Hledání extrémů funkcí

1 Úvod

Kapitola je rozdělena na následující části

1. Extrémy funkce jedné proměnné
2. Extrémy funkce více proměnných
3. Kombinatorická minimalizace
4. Úloha lineárního programování

1.1 Přesnost hledání extrémů

Obecně nelze extrémy hledat s tak vysokou přesností jako třeba řešení rovnic.

Příčinu ukážeme na příkladu minima funkce jedné proměnné. V okolí minima lze danou funkci dobře aproximovat Taylorovým rozvojem

$$f(x) = f(x_m) + 0 + \frac{1}{2} f''(x_m)(x - x_m)^2 + \dots \quad .$$

Relativní vzdálenost bodu x od skutečného minima x_m je

$$\frac{|x - x_m|}{|x_m|} = \sqrt{\frac{|f(x) - f(x_m)|}{|f(x_m)|}} \sqrt{\frac{2}{x_m^2} \frac{|f(x_m)|}{|f''(x_m)|}} \quad .$$

Jestliže je funkce f stanovena s relativní přesností ε, pak odchylka nalezeného x od skutečného minima x_m je $\varepsilon_x \sim \sqrt{\varepsilon}$. Pokud lze považovat

$$\frac{2}{x_m^2} \left| \frac{f(x_m)}{f''(x_m)} \right| \approx 1 \quad ,$$

je při jednoduché přesnosti chyba určení extrému $\varepsilon_x \approx 3.5 \times 10^{-4}$ a při dvojnásobné přesnosti je to $\varepsilon_x \approx 1.5 \times 10^{-8}$.

2 Hledání extrémů funkce jedné proměnné

V 1 proměnné polohu minima nejdříve ohraničíme, a pak budeme hledat buď bez použití nebo s použitím derivace.

Pozn. Pokud nebude řečeno jinak, budeme hledat minimum.

Ohraničení extrému – Pro ohraničení extrému musíme znát hodnoty funkce ve 3 bodech.
Nechť

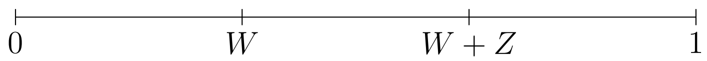
$$a < b < c \qquad \wedge \qquad f(a) > f(b) < f(c) \quad ,$$

pak $\exists$ minimum funkce $\in (a, b)$.

2.1 Metoda zlatého řezu

K ohraničení minima jsou potřebné 3 body $a < b < c$, ke zúžení intervalu ohraničujícího kořen potřebujeme 4. bod x. Označme

$$W = \frac{b-a}{c-a} \quad , \qquad Z = \frac{x-b}{c-a}$$



Obrázek 1: Rozdělení intervalu při hledání extrému metodou zlatého řezu

Pokud $f(x) \geq f(c)$, minimum $\in (a, x)$ o délce $W + Z$ z původního, při $f(x) \leq f(c)$ minimum $\in (b, c)$ o délce $1 - W$ z původního. Chceme zužovat interval rovnoměrně, tedy $W+Z = 1-W$. Dále chceme, aby zužování intervalu mohlo dále rovnoměrně pokračovat, tedy chceme, aby bod Z dělil interval $(W, 1)$ stejně jako bod W dělil interval $(0, 1)$

$$\frac{Z}{1-W} = W \qquad \Rightarrow \qquad W = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.38197 \quad .$$

Toto číslo se nazývá **zlatý řez**. Platí, že chyba ε_{i+1} určení minima v $i + 1$ iteraci je

$$\varepsilon_{i+1} = (1 - W) \cdot \varepsilon_i \quad .$$

Jde tedy o lineární metodu.

2.2 Parabolická interpolace

Předpokládejme, že minimum je ohraničené $a < b < c$ a $f(a) > f(b) < f(c)$. Označme $\delta x = x - b$, pak v okolí b lze psát $f(x) \approx \alpha(\delta x)^2 + \beta(\delta x) + \gamma$. V minimu je nulová derivace

$$0 = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \approx \alpha(\delta x) + \beta \quad \Rightarrow \quad \delta x = -\frac{\beta}{2\alpha} \quad .$$

Nyní odvodíme hodnoty α, β pomocí interpolace Lagrangeovým kvadratickým polynomem. Definujeme-li $X = x - b$, $A = a - b$ a $C = c - b$, lze zapsat

$$f(x) \approx \frac{X(X-C)}{A(A-C)} f(A) + \frac{X(X-A)}{C(C-A)} f(C) + \frac{(x-A)(x-C)}{AC} f(B) \quad .$$

Potom jsou α a β dány vztahy

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{-A(f(B) - f(C)) + C(f(B) - f(A))}{AC(C-A)} \\
\beta &= \frac{A^2(f(B) - f(C)) - C^2(f(C) - f(A))}{AC(C-A)} \quad .
\end{aligned}$$

Odhadem minima je tedy x dané vztahem

$$x = b - \frac{1}{2} \frac{(b-a)^2[f(b) - f(c)] - (b-c)^2[f(b) - f(a)]}{(b-a)[f(b) - f(c)] - (b-c)[f(b) - f(a)]} \quad .$$

Tato metoda, pokud není doplněna sledováním ohraničení minima, může selhat - nemusí konvergovat nebo může nalézt maximum místo minima.

Je to kvadratická metoda $\rightarrow$ může být neefektivní daleko od minima $\Rightarrow$ **přepínání** mezi parabolickou interpolací a metodou zlatého řezu.

Pozn. Autorem algoritmu přepínání R. P. Brent. Nutné je sofistikované uchovávání mezivýsledků (bookkeeping).

2.3 Hledání extrémů funkce jedné proměnné s užitím derivace

Existují metody vysokých řádů, ovšem urychlení může přinášet problémy. Často se používá se kombinace metody půlení intervalů a reguly falsi pro derivaci od R. P. Brenta.

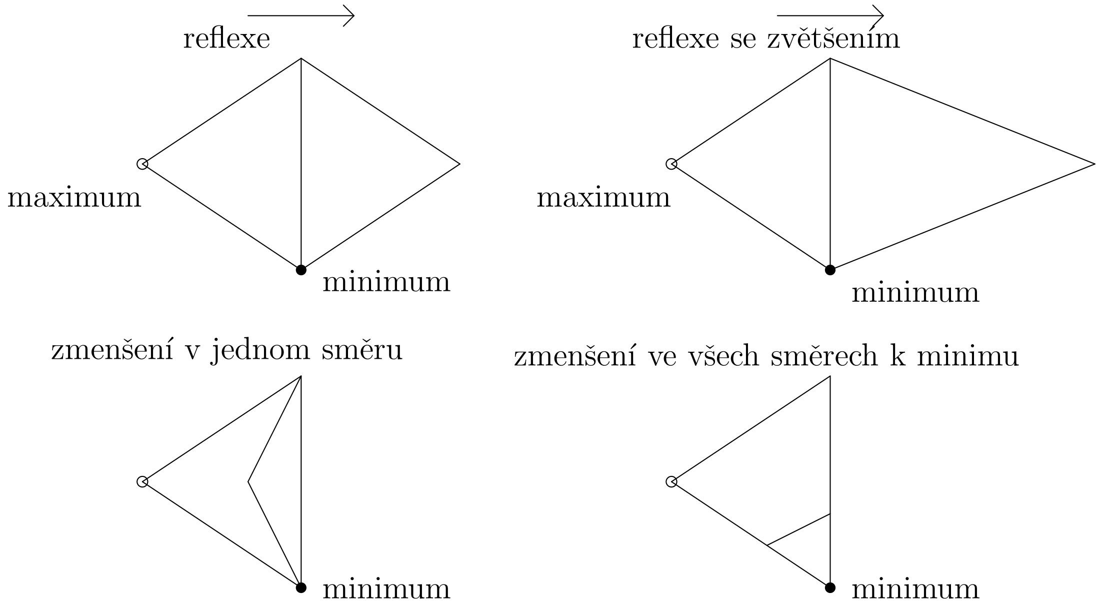
3 Hledání extrémů funkce více proměnných

<u>*Pozn.*</u> Hledání extrému funkce $f(\vec{x})$ nepřevádíme na řešení systému rovnic $\partial f/\partial x_i = 0$, pokud nevznikne systém lineárních rovnic. Úloha hledání extrému je totiž jednodušší, máme zde strategii sledování úbytku (růstu) funkce $f(\vec{x})$.

3.1 Simplexová metoda (amoeba)

Simplexová metoda[1] využívá $(N+1)$-simplex v N-dimenzionálním prostoru. $(N+1)$-simplex je tvořen $N+1$ body P_0, ..., P_N. Vektory $\vec{p_i} = \vec{P_i} - \vec{P_0}$ $i = 1, \ldots, N$ tvoří bázi N-dimenzionálního vektorového prostoru.

V simplexové metodě se simplex posunuje tak, aby ohraničil minimum a pak se zmenšuje, dokud není minimum známo s dostatečnou přesností.



Obrázek 2: Transformace simplexu v simplexové metodě

3.2 Metoda konjugovaných směrů

Minimum bychom mohli hledat tak, že bychom je opakovaně hledali postupně v N pevných směrech, tvořících bázi prostoru (např. ve směrech standardní báze). Tento postup může být neefektivní. V případě dlouhých úzkých údolí vede k posloupnosti velmi malých kroků a tedy k velmi pomalé konvergenci k

[1]Neplést se simplexovou metodou u lineární optimalizace.

minimu.

$\rightarrow$ Potřeba lepší volby směrů. Chceme volit následující směr tak, abychom neporušili minimum v předchozím $\Rightarrow$ **konjugované směry**
Pro kvadratickou formu pak získáme minimum po N krocích.

Funkci $f(\vec{x})$ lze v okolí bodu $\vec{P}$ rozvinout do Taylorovy řady ($\vec{\delta x} = \vec{x} - \vec{P}$)

$$f(\vec{x}) = f(\vec{P}) + \underbrace{\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{\vec{P}}}_{-\vec{b}} \delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{\vec{P}}}_{\mathbf{A}_{ij}} \delta x_i \delta x_j + \ldots$$

Zde $-\vec{b}$ je gradient v bodě $\vec{P}$ a $\mathbf{A}_{ij}$ jsou prvky Hessovy matice.
Zachováme-li pouze členy do 2. řádu, pak pro gradient funkce $f(x)$ platí

$$\nabla f(x) = \mathbf{A}\vec{\delta x} - \vec{b} \qquad \text{a} \qquad \delta(\nabla f) = \mathbf{A}(\vec{\delta x}) \ .$$

Když minimalizace ve směru $\vec{v}$ nemá poškodit minimum ve směru $\vec{u}$, musí platit

$$\vec{u}^T \delta(\nabla f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}^T \mathbf{A} \vec{v} = 0$$

Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ určují **konjugované směry**.

Následující metodu konjugovaných směrů navrhl roku 1964 Powell. V prvním kroku volíme směry $\vec{u}_i = \vec{e}_i$, kde $i = 1, \ldots, N$. Jako další směr volíme $\vec{p}_N = \vec{P}_N - \vec{P}_0$, tedy směr ke kterému vedlo N minimalizací ve směru. Z původní báze směrů 1. směr vynecháme.

Tato metoda je kvadraticky konvergentní, pro kvadratickou formu minimalizace ve směru $\vec{p}_N$ najde minimum.

Navržená metoda může ovšem vést ke vzniku lineární závislosti souboru N vektorů směrů minimalizace.
Jsou následující možnosti odstranění tohoto problému

1. Reinstalujeme směry $\vec{u}_i$ po každém N i $N+1$ iteracích.
2. Brentova metoda - dokalkuluje směry sofistikovanými postupy,
3. Vynecháme směr, kde došlo k maximálnímu poklesu. Ten dal maximální příspěvek k $P_N - P_0$ $\Rightarrow$ lineární nezávislost směrů se zachovává, metoda ale ztrácí kvadratickou konvergenci.

3.3 Metoda konjugovaných gradientů

Gradient je směr největšího poklesu, proto pokud můžeme počítat parciální derivace, minimalizací ve směru gradientu ušetříme N kroků. Najdeme-li v daném směru minimum, je další gradient kolmý k původnímu.

Metoda největšího spádu může mít tedy podobný nedostatek jako metoda pevných směrů $\rightarrow$ velké množství malých kroků pro úzká dlouhá údolí. $\Rightarrow$ potřeba lepší volby směrů – **konjugované gradienty**

Pozn. Metoda využívá 1. parciálních derivací funkce $f(\vec{x})$, nepoužívá ale 2. parciální derivace.

Funkci vyjádříme ve tvaru

$$f(\vec{x}) \approx c - \vec{b}^T \delta\vec{x} + \frac{1}{2}\delta\vec{x}^T \mathbf{A}\delta\vec{x}$$

Najdeme-li P_{i+1} minimalizací ve směru $-\nabla f(P_i)$, pak je $\nabla f(P_{i+1}) \perp \nabla f(P_i)$. Chceme směr $\vec{u}_{i+1}$ takový, že $\vec{u}_i \mathbf{A} \vec{u}_{i+1} = 0$.

Nechť $\mathbf{A}$ je symetrická a pozitivně definitní v okolí minima. Nechť $\vec{g}_i$, $\vec{h}_i$ jsou posloupnosti vektorů takové, že

$$\vec{g}_{i+1} = \vec{g}_i - \lambda_i \mathbf{A}\vec{h}_i \qquad \text{a} \qquad \vec{h}_{i+1} = \vec{g}_{i+1} + \gamma_i \vec{h}_i \quad ,$$

kde

$$\lambda_i = \frac{\vec{g}_i \vec{g}_i}{\vec{g}_i \mathbf{A}\vec{h}_i} \qquad \text{a} \qquad \gamma_i = -\frac{\vec{g}_{i+1}\mathbf{A}\vec{h}_i}{\vec{h}_i \mathbf{A}\vec{h}_i} \quad .$$

Pak platí

$$\vec{g}_i \vec{g}_j = 0 \qquad \text{a} \qquad \vec{h}_i \mathbf{A}\vec{h}_j = 0 \quad .$$

Pro kvadratickou formu lze γ_i a λ_i spočítat i bez znalosti Hessovy matice $\mathbf{A}$ následovně

$$\gamma_i = \underbrace{\frac{\vec{g}_{i+1}\vec{g}_{i+1}}{\vec{g}_i \vec{g}_i}}_{\text{Fletcher−Reevesova metoda}} = \underbrace{\frac{(\vec{g}_{i+1} - \vec{g}_i)\vec{g}_{i+1}}{\vec{g}_i \vec{g}_i}}_{\text{Polak−Ribierova metoda}} \quad , \qquad \lambda_i = \frac{\vec{g}_i \vec{h}_i}{\vec{h}_i \mathbf{A}\vec{h}_i}$$

Pro kvadratickou formu není rozdíl mezi oběma způsoby stanovení γ_i, obecně je většinou výhodnější Polak-Ribierova metoda.

Při hledání minima budou vektory $\vec{g}_i = -\nabla f(P_i)$ označovat směr největšího spádu a vektory $\vec{h}_i$ směry hledání minima ve směru - bodu P_i.

Postup hledání minima metodou konjugovaných gradientů:

1. Počáteční odhad je P_0, $\vec{g}_0 = -\nabla f(P_0)$ a $\vec{h}_0 = \vec{g}_0$.
2. Minimalizací ve směru $\vec{h}_0$ získáme P_1.
3. Známe P_1 a vypočteme $\vec{g}_1 = -\nabla f(P_1)$.
4. Vypočteme

   $$\gamma_0 = \frac{\vec{g}_1\vec{g}_1}{\vec{g}_0\vec{g}_0} \qquad \text{nebo} \qquad \gamma_0 = \frac{(\vec{g}_1 - \vec{g}_0)\,\vec{g}_1}{\vec{g}_0\vec{g}_0}$$

   První způsob výpočtu γ_0 je Fletcher–Reevesova metoda, druhý je Polak–Ribierova metoda.
5. Vypočteme

   $$\vec{h}_1 = \vec{g}_1 + \gamma_0\vec{h}_0$$

6. Minimalizací ve směru $\vec{h}_1$ získáme bod P_2.
7. Opakujeme 3,4,5,6, dokud není minimum nalezeno s dostatečnou přesností.

<u>*Pozn.*</u> Z metod, které využívají gradient a nepočítají 2. parciální derivace, se často používají metody "proměnné metriky"(BFGS – Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno nebo DFP – Davidon-Fletcher-Powell). Tyto metody jsou založeny na postupné aproximaci inverzní Hessovy matice.

3.4 Gauss–Newtonova metoda

Metoda využívá 2. parciálních derivací, proto je vhodná tam, kde je umíme snadno spočítat.

Označíme $\delta x_i = x_i - P_i$. Nahradíme funkci $f(\vec{x})$ v okolí bodu $\vec{P}$ jejím Taylorovým rozvojem

$$f(\vec{x}) = f(\vec{P}) + \sum_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\vec{P}} \delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{ij} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\vec{P}} \delta x_i \delta x_j + \ldots$$

Ponecháme jen členy do 2. řádu včetně a gradient funkce $f(\vec{x})$ vypočteme

$$\left(\nabla f|_{\vec{P}}\right)_i \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\vec{P}} + \underbrace{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\vec{P}}}_{\mathbf{A}} \delta x_j$$

V minimu jsou $\forall$ 1. parciální derivace nulové a odtud dostáváme pro $\vec{\delta x}$ systém lineárních rovnic

$$\mathbf{A}\vec{\delta x} = -\nabla f|_{\vec{P}}$$

Je to kvadratická metoda, která může mít problémy daleko od minima.

3.5 Levenberg–Marquardtova metoda

Využívá opět explicitní výpočet Hessovy matice. Jde o kombinaci Gauss–Newtonovy metody s metodou největšího spádu tak, aby byly eliminovány možné problémy Gauss-Newtonovy metody daleko od extrému.

Pro Gauss–Newtonovu metodu platí

$$\mathbf{A}\vec{\delta x} = -\nabla f|_{\vec{x}^{(k)}}$$

V Levenberg–Marquardtově metodě nahradíme matici $\mathbf{A}$ maticí $\mathbf{A}'$

$$\mathbf{A}' = \begin{cases} a'_{jj} = a_{jj}(1+\lambda) & \\ a'_{ij} = a_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

Pokud $\lambda \to 0$ dostáváme Gauss–Newtonovu metodu a pro $\lambda \to \infty$ dostáváme malý krok ve směru spádu. Postup vypadá takto:

1. Stanovíme vektor $\vec{x}^{(0)}$ a hodnotu $f(\vec{x}^{(0)})$.
2. Udáme hodnotu λ, například $\lambda = 0.001$, pro $k = 0$.
3. Spočteme $\delta\vec{x}$ pomocí vztahu $\mathbf{A}'\delta\vec{x} = -\nabla f|_{\vec{x}^{(k)}}$.
4. Vypočteme hodnotu $\vec{x}_p = \vec{x}^{(k)} + \delta\vec{x}$ a hodnotu funkce $f(\vec{x}_p)$.
5. (a) Pokud $f(\vec{x}_p) \geq f(\vec{x}^{(k)})$ – krok zamítneme $\to$ $\lambda := 10\lambda$.
   (b) je $f(\vec{x}_p) < f(\vec{x}^{(k)})$ – krok přijmeme $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}_p$ a $\lambda := 0.1\lambda$ a $k := k+1$. Dále cyklus opakujeme od třetího kroku.

Levenberg–Marquardtova metoda se často užívá u nelineární regrese. Zde minimalizujeme $\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{N}[y_i - y(x_i,\vec{a})]^2/\sigma_i^2$ vzhledem k $\vec{a}$. Pak

$$\frac{\partial^2\chi^2}{\partial a_k\,\partial a_l} = 2\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}\left[\frac{\partial y(x_i,\vec{a})}{\partial a_k}\frac{\partial y(x_i,\vec{a})}{\partial a_l} - (y_i - y(x_i,\vec{a}))\,\frac{\partial^2 y}{\partial a_k \partial a_l}\right]$$

Část sumy, kde se vyskytují druhé parciální derivace y, lze zanedbat, pro řešení stačí vypočítat matici $\mathbf{A}$ přibližně. Dokonce je to lepší z hlediska numerické stability.

4 Kombinatorická minimalizace

Cílem je nalézt globální minimum ve velké diskrétní množině, kde může být mnoho lokálních minim.

Příkladem uvedeného typu úlohy je **úloha obchodního cestujícího**.
Cílem je najít nejkratší cestu, kterou cestující projede všechny uzly a vrátí se zpět do výchozího bodu. Možností je sice konečný počet, ale příliš mnoho na to, abychom je všechny vyzkoušeli. Např. pro 20 mezilehlých uzlů máme $\frac{N!}{2} = \frac{20!}{2} \approx 10^{18}$ možností.

Používá se Metropolisův algoritmus (simulované žíhání). Postup má následující kroky:

1. Popis možných konfigurací.

2. Generátor náhodných změn konfigurace.

3. Hledáme minimum funkce $E \equiv L = \sum_{i=0}^{N+1} \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2} + \lambda(\mu_i - \mu_{i+1})^2$ (poslední člen je například pokuta za překročení hranice - pokud $\lambda > 0$ chceme omezit překračování hranice, $\lambda < 0$ výhodné pro pašeráka).

4. Rychlost ochlazování. Na počátku provádíme i změny konfigurací, při nichž E poněkud vzroste, abychom se dostali z okolí lokálních minim. Změnu konfigurace provedeme, pokud $\Delta E < T_n > 0$ a pro $n \to \infty$ snižujeme $T_n \to 0$.

Elementární změny konfigurací pro úlohu obchodního cestujícího:

1. Při **reversi** z původního pořadí $i-1, i, i+1, \ldots, j-1, j, j+1$ překlopíme úsek $i \ldots j$ a dostaneme $i-1, j, j-1, \ldots, i+1, i, j+1$.

2. Při **transportu** přesuneme z původní posloupnosti $i-1, i, i+1, \ldots, j-1, j, j+1, \ldots, k-1, k, k+1, \ldots$ úsek $j+1 \ldots k$ před i a dostaneme $i-1, j+1, \ldots, k-1, k, i, i+1, \ldots, j-1, j, k+1$

5 Lineární programování (simplexová metoda)

Hledáme maximum účinkové funkce $z = a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \ldots + a_{0N}x_N$. Máme zadaných N primárních podmínek $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, …, $x_N \geq 0$ a M dodatečných podmínek, z toho m_1 podmínek 1.druhu ($<$), m_2 podmínek 2.druhu ($>$) a m_3 podmínek 3.druhu ($=$), $M = m_1 + m_2 + m_3$.

Dodatečné podmínky jsou zadány následovně:

$$
\begin{array}{rcl}
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{iN}x_N \leq b_i & \geq & 0 \qquad i = 1, \ldots, m_1 \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{iN}x_N \geq b_j & \geq & 0 \qquad j = m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2 \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kN}x_N = b_k & \geq & 0 \qquad k = m_1 + m_2 + 1, \ldots, M
\end{array}
$$

Z množiny **možných vektorů** (vyhovujících $\forall$ podmínkám) vybíráme **optimální možný vektor**.

Úloha nemusí mít řešení

1. Nemusí existovat žádný možný vektor.
2. Nebo $\neg\exists$ maximum z, účinek z roste v nějakém směru, ve kterém je množina možných vektorů otevřena (do ∞).

Množina možných vektorů je simplex v $N - m_3$-rozměrném prostoru. Množinu vrcholů simplexu nazýváme **vertex**.

Věta Jestliže existuje optimální možný vektor, pak existuje vrchol simplexu, který je optimální.

Pozn. Pokud počet primárních podmínek N je větší než počet dodatečných podmínek M, pak každý vrchol simplexu má alespoň $N - M$ souřadnic $= 0$. Počet vrcholů – prvků vertexu V je

$$
\binom{M+N}{N} = \binom{M+N}{M} \quad .
$$

Normální forma úlohy lineárního programování nemá žádné podmínky s nerovností, tedy $m_1 = m_2 = 0$.
Omezená normální forma má dodatečné podmínky tvaru $x_i = \tilde{b}_i + \tilde{a}_{ij}x_j \geq 0$, přičemž x_i je jen v jediné podmínce (levostranná proměnná).

5.1 Řešení omezené normální formy - příklad

Hledáme maximum účinkové funkce z, úloha je zadána následovně

$$z = 2x_2 - 4x_3$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$
$$x_1 = 2 - 6x_2 + x_3$$
$$x_4 = 8 + 3x_2 - 4x_3$$

Nyní sestavíme proměnné do tabulky, x_1, x_4 jsou levostranné proměnné a x_2, x_3 pravostranné.

		x_2	x_3
z	0	2	-4
x_1	2	-6	1
x_4	8	3	-4

Kdyby z mělo všechny koeficienty u pravostranných proměnných menší nebo rovné nule, byla by úloha již vyřešená. Kladné koeficienty u pravostranných proměnných v z je třeba odstranit. Vybereme tu pravostrannou proměnnou (sloupec), která má u z maximální kladný koeficient. Pro tuto proměnnou vybereme hlavní prvek - podmínku (řádek), která maximálně omezuje rozsah proměnné a z této podmínky proměnnou vyjádříme, zde

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{x_1}{6} + \frac{x_3}{6} \quad .$$

Potom tedy máme tabulku:

		x_1	x_3
z	$2/3$	$-1/3$	$-11/3$
x_2	$1/3$	$-1/6$	$1/6$
x_4	9	$-1/2$	$-7/2$

Maximum z je tedy při $x_1 = x_3 = 0$, $z_m = 2/3$, $x_2 = 1/3$ a $x_4 = 9$.

Algoritmus řešení lze tedy shrnout

1. Najdeme hlavní sloupec a hlavní element.
2. Uschováme hlavní sloupec.
3. U řádků mimo hlavního vytvoříme takovou kombinaci s hlavním řádkem, aby v hlavním sloupci vznikla nula.
4. Dělíme hlavní řádek $(-1)*$ hlavní element.
5. Zaměníme hlavní element za jeho převrácenou hodnotu.
6. Zbytek členů hlavního sloupce vždy vydělíme hodnotou hlavního elementu.

5.2 Převedení obecné formy na omezenou normální

Převedení ukážeme na příkladu

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \\ x_1 + 2x_3 &\leq 740 && (1) \\ 2x_2 - 7x_4 &\leq 0 && (2) \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 &\geq 8 && (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 9 && (4) \end{aligned}$$

Zavedeme pomocné proměnné $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$ a tak podmínky s nerovnostmi převedeme na rovnosti

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + y_1 &= 740 && (1) \\ 2x_2 - 7x_4 + y_2 &= 0 && (2) \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 - y_3 &= 8 && (3) \end{aligned}$$

a dále nám zůstává

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \qquad (4)$$

První a druhá rovnice jsou v omezené normální formě, pro třetí a čtvrtou zavedeme pomocné proměnné z_3, z_4

$$\begin{aligned} z_3 &= 8 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + y_3 = 0 \\ z_4 &= 9 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{aligned}$$

Protože z_3, z_4 jsou nulové, zavedeme dodatečnou účinkovou funkci
$z' = -z_3 - z_4$, která má maximum pro $z_3 = z_4 = 0$.

Sestavíme tabulku pro normální formu

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_3
z	0	1	1	3	$-1/2$	0
y_1	740	-1	0	-2	0	0
y_2	0	0	-2	0	7	0
z_3	8	0	-3	1	-2	1
z_4	9	-1	-1	-1	-1	0
z'	-17	1	4	0	3	-1

Vybereme hlavní element ze sloupce x_2, na třetím řádku je $x_{2m} = 8/3$, na čtvrtém $x_{2m} = 9$, ale na druhém $x_{2m} = 0$. Z druhého řádku máme $x_2 = -1/2\, y_2 + 7/2\, x_4$. Kdybychom vzali hlavní prvek ze 3. řádku, bylo by po úpravě na 2. řádku $y_2 = -16/3 + 2z_3/3 - 2x_3/3 + 25x_4/3 - 2y_3/3$. To je ovšem chybně, konstanta nesmí být záporná ($-16/3$). Po úpravě má tabulka tvar

		x_1	y_2	x_3	x_4	y_3
z	0	1	$-1/2$	3	3	0
y_1	740	-1	0	-2	0	0
x_2	0	0	$-1/2$	0	$7/2$	0
z_3	8	0	$3/2$	1	$-25/2$	1
z_4	9	-1	$1/2$	-1	$-9/2$	0
z'	-17	1	-2	0	17	-1

Hlavní sloupec je pod x_4, hlavní element ($-25/2$) je v řádku u z_3, odtud vyjádříme

$$x_4 = \frac{16}{25} + \frac{3}{25}\, y_2 + \frac{2}{25}\, x_3 - \frac{2}{25}\, z_3 + \frac{2}{25}\, y_3$$

a dostaneme tabulku

		x_1	y_2	x_3	z_3	y_3
z	$48/25$	1	$-7/50$	$81/25$	$-6/25$	$6/25$
y_1	740	-1	0	-2	0	0
x_2	$56/25$	0	$-2/25$	$7/25$	$-7/25$	$7/25$
x_4	$16/25$	0	$3/25$	$2/25$	$-2/25$	$2/25$
z_4	$153/25$	-1	$-1/25$	$-34/25$	$9/25$	$-9/25$
z'	$-153/25$	1	$1/25$	$34/25$	$-34/25$	$9/25$

Nyní ze sloupce x_3 z řádku u z_4 dostaneme

$$x_3 = \frac{9}{2} - \frac{25}{34}x_1 - \frac{1}{34}y_2 - \frac{25}{34}z_4 + \frac{9}{34}z_3 - \frac{9}{34}y_3$$

a nová tabulka má tvar

		x_1	y_2	z_4	z_3	y_3
z	$33/2$	-1.38235	-0.23529	-2.38235	0.61765	-0.61765
y_1	731	0.47059	0.05882	1.47059	-0.52941	0.52941
x_2	$7/2$	-0.20588	-0.08824	-0.20588	-0.20588	0.20588
x_4	1	-0.05882	0.11765	-0.05882	-0.05882	0.05882
x_3	$9/2$	-0.73529	-0.02941	-0.73529	0.26471	-0.26471
z'	0	0	0	-1	-1	0

Jakmile dostaneme všechna z_i na pravou stranu, můžeme je vynechat, pomocná účinková funkce z' je maximalizována a vynecháme ji. Úloha je převedena na omezenou normální formu.
V našem případě jsou už u $\forall$ skutečných pravostranných proměnných (x_1, y_2, y_3) koeficienty u účinkové funkce z záporné a úloha je tedy vyřešena

$$\begin{aligned} x_1 = y_2 = y_3 = 0 \quad , \qquad x_2 &= \frac{7}{2} = 3.5 \ , \\ x_3 = \frac{9}{2} = 4.5 \quad , \qquad x_4 &= 1 \\ z_{max} = \frac{33}{2} = 16.5 \quad , \qquad y_1 &= 731 \ . \end{aligned}$$

Degenerovaný možný vektor – stejně velké omezení ve více řádcích $\rightarrow$ více možných hlavních prvků. Potom se při výběru rozhodujeme podle dalších sloupců.