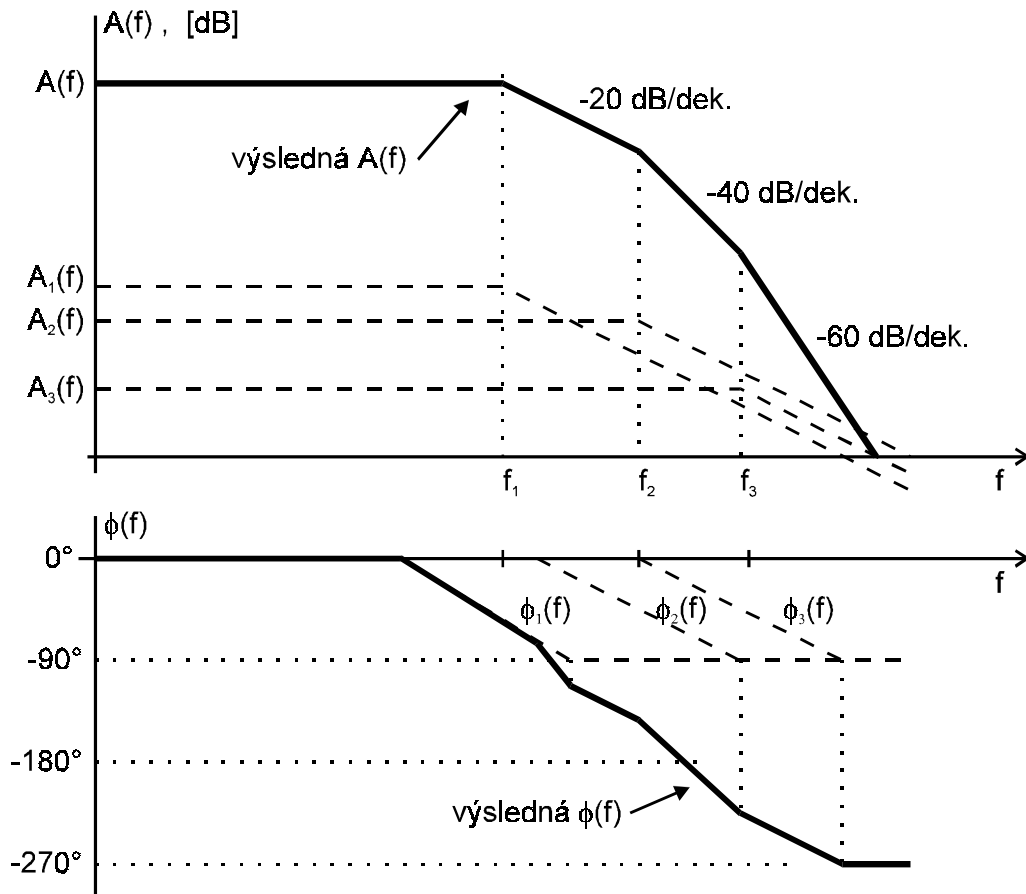
Obr. 7.5-7



Obr. 7.5-8

Z obrázku je zřejmé, že pro $\omega/\omega_1 > 1$ klesá amplitudová charakteristika o 20 dB/dek a že bod zlomu je určen pólem přenosu. To je tedy vztah mezi pólem obvodu a amplitudovou charakteristikou. Znamená to - naměříme-li $A(\omega)$ a provedu-li aproximaci přímkami a bude-li pokles 20 dB/dek, mohou tvrdit, že v bodě zlomu se promítá jednoduchý, reálný / záporný / pól.

Naše obvody jsou však složitější. Jak tomu bude v tomto případě, dokazuje následující obrázek / odpovídá to starším typům operačních zesilovačů / .



Obr. 7.5-9

- $A_1(f)$, $\phi_1(f)$ charakteristiky rozdílového vstupního zesilovače
 $A_2(f)$, $\phi_2(f)$ charakteristiky mezistupně
 $A_3(f)$, $\phi_3(f)$ charakteristiky koncového stupně

Podmínku pro vznik nestability můžeme také odvodit ze vztahu pro zpětnou vazbu

$$A(p) = \frac{a(p)}{1 - a(p)f(p)} = \frac{a(p)}{1 - L(p)}$$

a podmínka nestability je

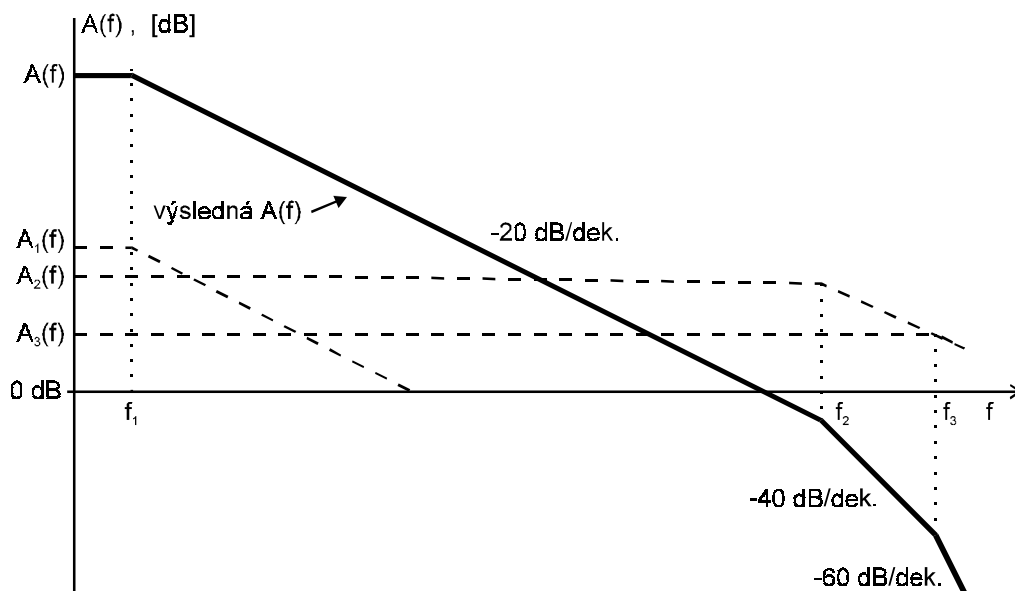
$$L(p) = 1 \quad (7.5.10)$$

Jako nebezpečná z hlediska nestability se jeví přítomnost prudkého poklesu amplitudové charakteristiky, to jest oněch - 60 dB/dek . Objevuje-li se tento pokles v některé části amplitudové charakteristiky, je třeba velké obezřetnosti při zavádění zpětné vazby. Pro některé případy může docházet k nestabilitě. Aby k ní nedocházelo, užívají se různé kompenzační obvody, složené z kapacitorů a rezistorů, které omezují pásmo propustnosti obvodu. Pro jednotlivé požadavky jsou tyto kompenzační obvody a jejich parametry přímo předepsány výrobcem.

Ještě jeden obvod stojí za povšimnutí. Mějme obvod, pro který platí $a(p) = -\frac{a_0}{p - p_1}$, $a_0 > 0$, tj. obvod s jednou integrační konstantou, a tedy se spádem -20 dB/dek. Zavedeme-li frekvenčně nezávislou zpětnou vazbu tj. $f(p) = f_0$, bude platit

$$A(p) = \frac{-a_0}{p - p_1 + a_0 f_0}$$

Póly budou řešením rovnice $p - p_1 + a_0 f_0 = 0$ a dostáváme tak $p_0 = p_1 - a_0 f_0$. Po zavedení zpětné vazby zůstává pól reálný a pohybuje se ve směru šipek čili nemůže v žádném případě dojít k nestabilitě. Tohoto principu se někdy využívá tak, že vytvoříme obvod, který má jeden jediný dominující pól / např. tak, že mezní kmitočet některé části obvodu bude nižší než částí ostatních / .



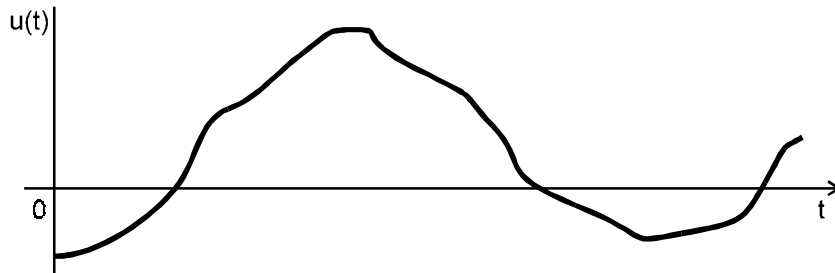
Obr. 7.5-10

V tomto případě poklesy větší než 20 dB/dek nastávají až na kmitočtech, pro které platí $A(f) < 1$ a zde tedy ke generaci / nestabilitě / dojít nemůže. / Takto je např. řešen operační zesilovač typu 741, považovaný za obvod pro univerzální použití. / Dosáhli jsme cíle za cenu drastického snížení šíře pásma obvodu bez zpětné vazby - toto nám ovšem není na závadu, protože již víme, že zpětná vazba nám opět širší pásma zvětší.

8. Vzorkování

8.1 Základní úvahy

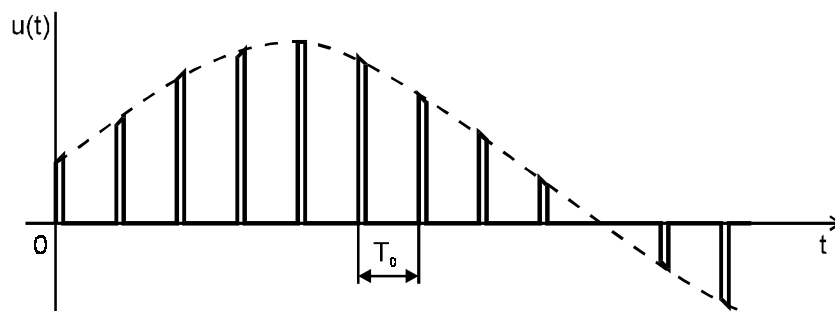
Signály, které jsme dosud uvažovali, byly spojitou funkcí v čase a realizovatelné signály i v amplitudě - takovým signálům říkáme signály analogové.



Obr. 8.1-1

Jiným typem signálů jsou signály diskrétní. Ty mohou být různého typu.

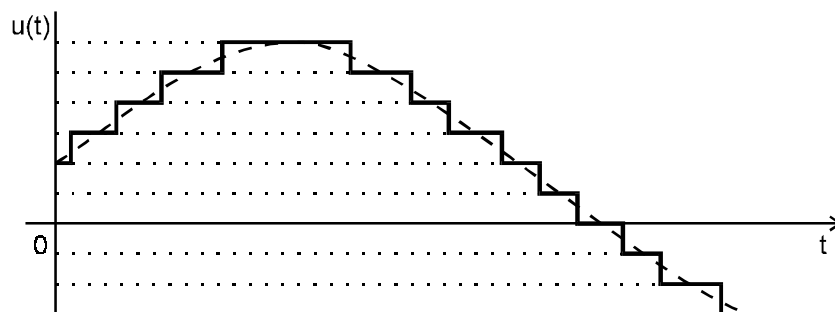
a/ Signály diskrétní v čase - ty zůstávají však spojitě v okamžité hodnotě, to znamená, že mohou dosahovat všech možných okamžitých hodnot.



Obr. 8.1-2

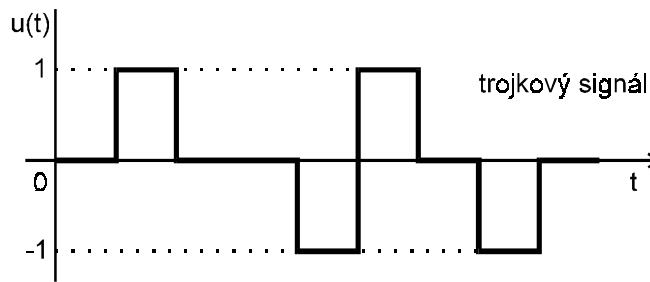
Tyto signály vznikají tzv. vzorkováním původního analogového průběhu.

b/ Signály diskrétní v okamžité hodnotě - zůstávají spojitě v čase. Takový signál může nabývat jen konečný počet stavů v různých časových okamžicích. Tento signál můžeme získat kvantováním analogových signálů.



Obr. 8.1-3

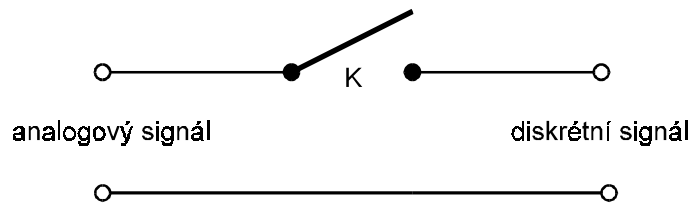
c/ Jiným typem signálu jsou signály číslicové / digitální /. Jsou to signály, které jsou diskrétní v čase i v okamžité hodnotě.



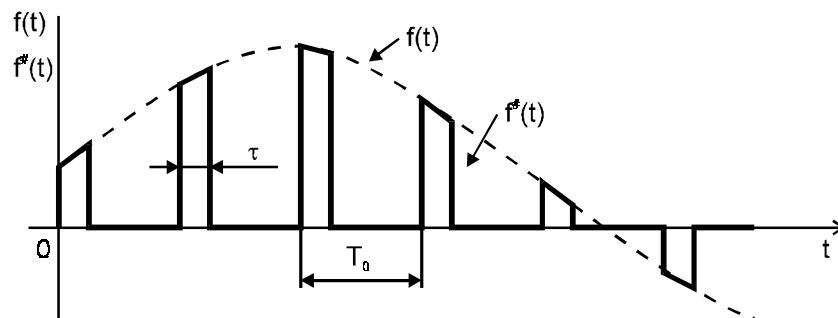
Obr. 8.1-4

Na počátku elektroniky byly signály analogové zpracovávány v analogových obvodech. Ukazuje se však, že dochází vlivem nedokonalostí zpracování ke zkreslení signálů / kmitočtové, nelineární, vliv šumů a dalších nežádoucích signálů atd. /. Vhodnou alternativní cestou je převedení analogového signálu na signál diskrétního charakteru a na signál digitální a zpracování v této formě.

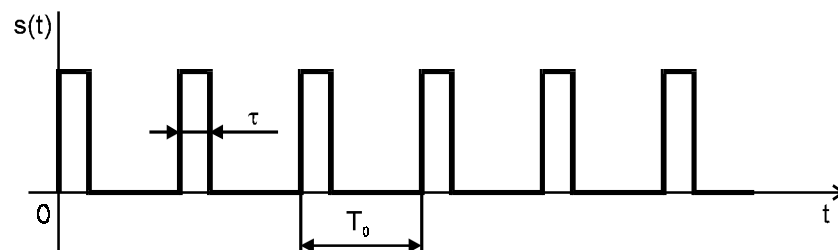
Analogový signál můžeme převést na časově diskrétní signál pomocí vzorkování. Vzorkování můžeme uskutečnit pomocí řízeného spínače / klíče / , který bude spínat v jistých diskrétních časových okamžicích.



Klíč K periodicky spíná po velmi krátkou dobu, takže diskrétní signál má amplitudu rovnou okamžité hodnotě analogového signálu v okamžiku vzorkování. Bylo by možné i nepravidelné / náhodné / vzorkování, ale užívá se velmi málo. Máme tedy situaci podle obrázku :



Obr. 8.1-5



Obr. 8.1-6

Průběh $f^\#(t)$ je zřejmě součinem funkcí $f(t)$ a $s(t)$, přičemž $f(t)$ může být libovolný signál, který však má omezené spektrum a $s(t)$ je periodický signál, a proto může být reprezentován vztahem vyplývajícím z Fourierovy transformace čili

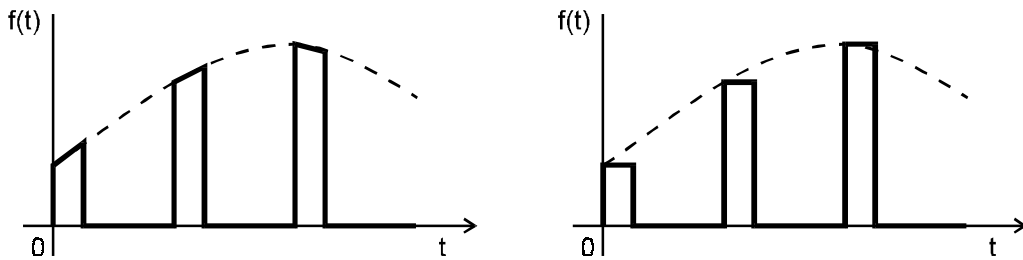
$$f^\#(t) = f(t) \cdot s(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t} \quad (8.1.1)$$

Protože $f(t)$ a $s(t)$ jsou vzájemně nezávislé signály, můžeme napsat

$$f^\#(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot f(t) \cdot e^{jn\omega_s t} \quad (8.1.2)$$

Poznámka :

O vzorkování 1. druhu mluvíme, je-li šířka vzorkovací impulsů konečná a vrchol impulsu sleduje spojitý průběh. O vzorkování 2. druhu mluvíme, je-li šířka vzorkovacích impulsů konečná a vrchol impulsu je udržován na hodnotě určené okamžikem vzorkování spojitého průběhu - tak je prakticky proces vzorkování vždy realizován - viz Obr. 8.1-7 .



Obr. 8.1-7

Nyní chceme zjistit, jak bude vypadat spektrum vzorkovaného signálu $f^\#(t)$ a jaký vztah bude mít ke spektru původního analogového signálu $f(t)$. Provedme proto Fourierovu transformaci vztahu (8.1.2)

$$F^\#(\omega) = F(f^\#(t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n F\left\{f(t) \cdot e^{jn\omega_s t}\right\} \quad (8.1.3)$$

Vzpomeňme si na větu o posuvu, kterou jsme poznali v Laplaceově transformaci. Podobná věta platí i pro Fourierovu transformaci. Je-li $F(\omega) = F\{f(t)\}$, pak platí

$$F\{f(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau} \cdot F(\omega) \quad (8.1.4)$$

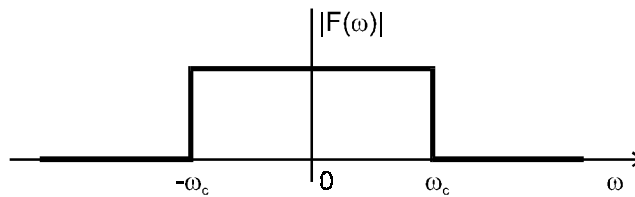
ale vztah platí i obráceně tj.

$$F(\omega - \Omega) = F\left\{f(t) \cdot e^{j\Omega t}\right\} \quad (8.1.5)$$

a tohoto druhého vztahu použijeme k úpravě rovnice (8.1.3) a dostaneme

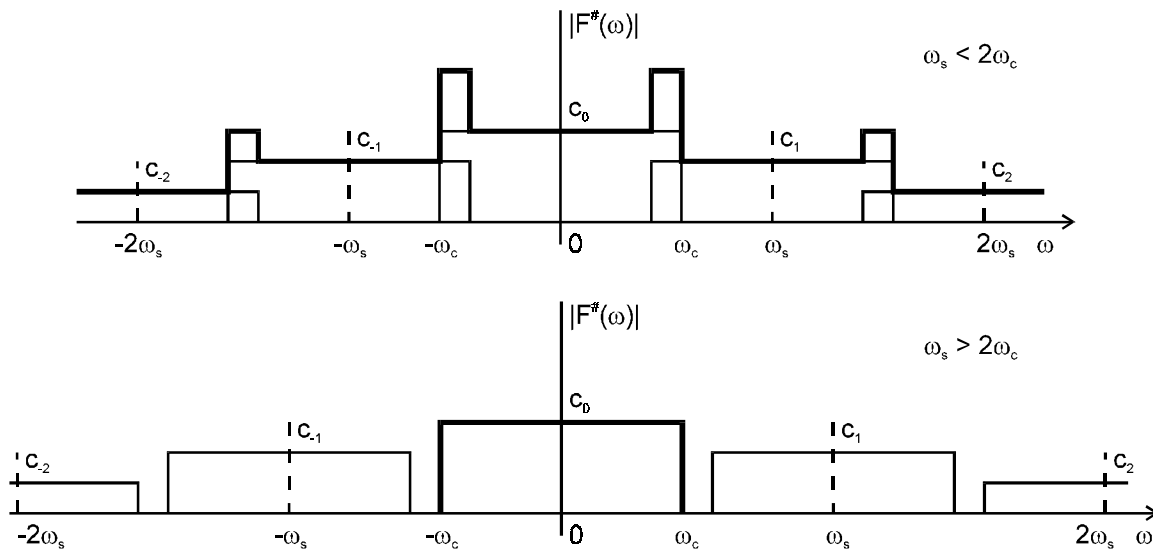
$$F^\#(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot F(\omega - n\omega_s) \quad (8.1.6)$$

Tento vztah nám říká, že spektrum vzorků / 1. vzorkování / analogového signálu $f(t)$ je složeno z nekonečné řady spekter posunutých o násobky vzorkovací frekvence ω_s . Proto jsme již na začátku úvahy předpokládali, že $f(t)$ má omezené spektrum, jinak by nutně vždy došlo k překrývání jednotlivých spekter vzorkovaného průběhu $f^\#(t)$. Uvažujme spektrum modulů komplexních amplitud omezeného charakteru podle obrázku :



Obr. 8.1-8

Platí tedy, že $F(\omega) \equiv 0$ pro $|\omega| > \omega_c$. Zřejmě bude záležet na vzájemném vztahu mezi ω_c a ω_s čili mezi nejvyšším kmitočtem obsaženým ve spektru analogového signálu a vzorkovací frekvencí, jak bude vypadat výsledné spektrum $f^\#(t)$. Uvažujme dva případy : a/ $\omega_s < \omega_c$, b/ $\omega_s > \omega_c$. Oba jsou znázorněny na následujícím obrázku :



Obr. 8.1-9

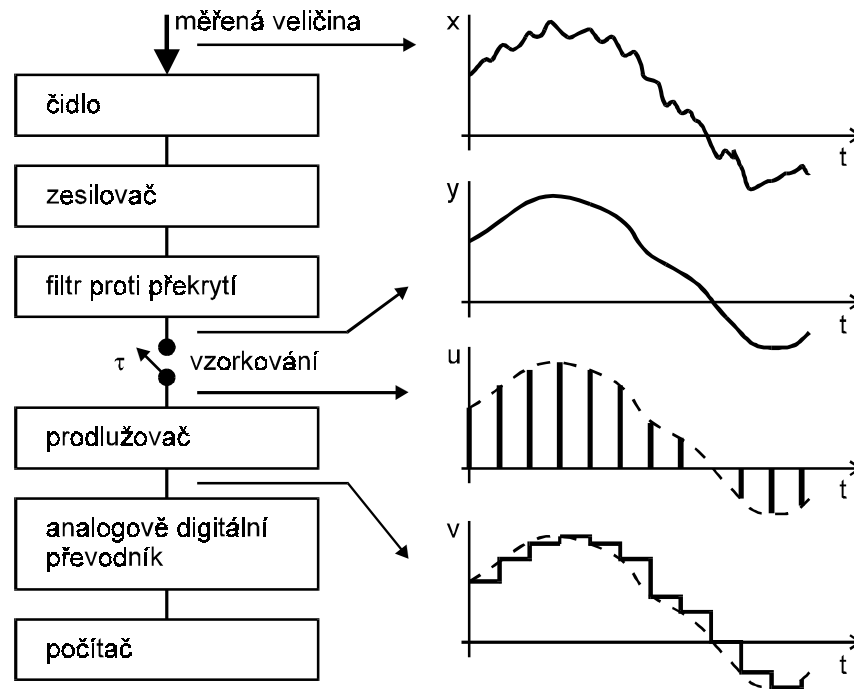
V případě a/ došlo k překrývání spekter a z toho vyplývá, že se nám žádným způsobem nepodaří obnovit původní signál, protože spektrum je porušeno. V případě b/ stačí použít filtr a vybrat vhodné spektrum a dostaneme původní signál.

Znamená to tedy, že musíme volit vždy případ $\omega_s \geq 2\omega_c$ (8.1.7)

Vzorec (8.1.7) je tzv. věta o vzorkování (Shannonův vzorkovací teorém) .

Pokud dovolí následné obvody a samotný vzorkovací obvod tuto frekvenci generovat a zpracovávat, můžeme pracovat v reálném čase. Tomu se říká vzorkování v reálném čase. Pokud tomu tak nebude a budeme-li mít opakující se průběh, můžeme použít sekvenční vzorkování, kdy bereme z jednoho průběhu pouze jeden vzorek a z následujícího nebo některého dalšího další vzorek v jiném čase atd.

Pokud existuje možnost překrývání spekter, je vhodné zařadit do řetězce vhodný filtr, který zabezpečí, že se ve spektru nebudou vyskytovat frekvence větší než ω_c . Potom uspořádání může být podle obrázku, kde jsou též průběhy signálů.



Obr. 8.1-10

Dosavadní úvahy nám nedaly odpověď na to, jaký vliv bude mít šířka vzorkovacích impulsů / označena τ /. Museli bychom uvažovat tvar vzorkovacího impulsu a každý vzorek brát jako součin okamžité hodnoty spojitého průběhu se vzorkovacím průběhem v okamžiku vzorkování. Zjistili bychom, že svojí roli zde hraje nejen tvar vzorkovacího průběhu, ale i charakter vzorkovače / jeho voltampérová charakteristika / a dostali bychom řadu konkrétních řešení. Pro případ ideálního vzorkovače a obdélníkového vzorkovacího impulsu dostaneme, že

spektrum $f^\#(t)$ bude modifikováno členem $\frac{\sin \omega\tau}{\omega\tau}$, a to znamená, že bude docházet k útlumu vysokých kmitočtů.