Lagrangeovský model ve 2D

- Eulerovy rovnice ve 2D v Lagrageovských souřadnicích

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{d\,\rho}{d\,t} &= -\nabla \cdot \mathbf{v}, \\
\rho\frac{d\,\mathbf{v}}{d\,t} &= -\nabla \cdot p, \\
\rho\frac{d\,e}{d\,t} &= -p\,\nabla \cdot \mathbf{v}
\end{aligned}$$

- diskretizace v uzlech a buňkách, síla zonální, subzonální a viskózní
- Lagrangeovská síť se pohybuje s tekutinou
- hmota neteče přes hranice buněk
- pohyblivá síť může degenerovat .

Metoda ALE – Arbitrary Lagrangian Eulerian method

- kombinuje Lagrangeovský a Eulerovský přístup

  1. Lagrangeovský výpočet – několik kroků, nebo dokud se nezhorší kvalita výpočetní sítě
  2. rezónování – vyhlazení, zlepšení kvality výpočetní sítě
  3. remapování – konzervativní interpolace zachovávajících se veličin ze staré sítě na novou

Rezónování

- vyhlazení průměrováním
- Winslowovo vyhlazení

$$\mathbf{x}_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2\left(\alpha^k + \gamma^k\right)} \Big(\alpha^k \left(\mathbf{x}_{i,j+1}^k + \mathbf{x}_{i,j-1}^k\right) + \gamma^k \left(\mathbf{x}_{i+1,j}^k + \mathbf{x}_{i-1,j}^k\right) - \frac{1}{2}\, \beta^k \left(\mathbf{x}_{i+1,j+1}^k - \mathbf{x}_{i-1,j+1}^k + \mathbf{x}_{i-1,j-1}^k - \mathbf{x}_{i+1,j-1}^k\right)\Big),$$

  kde koeficienty $\alpha^k = x_\xi^2 + y_\xi^2$, $\beta^k = x_\xi\, x_\eta + y_\xi\, y_\eta$, $\gamma^k = x_\eta^2 + y_\eta^2$, a kde (ξ, η) jsou logické souřadnice

- rozmotání (untangling) degenerované sítě

Remapování

- Dáno:
  - dvě sítě: Lagrangeovská - $\{C\}$, a vyhlazená $\{\tilde{C}\}$
  - střední hodnoty zahovávajících se veličin $g(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y)$ v Lagrangeovských buňkách (např., $g = \rho$, $g = \rho\, u$, $g = \rho\, \Big(\varepsilon +$

$$g_C = \frac{\int\limits_C g(\mathbf{r})\, dV}{V(C)} = \frac{m_C}{V(C)}, \quad m_C \equiv \int\limits_C g(\mathbf{r})\, dV\,.$$

  - celková hmota (hybnost, energie)

$$M \equiv \int\limits_\Omega g(\mathbf{r})\, dV = \sum_{\forall C} \int\limits_C g(\mathbf{r})\, dV = \sum_{\forall C} m_C\,.$$

- je třeba najít střední hodnoty v rezónovaných buňkách: $\tilde{g}^*_{\tilde{C}} = \frac{\tilde{m}^*_{\tilde{C}}}{V(\tilde{C})}$
  - přesnost:

$$\tilde{m}^*_{\tilde{C}} \approx \tilde{m}_{\tilde{C}} = \int\limits_{\tilde{C}} g(\mathbf{r})\, dV$$

  - zachování mezí:

$$g_C^{\max} \geq \tilde{g}^*_{\tilde{C}} \geq g_C^{\min}\,, \quad g_C^{\max} = \max_{k \in C(C)} g_k\ , g_C^{\min} = \min_{k \in C(C)} g_k$$

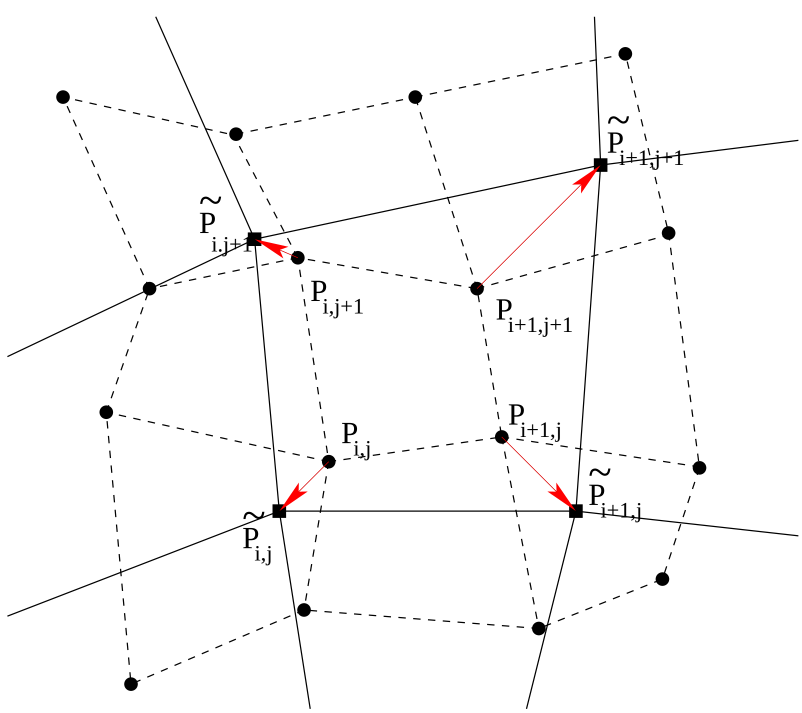
– konzervativita:

$$\sum_{\forall C} \tilde{m}^*_{\tilde{C}} = M$$

– zachování lineárních funkcí:

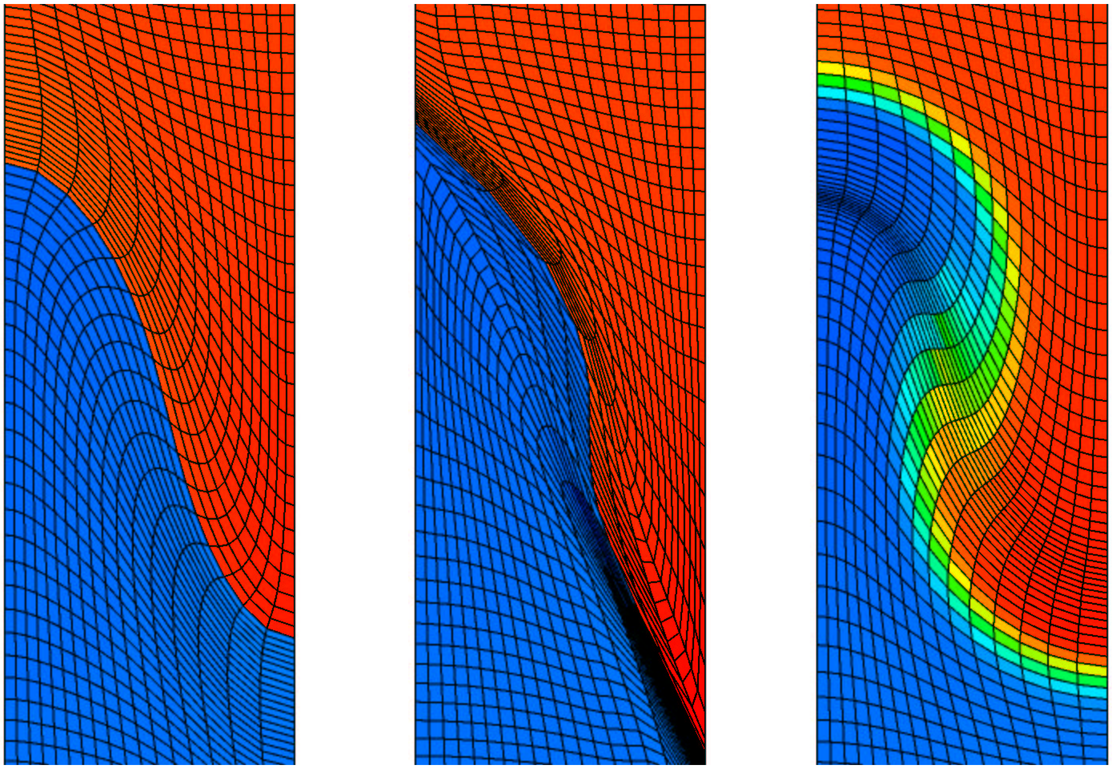
$$\tilde{m}^*_{\tilde{C}} = \tilde{m}_{\tilde{C}} = \int_{\tilde{C}} g(\mathbf{r})\, dV \;, \quad \text{If } \; g(\mathbf{r}) = a + b\, x + c\, y$$

- lineární rekonstrukce funkce v každé původní buňce, s limitry nebo bez limitrů
- přesná integrace vyžaduje výpočet průniků všech buněk - velmi pomalé
- přibližná integrace přes oblasti opsané pohybující se hranou



- konzervativní oprava pro zachování mezí

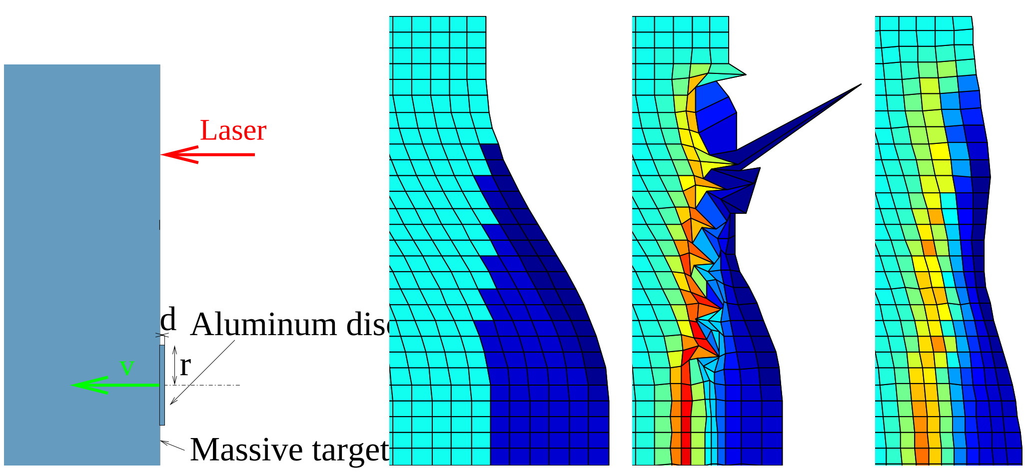
Rayleigh-Taylorova nestabilita



Lagr., $MF = 1.0$ Lagr., $MF = 0.1$ ALE, $MF = 0.1$

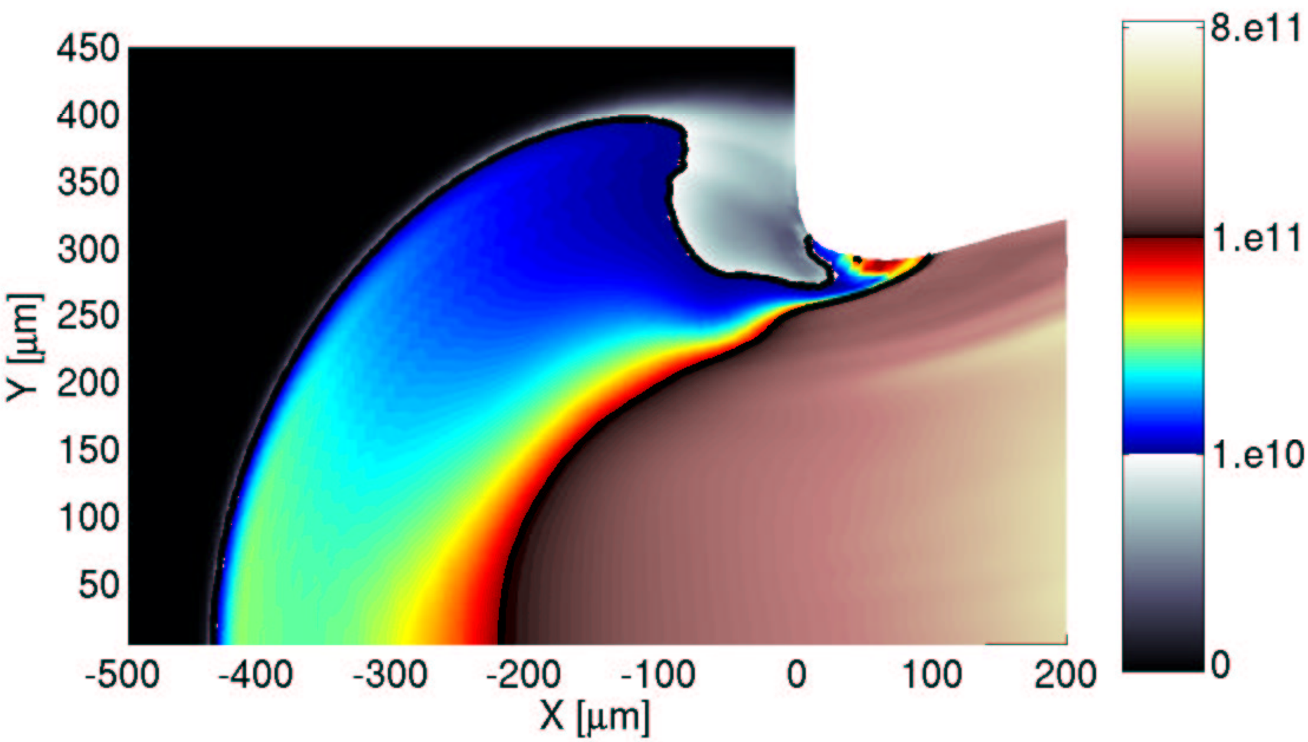
Náraz disku do terčíku

- Problem parameters similar to a part of the experiment performed on the PALS laser facility [Borodziuk et al. (2003)].
- Laser-massive target interaction, crater evolved.
- Disc impact – laser-irradiated Aluminum disc ablatively accelerates up to $54\ \mathrm{km/s}$ (for $250\ \mathrm{J}$ laser beam) and strikes to massive Aluminum target. Impacting disc density ($0.7\,\mathrm{g/cm^3}$) estimated from 1D simulation. The disc starts to sink into the target.
- Simulation starts in the moment of the impact. Lagrangian simulation fails very soon, ALE grid smooth.
- Density colormap of initial grid and Lagrangian and ALE grid in time $0.5\ \mathrm{ns}$.

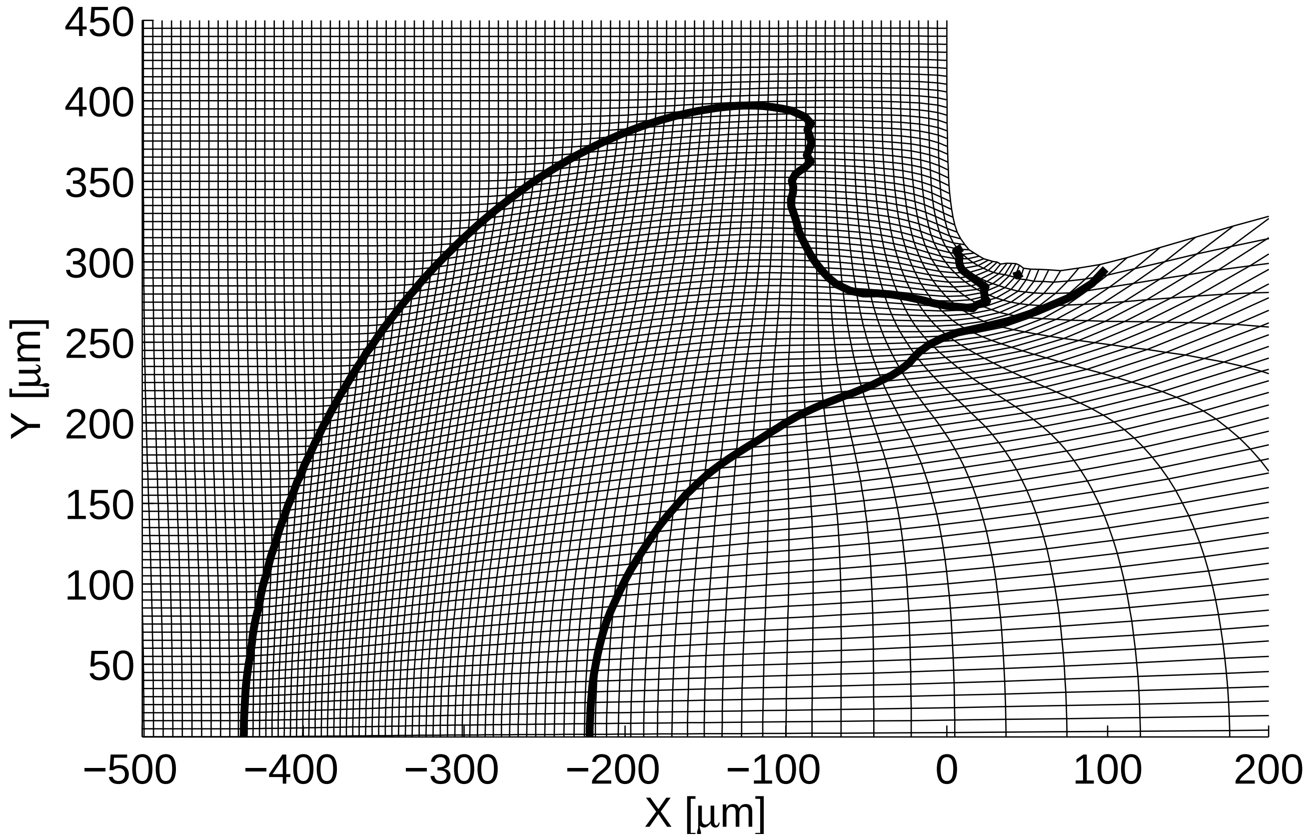


initial Lagr ALE

- After impact – both the massive target and the disc start to raise their temperature, shock wave is formed that propagates into the target and causes heating, melting and evaporation of the target material.
- Colormap of internal energy increase shows the formed crater shape after 30 ns.
- Computational grid is still smooth, computation can continue.
- Crater size and shape corresponds approximately to the experiment.



solid fluid gas



450
400
350
300
250
200
150
100
50
Y [μm]
−500
−400
−300
−200
−100
0
100
200
X [μm]