Difúze

Fickův zákon difúze v plynu

Předpokládejme ideální plyn s konstantní teplotou T a konstantním tlakem p v klidu, ve kterém je nízká nehomogenní hmotnostní koncentrace příměsi α

Pak ve stacionárním stavu musí být celková síla na příměs α nulová

$$0 = -m_\alpha n_\alpha \nu_{\alpha p} \vec{u}_\alpha - \nabla p_\alpha = -m_\alpha n_\alpha \nu_{\alpha p} \vec{u}_\alpha - k_B T \nabla n_\alpha \quad ,$$

kde $\nu_{\alpha\mathrm{p}}$ je srážková frekvence příměsi α s molekulami plynu

Tok částic α je $\quad \vec{\Gamma}_\alpha = n_\alpha \vec{u}_\alpha = -D_\alpha \nabla n_\alpha = -\dfrac{k_B T}{m_\alpha \nu_{\alpha p}} \nabla n_\alpha \quad$ ***Fickův zákon***

Po dosazení do rovnice kontinuity

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = \mathrm{div}\left(D_\alpha \nabla n_\alpha\right) = D_\alpha \Delta n_\alpha \quad ,$$

neboť koeficient difúze je zde konstantní

Parabolická parciální diferenciální rovnice $L^2 = D\tau$

Difúze ve slabě ionizovaném plynu

$n_n =>$ $\qquad \lambda_f = \frac{1}{n_n \sigma}$ $\qquad \nu = n_n \langle \sigma \mathrm{v} \rangle = \left\langle \frac{\mathrm{v}}{\lambda_f} \right\rangle$

Pohybové rovnice (bez nebo podél magnetického pole)

$$m_\alpha n_\alpha \left[\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + \left(\vec{u}_\alpha \nabla \right) \vec{u}_\alpha \right] = q_\alpha n_\alpha \vec{E} - m_\alpha n_\alpha \nu_{\alpha n} \vec{u}_\alpha - \nabla p_\alpha$$

α je typ částic, stacionární stav. $\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} = 0$, člen $\left(\vec{u}_\alpha \nabla \right) \vec{u}_\alpha$ zanedbáme (kvadratický)

$$\vec{u}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha \nu_{\alpha n}} \vec{E} - \frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha \nu_{\alpha n}} \cdot \frac{\nabla n_\alpha}{n_\alpha} \qquad \vec{\Gamma}_\alpha = n_\alpha \vec{u}_\alpha = \pm \mu_\alpha n_\alpha \vec{E} - D_\alpha \nabla n_\alpha$$

μ_e, μ_i jsou pohyblivosti $\mu_\alpha = \left| \frac{q_\alpha}{m_\alpha \nu_{\alpha n}} \right|$ $\qquad$ D_e, D_i difúzní koeficienty $D_\alpha = \frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha \nu_{\alpha n}}$

Ambipolární difúze – při difúzi vzniká elektrické pole zajišťující kvazineutralitu

hustota náboje musí zůstat ≈ 0 => $q_e\vec{\Gamma}_e + q_i\vec{\Gamma}_i = 0$ $q_e n_e + q_i n_i \simeq 0$

Slabě ionizovaný plyn $Z = 1$ $q_i = e$ $q_e = -e$ $\Gamma_e = \Gamma_i = \Gamma$ $n_e = n_i = n$

$$\vec{\Gamma} = \mu_i n\vec{E} - D_i\nabla n = -\mu_e n\vec{E} - D_e\nabla n \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e}\frac{\nabla n}{n}$$

Elektrické pole je úměrné gradientu hustoty a koeficient ambipolární difúze D_a je

$$\vec{\Gamma} = -\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e}\nabla n = -D_a\nabla n$$

v plazmatu bez B je $\mu_e >> \mu_i$ a

$$D_a \approx D_i + \frac{T_e}{T_i}D_i \qquad (\approx 2D_i \quad \text{při stejné teplotě } e \text{ a } i)$$

Difúze ve směru kolmém na B

Ve slabě ionizovaném plynu je ν srážková frekvence sledovaných částic s neutrály, nechť B je ve směru osy z a gradient hustoty je ve směru osy x, a nechť $\tau = \nu^{-1}$

$$0 = -k_B T \frac{\partial n}{\partial x} + nqu_y B - \nu n m u_x \qquad 0 = -nqu_x B - \nu n m u_y$$

$$u_x = -\frac{k_B T}{nm\nu\left(1+\frac{\omega_c^2}{\nu^2}\right)}\frac{\partial n}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_\perp = -\frac{k_B T}{m\nu\left(1+\omega_c^2\tau^2\right)}\frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{D_{||}}{\left(1+\omega_c^2\tau^2\right)}\frac{\partial n}{\partial x}$$

Pak

$$D_\perp = \frac{D_{||}}{1+\omega_c^{\,2}\tau^2}$$

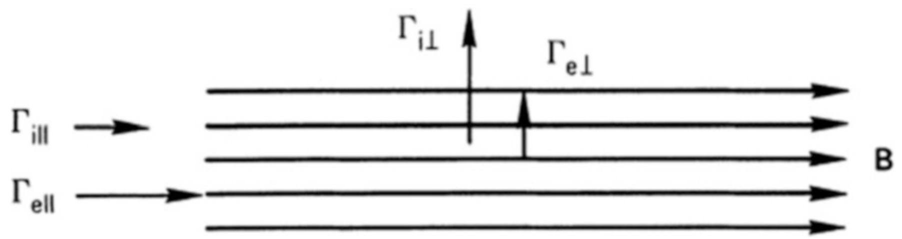
Pokud $\omega_c \tau = \frac{\omega_c}{\nu} = \frac{\lambda_f}{r_L} \gg 1$, pak $D_\perp = \frac{D}{\omega_c^{\,2}\tau^2} = \frac{k_B T\nu}{m\omega_c^{\,2}} = \frac{mk_B T\nu}{q^2 B^2}$

Difúzní koeficient napříč B je přímo úměrný srážkové frekvenci, bez srážek by k žádné difúzi nemohlo dojít, po srážce se částice posune o maximálně 2 Larmorovy radiusy, čili Larmorův rádius nahrazuje střední volnou dráhu.

Napříč B ionty pohyblivější než elektrony – při ambipolární difúzi vznikající elektrické pole ale nemůže ovlivit tok elektronů a iontů ve směru elektrického pole

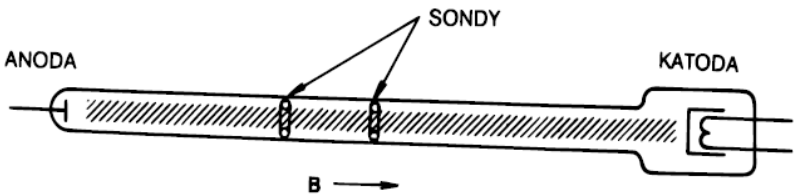
Navíc dostanu tok částic ve směru kolmém na B a ∇n, jde o diamagnetický drift, který jsme při zanedbání srážek $(\omega_c \tau \gg 1)$ odvodili už dříve (kapitola 4).

Jestliže sloupec plazmatu není velmi dlouhý, kvazineutralita může být dosažena v důsledku podélného toku elektronů k anodě

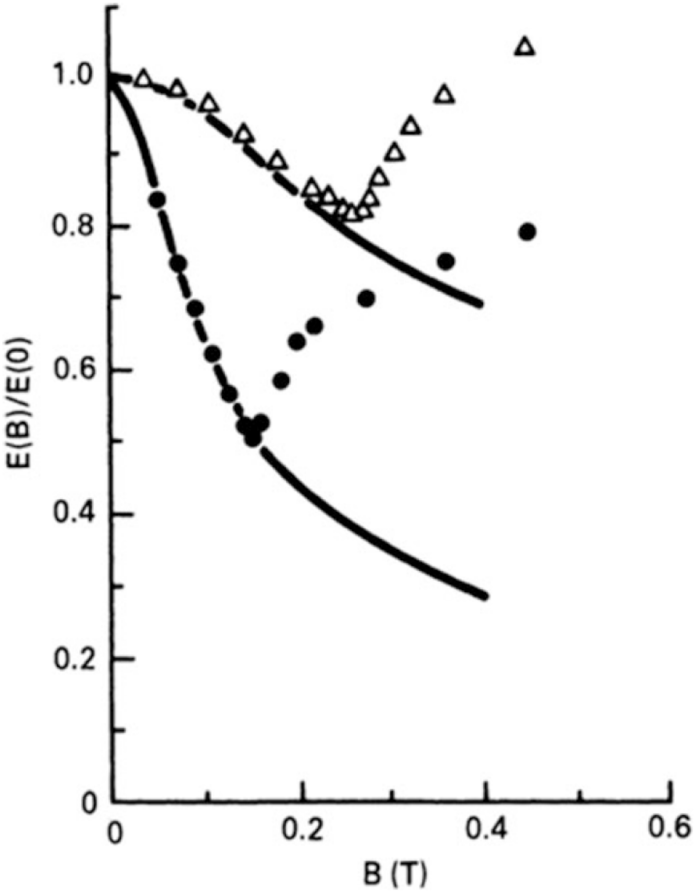


Podélné a příčné toky částic v magnetickém poli

Velmi dlouhý sloupec plazmatu – stacionární kladný sloupec samostatného výboje – ztráta nabitých částic v důsledku příčné difúze je kompenzována srážkovou ionizací



Lehnertův-Hohův experiment (1960) k ověření vlivu magnetického pole na difúzi ve slabě ionizovaném plynu (3.5 m dlouhý kladný sloupec o průměru 1 cm)



Předpoklad : příčná difúze bude klesat s růstem podélného magnetického pole, a tak menší elektrické pole bude stačit ke srážkové ionizaci dostatečné pro kompenzaci ztrát.

Graf - Experimentální výsledky pro 2 hodnoty tlaku

Experimentální výsledek souhlasí s předpokladem pro malé hodnoty ***B***. Situace se ale kvalitativně mění, když je překonána prahová hodnota velikosti magnetického pole a elektrické pole roste s hodnotou magnetického pole.
Tento jev vysvětlili Kadomcev a Nedospasov nestabilitou vedoucí ke šroubovitému tvaru kladného sloupce a ke zvětšené příčné difúze.

Plně ionizované plazma

V plně ionizovaném plazmatu bude srážkový člen pro elektrony $\nu_{ei} n_e m_e (\vec{u}_i - \vec{u}_e)$, rychlost difúze elektronů a iontů ve směru gradientu hustoty bude stejná v důsledku zákona zachování hybnosti. Ambipolární pole tedy nevznikne (navíc pole ve směru gradientu hustoty neovlivní rychlost difúze v tomto směru).

$$D_\perp = \frac{k_B (T_e + T_i / Z) \nu_{ei}}{m_e \omega_c^2} = \frac{m_e k_B (T_e + T_i / Z) \nu_{ei}}{e^2 B^2} \sim n T^{-1/2} B^{-2}$$

Klasická srážková difúze je úměrná B^{-2}, ale často při magnetickém udržení (v tokamacích apod.) je difúze větší, úměrná B^{-1}.

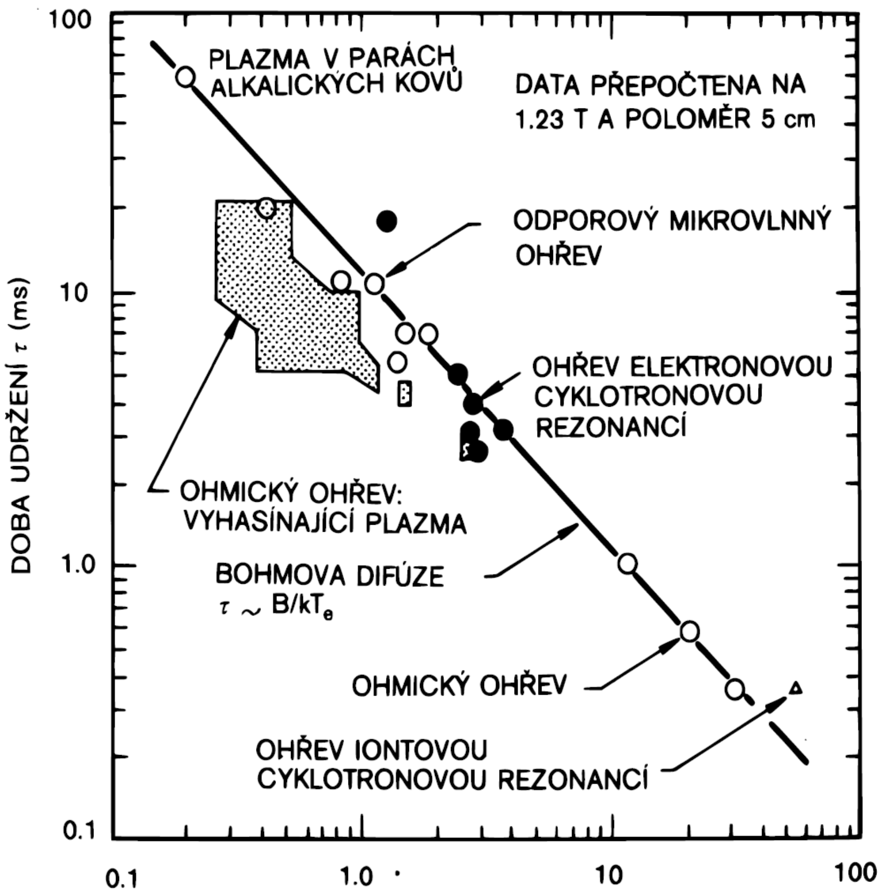
Z experimentální výsledků byla odvozena semiempirická **Bohmova difúze** s koeficientem

$$D_\perp = \frac{1}{16} \frac{KT_e}{eB} \equiv D_\mathrm{B}$$

Různá vysvětlení - 1) Závady magnetického pole - možnost silokřivky vedoucí na stěnu

2) Nesymetrické elektrické pole – asymetrie vakuové komory či asymetrie tvorby či ohřevu plazmatu $\Rightarrow$ ExB drift - konvektivní cely

3) Nestability vedoucí ke generaci plazmových vln, které vytvářící oscilující elektrické pole a ExB drifty



Bohmova difúze je přirozeným škálováním pro ztráty způsobené *E*x*B* driftem, kde tok částic je vyjádřen následovně

$$\Gamma_\perp = nv_\perp \propto nE/B$$

a elektrické pole je odhadováno

$$E_{\max} \approx \frac{\phi_{\max}}{R} \approx \frac{KT_e}{eR}$$

a tok částic je pak

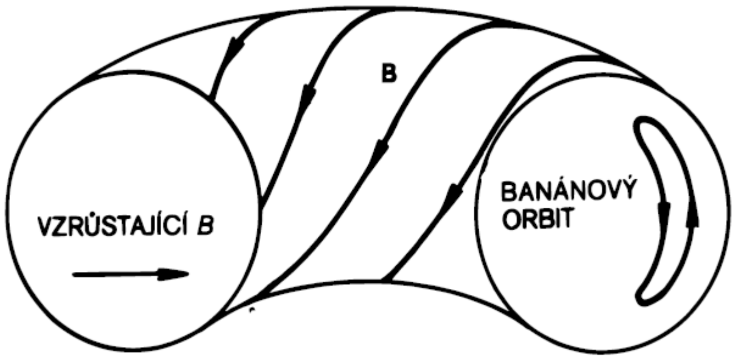
$$\Gamma_\perp \approx \gamma \frac{n}{R}\frac{KT_e}{eB} \approx -\gamma \frac{KT_e}{eB}\nabla n = -D_{\mathrm{B}}\nabla n$$

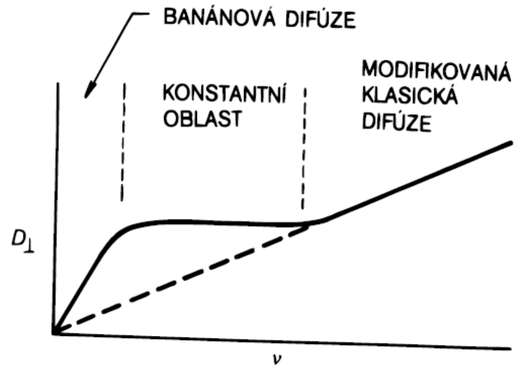
Pečlivou konfigurací pole lze difúzi snížit a přiblížit se ke klasickému srážkovému limitu.

Obrázek ilustruje výstižnost Bohmovy formula na souhrnu naměřených dob udržení plazmatu v různých typech výboje na Stelerátorech Model C.

Chen píše, že se v magnetickém udržení podařilo dosáhnout až 10^3-krát menších hodot než je hodnota Bohmovy difúze.

V toroidálních magnetických nádobách může být difúze zvýšena v důsledku existence protáhlých uzavřených orbitů („banánový orbit“) a mluvíme o **neoklasické difúzi**.





Srovnání hodnot koeficientů Bohmovy a klasické difúze

Parametry plazmatu: $T = 100$ eV, $B = 1$ T, $Z = 1$, $n_e = n_i = 10^{19}$ m^{-3}, uvažjujeme $\ln\Lambda_{ei} = 10$

$$D_\mathrm{B} = \frac{1}{16}\frac{(10^2)(1.6\times10^{-19})}{(1.6\times10^{-19})(1)} = 6.25\mathrm{m}^2/\,\mathrm{s}$$

Elektron-iontová srážková frekvence

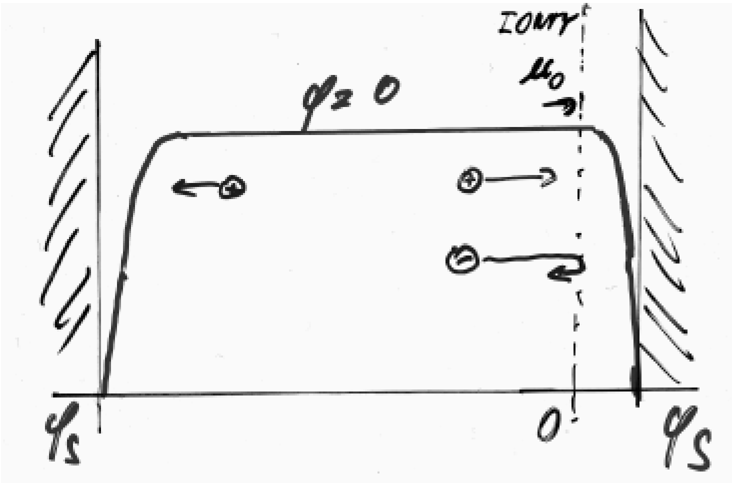
$$\nu_{ei} = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{2\pi}\,q_e^2\,q_i^2\,n_i}{\sqrt{m_e}\,(4\pi\varepsilon_0)^2\,(k_BT_e)^{3/2}}\ln\Lambda_{ei} \qquad \nu_{ei} = 2.91\times10^5\ \mathrm{s}^-1 \quad \omega_c = 1.76\times10^{11}\ \mathrm{s}^-1 \quad \omega_c\tau = \omega_c/\nu_{ei} = 6.05\times10^5$$

Klasický difúzní koeficient je ~10^4-krát menší než koeficient Bohmovy difúze

$$D_\perp = \frac{m_e\,k_BT_e\,\nu_{ei}}{q_e^2\,B^2} = 3.31\times10^{-4}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$$

Oblasti bez kvazineutrality

Stěnová vrstva



rekombinace na stěnách

Σ toku náboje na stěny = 0

Ionty – předpokládejme studené s rychlostí u_0 pro $\varphi = 0$

$$u = \sqrt{{u_0}^2 - \frac{2e\varphi}{m_i}} \qquad \Big| \; \varphi < 0$$

$$n_i(x) = \frac{n_0 u_0}{u(x)} = \frac{n_0}{\sqrt{1 - \frac{2e\varphi}{m_i {u_0}^2}}}$$

Elektrony – v rovnováze s polem

$$n_e(x) = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right)$$

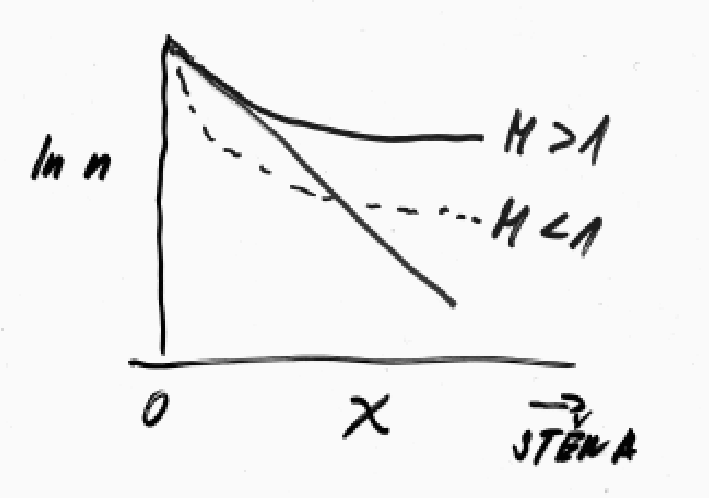
Poissonova rovnice
$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}=\frac{e}{\varepsilon_0}\left(n_e-n_i\right)=\frac{en_0}{\varepsilon_0}\left[\exp\left(\frac{e\varphi}{k_BT_e}\right)-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2e\varphi}{m_iu_0^2}}}\right]$$

převedeme do bezrozměrných souřadnic

$$\chi=-\frac{e\varphi}{k_BT_e}\qquad \xi=\frac{x}{\lambda_D}\qquad M=\frac{u_0}{\sqrt{k_BT_e/m_i}}=\frac{u_0}{c_s}$$

$$\chi''=\left(1+\frac{2\chi}{M^2}\right)^{-1/2}-e^{-\chi}$$ rovnici $\times\chi'$ a pak integrujeme $\int_0^{\xi}$

$$\frac{1}{2}\left(\chi'^2-\chi_0'^2\right)=M^2\left[\left(1+\frac{2\chi}{M^2}\right)^{1/2}-1\right]+e^{-\chi}-1$$ v bodě 0 je $E\approx 0$ a tedy $\chi_0'\approx 0$



Stěnová vrstva odpuzuje elektrony a přitahuje ionty

$\Rightarrow \quad n_i > n_e$

Okolí roviny, kde plazma vstupuje do stěnové vrstvy, odvodíme z Taylorova rozvoje pro $\chi \approx 0$ členy úměrné 1 a χ se vyruší, první nenulové $\sim \chi^2$

$$\frac{1}{2}\chi'^2 \approx \frac{1}{2}\chi^2\left(-\frac{1}{M^2}+1\right) > 0$$

lze jen pro M > 1

Bohmovo kritérium – stacionární řešení existuje jen pro $u_0 > c_s$

Jak zjistit potenciál stěny φ_s?

$$\frac{1}{2}\mathrm{v}_{T_e} \cdot n_0 \exp\left(\frac{e\varphi_s}{k_B T_e}\right) \approx n_0 u_0 \qquad \varphi_s \approx \frac{k_B T_e}{e}\ln\frac{2u_0}{\mathrm{v}_{T_e}}$$

V okolí stěny $\quad n_e << n_i,\ 2\chi >> M^2 \quad \Rightarrow \quad \chi'' = \left(1+\frac{2\chi}{M^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{M}{\sqrt{2\chi}}$

po integraci (z označuje místo, kde lze už předpokládat $n_e \approx 0$)

$$\frac{1}{2}\left(\chi'^2 - \chi_z'^2\right) = \sqrt{2}M\left(\chi^{1/2} - \chi_z^{1/2}\right)$$

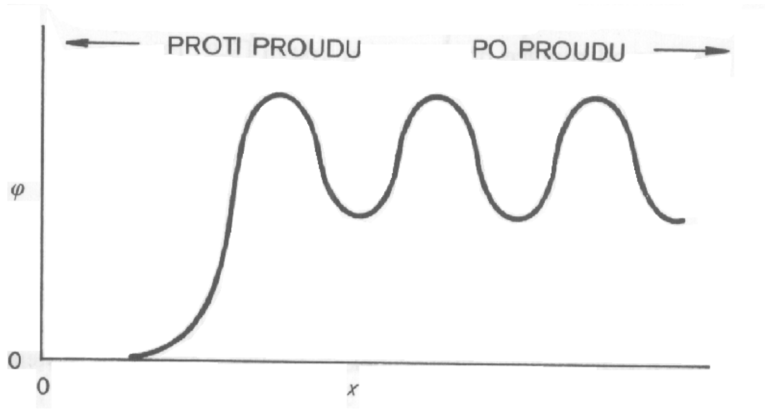
za předpokladu $\chi_z \approx 0$, $\chi_z' \approx 0$ $\qquad \chi' = 2^{3/4} M^{1/2} \chi^{1/4}$

poloha stěny je $\xi_s = \xi_z + \xi_d$ (ξ_d je tloušťka vrstvy $n_e \approx 0$)

pak platí vztah $M = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}\dfrac{\chi_s^{3/2}}{\xi_d^{\,2}}$ $\quad \Rightarrow \quad$ $J = en_0u_0 = \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{2e}{m_i}\right)^{1/2} \dfrac{\varepsilon_0 \left|\varphi_s\right|^{3/2}}{d^2}$

Child-Langmuirův zákon

Podobnou stěnovou vrstvou je i



bezesrážková ionto-akustická rázová vlna
(collisionless shock)

Sagděevův potenciál